

# Analiza nestacionarnih pojava u cjevovodu s vodnom turbinom

---

Gržan, Ante

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:264117>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-22**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Ante Gržan**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Ivo Džijan, dipl. ing.

Student:

Ante Gržan

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svim kolegama i prijateljima koji su učinili ovaj studij lakšim i zabavnijim. Posebice bi se htio zahvaliti svojoj obitelji, bez čije pomoći i podrške ne bi ovo uspio. Također bi se htio zahvaliti mentoru prof. dr. sc. Ivi Džijanu na pruženoj pomoći pri izradi ovog rada.

Ante Gržan



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 23 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 23 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ante Gržan** JMBAG: **0036494503**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza nestacionarnih pojava u cjevovodu s vodom turbine**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Analysis of transient flow in a pipeline with a hydraulic turbine**

Opis zadatka:

Do nestacionarnog strujanja vode i značajne oscilacije tlaka u cjevovodu hidroelektrane dolazi pri nagloj promjeni režima rada turbine, pri čemu je nestacionarnost najizraženija u slučaju ispada vodne turbine iz rada. Za potrebe smanjenja amplitude oscilacija tlaka, koja bi mogla dovesti do havarije sustava, u cjevovod se ugrađuje vodna komora.

U radu je potrebno definirati matematički model nestacionarnog strujanja u cjevovodu hidroelektrane koji uključuje model vodne turbine i model turbinske regulacije brzine vrtnje. Postavljeni matematički model treba riješiti primjenom numeričke metode karakteristika na konkretnom primjeru.

Rad treba sadržavati:

1. Uvod s opisom hidroelektrane i njenih osnovnih podsustava,
2. Opis karakteristika vodne turbine i definiciju rubnog uvjeta turbine,
3. Opis sustava turbinske regulacije i matematički model tog sustava,
4. Prikaz numeričke metode za proračun nestacionarnog strujanja u cjevovodnom sustavu,
5. Rezultate numeričkog proračuna nestacionarnih pojava za konkretan primjer s Francisovom turbineom snage 230 MW,
6. Diskusiju rezultata i zaključke.

Rezultate proračuna treba prikazati odgovarajućim tablicama, dijagramima i slikama.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2022.

Datum predaje rada:

1. rok: 20. 2. 2023.  
2. rok (izvanredni): 10. 7. 2023.  
3. rok: 18. 9. 2023.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 27. 2. – 3. 3. 2023.  
2. rok (izvanredni): 14. 7. 2023.  
3. rok: 25. 9. – 29. 9. 2023.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Ivo Džijan

*Ivo Džijan*

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

*V Soldo*

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS TABLICA.....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD.....	1
2. HIDROELEKTRANE .....	2
2.1. Brane .....	2
2.2. Sustav dovoda i odvoda vode.....	3
2.3. Strojarnica .....	3
2.4. Francisova turbina.....	4
3. METODA KARAKTERISTIKA .....	5
3.1. Hidrodinamički model .....	5
3.2. Izvod uvjeta kompatibilnosti.....	6
3.3. Diskretizacija .....	7
3.4. Izračun vrijednosti i rubni uvjeti .....	9
4. RUBNI UVJET TURBINE .....	11
4.1. Turbinske karakteristike.....	11
4.2. Sustav turbinske regulacije .....	12
4.3. Postupak izračuna .....	16
5. POSTAVKE NUMERIČKOG PRORAČUNA.....	19
5.1. Definiranje Sustava .....	19
5.2. Diskretizacija sustava.....	21
5.3. Početno rješenje sustava.....	22
5.4. Turbinske karakteristike.....	22
6. REZULTATI PRORAČUNA.....	24
6.1. Analiza sustava bez sustava turbinske regulacije .....	24
6.1.1. Otvaranje statorskih lopatica.....	25
6.1.2. Zatvaranje statorskih lopatica .....	25
6.2. Analiza ispada generatora iz mreže .....	26
6.3. Skokovite promjene snage .....	29
6.3.1. Slučaj 1.....	29
6.3.2. Slučaj 2.....	30
6.4. Linearne promjene snage .....	31
6.4.1. Slučaj 3.....	31
6.4.2. Slučaj 4.....	32
7. ZAKLJUČAK.....	34
LITERATURA.....	35

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Shema hidroelektrane [3] .....	2
Slika 2.	Francisova turbina [6] .....	4
Slika 3.	Diskretizacija u $x-t$ ravnini .....	8
Slika 4.	Rubni uvjet velikog spremnika.....	9
Slika 5.	Rubni uvjet serijski spojenih cijevi .....	10
Slika 6.	Primjer karakteristike protoka [1] .....	11
Slika 7.	Primjer karakteristike snage [1] .....	12
Slika 8.	Shema regulatora brzine [1] .....	13
Slika 9.	Blok dijagram sustava turbinske regulacije.....	14
Slika 10.	Interpolacija turbinske karakteristike protoka [1] .....	16
Slika 11.	Shema za računanje piezometričke visine .....	17
Slika 12.	Analizirani sustav .....	19
Slika 13.	Karakteristika protoka .....	23
Slika 14.	Karakteristika snage .....	23
Slika 15.	Linearno otvaranje lopatica .....	25
Slika 16.	Visina tlaka nakon otvaranja .....	25
Slika 17.	Protok nakon otvaranja.....	25
Slika 18.	Izlazna snaga nakon otvaranja.....	25
Slika 19.	Linearno zatvaranje lopatica .....	25
Slika 20.	Visina tlaka nakon zatvaranja.....	25
Slika 21.	Protok nakon zatvaranja .....	26
Slika 22.	Izlazna snaga nakon zatvaranja .....	26
Slika 23.	Visina tlaka nakon ispada generatora .....	27
Slika 24.	Brzina vrtnje rotora nakon ispada generatora.....	27
Slika 25.	Otvorenost statorskih lopatica nakon ispada generatora .....	28
Slika 26.	Protok nakon ispada generatora .....	28
Slika 27.	Izlazna snaga turbine nakon ispada generatora .....	29
Slika 29.	Visina tlaka, slučaj 1 .....	29
Slika 30.	Brzina rotora, slučaj 1 .....	29
Slika 31.	Otvorenost lopatica, slučaj 1 .....	30
Slika 32.	Snaga turbine, slučaj 1.....	30
Slika 33.	Visina tlaka, slučaj 2 .....	30
Slika 34.	Brzina rotora, slučaj 2 .....	30
Slika 35.	Otvorenost lopatica, slučaj 2 .....	30
Slika 36.	Snaga turbine, slučaj 2.....	30
Slika 37.	Visina tlaka, slučaj 3 .....	31
Slika 38.	Brzina rotora, slučaj 3 .....	31
Slika 39.	Otvorenost lopatica, slučaj 3 .....	32
Slika 40.	Snaga turbine, slučaj 3.....	32
Slika 41.	Visina tlaka, slučaj 4 .....	32
Slika 42.	Brzina rotora, slučaj 4 .....	32
Slika 43.	Otvorenost lopatica, slučaj 4 .....	32
Slika 44.	Snaga turbine, slučaj 4.....	32

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Parametri cjevovoda .....	20
Tablica 2. Parametri sustava.....	20
Tablica 3. Početne vrijednosti varijabli sustava turbinske regulacije .....	20
Tablica 4. Parametri sustava turbinske regulacije .....	21
Tablica 5. Diskretizacija sustava .....	22
Tablica 6. Analizirani slučajevi.....	24



**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	$m^2$	površina poprečnog presjeka cijevi
$C_c$	$m^2/s$	koeficijent
$C_n$	$m^3/s$	koeficijent negativne karakteristike
$C_p$	$m^3/s$	koeficijent pozitivne karakteristike
$c$	$m/s$	brzina tlačnog poremećaja
$D$	$m$	promjer cjevovoda
$D_t$	$m$	promjer rotora turbine
$g$	$m/s^2$	akceleracija sile teže
$H_n$	$m$	neto pad visine u turbini
$h$	$m$	piezometrička visina
$k$	$mm$	ekvivalentna visina hrapavosti stijenke cijevi
$L$	$m$	duljina cijevi
$N$	$o/min$	trenutna brzina vrtnje rotora
$N_r$	$o/min$	sinkrona brzina vrtnje generatora
$n$	-	broj podjela cijevi
$P_t$	$kW$	izlazna snaga turbine
$P_g$	$kW$	izlazna snaga generatora
$p$	$kW/m^{7/2}$	jedinična snaga
$Q$	$m^3/s$	protok
$q$	$m^{1/2}/s$	jedinični protok
$Re$	-	Reynoldsov broj
$T$	$^{\circ}C$	temperatura
$T_t$	$Nm$	moment sile
$t$	$s$	vremenska koordinata
$u$	$J/kg$	specifična unutarnja energija
$v$	$m/s$	brzina strujanja fluida
$x$	$m$	prostorna koordinata
$y$	-	varijable sustava turbinske regulacije
$z$	$m$	geodetska visina
$\gamma$	-	CFL broj
$\Delta x$	$m$	korak prostorne diskretizacije
$\Delta t$	$s$	korak vremenske diskretizacije
$\eta$	-	učinkovitost generatora
$\lambda$	-	faktor trenja
$\nu$	$m^2/s$	kinematička viskoznost
$\rho$	$kg/m^3$	gustoća
$\sigma$	-	multiplikator

---

$\tau$	-	otvorenost statorskih lopatica
$\Phi$	$\text{min}^{-1}\text{m}^{1/2}$	jedinična brzina vrtnje
$\omega$	rad/s	kutna brzina

---

**SAŽETAK**

U ovom radu analiziraju se pojave u cjevovodu koje nastaju kao posljedica ispada generatora iz mreže. Također se promatra ponašanje turbine pod utjecajem sustava turbinske regulacije za različite promjene opterećenja. Kako bi se analizirale nestacionarne pojave u cjevovodu, metoda karakteristika je primijenjena na hidrodinamički model strujanja, a turbina je uključena u matematički model kao rubni uvjet. Numerički proračun je proveden u programskom paketu *Octave*, a rezultati pokazuju kolike su maksimalne promjene tlaka u sustavu i odziv sustava regulacije.

Ključne riječi: metoda karakteristika, Francisova turbina, hidraulički udar, turbinska regulacija, ispad generatora iz mreže

---

**SUMMARY**

In this thesis, analysis of the effects of turbine load rejection on the conduit system is conducted. Furthermore, behaviour of a turbine under governor control is analysed for a variety of load changes. In order to describe transient effects a mathematical model is developed by applying method of characteristics to hydrodynamical model and the turbine is included in this model as a boundary condition. Numerical calculations were performed in *Octave*, results indicate the magnitude of pressure changes in the system and the response of the hydraulic governor.

Key words: method of characteristics, Francis turbine, water hammer, turbine governor, turbine load rejection

## 1. UVOD

U vodnim turbinama se potencijalna i kinetička energija vode pretvara u mehanički rad, koji se putem vratila prenosi generatoru gdje se pretvara u električnu energiju. Generirana snaga mora odgovarati potrošnji. Ako dođe do naglog pada potrebe za električnom energijom ili havarije na generatoru doći će do naglog pada opterećenja na turbinu tj. do ispada generatora iz mreže. Posljedice toga su nestacionarne pojave u cjevovodnom sustavu na koji je turbina priključena. Nestacionarne pojave očituju se kao promjene tlaka i brzine strujanja. Ako su te promjene nagle i velike onda te pojave zovemo hidraulički udar. Hidraulički udar može uzrokovati oštećenja cjevovoda i uređaja spojenih na cjevovod, stoga je bitno provesti analizu sustava kako bi se vidjeli maksimalni mogući skokovi tlaka i u skladu s tim pravilno dimenzionirao sustav.

Ponašanje sustava tijekom nestacionarnih pojava odredit će se numeričkim proračunom temeljenim na metodi karakteristika. U proračun će se umjesto tlaka analizirati promjena piezometričke visine  $h$ :

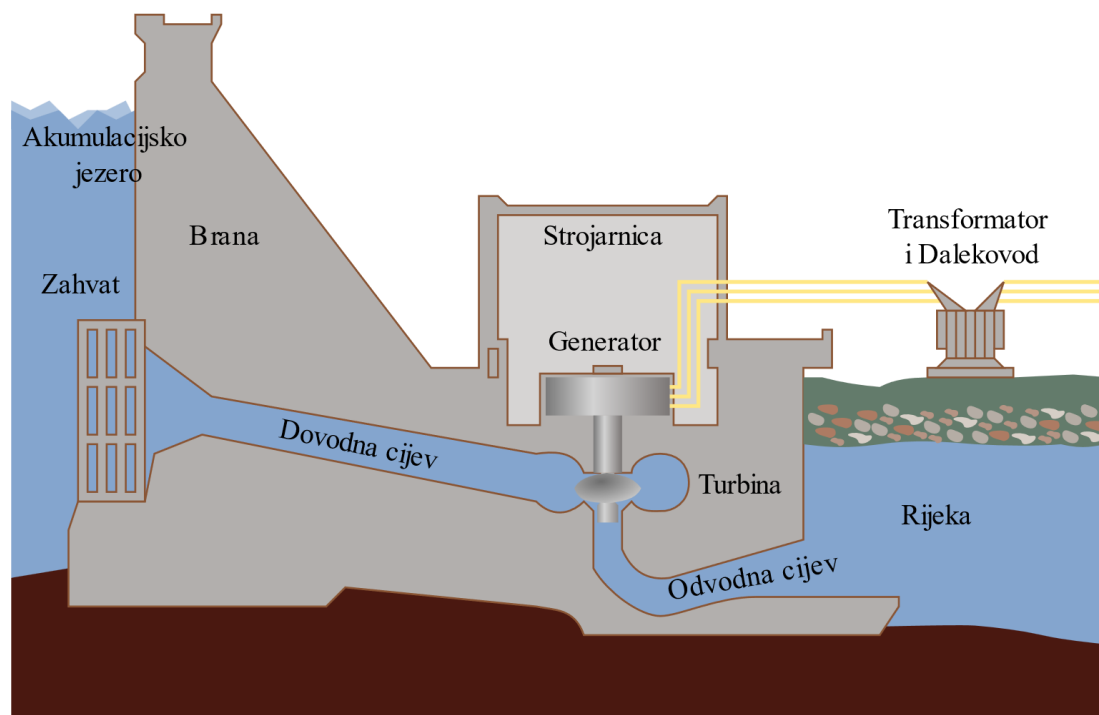
$$h = \frac{p}{\rho g} + z, \quad (1)$$

gdje je  $p$  tlak,  $\rho$  gustoća vode,  $g$  akceleracija sile teže, a  $z$  geodetska visina. Kao što se može vidjeti piezometrička visina uzima u obzir promjenu tlak zbog visine cjevovoda, što olakšava sam proračun.

U proračunu će se analizirati nestacionarne pojave nastale pri ispadu generatora iz mreže. Sustav se sastoji od Francisove turbinom koja u stacionarnom stanju radi pri snazi od 230 MW, sustava turbinske regulacije, velikog spremnika, cjevovoda i generatora. Generator se koristi s izoliranim opterećenjem, što znači da on napaja neku malu zajednicu ili postrojenje, tj. generator nije dio neke velike energetske mreže. Uz to će se još analizirati i odaziv sustava kod manjih promjena snage koje mogu biti linearne ili skokovite. Prije proračuna dan je kratki opis sastavnih dijelova hidroelektrane, zatim opis metode karakteristika i rubnog uvjeta Francisove turbine.

## 2. HIDROELEKTRANE

Hidroelektrana je postrojenje u kojem se potencijalna energija tlaka vode i kinetička energija vode pretvaraju u električnu energiju. Sastavni dijelovi hidroelektrane su objekti koji služe za: prikupljanje vode, dovođenje i odvođenje vode, pretvorbu energije, te u konačnici razvod električne energije, na slici 1 je prikazana shema hidroelektrane.



**Slika 1. Shema hidroelektrane [3]**

Hidroelektrane mogu imati i vodene komore u dovodnom cjevovodu (što nije prikazano na slici 1). Njihova je svrha ublažiti tlačne promjene koje se mogu pojaviti pri puštanju turbine u rad ili pri ispadu generatora iz mreže. Prema regulaciji vode razlikujemo protočne i akumulacijske hidroelektrane. U protočnim elektranama voda se iskorištava kako dotječe tj. turbina se pokreće skoro isključivo kinetičkom energijom, dok se kod akumulacijskih elektrana voda sakuplja u akumulacijsko jezero i koristi prema potrebi. Sakupljanjem se podiže razina vode i time se povećava potencijalna energija. U ovom radu će biti analiziran sustav s akumulacijskim jezerom koje se promatra kao veliki spremnik.

### 2.1. Brane

Brana je građevina čija je svrha, u sklopu hidroelektrane, skretanje vode prema zahvatu, akumulacija i podizanje razine vode. Prema visini brane se dijele na niske i visoke. Brane se klasificiraju kao visoke ako je njihova visina od najniže točke do krune veća od 15 metara ili

ako je visina iznad 10 metara, te je kruna dulja od 500 metara. U ovisnosti o materijalu izrade brane se dijele na masivne i nasute, masivne brane su rađene najčešće od armiranog betona, ali mogu biti napravljene i od kamena ili betonskih blokova. Nasute brane se najčešće rade od lokalno iskopanog materijala kao što su zemlja, pijesak ili šljunak.

Prema načinu na koju se brane suprotstavljaju opterećenju vode i drugim silama dijelimo ih na gravitacijske, lučne i raščlanjene. Gravitacijske brane, kao što i samo ime kaže, se vlastitom težinom suprotstavljaju tlaku vode. Lučne brane su zakrivljene ploče koje prenose opterećenje na okolni teren za koji su učvršćene, a raščlanjene brane su one koje se sastoje od više elemenata, stupova ili potpora na koje se oslanjaju ploče.

## **2.2. Sustav dovoda i odvoda vode**

U sustav dovoda i odvoda vode spadaju zahvat, vodeni kanali i tuneli, tlačni cjevovod, vodna komora, difuzor itd.

Svrha zahvata je usmjeriti zaustavljenu vodu ispred brane prema strojarnici. Kod niskih brana, te brana s konstantnom visinom vode zahvat je u razini slobodne površine, a kod visokih brana ili brana s promjenjivom razinom vode on se nalazi ispod razine slobodne površine. Nakon zahvata voda dolazi do tlačnog cjevovoda ili vodene komore, kroz kanal sa slobodnom površinom ili tunel pod tlakom

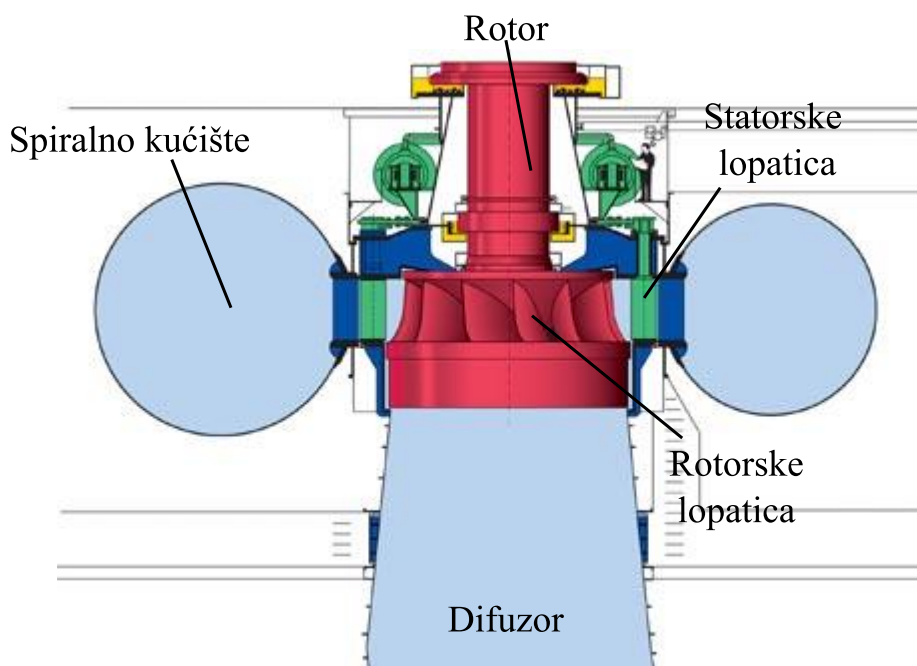
Tlačnim cjevovodom se dovodi voda turbini, na njegovu ulazu se nalazi zapornica, te je najčešće napravljen od čelika, a u slučaju kraćih cijevi može biti napravljen od betona. Odvod vode ovisi o tome kako je pozicionirana strojarnica, voda se nakon turbine može vraćati u korito rijeke direktno, putem kanala ili difuzorom. Svrha difuzora je smanjiti brzinu vode na izlazu iz turbine i time smanjiti izlazne gubitke, tj. povećati učinkovitost turbine.

## **2.3. Strojarnica**

Strojarnica je postrojenje u kojem se nalaze turbine, generatori, sustav električnog upravljanja, te sva oprema nužna za normalan rad i održavanje turbina poput pumpi za rashladnu vodu, mosnih dizalica itd. U ovisnosti o terenu na kojem se nalaze, strojarnice mogu biti podzemne i nadzemne, što utječe i na ostalu infrastrukturu kao što je odvod vode.

## 2.4. Francisova turbina

Francisova turbina je reakcijska, radijalno-aksijalna turbina s fiksnim lopaticama na rotoru i pomičnim statorskim lopaticama. Reakcijske turbine su one turbine koje transformiraju i kinetičku energiju vode i potencijalnu energiju tlaka vode u mehanički rad. Voda ulazi radijalno u turbinu, a uz pomoć spiralnog kućišta se postiže ravnomjerna raspodjela vode po obodu. Francisove turbine su pogodne jer mogu biti ugrađene u sustave s velikim rasponima visine pada vode, ti padovi mogu biti od 25 m do 500 m. Uz to imaju i visok stupanj iskoristivosti, te mogu postići iskoristivosti iznad 95 %. Presjek turbine je prikazan na slici 2.



Slika 2. Francisova turbina [6]



### 3. METODA KARAKTERISTIKA

Hiperbolične parcijalne diferencijalne jednačbe, koje opisuju ponašanje vode u sustavu, se transformiraju u obične diferencijalne jednačbe tj. u karakteristični oblik metodom karakteristika. Stoga će u ovom poglavlju prvo biti dan opis hidrodinamičkog modela, zatim će se izvesti karakteristična jednačba tj. uvjeti kompatibilnosti, te će za kraj biti dani postupak za numeričko izračunavanje i rubni uvjeti.

#### 3.1. Hidrodinamički model

S obzirom da se bavimo strujanjem vode usvaja se pretpostavka da je fluid slabo stlačiv te se pretpostavlja da on struji pri konstantnoj temperaturi ( $T=\text{konst.}$ ). Iz te dvije pretpostavke zaključuje se da je onda i specifična unutarnja energija vode konstantna ( $u=\text{konst.}$ ). Kako fluid struji u cijevima, koje imaju jako izraženu uzdužnu dimenziju u odnosu na ostale dvije, može se problem promatrati kao jednodimenzionalni tj. pretpostavlja se:

- uniformna fizikalna svojstva po poprečnom presjeku,
- poprečni profili svih fizikalnih veličina se neznatno mijenjaju u smjeru strujanja,
- relativna promjena poprečnog presjeka je mala,
- radijus zakrivljenosti osi cijevi je velik u odnosu na karakterističnu linearnu dimenziju poprečnog presjeka.

Uz to se još od masenih sila u obzir uzima samo gravitacija. Ove pretpostavke se primjenjuju na jednačbe koje opisuju opće ponašanje fluida, tj. na:

- Zakon očuvanja mase,
- Zakon očuvanja količine gibanja,
- Zakon očuvanja energije.

Kako je unutarnja energija fluida konstantna zakon očuvanja energije se svodi na jednačbu mehaničke energije. Uvođenjem navedenih pretpostavki u zakone očuvanja mase i količine gibanja dobivaju se jednačbe koje opisuju strujanje vode u cijevima. Izvod jednačbi se može naći u [2] stoga će ovdje biti dani konačni izrazi. Jednačba kontinuiteta glasi:

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{dz}{dx} = 0, \quad (2)$$

a jednačba količina gibanja glasi:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda \frac{v|v|}{2gD} = 0, \quad (3)$$

gdje je  $c$  brzina tlačnih poremećaja tj. brzina zvuka, a  $\lambda$  je faktor trenja. U praksi su članovi  $v(\partial h/\partial x)$ ,  $v(\partial v/\partial x)/g$  i  $v(dz/dx)$  zanemarivi u odnosu na ostale članove u odgovarajućim jednadžbama te se ne uzimaju u obzir, jednadžbe (2) i (3) onda glase:

$$L_1 \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$L_2 \equiv \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda \frac{v|v|}{2gD} = 0. \quad (5)$$

Faktor trenja se računa prema formuli Swamee-Jain:

$$\lambda = \frac{1,325}{\left[ \ln \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}, \quad (6)$$

gdje je  $k$  ekvivalentna visina hrapavosti stijenke cijevi, a  $Re$  Reynoldsov broj.

### 3.2. Izvod uvjeta kompatibilnosti

Prvi korak u izvodu karakteristične jednadžbe je napraviti linearnu kombinaciju jednadžbi (4) i (5):

$$L = \sigma L_1 + L_2, \quad (7)$$

$$\sigma \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda \frac{v|v|}{2gD} = 0 \quad (8)$$

gdje je  $\sigma$  multiplikator koji će biti odabran tako da se u jednadžbi (8) pojave potpuni diferencijali  $dv$  i  $dh$ . S obzirom da su  $h=h(x,t)$  i  $v=v(x,t)$  funkcije vremena i prostora, potpuni diferencijali glase:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad (9)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (10)$$

Preuređivanjem jednadžbe (8) dobije se:

$$\sigma \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \lambda \frac{v|v|}{2gD} = 0, \quad (11)$$

ako se onda  $\sigma$  definira kao:

$$\frac{1}{\sigma} = \sigma c^2 = \frac{dx}{dt}, \quad (12)$$

$$\sigma = \pm \frac{1}{c}, \quad (13)$$

dobiva se karakteristična jednadžba:

$$\pm \frac{1}{c} \frac{dh}{dt} + \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} + \lambda \frac{v|v|}{2gD} = 0. \quad (14)$$

Iz karakteristične jednadžbe se vidi da smo eliminirali nezavisnu varijablu  $x$  i dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu, no ona sada vrijedi samo uzduž pravaca čiji su nagibi:

$$\frac{dt}{dx} = c, \quad (15)$$

$$\frac{dt}{dx} = -c. \quad (16)$$

Umjesto brzine  $v$  radi jednostavnosti će se raditi s protokom  $Q$ , protok je definiran izrazom  $Q=vA$ , gdje je  $A$  površina poprečnog presjeka cijevi. Uvjet kompatibilnosti za pozitivnu karakteristiku koja vrijedi duž pravca s nagibom (15) je onda:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{c} \frac{dh}{dt} + \lambda \frac{Q|Q|}{2DA} = 0, \quad (17)$$

a uvjet kompatibilnosti za negativnu karakteristiku koja vrijedi duž pravca s nagibom (16) je:

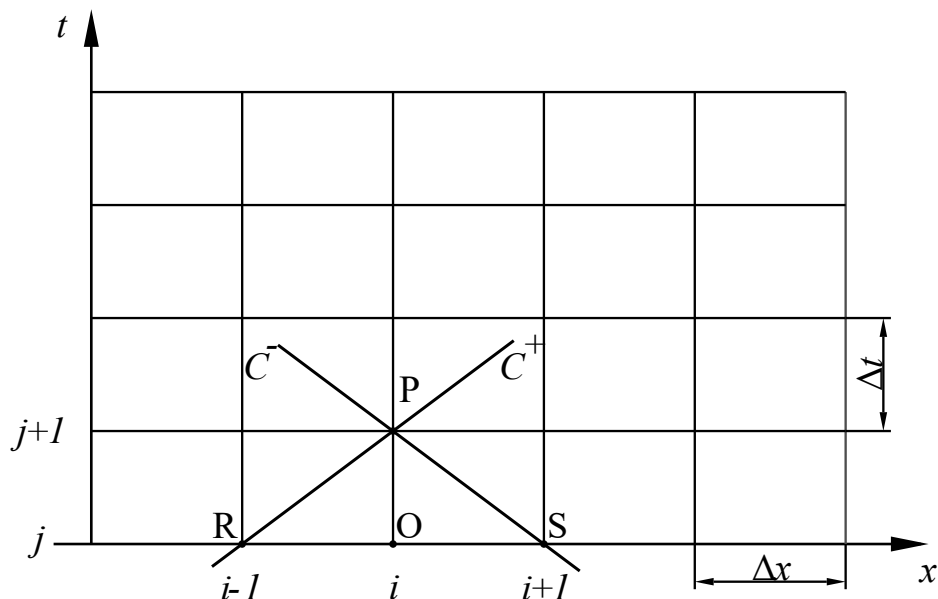
$$\frac{dQ}{dt} - \frac{gA}{c} \frac{dh}{dt} + \lambda \frac{Q|Q|}{2DA} = 0. \quad (18)$$

### 3.3. Diskretizacija

Kako bi se jednadžbe (17) i (18) mogle numerički riješiti potrebno je prvo napraviti proračunsku mrežu, tj. provodi se prostorna i vremenska diskretizacija. Zatim je potrebno diskretizirati diferencijalne jednadžbe, odnosno prevesti ih u algebarske izraze. Za to se koristi eksplicitna metoda konačnih razlika, gdje se diferencijali  $dh$ ,  $dQ$  i  $dt$  zamjenjuju konačnim razlikama  $\Delta h$ ,  $\Delta Q$  i  $\Delta t$ . U eksplicitnoj metodi, za izračun novih vrijednosti koriste se vrijednosti iz prethodnog vremenskog trenutka, što može dovesti do problema sa stabilnošću metode. Da ne bi došlo do divergencije rezultata uvodi se CFL (Courant-Fridrich-Lewy) kriterij, koji diktira veličinu koraka vremenske diskretizacije  $\Delta t$  za zadani korak prostorne diskretizacije  $\Delta x$ . CFL kriterij glasi:

$$\gamma = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (19)$$

Diskretizirana  $x$ - $t$  ravnine s karakteristikama povučenicim iz točke P prikazana je na slici 3. Na toj slici je prikazan slučaj kada je CFL broj  $\gamma = 1$  i tada karakteristike povučene kroz čvor P iz novog vremenskog trenutka prolaze kroz čvorove R i S u kojima su poznate vrijednosti varijabli. CFL broj je tako odabran radi jednostavnosti, inače bi karakteristike presijecale dužine  $\overline{RO}$  i  $\overline{OS}$ , te bi se trebala provoditi interpolacija kako bi se odredile vrijednosti varijabli u tim presječnim točkama.

Slika 3. Diskretizacija u  $x-t$  ravnini

Primjenom navedenog, diskretizirani uvjeti kompatibilnosti glase:

$$Q_i^{j+1} - Q_{i-1}^j + \frac{gA}{c}(h_i^{j+1} - h_{i-1}^j) + \lambda\Delta t \frac{Q_{i-1}^j |Q_{i-1}^j|}{2DA} = 0, \quad (20)$$

$$Q_i^{j+1} - Q_{i+1}^j - \frac{gA}{c}(h_i^{j+1} - h_{i+1}^j) + \lambda\Delta t \frac{Q_{i+1}^j |Q_{i+1}^j|}{2DA} = 0, \quad (21)$$

gdje indeksi  $i-1$  i  $i+1$  predstavljaju prostorne čvorove, indeks  $j$  poznati vremenski trenutak, a indeks  $j+1$  novi vremenski trenutak. Za poznate vrijednosti uvode se izrazi  $C_c$ ,  $C_p$  i  $C_n$  koji su definirani kao:

$$C_c = \frac{gA}{c}, \quad (22)$$

$$C_p = Q_{i-1}^j + \frac{gA}{c} h_{i-1}^j - \lambda\Delta t \frac{Q_{i-1}^j |Q_{i-1}^j|}{2DA}, \quad (23)$$

$$C_n = Q_{i+1}^j - \frac{gA}{c} h_{i+1}^j - \lambda\Delta t \frac{Q_{i+1}^j |Q_{i+1}^j|}{2DA}, \quad (24)$$

te se dobivaju konačni oblici diskretiziranih uvjeta kompatibilnosti. Za pozitivnu karakteristiku on glasi:

$$Q_i^{j+1} = C_p - C_c h_i^{j+1}, \quad (25)$$

a za negativnu karakteristiku on glasi:

$$Q_i^{j+1} = C_n + C_c h_i^{j+1}. \quad (26)$$

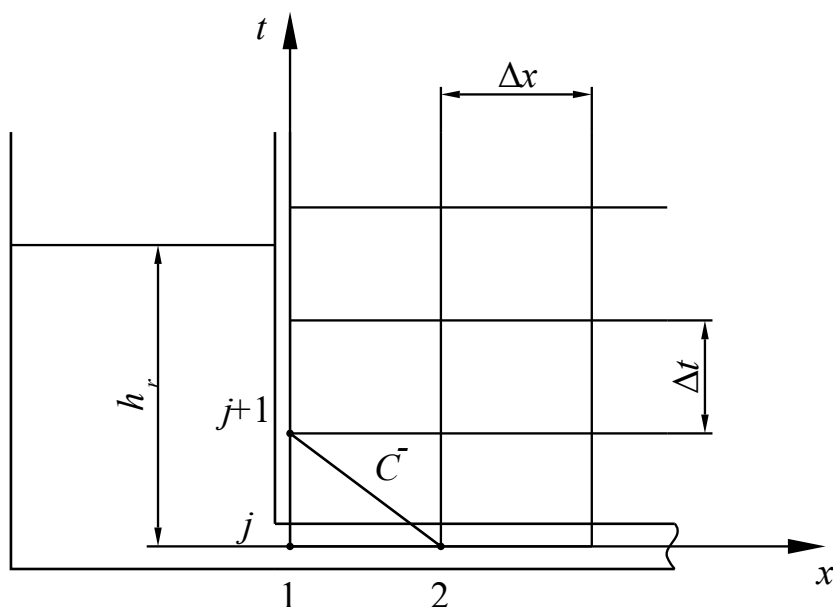
### 3.4. Izračun vrijednosti i rubni uvjeti

Za jedinstveno rješenje diferencijalnih jednadžbi (17) i (18) potrebno je definirati početne i rubne uvjete. U ovom odjeljku će biti dani rubni uvjeti uzvodnog velikog spremnika i serijskog spoja cijevi, a u zasebnom poglavlju će se obraditi rubni uvjet turbine. No prije toga će se dati postupak izračuna vrijednosti u čvorovima koji nisu na rubu, koji se radi prema slici 3. Zbrajanjem pozitivne i negativne karakteristike (25) i (26) dobiva se vrijednost protoka:

$$Q_i^{j+1} = 0,5(C_p + C_n), \quad (27)$$

a piezometrička visina  $h$  se računa uvrštavanjem izračunatog protoka  $Q$  u jednadžbu pozitivne ili negativne karakteristike, recimo uvrštavanjem u jednadžbu (25) dobiva se:

$$h_i^{j+1} = \frac{C_p - Q_i^{j+1}}{C_c}. \quad (28)$$



Slika 4. Rubni uvjet velikog spremnika

Na slici 4 je prikazan uzvodni spremnik s proračunskom mrežom. Iz čvora 1 novog vremenskog trenutka  $j+1$  može se povući isključivo negativna karakteristika, to znači da imamo jednu jednadžbu i dvije nepoznanice. Kako bi se mogao izračunati protok  $Q$ , pretpostavlja se da je vrijednost piezometričke visine ista za čvorove 1 u svim vremenskim trenutcima (na lijevom rubu proračunske mreže) i jednaka je visini vode u velikom spremniku. Visina vode u spremniku je konstantna i iznosi  $h_r$ , te je  $h$  za novi vremenski trenutak:

$$h_1^{j+1} = h_r = konst. \quad (29)$$

a protok je:

$$Q_1^{j+1} = C_n + C_c h_r. \quad (30)$$

Serijski spoj cijevi je prikazan na slici 5. S kraja prve cijevi povlači se pozitivna karakteristika prema jednadžbi (25), a na početku druge cijevi se povlači negativna karakteristika prema jednadžbi (26). Iz jednadžbe kontinuiteta znamo da je protok jednak u obje cijevi, a pretpostavljamo da je piezometrička visina na početku cijevi 2 jednaka piezometričkoj visini na kraju cijevi 1 tj.:

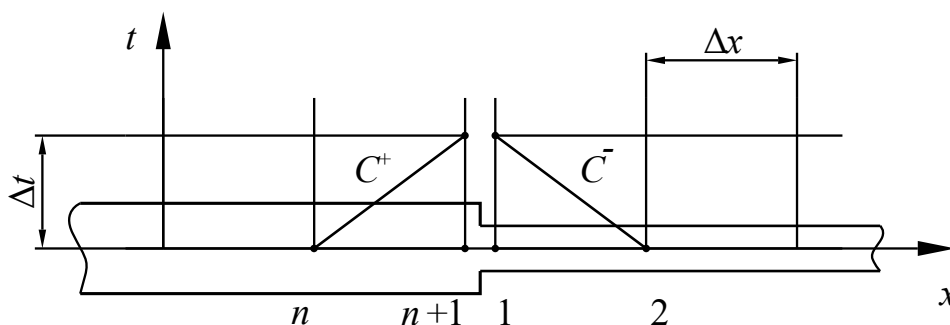
$$Q_{1,n+1}^{j+1} = Q_{2,1}^{j+1}. \quad (31)$$

$$h_{1,n+1}^{j+1} = h_{2,1}^{j+1}. \quad (32)$$

Prva vrijednost donjeg indeksa označava cijev, a druga vrijednost označava čvor. Piezometrička visina se onda računa oduzimanjem karakteristika i time se dobiva:

$$h_{1,n+1}^{j+1} = \frac{C_{p,1} - C_{n,2}}{C_{c,1} + C_{c,2}}, \quad (33)$$

protok se onda dobiva uvrštavanjem dobivene vrijednosti u pozitivnu karakteristiku.



Slika 5. Rubni uvjet serijski spojenih cijevi

## 4. RUBNI UVJET TURBINE

### 4.1. Turbinske karakteristike

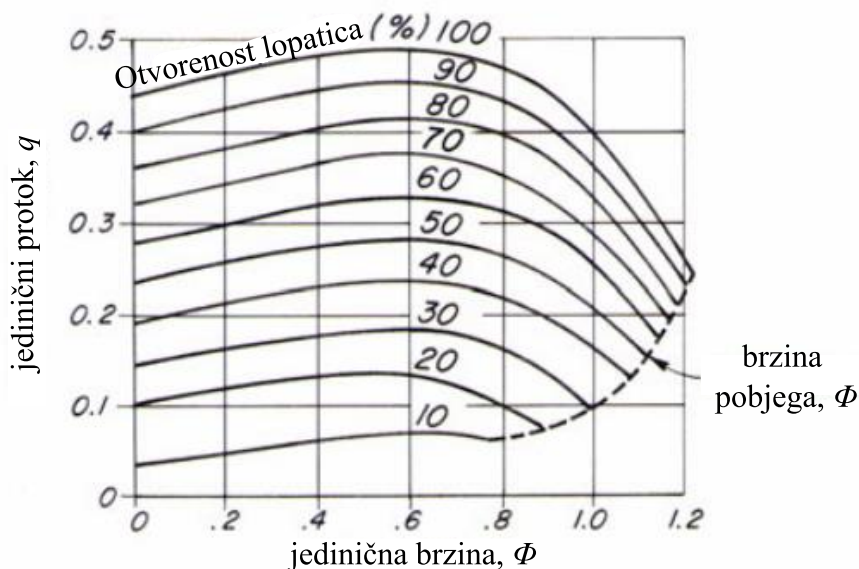
Karakteristike su krivulje koje povezuju turbinske parametre kao što su neto pad visine u turbini  $H_n$ , protok  $Q$ , izlazna snaga  $P$ , otvor statorskih lopatica  $\tau$  i brzina vrtnje rotora  $N$ . Podaci za karakteristike se dobivaju mjerenjem na modelu turbine, te se prikazuju na grafovima pomoću jediničnih značajki. Jedinične značajke su veličine koje vrijede za jediničnu turbinu tj. za turbinu s promjerom rotora  $d = 1$  m i neto padom  $h_n = 1$  m. Jedinične značajke su dobivene teorijom sličnosti, a tako dobivene karakteristike primjenjive su za sve geometrijski slične turbine. Izrazi za jediničnu brzinu vrtnje  $\Phi$ , jedinični protok  $q$  i jediničnu snagu  $p$  su:

$$\Phi = \frac{D_t N}{84,59 \sqrt{H_n}}, \quad (34)$$

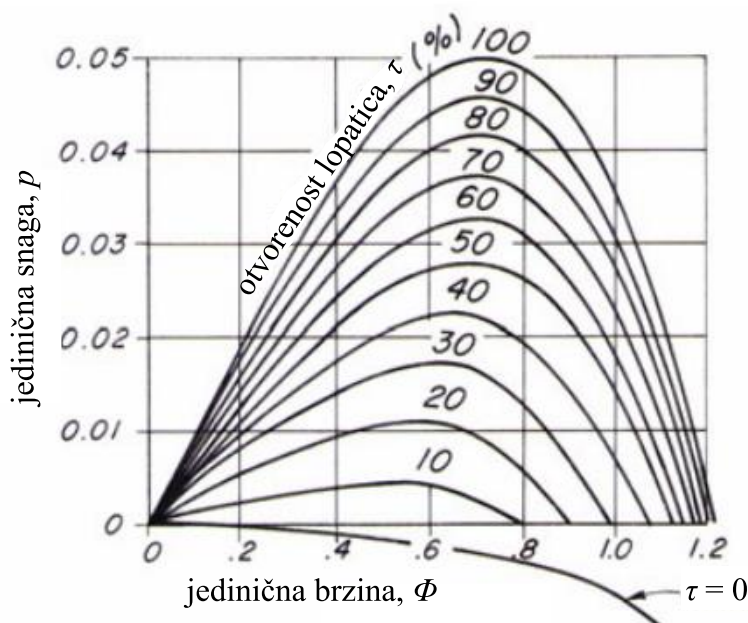
$$q = \frac{Q}{D_t^2 \sqrt{H_n}}, \quad (35)$$

$$p = \frac{P}{D_t^2 H_n^{3/2}}, \quad (36)$$

gdje je  $D_t$  promjer rotora turbine. Veličine  $D_t$  i  $H_n$  se uvrštavaju u m,  $Q$  se uvrštava u  $\text{m}^3/\text{s}$ ,  $P$  u kW i  $N$  u o/min. Primjeri karakteristika, kakve se mogu dobiti od proizvođača, su prikazani na slikama 6 i 7.



Slika 6. Primjer karakteristike protoka [1]



Slika 7. Primjer karakteristike snage [1]

Karakteristike se generiraju za turbine koje rade u stacionarnom stanju, ali se može pretpostaviti da te iste karakteristike vrijede i tijekom nestacionarnih pojava. Na karakteristici protoka, slika 6, podaci nisu dani za vrijednosti iznad brzine pobjega. Brzina pobjega je maksimalna brzina koje rotor postiže kada nema električnog opterećenja generatora. Tijekom nestacionarnih pojava može se dogoditi da se kratko vrijeme rotor vrti brže, pa su karakteristike protoka u tom slučaju produžene uz zadržavanje istog nagiba. Na slici 7 prikazana je karakteristika jedinične snage, apscisa na tom grafu predstavlja stanje kada se rotor vrti sinkronom brzinom bez da proizvodi snagu, a krivulja  $\tau = 0$  predstavlja gubitke trenja u sustavu.

Za potrebe proračuna, podaci s karakteristika se očitavaju za različite vrijednosti jediničnih veličina i spremaju se u računalo.

## 4.2. Sustav turbinske regulacije

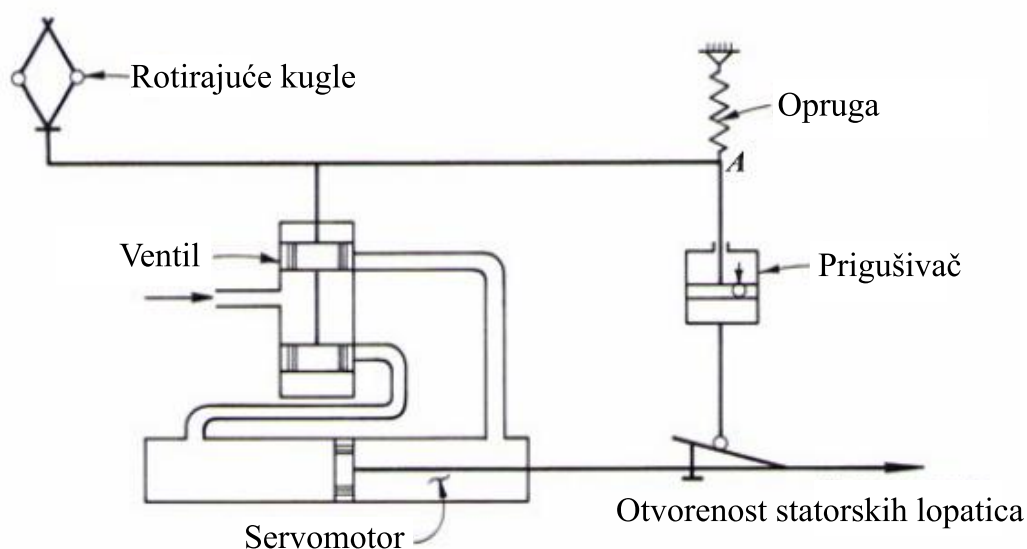
Frekvencija izmjenične struje je ovisna o brzini vrtnje generatora kojeg pogoni turbina i ona pokazuje balans snage u sustavu. Promjena u potražnji električne energije će uzrokovati moment na turbinu, zbog kojeg dolazi do promjene brzine vrtnje rotora. Svrha turbinske regulacije je uskladiti izlaznu snagu generatora s traženom električnom snagom uz zadržavanje broja okretaja turbine. To postiže promjenom izlazne snaga turbine. Snaga turbine se usklađuje otvorenošću statorskih lopatica, koje reguliraju protok kroz sustav.

U ovom poglavlju će se analizirati mehanički regulator. Njegove prednosti su jednostavnost, pouzdanost i osjetljivost, a shema jednog takvog regulatora je prikazana na



slici 8. Osnovne komponente regulatora su uređaj za mjerenje brzine vrtnje i servomehanizam koji služi za upravljanje statorskim lopaticama. Uređaj za mjerenje brzine vrtnje mjeri brzinu na temelju centrifugalne sile. Na primjer, ako dođe do smanjenja brzine rotora, rotirajuće kugle će se zbog smanjenja centrifugalne sile pomaknuti prema unutra i prema dolje. Preko poluge se klip ventila također spušta, ventil se otvara i putem hidrauličke sile se aktivira servomotor i otvaraju statorske lopatice.

Otvaranje lopatica će stlačiti oprugu i time ponovo utjecati na otvorenost ventila, a prigušivač će dopustiti da se opruga vrati u neopterećeno stanje. Na kraju je regulator vraćen u početno stanje, a statorske lopatice su ostale pri drugoj otvorenosti.



**Slika 8. Shema regulatora brzine [1]**

Na slici 9 je prikazan blok dijagram regulatora brzine, gdje blokovi predstavljaju komponente sustava, a u njima su napisane prijenosne funkcije koje daju vezu između ulaznih i izlaznih varijabli. Krugovima su označena zbrajala, čija je izlazna vrijednost algebarska suma ulaznih varijabli uzimajući u obzir predznak s kojim ulaze. U nastavku su dane jednadžbe koje opisuju svaku komponentu.

Aktuator:

$$e = T_a \frac{dv_a}{dt}. \quad (37)$$

Prigušivač:

$$e_t + T_r \frac{de_t}{dt} - \delta T_r \frac{dv_a}{dt} = 0. \quad (38)$$

Trajni „Droop“:

$$e_d - \sigma v_a = 0. \quad (39)$$

Distribucijski ventil:

$$T_d \frac{dv_d}{dt} + v_d - k_d v_i = 0. \quad (40)$$

Servomotor statorskih lopatica:

$$\frac{d\tau}{dt} - k_s v_d = 0. \quad (41)$$

Jednadžbe za dvije povratne veze su:

$$e = n_{\text{ref}} - e_d - e_t - n, \quad (42)$$

$$v_i = v_a - \tau. \quad (43)$$

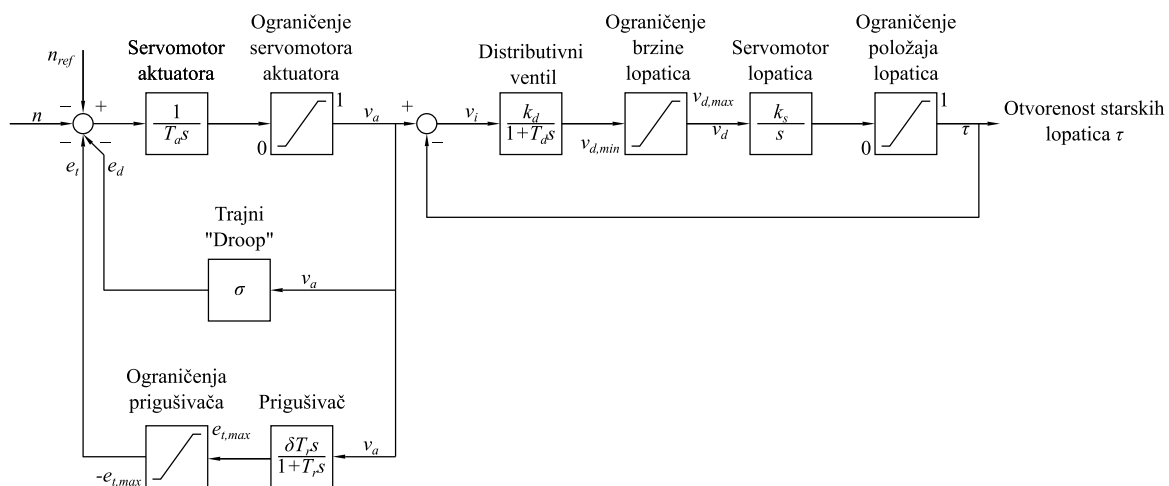
U navedenim jednadžbama veličine  $T_a$ ,  $T_r$ ,  $T_d$ ,  $k_d$ ,  $k_s$ ,  $\delta$  i  $\sigma$  su konstante. Brzina turbine  $n$  je normalizirana sa sinkronom brzinom vrtnje rotora  $N_r$ :

$$n = \frac{N}{N_r}, \quad (44)$$

a konstanta  $n_{\text{ref}}$  je definirana izrazom:

$$n_{\text{ref}} = 1 + \sigma \tau_0, \quad (45)$$

gdje je  $\tau_0$  otvorenost statorskih lopatica u stacionarnom stanju.



Slika 9. Blok dijagram sustava turbinske regulacije

Eliminacijom varijabli  $e$  i  $e_d$  iz jednadžbi (37), (39) i (42), zatim eliminacijom varijable  $v_i$  iz jednadžbi (40) i (43), te preuređivanjem jednadžbi (40) i (41) dobiva se sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje ponašanje sustava turbinske regulacije:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_a}{dt} &= \frac{1}{T_a} \left( 1 + \sigma\tau_0 - \frac{N}{N_r} - e_t - \sigma v_a \right), \\
\frac{de_t}{dt} &= \frac{1}{T_r} \left( \delta T_r \frac{dv_a}{dt} - e_t \right), \\
\frac{dv_d}{dt} &= \frac{1}{T_d} (k_d(v_a - \tau) - v_d), \\
\frac{d\tau}{dt} &= k_s v_d,
\end{aligned} \tag{46}$$

Tijekom nestacionarnih pojava, pogotovo kod velikih promjena snage, varijable sustava mogu dostići svoja ograničenja pa je bitno da se ona uzmu u obzir. Za pojedine varijable granične vrijednosti su:

$$\begin{aligned}
0 &\leq v_a \leq 1, \\
-e_{t,\max} &\leq e_t \leq e_{t,\max}, \\
v_{d,\min} &\leq v_d \leq v_{d,\max}, \\
0 &\leq \tau \leq 1.
\end{aligned} \tag{47}$$

Ograničenja varijabli su uzrok nelinearnosti diferencijalnog sustava (46) zbog kojeg se ne može odrediti analitičko rješenje, zato se sustav rješava numerički koristeći Runge-Kutta 4 metodu koja glasi:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \tag{48}$$

gdje indeks  $n$  označava vremenski trenutak, a  $\mathbf{y}$  je vektor varijabli:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} v_a \\ e_t \\ v_d \\ \tau \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Vektori  $\mathbf{k}_1$ - $\mathbf{k}_4$  se računaju prema:

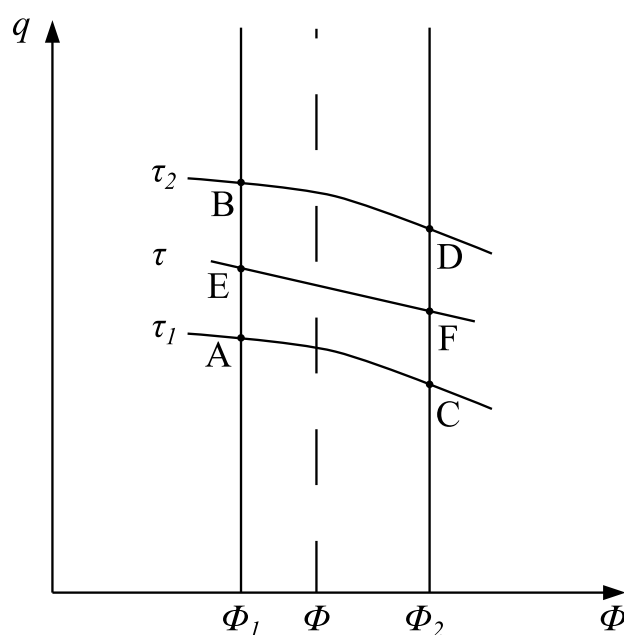
$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \Delta t \cdot f(\mathbf{y}), \\
\mathbf{k}_2 &= \Delta t \cdot f(\mathbf{y} + 0,5\mathbf{k}_1), \\
\mathbf{k}_3 &= \Delta t \cdot f(\mathbf{y} + 0,5\mathbf{k}_2), \\
\mathbf{k}_4 &= \Delta t \cdot f(\mathbf{y} + \mathbf{k}_3),
\end{aligned} \tag{50}$$

gdje je funkcija  $f(\mathbf{y})$  sustav diferencijalnih jednačbi (46).

### 4.3. Postupak izračuna

Na slici 10 prikazani su segmenti karakteristike  $q$ , koji nam služe za određivanje jediničnog protoka u sljedećem vremenskom trenutku. Kako bi se odredilo koji segmenti karakteristike su potrebni, treba prvo izračunati jediničnu brzinu vrtnje  $\Phi$  prema izrazu (34), ona se računa s poznatim vrijednostima iz prošlog koraka. Zatim se u spremljenim podacima traže vrijednosti  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\tau_1$  i  $\tau_2$  tako da vrijedi  $\Phi_1 < \Phi < \Phi_2$  i  $\tau_1 < \tau < \tau_2$ , pomoću tih vrijednosti su definirani jedinični protoci  $q$  u točkama A, B, C i D. Karakteristika za otvorenost statorskih lopatica  $\tau$  se aproksimira pravcem povučenim između točaka E i F i glasi:

$$q = a_0 + a_1 \Phi. \quad (51)$$



Slika 10. Interpolacija turbinske karakteristike protoka [1]

Gdje je jedinični protok u točki E dobiven linearnom interpolacijom između točaka A i B, a jedinični protoku točki F linearnom interpolacijom između točaka C i D:

$$q_E = q_A + \frac{q_B - q_A}{\tau_2 - \tau_1} \cdot (\tau - \tau_1), \quad (52)$$

$$q_F = q_C + \frac{q_D - q_C}{\tau_2 - \tau_1} \cdot (\tau - \tau_1). \quad (53)$$

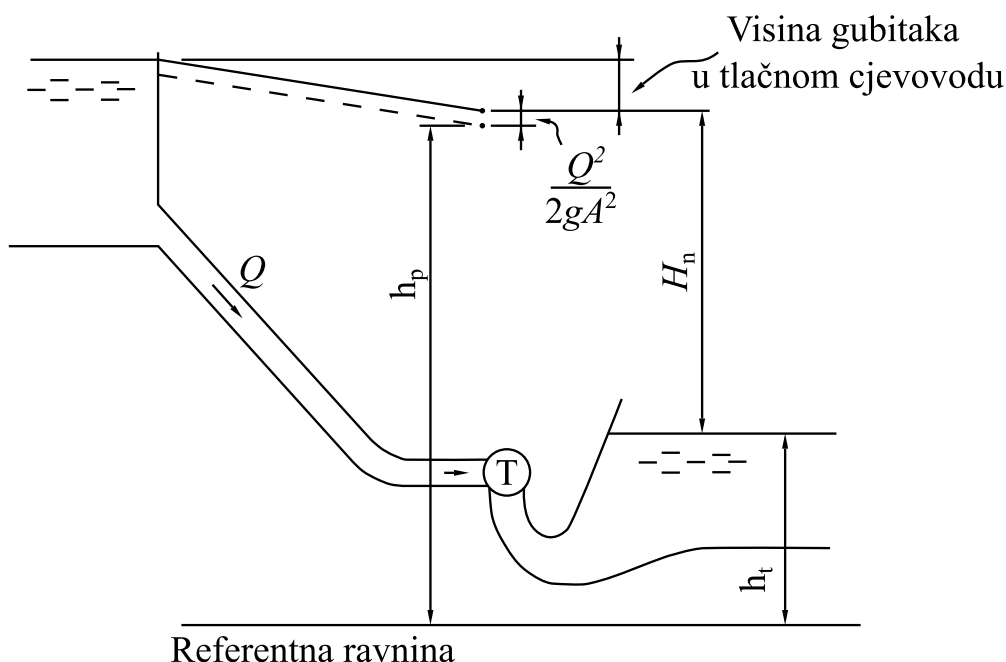
Ako se u jednadžbu pravca (51) uvrste definicije jediničnih veličina dobiva se:

$$a_0 D_t^2 H_n^{1/2} = Q - \frac{N \cdot D_t^3 a_1}{84,59}. \quad (54)$$

Izrazi (52), (53) i (54) su korišteni u nastavku. No prije toga je dan izraz za računanje piezometričke visine ispred turbine:

$$h_p = H_n + h_t - \frac{Q^2}{2gA^2}. \quad (55)$$

Shema prema kojoj se dobio izraz (55) je prikazana na slici 11. Brzina na izlazu turbine je mala, pa u prošlom izrazu nisu uzeti u obzir gubici utjecanja u veliki spremnik.



Slika 11. Shema za računanje piezometričke visine

Kombiniranjem jednadžbi (54), (55) i pozitivne karakteristike prema jednadžbi (25) dobiva se kvadratna jednadžba čije je rješenje:

$$Q = \frac{-a_5 - \sqrt{a_5^2 - 4a_4a_6}}{2a_4}, \quad (56)$$

gdje su konstante  $a_0$ - $a_6$  definirane izrazima:

$$a_0 = q_E - \Phi_1 \cdot \frac{q_F - q_E}{\Phi_2 - \Phi_1},$$

$$a_1 = \frac{q_F - q_E}{\Phi_2 - \Phi_1},$$

$$a_2 = a_0 D_t^2,$$

$$a_3 = \frac{N \cdot D_t^3 a_1}{84,59}, \quad (57)$$

$$a_4 = \frac{C_c}{2gA^2} - \frac{C_c}{a_2^2},$$

$$a_5 = \frac{2a_3 \cdot C_c}{a_2^2} - 1,$$

$$a_6 = C_p - C_c \cdot h_t - \frac{C_c \cdot a_3^2}{a_2^2}.$$

Kada se izračuna protok može se izračunati piezometrička visina pomoću pozitivne karakteristike prema jednadžbi (25), a neto pad prema izrazu (54). Kao što je rečeno razlika u momentu na rotoru i generatoru je uzrok promjene brzine vrtnje, a izraz za tu promjenu je:

$$T_t - T_g = I \cdot \frac{d\omega}{dt}, \quad (58)$$

gdje je  $T_t$  moment rotora,  $T_g$  moment generatora,  $I$  moment inercije rotora, a  $\omega$  kutna brzina. Množenjem prethodne jednadžbe s kutnom brzinom rotora dobiva se:

$$P_t - P_{g,ul} = I \cdot \omega \frac{d\omega}{dt}. \quad (59)$$

gdje je  $P_{g,ul}$  ulazna snaga generatora. S obzirom da je lakše izmjeriti izlaznu snagu generatora, s njome će se vršiti proračun, a ona se računa prema  $P_{g,iz} = P_{g,ul} \cdot \eta_g$ , gdje je  $\eta_g$  učinkovitost generatora. Snaga turbine  $P_t$  se uzima kao srednja vrijednost snage iz prošlog vremenskog trenutka  $P_{t1}$  i snage  $P_{t2}$  očitane iz karakteristike  $p$ . Slično kao i za karakteristiku  $q$ , kako bi se očitala snaga turbine u sljedećem vremenskom trenutku potrebno je prvo izračunati jediničnu brzinu vrtnje  $\Phi$ , ali sada s novo izračunatom vrijednosti  $H_n$ . Zatim se snaga  $p$  aproksimira pravcem između interpoliranih vrijednosti i očitava se za izračunati  $\Phi$ . U slučaju postepene promjene snage generatora  $P_{g,iz}$ , kao i kod turbine, uzima se srednja vrijednosti snage između prošlog i novog koraka, a u analizi skokovite promjena uzima se samo konačna vrijednost snage. Primjenom navedenog i integracijom izraza (59) dobiva se :

$$\left( \frac{P_{t1} + P_{t2}}{2} - \frac{P_{g,iz}}{\eta_g} \right) \Delta t = I \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2). \quad (60)$$

Nakon preuređivanja dobiva se izraz za računanje promjene brzine kod skokovite promjene snage generatora:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{\Delta t}{I} \left[ 0,5 \cdot (P_{t1} + P_{t2}) - \frac{P_g}{\eta_g} \right]}. \quad (61)$$

U proračunu nije praktično računati s kutnom brzinom, umjesto toga se računa s brzinom vrtnje  $N$  u o/min, veza između te dvije veličine je  $\omega = 2\pi \cdot N$ . Također se radi jednostavnosti radi sa snagom u kW, konačna formula za izračun brzine vrtnje rotora turbine je:

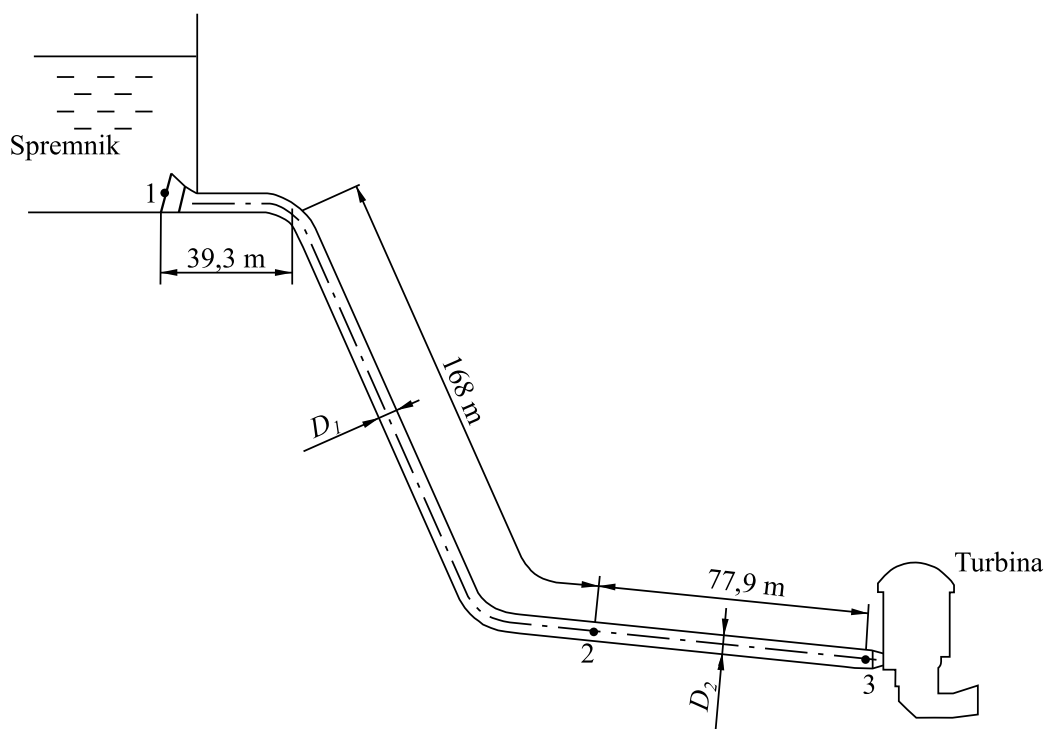
$$N_2 = \sqrt{N_1^2 + 0,182 \cdot 10^6 \frac{\Delta t}{I} \left[ 0,5 \cdot (P_{t1} + P_{t2}) - \frac{P_g}{\eta_g} \right]}. \quad (62)$$

## 5. POSTAVKE NUMERIČKOG PRORAČUNA

Kako bi se mogle primijeniti jednađbe izvedene u odjeljcima 3.4, 4.2 i 4.3 potrebno je prvo definirati sustav koji će se analizirati. Zatim je potrebno navesti sve podatke potrebne za proračun i sve pretpostavke i pojednostavljenja koja su uzeta u obzir. U konačnici potrebno je provesti diskretizaciju sustava i odrediti početno rješenje koje vrijedi za stacionarno stanje

### 5.1. Definiranje Sustava

Na slici 12 prikazana je hidroelektrana koja će se analizirati. Sustav se sastoji od velikog spremnika, 3 serijski spojene cijevi i Francisove turbine. Difuzor koji se nalazi nakon turbine nije uzet u obzir tijekom analize zbog svoje male duljine. Cijev 1 polazi od zahvata odnosno od točke 1 i završava u točki 2, cijev 2 počinje u točki 2 i završava u točki 3. Prve dvije cijevi su istog promjera, dok je zadnja cijev, koja počinje u točki 3 manjeg promjera. Zadnja cijev se sastoji od kratke ulazne cijevi i spiralnog kućišta turbine. Parametri cjevovoda dani su u tablici 1, a parametri sustava u tablici 2.



Slika 12. Analizirani sustav

Za sustav turbinske regulacije početne vrijednosti su dane u tablici 3, one su dobivene tako da je proveden proračun s pretpostavljenim vrijednostima bez da se mijenja snaga sustava. Nakon što je sustav takvim proračunom došao u stacionarno stanje vrijednosti su očitane i zapisane. Vrijednosti parametara sustava regulacije su dobivene pokušajem i pogreškom, a navedene su u tablici 4.

Tablica 1. Parametri cjevovoda

Cijev 1			
$L$ [m]	$D$ [m]	$k$ [mm]	$\lambda$ [-]
207	5,49	2,2506	0,016
Cijev 2			
$L$ [m]	$D$ [m]	$k$ [mm]	$\lambda$ [-]
77,9	5,49	0,1862	0,010
Cijev 3			
$L$ [m]	$D$ [m]	$k$ [mm]	$\lambda$ [-]
36,5	4,9	0,0835	0,009

Tablica 2. Parametri sustava

Veličina	Iznos	Jedinica	Opis
$H_{n0}$	152,4	m	Početni neto pad visine
$h_t$	503,2	m	Visina vode u nizvodnom rezervoaru
$Q_0$	166,9	m <sup>3</sup> /s	Protok u stacionarnom stanju
$P_t$	230*10 <sup>3</sup>	kW	Izlazna snaga turbine na početku
$N_r$	150	o/min	Sinkrona brzina vrtnje generatora
$g$	9,80665	m/s <sup>2</sup>	Akceleracija sile teže
$\eta_g$	0,95	-	Učinkovitost generatora
$D_t$	4,86	m	Promjer rotora turbine
$\nu$	1,003e-6	m <sup>2</sup> /s	Kinematička viskoznost vode
$z$	498,35	m	Geodetska visina turbine

Tablica 3. Početne vrijednosti varijabli sustava turbinske regulacije

$v_a$	$e_t$	$v_d$	$\tau$
0,60195	0	0	0,6



Tablica 4. Parametri sustava turbinske regulacije

Veličina	Iznos
$T_a$	0,075
$T_r$	8
$T_d$	0,1
$T_o$	16
$T_c$	16
$k_d$	10
$k_s$	0,1275
$\sigma$	0,05
$\delta$	0,4
$e_{t,max}$	0,25
$v_{d,min}$	-0,4902
$v_{d,max}$	0,4902

Vrijednosti  $v_{d,min}$  i  $v_{d,max}$  iz Tablica 4 se računaju prema izrazima:

$$v_{d,min} = -\frac{1}{k_s T_c}. \quad (63)$$

$$v_{d,max} = \frac{1}{k_s T_o}. \quad (64)$$

## 5.2. Diskretizacija sustava

Zbog nedostatka podataka o načinu učvršćivanja, materijalu i debljini cijevi, pretpostavljena je jednaka brzina zvuka u svim cijevima  $c = 1300$  m/s. Diskretizacija sustava počinje podjelom zadnje cijevi, uzeto je da se je ona podijeljena na 3 elementa, te je onda vremenski korak:

$$\Delta t = \frac{L_3}{c_3 \cdot n_3} = \frac{36,5}{1300 \cdot 3} = 0,009359 \text{ s}. \quad (65)$$

Sada se s poznatim vremenskim korakom može odrediti diskretizacija ostalih cijevi. Uz male korekcije brzine kako bi CFL broj ostao jednak 1 dobivene su vrijednosti prostorne diskretizacije preostale dvije cijevi. Podaci o diskretizaciju su dani u tablici 5.

Tablica 5. Diskretizacija sustava

	Cijev 1	Cijev 2	Cijev 1	Napomena
$c$ [m/s]	1301	1355	1300	Brzina zvuka
$n$ [-]	17	6	3	Broj podjela
$\Delta x$ [m]	12,176	12,687	12,167	Duljina elementa

### 5.3. Početno rješenje sustava

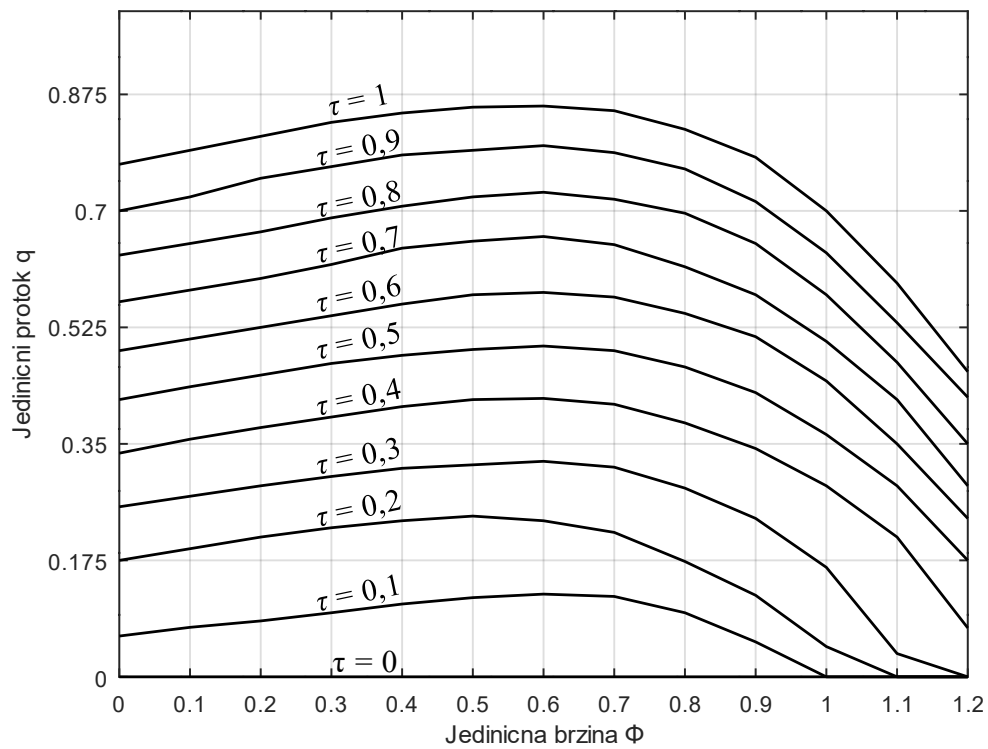
Piezometrička visina ispred turbine je izračunata prema formuli (55), izračun vrijednosti u čvorovima uzvodno radi se prema:

$$h_{j,i} = h_{j,i+1} + \frac{\lambda \Delta x_j}{D_j} \cdot \frac{Q_0^2}{2gA_j^2}, \quad (66)$$

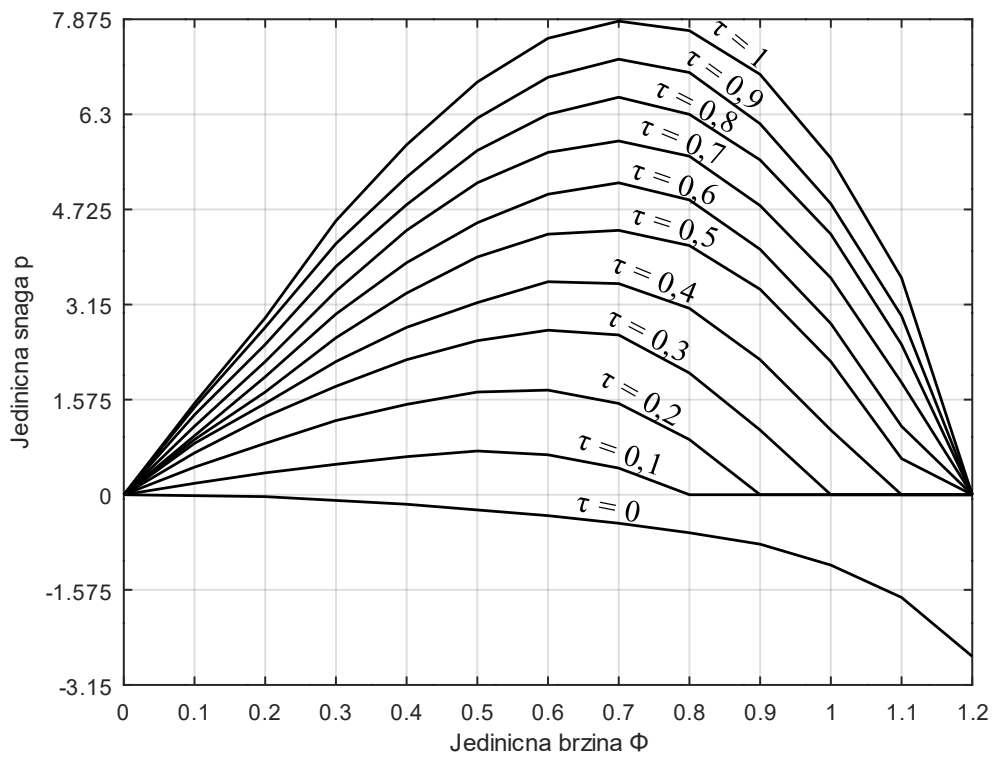
gdje indeks  $j$  označava redni broj cijevi, a indeksi  $i$  i  $i+1$  prostorne čvorove u cijevi. Pretpostavljeno je da je tlak na spojevima cijevi jednak, tj. da nema lokalnog gubitka. Također se uzima da je vrijednost piezometričke visine u čvoru 1 cijevi 1, dobivene ovim proračunom, visina u velikom spremniku. S obzirom da se radi s protokom, on je jednak u svim čvorovima cjevovoda i iznosi  $Q_0$ .

### 5.4. Turbinske karakteristike

U nedostatku karakteristika analizirane turbine, pretpostavlja se da su one slične primjerima danim na slikama 6 i 7, tj. da su relativne razlike između krivulja iste. Uz poznatu radnu točku turbine u stacionarnom stanju dobivaju se karakteristike koje se koriste u proračunu, one su prikazane na slikama 13 i 14.



Slika 13. Karakteristika protoka



Slika 14. Karakteristika snage

## 6. REZULTATI PRORAČUNA

Nestacionarne pojave u proračunu su izazvane promjenom izlazne snage generatora u rubnom uvjetu turbine. Naglasak ovog proračuna će biti na analizi ispada generatora iz mreže, jer je to rubni slučaj koji daje uvid u maksimalne promjene varijabli, u tom slučaju izlazna snaga generatora se postavlja na nulu. No ispad generatora iz mreže je slučaj koji se ne događa često u praksi, stoga će se analizirati niz promjena snaga koje imaju veću vjerojatnost pojave u normalnom radu turbine. Analizirani slučajevi su dani u tablici 6, gdje je prikazana snaga na izlazu iz turbine.

**Tablica 6. Analizirani slučajevi**

	Početna snaga [MW]	Konačna snaga [MW]	Tip promjene
Slučaj 1	230	250	Skokovita promjena
Slučaj 2	230	200	Skokovita promjena
Slučaj 3	230	250	Linearna promjena
Slučaj 4	230	200	Linearna promjena

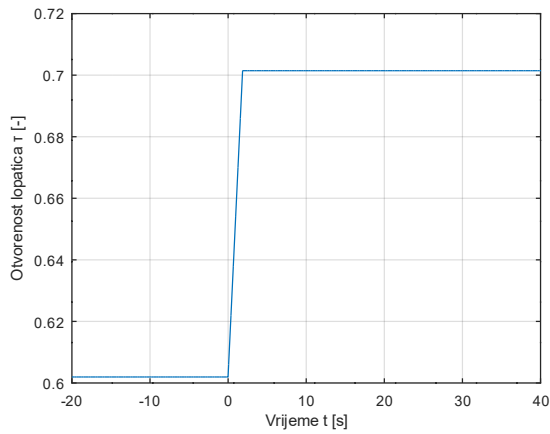
Izlazna snaga generatora se ne mijenja na samom početku proračuna. Prije promjene snage proračun se izvršava određeno vrijeme s vrijednostima iz stacionarnog stanja. Time se želi pokazati da sustav može ostati u stacionarnom stanju tj. da ne postoje neke greške u proračunu koje bi destabilizirale sustav. Također će prije glavnog proračuna biti provedena analiza sustava bez turbinske regulacije. Regulacija unosi dodatnu kompleksnost u sustav koja može otežati tumačenje rezultata, te se dodatnom analizom razjašnjava njen utjecaj u cijelom procesu. Time se također dokazuje da su ostali dijelovi sustava pravilno modelirani.

Promjena visine tlaka i protoka u vremenu će biti prikazani za čvor neposredno ispred ulaza u turbinu. Uz to će biti prikazane i promjene brzine vrtnje rotora, izlazne snaga turbine i otvorenosti statorskih lopatica. Visina tlaka se računa prema jednadžbi (1) tako da se od piezometričke visine oduzme geodetska visina turbine.

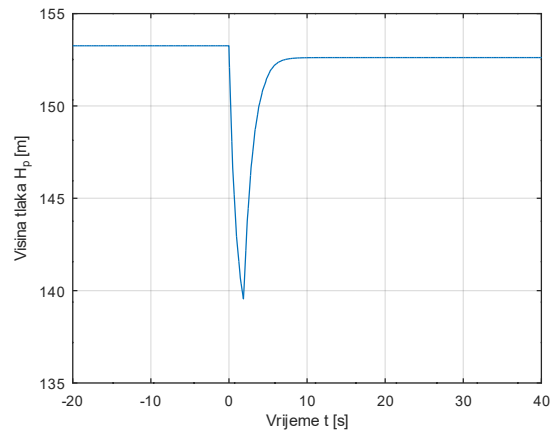
### 6.1. Analiza sustava bez sustava turbinske regulacije

U ovom proračunu zanemaruju se izrazi izvedeni u odjeljku 4.2, te se otvorenost statorskih lopatica zadaje kao linearna funkcija vremena uz konstantnu brzinu vrtnje rotora ( $N = \text{konst.}$ ).

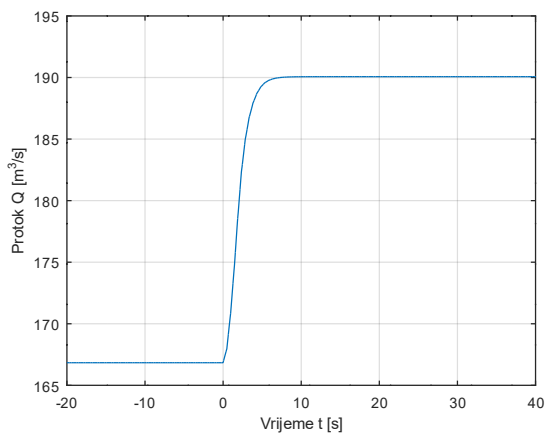
### 6.1.1. Otvaranje statorskih lopatica



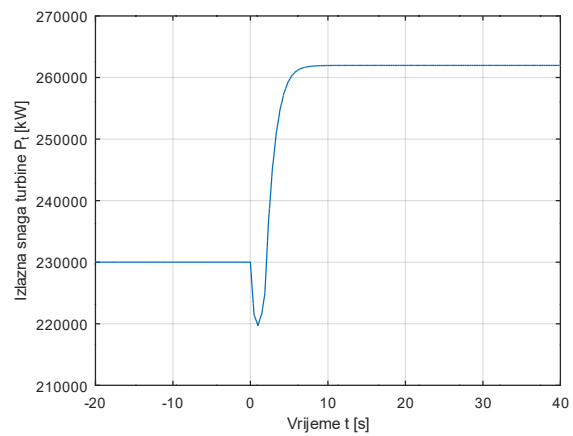
Slika 15. Linearno otvaranje lopatica



Slika 16. Visina tlaka nakon otvaranja

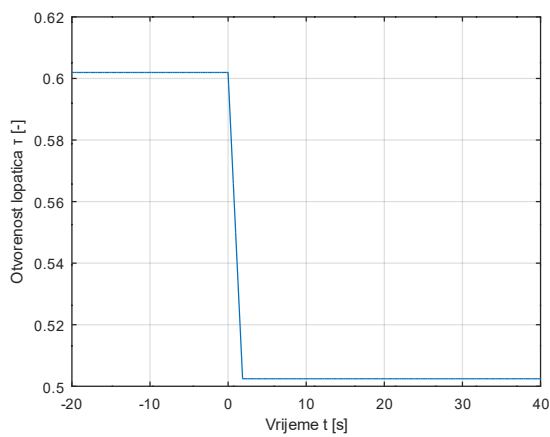


Slika 17. Protok nakon otvaranja

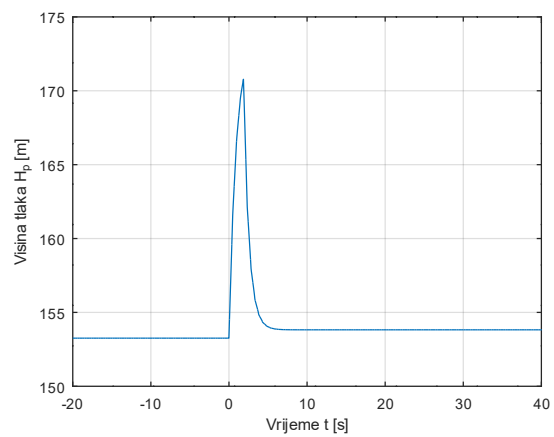


Slika 18. Izlazna snaga nakon otvaranja

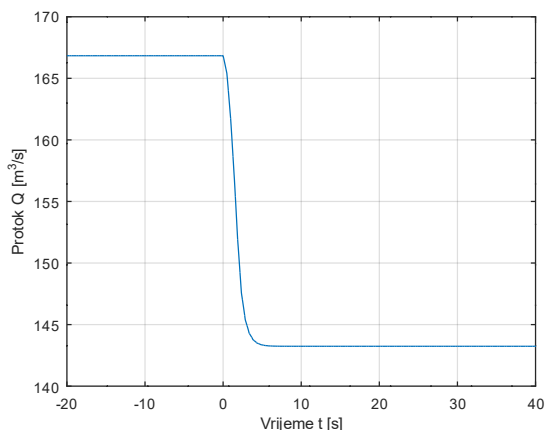
### 6.1.2. Zatvaranje statorskih lopatica



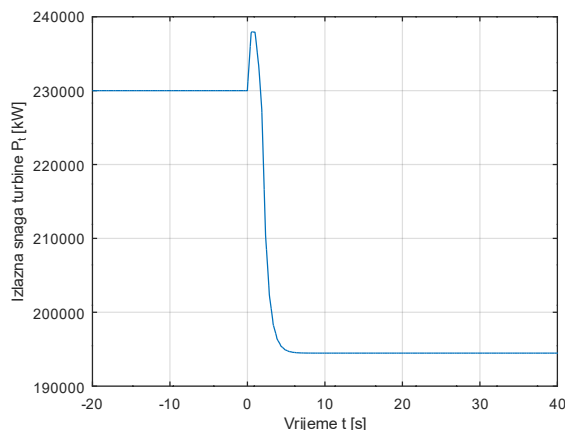
Slika 19. Linearno zatvaranje lopatica



Slika 20. Visina tlaka nakon zatvaranja



Slika 21. Protok nakon zatvaranja

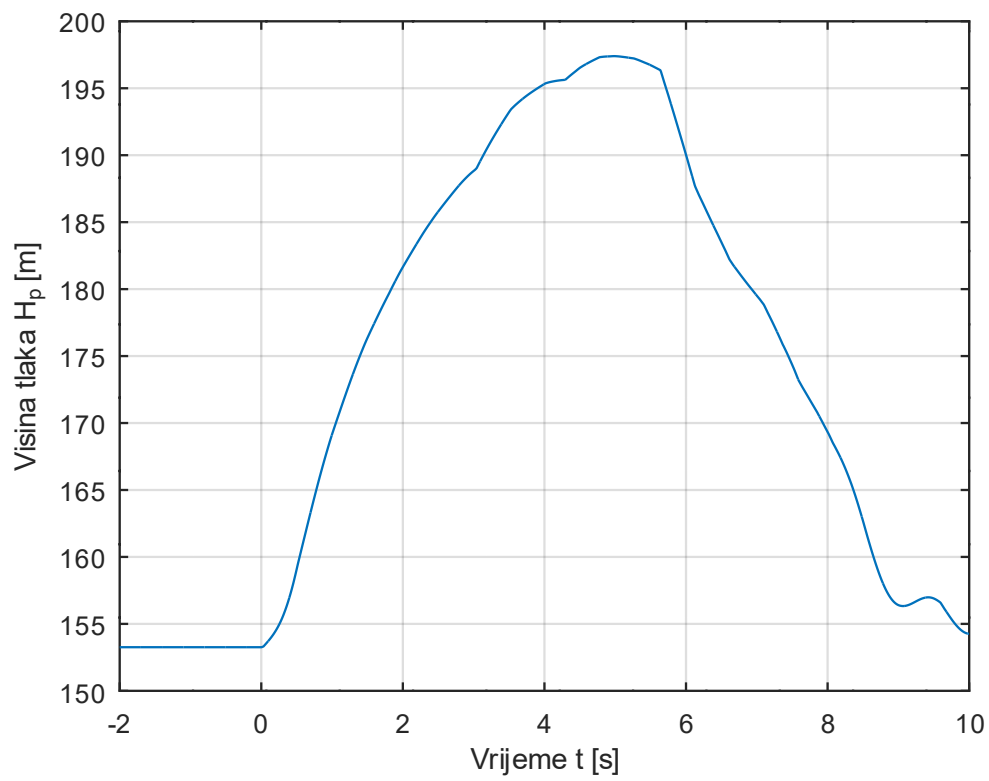


Slika 22. Izlazna snaga nakon zatvaranja

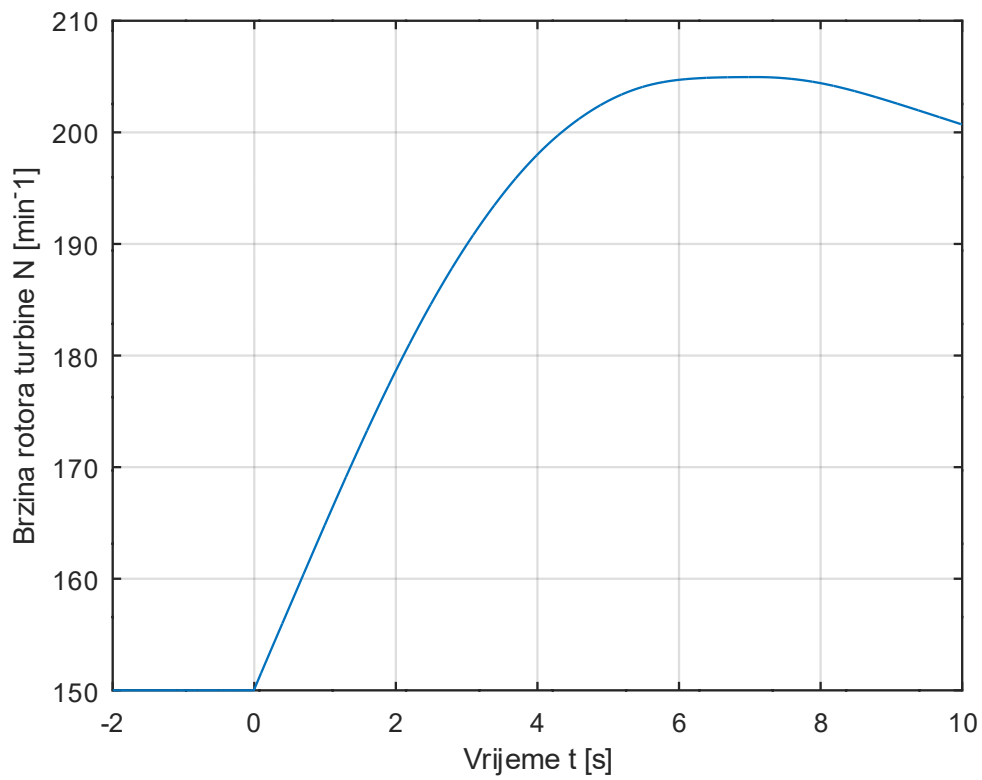
U oba slučaja otvorenost statorskih lopatica se mijenja za ~10 % tijekom vremena od 2 sekunde. Promjene otvorenosti statorskih lopatica u vremenu su prikazane na slikama 15 i 19. Na slici 17 prikazana je promjena protoka na kojoj se uočava očekivano povećanje protoka vode s otvaranjem lopatica. To povećanje se odvija u dužem vremenu od vremena otvaranja lopatica. Tijekom otvaranja lopatica povećanje protoka se namiruje iz potencijalne energije vode, što uzrokuje skokovit pad tlaka prikazan na slici 16. Kao što je rečeno u opisu hidroelektrane Francisova turbina je reakcijska, te izlazna snaga ovisi o neto padu u turbini. Zato skokoviti pad tlaka uzrokuje kratkotrajni pad snage koji je prikazan na slici 18. Nakon što se tlak stabilizira snaga turbine očekivano raste. Promjene dobivene zatvaranjem statorskih lopatica su obrnute od onih koje su dobivene otvaranjem, što se može vidjeti na slikama 20, 21 i 22.

## 6.2. Analiza ispada generatora iz mreže

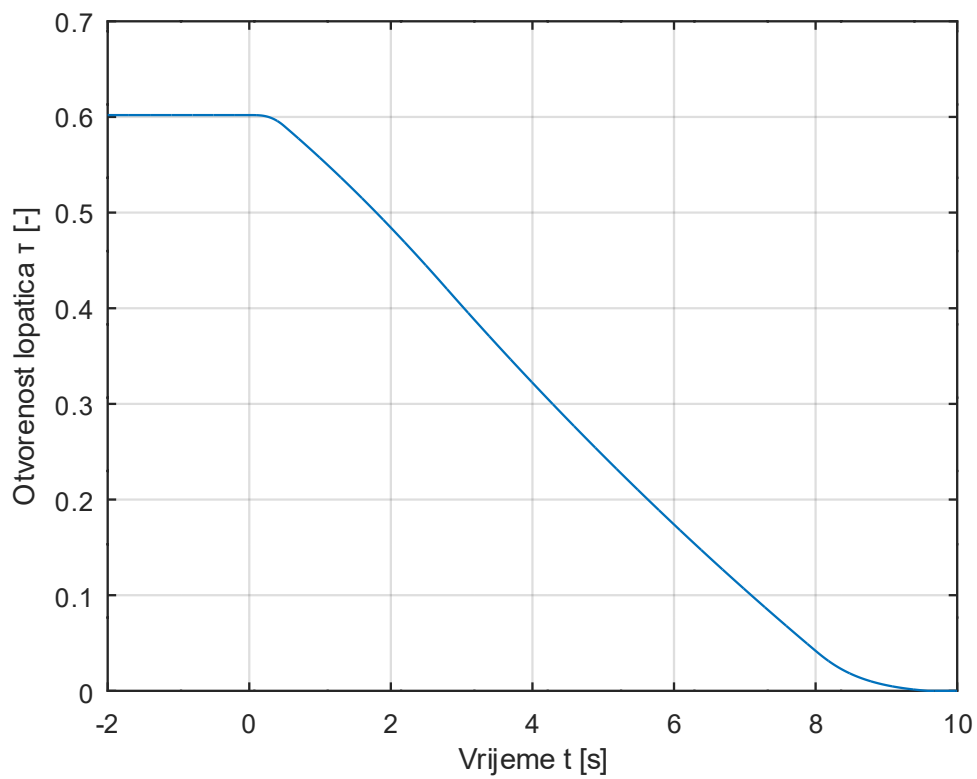
Kako se i očekuje nakon trenutnog ispada generatora iz mreže, skokovit porast rezultirajućeg momenta na rotor turbine uzrokuje porast brzine vrtnje rotora na što sustav turbinske regulacije reagira zakretanjem statorskih lopatica i zatvaranjem ulaza u rotor (Slika 25), a to uzrokuje smanjenje protoka, te on u konačnici pada na nulu (Slika 26). Početno naglo usporenje vode izaziva povećanje tlaka. To povećanje tlaka je uzrok kratkotrajnog skoka izlazne snage (Slika 27), nakon čega pada izlazna snaga. Brzina vrtnje rotora doseže svoj maksimum kada izlazna snaga turbine padne na nulu (Slika 24). To se događa pri otvorenosti statorskih lopatica manjoj od 10 %. Nakon tog trenutka gubici u sustavu su veći od proizvedene snage, a izlazna snaga turbine je negativna, što uzrokuje pad brzine vrtnje rotora.



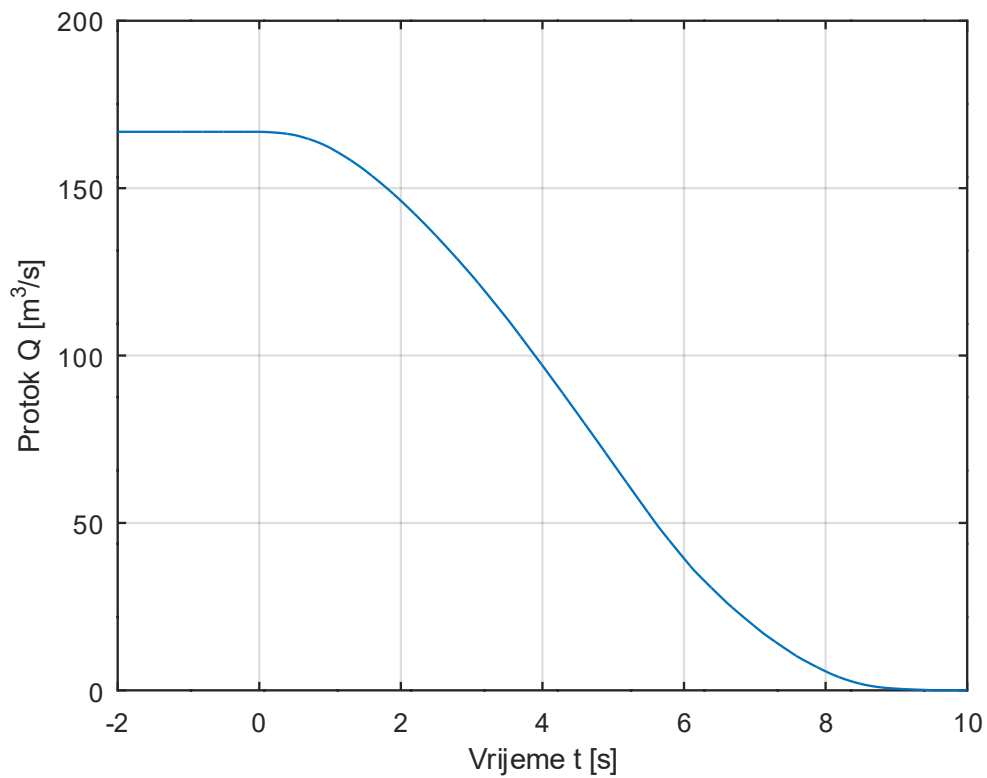
Slika 23. Visina tlaka nakon ispada generatora



Slika 24. Brzina vrtnje rotora nakon ispada generatora

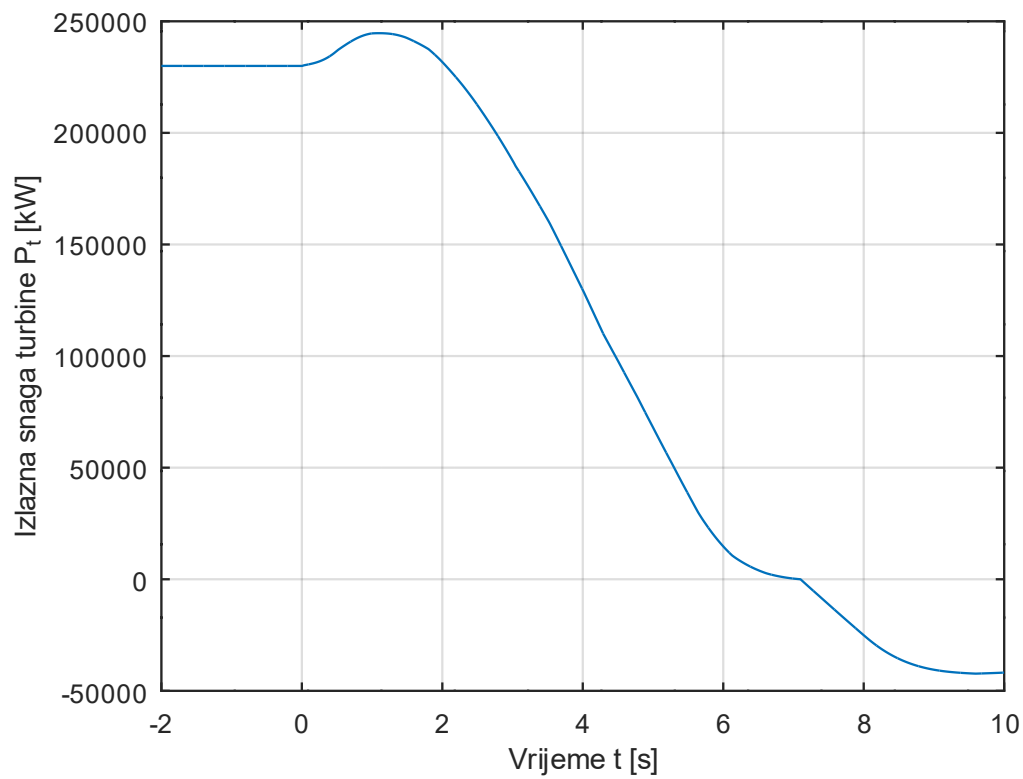


**Slika 25. Otvorenost statorskih lopatica nakon ispada generatora**



**Slika 26. Protok nakon ispada generatora**

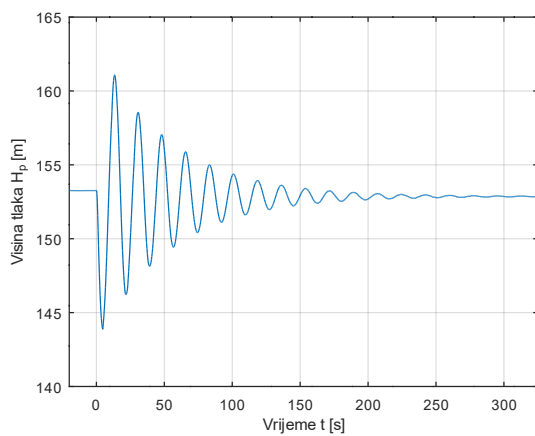




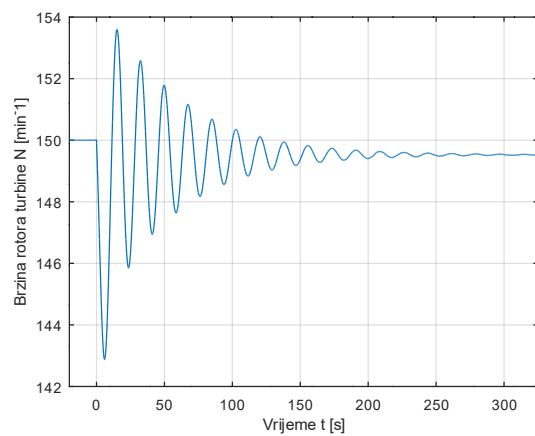
Slika 27. Izlazna snaga turbine nakon ispada generatora

### 6.3. Skokovite promjene snage

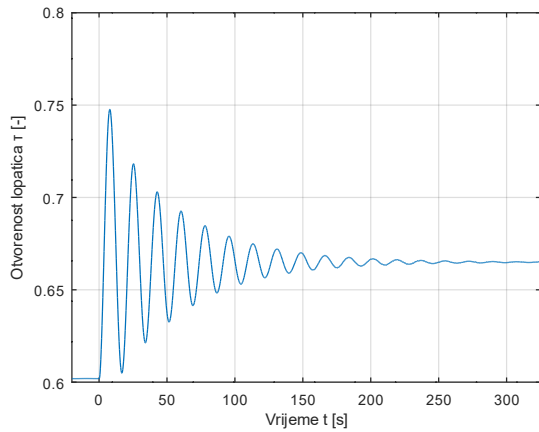
#### 6.3.1. Slučaj 1



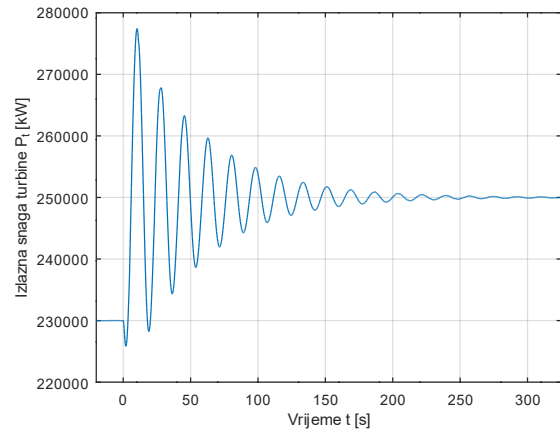
Slika 28. Visina tlaka, slučaj 1



Slika 29. Brzina rotora, slučaj 1

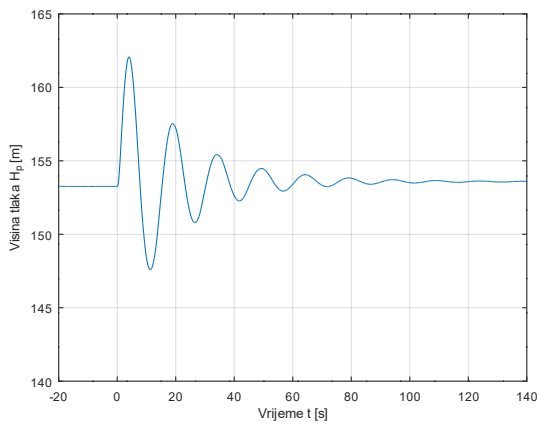


Slika 30. Otvorenost lopatica, slučaj 1

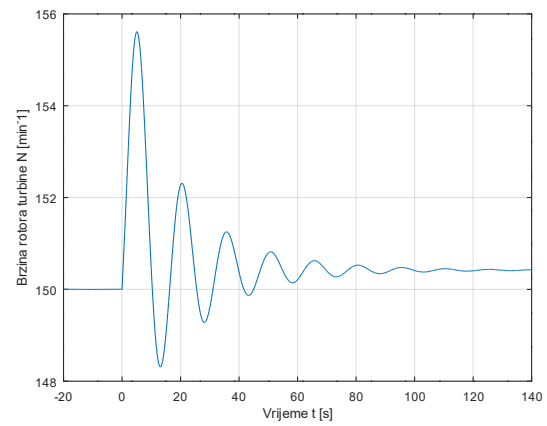


Slika 31. Snaga turbine, slučaj 1

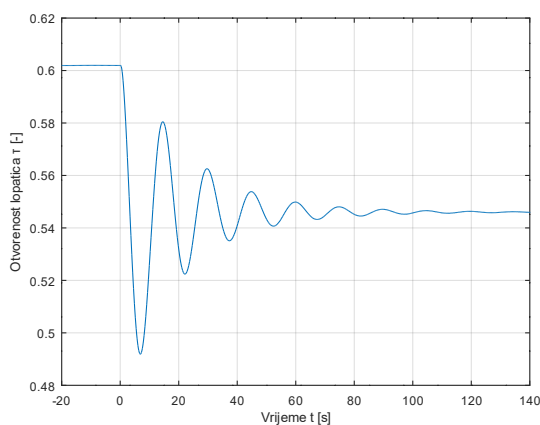
6.3.2. Slučaj 2



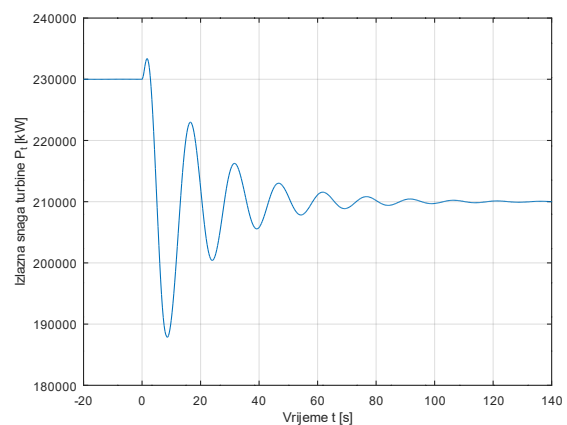
Slika 32. Visina tlaka, slučaj 2



Slika 33. Brzina rotora, slučaj 2



Slika 34. Otvorenost lopatica, slučaj 2



Slika 35. Snaga turbine, slučaj 2

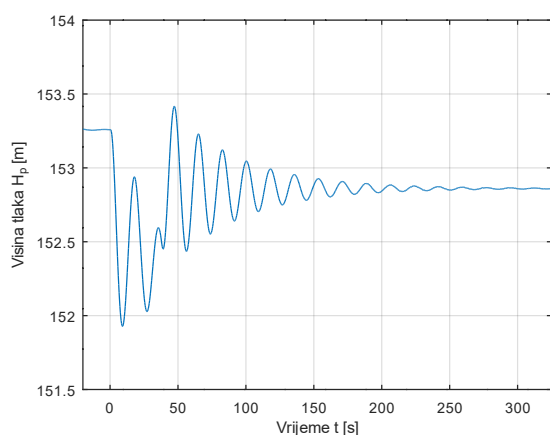
Na slikama 28, 29, 30 i 31 vide se promjene veličina uslijed skokovitog porasta snage od 20 MW, u ovom slučaju se veličine ponašaju jako slično i jako su oscilatorne. Objašnjenje za to ponašanje je prevelika osjetljivost regulatora, koji prejako reagira na promjenu snage tj. brzine rotora, te on onda mora korektivno ponovo zatvarati lopatice i taj proces se odvija dok sustav ne dođe u novo stacionarno stanje. Unatoč tome promjena veličina je očekivana, trenutnim porastom snage generatora usporava se brzina vrtnje rotora zbog čega sustav regulacije otvara lopatice, te više vode struji kroz turbinu što uzrokuje pad tlaka koji je manji nego u slučaju ispada generatora iz mreže. U novom stacionarnom stanju brzina vrtnje rotora je različita od početne sinkrone brzine.

Na slikama 32, 33, 34 i 35 prikazane su promjene nastale zbog skokovitog pada snage od 20 MW. U ovom slučaju mogu se izvesti slični zaključci kao i u prošlom, zato je puno zanimljivije gledati usporedbu ta dva slučaja. Kod porasta snage mogu se uočiti veće amplitude oscilacija u odnosu na slučaj pada snage, te se također može vidjeti da oscilacije traju puno duže u slučaju porasta snage tj. prigušenje oscilacija je manje.

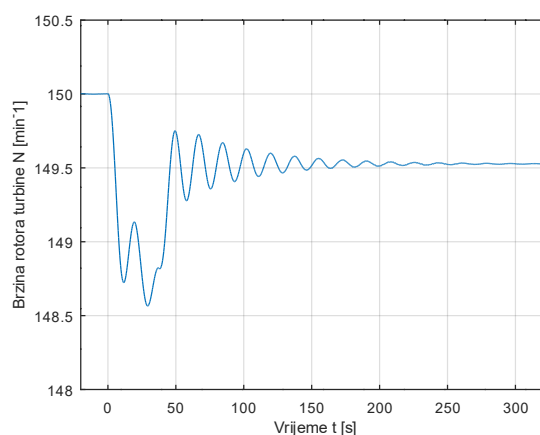
#### 6.4. Linearne promjene snage

Vremenski period promjene snage je za oba slučaja isti, te on iznosi 4000 vremenskih koraka  $\Delta t$  što otprilike odgovara vremenu od 37 s.

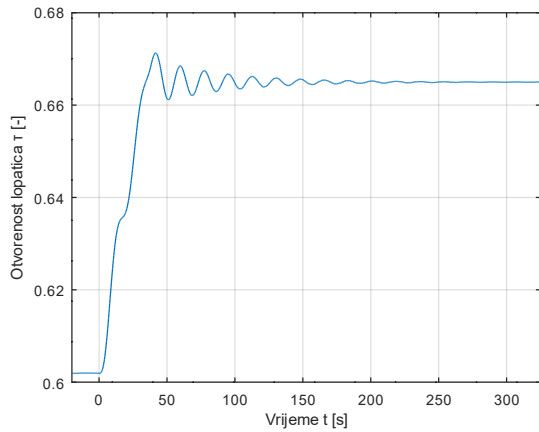
##### 6.4.1. Slučaj 3



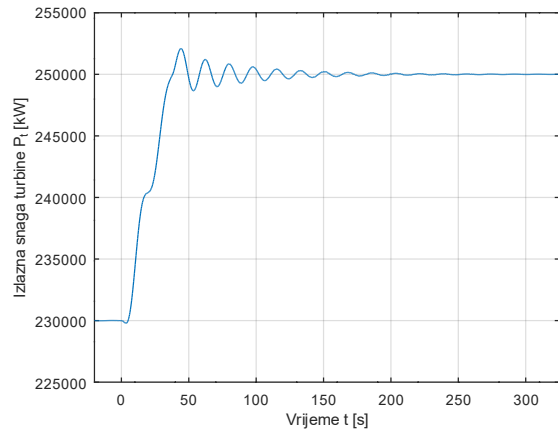
Slika 36. Visina tlaka, slučaj 3



Slika 37. Brzina rotora, slučaj 3

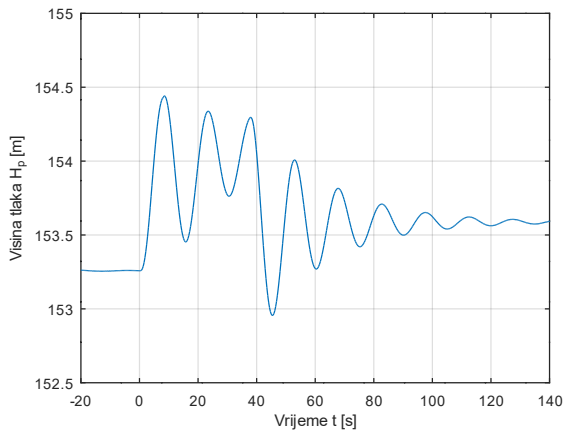


Slika 38. Otvorenost lopatica, slučaj 3

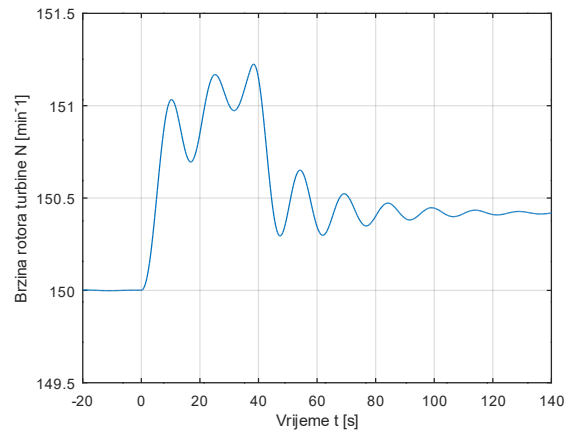


Slika 39. Snaga turbine, slučaj 3

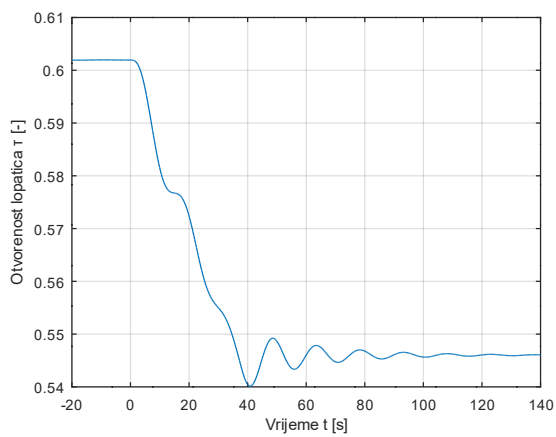
### 6.4.2. Slučaj 4



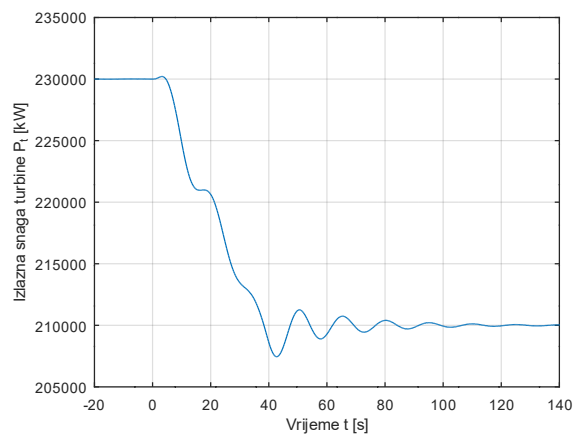
Slika 40. Visina tlaka, slučaj 4



Slika 41. Brzina rotora, slučaj 4



Slika 42. Otvorenost lopatica, slučaj 4



Slika 43. Snaga turbine, slučaj 4

Na slikama 36, 37, 38 i 39 prikazane su promjene koje nastaju kod linearnog porasta snage, a na slikama 40, 41, 42 i 43 promjene kod linearnog pada snage. Može se primijetiti da su promjene veličina u ovim slučajevima manje nego što su u slučajevima sa skokovitim promjenama. To je smisljeno jer postepeno mijenjanje snage dopušta sustavu da se prilagodi njima. Isto kao i u slučaju skokovitih promjena, kod linearnog porasta snage sustavu treba puno duže da dođe u stacionarno stanje. U oba slučaja se može uočiti da se izlazna snaga i otvorenost statorskih lopatica ponašaju slično.

---

## **7. ZAKLJUČAK**

Ispad generatora iz mreže uzrokuje nestacionarne pojave u cijelom sustavu. Kako bi se mogla napraviti kvalitetna analiza nestacionarnih pojava potrebno je detaljno poznavati sastavne dijelove sustava i njihovo ponašanje. Veliki utjecaj na funkcioniranje sustava ima turbinska regulacija. Zato je u radu dan proračun sa i bez turbinske regulacije, te je time dan uvid u to kako regulacija utječe na cjelokupni sustav.

Rezultati analize promjena u sustavu nakon ispada generatora iz mreže pokazuju porast tlaka za otprilike 4 bar i porast brzine vrtnje rotora sa 150 o/min na oko 205 o/min. Cijeli postupak od trenutka ispada generatora iz mreže do potpunog zatvaranja lopatica traje otprilike 10 sekundi. Ove značajne promjene tlaka u sustavu i brzine vrtnje rotora trebaju se uzeti u obzir prilikom projektiranja sustava kako bi se izbjegla oštećenja sustava. Prema očekivanju, rezultati dodatne analize povećanja i smanjenja snage generatora pri linearnoj i skokovitoj promjeni, pokazuju da se pri linearnoj promjeni snage javljaju manje amplitude oscilacija i sustav brže dolazi u novo stacionarno stanje.

---

**LITERATURA**

- [1] Chaudhry, H.: Applied Hydraulic Transients, Springer, 2014.
- [2] Šavar, M.: Hidrodinamika cijevnih mreža, Zagreb, 2018.
- [3] Ujević, I., Buntić, Z.: Elektrane, Školska knjiga Zagreb, 1993.
- [4] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I.: Mehanika fluida I, Zagreb, 2021.
- [5] Hydroelectric dam, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydroelectric\\_dam.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydroelectric_dam.svg), pristupljeno 6.9.2023.
- [6] Francis-turbine, <https://commons.wikimedia.org/wiki/Francis-Turbine>, pristupljeno 13.9.2023
- [7] Wylie, E. B., Streeter, V. L., Fluid Transients, McGraw Hill, 1978.
- [8] Franjić, K.: “Vodna turbina“, Tehnička enciklopedija, sv. 13, Zagreb, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 1997.