

# Proizvodni gubitci uslijed tranzijentnog odziva proizvodnih linija

---

**Erceg, Andrej**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:330239>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-05**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Andrej Erceg**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Neven Hadžić

Student:

Andrej Erceg

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru, Izv. prof. dr. sc. Nevenu Hadžiću na vremenu, trudu i prenesenom znanju uloženom u ovaj rad, te obitelji i prijateljima na strpljenju i podršci.

Andrej Erceg



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 23 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 23 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Andrej Erceg**

JMBAG: **0035214481**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Proizvodni gubici uslijed tranzijentnog odziva proizvodnih linija**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Production losses due to transient response of production lines**

Opis zadatka:

Niz tehnoloških postupaka međusobno vezanih transportnim sredstvima i međuskladištima čini proizvodni proces. Suvremeni pristup upravljanju proizvodnim procesima podrazumijeva primjenu metoda proizvodnog inženjerstva temeljenih na Markovljevim lanacima pomoću kojih je moguće provesti evaluaciju ustaljenog i tranzijentnog odziva proizvodnih linija iz čijeg odnosa proizlaze proizvodni gubici. U radu je stoga potrebno a) prikazati teorijsku razradu problema, b) izraditi programski kod za evaluaciju tranzijentnih ključnih značajki proizvodnih linija i c) provesti analizu proizvodnih gubitaka do postizanja ustaljenog odziva. U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

30. 11. 2022.

**1. rok:** 20. 2. 2023.  
**2. rok (izvanredni):** 10. 7. 2023.  
**3. rok:** 18. 9. 2023.

**1. rok:** 27. 2. – 3. 3. 2023.  
**2. rok (izvanredni):** 14. 7. 2023.  
**3. rok:** 25. 9. – 29. 9. 2023.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Izv. prof. dr. sc. Neven Hadžić

Izv. prof. dr. sc. Ivan Čatipović

## SADRŽAJ

POPIS DIJAGRAMA .....	II
POPIS SLIKA .....	VI
POPIS TABLICA.....	VII
POPIS OZNAKA .....	VIII
SAŽETAK.....	X
SUMMARY .....	XI
1. UVOD.....	1
2. VJEROJATNOST .....	2
2.1. Osnovni principi vjerojatnost.....	2
2.2. Uvjetovana i nezavisna vjerojatnost .....	3
2.3. Stohastički procesi .....	4
2.4. Markovljevi lanci i procesi .....	4
3. ANALITIČKA METODA.....	6
3.1. Postavka problema i tražene vrijednosti .....	6
3.2. Matematički model za linije s 2 stroja .....	7
3.2.1. Formiranje tranzicijske matrice .....	7
3.2.2. Formiranje vektora stanja.....	8
3.2.3. Račun ključnih značajki .....	9
3.3. Matematički model za serijske linije s $M > 2$ stroja .....	10
3.4. Smanjenje vremena računanja .....	11
4. METODA KONAČNIH STANJA .....	13
5. USPOREDBA REZULTATA .....	15
5.1. Slučaj A, serijska linija sa 3 stroja .....	16
5.2. Slučaj B, serijska linija sa 3 stroja .....	24
5.3. Slučaj C, serijska linija sa 4 stroja .....	32
5.4. Slučaj D, serijska linija sa 4 stroja .....	43
5.5. Slučaj E, serijska linija sa 5 strojeva.....	54
5.6. Slučaj F, serijska linija sa 5 strojeva.....	68
6. ZAKLJUČAK.....	82
LITERATURA.....	83

**POPIS DIJAGRAMA**

Dijagram 4.1 prikaz distribucije vjerojatnosti pojave stanja za serijsku liniju sa 3 stroja, $p_1 = 0.7, p_2 = 0.6, p_3 = 0.5, N_1 = N_2 = 11$ .....	13
Dijagram 5.1, PR račun analitičkom metodom za slučaj A .....	17
Dijagram 5.2, PR račun metodom komačnih stanja za slučaj A .....	17
Dijagram 5.3, WIP međuskladišta 1 račun analitičkom metodom za slučaj A .....	17
Dijagram 5.4, WIP međuskladišta 2 račun analitičkom metodom za slučaj A .....	18
Dijagram 5.5, WIP međuskladišta 1 račun metodom konačnih stanja za slučaj A .....	18
Dijagram 5.6, WIP međuskladišta 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj A .....	19
Dijagram 5.7, BL stroja 1 račun analitičkom metodom za slučaj A .....	19
Dijagram 5.8, BL stroja 2 račun analitičkom metodom za slučaj A .....	20
Dijagram 5.9, BL stroja 1 račun metodom konačnih stanja za slučaj A .....	20
Dijagram 5.10, BL stroja 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj A .....	21
Dijagram 5.11, ST stroja 2 račun analitičkom metodom za slučaj A.....	21
Dijagram 5.12, ST stroja 3 račun analitičkom metodom za slučaj A.....	22
Dijagram 5.13, ST stroja 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj A.....	22
Dijagram 5.14, ST stroja 3 račun metodom konačnih stanja za slučaj A.....	23
Dijagram 5.15, PR račun analitičkom metodom za slučaj B.....	24
Dijagram 5.16, PR račun metodom konačnih stanja za slučaj B.....	25
Dijagram 5.17, WIP međuskladišta 1 račun analitičkom metodom za slučaj B .....	25
Dijagram 5.18, WIP međuskladišta 2 račun analitičkom metodom za slučaj B .....	26
Dijagram 5.19, WIP međuskladišta 1 račun metodom konačnih stanja za slučaj B .....	26
Dijagram 5.20, WIP međuskladišta 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj B .....	27
Dijagram 5.21, BL stroja 1 račun analitičkom metodom za slučaj B.....	27
Dijagram 5.22, BL stroja 2 račun analitičkom metodom za slučaj B.....	28
Dijagram 5.23, BL stroja 1 račun metodom konačnih stanja za slučaj B .....	28
Dijagram 5.24, BL stroja 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj B .....	29
Dijagram 5.25, ST stroja 2 račun analitičkom metodom za slučaj B.....	29
Dijagram 5.26, ST stroja 3 račun analitičkom metodom za slučaj B.....	30
Dijagram 5.27, ST stroja 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj B.....	30
Dijagram 5.28, ST stroja 3 račun metodom konačnih stanja za slučaj B.....	31
Dijagram 5.29, PR račun analitičkom metodom za slučaj C.....	32
Dijagram 5.30, PR račun metodom konačnih stanja za slučaj C.....	33

Dijagram 5.31, WIP međuskladišta 1 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	33
Dijagram 5.32, WIP međuskladišta 2 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	34
Dijagram 5.33, WIP međuskladišta 3 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	34
Dijagram 5.34, WIP međuskladišta 1 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	35
Dijagram 5.35, WIP međuskladišta 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	35
Dijagram 5.36, WIP međuskladišta 3 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	36
Dijagram 5.37, BL stroja 1 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	36
Dijagram 5.38, BL stroja 2 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	37
Dijagram 5.39, BL stroja 3 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	37
Dijagram 5.40, BL stroja 1 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	38
Dijagram 5.41, BL stroja 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	38
Dijagram 5.42, BL stroja 3 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	39
Dijagram 5.43, ST stroja 2 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	39
Dijagram 5.44, ST stroja 3 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	40
Dijagram 5.45, ST stroja 4 račun analitičkom metodom za slučaj C .....	40
Dijagram 5.46, ST stroja 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	41
Dijagram 5.47, ST stroja 3 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	41
Dijagram 5.48, ST stroja 4 račun metodom konačnih stanja za slučaj C .....	42
Dijagram 5.49, PR račun analitičkom metodom za slučaj D .....	43
Dijagram 5.50, PR račun metodom konačnih stanja za slučaj D .....	44
Dijagram 5.51, WIP međuskladišta 1 račun analitičkom metodom za slučaj D .....	44
Dijagram 5.52, WIP međuskladišta 2 račun analitičkom metodom za slučaj D .....	45
Dijagram 5.53, WIP međuskladišta 3 račun analitičkom metodom za slučaj D .....	45
Dijagram 5.54, WIP međuskladišta 1 račun metodom konačnih stanja za slučaj D .....	46
Dijagram 5.55, WIP međuskladišta 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj D .....	46
Dijagram 5.56, WIP međuskladišta 3 račun metodom konačnih stanja za slučaj D .....	47
Dijagram 5.57, BL stroja 1 račun analitičkom metodom za slučaj D .....	47
Dijagram 5.58, BL stroja 2 račun analitičkom metodom za slučaj D .....	48
Dijagram 5.59, BL stroja 3 račun analitičkom metodom za slučaj D .....	48
Dijagram 5.60, BL stroja 1 račun metodom konačnih stanja za slučaj D .....	49
Dijagram 5.61, BL stroja 2 račun metodom konačnih stanja za slučaj D .....	49
Dijagram 5.62, BL stroja 3 račun metodom konačnih stanja za slučaj D .....	50
Dijagram 5.63, ST stroja 2 račun analitičkom metodom za slučaj D .....	50
Dijagram 5.64, ST stroja 3 račun analitičkom metodom za slučaj D .....	51



Dijagram 5.65, ST stroja 4 računat analitičkom metodom za slučaj D.....	51
Dijagram 5.66, ST stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj D.....	52
Dijagram 5.67, ST stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj D.....	52
Dijagram 5.68, ST stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj D.....	53
Dijagram 5.69, PR računat analitičkom metodom za slučaj E.....	54
Dijagram 5.70, PR računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	55
Dijagram 5.71, WIP međuskladišta 1 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	55
Dijagram 5.72, WIP međuskladišta 2 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	56
Dijagram 5.73, WIP međuskladišta 3 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	56
Dijagram 5.74, WIP međuskladišta 4 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	57
Dijagram 5.75, WIP međuskladišta 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	57
Dijagram 5.76, WIP međuskladišta 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	58
Dijagram 5.77, WIP međuskladišta 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	58
Dijagram 5.78, WIP međuskladišta 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	59
Dijagram 5.79, BL stroja 1 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	59
Dijagram 5.80, BL stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	60
Dijagram 5.81, BL stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	60
Dijagram 5.82, BL stroja 4 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	61
Dijagram 5.83, BL stroja 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	61
Dijagram 5.84, BL stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	62
Dijagram 5.85, BL stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	62
Dijagram 5.86, BL stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	63
Dijagram 5.87, ST stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	63
Dijagram 5.88, ST stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	64
Dijagram 5.89, ST stroja 4 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	64
Dijagram 5.90, ST stroja 5 računat analitičkom metodom za slučaj E.....	65
Dijagram 5.91, ST stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	65
Dijagram 5.92, ST stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	66
Dijagram 5.93, ST stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	66
Dijagram 5.94, ST stroja 5 računat metodom konačnih stanja za slučaj E.....	67
Dijagram 5.95, PR računat analitičkom metodom za slučaj F.....	68
Dijagram 5.96, PR računat metodom konačnih stanja za slučaj F.....	69
Dijagram 5.97, WIP međuskladišta 1 računat analitičkom metodom za slučaj F.....	69
Dijagram 5.98, WIP međuskladišta 2 računat analitičkom metodom za slučaj F.....	70

---

Dijagram 5.99, WIP međuskladišta 3 računat analitičkom metotom za slučaj F.....	70
Dijagram 5.100, WIP međuskladišta 4 računat analitičkom metotom za slučaj F.....	71
Dijagram 5.101, WIP međuskladišta 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj F.....	71
Dijagram 5.102, WIP međuskladišta 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj F.....	72
Dijagram 5.103, WIP međuskladišta 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj F.....	72
Dijagram 5.104, WIP međuskladišta 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj F.....	73
Dijagram 5.105, BL stroja 1 računat analitičkom metodom za slučaj F .....	73
Dijagram 5.106, BL stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj F .....	74
Dijagram 5.107, BL stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj F .....	74
Dijagram 5.108, BL stroja 4 računat analitičkom metodom za slučaj F .....	75
Dijagram 5.109, BL stroja 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj F .....	75
Dijagram 5.110, BL stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj F .....	76
Dijagram 5.111, BL stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj F .....	76
Dijagram 5.112, BL stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj F .....	77
Dijagram 5.113, ST stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj F .....	77
Dijagram 5.114, ST stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj F .....	78
Dijagram 5.115, ST stroja 4, računat analitičkom metodom za slučaj F .....	78
Dijagram 5.116, ST stroja 5 računat analitičkom metodom za slučaj F .....	79
Dijagram 5.117, ST stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj F .....	79
Dijagram 5.118, ST stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj F .....	80
Dijagram 5.119, ST stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj F .....	80
Dijagram 5.120, ST stroja 5 računat metodom konačnih stanja za slučaj F .....	81

---

**POPIS SLIKA**

Slika 2.1, prikaz 4 ishoda eksperimenta u skupu  $S$  ..... 3

Slika 2.2, grafički prikaz Markovljevog lanca sa nasumičnim vrijednostima vjerojatnosti ..... 4

Slika 3.1, prikaz serijske Bernoulli-jeve linije ..... 6

**POPIS TABLICA**

Tablica 5.1 Legenda slučaja .....	15
Tablica 5.2 Legenda slučaja A .....	16
Tablica 5.3 Legenda slučaja B .....	24
Tablica 5.4 Legenda slučaja C .....	32
Tablica 5.5 Legenda slučaja D .....	43
Tablica 5.6 Legenda slučaja E.....	54
Tablica 5.7 Legenda slučaja F.....	68

**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$p$	/	Vjerojatnost događaja
$S$	/	Skup
$\zeta$	/	Rezultat eksperimenta
$A, B, C$	/	Događaji
$X(n)$	/	Stohastički proces
$n$	/	Broj ciklusa
$M$	/	Broj strojeva u liniji
$m_i$	/	oznaka stroja $i$
$N_i$	/	Kapacitet međuskладиšta $i$
$p_i$	/	Pouzdanost stroja $i$
$PR$	/	produktivnost
$WIP_i$	/	Prosječna količina proizvoda u međuskладиštu $i$
$BL_i$	/	Vjerojatnost blokade stroja $i$
$ST_i$	/	Vjerojatnost praznog hoda stroja $i$
$h_i$	/	oznaka $i$ stanja sustava
$d$	/	Dimenzija matrica
$\{\pi_i\}$	/	Vektor vjerojatnosti stanja za ciklus $i$
$\pi_{ij}$	/	Vjerojatnost pojave stanja $j$ u setu stanja $i$
$[P]$	/	Tranzijentna matrica
$\lambda_i$	/	Svojstvena vrijednost tranzijentne matrice
$[\Lambda]$	/	Dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti
$\{u\}$	/	Desni svojstveni vektor
$[U]$	/	Matrica desnih svojstvenih vektora

[V]	/	Matrica lijevih svojstvenih vektora
[H],[I]	/	Pomoćne matrice za normalizaciju svojstvenih vektora
[V <sub>norm</sub> ]	/	Matrica normaliziranih lijevih svojstvenih vektora

---

## SAŽETAK

U brodograđevnim procesima se primjenjuju proizvodne linije sa tehnološkim procesima čije se karakteristike daju opisati matematičkim funkcijama vjerojatnosti. Taj postupak je do sada proveden više puta korištenjem Markovljevih lanaca, koji se svodi na problem svojstvenih vrijednosti. Radi bržeg računanja, većinom se koristila samo jedna od tih svojstvenih vrijednosti. U ovom radu će se analizirati točnost i ušteda vremena korištenja jedne i više njih u računanju proizvodnih značajki u tranzijentnom dijelu odziva proizvodnih linija.

Ključne riječi: *Proizvodna industrija, Brodograđevni proizvodni proces, Markovljev lanac, Serijske Bernoulli-jeve proizvodne linije, Metoda konačnih stanja, Analitička metoda*

**SUMMARY**

Production lines applied in ship manufacturing processes can be mathematically modeled using probability theory. Those procedures have been defined many times via Markov chains, leading to an eigenvalue problem. So far, only the first of many eigenvalues was used, in order to reduce evaluation time. This paper aims to analyze the efficiency and accuracy of such procedures when one and more eigenvalues are taken into account. The analysis will include the analytical and finite state methods.

*Keywords: Manufacturing industry, Shipbuilding manufacturing process, Markov chain, Serial Bernoulli production lines, Finite state method, Analytical method*



## 1. UVOD

Od brodograđevnih proizvodnih linija, kao i ostalih, se traži da budu čim efikasnije, te da budu u mogućnosti proizvesti što veći broj proizvoda ili poluproizvoda u nekom vremenu. Kako bi se ona povećala, može se gledati na pojedinačne elemente, strojeve, radnike i druge pojedinačne faktore, no važno je razmotriti i kvalitetu čitave linije kao takve.

Jedna od ključnih točaka razmatranja čitave linije je interakcija između strojeva. Iako strojevi nisu direktno povezani, vežu ih poluproizvodi koji moraju proći niz tehnoloških postupaka u točno određenom redosljedu. To može dovesti do neželjenih posljedica, gdje prestanak rada jednog stroja može zaustaviti cijelu liniju jer ni jedan stroj iza navedenog nema sa čime raditi, a oni ispred njega ne mogu raditi jer već obrađeni element stoji u njima i čeka sljedeći postupak obrade. S obzirom da su svi strojevi nepouzđani u nekoj mjeri, između njih se mogu postaviti međuskladišta koja omogućavaju rad stroja usprkos potencijalnom prestanku rada prethodnog time što stroj može vući rezerve poluproizvoda iz njega. Tim načinom razmišljanja se principijalno može poboljšati produktivnost proizvodne linije.

Radi daljnjeg poboljšanja efektivnosti i efikasnosti proizvodne linije se ulazi dublje u detalje. Detaljnijom analizom se mogu otkriti mjesta u proizvodnoj liniji gdje se proces najviše usporava, što daje mogućnost na koncentriranje napora na rješavanje najbitnijih problema. Također, analiza pomaže pri nalaženju najvitkije proizvodne linije, koja ima najmanji kapacitet prostora između strojeva, a da se pri tome održi zadovoljavajuća razina vremenske efikasnosti. Tokom trajanja proizvodnje, izlazne karakteristike proizvodnog sustava se približavaju nekoj asimptoti, što zovemo ustaljenim odzivom. U ovom radu se neće proučavati sustavi koji dugo rade, već novo napravljeni sustavi, ili oni koji su prošli kroz neku promjenu koja im mjenja karakteristike. Analizirati će se dio odziva koji se odnosi na relativno maleni, početni broj ciklusa tokom kojeg se ključne značajke mijenjaju sa svakim ciklusom. To nazivamo tranzijentnim odzivom.

## 2. VJEROJATNOST

Proizvodni gubici nastaju uslijed nepouzdanosti strojeva. Ona je po svojoj prirodi statistička značajka, te je zato bitno razmatrati probleme vezane uz nju putem vjerojatnosti.

U ovome radu se pouzdanost stroja uzima kao omjer broja ciklusa u kojima je stroj sposoban obaviti svoju funkciju u odnosu na broj ciklusa koliko je radna linija aktivna. Ciklus je definiran kao vrijeme potrebno za svaki stroj ili dio stroja da obavi svoju radnju. Za to vrijeme se pretpostavlja da je jednako za sve strojeve, te se ne gleda koliko je ono dugo.

Kako bi radili sa takvim značajkama moramo biti upoznati sa principima vjerojatnosti, pa slijedi pregled najbitnijih stavki za ovaj rad

### 2.1. Osnovni principi vjerojatnost

Neke od značajki proizvodnog procesa su stohastičke, ali mogu se mjeriti eksperimentima označenim sa  $E$ . Tako se, primjerice, može promatrati rad nekog stroja tokom 1000 radnih ciklusa, gdje je svaki ciklus zasebni eksperiment, i zaključiti da nije funkcionirao 100 od tih ciklusa. Vjerojatnost njegovog kvara je omjer eksperimenata sa dobivenim rezultatom i ukupnog broja provedenih eksperimenata, u ovom slučaju  $100/1000$ , to jest  $0,1$ .

Za sve iole kompliciranije slučajeve prvo se treba upoznati sa osnovnim načinima kako slučajni procesi funkcioniraju.

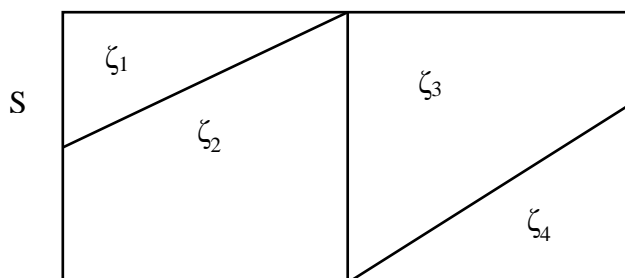
Osnovne karakteristike slučajnih procesa su:

- i) Vjerojatnost pojavljivanja nekog događaja u nekim uvjetima je uvijek  $1 \geq p \geq 0$ .
- ii) Vjerojatnost nemogućeg događaja je jednaka  $0$ .
- iii) Vjerojatnost događaja koji će se sigurno dogoditi je jednaka  $1$
- iv) Suma svih mogućih događaja se zove skup ( $S$ ), i njegova je vjerojatnost uvijek  $p[S]=1$
- v) Vjerojatnost pojavljivanja nekog događaja je  $P$ , dok je vjerojatnost ne pojavljivanja istog  $1-P$ . Ta relacija se zove komplementarnost, za  $P$  označena sa  $P^C$

Vjerojatnosti se daju lijepo prikazati grafički, tako da je ukupni skup događaja oblik bezdimenzijske površine  $1$ , i u njemu se nalaze elementi čija površina odgovara njihovoj vjerojatnosti.

U skupu prije spomenutih eksperimenata, dva su ishoda: da stroj radi ili ne. Ishodi eksperimenata se označavaju sa  $\zeta$ , i oni su međusobno isključivi. Suma svih ishoda je skup. Za  $n$  ishoda eksperimenata:

$$\sum_{i=0}^n P[\zeta_i] = \cup_{i=0}^n \zeta_i = 1. \quad (2.1)$$



Slika 2.1, prikaz 4 ishoda eksperimenta u skupu S

Ishode eksperimenata možemo postaviti u podskupove, koji imaju svoja svojstva. Recimo da imamo dva podskupa  $A$  i  $B$ , koji nisu međusobno isključivi. Skup  $A$  je sastavljen od  $\zeta_1, \zeta_2$  i  $\zeta_3$ , a  $B$  od  $\zeta_2, \zeta_3$  i  $\zeta_4$ . Za njih općenito vrijedi:

$$p[A \cup B] = p[A] + p[B] - p[A \cap B]. \quad (2.2)$$

Ako je  $A$  unutar ili jednak  $B$ , primjerica  $A$  sadrži  $\zeta_2$  i  $\zeta_3$ , a  $B$   $\zeta_1, \zeta_2$  i  $\zeta_3$ :

$$A \subseteq B, \quad (2.3)$$

$$p[A] \leq p[B], \quad (2.4)$$

$$p[A \cup B] = p[B], \quad (2.5)$$

## 2.2. Uvjetovana i nezavisna vjerojatnost

Vjerojatnost je uvjetovana ako se uz vjerojatnost nekog događaja,  $A$  postavlja uvjet da se mora dogoditi samo ako se dogodio događaj  $B$ . Tada je vjerojatnost događaja  $A$  uz uvjet događanja  $B$ :

$$p[A|B] = \frac{p[A \cap B]}{p[B]}, \quad (2.6)$$

te je

$$p[A \cap B] = p[A|B]P[B]. \quad (2.7)$$

Nezavisnost je manjak uvjetovanosti. Ako su događaji  $A$  i  $B$  nezavisni, onda je:

$$p[A|B] = p[A], \quad (2.8)$$

te je:

$$p[A \cap B] = p[A]P[B], \quad (2.9)$$

a za presjek  $i$  događaja:

$$p[A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_i] = p[A_1]p[A_2] \cdots p[A_i]. \quad (2.10)$$

Također, ako je neki događaj  $B$  dio skupa  $S$ , a suma vjerojatnosti svih  $A_i$  događaja je jednaka 1, onda je

$$\{B \cap A_1\} \cup \{B \cap A_2\} \cup \dots \cup \{B \cap A_i\} = B, \quad (2.11)$$

te je stoga:

$$p[B] = p[B|A_1]p[A_1] + p[B|A_2]p[A_2] + \dots + p[B|A_i]p[A_i]. \quad (2.12)$$

### 2.3. Stohastički procesi

Stohastički procesi su slučajne varijable ovisne o vremenu. Njihovo ponašanje se opisuje putem funkcija vjerojatnosti. Način na koji se pouzdanost strojeva razmatra u okviru ovog rada ne daje informacije o faktorima koji uzrokuju prestanak niti ponovni početak funkcioniranja bilo kojeg stroja.

Također, ni jedan stroj ne uzima u obzir u kojem je ciklusu. Za potrebe ovog rada ne postoje informacije poput prosječnog vremena između kvarova na strojevima, prosječnog vremena popravka istih niti bilo koje informacije u kojem trenutku će se dogoditi neki od tih slučajeva. Zaključujemo da je sustav stohastičan, ergodičan i u diskretnom vremenu. Model procesa koji će se koristiti za opisivanje rada takvih sustava se naziva Markovljev proces.

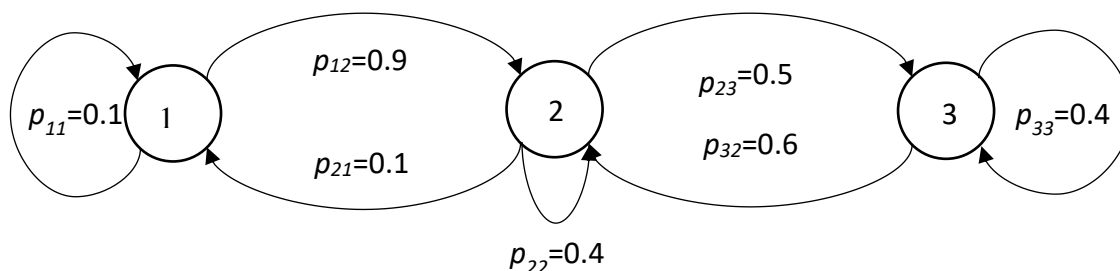
### 2.4. Markovljevi lanci i procesi

Markovljev lanac pretpostavlja da sustav u nekom stanju ima konačni broj ishoda, te će se ono promjeniti u neko drugo stanje ili ostati u istom sa određenim vjerojatnostima u svakom ciklusu. Sustav će u svakom stanju ili preći u neko drugo stanje, ili ostati u istom. Te mogućnosti su međusobno isključive, te je zbroj njihovih vjerojatnosti 1.

Te pretpostavke se matematički zapisuju na idući način [1] :

$$p[X(n+1) = i | X(n) = j, X(n-1) = k, \dots] = p[X(n+1) = i | X(n) = j] \\ n \in N; \forall i, j, k, \dots \in S. \quad (2.13)$$

Ta vjerojatnost se zapisuje kao  $P_{ij}$ , to jest vjerojatnost da će sustav iz stanja  $i$  preći u stanje  $j$ .



Slika 2.2, grafički prikaz Markovljevog lanca sa nasumičnim vrijednostima vjerojatnosti

Ta vjerojatnost će u ovom radu biti vjerojatnost da se neko međuskладиште napuni, isprazni za 1 ili ostane u istom stanju. Takav zapis nam daje mogućnost da sve vjerojatnosti prelaska stanja zapišemo u kvadratnu matricu  $[P]$  izgleda

$$[P] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1S} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{S1} & p_{S2} & \cdots & p_{SS} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

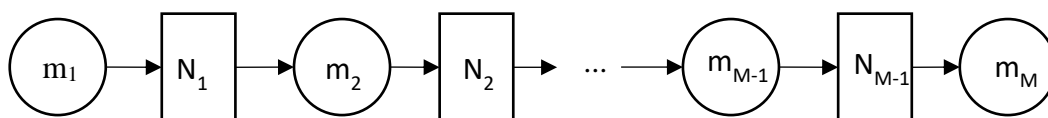
kojoj je svaki stupac skup, to jest suma njegovih elemenata je jednaka 1. Mora biti tako jer svaki stupac predstavlja vjerojatnosti za prelazak iz trenutnog stanja u neko drugo.

### 3. ANALITIČKA METODA

Analitička metoda se zasniva na direktnoj analizi proizvodnih linija putem Markovljevih lanaca. Najkompliciranija je metoda i relativno računski zahtjevna, no sigurno je najtočnija i sa njom se mogu uspoređivati rezultati svih ostalih načina mjerenja kvalitete linije.

#### 3.1. Postavka problema i tražene vrijednosti

Razmatrana je Bernoulli-eva linija strojeva, koja se sastoji od  $M$  strojeva i  $M-1$  međuskladišta koji se nalaze između njih.



Slika 3.1, prikaz serijske Bernoulli-jeve linije

To nam daje dovoljno dobar opis klasične proizvodne linije u brodogradilištu, poput linije za predobradu limova.

Stroj opisuje njegova pouzdanost,  $p$ , koja je vjerojatnost da stroj funkcionira, dok je  $p-1$  vjerojatnost da stroj ne funkcionira. Skladišta su numerirana brojem stroja koji se nalazi ispred njih, te je svako skladište opisano svojim kapacitetom  $N$ .

Vrijeme je diskretizirano u cikluse proizvodnje. U svakom ciklusu stroj uzima poluproizvod sa prethodnog međuskladišta, obrađuje ga i stavlja na idući, ako može.

Značajke koje nas zanimaju su:

- Proizvodnost ( $PR$ ) – jedna od najčešće razmatranih mjera, to je vjerojatnost da će posljednji stroj dati proizvod u datom ciklusu
- Očekivani broj poluproizvoda ( $WIP$ ) – također vrlo važna mjera, značajka vezana za međuskladište, ona je prosječna količina poluproizvoda u njemu
- Vjerojatnost blokade ( $BL$ ) – rjeđe razmatrana mjera, definirana kao vjerojatnost da je međuskladište iza danog stroja puno na početku ciklusa i ne može se isprazniti, te zato stroj ne može obavljati funkciju
- Vjerojatnost praznog hoda ( $ST$ ) – također manje važna značajka, vjerojatnost da je međuskladište prije danog stroja prazno, te zato stroj ne može obavljati funkciju

### 3.2. Matematički model za linije s 2 stroja

Linije sa 2 stroja su u praksi rijetke i nisu od prevelikog značaja, ali njihovo razumjevanje je bitno za sastavljanje modela za ostale linije.

Kako bi se sastavio matematički model, postavljene su određene pretpostavke:

- vjerojatnost praznog hoda prvog stroja je 0
  - vjerojatnost blokade zadnjeg stroja je 0
  - određivanje stanja stroja se promatra na početku ciklusa, a stanja međuskладиšta na kraju
  - stanje stroja ne ovisi o stanju drugih strojeva, ni o njegovom stanju u prethodnim ciklusima
- „Stanje“ cijelog sustava je stanje u kojemu su sva međuskладиšta. U ovom slučaju je broj stanja  $N+1$ . Stanje se po međuskладиšteu može promijeniti samo u jedno iznad, jedno ispod ili ostati isto.

#### 3.2.1. Formiranje tranzicijske matrice

Prvi i najbitniji korak je napisati tranzicijsku matricu. Ona opisuje vjerojatnosti promjene stanja iz jednog u neko drugo.

Matricu tranzicija je za ovaj slučaj relativno jednostavno zapisati

$$[P_{00}] = p[h(n+1) = 0 | h(n) = 0] = p[\{m_1 \text{ ne radi}\}]$$

$$[P_{01}] = p[h(n+1) = 0 | h(n) = 1] = p[\{m_1 \text{ ne radi}\} \cap \{m_2 \text{ radi}\}]$$

$$[P_{10}] = p[h(n+1) = 1 | h(n) = 0] = p[\{m_1 \text{ radi}\}]$$

...

$$[P_{ii}] = p[h(n+1) = i | h(n) = i]$$

$$= p[(\{m_1 \text{ radi}\} \cap \{m_2 \text{ radi}\}) \cup (\{m_1 \text{ ne radi}\} \cap \{m_2 \text{ ne radi}\})]$$

$$[P_{i(i+1)}] = p[h(n+1) = i | h(n) = i+1] = p[\{m_1 \text{ ne radi}\} \cap \{m_2 \text{ radi}\}]$$

$$[P_{(i+1)i}] = p[h(n+1) = i+1 | h(n) = i] = p[\{m_1 \text{ radi}\} \cap \{m_2 \text{ ne radi}\}]$$

...

$$[P_{NN}] = p[h(n+1) = N | h(n) = N] = p[(\{m_1 \text{ radi}\} \cap \{m_2 \text{ radi}\}) \cup \{m_2 \text{ ne radi}\}]. \quad (3.1)$$

Svako od tih stanja se zapisuje u polje matrice sa istim indeksima. Matrica nastala tim procesom, kao i kasnije tranzijentne matrice, je kvadratna, dimenzija  $d \times d$ . U ovom slučaju je

$$d = N + 1. \quad (3.2)$$

Jedno od njenih najbitnijih svojstava je to što je suma članova svakog stupca 1

$$\sum_{i=0}^d P_{ij} = 1, \quad (3.3)$$

To je svojstvo Markovljevih lanaca, te nam govori da je suma vjerojatnosti da će sustav preći iz trenutnog stanja u neko drugo ili ostati u svojem 1, što je upravo skup svih mogućnosti tog sustava.

### 3.2.2. Formiranje vektora stanja

Za razmatranje sustava tokom tranzijentnog odziva je iznimno važno dobiti vektore stanja. Oni govore o tome kolika je vjerojatnost da se sustav nađe u nekom stanju za svaki ciklus, počevši od nultog.

Nulti ciklus je definiran početnim vektorom stanja  $\{\pi_0\}$ . On se određuje po vjerojatnosti u kojem stanju sustav može biti prije pokretanja linije. Definiran je na isti način kao tranzijentna matrica, tako da svaki član odgovara istom početnom stanju za svaki stupac tranzijentne matrice. Primjerice, ako je skladište sigurno prazno na početku prvog ciklusa,  $\pi_{0,0} = 1$ , dok su  $\pi_{0,1} \dots \pi_{0,N+1} = 0$ , dok je za nepoznato početno stanje, to jest da je jednaka vjerojatnost za sva stanja svaki član vektora jednak, tj.  $\pi_i = 1/(N+1)$ .

Generalno, matrica stanja se računa iz jednadžbe:

$$\{\pi_i\} = [P]^i \{\pi_0\}, \quad (3.4)$$

to jest

$$\{\pi_i\} = [P]\{\pi_{i-1}\}, \quad (3.5)$$

gdje je  $\{\pi_i\}$  vektor dimenzije  $d$  u kojem su zapisane vjerojatnosti stanja. Smatra se da je sustav prošao tranzijentno stanje kada je  $\{\pi_i\} = \{\pi_{i-1}\}$ .

Kako bi se izbjeglo potenciranje cijele matrice, ona se dijeli na umnožak svojstvene vrijednosti i matrice desnih svosjtevnikih vektora. Oni su vektori za koje vrijedi:

$$[A]\{u\} = \lambda\{u\}, \quad (3.6)$$

te se računaju za svaku svojstvenu vrijednost pojedinačno.

Nakon što su izračunati, posloženi su po redu svojstvenih vrijednosti u kvadratnu matricu dimenzija  $d \times d$ , te se ona naziva matricom desnih svojstvenih vektora, oznake  $[U]$  i oblika je

$$[U] = [\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \dots \quad \{u_d\}]. \quad (3.7)$$

Matrica  $P$  postaje

$$[P] = [U][A][U]^{-1}, \quad (3.8)$$

te je njena potencija

$$[P]^i = [U][A]^i[U]^{-1}, \quad (3.9)$$

gdje je  $[A]$  dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti, to jest:



$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Jednadžba (3.9) se u programskom paketu računa kao:

$$\{\pi_i\} = \sum_{j=0}^{N+1} \{U_{*j}\} \Lambda_{jj} \langle U_{*j}^{-1} \rangle \{\pi_{i-1}\}. \quad (3.11)$$

Slaganjem vektora stanja u matricu dobije matrica stanja za dani broj ciklusa, matrica je dimenzija  $(N + 1) \times a$ , gdje je  $a$  broj razmatranih ciklusa. U ovom radu će se u obzir uzeti samo oni vektori stanja koji govore o tranzijentnoj promjeni stanja sustava.

### 3.2.3. Račun ključnih značajki

Sve do sad ispisane jednadžbe su potrebne za račun mjera učinkovitosti proizvodnog procesa. One se dobijaju za svaki promatrani ciklus pojedinačno [2], te zapisuju u grafove poput onih danih u Poglavlju 5.

$PR$  je definirana kao presjek događaja  $\{m_M \text{ radi}\}$  i  $\{b_{M-1} \text{ nije prazno}\}$

$$PR = p[\{m_M \text{ radi}\} \cap \{b_{M-1} \text{ nije prazno}\}], \quad (3.12)$$

$$PR^n = p_M \left( 1 - \sum_{h_1=0}^{\prod_{i=0}^{M-2} (N_i+1)} \pi_{h_{M-1}=0}^n \right), \quad (3.13)$$

gdje  $\pi_{h_{M-1}=0}$  označava pozicije u  $n$ -tom stupcu matrice stanja koje označavaju prazno skladište  $M-1$ .

$WIP$  se definira kao umnožak vjerojatnosti da je određen broj poluproizvoda u međuskladištu i tog broja poluproizvoda.

$$WIP_i^n = \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} h_i^n \pi_{h_1, h_2, \dots, h_{M-1}}. \quad (3.14)$$

Također,  $WIP$  se može izračunati za cijelu liniju, i to je suma  $WIP_i$  međuskladišta.

$$WIP^n = \sum_{i=0}^{M-1} WIP_i^n. \quad (3.15)$$

$ST$  je presjek događaja

$$ST_i = [\{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_{i-1} \text{ je prazno}\}], \quad (3.16)$$

te se za svaki ciklus se računa kao

$$ST_i^n = \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} \pi_{h_{i-1}=0}^n . \quad (3.17)$$

$BL$  je vjerojatnost presjeka sljedećih događaja

$$BL_i = [\{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_i \text{ je puno}\} \cap (\{m_{i+1} \text{ ne radi}\} \cup \{m_{i+1} \text{ je u blokadi}\})]. \quad (3.18)$$

te se za svaki ciklus računa kao:

$$BL_i^n = p_i(1 - p_{i+1} + BL_{i+1}^n) \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} \pi_{h_i=N_i}^n . \quad (3.19)$$

Naravno, vjerojatnost blokade posljednjeg stroja je 0, tako da račun blokade kreće od predzadnjeg stroja u liniji,  $m_{M-1}$ .

### 3.3. Matematički model za serijske linije s $M > 2$ stroja

Jedina prava razlika između modela sa jednim i više strojeva je u formiranju tranzijentne matrice. U slučaju linije sa  $M > 2$  stroja, tranzijentna matrica se računa po sličnom sistemu, no biti će mnogo veća. I dalje je kvadratna, no njene dimenzije  $d \times d$  su:

$$d = \prod_{i=0}^{M-1} (N_i + 1) , \quad (3.20)$$

to jest rastu eksponencijalno sa veličinom međuskladišta.

Ta veličina nam je važna jer se njom produžava vrijeme računanja. Kasnije u poglavlju će biti navedeno nekoliko načina skraćivanja tog vremena računanja. Pretpostavke koje se koriste su identične sustavu sa dva stroja.

Tranzicijska matrica zbog svoje veličine i kompleksnosti ne piše direktno, već putem separacije ukupne tranzicijske matrice na niz stohastičkih i nereducirajućih matrica

$$[P(p_1, p_2, \dots, p_M)] = [P_1(p_1)][P_2(p_2)] \cdots [P_M(p_M)], \quad (3.21)$$

gdje razlikujemo početnu, krajnju i središnje matrice.

Početna matrica se odnosi na  $m_i$  i sastavlja se po režimu:

$$[P(p_1)] = \begin{cases} 1 - p_1 \rightarrow [\{h_1^n = h_1^{n+1}\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \cdots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1}\} \cap \{h_1^n < N_1\}] \\ p_1 \rightarrow [\{h_1^n = h_1^{n+1} + 1\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \cdots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1}\} \cap \{h_1^n < N_1\}] \\ 1 \rightarrow [\{h_1^n = h_1^{n+1}\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \cdots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1}\} \cap \{h_1^n = N_1\}] \\ 0 \rightarrow \text{inače} \end{cases} \quad (3.22)$$

Krajnja matrica, koja se odnosi na  $m_M$ , se sastavlja kao:

$$[P(p_M)] = \begin{cases} 1 - p_M \rightarrow [\{h_1^n = h_1^{n+1}\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \dots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1}\} \cap \{h_M^n > 0\}] \\ p_M \rightarrow [\{h_1^n = h_1^{n+1}\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \dots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1} - 1\} \cap \{h_M^n > 0\}] \\ 1 \rightarrow [\{h_1^n = h_1^{n+1}\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \dots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1}\} \cap \{h_1^n = 0\}] \\ 0 \rightarrow \text{inače} \end{cases} \quad (3.23)$$

Središnje matrice, koje se odnose na sve preostale strojeve, se sastavljaju kao:

$$[P(p_i)] = \begin{cases} 1 - p_i \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \{h_1^n = h_1^{n+1}\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \dots \\ \dots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1}\} \cap \{h_i^n < N_i\} \cap \{h_{i-1}^n > 0\} \end{array} \right] \\ p_i \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \{1 + h_1^n = h_1^{n+1}\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \dots \\ \dots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1} + 1\} \cap \{h_i^n < N_i\} \cap \{h_{i-1}^n > 0\} \end{array} \right] \\ 1 \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \{h_1^n = h_1^{n+1}\} \cap \{h_2^n = h_2^{n+1}\} \dots \\ \dots \{h_{M-1}^n = h_{M-1}^{n+1}\} \cap (\{h_i^n = N_i\} \cup \{h_{i-1}^n = 0\}) \end{array} \right] \\ 0 \rightarrow \text{inače} \end{cases} \quad (3.24)$$

### 3.4. Smanjenje vremena računanja

Vrijeme računanja matrice stanja može biti dugotrajan proces, čak i uz moderna računala. Uzrok tome je veličina matrica s kojima treba manipulirati. U ovom radu se koriste dva načina skraćivanja tog vremena, te će oni biti opisani.

Pri računanju matrice stanja koristi se inverz matrice, koji je sam po sebi računski zahjevan, i postaje još mnogo zahtjevniji pri velikim matricama koje se koriste u proračunu. Iz tog razloga se u analitičkoj metodi koristi zamjena vektora  $\langle U_i \rangle^{-1}$  sa  $\langle V \rangle^T$ , gdje je  $V$  „lijevi“ svojstveni vektor. Provedenom zamjenom iz Jednadžbe (3.11) dobiva se jednadžba

$$\{\pi_i\} = \sum_{j=0}^d \{U_{*j}\} \lambda_j \langle V_{norm*j} \rangle^T \{\pi_{i-1}\}. \quad (3.25)$$

Problem kod ove metode je taj što se lijevi i desni svojstveni vektori moraju normalizirati, jer inače ne vrijedi prije navedena zamjena. Kako bi dobiveni rezultat bio točan, oni moraju biti dobiveni iz iste svojstvene vrijednosti, što razni programski alati ne daju uvijek. Kako bi se osigurala istovrsnost svojstvenih vektora, za svaki član vektora  $V$  se na sljedeći način računa faktor s kojim se mora množiti kako bi se vektor normalizirao. Prvo se računa umnožak

$$V^T U = H, \quad (3.26)$$

gdje je  $H$  pomoćna dijagonalna matrica, iz nje se računa

$$I_{ii} = 1/H_{ii} \quad \forall A_{ii} \neq 0. \quad (3.27)$$

Normalizirani vektor  $V$  se dobiva umnožkom

$$V_{norm} = IV, \quad (3.28)$$

te se on koristi u Jednadžbi (3.25).

Ta metoda ima svoju manu, principijalno nije funkcionalna ako su svojstvene vrijednosti prijelazne matrice kompleksne jer se umnoškom  $V^T U$  ne dobija dijagonalna matrica.

Još jedan način skraćivanja vremena računanja je smanjenje broja svojstvenih vrijednosti s kojima se računa matrica stanja. Iako svaka svojstvena vrijednost doprinosi rješenju, ne doprinose sve jednako. Računanje bez manjih svojstvenih vrijednosti većinom daje jako slične rezultate računanju sa svim vrijednostima, dok traje duže radi većeg broja provedenih matematičkih operacija.

Za izvedbu se prvo svojstvene vrijednosti sortiraju uzlazno po veličini, te se vektori u matrici svojstvenih vektora poslože po istom principu. Ako su svojstvene vrijednosti kompleksne, za poredak se uzimaju njihove realne komponente.

Sada možemo računati stanja jednadžbom sličnom Jednadžbi (3.13), ali sa drugačijom sumom i preraspoređenim poretком vektora unutar matrice  $U$ . Ona sad glasi

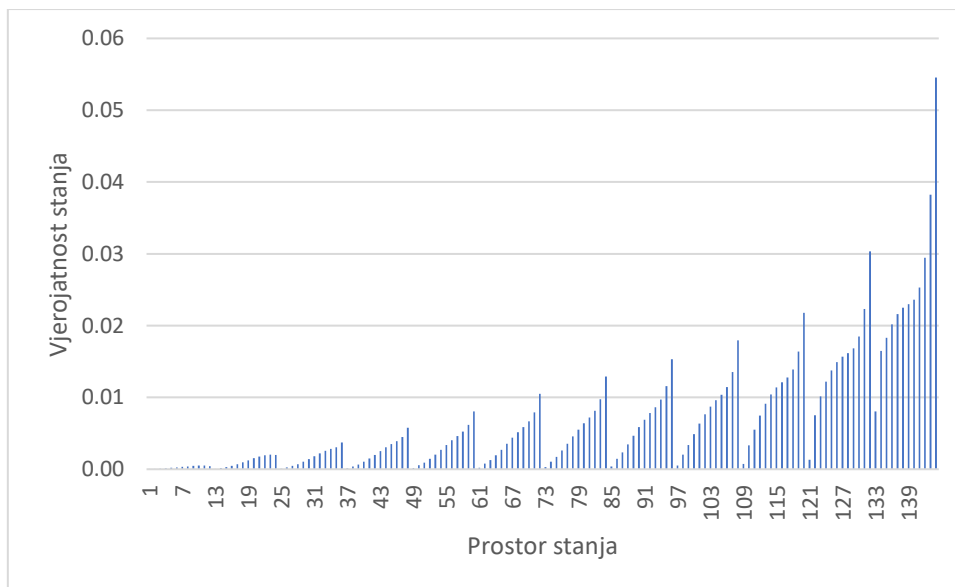
$$\{\pi_i\} = \sum_{j=0}^x \{U_{*j}\} \Lambda_{jj} \langle U_{*j}^{-1} \rangle \{\pi_{i-1}\}, \quad (3.29)$$

gdje je  $x$  broj uračunatih najvećih vrijednosti. Taj postupak je bolje istražen u ovom radu zbog netočnosti rezultata koje daje, o čemu svjedoče rezultati prikazani u Poglavlju 5.

## 4. METODA KONAČNIH STANJA

Metoda konačnih stanja ima vrlo različite korjene od analitičke metode. Ona je razvijena primjećivanjem određenih sličnosti u drugim analizama proizvodnih linija preko Markovljevih lanaca [3].

Prva stavka metode je primjećena proporcionalnost u vrijednostima svojstvenih vektora  $\{\pi\}$ . Naime, prikazivanjem vektora distribucije pojave pojedinog stanja sustava u dijagramu (slika 4.1) se očituje nekoliko sekcija tog vektora koje imaju vrlo slične omjere. Za svaku od sekcija se može odrediti set omjera pojedinačnih vrijednosti i bazne vrijednosti, primjerice one sa početka sekcije. U tim omjerima postoje manja odstupanja, ali ona se mogu zanemariti jer su većinom veličine drugog i trećeg reda.



**Dijagram 4.1 prikaz distribucije vjerojatnosti pojave stanja za serijsku liniju sa 3 stroja,  $p_1 = 0.7, p_2 = 0.6, p_3 = 0.5, N_1 = N_2 = 11$**

U danom primjeru se očituje 12 sekcija, i njihovi omjeri su:

$$\frac{\pi_{01}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{02}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{03}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{04}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{05}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{06}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{07}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{08}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{09}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{010}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{011}}{\pi_{00}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\pi_{111}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{112}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{113}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{114}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{115}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{116}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{117}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{118}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{119}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{1110}}{\pi_{110}}, \frac{\pi_{1111}}{\pi_{110}}. \quad (4.1)$$

Također se daju odrediti omjeri između sekcija:

$$\frac{\pi_{01}}{\pi_{00}} \approx \frac{\pi_{11}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{21}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{31}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{41}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{51}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{61}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{71}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{81}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{91}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{101}}{\pi_{100}} \approx \frac{\pi_{111}}{\pi_{110}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\pi_{0\ 11}}{\pi_{01}} \approx \frac{\pi_{1\ 11}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{2\ 11}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{3\ 11}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{4\ 11}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{5\ 11}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{6\ 11}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{7\ 11}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{8\ 11}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{9\ 11}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{10\ 11}}{\pi_{10\ 0}} \approx \frac{\pi_{11\ 11}}{\pi_{11\ 0}}. \quad (4.2)$$

Druga stavka je sličnost tih omjera omjerima iz svojstvenih vektora linija sa dva stroja. Specifično, te jednostavne linije su one kojima je jedan od strojeva onaj sa najmanjom pouzdanošću, a drugi je za svaku liniju jedan od preostalih. U slučaju prikazanom na Slici 4.1. jedna linija (A) bi imala  $p_a = 0.5$ ,  $p_b = 0.6$  i  $N = 11$ , a druga (B)  $p_a = 0.5$ ,  $p_b = 0.7$  i  $N = 11$  pa je:

$$\frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \approx \frac{\pi_{10}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \approx \frac{\pi_{20}}{\pi_{00}}, \dots, \frac{\pi_{11}^A}{\pi_0^A} \approx \frac{\pi_{11\ 0}}{\pi_{00}} \quad (4.3)$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} &\approx \frac{\pi_{01}}{\pi_{00}} \approx \frac{\pi_{11}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{21}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{31}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{41}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{51}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{61}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{71}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{81}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{91}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{10\ 1}}{\pi_{10\ 0}} \approx \frac{\pi_{11\ 1}}{\pi_{11\ 0}} \\ &\vdots \\ \frac{\pi_{11}^B}{\pi_0^B} &\approx \frac{\pi_{0\ 11}}{\pi_{10}} \frac{\pi_{1\ 11}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{2\ 11}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{3\ 11}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{4\ 11}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{5\ 11}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{6\ 11}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{7\ 11}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{8\ 11}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{9\ 11}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{10\ 11}}{\pi_{10\ 0}} \approx \frac{\pi_{11\ 11}}{\pi_{11\ 0}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Metoda konačnih stanja se provodi formiranjem elemenata od stroja sa najmanjim  $p$ , svima ostalima pojedinačno i jednim međuskladištem. Nakon toga se analitičkom metodom odrede svojstveni vektori elemenata, te se množenjem dobiju ukupni vektori stanja cijele linije.

Ova metoda je računalno iznimno manje zahtjevna i brža od analitičke metode, a moguće je dodatno pojednostavniti proračun zanemarivanjem određenog broja najmanjih svojstvenih vrijednosti. Dijagrami dobiveni njenim korištenjem će se uspoređivati sa dijagramima analitičke metode u Poglavlju 5.

## 5. USPOREDBA REZULTATA

Prije navedenim metodama su dobiveni rezultati ključnih značajki nekoliko sustava. Sustavi koji ulaze u analizu su linearni sustavi sa 3 do 5 strojeva. U početnom stanju su sva međuskladišta prazna za sve slučajeve. Sva međuskladišta imaju kapacitet  $N = 5$ .

Uspoređivati će se rezultati analitičke metode i metode konačnih stanja, te se za svaku proizvodnu značajku prikazuju vrijednosti sa različitim brojem uračunatih svojstvenih vrijednosti.

Rezultati analitičke metode su označeni sa brojevima od 0 do 4, gdje 0 predstavlja rezultate sa uračunatim svim svojstvenim vrijednostima, 1 sa oduzetih 25% najmanjih svojstvenih vrijednosti, 2 sa 50%, 3 sa 75% i 4 sa uračunatom samo najvećom svojstvenom vrijednosti većom od 1

Rezultati metode konačnih stanja su označeni istim brojevima, gdje 0 predstavlja rezultate sa uračunatim svim svojstvenim vrijednostima, 1 sa oduzetih 2, i tim redoslijedom do 4.

Biti će razmatrano 6 slučajeva, čije su karakteristike zapisane u Tablici 5.1.

**Tablica 5.1** Legenda slučaja

<i>Slučaj</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>p</i> <sub>1</sub>	0.6	0.4	0.4	0.7	0.8	0.4
<i>p</i> <sub>2</sub>	0.5	0.5	0.5	0.6	0.7	0.5
<i>p</i> <sub>3</sub>	0.4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.6
<i>p</i> <sub>4</sub>	-	-	0.7	0.4	0.5	0.7
<i>p</i> <sub>5</sub>	-	-	-	-	0.4	0.8
<i>N</i>	5	5	5	5	5	5

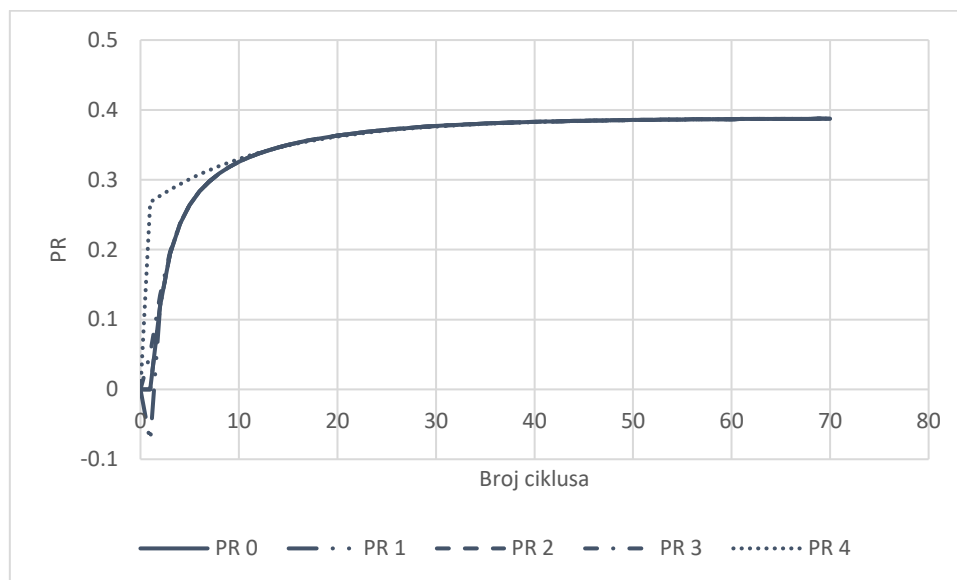
### 5.1. Slučaj A, serijska linija sa 3 stroja

U slučaju A analiziramo serijsku liniju sa 3 stroja, čije su pouzdanosti  $p_1 = 0.6$ ,  $p_2 = 0.5$ ,  $p_3 = 0.4$ , a kapacitet svih međuskладишта  $N=5$ . Legenda je predstavljena u Tablici 5.2.

Tablica 5.2 Legenda slučaja A

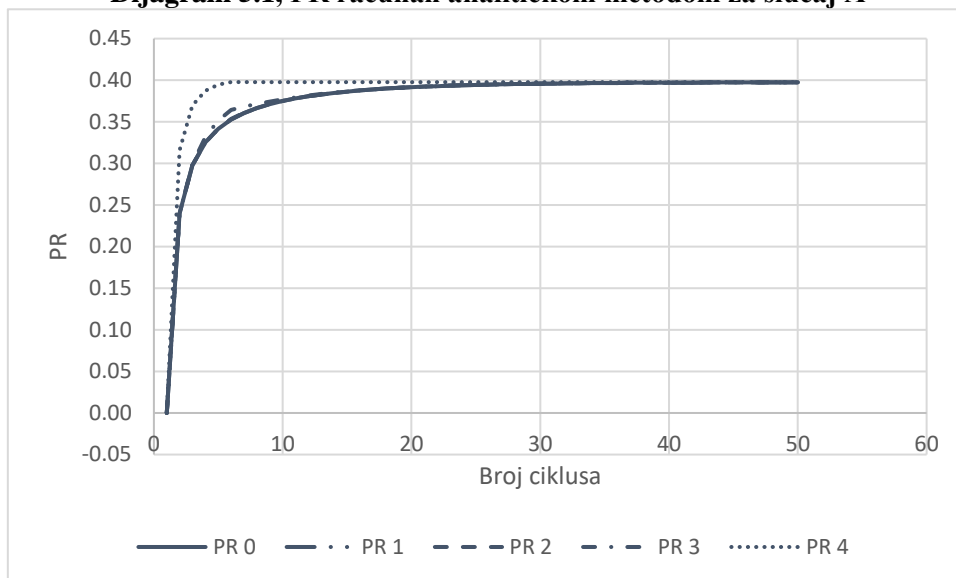
Značenje broja	Analitička metoda	Metoda konačnih stanja
0	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima
1	Zanemarenje 25% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje najmanje svojstvene vrijednosti
2	Zanemarenje 50% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje dvije najmanje svojstvene vrijednosti
3	Zanemarenje 75% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje tri najmanje svojstvene vrijednosti
4	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće

Proizvodnost:



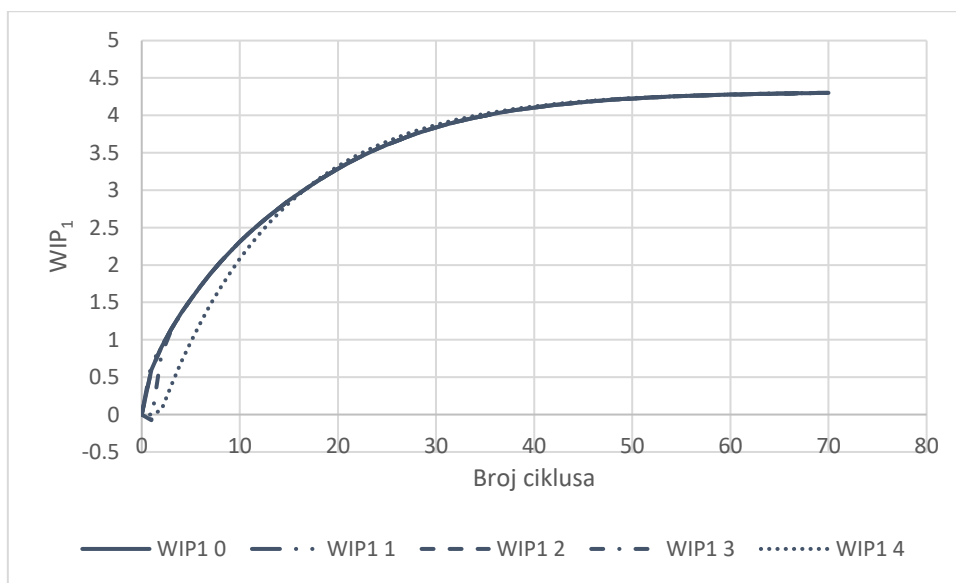


**Dijagram 5.1, PR račun analitičkom metodom za slučaj A**

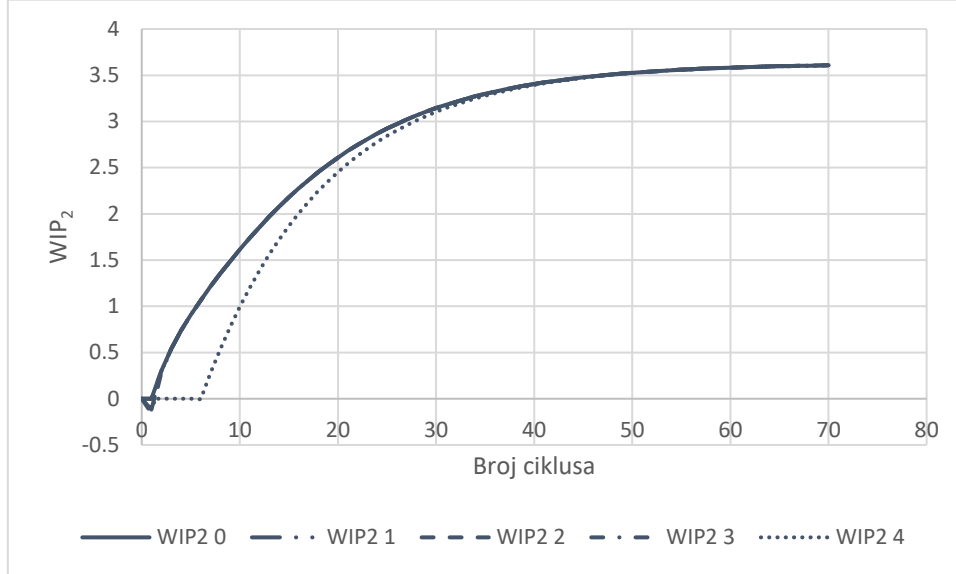


**Dijagram 5.2, PR račun metodom komačnih stanja za slučaj A**

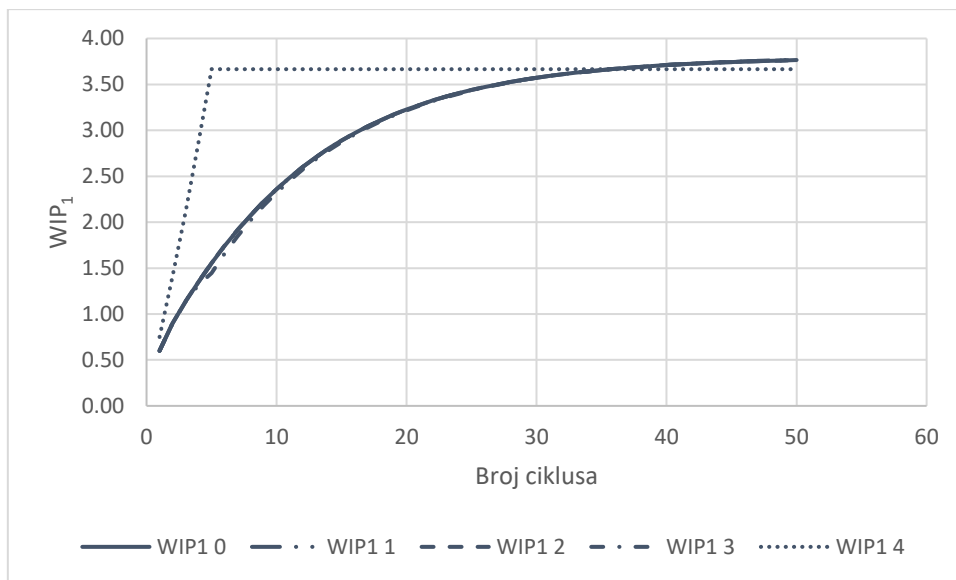
Popunjenost međuskладиšta:



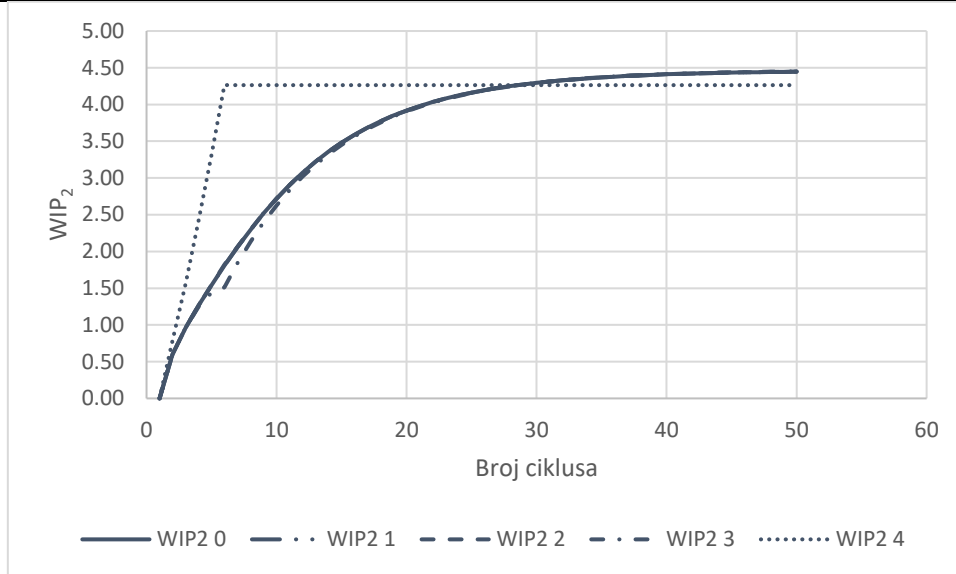
**Dijagram 5.3, WIP međuskладиšta 1 račun analitičkom metodom za slučaj A**



**Dijagram 5.4, WIP međuskladišta 2 računano analitičkom metodom za slučaj A**

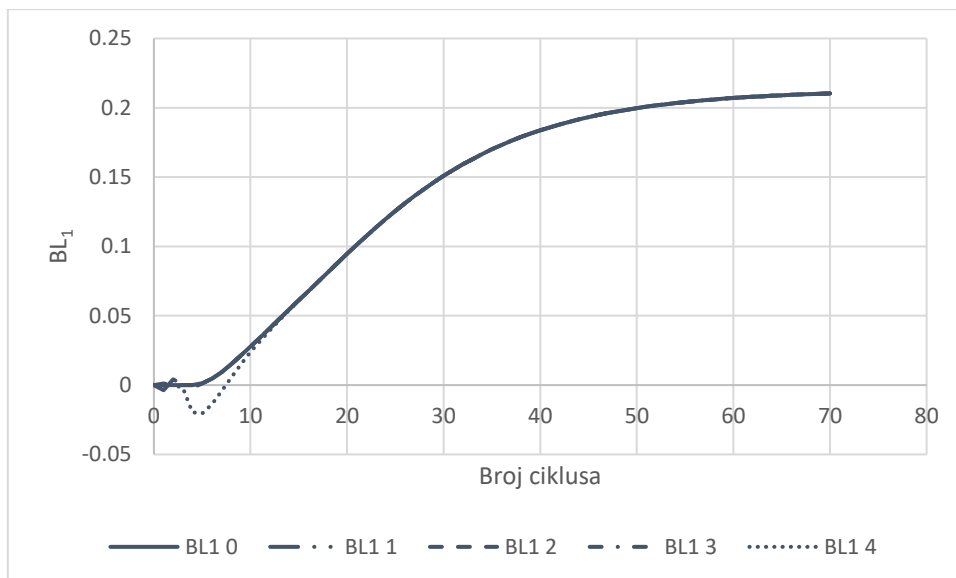


**Dijagram 5.5, WIP međuskladišta 1 računano metodom konačnih stanja za slučaj A**

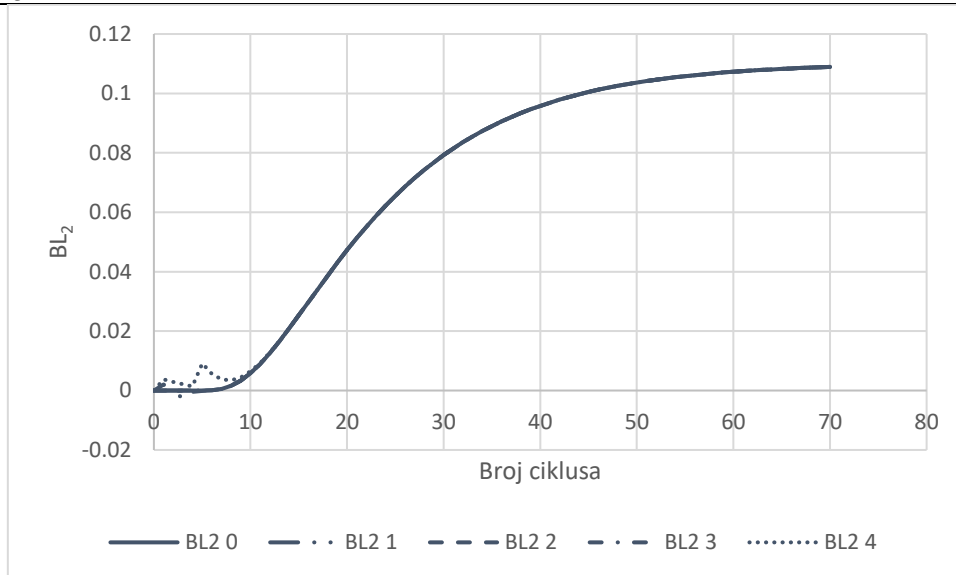


**Dijagram 5.6, WIP međuskladišta 2 računano metodom konačnih stanja za slučaj A**

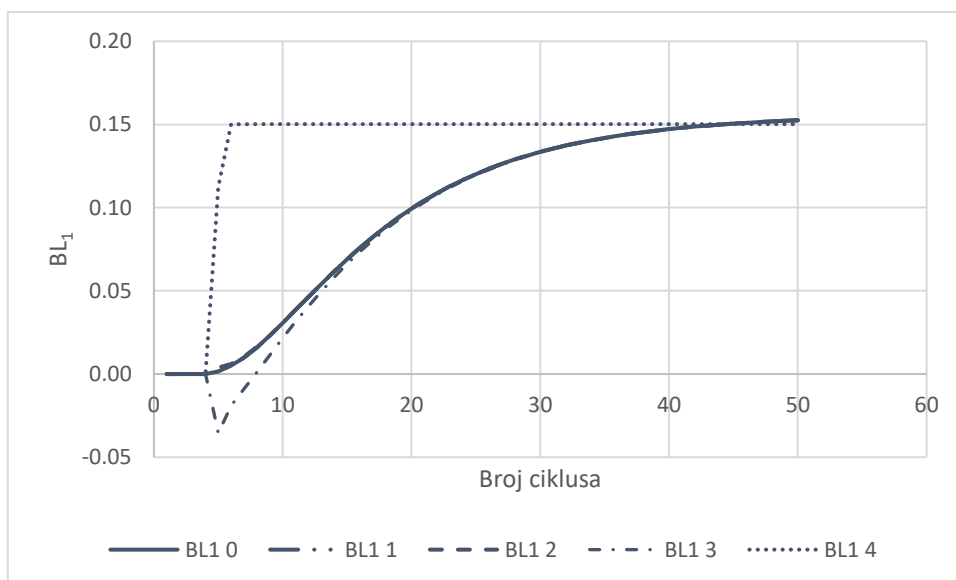
Vjerojatnost blokade



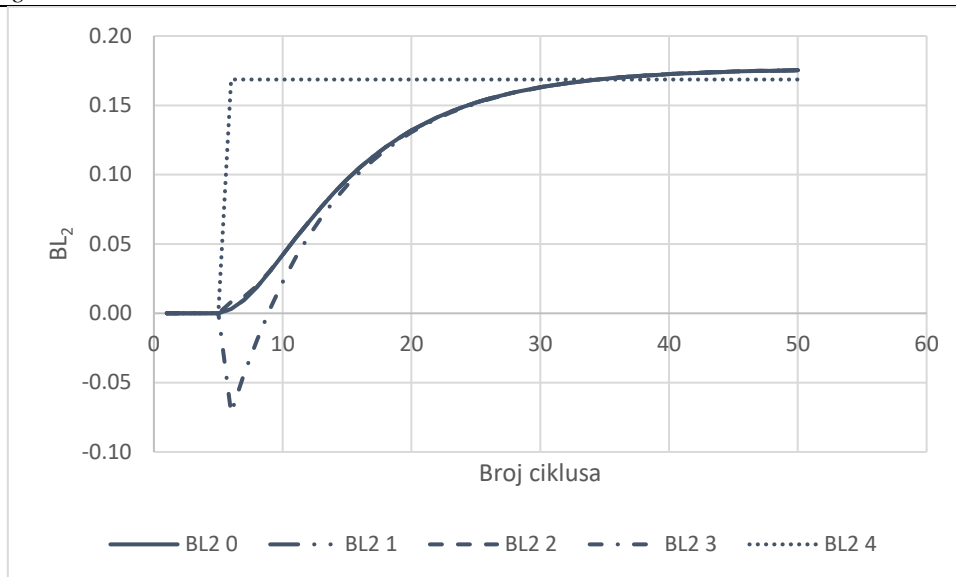
**Dijagram 5.7, BL stroja 1 računano analitičkom metodom za slučaj A**



**Dijagram 5.8, BL stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj A**

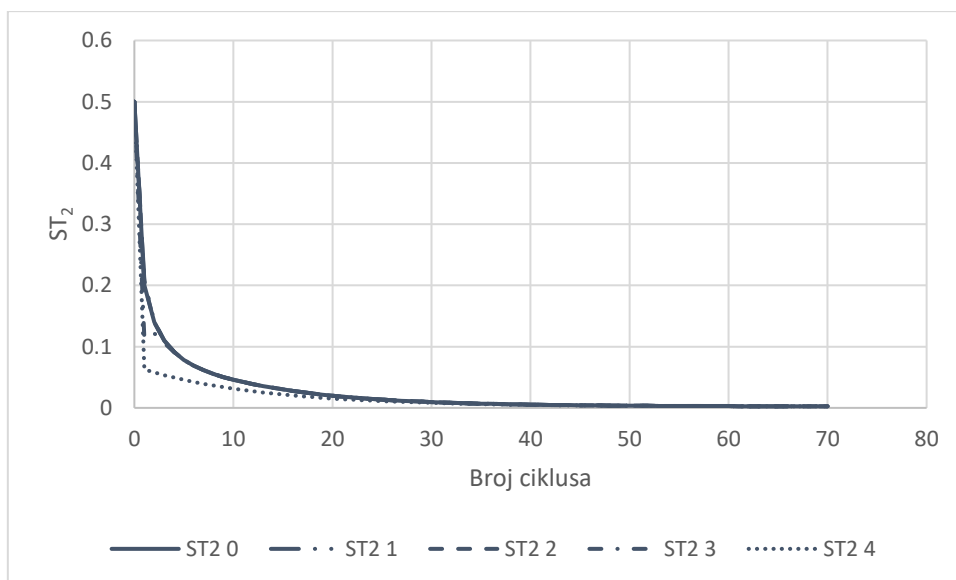


**Dijagram 5.9, BL stroja 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj A**

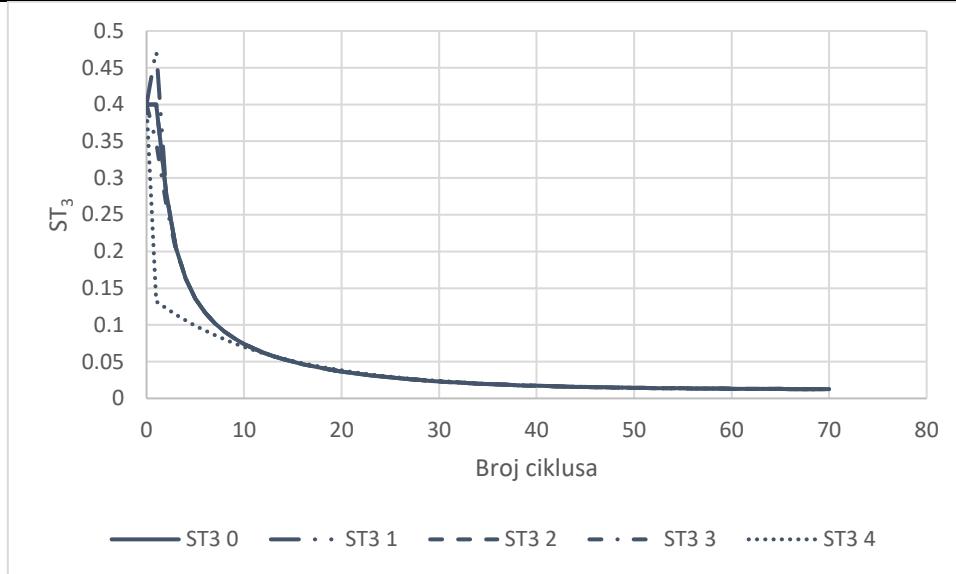


**Dijagram 5.10, BL stroja 2 računom konačnih stanja za slučaj A**

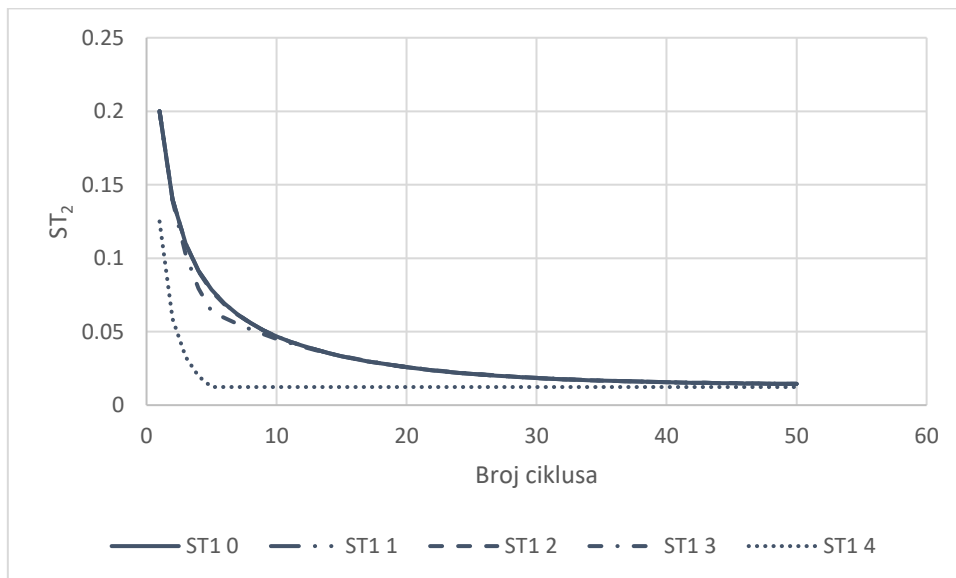
Vjerojatnoat praznog hoda:



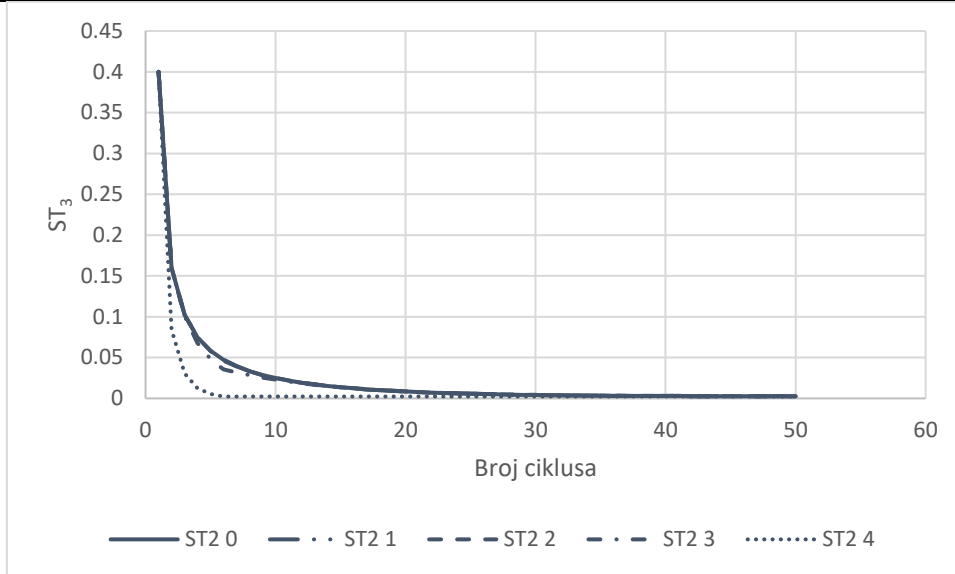
**Dijagram 5.11, ST stroja 2 računom analitičkom metodom za slučaj A**



**Dijagram 5.12, ST stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj A**



**Dijagram 5.13, ST stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj A**



**Dijagram 5.14,  $ST$  stroja 3 računano metodom konačnih stanja za slučaj A**

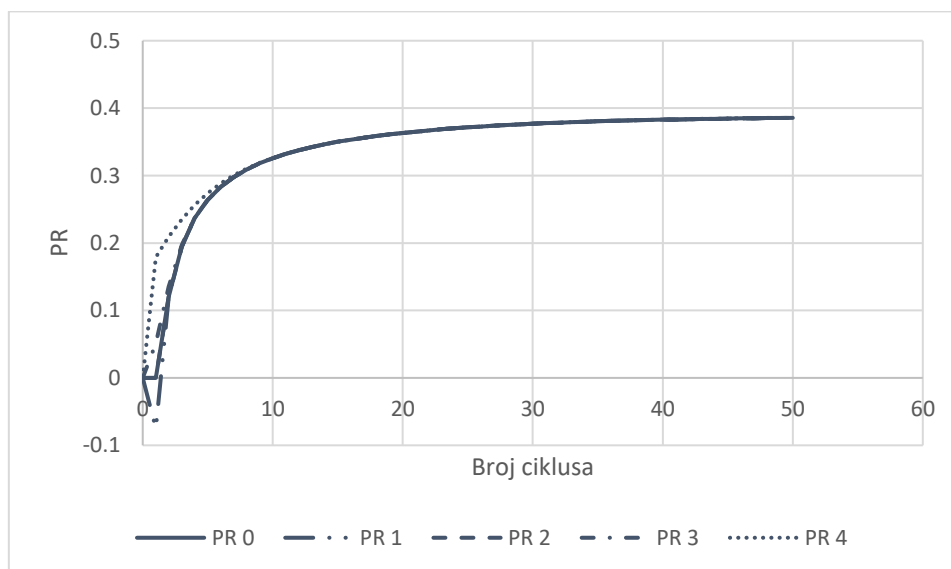
## 5.2. Slučaj B, serijska linija sa 3 stroja

U slučaju B analiziramo serijsku liniju sa 3 stroja, čije su pouzdanosti  $p_1 = 0.4$ ,  $p_2 = 0.5$ ,  $p_3 = 0.6$ , a kapacitet svih međuskladišta  $N=5$ . Legenda je predstavljena u Tablici 5.3.

Tablica 5.3 Legenda slučaja B

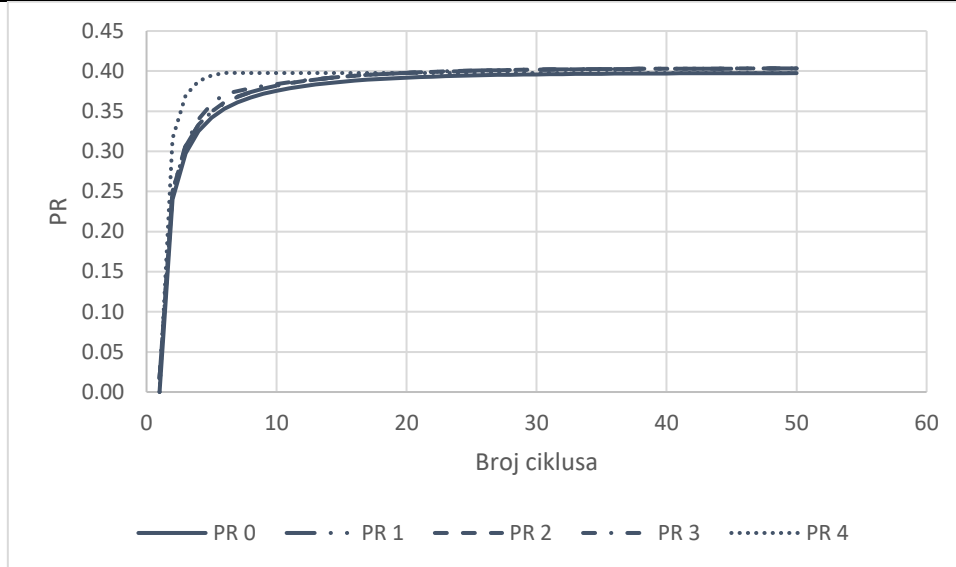
Značenje broja	Analitička metoda	Metoda konačnih stanja
0	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima
1	Zanemarenje 25% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje najmanje svojstvene vrijednosti
2	Zanemarenje 50% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje dvije najmanje svojstvene vrijednosti
3	Zanemarenje 75% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje tri najmanje svojstvene vrijednosti
4	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće

Proizvodnost:



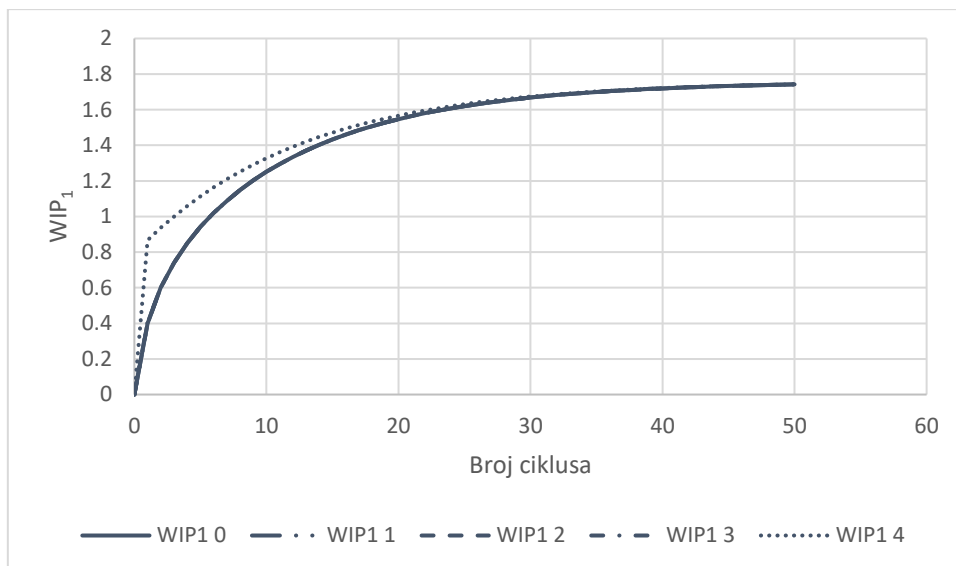
Dijagram 5.15, PR račun analitičkom metodom za slučaj B



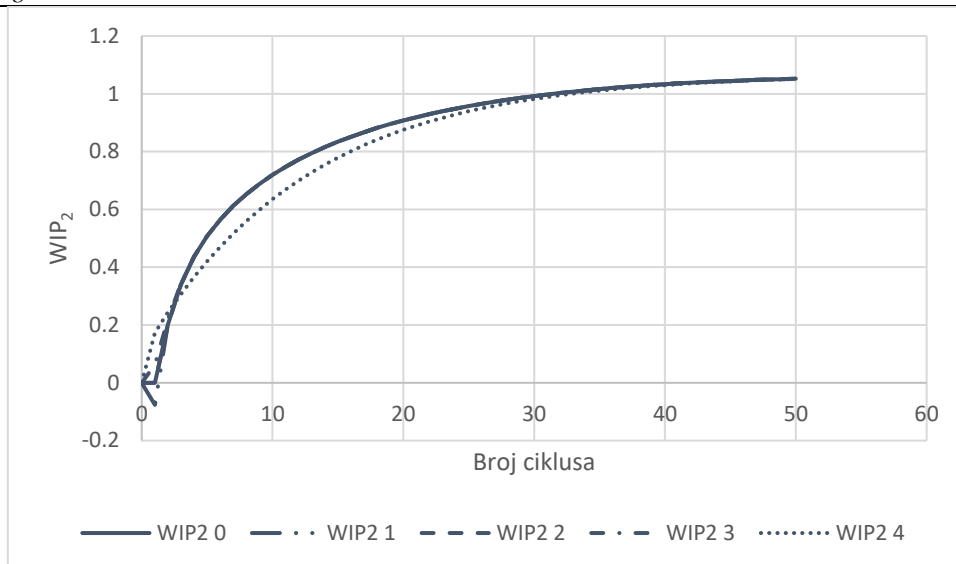


**Dijagram 5.16, PR računat metodom konačnih stanja za slučaj B**

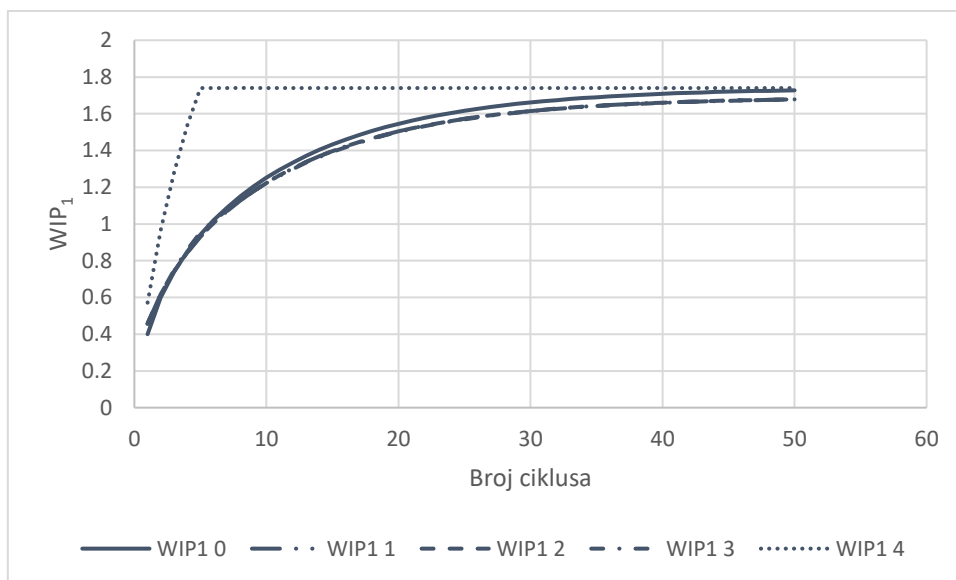
Očekivani broj poluproizvoda u međuskладиštu:



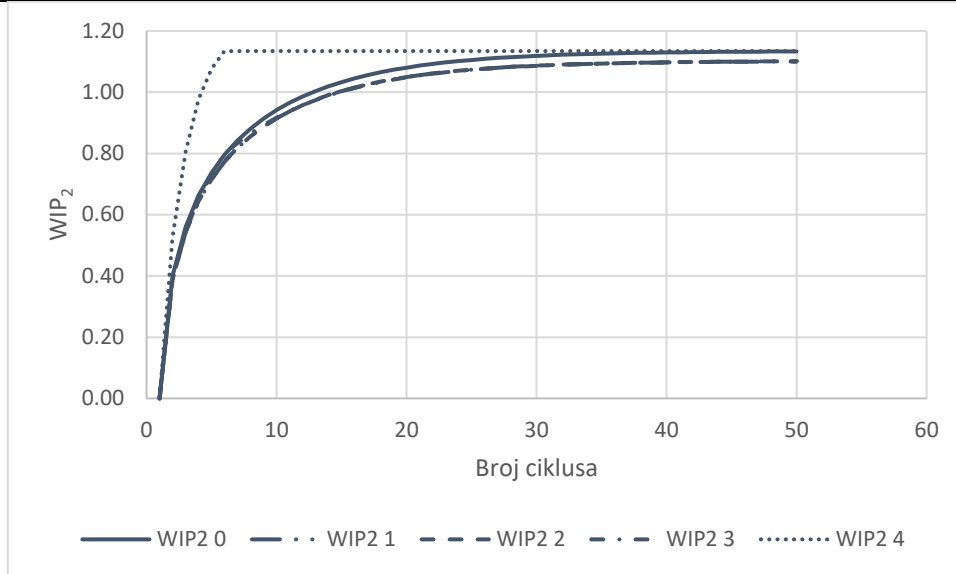
**Dijagram 5.17, WIP međuskладиšta 1 računat analitičkom metodom za slučaj B**



**Dijagram 5.18, WIP međuskладиšta 2 računан analitičkom metodom za slučaj B**

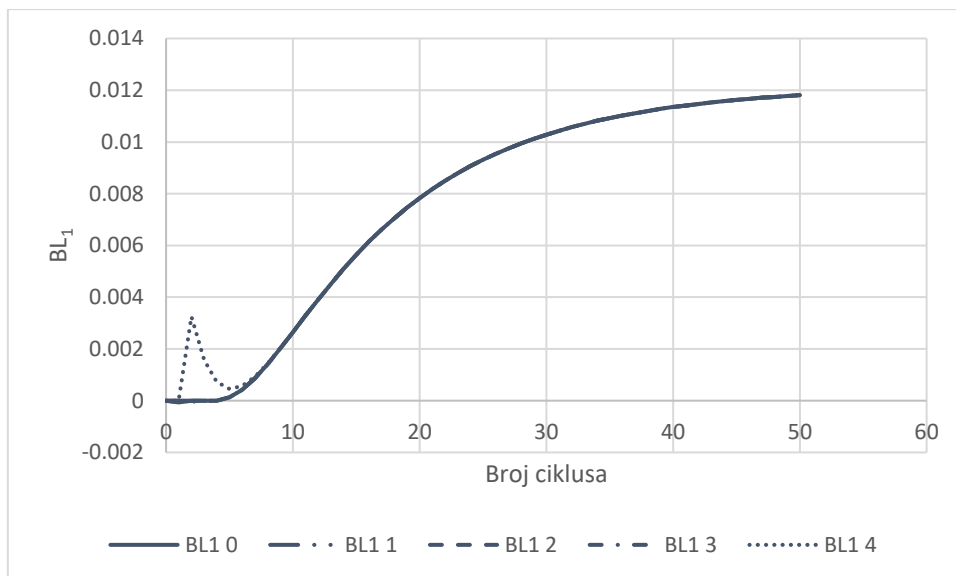


**Dijagram 5.19, WIP međuskладиšta 1 računан metodom konačnih stanja za slučaj B**

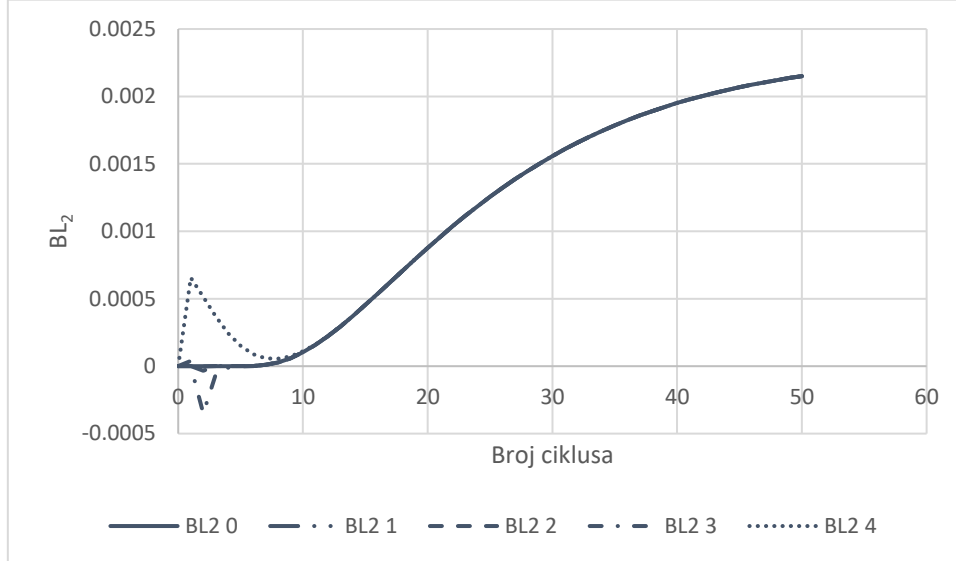


Dijagram 5.20, WIP međuskладиšta 2 računан metodom konačnih stanja za slučaj B

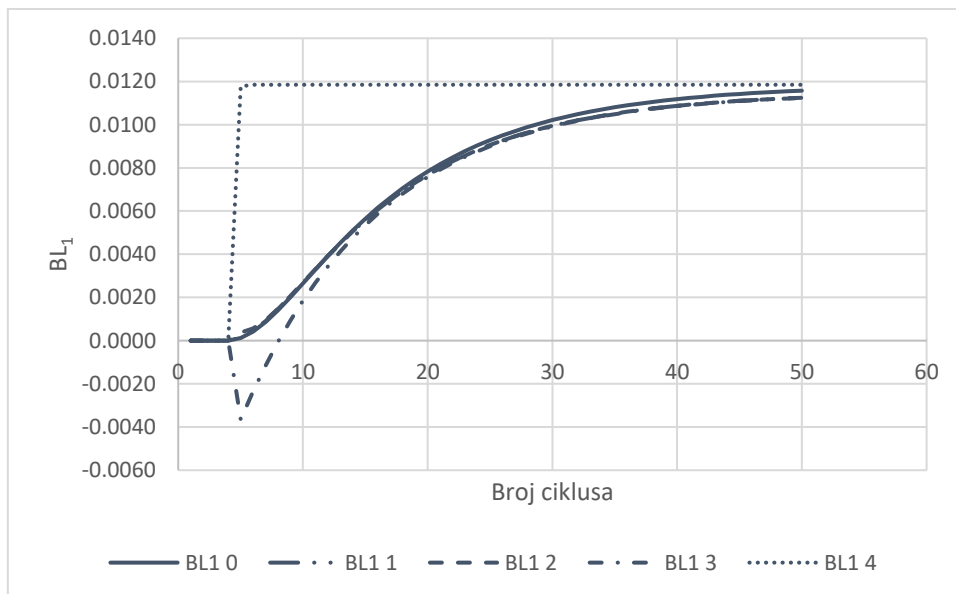
Vjerojatnost blokade:



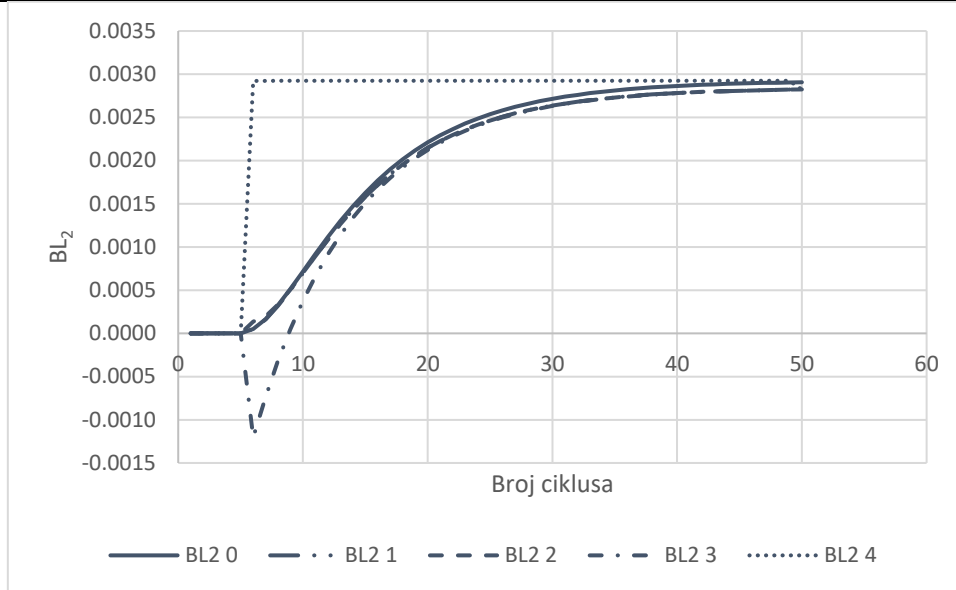
Dijagram 5.21, BL stroja 1 računан analitičkom metodom za slučaj B



**Dijagram 5.22, BL stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj B**

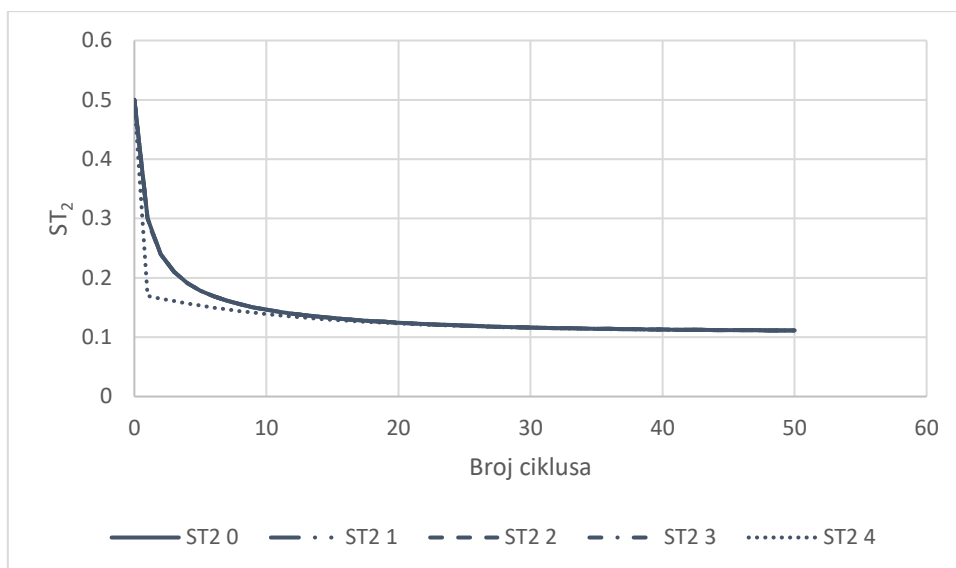


**Dijagram 5.23, BL stroja 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj B**

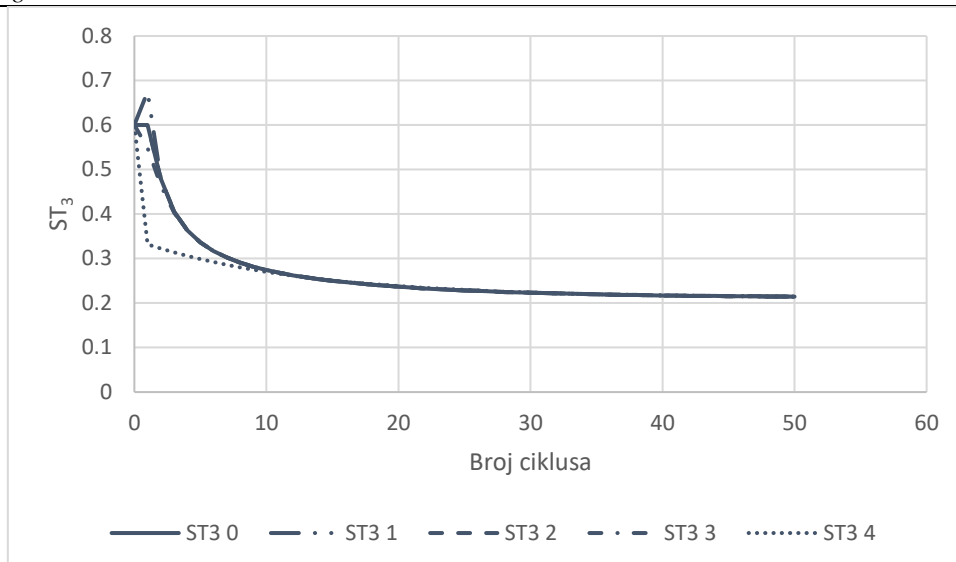


**Dijagram 5.24, BL stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj B**

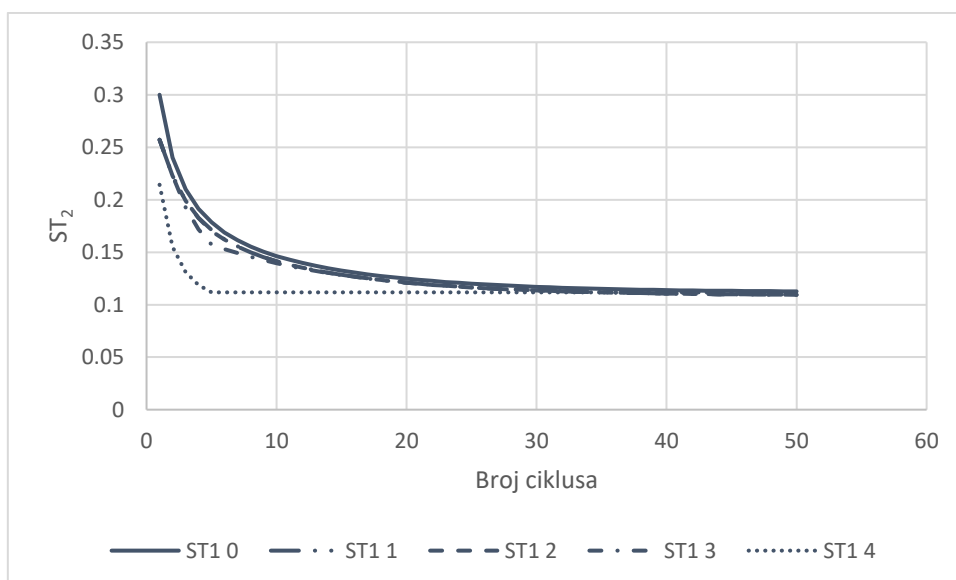
Vjerojatnost praznog hoda:



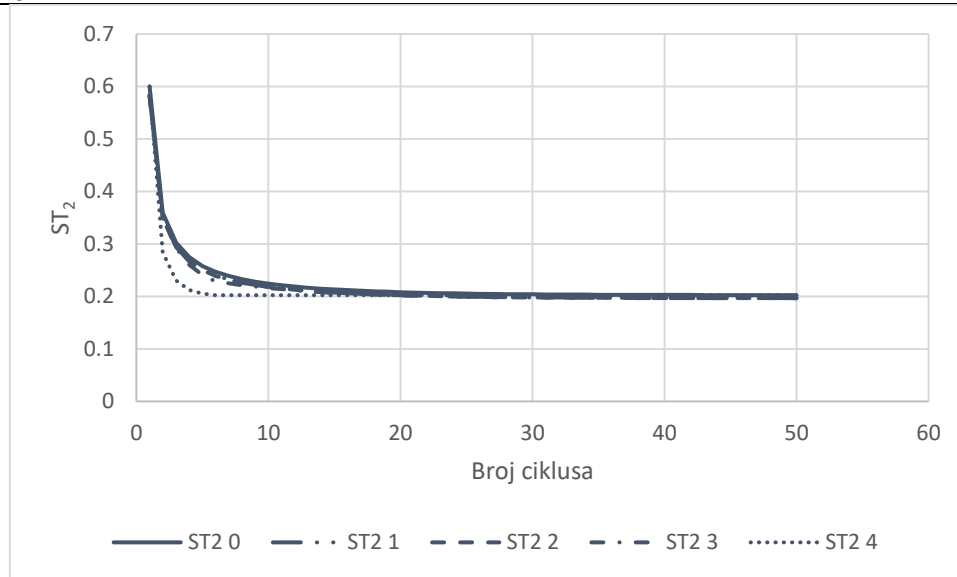
**Dijagram 5.25, ST stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj B**



**Dijagram 5.26, ST stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj B**



**Dijagram 5.27, ST stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj B**



**Dijagram 5.28, ST stroja 3 računano metodom konačnih stanja za slučaj B**

Kao što se vidi iz priloženih dijagrama, metoda konačnih stanja je vrlo neprecizna kada se koristi samo najveća svojstvena vrijednost manja od 1, dok analitička metoda radi bolje. Lokalni eksremi pri  $n < 5$  ciklusa u analitičkoj metodi su uzrokovani nepreciznošću korištenog matematičkog alata pri računanju s malim brojevima, koja se kombinira sa nepreciznosti od smanjenja broja uračunatih svojstvenih vrijednosti.

Ono što se ne vidi u dijagramima je vrijeme računanja. Nažalost, brojke u ovom slučaju nisu relevantne, jer su se proračuni odvijali na različitim računalima, sa različitim programskim alatima, tako da je jedino mjerilo ljudska procjena. Pri ovako malome broju strojeva je vrijeme računanja neznatno duže u analitičkoj metodi, tako da je ona sasvim validna pri malom broju međuskладиšta, i time malim tranzijentnim matricama. To je i očekivano, jer je broj kalkulacija dovoljno malen da se za naše pojmove račun odvije previše brzo da bi mjerenje vremena imalo smisla.

Također, očekivana je situacija da su u slučaju A vjerojatnosti blokade značajno veće od vjerojatnosti praznog hoda, i obratno za slučaj B. Uzrok tome su „uzlazeće“ i „silazeće“ pouzdanosti strojeva. Ako su strojevi na početku linije pouzdaniji od kasnijih, brže će puniti međuskладиšta nego što će kasniji moći prazniti. U drugom slučaju je situacija obrnuta.

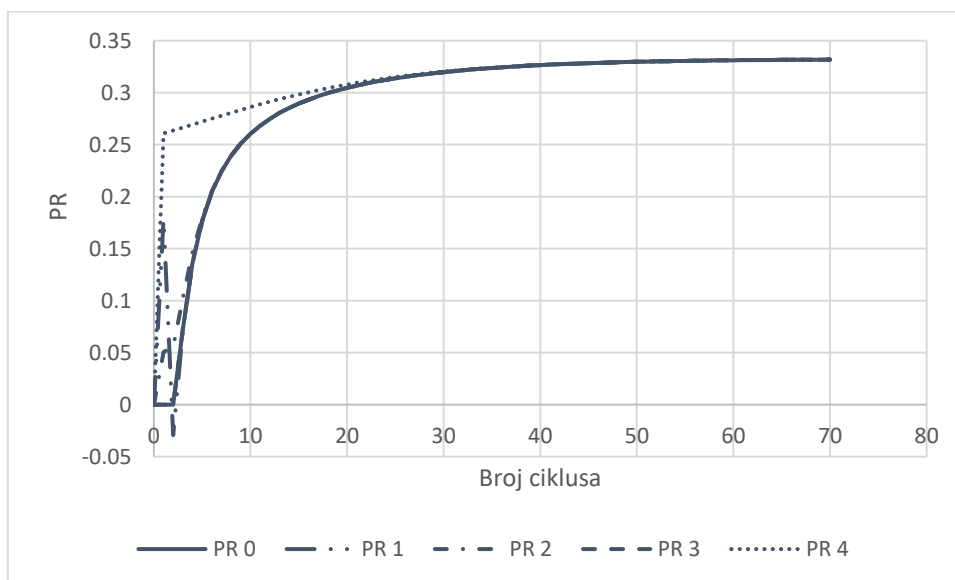
### 5.3. Slučaj C, serijska linija sa 4 stroja

U slučaju C analiziramo serijsku liniju sa 4 stroja, čije su pouzdanosti  $p_1 = 0.4$ ,  $p_2 = 0.5$ ,  $p_3 = 0.6$ ,  $p_4 = 0.7$ , a kapacitet svih međuskладиšta  $N=5$ . Legenda je predstavljena u Tablici 5.4.

Tablica 5.4 Legenda slučaja C

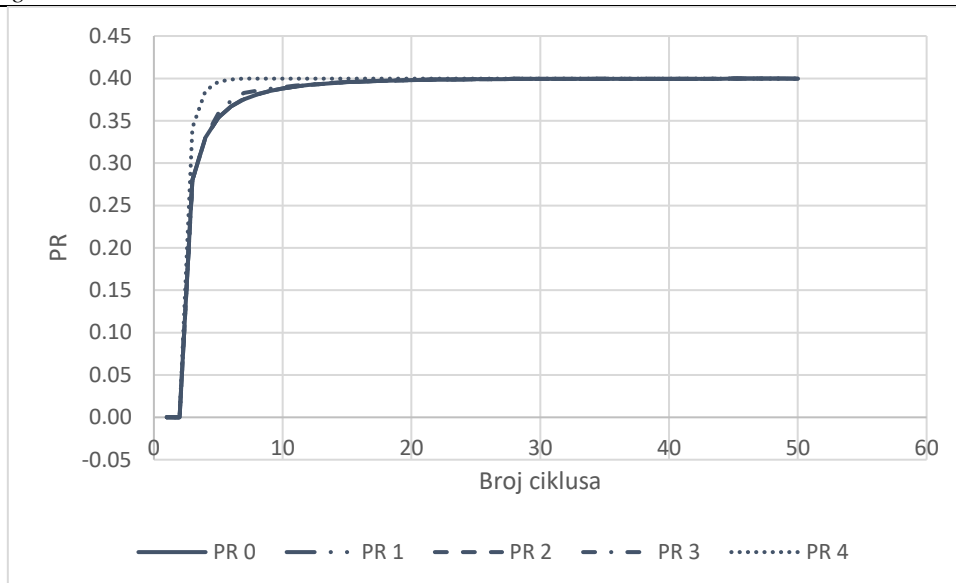
Značenje broja	Analitička metoda	Metoda konačnih stanja
0	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima
1	Zanemarenje 25% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje najmanje svojstvene vrijednosti
2	Zanemarenje 50% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje dvije najmanje svojstvene vrijednosti
3	Zanemarenje 75% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje tri najmanje svojstvene vrijednosti
4	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće

Proizvodnost:



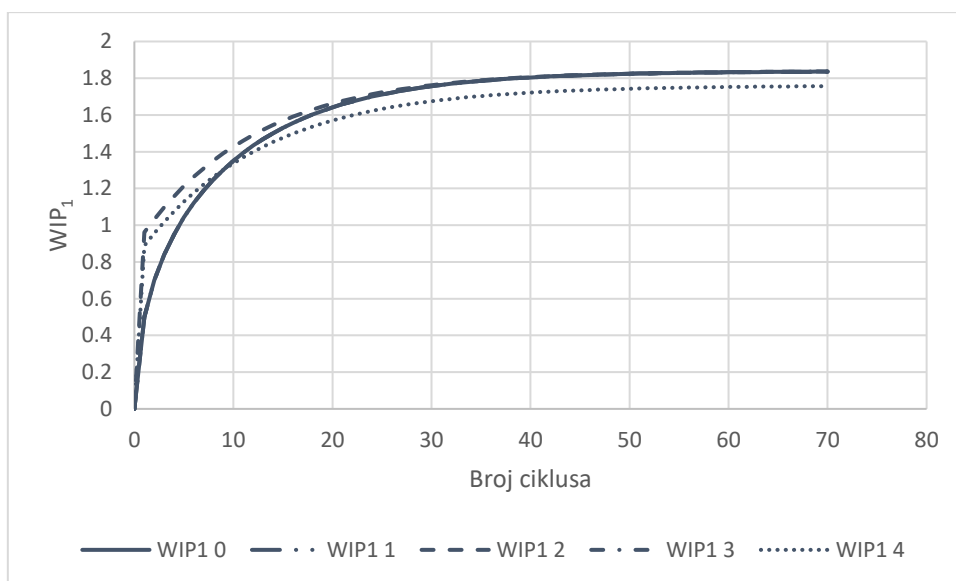
Dijagram 5.29, PR račun analitičkom metodom za slučaj C



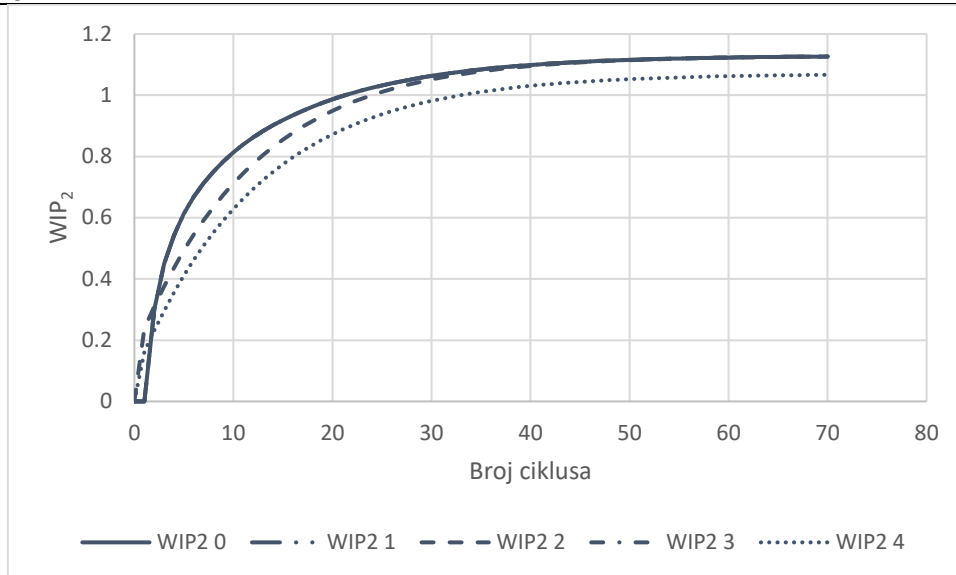


**Dijagram 5.30, PR računat metodom konačnih stanja za slučaj C**

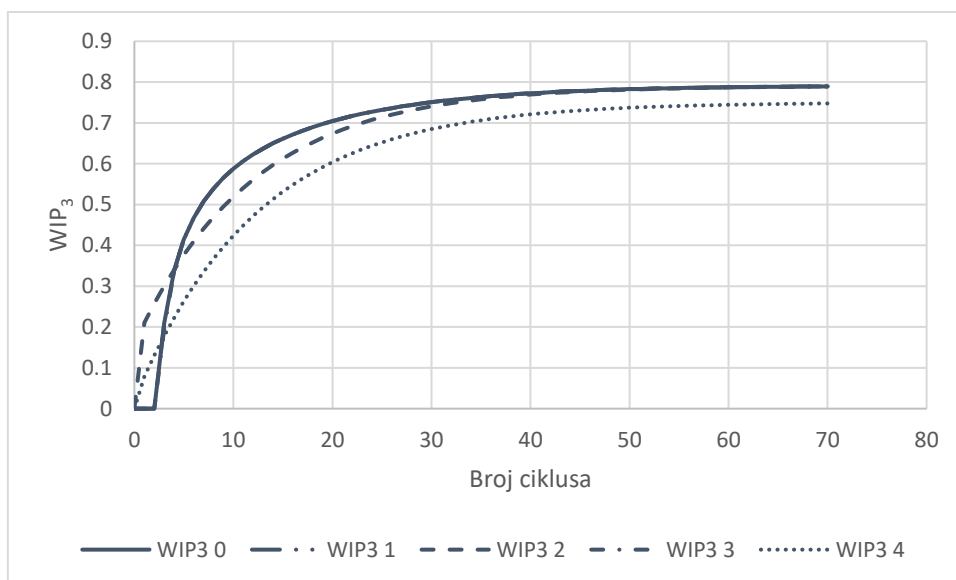
Prosječni broj proizvoda u međuskladištu



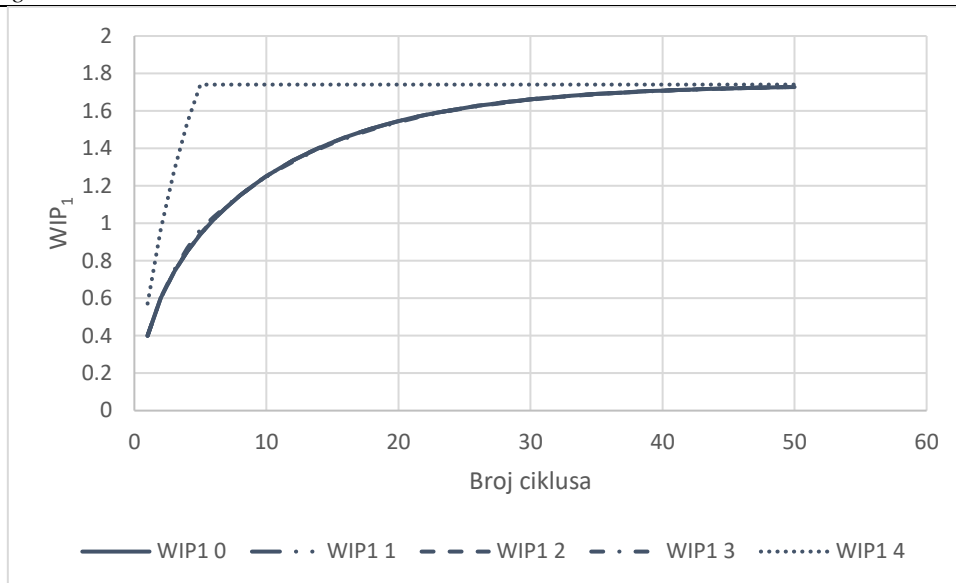
**Dijagram 5.31, WIP međuskladišta 1 računat analitičkom metodom za slučaj C**



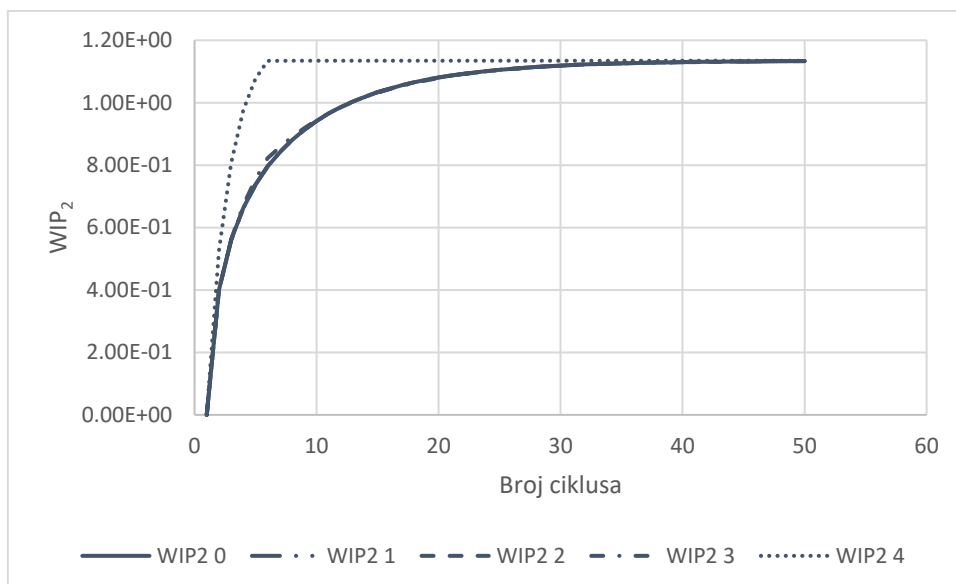
**Dijagram 5.32, WIP međuskladišta 2 računano analitičkom metodom za slučaj C**



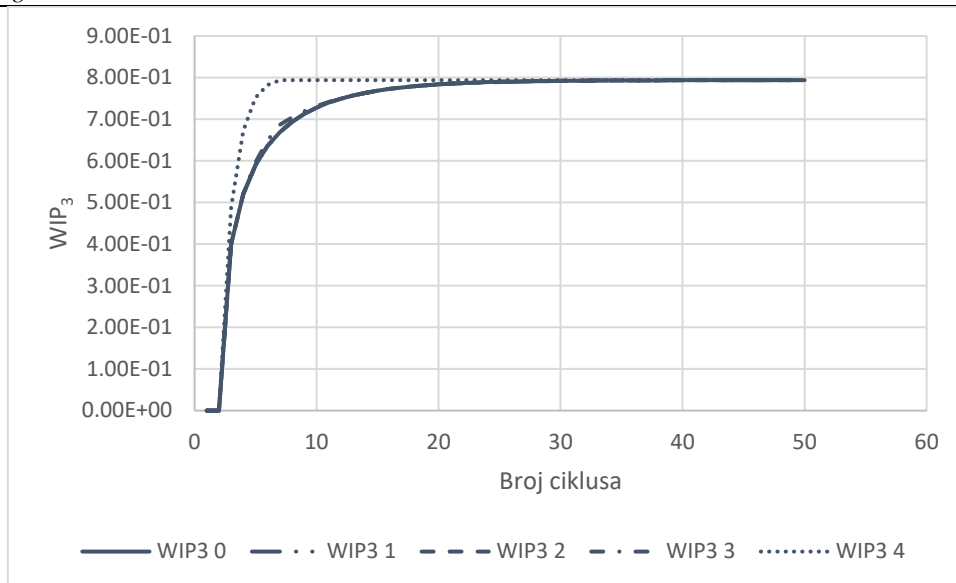
**Dijagram 5.33, WIP međuskladišta 3 računano analitičkom metodom za slučaj C**



Dijagram 5.34, WIP međuskladišta 1 računano metodom konačnih stanja za slučaj C

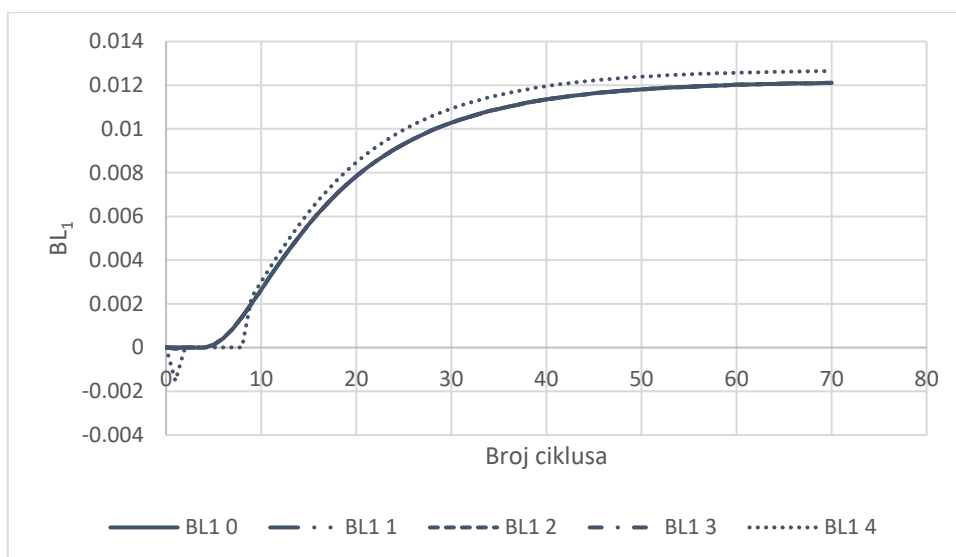


Dijagram 5.35, WIP međuskladišta 2 računano metodom konačnih stanja za slučaj C

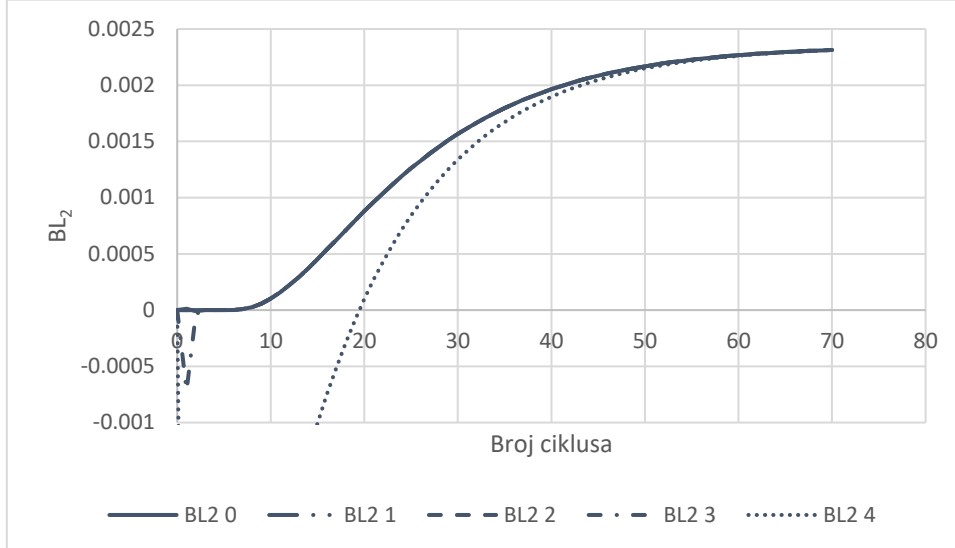


Dijagram 5.36, WIP međuskladišta 3 računano metodom konačnih stanja za slučaj C

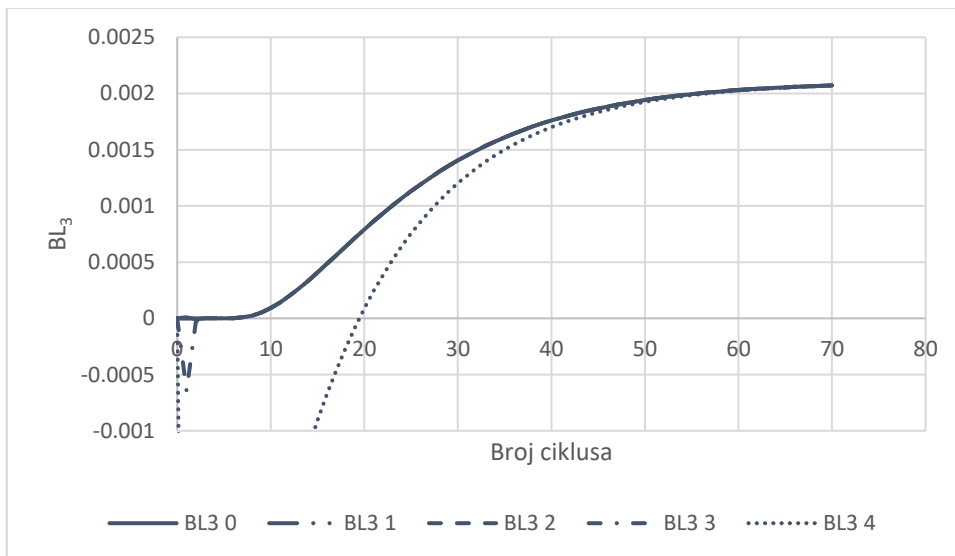
Vjerojatnost blokade



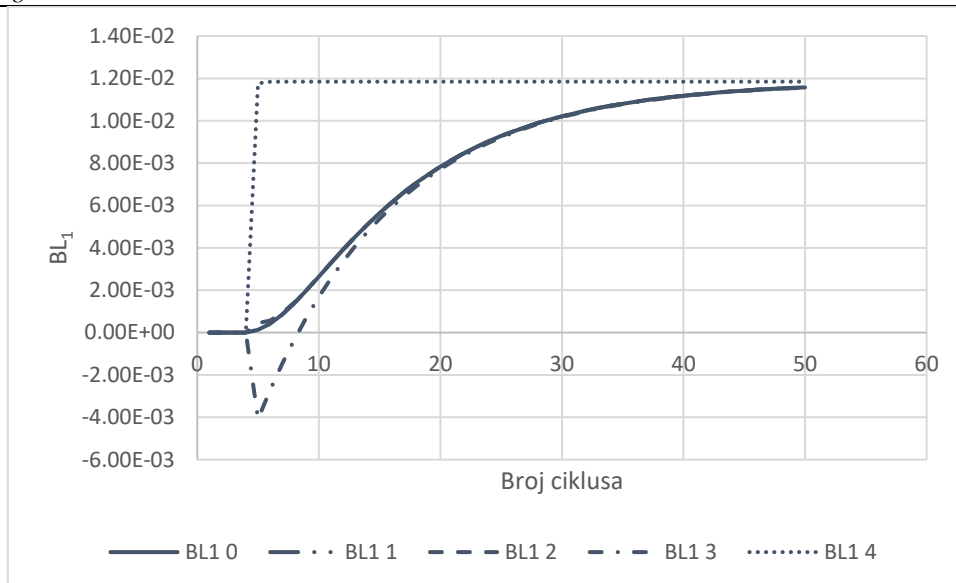
Dijagram 5.37, BL stroja 1 računano analitičkom metodom za slučaj C



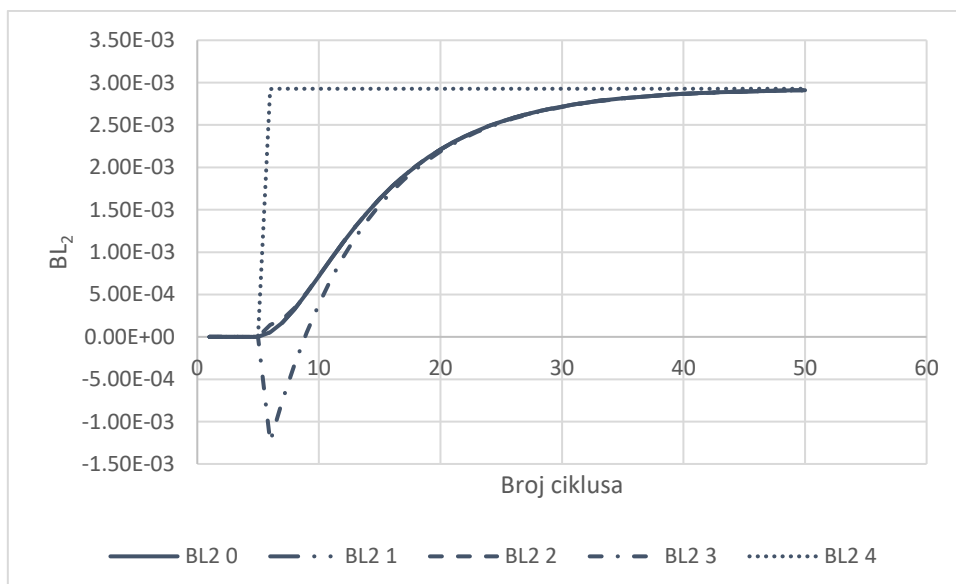
**Dijagram 5.38, BL stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj C**



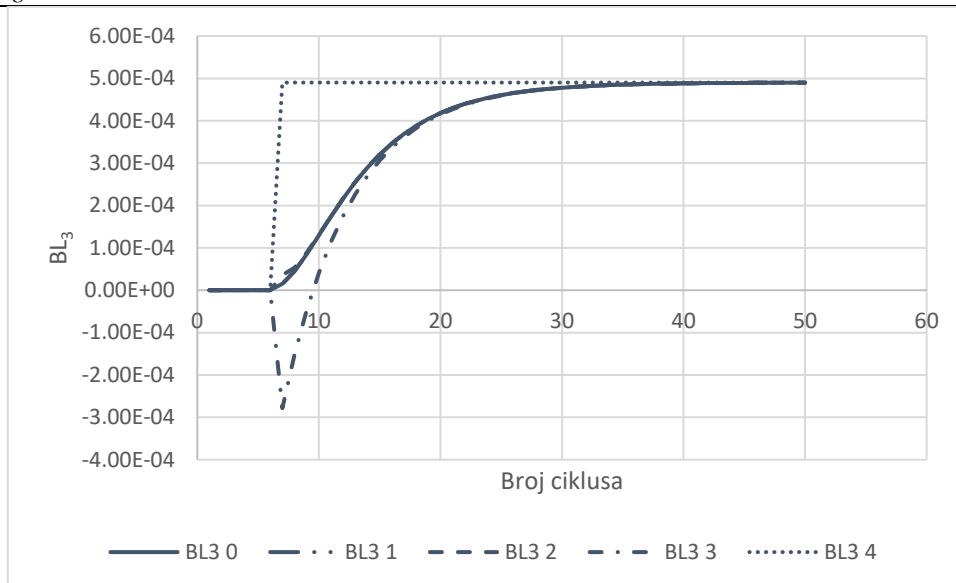
**Dijagram 5.39, BL stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj C**



**Dijagram 5.40, BL stroja 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj C**

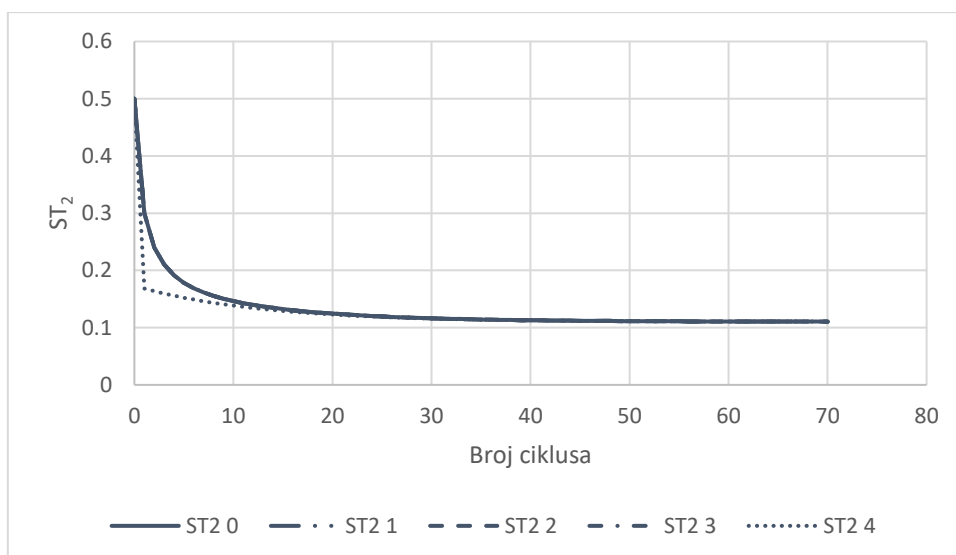


**Dijagram 5.41, BL stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj C**

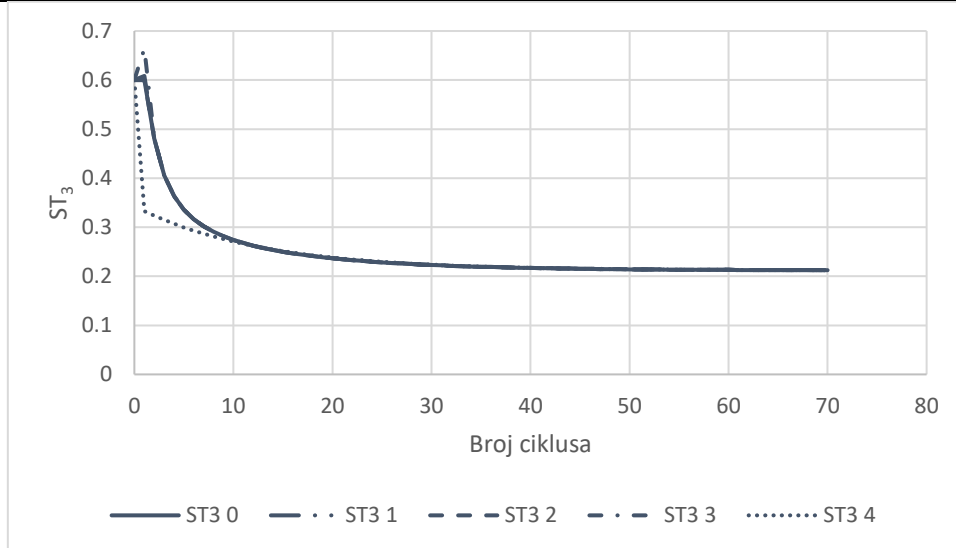


**Dijagram 5.42, BL stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj C**

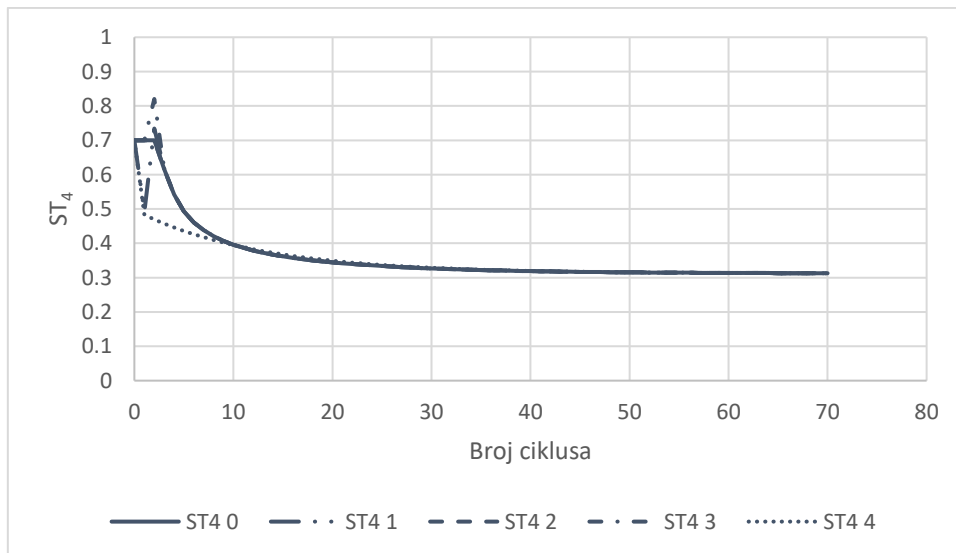
Vjerojatnost praznog hoda



**Dijagram 5.43, ST stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj C**

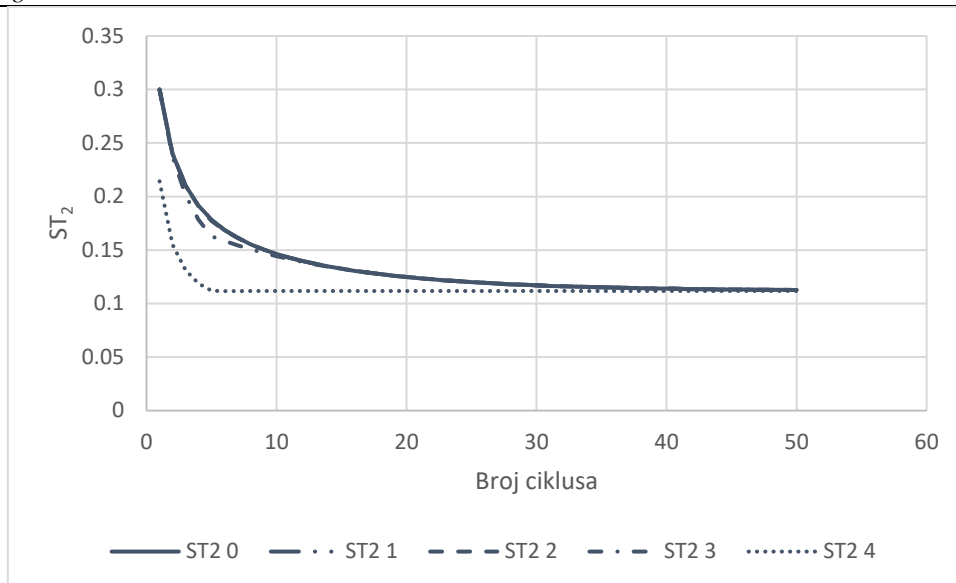


Dijagram 5.44, ST stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj C

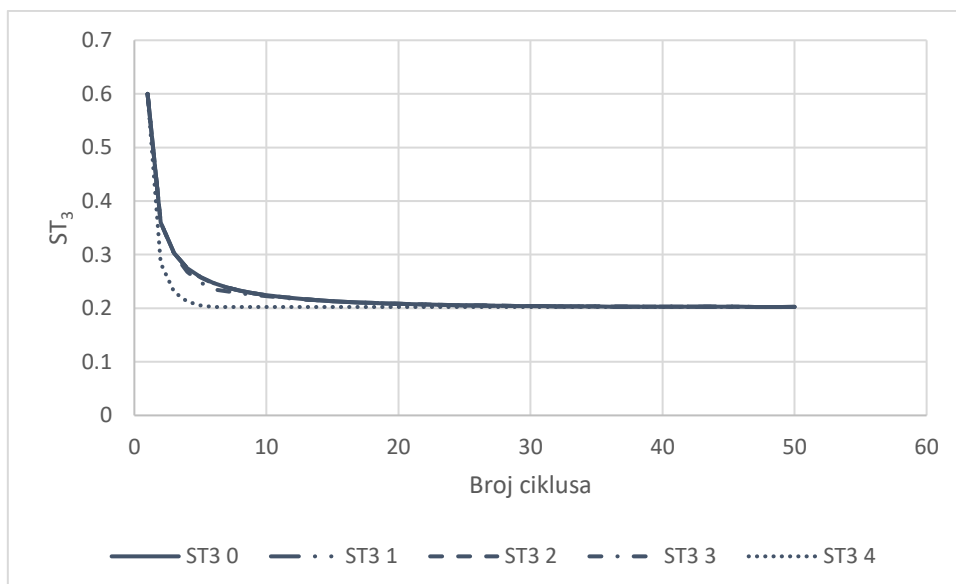


Dijagram 5.45, ST stroja 4 računat analitičkom metodom za slučaj C

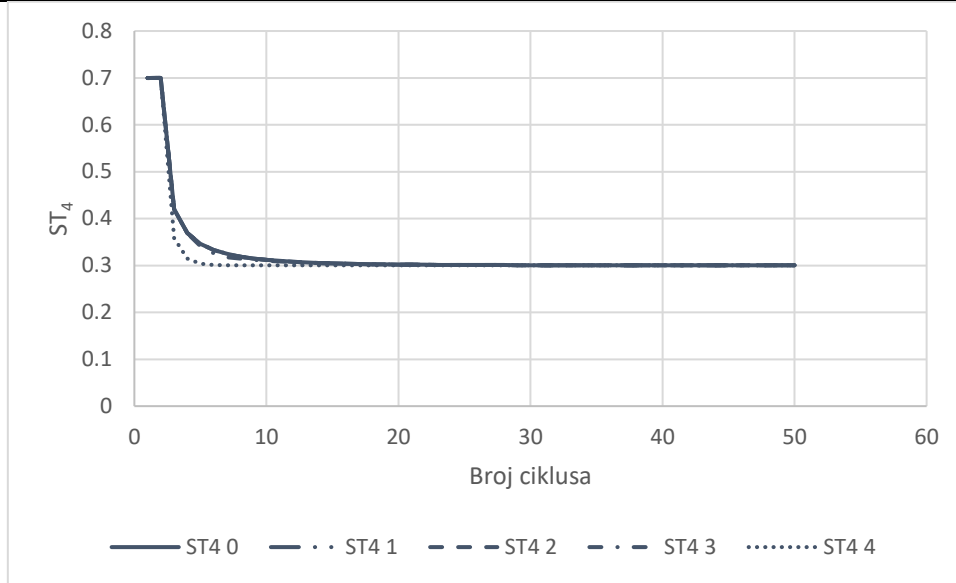




Dijagram 5.46,  $ST$  stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj C



Dijagram 5.47,  $ST$  stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj C



Dijagram 5.48,  $ST$  stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj C

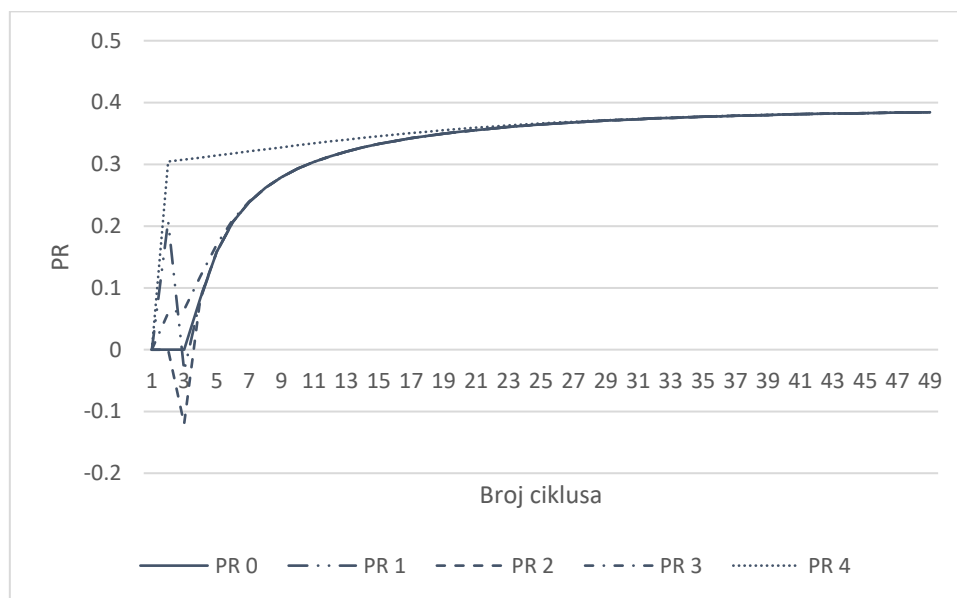
### 5.4. Slučaj D, serijska linija sa 4 stroja

U slučaju D analiziramo serijsku liniju sa 4 stroja, čije su pouzdanosti  $p_1 = 0.7$ ,  $p_2 = 0.6$ ,  $p_3 = 0.5$ ,  $p_4 = 0.4$ , a kapacitet svih međuskладиšta  $N=5$ . Legenda je predstavljena u Tablici 5.5.

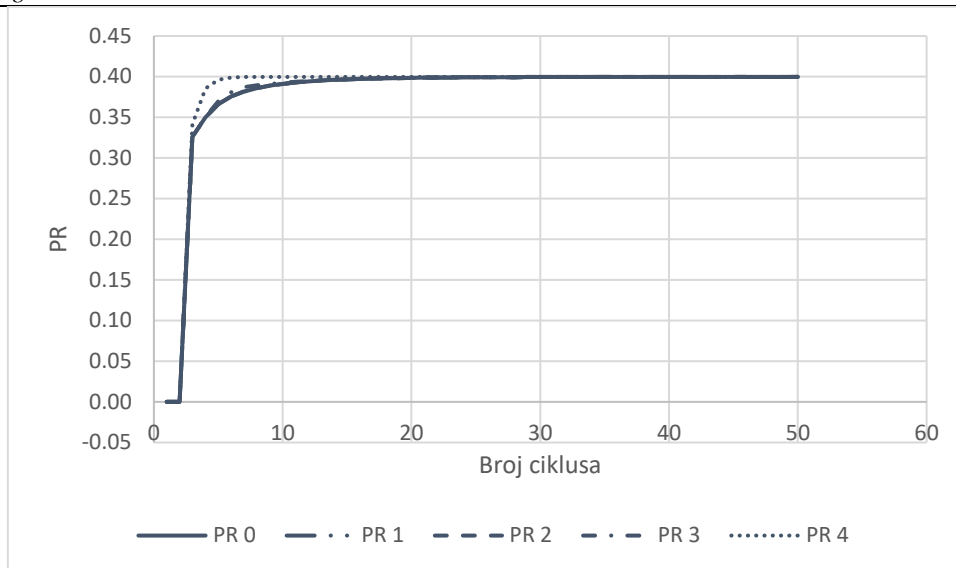
Tablica 5.5 Legenda slučaja D

Značenje broja	Analitička metoda	Metoda konačnih stanja
0	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima
1	Zanemarenje 25% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje najmanje svojstvene vrijednosti
2	Zanemarenje 50% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje dvije najmanje svojstvene vrijednosti
3	Zanemarenje 75% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje tri najmanje svojstvene vrijednosti
4	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće

Proizvodnost:

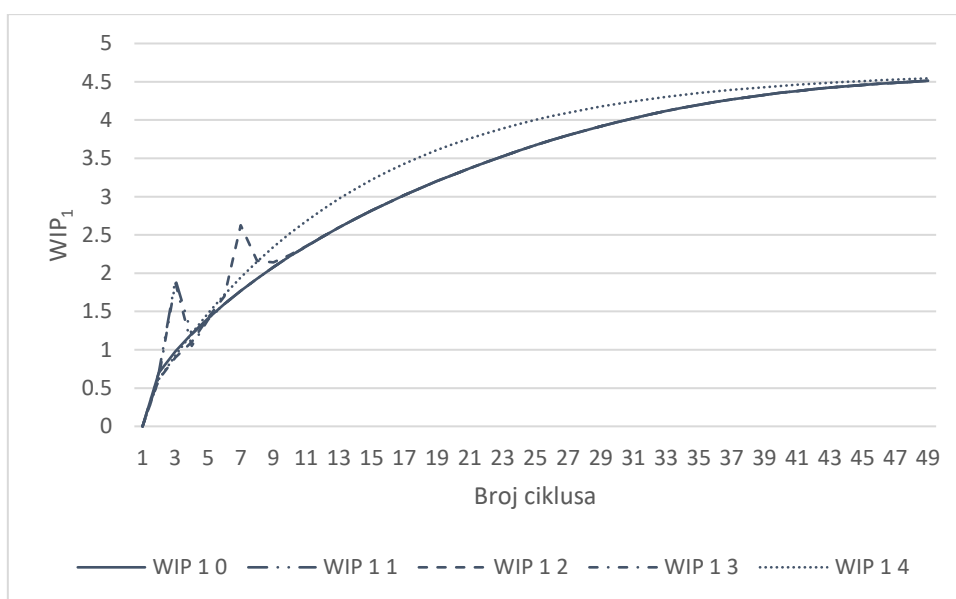


Dijagram 5.49, PR račun analitičkom metodom za slučaj D

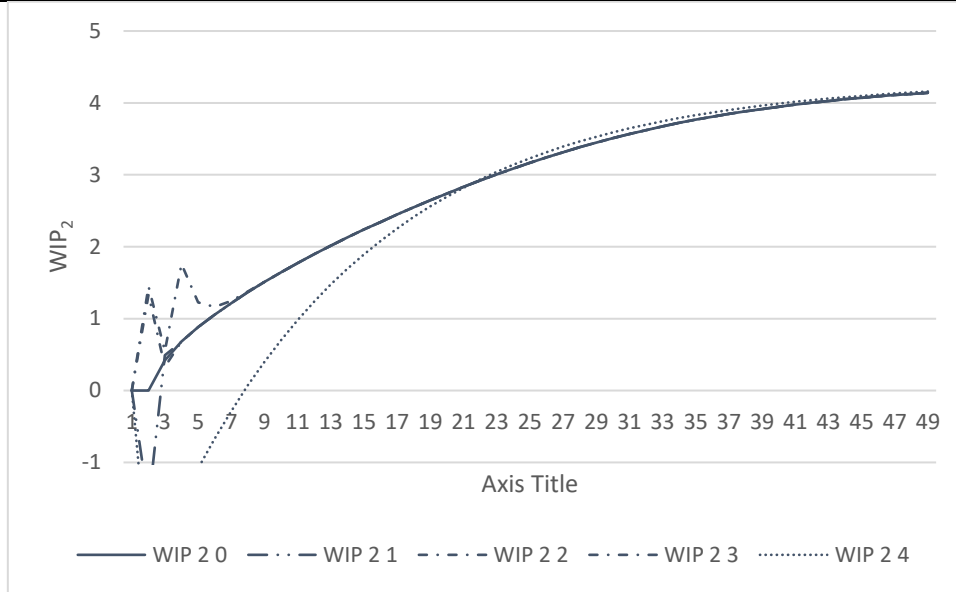


**Dijagram 5.50, PR računat metodom konačnih stanja za slučaj D**

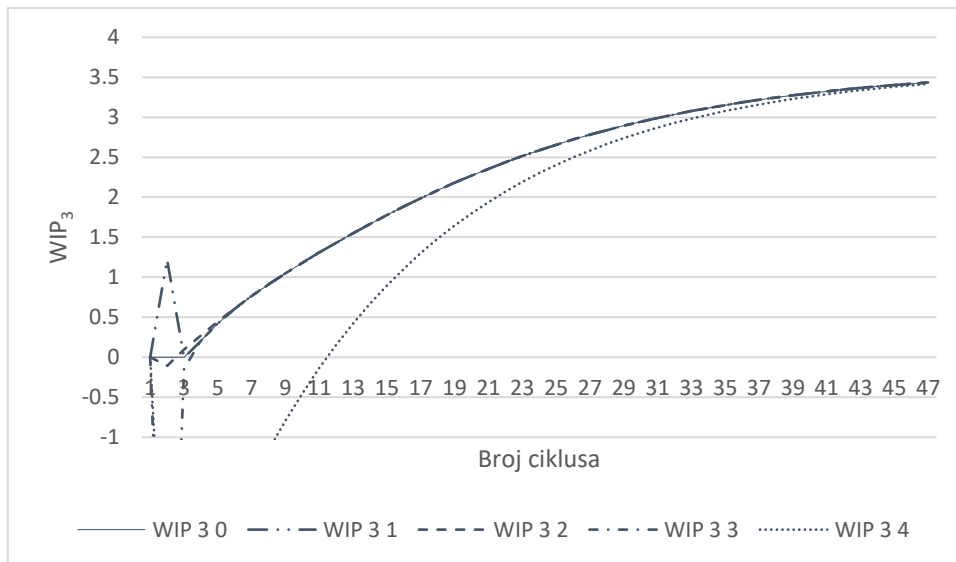
Prosječna popunjenost međuskladišta



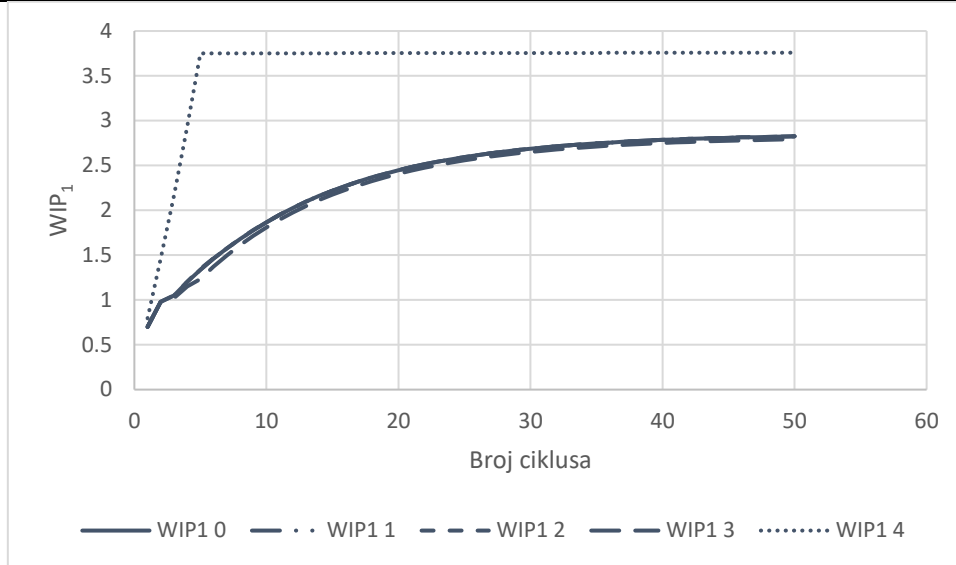
**Dijagram 5.51, WIP međuskladišta 1 računat analitičkom metodom za slučaj D**



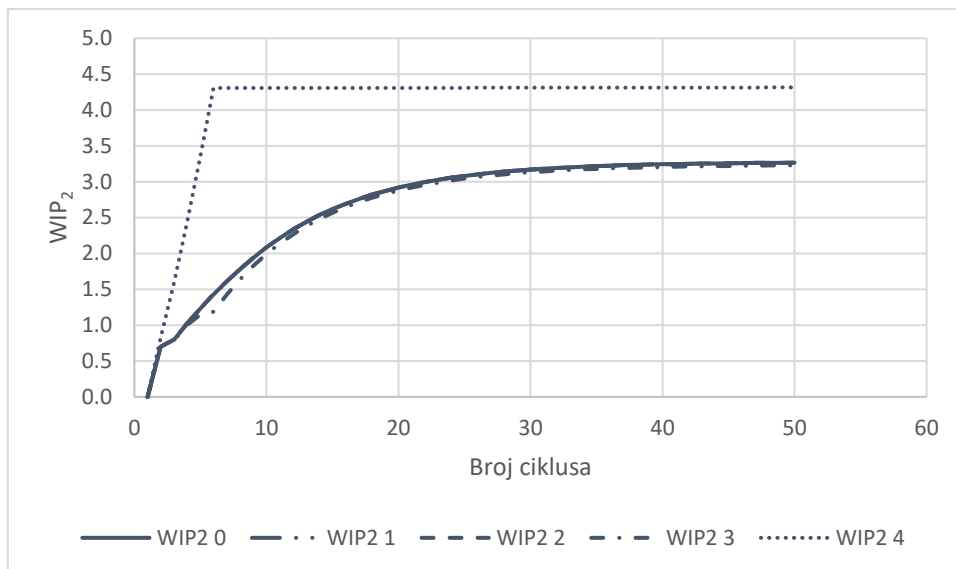
**Dijagram 5.52, WIP međuskladišta 2 računano analitičkom metodom za slučaj D**



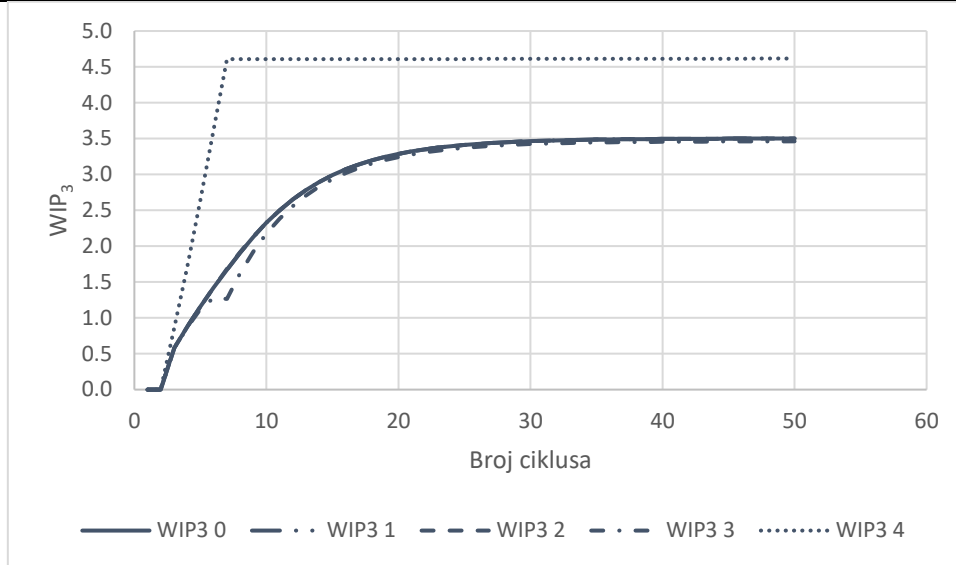
**Dijagram 5.53, WIP međuskladišta 3 računano analitičkom metodom za slučaj D**



Dijagram 5.54, WIP međuskladišta 1 računano metodom konačnih stanja za slučaj D

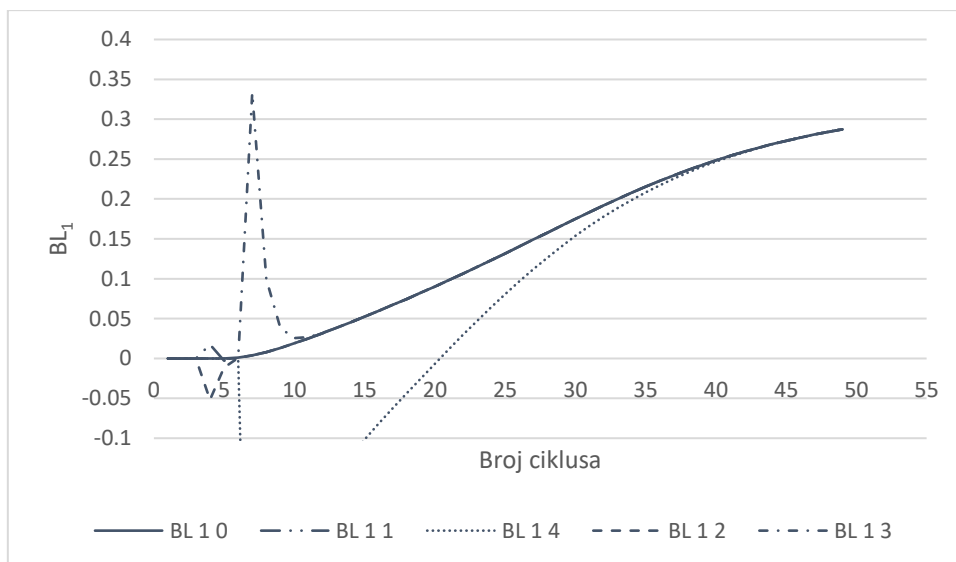


Dijagram 5.55, WIP međuskladišta 2 računano metodom konačnih stanja za slučaj D

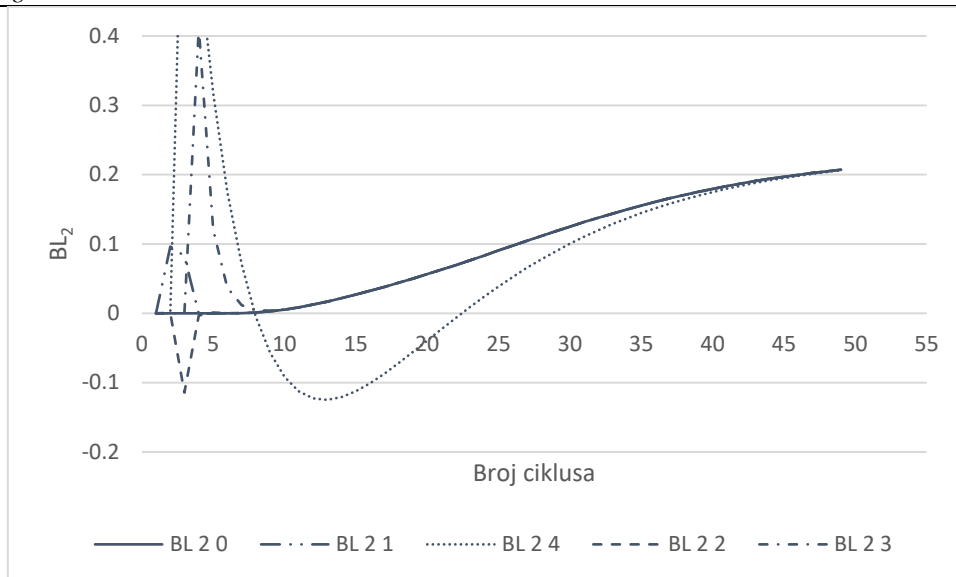


Dijagram 5.56, WIP međuskladišta 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj D

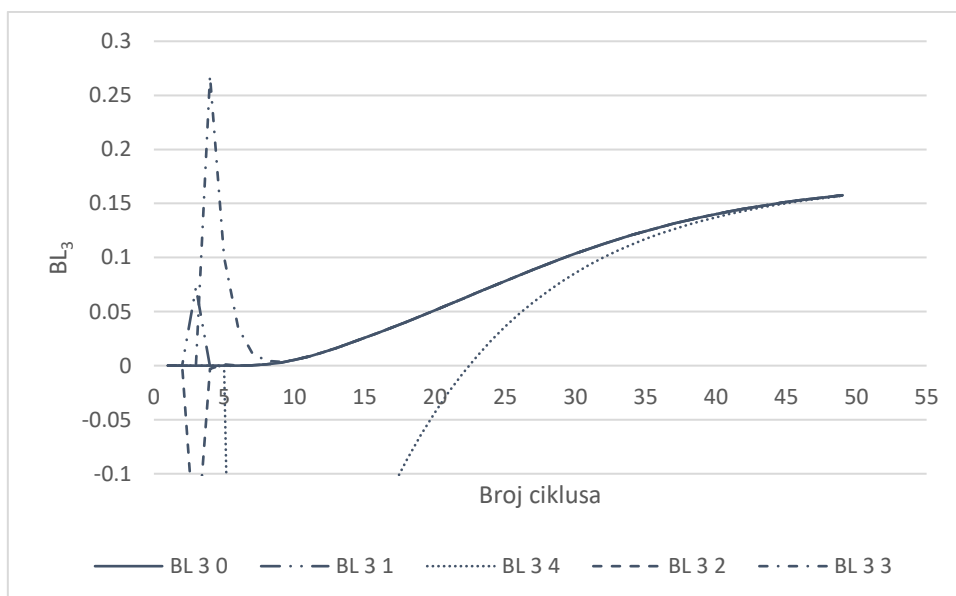
Vjerojatnost blokade



Dijagram 5.57, BL stroja 1 računat analitičkom metodom za slučaj D

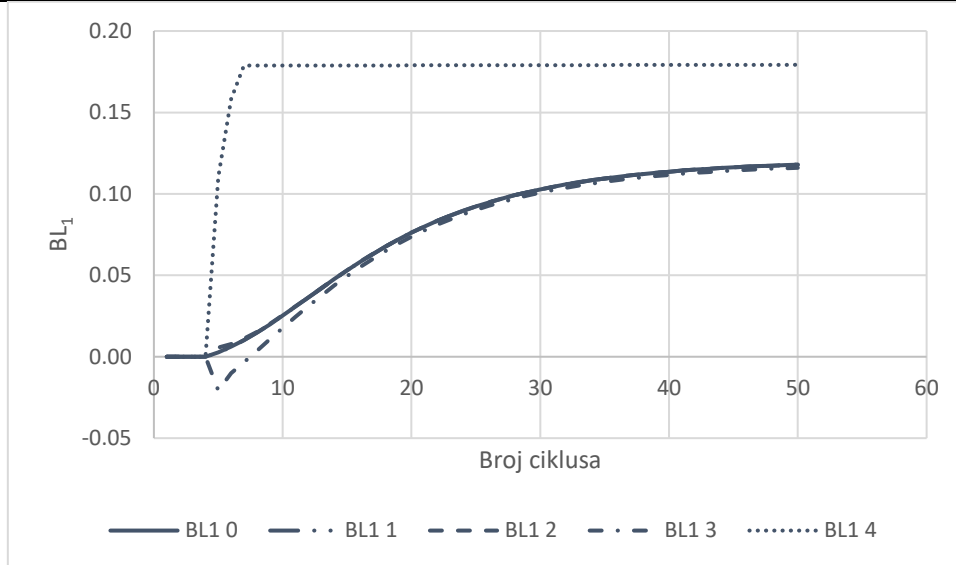


**Dijagram 5.58, BL stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj D**

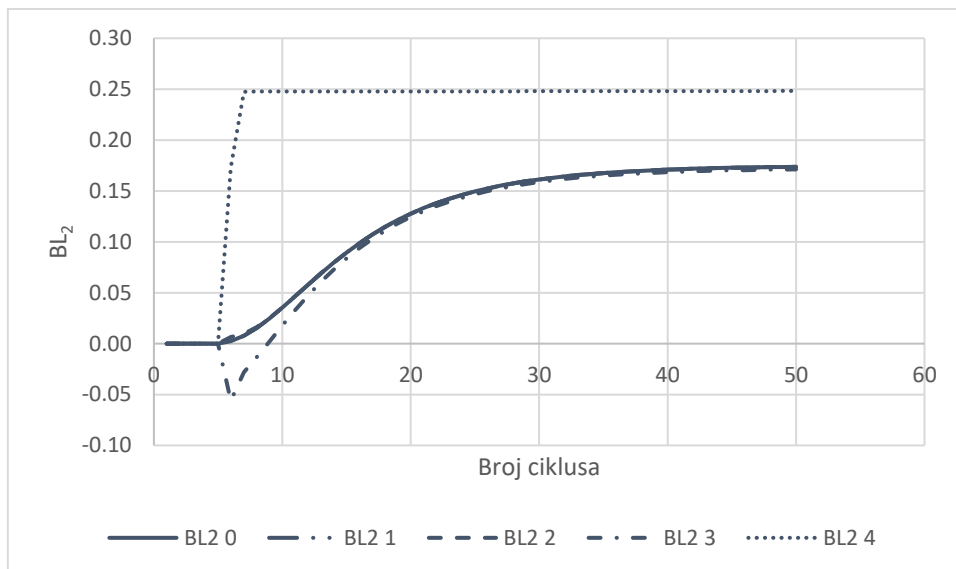


**Dijagram 5.59, BL stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj D**

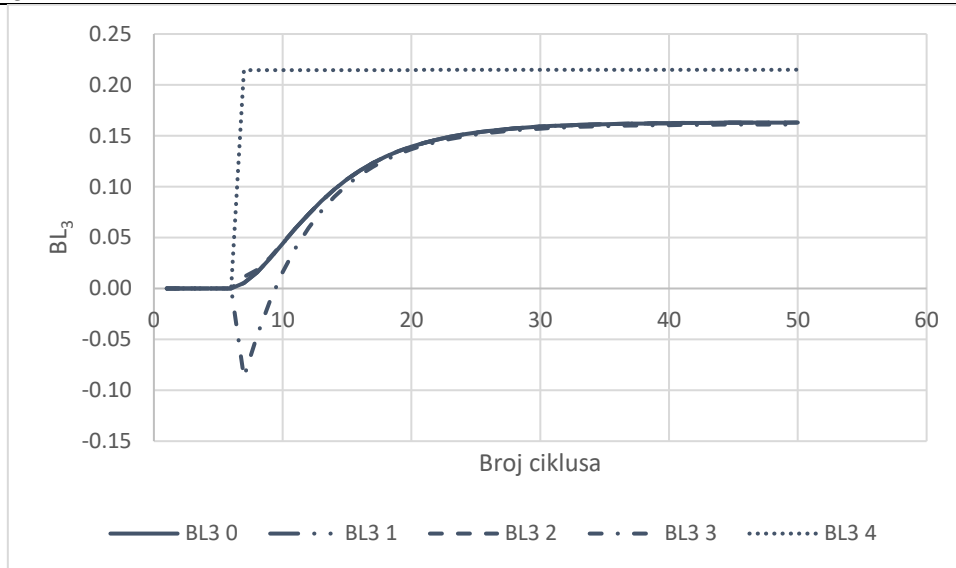




**Dijagram 5.60, BL stroja 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj D**

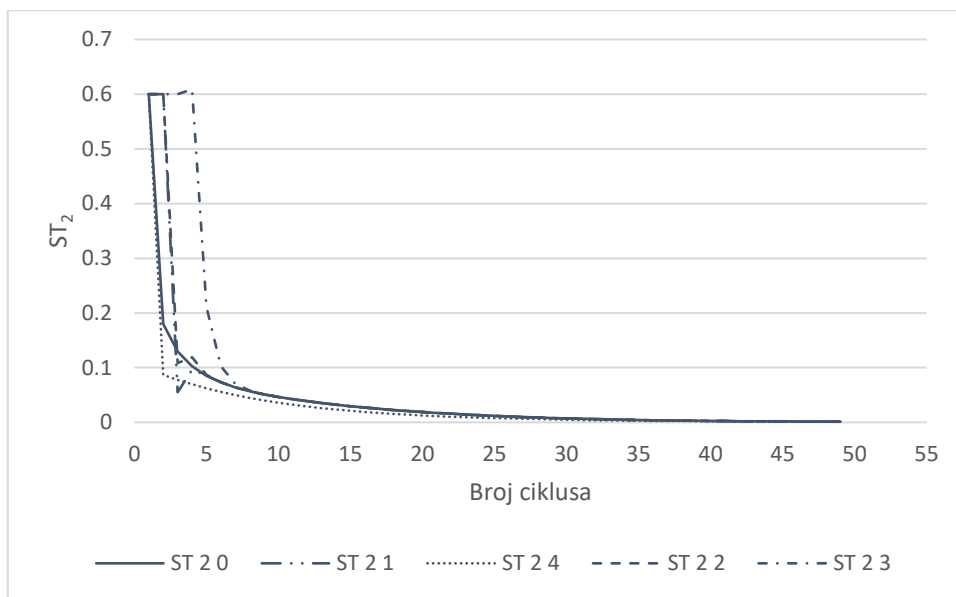


**Dijagram 5.61, BL stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj D**

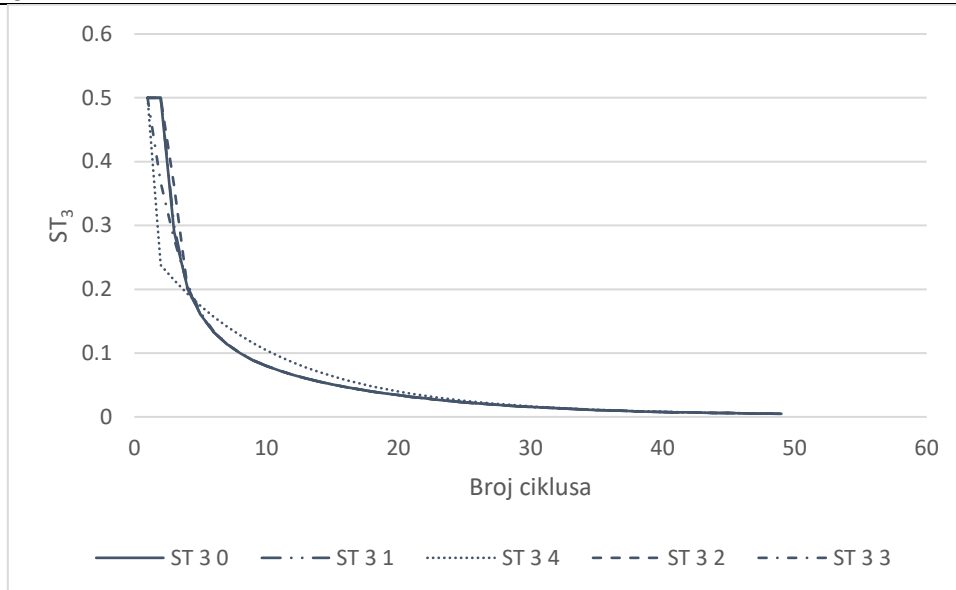


**Dijagram 5.62, BL stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj D**

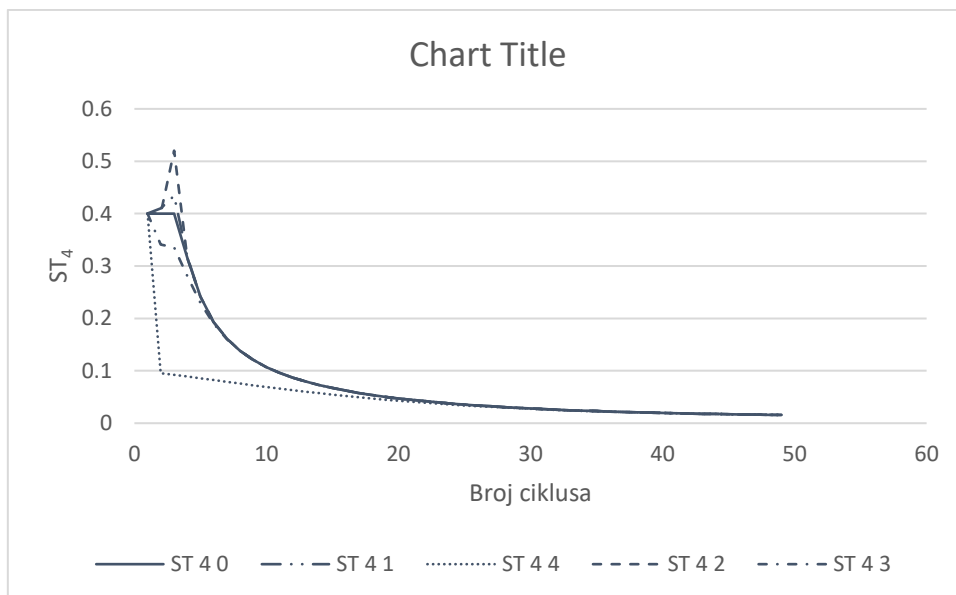
Vjerojatnost praznog hoda



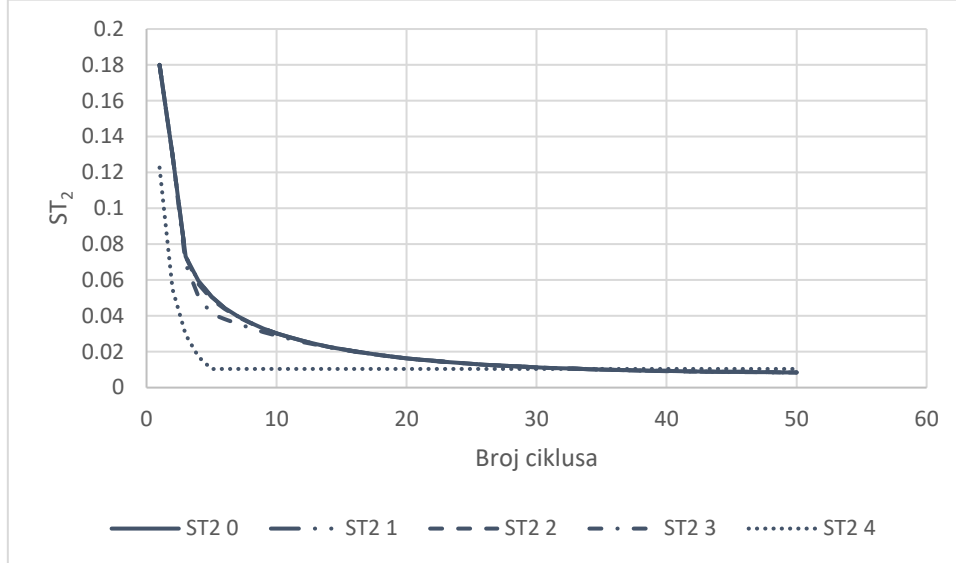
**Dijagram 5.63, ST stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj D**



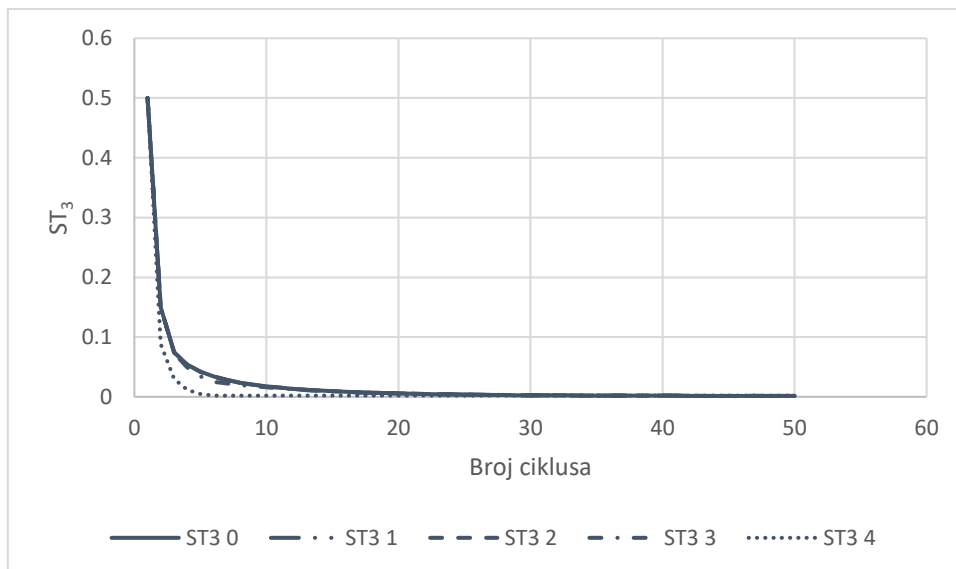
**Dijagram 5.64, ST stroja 3 računano analitičkom metodom za slučaj D**



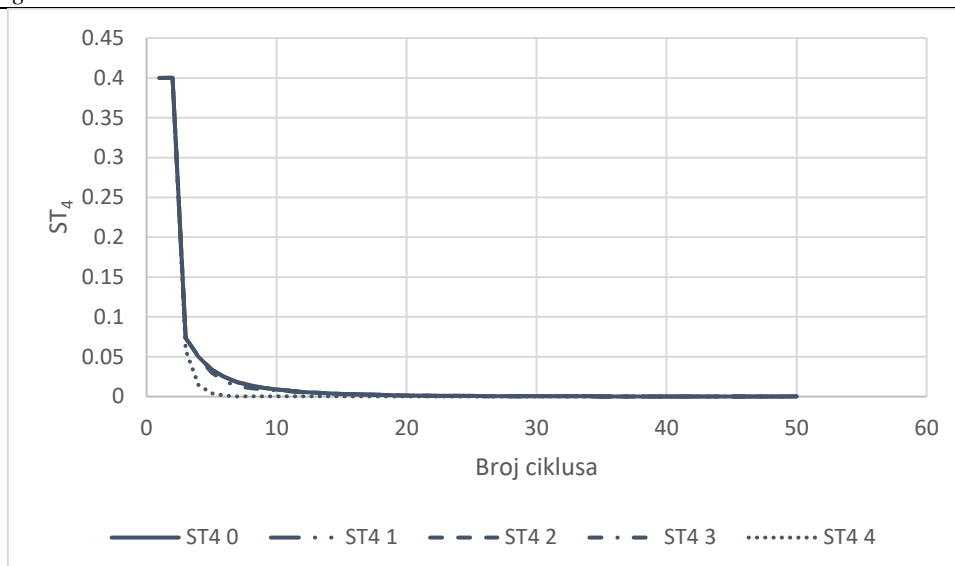
**Dijagram 5.65, ST stroja 4 računano analitičkom metodom za slučaj D**



**Dijagram 5.66, ST stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj D**



**Dijagram 5.67, ST stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj D**



**Dijagram 5.68, ST stroja 4 računano metodom konačnih stanja za slučaj D**

U ovim primjerima se vide slične karakteristike kao u serijskim linijama sa 3 stroja. Međutim, očituju se puno veće greške pri oduzimanju svojstvenih vrijednosti. Uzimanje svih svojstvenih vrijednosti je najpreciznije, i kod analitičke metode daje najtočnije rezultate. Smanjenje broja svojstvenih vrijednosti ima vrlo jak utjecaj, i vrijednosti u dijagramima postaju nestabilne uslijed toga. Uzimanje smanjenog broja svojstvenih nije preporučljivo tokom tranzijentnog odziva stanja, iako će vrijednosti asimptotski doći do istih vrijednosti s vremenom.

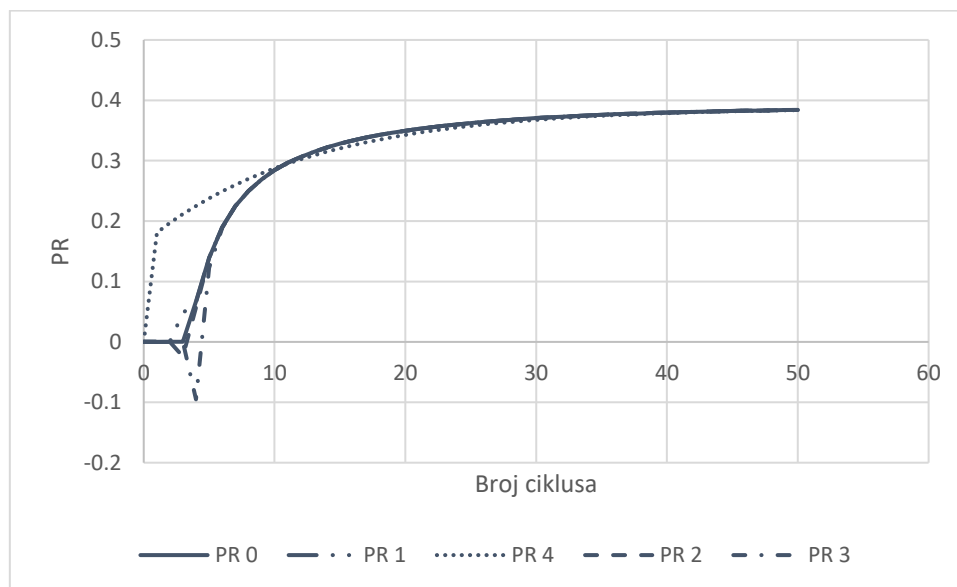
### 5.5. Slučaj E, serijska linija sa 5 strojeva

U slučaju E analiziramo serijsku liniju sa 4 stroja, čije su pouzdanosti  $p_1 = 0.8$ ,  $p_2 = 0.7$ ,  $p_3 = 0.6$ ,  $p_4 = 0.5$ ,  $p_5 = 0.4$ , a kapacitet svih međuskladišta  $N=5$ . Legenda je predstavljena u Tablici 5.6.

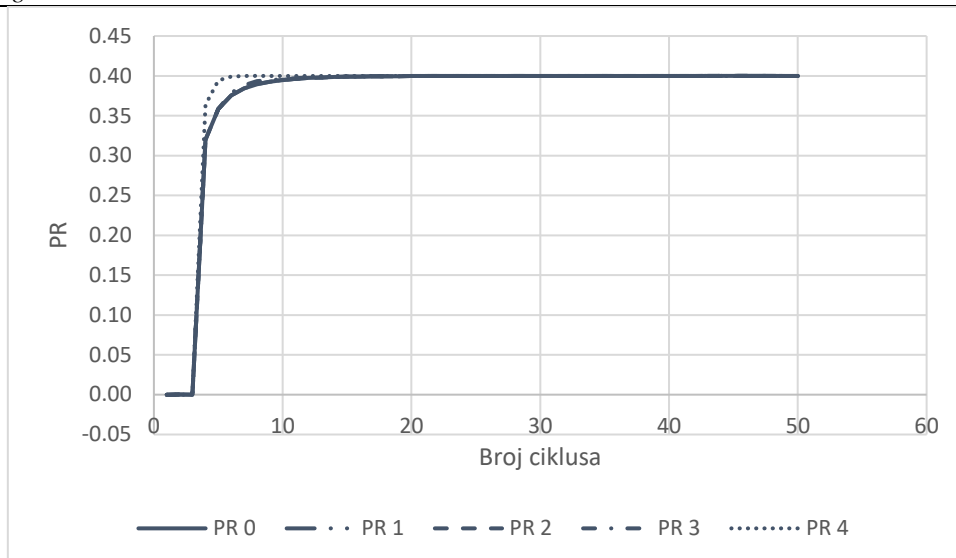
Tablica 5.6 Legenda slučaja E

Značenje broja	Analitička metoda	Metoda konačnih stanja
0	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima
1	Zanemarenje 25% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje najmanje svojstvene vrijednosti
2	Zanemarenje 50% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje dvije najmanje svojstvene vrijednosti
3	Zanemarenje 75% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje tri najmanje svojstvene vrijednosti
4	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće

Proizvodnost:

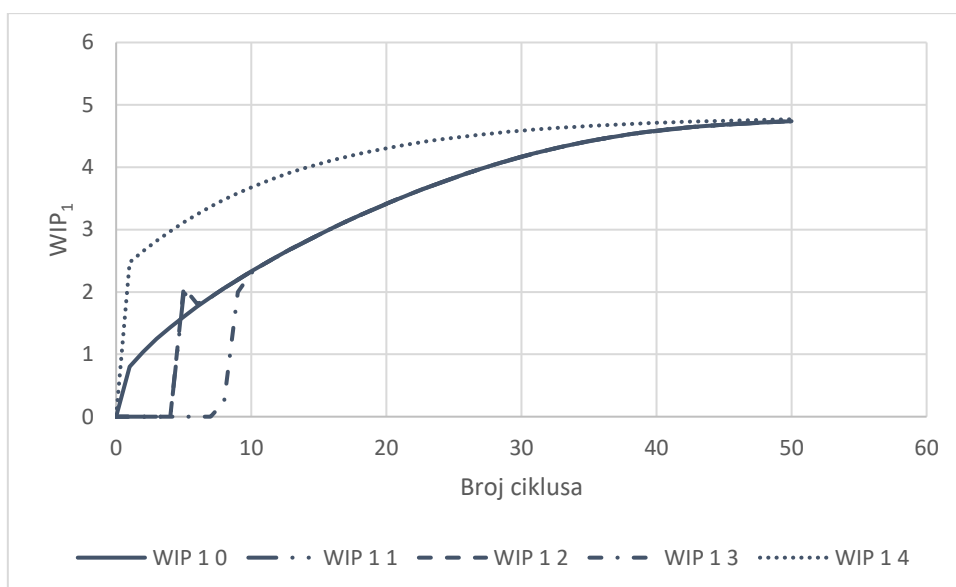


Dijagram 5.69, PR račun analitičkom metodom za slučaj E

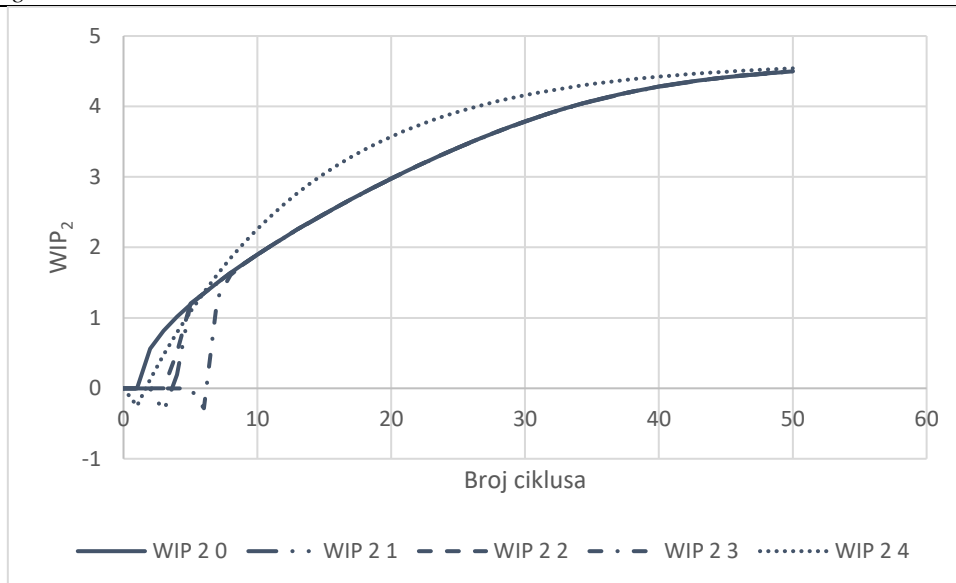


**Dijagram 5.70, PR računat metodom konačnih stanja za slučaj E**

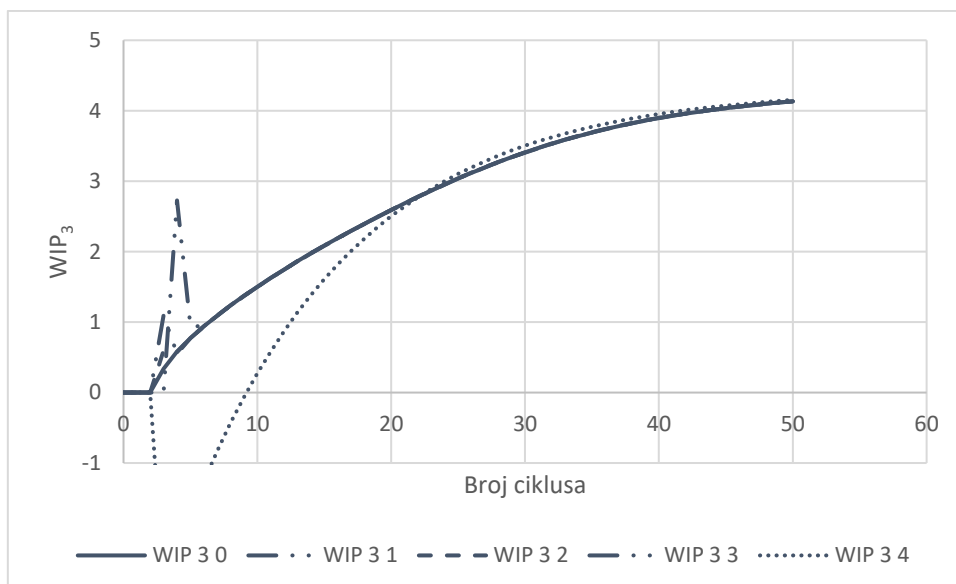
Prosječna količina proizvoda u međuskладиštu:



**Dijagram 5.71, WIP međuskладиšta 1 računat analitičkom metodom za slučaj E**

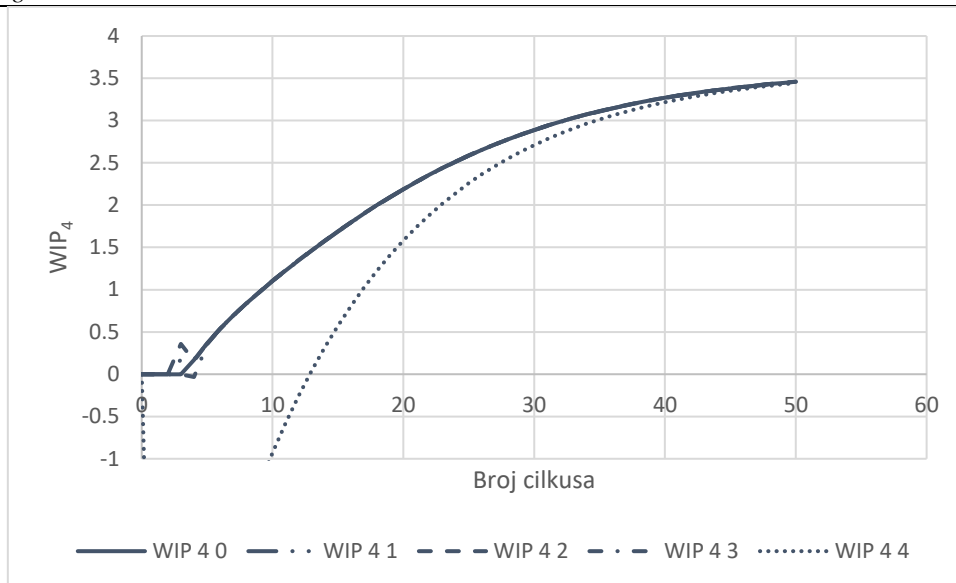


**Dijagram 5.72, WIP međuskладиšta 2 računан analitičkom metodom za slučaj E**

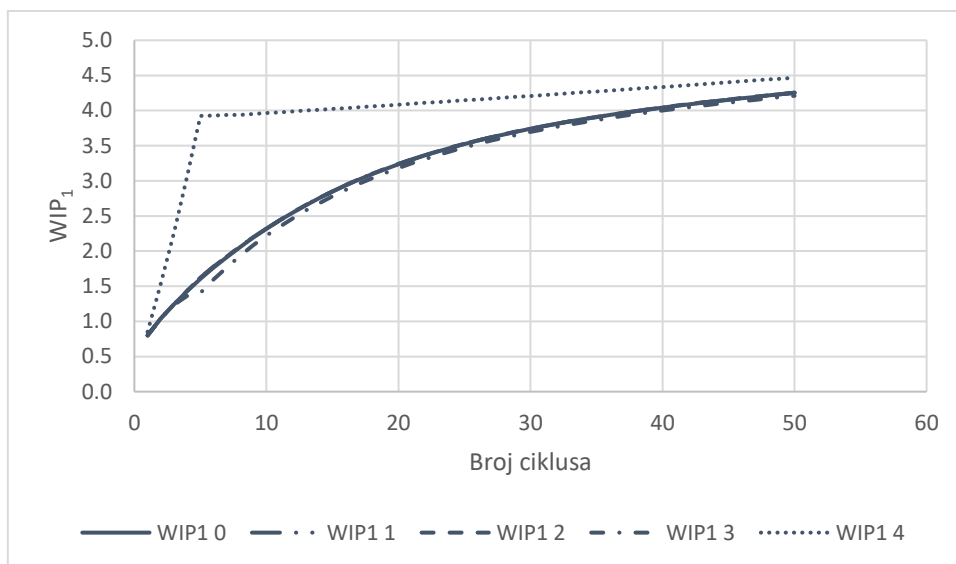


**Dijagram 5.73, WIP međuskладишта 3 računан analitičkom metodom za slučaj E**

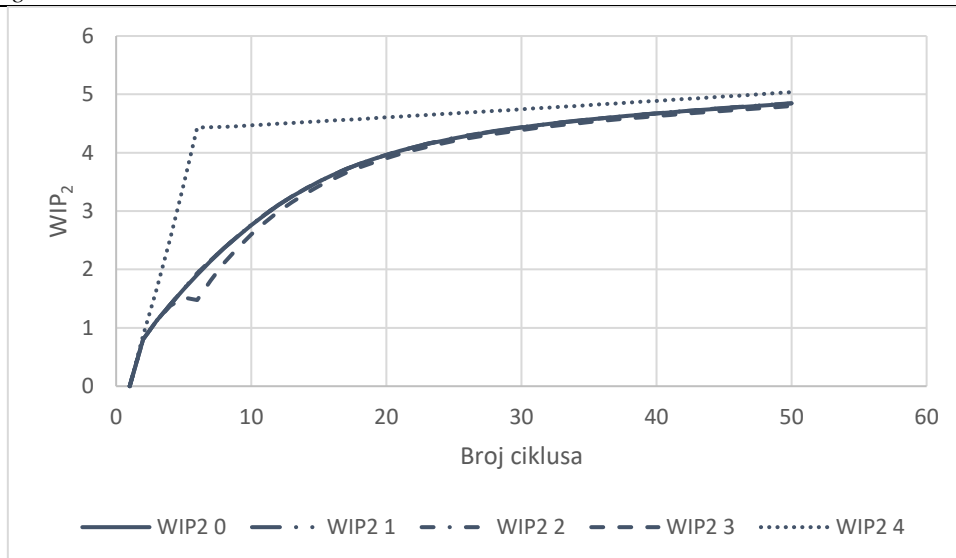




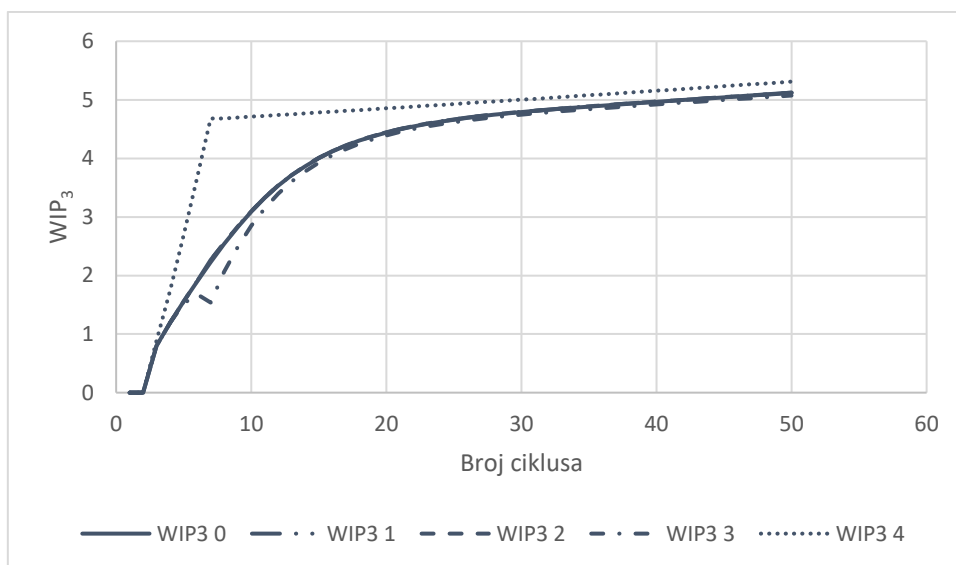
**Dijagram 5.74, WIP međuskладиšta 4 računat analitičkom metodom za slučaj E**



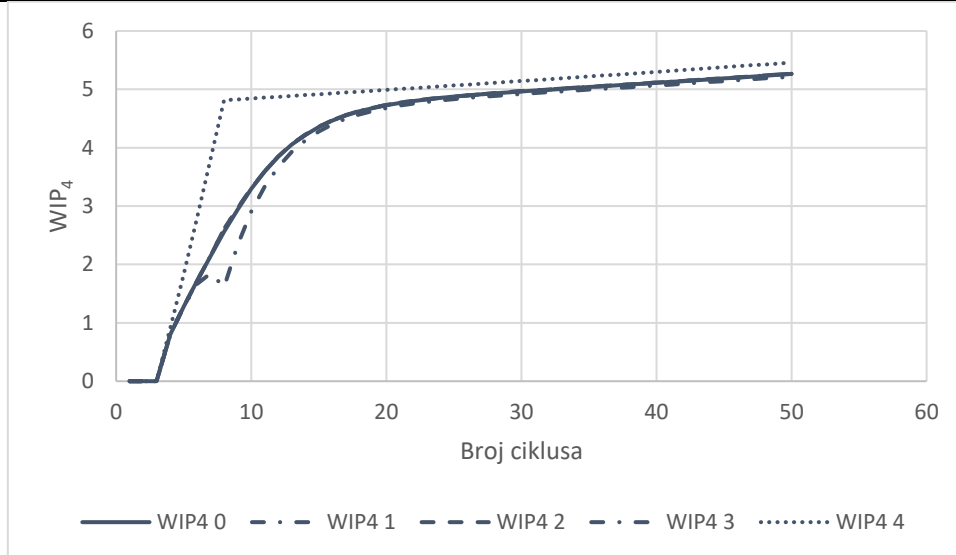
**Dijagram 5.75, WIP međuskладиšta 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**



**Dijagram 5.76, WIP međuskladišta 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**

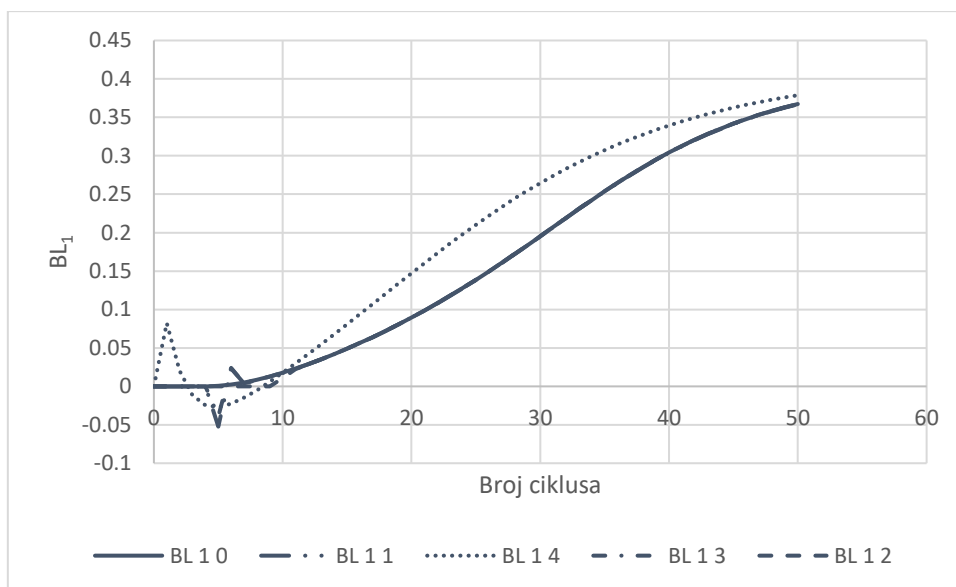


**Dijagram 5.77, WIP međuskladišta 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**

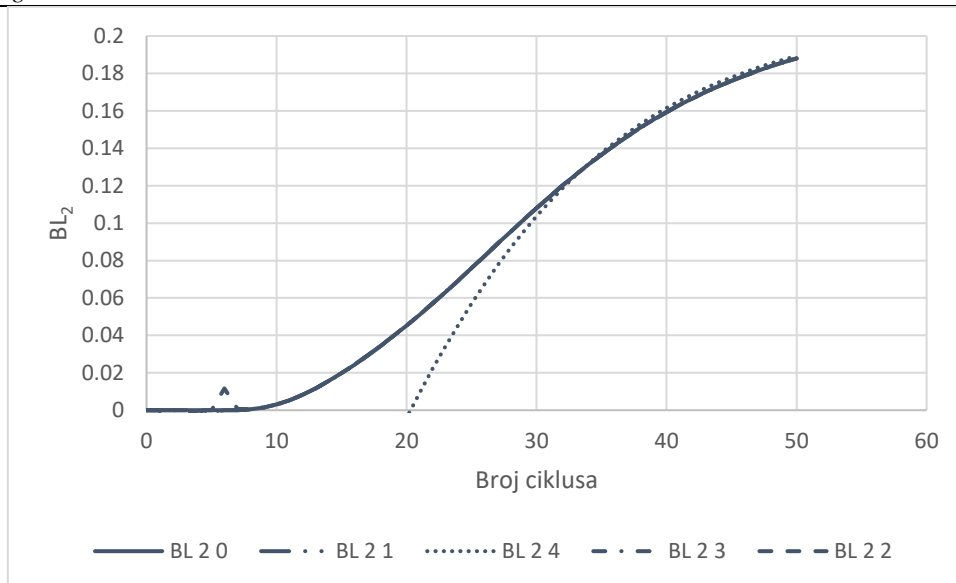


Dijagram 5.78, WIP međuskladišta 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj E

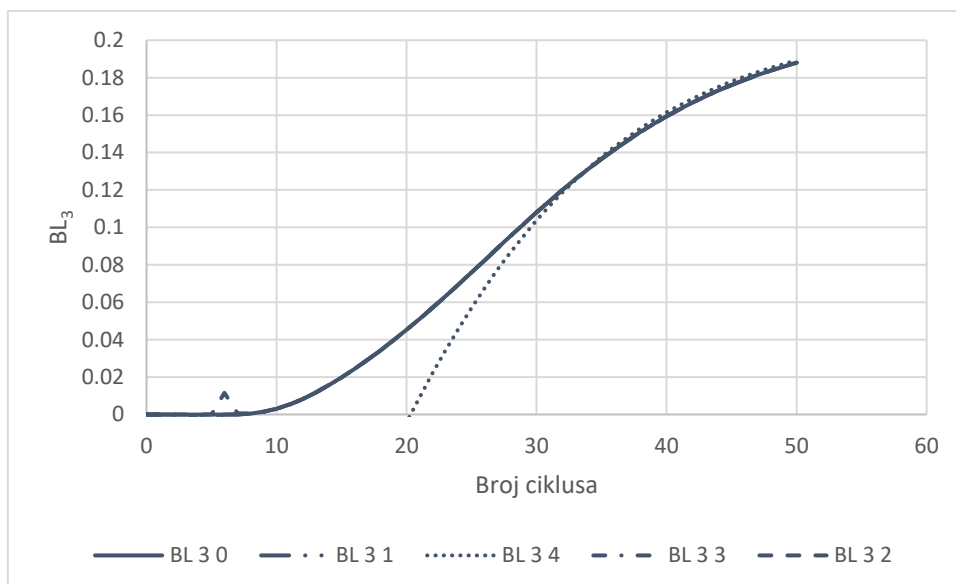
Vjerojatnost blokade:



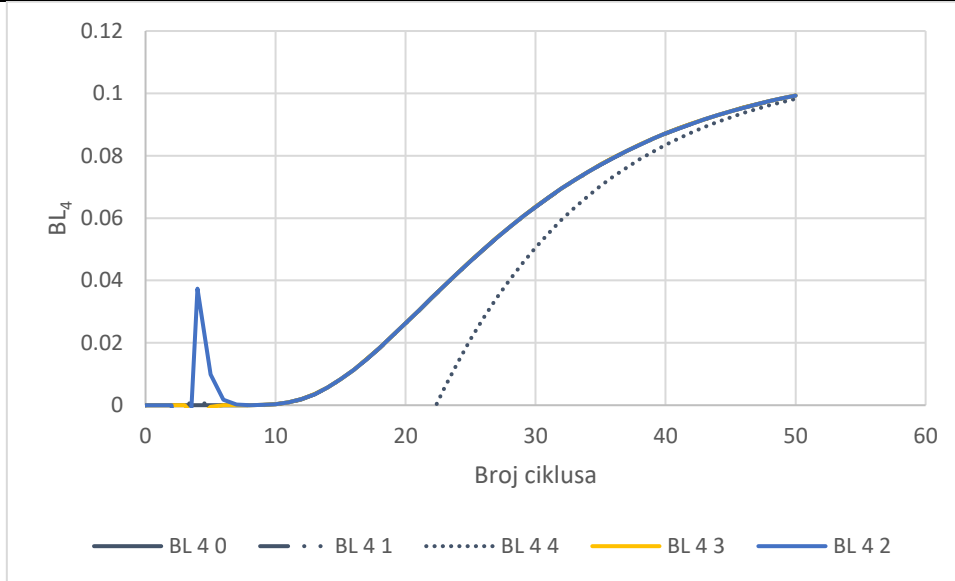
Dijagram 5.79, BL stroja 1 računat analitičkom metodom za slučaj E



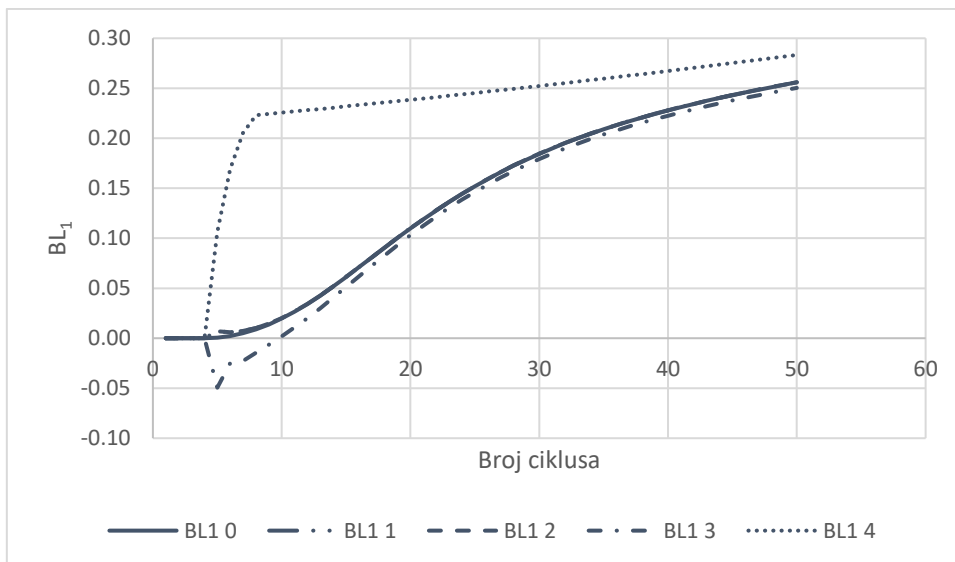
**Dijagram 5.80, BL stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj E**



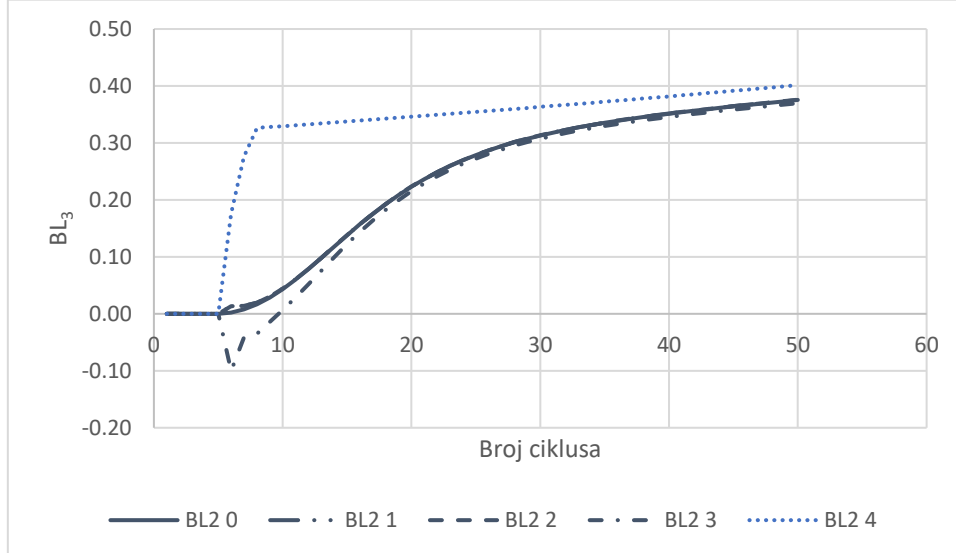
**Dijagram 5.81, BL stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj E**



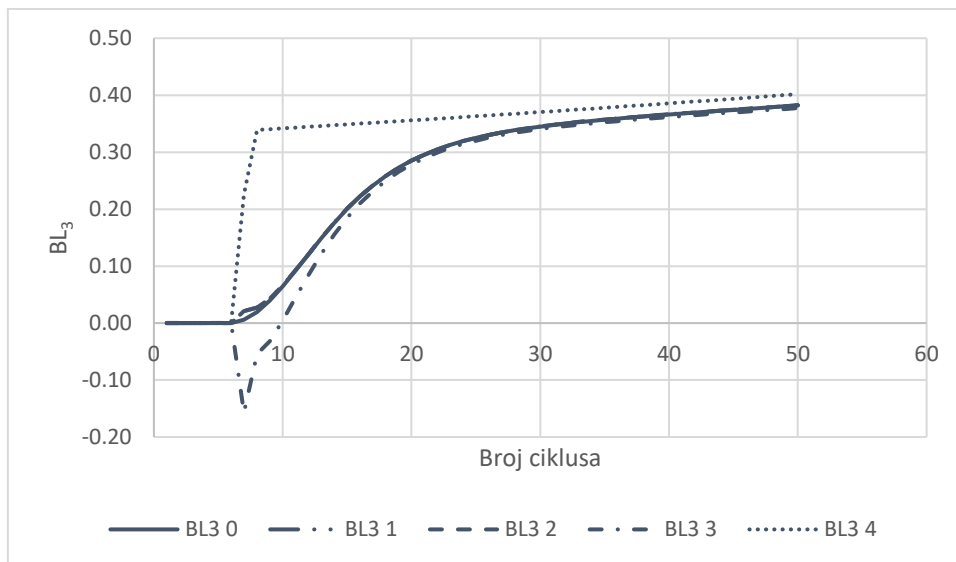
**Dijagram 5.82, BL stroja 4 računat analitičkom metodom za slučaj E**



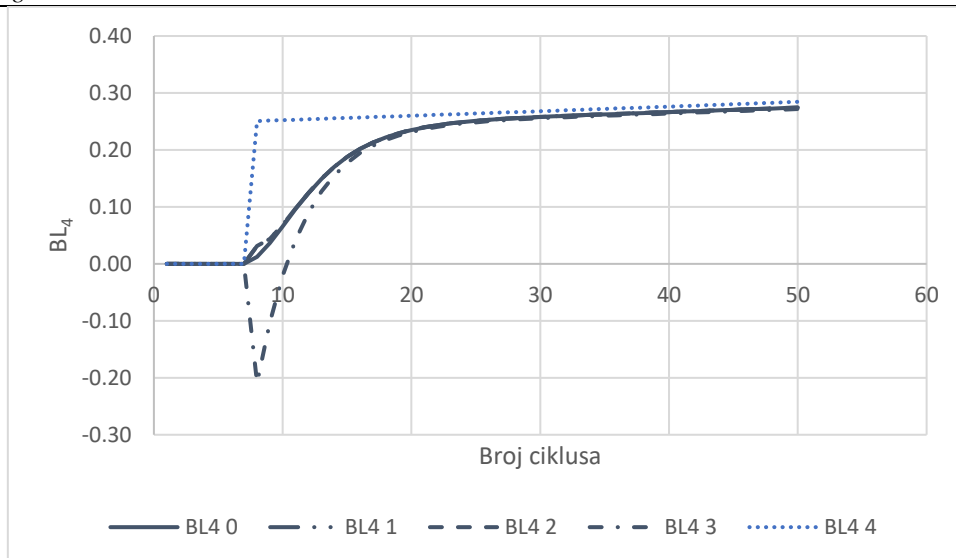
**Dijagram 5.83, BL stroja 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**



**Dijagram 5.84, BL stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**

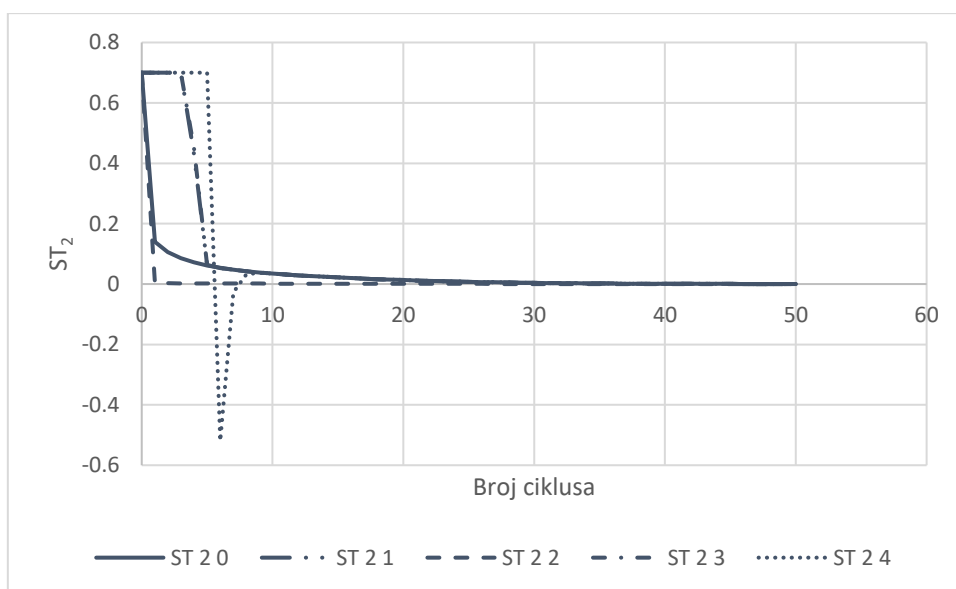


**Dijagram 5.85, BL stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**

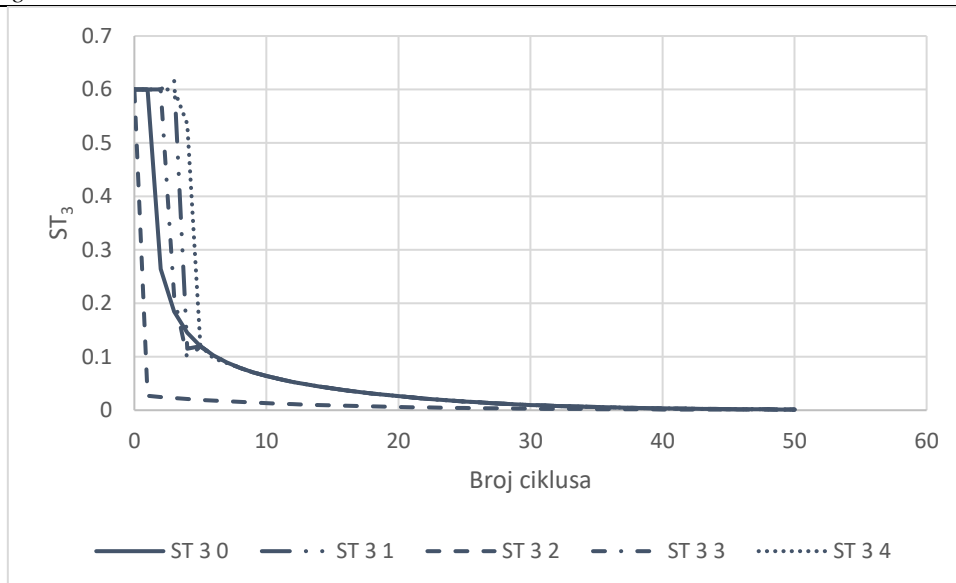


**Dijagram 5.86, BL stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**

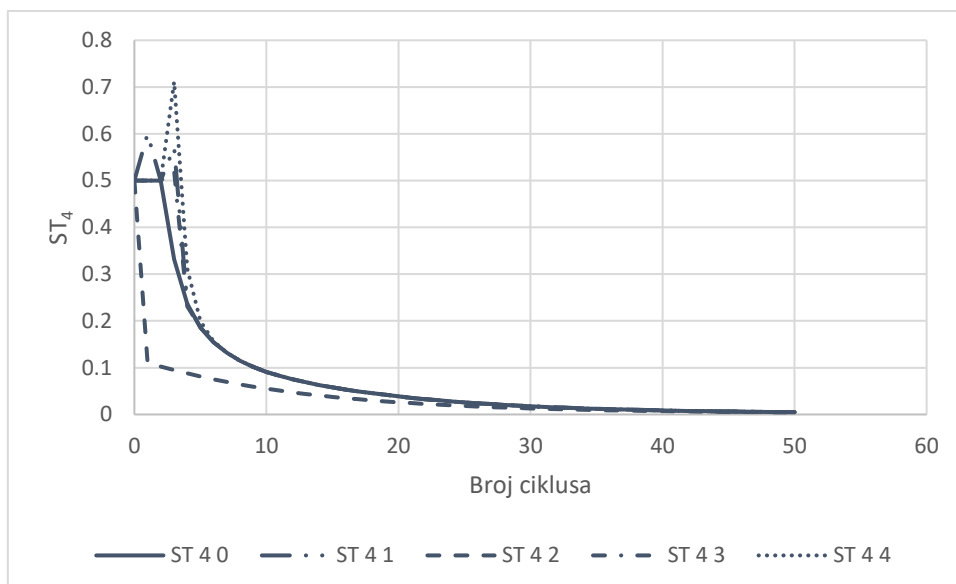
Vjerojatnost praznog hoda:



**Dijagram 5.87, ST stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj E**

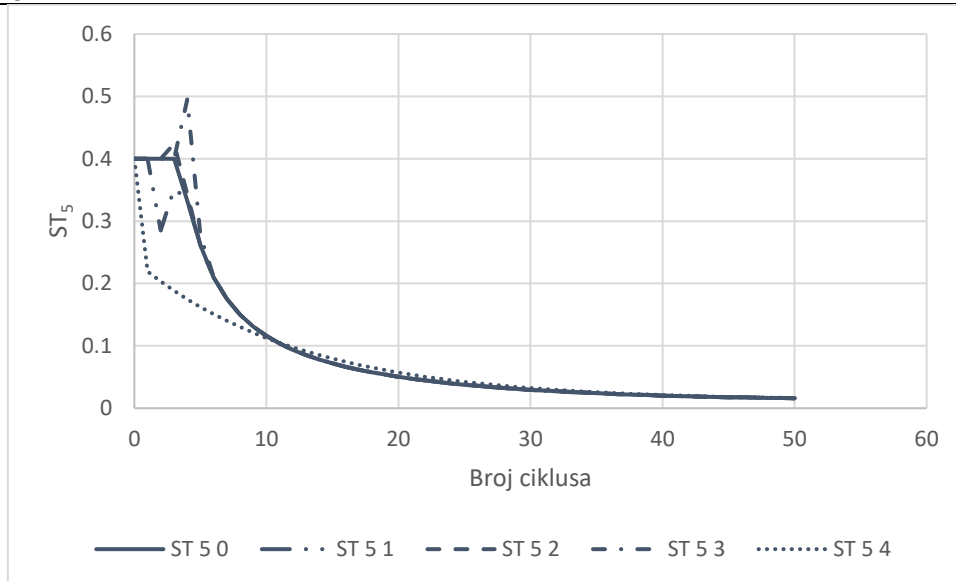


**Dijagram 5.88,  $ST$  stroja 3 račun analitičkom metodom za slučaj E**

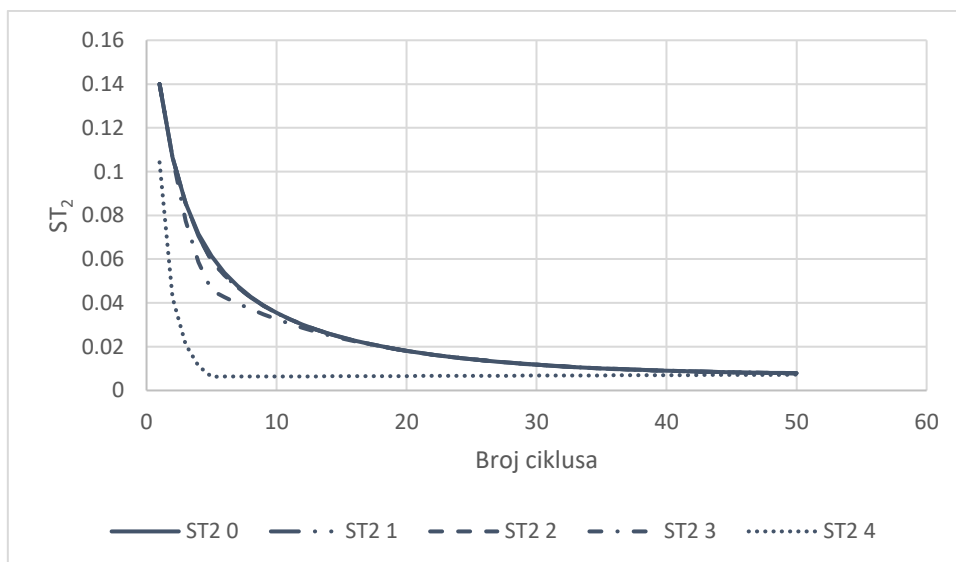


**Dijagram 5.89,  $ST$  stroja 4 račun analitičkom metodom za slučaj E**

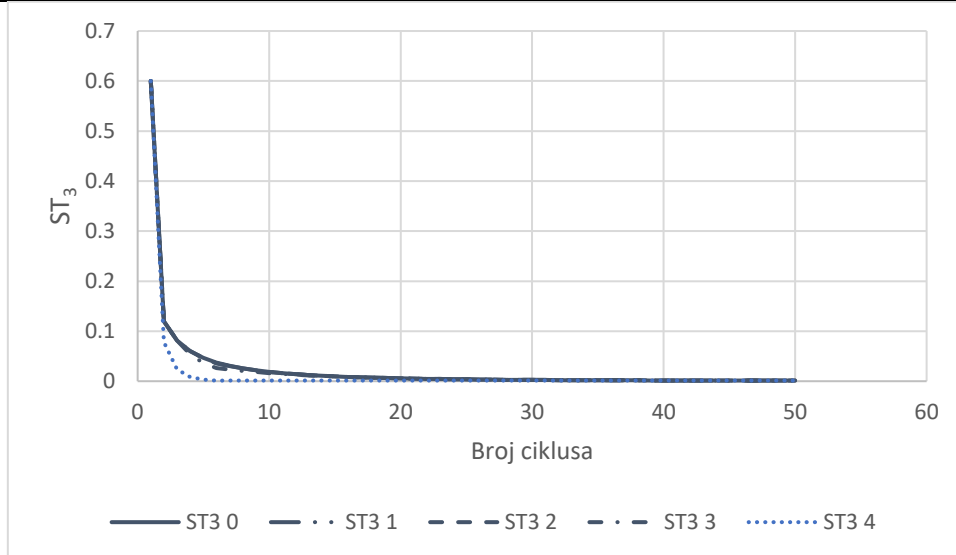




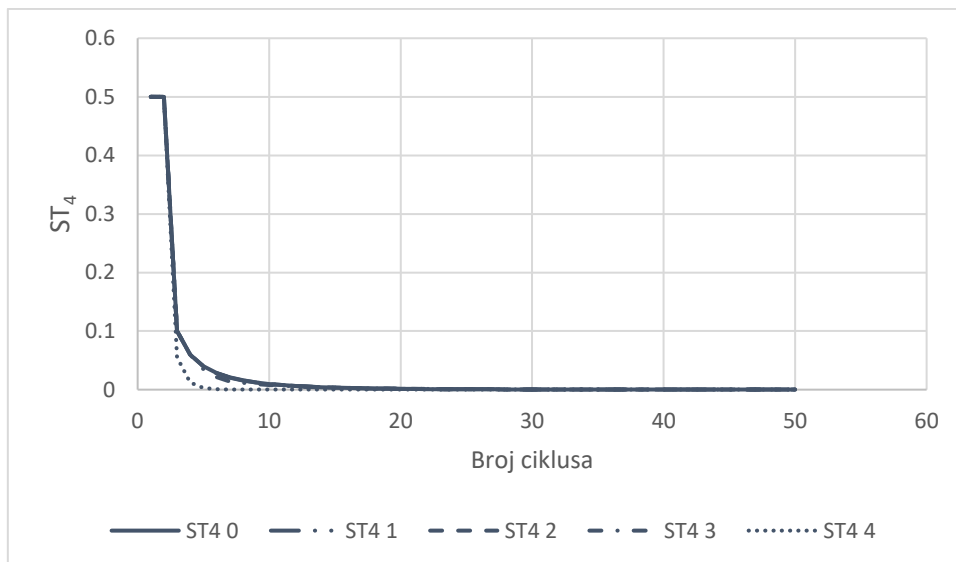
**Dijagram 5.90, ST stroja 5 računat analitičkom metodom za slučaj E**



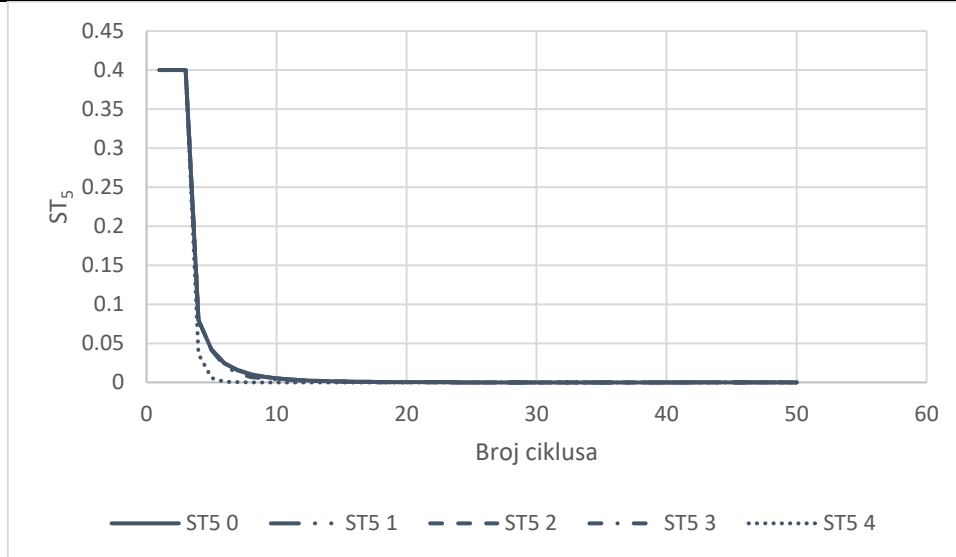
**Dijagram 5.91, ST stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**



Dijagram 5.92, ST stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj E



Dijagram 5.93, ST stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj E



**Dijagram 5.94, ST stroja 5 računat metodom konačnih stanja za slučaj E**

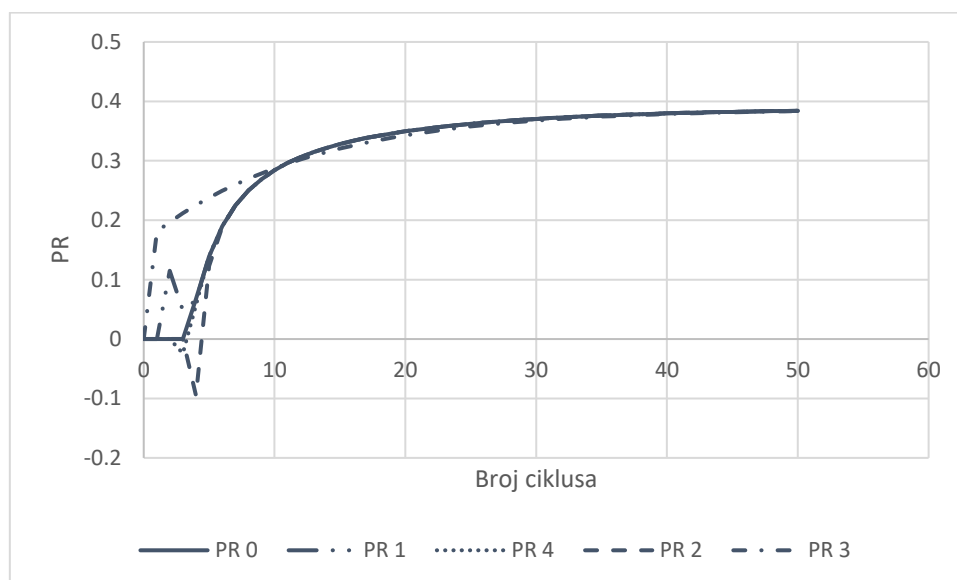
### 5.6. Slučaj F, serijska linija sa 5 strojeva

U slučaju F analiziramo serijsku liniju sa 4 stroja, čije su pouzdanosti  $p_1 = 0.4$ ,  $p_2 = 0.5$ ,  $p_3 = 0.6$ ,  $p_4 = 0.7$ ,  $p_5 = 0.8$ , a kapacitet svih međuskladišta  $N=5$ . Legenda je predstavljena u Tablici 5.7.

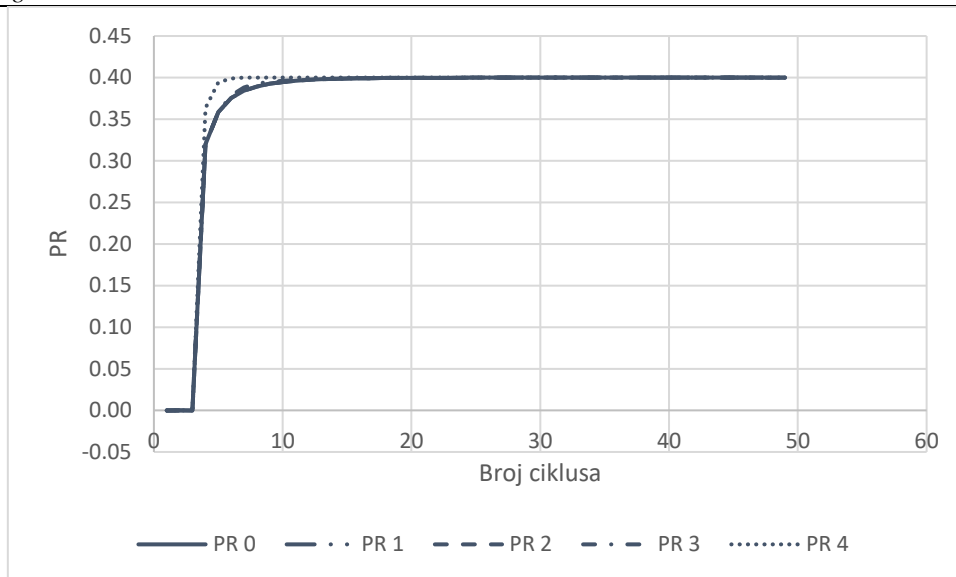
Tablica 5.7 Legenda slučaja F

Značenje broja	Analitička metoda	Metoda konačnih stanja
0	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima	Izračun obavljen sa svim svojstvenim vrijednostima
1	Zanemarenje 25% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje najmanje svojstvene vrijednosti
2	Zanemarenje 50% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje dvije najmanje svojstvene vrijednosti
3	Zanemarenje 75% najmanjih svojstvenih vrijednosti	Zanemarenje tri najmanje svojstvene vrijednosti
4	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće	Zanemarenje svih svojstvenih vrijednosti osim najveće

Proizvodnost:

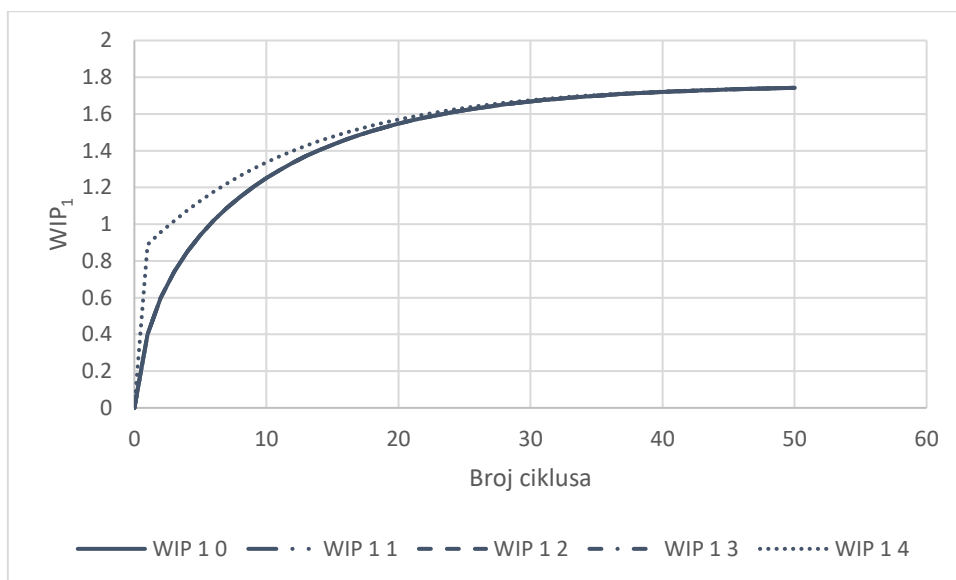


Dijagram 5.95, PR računat analitičkom metodom za slučaj F

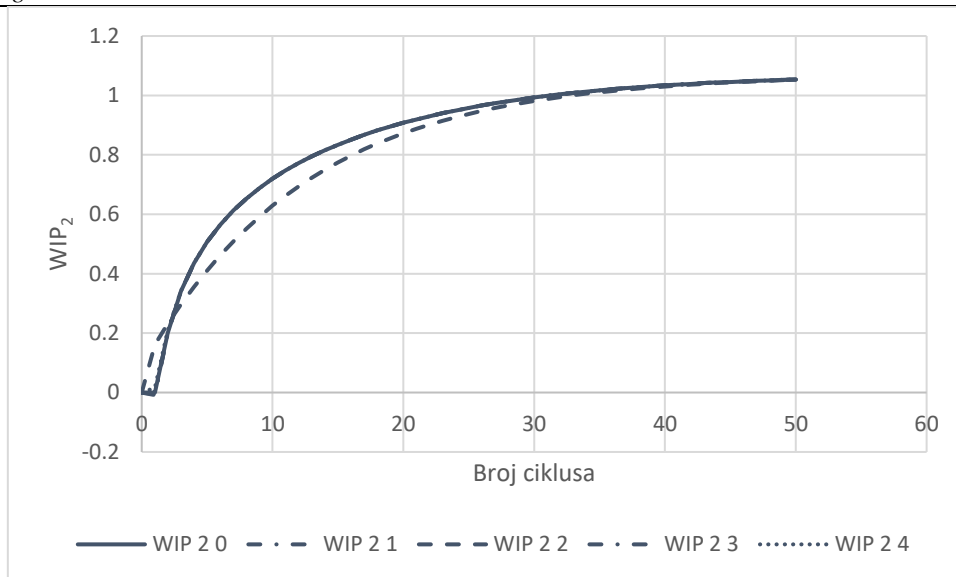


**Dijagram 5.96, PR računat metodom konačnih stanja za slučaj F**

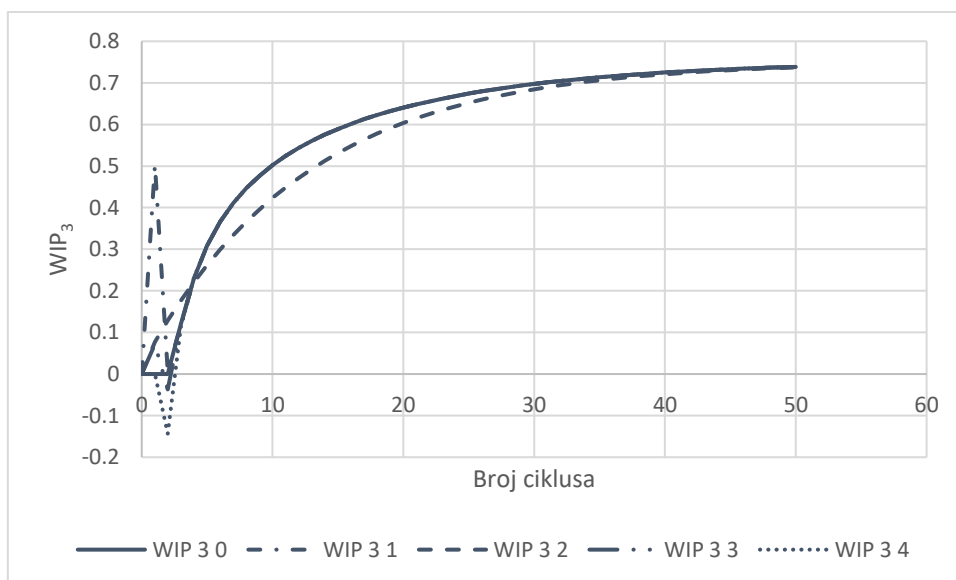
Prosječna količina proizvoda u međuskladištu:



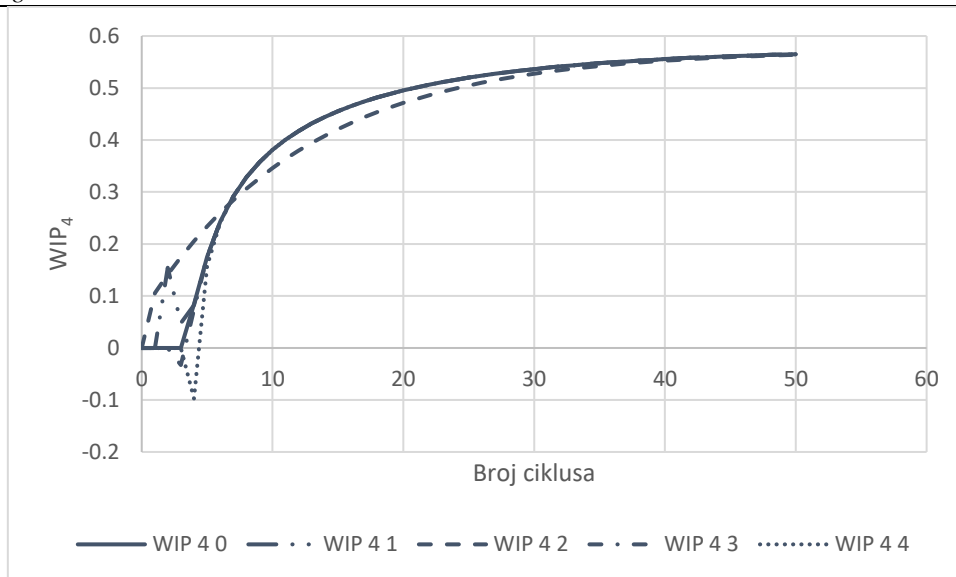
**Dijagram 5.97, WIP međuskladišta 1 računat analitičkom metotom za slučaj F**



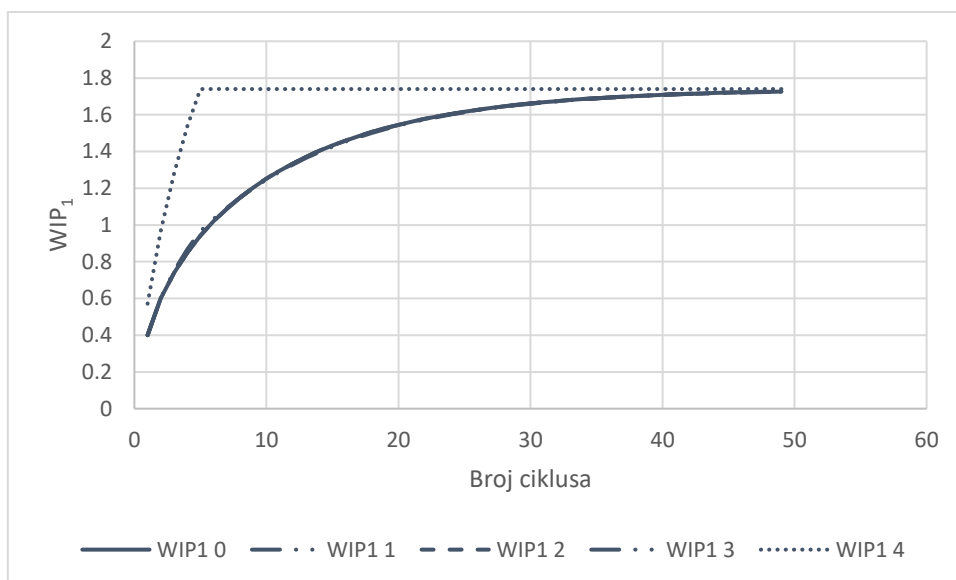
Dijagram 5.98, WIP međuskладиšta 2 računat analitičkom metotom za slučaj F



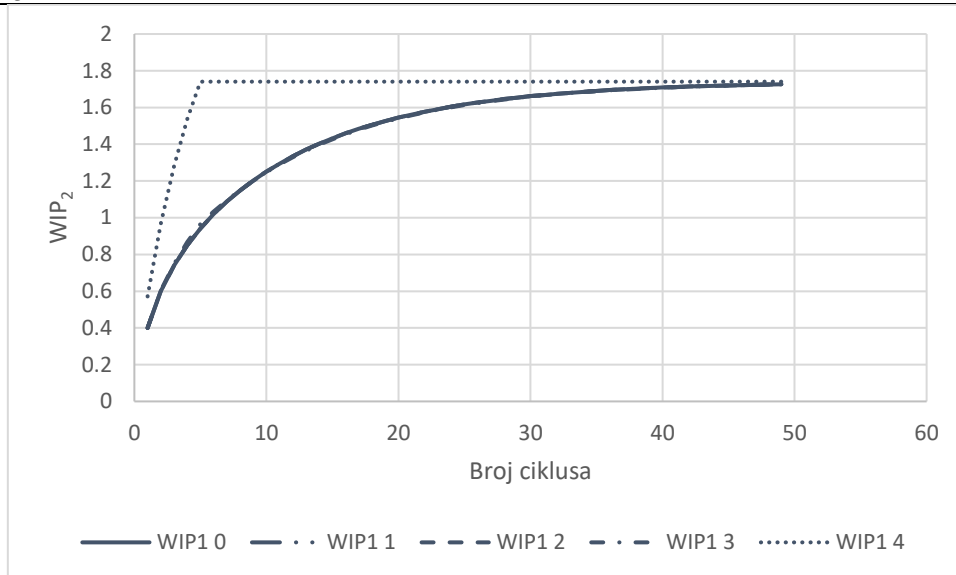
Dijagram 5.99, WIP međuskладиšta 3 računat analitičkom metotom za slučaj F



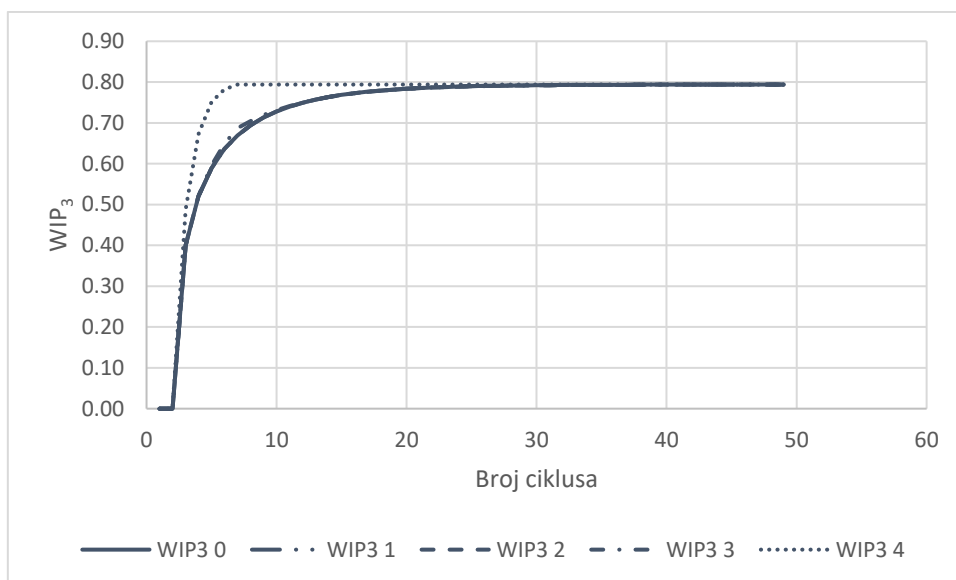
**Dijagram 5.100, WIP međuskladišta 4 računat analitičkom metotom za slučaj F**



**Dijagram 5.101, WIP međuskladišta 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**

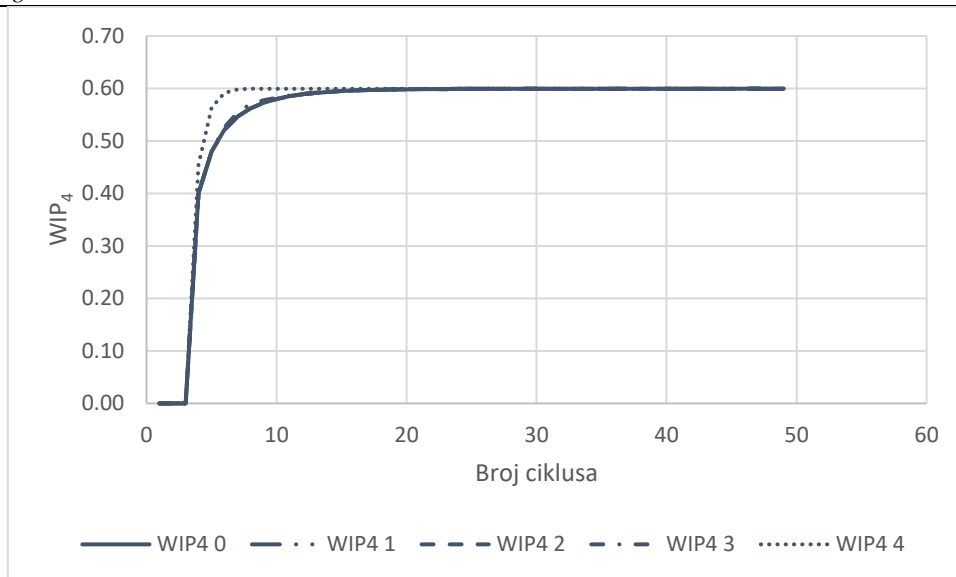


**Dijagram 5.102, WIP međuskladišta 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**



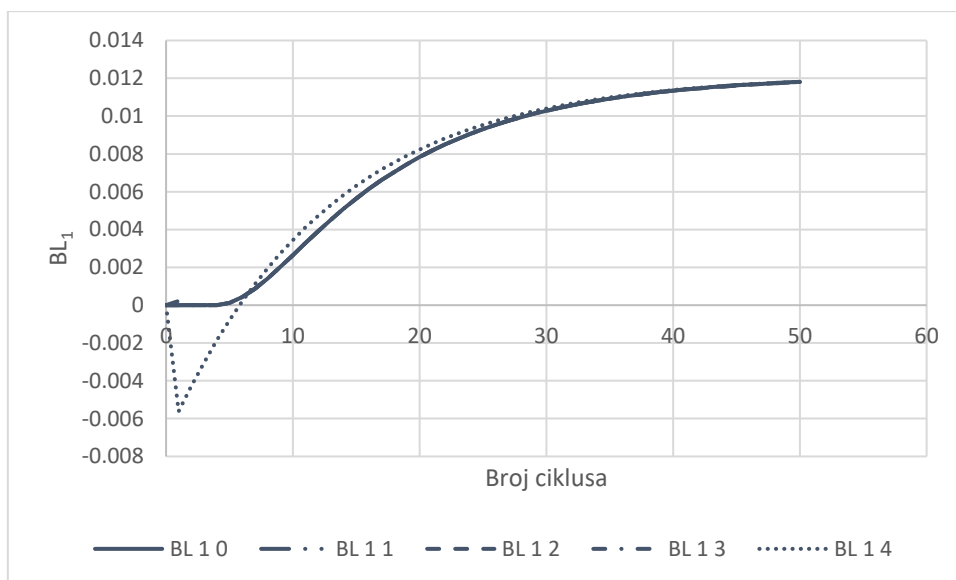
**Dijagram 5.103, WIP međuskladišta 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**



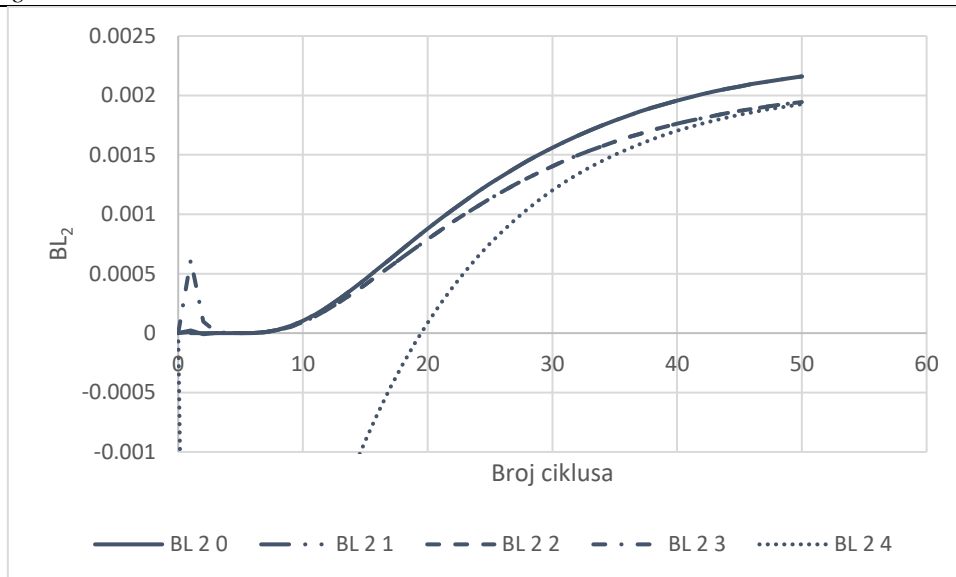


**Dijagram 5.104, WIP međuskладиšta 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**

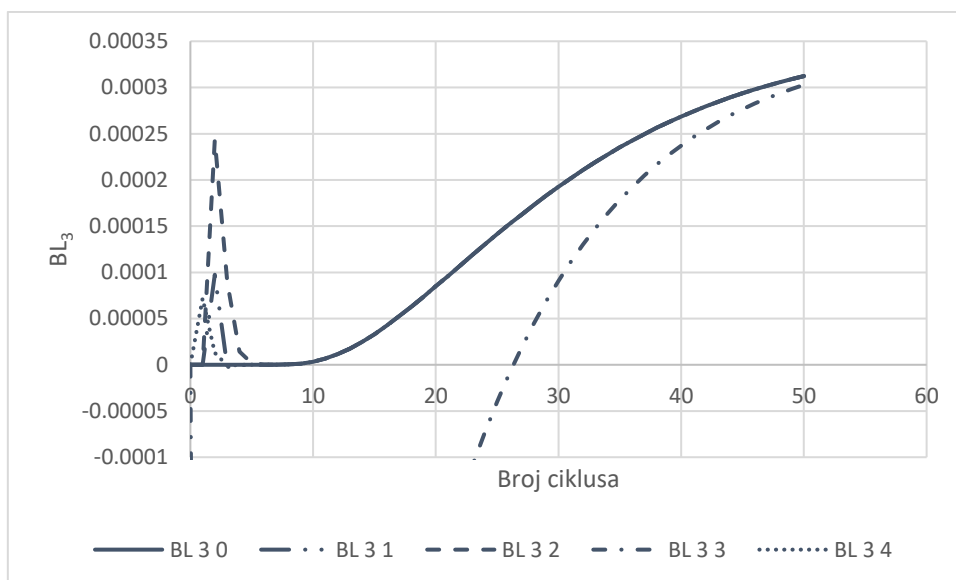
Vjerojatnost blokade:



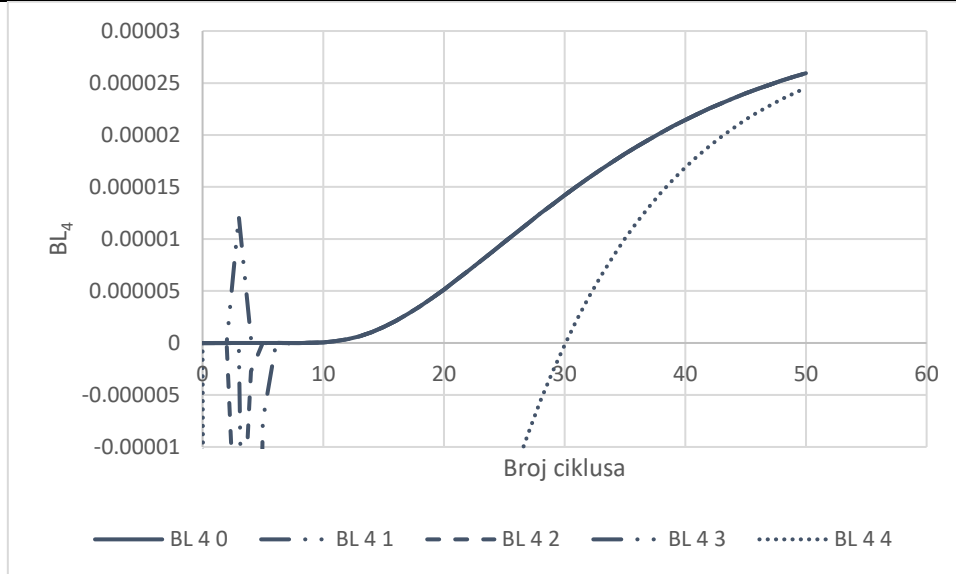
**Dijagram 5.105, BL stroja 1 računat analitičkom metodom za slučaj F**



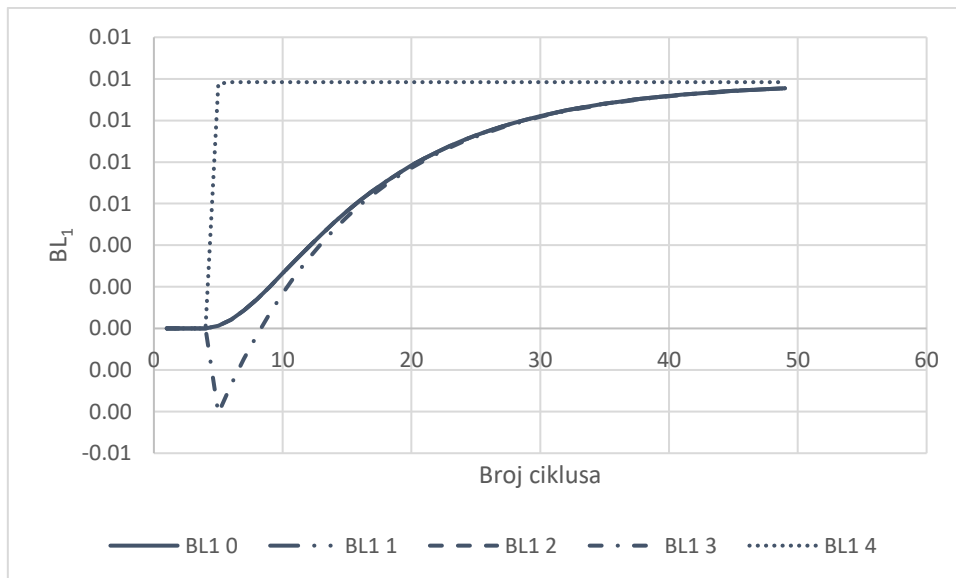
**Dijagram 5.106, BL stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj F**



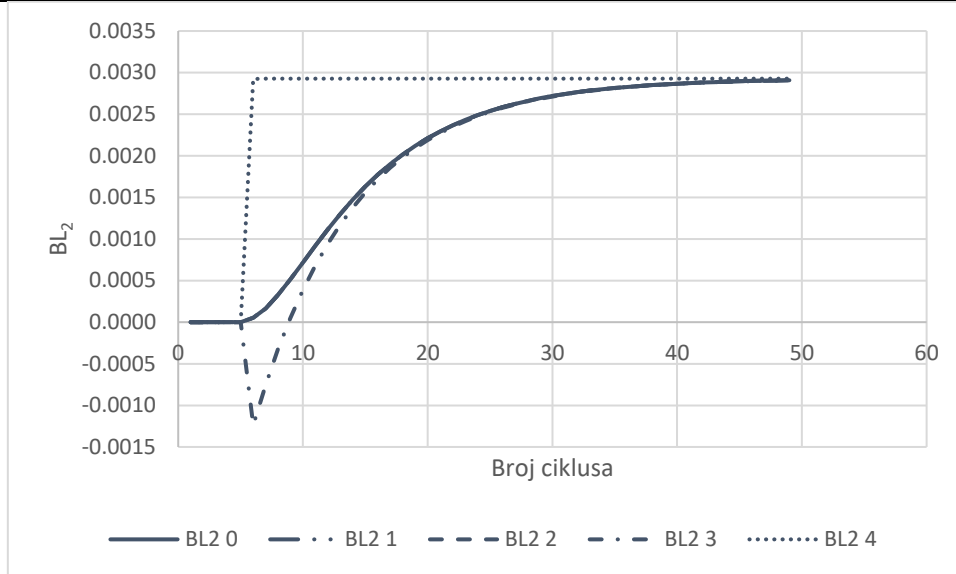
**Dijagram 5.107, BL stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj F**



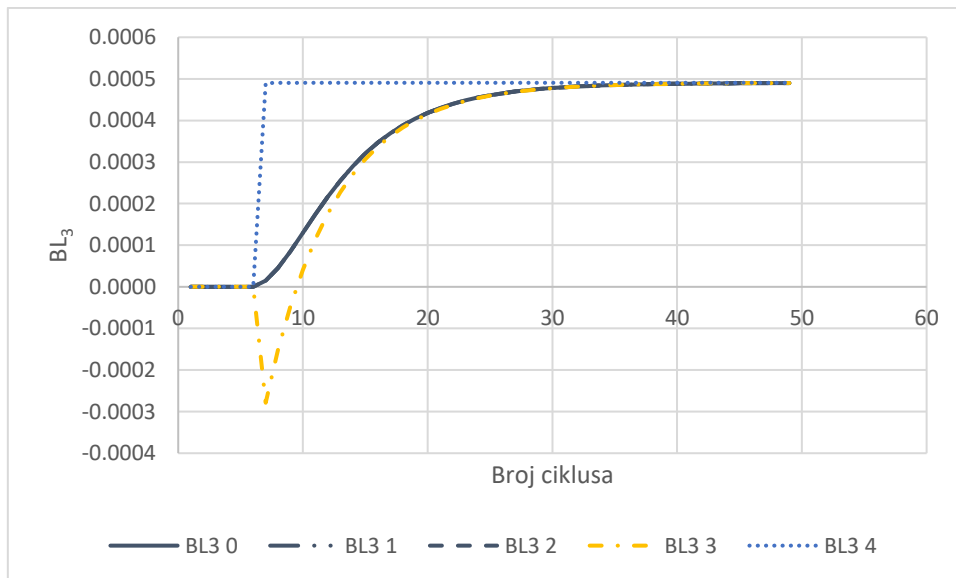
**Dijagram 5.108, BL stroja 4 računat analitičkom metodom za slučaj F**



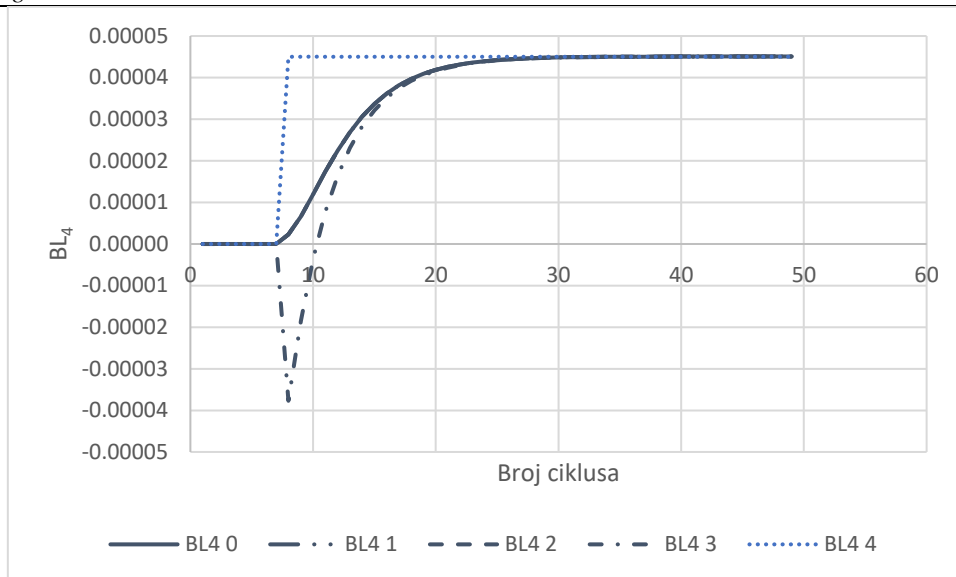
**Dijagram 5.109, BL stroja 1 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**



**Dijagram 5.110, BL stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**

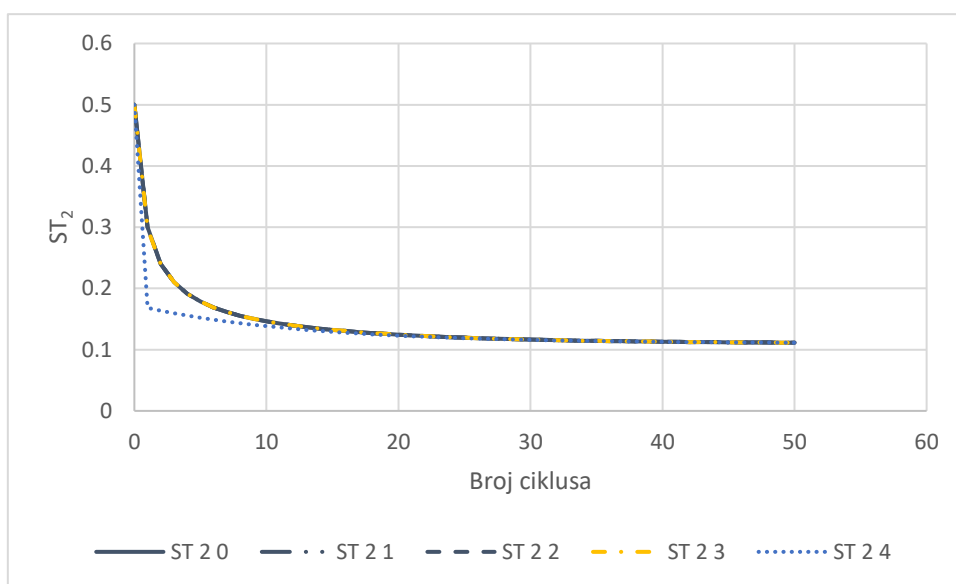


**Dijagram 5.111, BL stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**

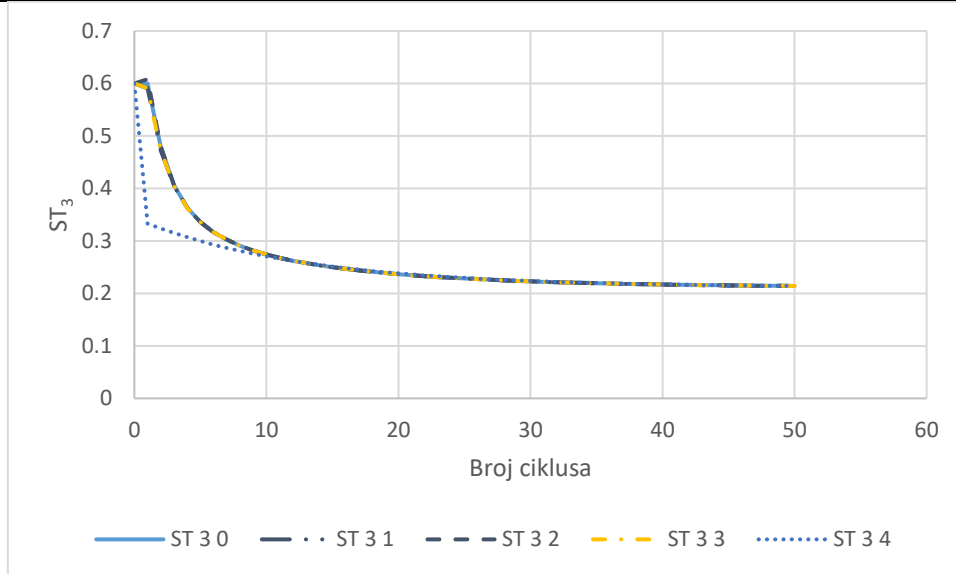


**Dijagram 5.112, BL stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**

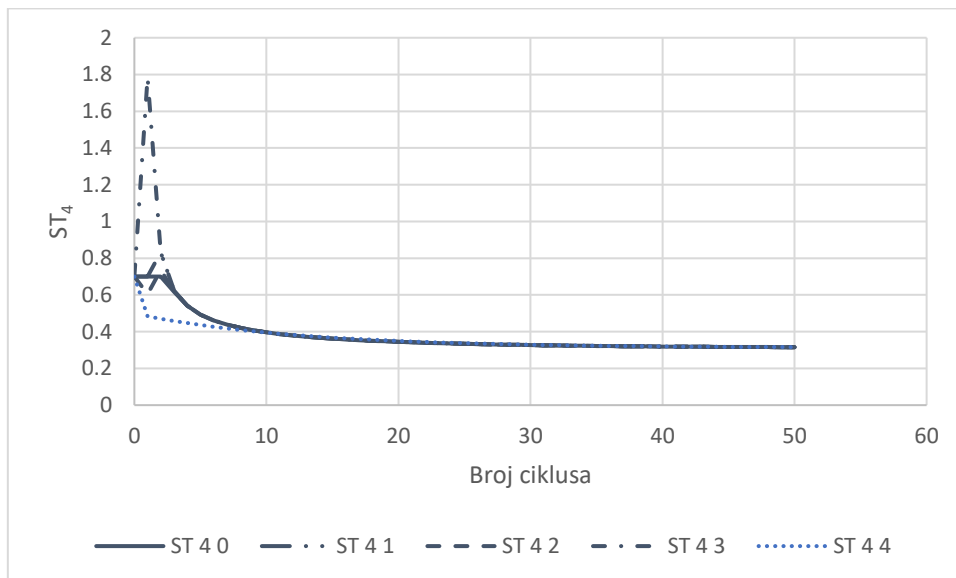
Vjerojatnost praznog hoda:



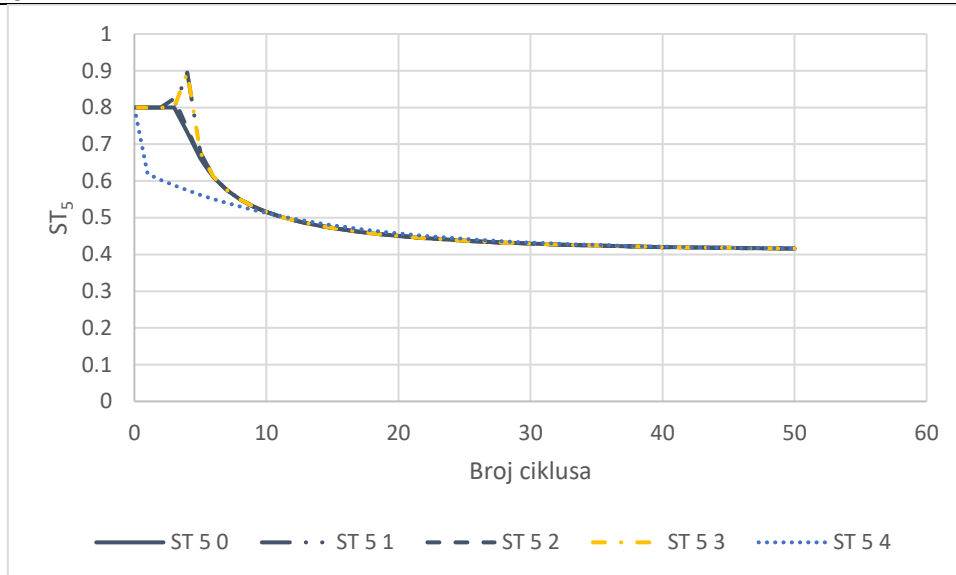
**Dijagram 5.113, ST stroja 2 računat analitičkom metodom za slučaj F**



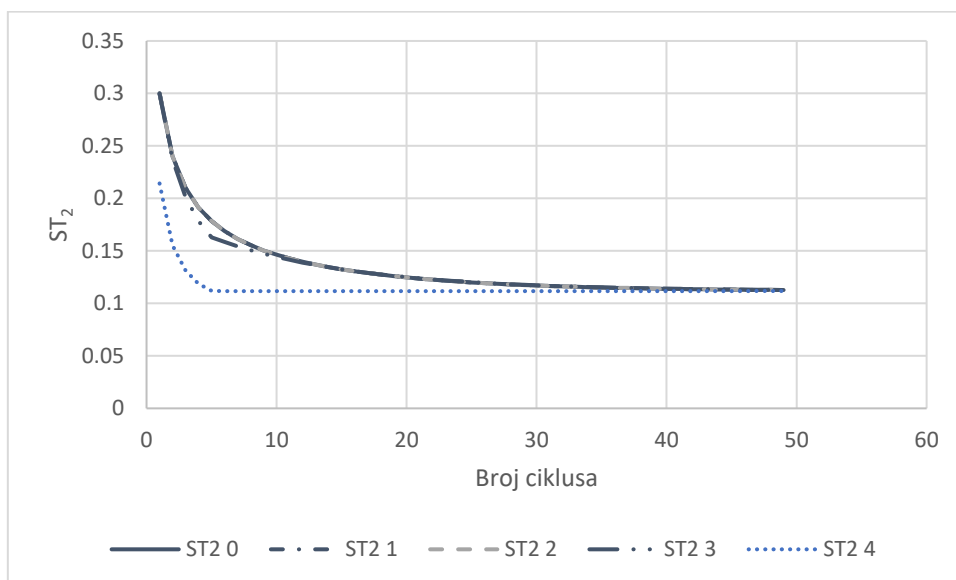
Dijagram 5.114, ST stroja 3 računat analitičkom metodom za slučaj F



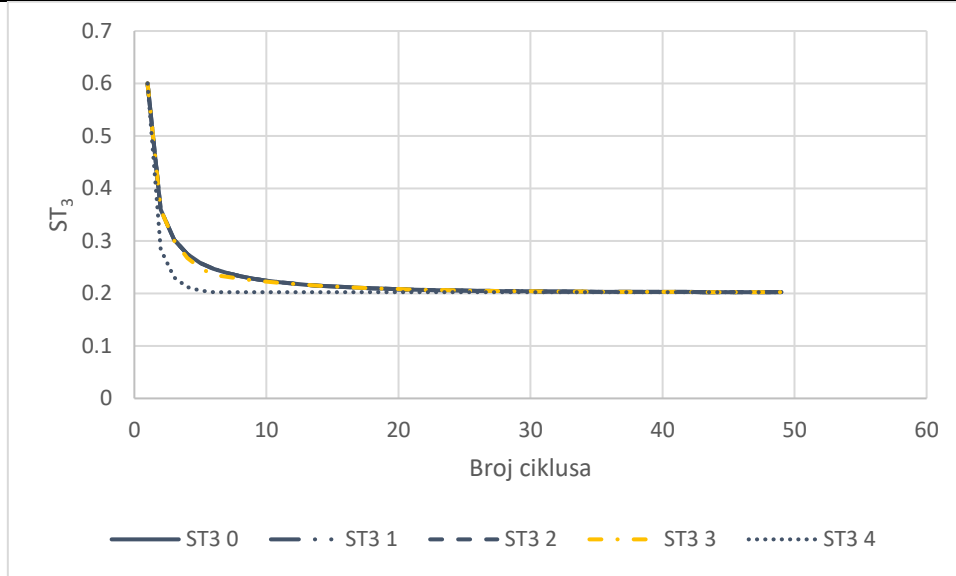
Dijagram 5.115, ST stroja 4, računat analitičkom metodom za slučaj F



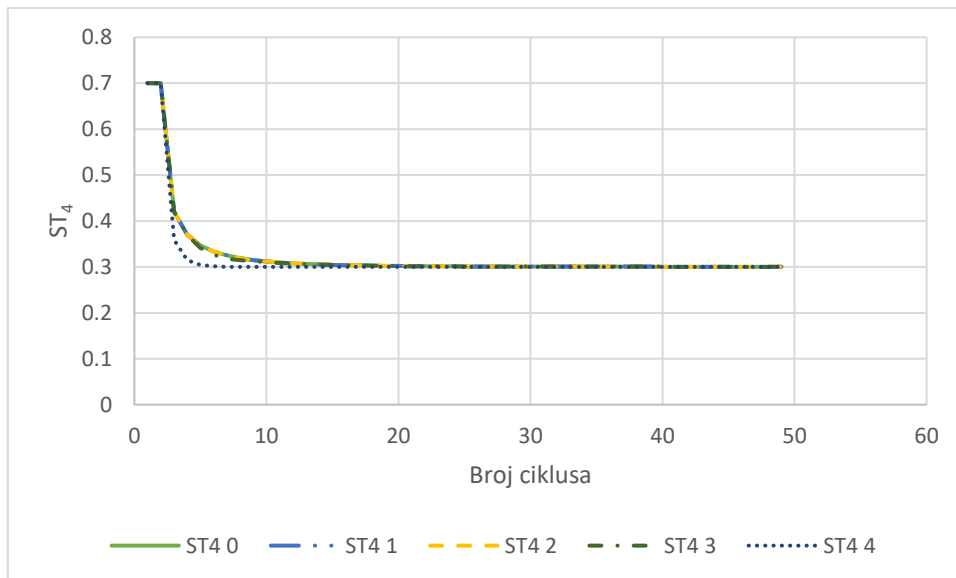
**Dijagram 5.116, ST stroja 5 računat analitičkom metodom za slučaj F**



**Dijagram 5.117, ST stroja 2 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**

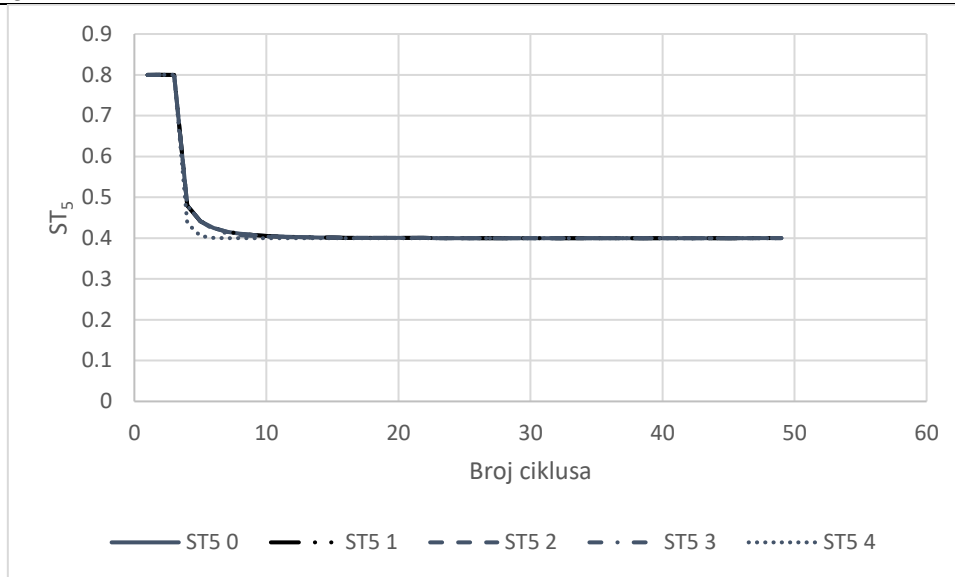


**Dijagram 5.118, ST stroja 3 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**



**Dijagram 5.119, ST stroja 4 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**





**Dijagram 5.120, ST stroja 5 računat metodom konačnih stanja za slučaj F**

Iz dijagrama rezultata za linije sa 5 strojeva se daju iščitati sličnosti sa prethodnim slučajevima. Smanjenjem uračunatih svojstvenih vrijednosti rezultati su vrlo netočni u prvim ciklusima, ali konvergiraju prema istoj asimptoti kako ciklusi napreduju.

Pogotovo je primjetna razlika u računanju značajki  $WIP_i$  i  $BL_i$ , koje znaju odstupati jako, pa čak i biti potpuno netočne do konvergencije u analitičkoj metodi.

Vrijeme računanja je također vrlo različito, sa prosječnim vremenom računanja od 6 sati za analitičku metodu sa svim svojstvenim vrijednostima, do nekoliko sekundi za istu situaciju računanu metodom konačnih stanja.

## 6. ZAKLJUČAK

Glavni problem proračuna proizvodnih karakteristika tranzijentnog je velika količina matričnih proračuna. Od navedenih primjera, najveći je bio proračun serijske linije od 5 strojeva kojoj su kapaciteti bili  $N=5$ . Potpuni proračun analitičkom metodom na osrednjem laptopu 2017. godišta je trajao oko 6 sati, ali primjeri iz prakse mogu izroditi mnogo veće matrice, za koje nema smisla računati tom metodom upravo iz razloga trajanja proračuna. Ilustracije radi, te matrice su dimenzija  $1296 \times 1296$ , a sa 7 strojeva bi bila  $46656 \times 46656$ . Osim toga postoje slučajevi grananja toka materijala i sklopnih linija, koji dodatno kompliciraju stvari.

Analitička metoda, iako daje rezultate izvrsne točnosti, iz tih razloga nije preporučljiva. Skraćivanje vremena računanja smanjenjem broja uračunatih vrijednosti daje uštedu linearno proporcionalnu sa postotkom oduzetih vrijednosti, no to radi uz veliku štetu na točnosti pri tranzijentnom odzivu. Dobra je za jednostavne slučajeve, uz jaka računala.

Metoda konačnih stanja drastično skraćuje vrijeme računanja, i daje vrlo slične rezultate sa smanjenjem broja svojstvenih vrijednosti. Značajnija netočnost nastaje samo pri računanju samo sa najvećom svojstvenom vrijednosti manjom od 1. Preporučljiva je za sve iole kompleksnije sustave, ali uvijek bi bilo dobro usporediti vrijednosti ključnih značajki u barem dva slučaja, sa različitim uračunatim brojem svojstvenih vrijednosti. Ta usporedba može ukazati na potencijalne velike greške pri zanemarivanju određenih svojstvenih vrijednosti, poput onih prikazanih u Dijagramima 5.38 i 5.39, gdje se zanemarivanjem svih svojstvenih vrijednosti osim najveće dobijaju vrlo krivi rezultati u prvih 40 ciklusa.

Ono što oba dvije metode daju je uvid u rad proizvodne linije i gdje se najviše gubi produktivnost. Njihovim razmatranjem se lijepo može vidjeti na kojem dijelu linije se događa najviše smetnji, te ukazuje na najbolja mjesta za uložiti vrijeme i novac za unaprijeđenje.

---

## **LITERATURA**

- [1] Li J. i Meerkov S., *Productions Systems Engineering*, Springer, New York, 2009.
- [2] Kulkarni V.G., *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems Second Edition*, Springer, 2011.
- [3] Ložar Viktor, *Razvoj simulacijskog modela za određivanje ključnih značajki linija obrade brodogradilišta*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2023