

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Goran Mihajlović

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Andrej Jokić, dipl. ing.

Student:

Goran Mihajlović

Zagreb, 2025.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Andreju Jokiću na korisnim savjetima, povjerenju i strpljenju tijekom izrade ovog završnog rada. Također, zahvaljujem Pietru Kristoviću, mag. ing. mech. na pomoći prilikom izrade i provedbe upravljačkog algoritma.

Zahvalu upućujem i svojim roditeljima bez čije potpore ne bih bio tu gdje jesam, a posebnu zahvalu želim uputiti svojoj sestri Vanesi kao glavnom uzoru i osobi koja me uvijek razumije.

Za kraj, želim zahvaliti djevojci Niki na podršci i pravim riječima u ključnim trenucima, te svim kolegama i prijateljima.

Goran Mihajlović



ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Goran Mihajlović**

JMBAG: **0035245254**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Sinteza regulatora temeljena na podacima s primjenom na elektromehanički sustav kolica na klackalici**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Data-based controller synthesis with an application on seesaw-cart electromechanical system**

Opis zadatka:

Sinteza regulatora za dinamičke sustave tipično se temelji na poznavanju modela dinamike sustava. Do ovakvog modela tipično se dolazi direktnim modeliranjem sustava koristeći fizikalne zakone ili identifikacijom modela sustava na temelju snimljenih podataka (trajektorija) o ponašanju sustava. Posljednjih godina vrlo intenzivno se istražuje i direktan pristup sintezi regulatora u kojem se iz podataka (snimljenih ulaza u sustav te pripadajućih trajektorija sustava) izravno dizajnira regulator. U ovakvom pristupu se dakle u potpunosti izbjegava korištenje modela, što ima određene prednosti kao npr. nije potrebno uz model sustava kvantificirati i nesigurnosti vezane uz model da bi se osigurala robusnost kod sinteze regulatora.

U ovom radu potrebno je napraviti sljedeće:

- Predstaviti pregled literature na temu sinteze regulatora direktno na podacima.
- Izvesti i predstaviti matematički model dinamike elektromehaničkog sustava kolica na klackalici. Radi se o nelinearnom nestabilnom elektromehaničkom sustavu koji se nalazi u laboratoriju Katedre za strojarску automatiku.
- Iz literature odabrati prikladnu metodu za upravljanje koja se temelji direktno na podacima te sintetizirati stabilizirajući regulator za promatrani elektromehanički sustav. Podatke za sintezu generirati simulacijama na nelinearnom sustavu.
- Prikladno predstaviti rezultate simulacija ponašanje zatvorenog kruga na nelinearnom i na lineariziranom modelu.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

25.4.2025.

Datum predaje rada:

2. rok: 10. i 11. 7. 2025.

3. rok: 18. i 19. 9. 2025.

Predviđeni datumi obrane:

2. rok: 15. 7. – 18.7.2025

3. rok: 22. 9. – 26. 9. 2025.

Zadatak zadao:

prof. dr. sc. Andrej Jokić

Predsjednik Povjerenstva:

izv. prof. dr. sc. Petar Čurković

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	II
POPIS TABLICA.....	III
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY	VIII
1. UVOD	1
1.1. Pregled literature	1
1.2. Struktura rada	2
2. UPRAVLJANJE TEMELJENO NA PODATCIMA.....	3
2.1. Informativnost podataka.....	3
2.1.1. Informativnost za identifikaciju	4
2.2. Linearne matrične nejednadžbe.....	5
2.2.1. Stabilnost sustava u obliku linearnih matričnih nejednadžbi	6
2.2.2. Matrična S-lema	7
3. IZVOD MATEMATIČKOG MODELA SUSTAVA	8
3.1. Mehanički podsustav	9
3.2. Električni podsustav	12
3.3. Prostor stanja	14
3.4. Linearizacija sustava u ravnotežnom položaju.....	15
3.5. Vremenska diskretizacija nelinearnog modela.....	16
3.6. Diskretizacija lineariziranog prostora stanja	17
4. SINTEZA REGULATORA	18
4.1. Generiranje podataka.....	18
4.2. Sinteza regulatora	21
5. REZULTATI SIMULACIJA	22
6. ZAKLJUČAK	27
LITERATURA.....	28
PRILOZI.....	30

POPIS SLIKA

Slika 1 Direktni i indirektni pristup.....	3
Slika 2 Informativnost podataka	4
Slika 3 Neinformativnost podataka	4
Slika 4 Sustav klackalice i kolica	8
Slika 5 Shematski prikaz sustava	9
Slika 6 Shema s poopćenim koordinatama	10
Slika 7 Nadomjesna shema elektromotora	12
Slika 8 Reduktor (6), zupčanik (2) i zupčasta letva (3).....	13
Slika 9 Položaj i brzina kolica.....	19
Slika 10 Kut i kutna brzina klackalice	20
Slika 11 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga blizu ravnotežne točke	22
Slika 12 Svojstvene vrijednosti zatvorenog regulacijskog kruga.....	23
Slika 13 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga daleko od ravnotežne točke	24
Slika 14 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga s pomakom kolica i zakretom klackalice	24
Slika 15 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga uz proizvoljne početne uvjete	25
Slika 16 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga s poremećajem	26

POPIS TABLICA

Tablica 1 Parametri sustava.....	18
----------------------------------	----

POPIS OZNAKA

Oznaka	Opis	Jedinica
A_d	Matrica koeficijena vremenski diskretiziranog sustava	
A	Matrica koeficijena sustava	
α	Skalarni parametar	
$\tilde{B}$	Matrica ulaza poremećaja u sustav	
B_d	Matrica ulaza vremenski diskretiziranog sustava	
B	Matrica ulaza	
C_d	Matrica izlaza vremenski diskretiziranog sustava	
c	Konstanta viskoznog trenja	N m s rad ⁻¹
C	Matrica izlaza	
D_d	Matrica direktnog preslikavanja ulaza na izlaz vremenski diskretiziranog sustava	
D	Matrica direktnog preslikavanja ulaza na izlaz	
$\mathcal{D}$	Skup generiranih podataka	
$E_{K,klackalice}$	Kinetička energija klackalice	J
$E_{K,kolica}$	Kinetička energija kolica	J
$E_{P,klackalice}$	Potencijalna energija klackalice	J
$E_{P,kolica}$	Potencijalna energija kolica	J
f_D	Disipacijska funkcija	
F_p	Poopćena sila koja djeluje na kolica	N
g	Ubrzanje sile teže	m s ⁻²
h_K	Udaljenost težišta kolica od osi rotacije	m
h_T	Udaljenost težišta klackalice od osi rotacije	m
i	Struja armature	A
I	Jedinična matrica	
J	Dinamički moment inercije klackalice	kg m ²
k_E	Konstanta elektromotorne sile	V s rad ⁻¹
k_E	Konstanta momenta elektromotora	N m A ⁻¹
K	Položaj težišta kolica	
K	Statički regulator	
L	Lagrangeova funkcija	

M_m	Moment elektromotora	N m
$\mathcal{M}$	Klasa modela	
M	Masa klackalice	kg
m	Masa kolica	kg
m	Dimenzija ulaza u sustav	
n	Red sustava	
ω_m	Kutna brzina elektromotora	rad s ⁻¹
p_o	Prijenosni omjer reduktora	
p	Pomak kolica	m
$\mathcal{P}$	Svojstvo sustava	
Φ	Model poremećaja	
φ	Kut zakreta klackalice	rad
$\mathbb{R}$	Skup realnih brojeva	
R	Armaturni otpor	Ω
r	Radijus zupčanika u zahvatu sa zupčastom letvom	m
$\Sigma_{\mathcal{D}}$	Skup sustava konzistentnih s podacima	
$\Sigma_{\mathcal{P}}$	Skup sustava koji imaju svojstvo $\mathcal{P}$	
$\mathcal{S}$	Nepoznat sustav	
$\mathbb{S}$	Skup simetričnih matrica	
T_s	Vrijeme diskretizacije	s
τ_{φ}	Moment u zglobu klackalice	N m
T	Položaj težišta klackalice	
$\mathbf{U}_-$	Matrica podataka ulaza u sustav	
u	Vektor ulaznih varijabli	
u	Napon na elektromotoru	V
v_K	Brzina kolica	m s ⁻¹
$\mathbf{W}_-$	Matrica podataka poremećaja u sustav	
$\widetilde{\mathbf{W}}_-$	Matrica podataka poremećaja u sustav s konkretnim numeričkim vrijednostima	
$\mathbf{X}_-, \mathbf{X}_+$	Matrice podataka stanja sustava	
x	Vektor varijabli stanja	
y	Vektor izlaznih varijabli	
$\lambda_{\max}(\cdot)$	Najveća svojstvena vrijednost	

$\text{rang}(\cdot)$	Rang matrice
$(\cdot)^T$	Transponirana matrica
$(\cdot)^{-1}$	Inverz matrice
$(\cdot)^\dagger$	Pseudoinverz matrice
$(\cdot)^\sharp$	Bilo koji desni inverz matrice
$(\cdot) \succ 0$	Pozitivno definitna matrica
$(\cdot) \prec 0$	Negativno definitna matrica

SAŽETAK

U ovom radu je obrađena sinteza stabilizirajućeg regulatora temeljenog na podacima za elektromehanički sustav kolica na klackalici, koji je razvijen u laboratoriju za automatiku Fakulteta strojarstva i brodogradnje. Podatci trajektorija sustava, potrebni za sintezu, generirani su simulacijom ponašanja sustava s pomoću matematičkog modela sustava. Cilj je bio sintetizirati statičku povratnu vezu po varijablama stanja sustava, koristeći ulazno – izlazne podatke. Podatci su generirani višekratnim simulacijama nelinearnog modela uz različite početne uvjete i nasumične ulaze, koji moraju zadovoljavati određeno svojstvo. Regulator je dobiven rješavanjem linearne matrične nejednadžbe koja predstavlja nužne i dovoljne uvjete koje regulator mora zadovoljavati da bi stabilizirao skup svih linearnih koji su konzistentni sa snimljenim podacima. Valjanost pristupa potvrđena je simulacijom zatvorenog regulacijskog kruga nelinearnog i lineariziranog modela sustava.

Ključne riječi: upravljanje temeljeno na podacima, informativnost, matematičko modeliranje, linearne matrične nejednadžbe,

SUMMARY

Thesis addresses the data-driven synthesis of stabilizing controller for an electromechanical seesaw-cart system developed in the laboratory of the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture. We derive a nonlinear mathematical model of the considered system, which is used to generate the data required for the sythesis. The main goal was to synthesize a static state-feedback control law directly from input – state data. The data were generated by multiple simulations of the nonlinear model under different initial conditions and random inputs that satisfy certain properties. The controller was obtained by solving a linear matrix inequality, which represents necessary and sufficient condition for a controller to stabilize a set of linear systems consistent with the recorded data. The validity of the approach was confirmed through closed-loop simulations of both the nonlinear and the linearized model.

Key words: data-driven control, informativity, mathematical modelling, linear matrix inequalities

1. UVOD

Teorija upravljanja disciplina je u kojoj je jedan od ključnih ciljeva razvoj algoritma koji osigurava željeno ponašanje kompleksnih tehničkih sustava u radnom okruženju. Ovo može uključivati stabiliziranje i ubrzavanje odziva, smanjenje postotnog prebačaja, osiguravanje statičke točnosti te ostale značajke koje se za određenu primjenu smatraju poželjnim. Klasičan pristup teoriji upravljanja temelji se na matematičkom modelu sustava koji je tipično dobiven postavljanjem fizikalnih zakona s pomoću kojih se zatim dolazi do diferencijalnih jednadžbi koje opisuju dinamiku sustava. Poznavanjem dinamičkog modela sustava, omogućen je odabir neke od poznatih metoda za određivanje parametara upravljačkog uređaja, odnosno za sintezu regulatora. Razvoj tehnologije i napredak u inženjerskim sferama uzrokovali su stvaranje sve kompleksnijih sustava koje nije jednostavno opisati sustavima diferencijalnih jednadžbi, a taj je problem adresiran kroz moderni pristup teoriji upravljanja temeljen na podacima, što je i tema ovog rada [1]. U okviru ovog rada razmotrit će se elektromehanički sustav kolica na klackalici koji se nalazi na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u sklopu laboratorija Katedre za strojarsku automatiku te će se za taj sustav provesti sinteza regulatora temeljena na podacima.

1.1. Pregled literature

Unatoč relativno malom vremenu na velikoj sceni teorije upravljanja, upravljanje temeljeno na podacima zaintrigiralo je mnoge stručnjake i ponukalo ih na istraživanje u tom području. O uspješnosti njihovog rada te o rastu u popularnosti govore mnogi recentni radovi. Gotovo su svi utemeljeni na teorijskoj podlozi koju je prvi postavio Jan C. Willems, odnosno njegovoj fundamentalnoj lemi [2]. Ta lema omogućuje prikladno parametriziranje svih trajektorija linearnih sustava s pomoću podataka, te je stoga našla primjenu u različitim granama. Sažet i pregledan uvod u područje daju članci u IEEE Control Systems časopisu [1], [3], dok novoobjavljena knjiga [4] sustavno obrađuje povijesni razvoj, informativnost podataka, sintezu regulatora i sve ostale povezane teme. Prvi radovi na temu izravnog pristupa upravljanju temeljenom na podacima obuhvaćaju proporcionalno-integralno-derivacijsko (PID) upravljanje [5], izravno adaptivno upravljanje [6] te iterativno ugađanje povratne veze (IFT) [7]. Kasniji doprinosi, na primjer [8], usmjereni su prema izravnom projektiranju optimalnog regulatora, a u [9] su prezentirane metode za sintezu stabilizirajućeg regulatora s pomoću linearnih matričnih nejednadžbi (eng. Linear Matrix Inequalities - LMIs). U [10] je pristup proširen te su izvedene metode za kvadratnu stabilizaciju te H_2 i H_∞ upravljanje koje su

utemeljene na podacima o stanju i ulazu sa šumom i matricnoj S-lemi. Prediktivno upravljanje također je predmet interesa, a pregled doprinosa može se pronaći u [11]. Osim same sinteze, unutar istog okvira istraživani su i problemi analize sustava, poput stabilnosti [12], upravljivosti i osmotrivosti [13], te disipativnosti [14]. Informativnost podataka izdvojila se kao središnji koncept jer određuje kada su prikupljeni podatci dostatni za rješavanje pojedinog zadatka upravljanja, o čemu detaljnije govori [15]. Primjenu teorije na sustavu inverznog njihala pokazuju autori [16]. Snimanjem trajektorija, procjenom poremećaja i primjenom linearnih matricnih nejednadžbi uspješno postižu stabilizaciju prirodno nestabilnog sustava. Jedan pristup sintezi statičkog regulatora za disipativnost zatvorenog regulacijskog kruga i H_∞ upravljanje prezentiran je u članku [17]. Radi usporedbe s modelskim pristupom korisno je pogledati i rezultate za prošireni sustav s dodatnim klackalicama i kolicima u [18], iako taj rad nije temeljen na podacima. Za širu podlogu u konveksnoj optimizaciji i linearnim matricnim nejednadžbama preporučamo pogledati [19] i [20].

1.2. Struktura rada

Rad je podijeljen u šest poglavlja koja su strukturirana prema redoslijedu rješavanja problema. U ovom, prvom poglavlju dan je uvod u temu, pregled literature te je opisana struktura rada. U drugom poglavlju objasniti će se osnovna ideja upravljanja temeljenog na podacima, a definirati i objasniti će se glavni pojmovi i definirati matematička podloga koja će biti potrebna za sintezu.

U trećem poglavlju detaljno će se opisati proces izvoda matematičkog modela sustava. Koristeći fizikalne zakone izvedene su spregnute jednadžbe mehaničkog i električnog podsustava. Provest će se linearizacija i prikaz u obliku prostora stanja, a također će se sustav prikazati u diskretnoj vremenskoj domeni.

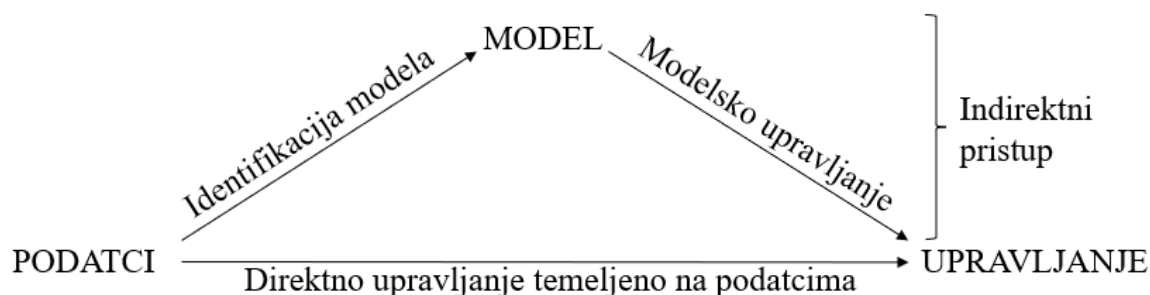
Četvrto poglavlje posvećeno je samoj sintezi regulatora temeljenoj na podacima. Prvo će se objasniti kako se generiraju podatci potrebni za sintezu, a zatim će se prikazati način kojim se dolazi do izraza kojeg je potrebno riješiti kako bi se odredio upravljački član.

U petom će se poglavlju iznijeti rezultati sinteze kroz simulacije zatvorenog kruga s raznim ulaznim parametrima, a također prikazat će se i odziv reguliranog sustava na vanjske poremećaje.

U šestom, ujedno i zadnjem poglavlju, obuhvatit će se cijeli rad te dati svojevrsni zaključak i potencijalna poboljšanja rada.

2. UPRAVLJANJE TEMELJENO NA PODATCIMA

Upravljanju temeljenom na podacima, gdje pritom mislimo na podatke trajektorija sustava (ulaza, izlaza, stanja), može se pristupiti iz dva smjera koji su shematski prikazani na Slika 1. Prvi, indirektni pristup, podrazumijeva uporabu podataka za identifikaciju matematičkog modela sustava, nakon čega slijedi sinteza regulatora korištenjem klasičnih metoda. Ovaj pristup omogućuje korištenje već razvijenih i teorijski dobro utemeljenih alata, ali može biti osjetljiv na kvalitetu identificiranog modela. Ukoliko model nije dovoljno točan zbog šuma u podacima ili ne sadrži dovoljno informacija o sustavu, utoliko će regulator dobiven tim pristupom imati ograničene performanse. Drugi, direktni pristup, zaobilazi eksplicitno određivanje, to jest identifikaciju, modela, već se regulator sintetizira izravno iz izmjerenih podataka. Ovaj je pristup posebno koristan u regulaciji sustava sa složenom dinamikom ili u uvjetima velike zašumljenosti podataka [4]. Ova se metoda u velikom broju slučajeva temelji na linearnim matričnim nejednadžbama zasnovanim na podacima koji moraju biti informativni na određeni način. Rješavanjem postavljenih LMI-jeva dolazi se do zakona upravljanja za neki sustav.

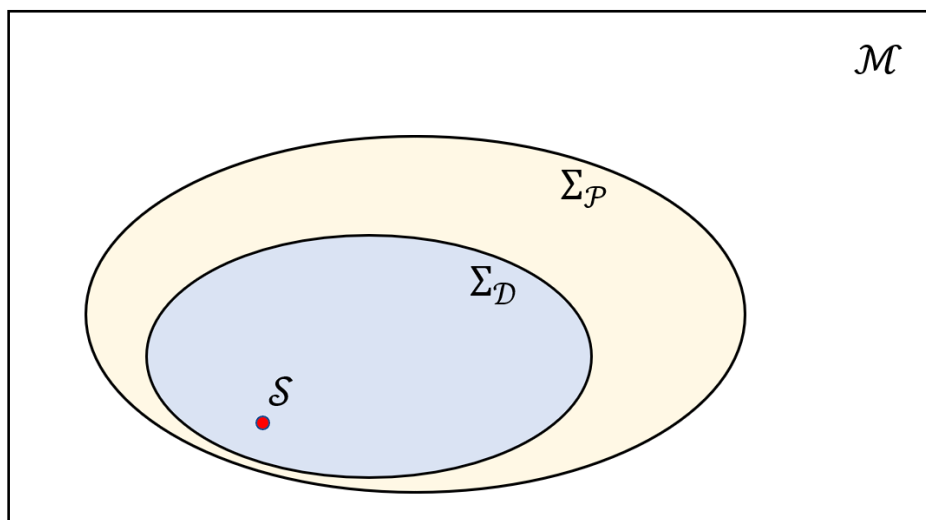


Slika 1 Direktni i indirektni pristup

2.1. Informativnost podataka

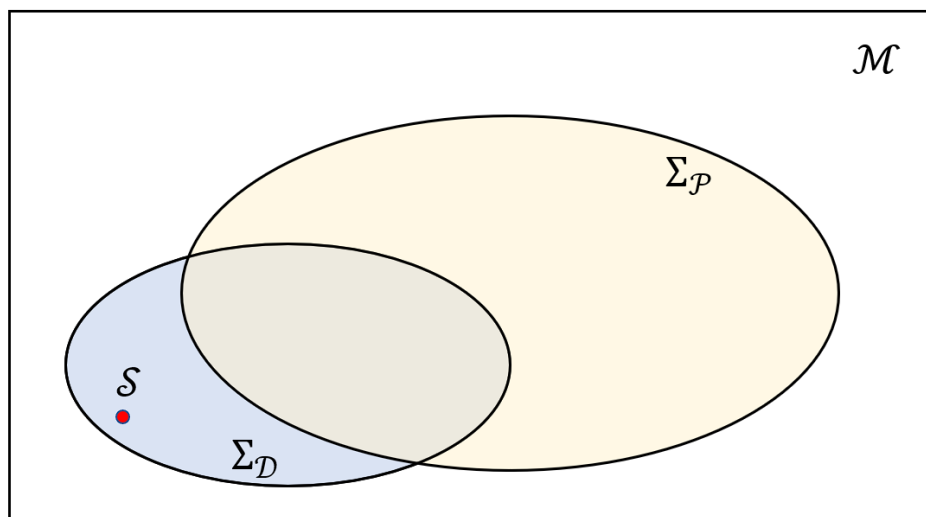
Pojam informativnosti podataka potječe iz područja identifikacije sustava, gdje označava uvjet nad podacima pod kojim je moguće razlikovati različite modele. U direktnom upravljanju temeljenom na podacima, nije nužno razlikovati modele, već je pojam informativnosti vezan za proizvoljno svojstvo sustava. Odnosno, potrebno je da su podatci informativni za odabrano svojstvo zatvorenog regulacijskog kruga. Neka je $\mathcal{S}$ nepoznat sustav. Od interesa je oblikovanje upravljačkog zakona na temelju podataka $\mathcal{D}$ kako bi zatvoreni regulacijski krug imao neko odabrano svojstvo $\mathcal{P}$, pri čemu je $\mathcal{D}$ skup podataka koji je generiran sustavom $\mathcal{S}$. Također, definirana je i klasa modela $\mathcal{M}$ koja označava skup sustava za koji pretpostavljamo da sadrži sustav $\mathcal{S}$. Oznakom $\Sigma_{\mathcal{D}}$, pri čemu vrijedi $\Sigma_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{M}$, označen je skup svih sustava koji su

konzistentni s podacima. Drugim riječima, to su svi sustavi koji su mogli generirati podatke $\mathcal{D}$. Skup $\Sigma_{\mathcal{P}}$ skup je svih sustava unutar $\mathcal{M}$ koji imaju svojstvo $\mathcal{P}$. Sustav $\mathcal{S}$ će imati svojstvo $\mathcal{P}$ ako svi sustavi konzistentni s podacima $\mathcal{D}$ imaju svojstvo $\mathcal{P}$ pa kažemo da su podatci $\mathcal{D}$ informativni za svojstvo $\mathcal{P}$ ako vrijedi $\Sigma_{\mathcal{D}} \subseteq \Sigma_{\mathcal{P}}$. Grafički prikaz ovih relacija prikazan je na Slika 2.



Slika 2 Informativnost podataka

Na Slika 3 prikazana je situacija u kojoj podatci $\mathcal{D}$ nisu informativni za svojstvo $\mathcal{P}$ jer ne vrijedi $\Sigma_{\mathcal{D}} \subseteq \Sigma_{\mathcal{P}}$. Ipak, sustav $\mathcal{S}$ može biti u presjeku skupova $\Sigma_{\mathcal{D}}$ i $\Sigma_{\mathcal{P}}$, ali to nije moguće jednoznačno odrediti samo na temelju podataka $\mathcal{D}$ [3].



Slika 3 Neinformativnost podataka

2.1.1. Informativnost za identifikaciju

U ovom dijelu predstaviti će se uvjet koji mora vrijediti za generirane podatke kako bi se na temelju njih mogao odrediti skup sustava koji želimo analizirati i kojim želimo upravljati.

Identifikacija sustava nije tema ovog rada, ali istinitost uvjeta informativnosti je pretpostavka u teoremu stabilnosti, koji će se koristiti prilikom direktnog pristupa sintezi. Pretpostavljamo da su podatci dobiveni mjerenjima na realnom sustavu točni, to jest da nisu kompromitirani nikakvim šumom. Promotrimo linearni vremenski nepromjenjiv (eng. Linear Time Invariant – LTI) sustav u diskretnom obliku:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

gdje je x stanje sustava dimenzije n , a u ulaz u sustav dimenzije m . Matrice A i B su nepoznate. Nadalje, pretpostavljamo da podatke prikupljamo iz stvarnog sustava u skupu vremenskih trenutaka $0, 1, \dots, T$ te se oni mogu prikazati u obliku matrica na sljedeći način:

$$\begin{aligned} U_- &:= [u(0) \ u(1) \ \dots \ u(T-1)], \\ X_- &:= [x(0) \ x(1) \ \dots \ x(T-1)], \\ X_+ &:= [x(1) \ x(2) \ \dots \ x(T)]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Generirani podatci bit će informativni za identifikaciju ako i samo ako je zadovoljen uvjet punog retčanog ranga:

$$\text{rang} \begin{bmatrix} X_- \\ U_- \end{bmatrix} = n + m \quad (2.3)$$

Ukoliko je zadovoljen uvjet u 2.3 model sustava može se odrediti, to jest matrice A i B mogu se izračunati s pomoću sljedećeg izraza:

$$[A \ B] = X_+ \begin{bmatrix} X_- \\ U_- \end{bmatrix}^{\#}, \quad (2.4)$$

gdje je znak $\#$ označava bilo koji desni inverz matrice.

2.2. Linearne matrične nejednadžbe

Linearne matrične nejednadžbe predstavljaju oblik matematičkih uvjeta koji se vrlo često koriste u optimizaciji i teoriji upravljanja. Glavna prednost im je što pripadaju klasi konveksnih optimizacijskih problema što povlači činjenicu da sva moguća rješenja koja zadovoljavaju LMI tvore konveksni skup. Konveksni optimizacijski problemi imaju svojstvo da je lokalni minimum, ujedno i globalni minimum, što olakšava njihovo rješavanje primjenom standardnih numeričkih metoda.

Definicija 1 (Konveksni skup [19]) Pretpostavimo da su $x_1 \neq x_2$ dvije točke u skupu $\mathbb{R}^n$. Točke oblika:

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

tvore liniju koja prolazi točkama x_1 i x_2 . U slučaju $\theta = 0$, $y = x_2$, a u slučaju kada je $\theta = 1$, vrijedi $y = x_1$. Skup $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ je konveksan ako vrijedi:

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in \mathcal{C} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}, 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.6)$$

To jest ako linija koja prolazi kroz dvije točke iz skupa $\mathcal{C}$ leži u skupu $\mathcal{C}$.

Definicija 2 (Linearna matrična nejednadžba [20], [21]) Linearna matrična nejednadžba je izraz koji ima sljedeći oblik:

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n < 0 \quad (2.7)$$

gdje je $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektor rješenja, a simetrične matrice $F_0, \dots, F_n$ su poznate. Znak nejednakosti < 0 u izrazu 2.3 označava negativnu definitnost funkcije $F(x)$ to jest vrijedi $u^T F(x) u < 0$ za sve $u \neq 0$. Nejednakost 2.7 je zadovoljena za neki x ako su sve svojstvene vrijednosti $F(x)$ negativne za taj x .

2.2.1. Stabilnost sustava u obliku linearnih matričnih nejednadžbi

S ciljem boljeg razumijevanja promotrit ćemo uvjet stabilnosti sustava zapisan u obliku LMI-jeva. Poznato je da je diskretni LTI sustav eksponencijalno stabilan ako i samo ako postoji simetrična matrica $\mathbf{P}$ tako da vrijedi:

$$\mathbf{P} > 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} < 0. \quad (2.8)$$

Dvije nejednakosti u izrazu 2.4 mogu se ekvivalentno zapisati u obliku linearne matrične nejednadžbe dane u nastavku:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.9)$$

Općenito se skup linearnih matričnih nejednadžbi $\mathbf{F}^{(1)}(x) > 0, \dots, \mathbf{F}^{(p)}(x) > 0$ može zapisati kao jedna nejednadžba na sljedeći način [21]

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(1)}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{F}^{(2)}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{F}^{(p)}(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.10)$$

2.2.2. Matrična S-lema

Prvi put dokazana od strane ruskog matematičara Vladimira A. Yakubovicha, standardna (vektorska) S-lema klasičan je alat u teoriji upravljanja i optimizaciji. Glavna ideja je transformirati izraz koji mora vrijediti za neki skup vrijednosti varijabli (koji je definiran drugim izrazom), na način da dobijemo ekvivalentan uvjet koji ne sadrži navedene varijable. Promotrit ćemo matrični oblik S-leme sa striktnim nejednakostima na kojem se temelji teorem o stabilnosti koji će kasnije biti upotrijebljen pri određivanju izraza za sintezu regulatora.

Neka su $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{(k+n) \times (k+n)}$ simetrične matrice s particijom $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

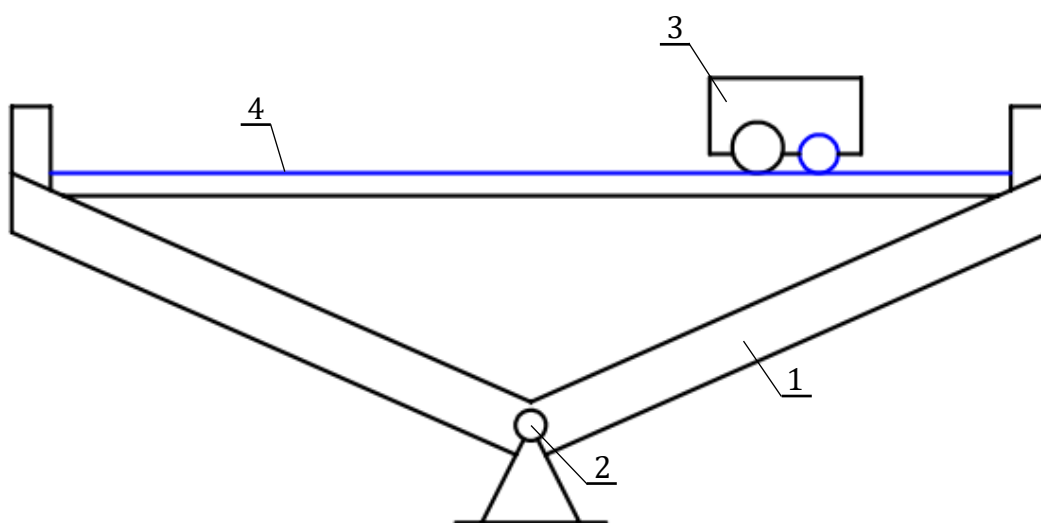
i neka je skup S_K definiran kao $S_N := \left\{ \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{N \times n} \mid \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}^T \end{bmatrix}^T \mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}^T \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}$.

Pretpostavimo da vrijede nejednakosti $\mathbf{K}_{22} < 0$ i $\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T \succcurlyeq 0$.

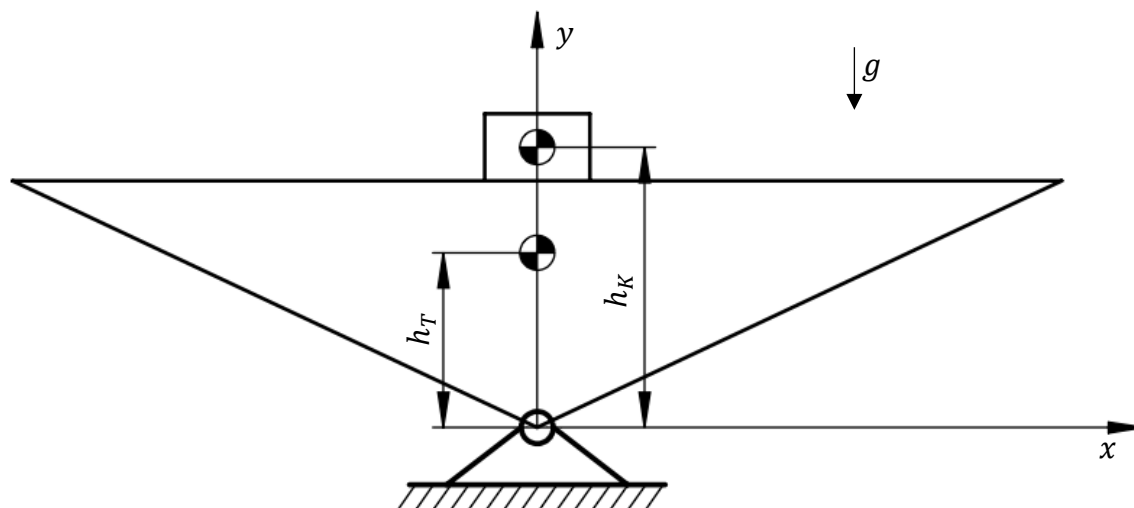
Tada vrijedi $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}^T \end{bmatrix}^T \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}^T \end{bmatrix} > 0$, $\forall \mathbf{Z} \in S_K$ ako i samo ako postoji realan $\alpha \geq 0$ takav da vrijedi $\mathbf{M} - \alpha \mathbf{K} > 0$ [22].

3. IZVOD MATEMATIČKOG MODELA SUSTAVA

Matematički model sustava predstavlja sustav diferencijalnih jednačbi kojima je moguće opisati dinamiku i ponašanje nekog realnog sustava. Slika 4 prikazuje sustav jednostavnog njihala s kolicima. U ovom radu, njihalo se odnosi na tijelo označeno brojem 1 na slici. Sastavljeno je od kruto povezanih dijelova u strukturu nalik na klackalicu koja se može slobodno rotirati oko osi označene brojem 2. Brojem 3 označena su kolica koja se gibaju po gornjoj strani klackalice. Gibanje kolica ostvareno je zupčanikom koji se nalazi na kolicima i pogonjen je istosmjernim motorom te zupčastom letvom koja je pričvršćena na gornju stranu klackalice. Zupčanik na kolicima i zupčasta letva na klackalici označeni su plavom bojom na Slika 4. Uz pretpostavku da su svi elementi idealno kruti to jest da nema deformacija prilikom gibanja, dinamika sustava može se opisati s dvije diferencijalne jednačbe drugog reda do kojih će se doći korištenjem Euler-Lagrangeovog pristupa. Također, uvest će se i pretpostavke da je sustav ravninski te da se nalazi u vertikalnoj ravnini. Trenje u zglobu oko kojeg klackalica rotira može se modelirati kao viskozno, dok će se trenje između zupčanika i zupčaste letve zanemariti. Uz sve uvedene pretpostavke sustav je moguće prikazati shematski što je prikazano na Slika 5. U radovima [23] i [24] izveden je matematički model istog sustava.



Slika 4 Sustav klackalice i kolica



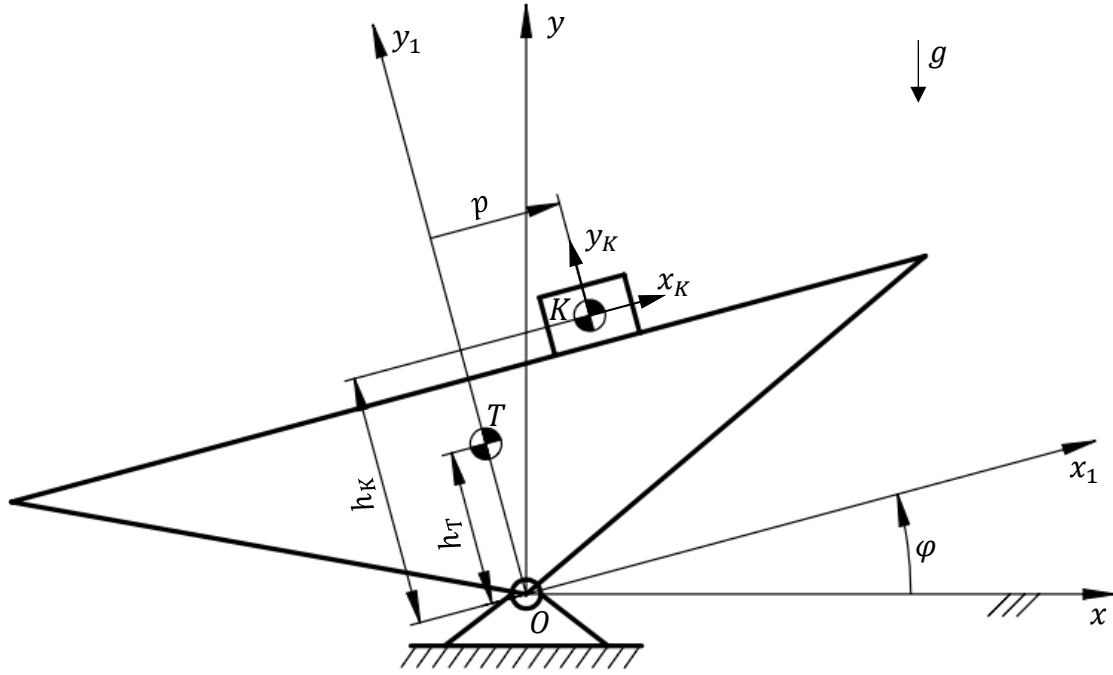
Slika 5 Shematski prikaz sustava

3.1. Mehanički podsustav

Izvod jednađžbi gibanja provest će se s pomoću Euler-Lagrangeove metode koja je bez izvoda dana u izrazu 3.1. Izvod jednađžbe može se pronaći u [25].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.1)$$

Lagrangeovoj funkciji pridružena je oznaka L , a ona predstavlja razliku ukupne kinetičke i ukupne potencijalne energije sustava. q_i označava i -tu poopćenu koordinatu, a Q_i i -tu poopćenu silu ili moment. Za poopćene koordinate u ovom izvodu uzet će se pomak kolica, označen s p i zakret klackalice označen s φ . Lagrangeova funkcija mora biti zapisana u ovisnosti o poopćenim koordinatama. Slika 6 prikazuje shematski prikaz sustava u neravnotežnom položaju te su na njoj naznačene poopćene koordinate. Taj prikaz poslužit će za određivanje kinetičke i potencijalne energije sustava to jest Lagrangeove funkcije. Oznakama K i T označeni su centri masa kolica i klackalice. S pomoću koordinata tih točaka u nepomičnom koordinatnom sustavu $O_{x,y}$ izračunat ćemo potrebne energije.



Slika 6 Shema s poopćenim koordinatama

Potencijalnu energiju klackalice može se jednostavno izračunati ako se referentna visina na kojoj je potencijalna energija jednaka nuli postavi u $y = 0$ i ona tada glasi:

$$E_{P,klackalica} = Mgh_T \cos \varphi \quad (3.2)$$

Pri čemu je M masa klackalice, g ubrzanje sile teže, a h_T udaljenost točke T od ishodišta koordinatnog sustava. Kinetička energija klackalice dobiva se primjenom formule za kinetičku energiju rotacijskog tijela, a dana je u jednadžbi 3.3.

$$E_{K,klackalica} = \frac{1}{2} J \dot{\varphi} \quad (3.3)$$

Položaj točke K , odnosno položaj koordinatnog sustava koji je određen osima x_K , y_K može se odrediti korištenjem matrica transformacija, što je prikazano u jednadžbi 3.4. Prva matrica označava rotaciju za kut φ oko z osi nepomičnog desnokretnog koordinatnog sustava, druga i treća matrica jesu matrice translacija, prvo za duljinu h_K u smjeru novonastale y osi, a zatim za p u smjeru novonastale x osi.

$$K = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h_K \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$K = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & p \cdot \cos \varphi - h_K \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & p \cdot \sin \varphi + h_K \cdot \cos \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pozicija, to jest x i y koordinate zapisane su u trećem stupcu konačne matrice i jednake su:

$$\begin{aligned}x_K &= p \cdot \cos\varphi - h_K \cdot \sin\varphi \\y_K &= p \cdot \sin\varphi + h_K \cdot \cos\varphi\end{aligned}\quad (3.5)$$

Potencijalna se energija kolica sada može zapisati kao:

$$E_{P,kolica} = mgy_K = mg(p \cdot \sin\varphi + h_K \cdot \cos\varphi) \quad (3.6)$$

gdje je m masa kolica, a h_K udaljenost točke K od točke O . Izračun kinetičke energije nešto je kompliciraniji jer je potrebno brzinu kolica izraziti u nepomičnom koordinatnom sustavu. Prvo se izračunaju komponente brzine u smjerovima glavnih osi, što su derivacije pozicije kolica, a zatim se s pomoću njih može izračunati ukupna brzina kolica. Postupak je dan u jednadžbi 3.7.

$$v_K^2 = v_{Kx}^2 + v_{Ky}^2 = \dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2 = \dot{p}^2 + p^2\dot{\varphi}^2 + h_K^2\dot{\varphi}^2 - 2h_K\dot{p}\dot{\varphi} \quad (3.7)$$

Konačan izraz za kinetičku energiju kolica izraženu u poopcenim koordinatama prikazan je u sljedećoj jednadžbi:

$$E_{K,kolica} = \frac{1}{2}mv_K^2 = \frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + p^2\dot{\varphi}^2 + h_K^2\dot{\varphi}^2 - 2h_K\dot{p}\dot{\varphi}) \quad (3.8)$$

Ukupna kinetička i potencijalna energija jesu zbroj kinetičkih i potencijalnih energija kolica i klackalice, a prikazane su u izrazu 3.9 i 3.10.

$$E_K = \frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + p^2\dot{\varphi}^2 + h_K^2\dot{\varphi}^2 - 2h_K\dot{p}\dot{\varphi}) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \quad (3.9)$$

$$E_P = mg(p \cdot \sin\varphi + h_K \cdot \cos\varphi) + Mgh_T\cos\varphi \quad (3.10)$$

Lagrangeova funkcija je sada razlika E_K i E_P

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + p^2\dot{\varphi}^2 + h_K^2\dot{\varphi}^2 - 2h_K\dot{p}\dot{\varphi}) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - mg(p \cdot \sin\varphi + h_K \cdot \cos\varphi) \\&\quad - Mgh_T\cos\varphi\end{aligned}\quad (3.11)$$

Prije izvoda samih jednadžbi gibanja potrebno je u Euler-Lagrangeovu jednadžbu dodati i disipacijsku funkciju f_D koja predstavlja disipaciju energije zbog viskoznog trenja u zglobovima oko kojeg se klackalica okreće.

$$f_D = \frac{1}{2}c\dot{q}_i^2 \quad (3.12)$$

Modificirana Euler-Lagrangeova jednadžba glasi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial f_D}{\partial \dot{q}_i} = F_i \quad (3.13)$$

Ako za prvu poopćenu koordinatu postavimo pomak kolica ($q_1 = p$) jednačba 3.13 glasi:

$$m\ddot{p} - mh_K\ddot{\varphi} - mp\dot{\varphi}^2 + mg\sin\varphi = F_p \quad (3.14)$$

gdje je F_p poopćena sila koja djeluje na kolica.

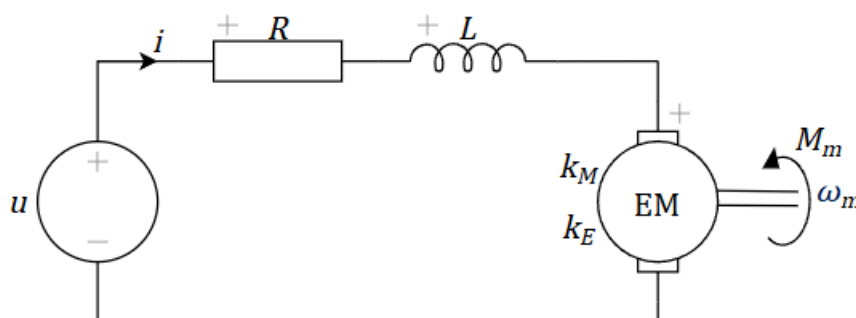
Ako za drugu poopćenu koordinatu postavimo zakret klackalice ($q_1 = \varphi$) jednačba 3.13 glasi:

$$2mp\ddot{\varphi} + mp^2\ddot{\varphi} + mh_K^2\ddot{\varphi} + J\ddot{\varphi} - mh_K\ddot{p} + mgpcos\varphi - mgh_K\sin\varphi - Mgh_T\sin\varphi + c\dot{\varphi} = \tau_\varphi \quad (3.15)$$

gdje je τ_φ moment u zglobu klackalice.

3.2. Električni podsustav

Gibanje kolica ostvareno je rotacijom istosmjernog elektromotora čiji se generirani moment preko reduktora i zupčaste letve pretvara u silu koja pokreće kolica. Na Slika 7 prikazana je nadomjesna shema strujnog krug elektromotora.



Slika 7 Nadomjesna shema elektromotora

Kirchhoffovim zakonima dolazi se do diferencijalne jednačbe koja opisuje dinamiku istosmjernog elektromotora:

$$u = k_E\omega_m + iR + L\frac{di}{dt} \quad (3.16)$$

Gdje je u napon napajanja, k_E konstanta povratne elektromotorne sile, ω_m kutna brzina motora, i jakost armaturene struje, R otpor u krugu armature te L induktivitet armaturnog namota. Iz jednačbe 3.16 vidljivo je da je i elektromotor dinamički član s obzirom na to da se u jednačbi pojavljuje derivacija jakosti struje armature. Međutim, induktivitet je vrlo mali što čini njegov utjecaj na dinamiku neznatajan, stoga ga možemo zanemariti i jednačbu pojednostaviti na izraz:

$$u = k_E\omega_m + iR \quad (3.17)$$

Moment motora direktno je proporcionalan jakosti struje armature prema izrazu 3.18 u kojem je k_M konstanta momenta elektromotora.

$$M_m = k_M \cdot i \quad (3.18)$$

Reduktor koji je prikazan na Slika 8 multiplicira moment i reducira brzinu vrtnje prema svom prijenosnom omjeru p_o . S pomoću prijenosnog omjera te radijusa zupčanika u zahvatu sa zupčastom letvom r može se definirati izraz koji povezuje brzinu vrtnje elektromotora i brzinu kolica:

$$\omega_m = \frac{\dot{p}}{p_o \cdot r} \quad (3.19)$$

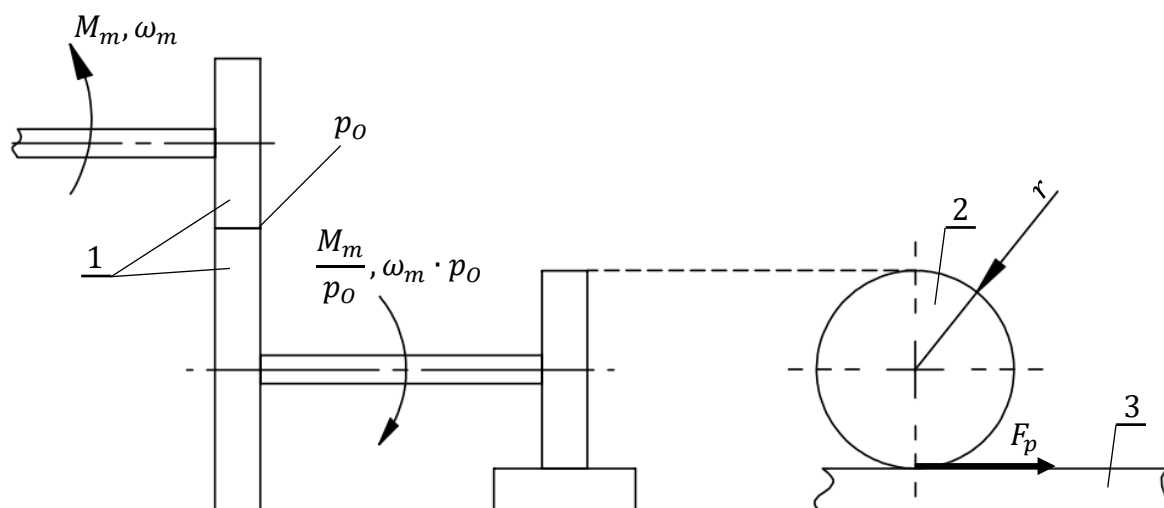
Također, može se napisati i izraz za poopćenu silu F_p koja ovisi o momentu motora:

$$F_p = \frac{M_m}{p_o \cdot r} = \frac{k_M \cdot i}{p_o \cdot r} \quad (3.20)$$

Ako se sada iz 3.20 izrazi jakost struje, te se taj izraz, zajedno s izrazom 3.19 uvrste u 3.17 dobiva se izraz za poopćenu silu F_p u ovisnosti o naponu napajanja elektromotora.

$$F_p = u \cdot \frac{k_M}{p_o \cdot r \cdot R} - \dot{p} \frac{k_E k_M}{R \cdot p_o^2 \cdot r^2} \quad (3.21)$$

Moment τ_φ jednak je nuli, budući da ne razmatramo dodatne sile i momente koji djeluju na sustav.



Slika 8 Reduktor (1), zupčanik (2) i zupčasta letva (3)

Uvrštavanjem jednadžbe 3.21 te $\tau_\varphi = 0$ u jednadžbe 3.14 i 3.15 dobivaju se konačne diferencijalne jednadžbe koje opisuju dinamiku sustava kolica na klackalici. Jednadžbe su dane u izrazima 3.22 i 3.23

$$m\ddot{p} - mh_K\ddot{\phi} - mp\dot{\phi}^2 + mg\sin\varphi = u \cdot \frac{k_M}{p_o \cdot r \cdot R} - \dot{p} \frac{k_E k_M}{R \cdot p_o^2 \cdot r^2} \quad (3.22)$$

$$2mp\ddot{p}\dot{\phi} + mp^2\ddot{\phi} + mh_K^2\ddot{\phi} + J\ddot{\phi} - mh_K\ddot{p} + mgp\cos\varphi - mgh_K\sin\varphi - Mgh_T\sin\varphi + c\dot{\phi} = 0 \quad (3.23)$$

3.3. Prostor stanja

Zapis modela sustava u obliku prostora stanja je u formi skupa diferencijalnih jednačbi prvog reda, a varijable čije se derivacije nalaze u tom skupu jednačbi nazivamo varijablama stanja. Opći oblik zapisa sustava u prostoru stanja dan je u sljedećoj jednačbi:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (3.24)$$

Gdje je $\dot{x}(t)$ vektor prvih derivacija varijabli stanja, f nelinearna funkcija koja definira kako se stanje mijenja tijekom vremena, $x(t)$ je vektor varijabli stanja, a $u(t)$ je vektor ulaza, odnosno upravljačkog signala. U ovom će se radu nelinearni sustav prikazati u obliku prostora stanja u svrhu generiranja trajektorija sustava te sinteze regulatora na temelju podataka. Sustav je opisan s dvije diferencijalne jednačbe drugog reda te je stoga potrebno odabrati četiri varijable stanja. One su odabrane na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_1 &= p \\ x_2 &= \dot{p} \\ x_3 &= \varphi \\ x_4 &= \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sada kada su odabrane varijable stanja, potrebno je izraziti derivacije varijabli stanja u ovisnosti o varijablama stanja.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \ddot{p} \\ x_4 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Iz jednačbi 3.22 i 3.23 mogu se izraziti $\ddot{p}$ i $\ddot{\varphi}$ kao funkcije varijabli stanja, derivacija varijabli stanja te ulaza u sustav. Izrazi su dani u 3.27 i 3.28.

$$\ddot{p} = h_K\ddot{\phi} + p\dot{\phi}^2 - g\sin\varphi + u \frac{k_M}{p_o \cdot r \cdot R \cdot m} - \dot{p} \frac{k_E k_M}{R \cdot p_o^2 \cdot r^2 \cdot m} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{1}{mp^2 + J} \left(mh_K p \dot{\phi}^2 - 2mp\ddot{p}\dot{\phi} - mgp\cos\varphi + Mgh_T\sin\varphi - c\dot{\phi} \right. \\ &\quad \left. - \dot{p} \frac{h_K k_E k_M}{R \cdot p_o^2 \cdot r^2} + u \frac{h_K k_M}{p_o \cdot r \cdot R} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ako sada primijenimo oznake prema izrazu 3.25, jednadžbe 3.27 i 3.28 glase ovako:

$$\ddot{p} = \dot{x}_2 = h_K \dot{x}_4 (x_1, x_2, x_3, x_4, u) + x_1 \dot{x}_4^2 - g \sin x_3 + u \frac{k_M}{p_O \cdot r \cdot R \cdot m} - x_2 \frac{k_E k_M}{R \cdot p_O^2 \cdot r^2 \cdot m} \quad (3.29)$$

$$\ddot{\phi} = \dot{x}_4 = \frac{1}{m x_1^2 + J} \left(m h_K x_1 \dot{x}_4^2 - 2 m x_1 x_2 \dot{x}_4 - m g x_1 \cos x_3 + M g h_T \sin x_3 - c x_4 - x_2 \frac{h_K k_E k_M}{R \cdot p_O^2 \cdot r^2} + u \frac{h_K k_M}{p_O \cdot r \cdot R} \right) \quad (3.30)$$

3.4. Linearizacija sustava u ravnotežnom položaju

Budući da će se koristiti metoda sinteze stabilizirajućeg regulatora za LTI sustave, nelinearni model razmatranog sustava linearizirat ćemo u ravnotežnom položaju. Ravnotežnom položaju odgovaraju sljedeće vrijednosti varijabli stanja:

$$p = 0, \quad \dot{p} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0 \quad (3.31)$$

Za male vrijednosti kuta φ i pomaka p , te male vrijednosti brzina $\dot{\varphi}$ i $\dot{p}$ vrijedi:

$$\cos \varphi \cong 1, \quad \sin \varphi \cong \varphi, \quad \dot{\varphi}^2 \cong 0, \quad p^2 \cong 0, \quad \dot{p} \dot{\varphi} \cong 0 \quad (3.32)$$

Ako se sada primijene aproksimacije na jednadžbe 3.27 i 3.28 dobit će se aproksimacija nelinearnog modela u obliku prostora stanja koja ima linearnu strukturu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u, \end{aligned} \quad (3.33)$$

gdje su:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{mgh_K}{J} & -\frac{k_E k_M (m h_K^2 + J)}{p_O^2 \cdot r^2 \cdot R \cdot J \cdot m} & \frac{Mgh_T h_K}{J} - g & -\frac{ch_K}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{J} & -\frac{k_E k_M h_K}{p_O^2 \cdot r^2 \cdot R \cdot J} & \frac{Mgh_T}{J} & -\frac{c}{J} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_M (m h_K^2 + J)}{p_O \cdot r \cdot R \cdot J \cdot m} \\ 0 \\ \frac{k_M h_K}{p_O \cdot r \cdot R \cdot J} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

3.5. Vremenska diskretizacija nelinearnog modela

Diskretizacija je postupak pretvorbe matematičkog modela čije su varijable vremenski kontinuirane u matematički model čije su varijable vremenski diskretne, to jest definirane u određenim vremenskim trenutcima (diskretnim koracima). Ovaj postupak je ključan kada se sustav želi upravljati s pomoću digitalnih regulatora koji ne mogu obraditi kontinuirane signale, već samo uzorkovane vrijednosti u vremenskim intervalima koji su određeni s vremenom uzorkovanja. Cilj diskretizacije je odrediti izraz koji će definirati vrijednost varijabli u sljedećem $(k + 1)$ diskretnom vremenskom trenutku u ovisnosti o varijablama u k -tom trenutku. Za diskretizaciju u ovom radu određeno je vrijeme uzorkovanja od jedne milisekunde ($T_s = 0,001$ s) te je odabrana jednostavna Eulerova aproksimacija koja se definira prema sljedećem izrazu:

$$\dot{x}(kT_s) \approx \frac{x((k + 1)T_s) - x(kT_s)}{T_s} \quad (3.38)$$

Ako se sada primijeni Eulerova metoda na izraz 3.26, to jest derivacije varijabli stanja zamijene aproksimacijom, dodatnim matematičkim transformacijama mogu se dobiti izrazi za vrijednosti varijabli stanja u sljedećem trenutku u ovisnosti o vrijednostima varijabli stanja u sadašnjem trenutku koji su prikazani u nastavku:

$$x_1((k + 1)T_s) = T_s x_2(kT_s) + x_1(kT_s) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} x_2((k + 1)T_s) = T_s & \left[h_K \dot{x}_4(x_1(kT_s), x_2(kT_s), x_3(kT_s), x_4(kT_s), u(kT_s)) \right. \\ & + x_1(kT_s) x_4^2(kT_s) - g \sin(x_3(kT_s)) - x_2(kT_s) \cdot \frac{k_M k_E}{p_0^2 \cdot r^2 \cdot R \cdot m} \\ & \left. + u(kT_s) \cdot \frac{k_M}{p_0 \cdot r \cdot R \cdot m} \right] + x_2(kT_s) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$x_3((k + 1)T_s) = T_s x_4(kT_s) + x_3(kT_s) \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
x_4((k+1)T_s) = & \frac{T_s}{mx_1^2(kT_s) + J} \left[mh_K x_1(kT_s) x_4^2(kT_s) \right. \\
& - 2mx_1(kT_s) x_2(kT_s) x_4(kT_s) - mgx_1(kT_s) g \cos(x_3(kT_s)) \\
& + Mgh_T g \sin(x_3(kT_s)) - cx_4(kT_s) - x_2(kT_s) \cdot \frac{h_K k_M k_E}{p_0^2 \cdot r^2 \cdot R} \\
& \left. + u(kT_s) \cdot \frac{h_K k_M}{p_0 \cdot r \cdot R} \right] + x_4(kT_s)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.6. Vremenska diskretizacija lineariziranog modela

Linearizirani prostor stanja također će se diskretizirati korištenjem Eulerove aproksimacije dane u jednadžbi 3.38. Primjenom te metode sustav će se prikazati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}
x((k+1)T_s) &= \mathbf{A}_d x(kT_s) + \mathbf{B}_d u(kT_s) \\
y(kT_s) &= \mathbf{C}_d x(kT_s) + \mathbf{D}_d u(kT_s)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

gdje su $\mathbf{A}_d = \mathbf{I} + T_s \mathbf{A}$, $\mathbf{B}_d = T_s \mathbf{B}$, a matrice $\mathbf{C}_d$ i $\mathbf{D}_d$ jednake matricama $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$. Matrice $\mathbf{A}_d$ i $\mathbf{B}_d$ dane su u nastavku:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & T_s & 0 & 0 \\ -\frac{T_s m g h_K}{J} & -\frac{T_s k_E k_M (m h_K^2 + J)}{p_0^2 \cdot r^2 \cdot R \cdot J \cdot m} + 1 & \frac{T_s M g h_T h_K}{J} - T_s g & -\frac{T_s c h_K}{J} \\ 0 & 0 & 1 & T_s \\ -\frac{T_s m g}{J} & -\frac{T_s k_E k_M h_K}{p_0^2 \cdot r^2 \cdot R \cdot J} & \frac{T_s M g h_T}{J} & -\frac{T_s c}{J} + 1 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_s k_M (m h_K^2 + J)}{p_0 \cdot r \cdot R \cdot J \cdot m} \\ 0 \\ \frac{T_s k_M h_K}{p_0 \cdot r \cdot R \cdot J} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

4. SINTEZA REGULATORA

U ovom poglavlju obradit će se sinteza stabilizirajućeg regulatora temeljena na podacima. Polazimo od pretpostavke da je dinamički model sustava nepoznat, dok su dostupni podatci trajektorija ulaza i stanja sustava na konačnom vremenskom horizontu. Sinteza se zasniva na linearnim matričnim nejednakostima za čije će se rješavanje koristiti MATLAB-ovo YALMIP okruženje s MOSEK rješavačem [26]. Cilj je iz generiranih podataka $\mathbf{X}_-$, $\mathbf{X}_+$, $\mathbf{U}_-$ (vidjeti izraz 2.2 za definicije ovih matrica) dobiti statički regulator $\mathbf{K}$ u povratnoj vezi $u_k = \mathbf{K}x_k$, pri čemu je u_k upravljački ulaz sustava, a x_k vektor stanja sustava. Postupak sinteze pratit će korake iz rada [17], uz znatno pojednostavnjivanje LMI-jeva uklanjanjem dijela izraza vezanog za disipativnost zatvorenog kruga. Naime, u ovom radu naš cilj prilikom sinteze regulatora je stabilizacija sustava, bez dodatnih uvjeta na odzive zatvorenog kruga.

4.1. Generiranje podataka

Podatci na temelju kojih se provodi sinteza, u praksi se prikupljaju mjerenjem ulaza i izlaza fizičkog sustava. U sklopu ovog rada, podatke ćemo prikupiti simulacijom nelinearnog modela sustava u diskretnom vremenu prikazanog u poglavlju 3.5. Prije same simulacije potrebno je definirati numeričke vrijednosti parametara sustava. Ove vrijednosti prikazane su u Tablica 1, a preuzete su iz [18].

Tablica 1 Parametri sustava

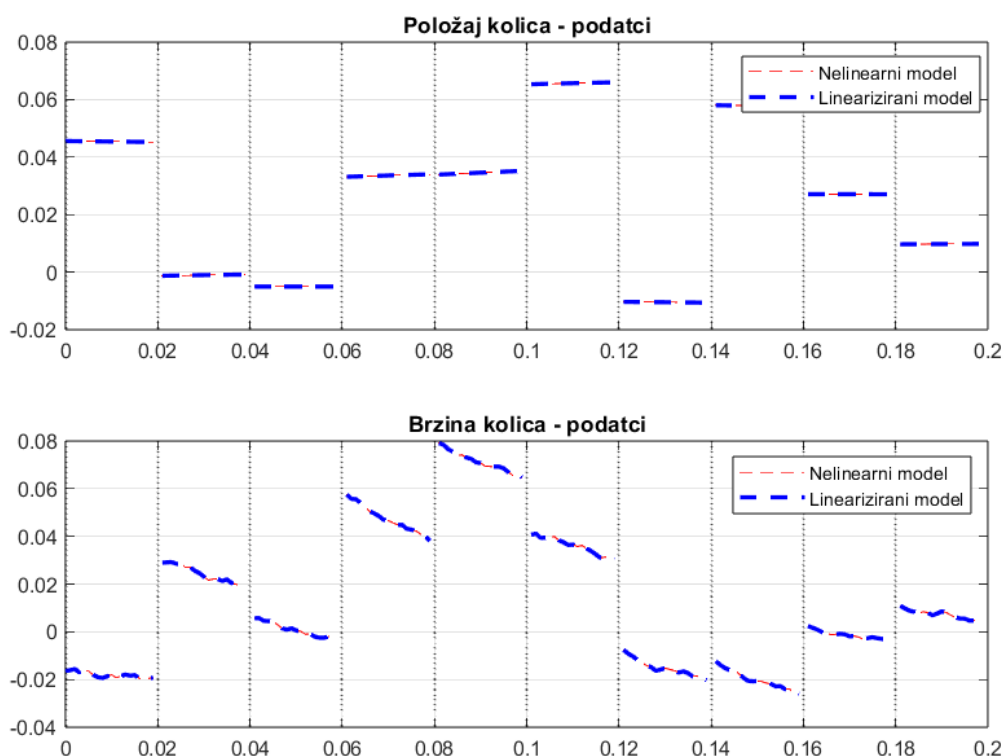
Parametar	Vrijednost	Mjerna jedinica
h_K	0,180047	m
h_T	0,116553	m
m	0,6	kg
M	4,839	kg
J	0,68	kg m ²
g	9,81	m s ⁻²
k_E	0,0077	V s rad ⁻¹
k_M	0,0077	N m A ⁻¹
R	2,6	Ω
p_O	1/3,71	
r	0,0077	m
c	0,1	N m s rad ⁻¹

Kako bismo osigurali dovoljno bogate podatke, u smislu informativnosti (vidjeti poglavlje 2.1), simulaciju ćemo provesti 10 puta u trajanju od 20 uzoraka. Ovako relativno kratak vremenski

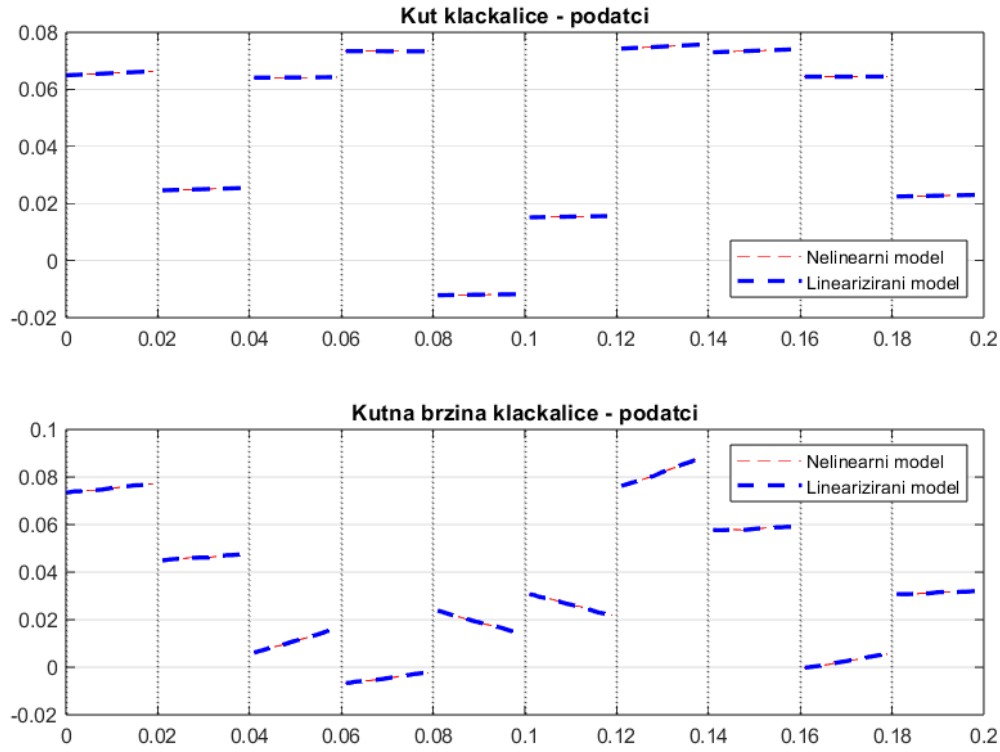
horizont (u trajanju od tek 0,02 sekunde) koristimo jer je sustav u otvorenom krugu nestabilan. Cjelokupnim postupkom prikupljanja podataka zapravo simuliramo 10 neovisnih mjerenja koje onda spajamo u jednu cjelinu. Ulaz u sustav postaviti ćemo kao vektor s nasumičnim vrijednostima u rasponu od -0,5 do 0,5. Za svaku trajektoriju koristiti ćemo drugačiji ulaz, a također i početne uvjete, to jest početne vrijednosti svake od varijabli stanja generiramo nasumično za svaku trajektoriju. Nakon simulacije podatke organiziramo u matrice koje imaju sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_- &:= [u_0 \ u_1 \ \cdots \ u_{N-1}] \\ \mathbf{X}_- &:= [x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_{N-1}] \\ \mathbf{X}_+ &:= [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N] \end{aligned} \quad (4.1)$$

pri čemu je N broj ukupnih prikupljenih uzoraka (umnožak broja trajektorija i broja uzoraka po jednoj trajektoriji). Generirane podatke možemo prikazati i grafički što je učinjeno na Sliku 9 i Sliku 10. Podatke smo generirali i simulacijom na lineariziranom modelu te se na grafovima može vidjeti da u okolini ravnotežne točke (varijable stanja blizu nule) linearizirani model vrlo dobro opisuje ponašanje cjelovitog nelinearnog modela.



Slika 9 Položaj i brzina kolica



Slika 10 Kut i kutna brzina klackalice

Polazeći od matrica u izrazu 4.1, definiramo i matricu podataka koja opisuje trajektoriju poremećaja

$$\mathbf{W}_- := [w_0 \ w_1 \ \cdots \ w_{N-1}] \quad (4.2)$$

kojom objedinjujemo poremećaje i nelinearnosti na promatranom horizontu. U članku [17] se ona ne identificira eksplicitno, nego je definirana samo sljedećom kvadratnom ogradom:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{W}_-^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{W}_-^T \end{bmatrix} \geq 0, \quad \Phi_{22} < 0, \quad (4.3)$$

pri čemu je Φ simetrična matrica koja služi za modeliranje poremećaja. Taj ćemo model, u sklopu ovog rada, odrediti postavljanjem energetske ograde u obliku:

$$\mathbf{W}_- \mathbf{W}_-^T \leq \rho \mathbf{I} \Leftrightarrow \Phi_{11} = \rho \mathbf{I}, \Phi_{12} = 0, \Phi_{22} = -\mathbf{I} \quad (4.4)$$

Parametar ρ odredit ćemo iz podataka tako da sigurno zadovolji izraz 4.4

$$\rho = 1.05 \cdot \lambda_{\max}(\widetilde{\mathbf{W}}_- \widetilde{\mathbf{W}}_-^T) \quad (4.5)$$

gdje je $\lambda_{\max}$ najveća svojstvena vrijednost, a matrica $\widetilde{\mathbf{W}}_-$ predstavlja konkretnu matricu s numeričkim vrijednostima koja je izračunata kako je to opisano dolje u nastavku teksta.

Matricu poremećaja odredit ćemo koristeći jednadžbu sustava zapisanu s podacima koja je navedena u izrazu 4.6.

$$\mathbf{X}_+ = \mathbf{A}\mathbf{X}_- + \mathbf{B}\mathbf{U}_- + \widetilde{\mathbf{B}}\widetilde{\mathbf{W}}_- \quad (4.6)$$

$\tilde{\mathbf{B}}$ definirat ćemo kao jediničnu jer pretpostavljamo da poremećaj može djelovati na bilo koju varijablu stanja, a kao matrice sustava $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ koristit ćemo matrice $\mathbf{A}_d$ i $\mathbf{B}_d$ lineariziranog sustava iz izraza 3.44 i 3.45. Na taj način, obuhvatit ćemo nelinearnosti sustava kao poremećaje. Izraz prema kojem računamo $\tilde{\mathbf{W}}_-$, a koji se dobije kada izrazimo $\tilde{\mathbf{W}}_-$ iz 4.6 dan je u nastavku

$$\tilde{\mathbf{W}}_- = \tilde{\mathbf{B}}^+(\mathbf{X}_+ - \mathbf{A}_d\mathbf{X}_- - \mathbf{B}_d\mathbf{U}_-) \quad (4.7)$$

Sama matrica $\tilde{\mathbf{W}}_-$ se ne koristi u sintezi regulatora, već služi za definiranje ρ odnosno Φ , u praksi bi se Φ trebao definirati ograntom utjecaja nelinearnosti i poremećaja na sustav.

4.2. Sinteza regulatora

Linearnu matričnu nejednadžbu koju ćemo morati riješiti numerički kako bismo dobili statički regulator definirat ćemo s pomoću teorema o stabilnosti koji se temelji na matričnoj S-lemmi koja je opisana u poglavlju 2.2.2. Teoremom ćemo povezati dva uvjeta, uvjet stabilnosti i uvjet objašnjavanja podataka. Drugim riječima, želimo postići stabilnost za sve sustave koji su konzistentni s generiranim podatcima.

Neka je sustav određen jednadžbom 4.6 i neka matrice $\mathbf{X}_-, \mathbf{X}_+, \mathbf{U}_-, \mathbf{W}_-$ opisuju trajektoriju sustava i definirane su prema izrazima 4.1 i 4.2.

Pretpostavimo da prilikom snimanja trajektorija sustava vrijedi ograda poremećaja zapisana u izrazu 4.3.

Nadalje, neka je Σ skup svih parova matrica $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ koji mogu opisati podatke $(\mathbf{X}_-, \mathbf{X}_+, \mathbf{U}_-)$, odnosno:

$$\Sigma := \{(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mid 4.6 \text{ vrijedi za neku matricu } \mathbf{W}_- \text{ koja zadovoljava 4.3} \} \quad (4.8)$$

Teorem o stabilnosti Neka je sustav određen izrazom 4.6. Pod pretpostavkom da:

- su trajektorije sustava $(\mathbf{X}_-, \mathbf{X}_+, \mathbf{U}_-)$ i matrica $\tilde{\mathbf{B}}$ poznate
- skup Σ nije prazan i $\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_- \\ \mathbf{U}_- \end{bmatrix} = n + m$.

Povratna veza $u_k = \mathbf{K}x_k$ stabilizira sve sustave određene svim parovima matrica $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \Sigma$ ako i samo ako postoje matrice $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i skalar $\alpha \geq 0$ takav da vrijedi:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{P}} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{K}} \\ 0 & \tilde{\mathbf{P}} & \tilde{\mathbf{K}}^T & \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{X}_+ & \mathbf{I} \\ -\mathbf{X}_- & 0 \\ -\mathbf{U}_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{11}\tilde{\mathbf{B}}^T & \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T\tilde{\mathbf{B}}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_+ & \mathbf{I} \\ -\mathbf{X}_- & 0 \\ -\mathbf{U}_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T > 0, \quad (4.9)$$

pri čemu je $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \tilde{\mathbf{P}}$

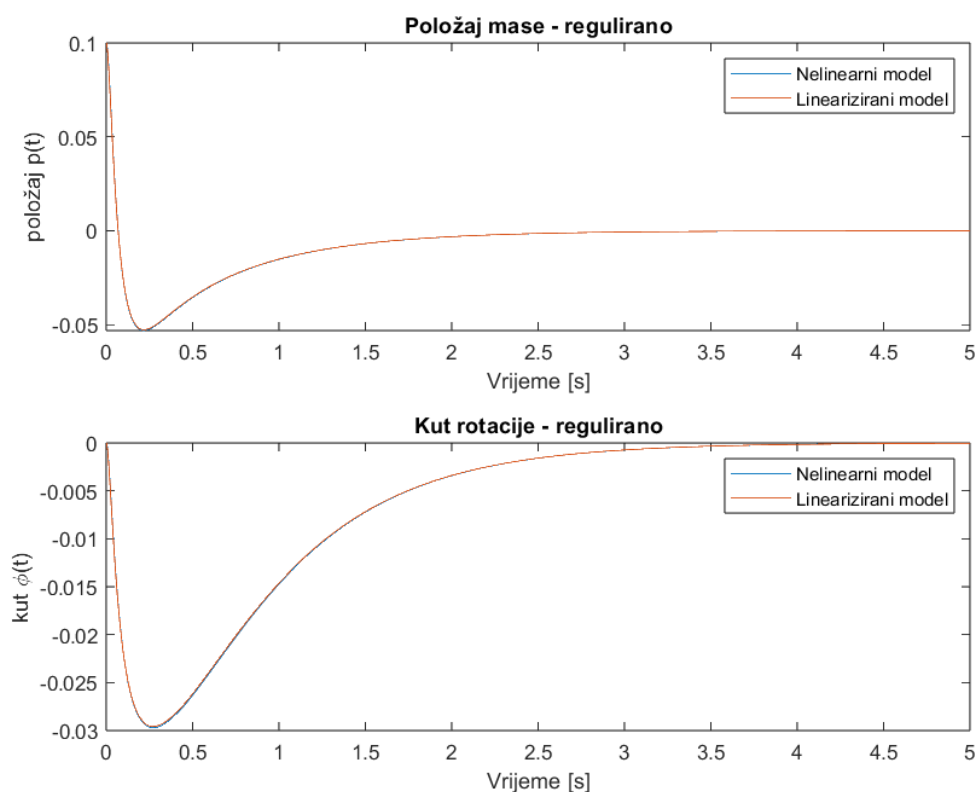
Matricu $\mathbf{K}$ odnosno regulator možemo rekonstruirati na sljedeći način: $\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{P}}^{-1}$

5. REZULTATI SIMULACIJA

Nakon sinteze regulatora, njegovo djelovanje potrebno je provjeriti na nelinearnom modelu te lineariziranom modelu sustava. To ćemo provjeriti simulacijom zatvorenog kruga, to jest kruga s uključenim regulatorom. Kao ulaz u sustav postavljamo $u_k = \mathbf{K}x_k$ i simuliramo modele

sustava u zatvorenom krugu. Rezultati simulacije za početni uvjet $x_0 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, odnosno pomak

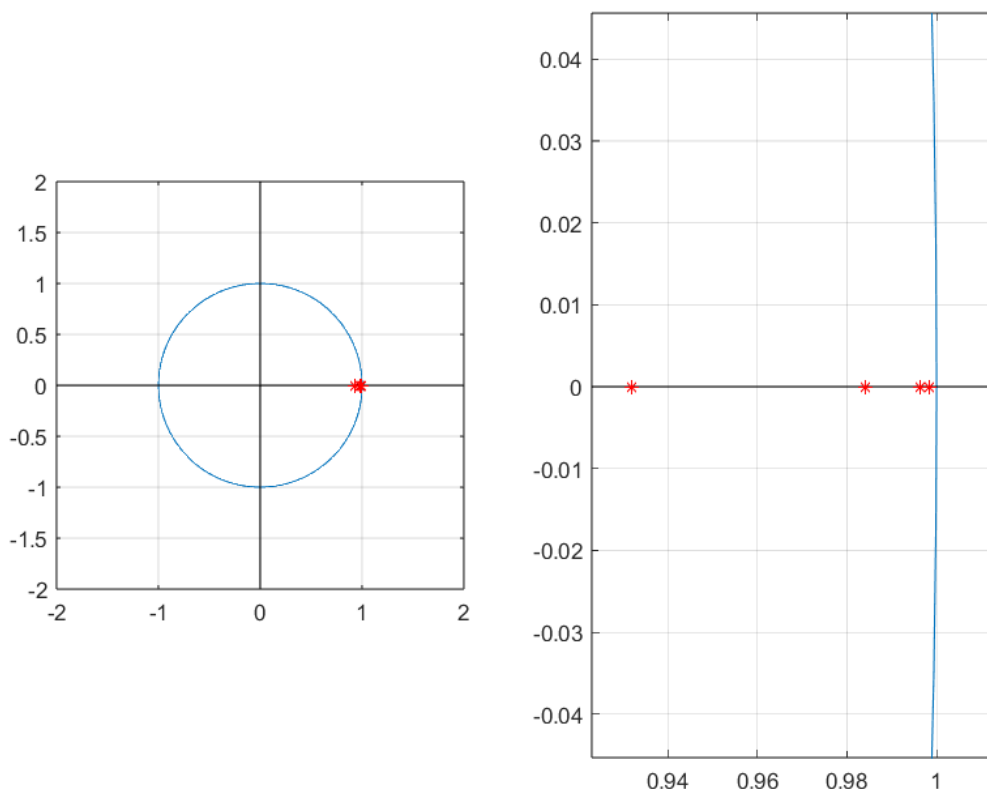
kolica za 0,1 metar od ravnotežne točke, prikazani su na Slika 11.



Slika 11 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga blizu ravnotežne točke

Vidljivo je da se sustav stabilizira unutar vremenskog intervala od 5 sekundi. Također, bitno je primijetiti da se nelinearni i linearizirani model vrlo dobro poklapaju jer se nalazimo blizu ravnotežne točke, to jest kolica su blizu sredine klackalice, a klackalica stoji horizontalno. Stabilnost zatvorenog kruga možemo provjeriti i putem svojstvenih vrijednosti matrice zatvorenog kruga koja glasi $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ za što ćemo ponovno iskoristiti matrice $\mathbf{A}_d$ i $\mathbf{B}_d$ diskretnog lineariziranog modela. Kod kontinuiranih sustava svojstvene vrijednosti matrice zatvorenog kruga moraju se nalaziti u lijevoj kompleksnoj poluravnini, to jest realni dijelovi im moraju biti negativni. U diskretnoj domeni taj se uvjet transformira u jediničnu kružnicu, odnosno svojstvene vrijednosti se moraju nalaziti unutar kružnice radijusa 1 sa središtem u ishodištu.

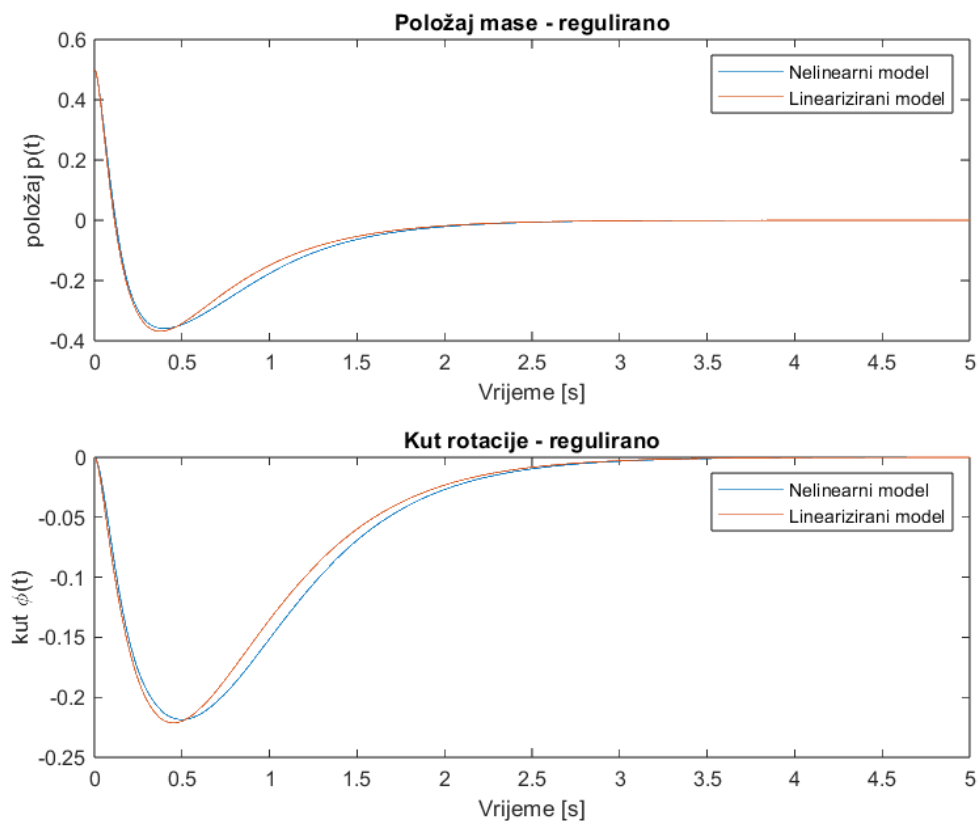
Svojstvene vrijednosti koje odgovaraju simulaciji prikazane su crvenim zvjezdicama na Slika 12. Desni graf prikazuje uvećanje lijevog kako bi bilo jasno vidljivo da su svojstvene vrijednosti unutar kružnice.



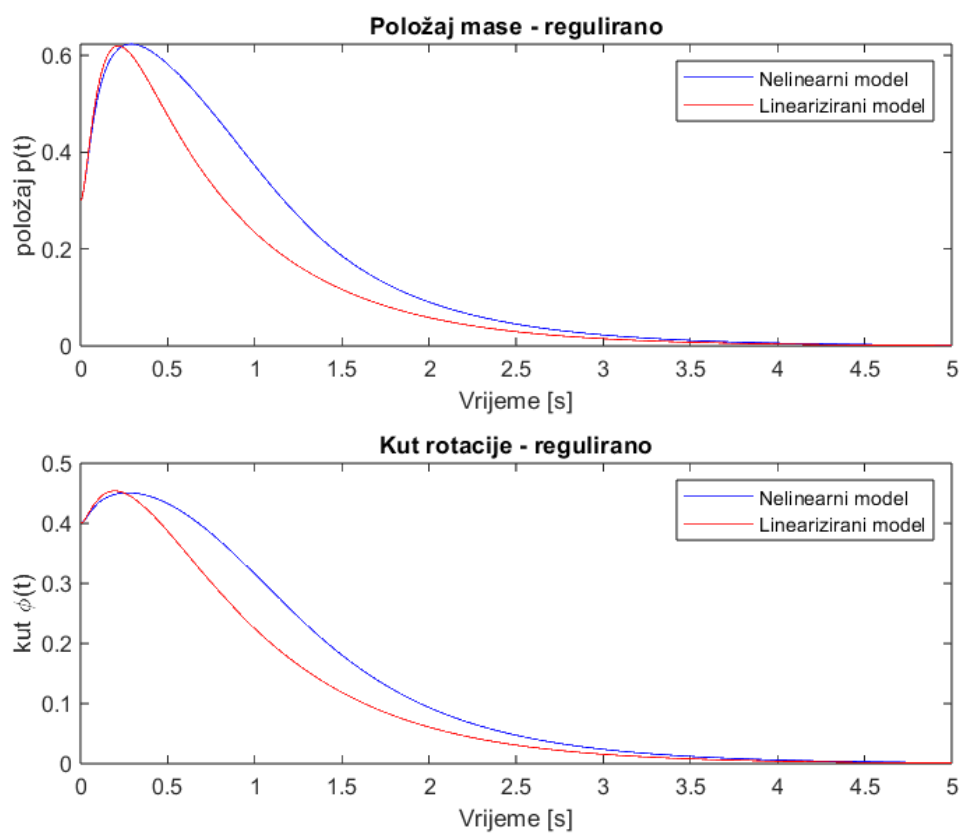
Slika 12 Svojstvene vrijednosti zatvorenog regulacijskog kruga

Ako sada malo promijenimo početne uvjete, odnosno postavimo kolica na najudaljeniju točku na klackalici, što bi prema dimenzijama u [18] odgovaralo 0,5 metara od sredine klackalice dobit ćemo odziv sustava prikazan na Slika 13. Uočljivo je da su razlike između nelinearnog i lineariziranog modela sada veće. Razlog tomu jesu izraženije nelinearnosti što se više udaljavamo od ravnotežne točke. Slika 14 i Slika 15 generirane su simulacijom zatvorenog kruga s različitim početnim uvjetima. Cilj je pokazati da odziv sustava znatno ovisi o početnim uvjetima, to jest vrijednostima varijabli stanja u prvom koraku simulacije. Konkretno, početni

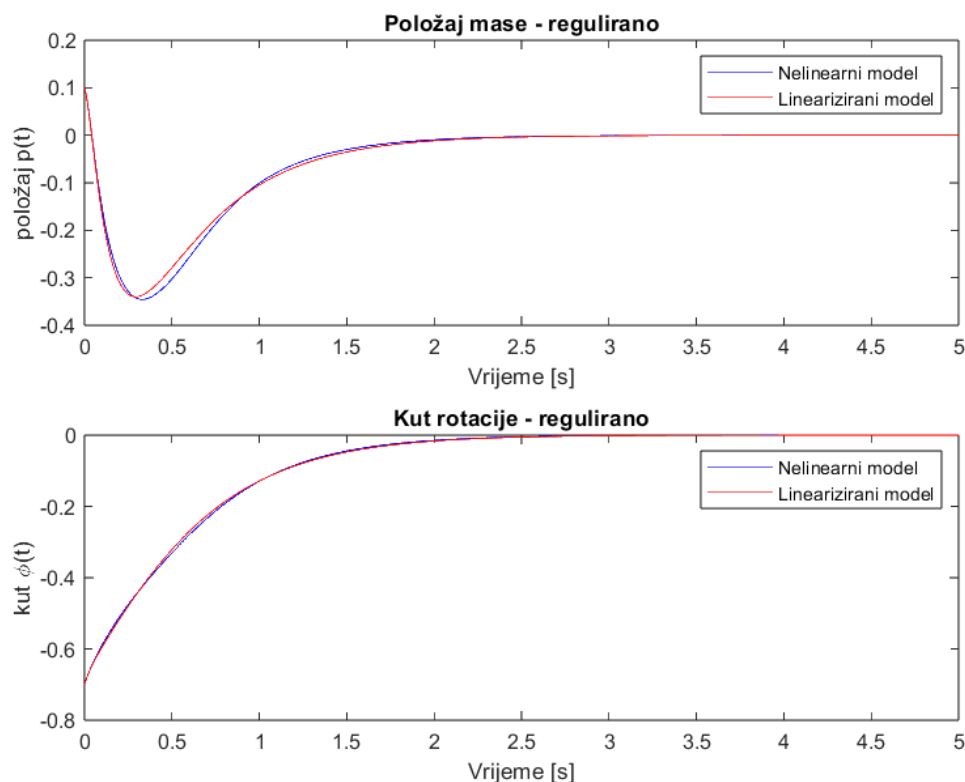
uvjeti za Slika 14 iznosili su $x_0 = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix}$, a za Slika 15 $x_0 = \begin{bmatrix} 0,4 \\ -1,2 \\ -0,7 \\ 1,6 \end{bmatrix}$.



Slika 13 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga daleko od ravnotežne točke

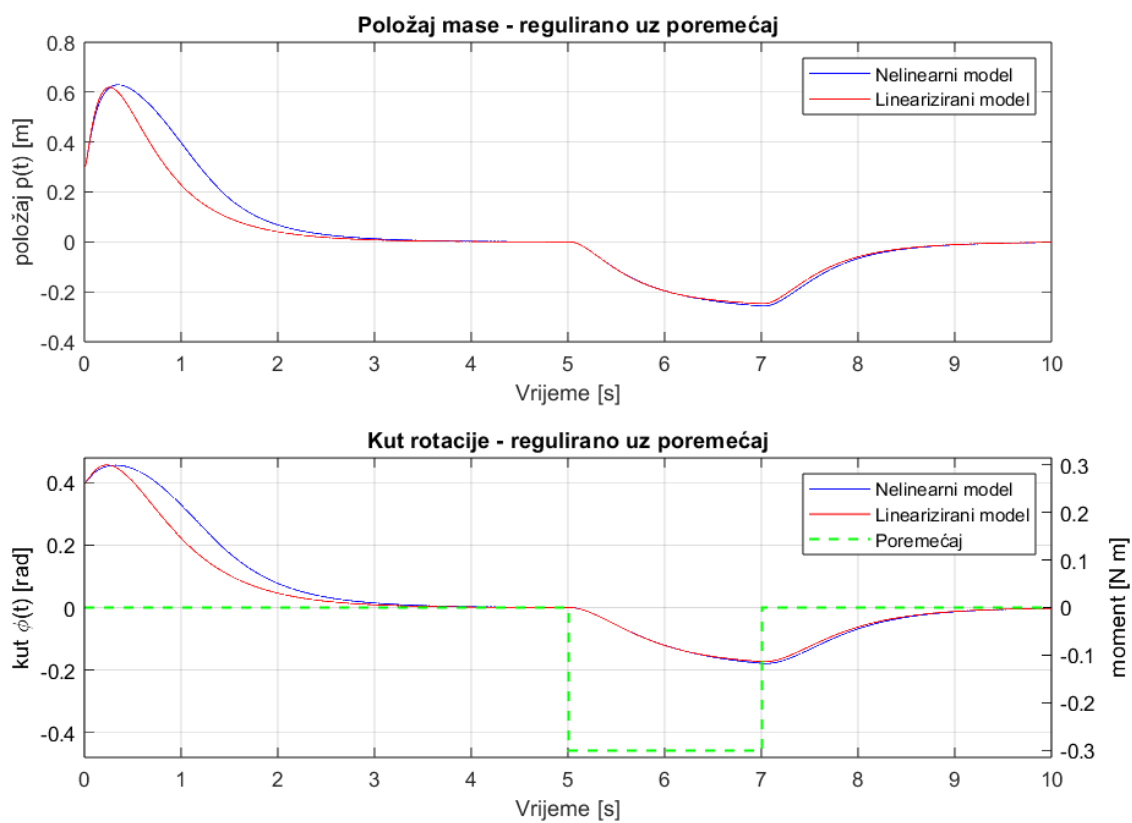


Slika 14 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga s pomakom kolica i zakretom klackalice



Slika 15 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga uz proizvoljne početne uvjete

Sada kada smo pokazali da dobiveni regulator uspješno stabilizira sustav iz mnogih početnih stanja, uvest ćemo poremećaj u sustav. Postavit ćemo poremećaj u vidu okretnog momenta u zglobo klackalice, on će iznositi 0,3 N m i djelovat će od pete do sedme sekunde. Odziv sustava na poremećaj prikazan je na Slika 16. Na grafovima se vidi da se u petoj sekundi javlja poremećaj i dolazi do promjene kuta zakreta klackalice, a time i položaja kolica na njoj. Daljnjim djelovanjem poremećaja, dolazi do veće destabilizacije sustava. U sekundama nakon prestanka djelovanja poremećaja sustav se pod djelovanjem regulatora stabilizira i dolazi u ravnotežnu točku.



Slika 16 Simulacija zatvorenog regulacijskog kruga s poremećajem

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu obradila se sinteza stabilizirajućeg regulatora temeljenog na podacima za elektromehanički sustav kolica na klackalici. Polazeći od fizikalnog opisa izveden je matematički model, prikaz u prostoru stanja, te vremenski diskretan model sustava, čime je postavljen temelj za generiranje podataka i direktnu sintezu regulatora. Regulator je dobiven rješavanjem linearne matrične nejednadžbe izvedene uz pomoć matrične S-leme te rekonstruiran kao statička povratna veza po stanju sustava, pri čemu je naglasak bio na stabilizaciji zatvorenog kruga. Valjanost pristupa potvrđena je simulacijama na nelinearnom i lineariziranom modelu. Sustav se uspješno stabilizira, a svojstvene vrijednosti zatvorenog kruga s vremenski diskretnim lineariziranim sustavom nalaze se unutar jedinične kružnice što potvrđuje stabilnost. Ograničenja rada primarno proizlaze iz činjenice da su podatci generirani simulacijom, a ne mjerenjem na stvarnom postavu, a također nisu razmatrana ni zasićenja aktuatora. Smjerovi daljnjeg istraživanja uključuju eksperimentalnu validaciju na laboratorijskom postavu te proširenje zahtjeva pri upravljanju. Zaključno, rad potvrđuje da pristup upravljanju temeljen na podacima omogućuje konstrukciju jednostavnog i učinkovitog regulatora koji stabilizira promatrani sustav u širokom rasponu početnih stanja i poremećaja.

LITERATURA

- [1] Markovsky, I.; Huang, L.; Dörfler, F. Data-Driven Control Based on the Behavioral Approach: From Theory to Applications in Power Systems. *IEEE Control Systems*. 2023.;43(5), str. 28–68. doi: 10.1109/MCS.2023.3291638. [Na internetu]. Dostupno na: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10266847/>.
- [2] Willems, J.C.; Rapisarda, P.; Markovsky, I.; De Moor, B.L.M. A note on persistency of excitation. *Systems & Control Letters*. 2005.;54(4), str. 325–329. doi: 10.1016/j.sysconle.2004.09.003.
- [3] Van Waarde, H.J.; Eising, J.; Camlibel, M.K.; Trentelman, H.L. The Informativity Approach: To Data-Driven Analysis and Control. *IEEE Control Systems*. 2023.;43(6), str. 32–66. doi: 10.1109/MCS.2023.3310305. [Na internetu]. Dostupno na: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10317631/>.
- [4] Van Waarde, H.J.; Camlibel, K.M.; Trentelman, H.L. Data-based linear systems and control theory. Kindle Direct Publishing; 2025.
- [5] Ziegler, J.G.; Nichols, N.B. Optimum Settings for Automatic Controllers. *Journal of Fluids Engineering*. 1942.;64(8), str. 759–765. doi: 10.1115/1.4019264.
- [6] Landau, I. D.; Lozano, R.; M'Saad, M.; Karimi, A. Adaptive Control. London: Springer London; 2011. [Na internetu]. Dostupno na: <https://link.springer.com/10.1007/978-0-85729-664-1>.
- [7] Hjalmarsson, H.; Gevers, M.; Gunnarsson, S.; Lequin, O. Iterative feedback tuning: theory and applications. *IEEE Control Systems*. 1998.;18(4), str. 26–41. doi: 10.1109/37.710876. [Na internetu]. Dostupno na: <https://ieeexplore.ieee.org/document/710876/>.
- [8] Markovsky, I.; Rapisarda, P. Data-driven simulation and control. *International Journal of Control*. 2008.;81(12), str. 1946–1959. doi: 10.1080/00207170801942170.
- [9] De Persis, C.; Tesi, P. Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality, and Robustness. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020.;65(3), str. 909–924. doi: 10.1109/TAC.2019.2959924.
- [10] van Waarde, H. J.; Camlibel, M. K.; Mesbahi, M. From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2022.;67(1), str. 162–175. doi: 10.1109/TAC.2020.3047577. [Na internetu]. Dostupno na: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9308978/>.
- [11] Coulson, J.; Lygeros, J.; Dorfler, F. Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeepPC. U: 2019 18th European Control Conference (ECC). IEEE; 2019., str. 307–312. doi: 10.23919/ECC.2019.8795639.
- [12] Park, U. S.; Ikeda, M. Stability analysis and control design of LTI discrete-time systems by the direct use of time series data. *Automatica*. 2009.;45(5), str. 1265–1271. doi: 10.1016/j.automatica.2008.12.012.
- [13] Zhuo W.; Derong L.. Data-Based Controllability and Observability Analysis of Linear Discrete-Time Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*. 2011.;22(12), str. 2388–2392. doi: 10.1109/TNN.2011.2170219.
- [14] Maupong, T.M.; Mayo-Maldonado, J.C.; Rapisarda, P. On Lyapunov functions and data-driven dissipativity. *IFAC-PapersOnLine*. 2017.;50(1), str. 7783–7788. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.1052.
- [15] van Waarde, H. J.; Eising, J.; Trentelman, H. L.; Camlibel, M. Kanat. Data Informativity: A New Perspective on Data-Driven Analysis and Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020.;65(11), str. 4753–4768. doi: 10.1109/TAC.2020.2966717. [Na internetu]. Dostupno na: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8960476/>.

- [16] van Waarde, H. J.; Eising, J.; Camlibel, M. K.; Trentelman, H. L. A Behavioral Approach to Data-Driven Control With Noisy Input–Output Data. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2024.;69(2), str. 813–827. doi: 10.1109/TAC.2023.3275014. [Na internetu]. Dostupno na: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10122597/>.
- [17] Kristović, P.; Jokić, A. Data-Driven State-Feedback Controller Synthesis for Dissipativity: A Dualization-Based Approach. U: 2024 American Control Conference (ACC). Toronto: IEEE; 2024., str. 1219–1224. doi: 10.23919/ACC60939.2024.10645012.
- [18] Lobrovic, M.; Jokic, A.; Milic, V. i ostali. A case study in distributed control: Elastically interconnected seesaw-cart systems. U: 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). Zagreb: IEEE; 2017., str. 1159–1164. doi: 10.1109/MED.2017.7984274. [Na internetu]. Dostupno na: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7984274/>.
- [19] Boyd, S.; Vandenberghe, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press; 2009.
- [20] Scherer, C.; Weiland, S. *Linear Matrix Inequalities in Control*. 2015.
- [21] Milić, V. *Sinteza regulacijskih sustava primjenom linearnih matričnih nejednadžbi* [Diplomski rad]. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2008. [Na internetu]. Dostupno na: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:175582>.
- [22] Kristović, P.; Jokić, A.; Lazar, M. Dynamic Output-Feedback Controller Synthesis for Dissipativity from Noisy Input-State Data. *arXiv preprint arXiv: 2507.06788*, 2025.
- [23] Jalšić, M. *Matematičko modeliranje i optimalno upravljanje nestabilnog elektromehaničkog sustava* [Završni rad]. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2020. [Na internetu]. Dostupno na: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:175733>.
- [24] Jukić, K. *H-beskonačno optimalno upravljanje nestabilnim elektromehaničkim sustavom* [Diplomski rad]. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2020. [Na internetu]. Dostupno na: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:672265>.
- [25] Morin, D. *The Lagrangian method*. U: *Introduction to classical mechanics*. Cambridge University Press; 2008.,
- [26] YALMIP. *Getting started*. [Na internetu]. Dostupno na: <https://yalmip.github.io/tutorial/basics/>. Pristupljeno: 01. rujan 2025.

PRILOZI

I. CD-R disc

II. Cjeloviti MATLAB kod

```

clear
close all
clc
% #####
%           SIMULACIJA SUSTAVA I GENERIRANJE PODATAKA
% #####

% Parametri sustava
hk = 0.180047; ht = 0.116553; m = 0.6; M = 4.839; J = 0.68; g = 9.81;
ke = 0.0077; km = 0.0077; R = 2.6; po = 1/3.71; r = 0.0077; c = 0.1;

Ts = 0.001; % Vrijeme diskretizacije
broj_uzoraka = 20;
broj_trajektorija = 10;
n = 4;      % Broj stanja

% Matrice prostora stanja lineariziranog modela
A_lin = [0 1 0 0; -g*hk*m/J -ke*km*(J+m*hk^2)/(J*R*m*po^2*r^2) (M*g*hk*ht/J-g) -
c*hk/J;
0 0 0 1; -g*m/J -ke*km*hk/(J*R*po^2*r^2) M*g*ht/J -c/J];
B_lin = [0; km*(m*hk^2+J)/(J*R*m*po*r); 0; km*hk/(J*R*po*r)];
C_lin = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
D_lin = [0; 0];
% Diskretizacija Eulerovom metodom
Ad = eye(n)+Ts*A_lin;
Bd = Ts*B_lin;
Cd = C_lin;
Dd = D_lin;

X_minus = [];
X_plus = [];
U_minus = [];

% Matrice s podacima za linearizirani model
X_minus_lin = [];
X_plus_lin = [];
U_minus_lin = [];

for i = 1:broj_trajektorija
    u = 1.0*(rand(1, broj_uzoraka)-0.5); % Pobuda
    x = zeros(n, broj_uzoraka+1);      % Vektor stanja za nelinearan
    x_lin = zeros(n, broj_uzoraka+1);   % Vektor stanja za lineariziran

    pocetno = 0.1*(rand(n,1)-0.2);
    x(:,1) = pocetno;
    x_lin(:,1) = pocetno;

    for k = 1:broj_uzoraka
        x(1,k+1) = Ts*x(2,k) + x(1,k);

        x(2,k+1) = Ts*(hk*1/(m*(x(1,k))^2+J) * (m*hk*x(1,k)*(x(4,k))^2 ...
- 2*m*x(1,k)*x(2,k)*x(4,k) - x(2,k)*ke*km*hk/(po^2*r^2*R) ...
- m*g*x(1,k)*cos(x(3,k)) + M*g*ht*sin(x(3,k)) - c*x(4,k) ...

```

```

+ u(k)*hk*km/(po*r*R)) + x(1,k)*(x(4,k))^2 - g*sin(x(3,k)) ...
- x(2,k)*ke*km/(po^2*r^2*R*m) + u(k)*km/(po*r*R*m)) + x(2,k);

x(3,k+1) = Ts*x(4,k) + x(3,k);

x(4,k+1) = Ts/(m*(x(1,k))^2+J) * (m*hk*x(1,k)*(x(4,k))^2 ...
- 2*m*x(1,k)*x(2,k)*x(4,k) - x(2,k)*ke*km*hk/(po^2*r^2*R) ...
- m*g*x(1,k)*cos(x(3,k)) + M*g*ht*sin(x(3,k)) - c*x(4,k) ...
+ u(k)*hk*km/(po*r*R)) + x(4,k);

x_lin(:,k+1) = Ad*x_lin(:,k) + Bd*u(k);
end

X_minus=[X_minus,x(:,1:broj_uzoraka)];
X_plus=[X_plus,x(:,2:broj_uzoraka+1)];
U_minus=[U_minus,u(:,1:broj_uzoraka)];

X_minus_lin=[X_minus_lin,x_lin(:,1:broj_uzoraka)];
X_plus_lin=[X_plus_lin,x_lin(:,2:broj_uzoraka+1)];
U_minus_lin=[U_minus_lin,u(:,1:broj_uzoraka)];

end

% Crtanje podataka
t = 0:0.001:Ts*(broj_trajektorija*broj_uzoraka-1);
idx_start = 1 + (0:broj_trajektorija-1)*broj_uzoraka;
idx_break = idx_start(2:end);
Xm = X_minus;          Xm(:, idx_break)      = NaN;
Xml = X_minus_lin;     Xml(:, idx_break)     = NaN;

% KOLICA
figure('Color','w');

subplot(2,1,1);
plot(t, Xm(1,:), 'r--'); hold on;
plot(t, Xml(1,:), 'b--', 'LineWidth', 2);
arrayfun(@(k) xline(t(k),'k:', 'LineWidth',1), idx_start); % vertikalne linije
title('Položaj kolica - podatci');
legend('Nelinearni model', 'Linearizirani model');
grid on;

subplot(2,1,2);
plot(t, Xm(2,:), 'r--'); hold on;
plot(t, Xml(2,:), 'b--', 'LineWidth', 2);
arrayfun(@(k) xline(t(k),'k:', 'LineWidth',1), idx_start);
title('Brzina kolica - podatci');
legend('Nelinearni model', 'Linearizirani model');
grid on;

% KLACKALICA
figure('Color','w');

subplot(2,1,1);
plot(t, Xm(3,:), 'r--'); hold on;
plot(t, Xml(3,:), 'b--', 'LineWidth', 2);
arrayfun(@(k) xline(t(k),'k:', 'LineWidth',1), idx_start);
title('Kut klackalice - podatci');
legend('Nelinearni model', 'Linearizirani model');
grid on;

```

```

subplot(2,1,2);
plot(t, Xm(4,:), 'r--'); hold on;
plot(t, Xml(4,:), 'b--', 'LineWidth', 2);
arrayfun(@(k) xline(t(k), 'k:', 'LineWidth', 1), idx_start);
title('Kutna brzina klackalice - podatci');
legend('Nelinearni model', 'Linearizirani model');
grid on;

% Provjera ranga
matrica = [X_minus; U_minus];
if rank(matrica) == 5
    disp('Puni retčani rang')
else
    disp('Nešto nije dobro')
end

% #####
%                               SINTEZA REGULATORA
% #####

% Postavke
yalmip('clear');
eps = 1e-4;                % margina za stroge uvjete

% Dimenzije
[n, N] = size(X_minus);
m_in = size(U_minus,1);
p = n;

% Definiranje potrebnih matrica
Znn = zeros(n,n); Znm = zeros(n,m_in);
Zmn = zeros(m_in,n); Zmm = zeros(m_in,m_in);
B_tilda = eye(n);

% Poremećaj (nelinearnosti)
W_minus = pinv(B_tilda)*(X_plus-Ad*X_minus-Bd*U_minus);
ograda = 1.05*max(eig(W_minus*W_minus'));
Phi11 = ograda*eye(p);
Phi12 = zeros(p,N);
Phi22 = -eye(N);

% Srednji blok
Sredina = [ B_tilda*Phi11*B_tilda'   B_tilda*Phi12;
            Phi12'*B_tilda'         Phi22      ];

Desno = [ eye(n)      X_plus;
          Znn         -X_minus;
          Zmn         -U_minus;
          Znn         zeros(n,N)];

% Faktor uz alpha
alfa_faktor = Desno * Sredina * Desno';
alfa_faktor=(alfa_faktor+alfa_faktor')/2;

Phi_tilda = alfa_faktor;

[red, stup] = size(Phi_tilda);

```

```

PI11 = Phi_tilda(1:n, 1:n);
PI12 = Phi_tilda(1:n, n+1:stup);
PI21 = Phi_tilda(n+1:red, 1:n);
PI22 = Phi_tilda(n+1:red, n+1:stup);

poz_semidef = PI11 - PI12*pinv(PI22)*PI21;

if min(eig(poz_semidef))>=0
    disp('Izraz s pijevima je pozitivno semidefinitan')
else
    disp('Izraz s pijevima nije pozitivno semidefinitan')
end

% Varijable
P_tilda = sdpvar(n,n,'symmetric');
K_tilda = sdpvar(m_in,n,'full');
alpha = sdpvar(1,1);

% 4x4 blok-matrica
M11 = P_tilda;
M24 = P_tilda;
M34 = K_tilda;
M42 = P_tilda;
M43 = K_tilda';
M44 = P_tilda;

Red1 = [ M11      Znn      Znm      Znn ];
Red2 = [ Znn      Znn      Znm      M24 ];
Red3 = [ Zmn      Zmn      Zmm      M34 ];
Red4 = [ Znn      M42      M43      M44 ];

Velika_matrica = [Red1;Red2;Red3;Red4];

Constraints=[Velika_matrica - alpha*alfa_faktor >= eps, alpha >= 0];
Objective = [];

% Rješavanje
Options = sdpsettings('verbose',1,'solver','mosek','cachesolvers',1);
sol = optimize(Constraints, Objective, Options);

% Izvlačenje rješenja i izračun K
P_tilda_v = value(P_tilda);
K_tilda_v = value(K_tilda);
alpha_v = value(alpha);
K = K_tilda_v / P_tilda_v;

disp('Uspješno. K je spremljen u workspace');

% #####
%                               SIMULACIJA ZATVORENOG KRUGA
% #####

Tsim = 5;
Nsim = round(Tsim/Ts);

xt = zeros(4, Nsim+1);
xt(:,1) = [0.3; 0; 0.4; 0];
xt_lin = xt;

```

```

ut(:,1) = K * xt(:,1);
ut_lin(:,1) = K * xt(:,1);

for k = 1:Nsim

    % Nelinearni model
    xt(1,k+1) = Ts*xt(2,k) + xt(1,k);

    xt(2,k+1) = Ts*(hk*1/(m*(xt(1,k))^2+J) * (m*hk*xt(1,k)*(xt(4,k))^2 ...
        - 2*m*xt(1,k)*xt(2,k)*xt(4,k) - xt(2,k)*ke*km*hk/(po^2*r^2*R) ...
        - m*g*xt(1,k)*cos(xt(3,k)) + M*g*ht*sin(xt(3,k)) - c*xt(4,k) ...
        + ut(k)*hk*km/(po*r*R)) + xt(1,k)*(xt(4,k))^2 - g*sin(xt(3,k)) ...
        - xt(2,k)*ke*km/(po^2*r^2*R*m) + ut(k)*km/(po*r*R*m)) + xt(2,k);

    xt(3,k+1) = Ts*xt(4,k) + xt(3,k);

    xt(4,k+1) = Ts/(m*(xt(1,k))^2+J) * (m*hk*xt(1,k)*(xt(4,k))^2 ...
        - 2*m*xt(1,k)*xt(2,k)*xt(4,k) - xt(2,k)*ke*km*hk/(po^2*r^2*R) ...
        - m*g*xt(1,k)*cos(xt(3,k)) + M*g*ht*sin(xt(3,k)) - c*xt(4,k) ...
        + ut(k)*hk*km/(po*r*R)) + xt(4,k);

    ut(:,k+1)=K * xt(:,k+1);

    % Linearizirani model
    xt_lin(:,k+1) = Ad*xt_lin(:,k) + Bd*ut_lin(k);
    ut_lin(:,k+1) = K*xt_lin(:,k+1);
end

t = (0:Nsim)*Ts;

% Prikaz rezultata
figure('Color','w');
subplot(2,1,1);
plot(t, xt(1,:), 'b', t, xt_lin(1,:), 'r');
xlabel('Vrijeme [s]'); ylabel('položaj p(t)');
title('Položaj mase - regulirano');
legend('Nelinearni model', 'Linearizirani model')

subplot(2,1,2);
plot(t, xt(3,:), 'b', t, xt_lin(3,:), 'r');
xlabel('Vrijeme [s]'); ylabel('kut \phi(t)');
title('Kut rotacije - regulirano');
legend('Nelinearni model', 'Linearizirani model')

% #####
%                                PROVJERE
% #####
% Provjera je li LMI zadovoljen
if min(eig(value(Velika_matrica - alpha*alfa_faktor)))>0 && value(alpha)>=0
    min(eig(value(Velika_matrica - alpha*alfa_faktor)))
    value(alpha)
    disp('LMI zadovoljen')
else
    min(eig(value(Velika_matrica - alpha*alfa_faktor)))
    value(alpha)
    disp('LMI nije zadovoljen')
end

```

```

% Provjera jesu li svojstvene vrijednosti unutar kruznice
figure('Color','w');
subplot(1,2,1)
plot(cos(linspace(0, 2*pi, 360)), sin(linspace(0, 2*pi, 360)));
hold on; axis equal; grid on; xlim([-2 2]); ylim([-2 2]);
plot([-3 3],[0 0],'k-');
plot([0 0],[-3 3],'k-');
plot(real(eig(Ad+Bd*K)),imag(eig(Ad+Bd*K)),'r*')
subplot(1,2,2)
plot(cos(linspace(0, 2*pi, 360)), sin(linspace(0, 2*pi, 360)));
hold on; axis([0.9 1.01 -0.055 0.055]); grid on;
plot([-3 3],[0 0],'k-');
plot([0 0],[-3 3],'k-');
plot(real(eig(Ad+Bd*K)),imag(eig(Ad+Bd*K)),'r*')

% #####
%   SIMULACIJA ZATVORENOG KRUGA + IMPULSNI POREMEĆAJ (MOMENT)
% #####
Tsim = 10;
Nsim = round(Tsim/Ts);

ut(:,1) = K * xt(:,1);
ut_lin(:,1) = K * xt_lin(:,1);

% poremećaj - moment
pocetak = 5.0;    % početak poremećaja
trajanje = 2.0;   % trajanje poremećaja
tau0 = -0.3;      % iznos momenta
k_start = round(pocetak/Ts) + 1;
k_trajanje = max(1, round(trajanje/Ts));
k_kraj = min(k_start + k_trajanje - 1, Nsim+1);

tau = zeros(1, Nsim+1);
tau(k_start:k_kraj) = tau0;

Ed = [0; Ts*hk/J; 0; Ts*(1/J)];

for k = 1:Nsim

    % nelinearni model
    xt(1,k+1) = Ts*xt(2,k) + xt(1,k);

    xt(2,k+1) = Ts*(hk*1/(m*(xt(1,k))^2+J) * (m*hk*xt(1,k)*(xt(4,k))^2 ...
        - 2*m*xt(1,k)*xt(2,k)*xt(4,k) - xt(2,k)*ke*km*hk/(po^2*r^2*R) ...
        - m*g*xt(1,k)*cos(xt(3,k)) + M*g*ht*sin(xt(3,k)) - c*xt(4,k) ...
        + ut(k)*hk*km/(po*r*R) + tau(k)) + xt(1,k)*(xt(4,k))^2 -
    g*sin(xt(3,k)) ...
        - xt(2,k)*ke*km/(po^2*r^2*R*m) + ut(k)*km/(po*r*R*m)) + xt(2,k);

    xt(3,k+1) = Ts*xt(4,k) + xt(3,k);

    xt(4,k+1) = Ts/(m*(xt(1,k))^2+J) * (m*hk*xt(1,k)*(xt(4,k))^2 ...
        - 2*m*xt(1,k)*xt(2,k)*xt(4,k) - xt(2,k)*ke*km*hk/(po^2*r^2*R) ...
        - m*g*xt(1,k)*cos(xt(3,k)) + M*g*ht*sin(xt(3,k)) - c*xt(4,k) ...
        + ut(k)*hk*km/(po*r*R) + tau(k)) + xt(4,k);

    ut(k+1) = K * xt(:,k+1);

    % Linearizirani model

```

```

    xt_lin(:,k+1) = Ad*xt_lin(:,k) + Bd*ut_lin(k) + Ed * tau(k);
    ut_lin(k+1)   = K * xt_lin(:,k+1);

end

% Crtanje
t = (0:Nsim)*Ts;

figure('Color','w');

subplot(2,1,1);
plot(t, xt(1,:), 'b', t, xt_lin(1,:), 'r');
grid on
xlabel('Vrijeme [s]'); ylabel('položaj p(t) [m]');
title('Položaj mase - regulirano uz poremećaj');
legend('Nelinearni model', 'Linearizirani model');

subplot(2,1,2);
% Lijeva os: kut
yyaxis left
plot(t, xt(3,:), 'b', t, xt_lin(3,:), 'r-'); hold on
ylabel('kut \phi(t) [rad]');
grid on
yL = max(abs([xt(3,:) xt_lin(3,:)])); if yL==0, yL=1; end
ylim(1.05*[-yL yL]);
ax = gca; ax.YColor = 'k';
% Desna os: moment
yyaxis right
stairs(t, tau, 'g--', 'LineWidth', 1.2);
ylabel('moment [N m]');
yR = max(abs(tau)); if yR==0, yR=1; end
ylim(1.05*[-yR yR]);
ax = gca; ax.YColor = 'k';

xlabel('Vrijeme [s]');
title('Kut rotacije - regulirano uz poremećaj');
legend('Nelinearni model', 'Linearizirani model', 'Poremećaj');

```