

# Optimiranje upravljačkih varijabli hibridnog električnog vozila serijsko-paralelne konfiguracije korištenjem Pontrjaginovog principa minimuma

---

**Miković, Matija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:876281>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-20**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

**Matija Miković**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Branimir Škugor, dipl. ing.

Student:

Matija Miković

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Prije svega, zahvaljujem doc. dr. sc. Branimiru Škugoru na prihvaćenom mentorstvu te na ukazanom povjerenju, iznimnom strpljenju, susretljivosti, odvojenom vremenu i mnogim korisnim savjetima koji su pomogli u izradi ovog rada.

Zahvaljujem svojim kolegama i prijateljima koji su mi tijekom cijelog studija pružili ogromnu pomoć i podršku.

Na kraju, posebno zahvaljujem svojim roditeljima i sestri, koji su uvijek bili uz mene i vjerovali u mene, na bezuvjetnoj ljubavi, podršci i strpljenju.

Matija Miković



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
Proizvodno inženjerstvo, inženjerstvo materijala, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
mehatronika i robotika, autonomni sustavi i računalna inteligencija

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 23 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Matija Miković** JMBAG: 0035209107

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Optimiranje upravljačkih varijabli hibridnog električnog vozila serijsko-paralelne konfiguracije korištenjem Pontryaginovog principa minimuma**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Pontryagin's Minimum Principle-based control variable optimisation of series-parallel hybrid electric vehicle**

Opis zadatka:

Pogoni hibridnih električnih vozila (HEV) tipično imaju složenu strukturu i sadržavaju više različitih pogonskih komponenti te dva ili više izvora energije. Stoga u takvim pogonima postoji određena fleksibilnost u smislu zadovoljenja zahtjeva vozača za snagom i momentom, koja se iskorištava u svrhu smanjenja potrošnje goriva. Da bi se dobili uvidi u puni potencijal određene konfiguracije pogona tipično se koriste različiti numerički alati zasnovani na optimiranju upravljačkih varijabli pogona. U tu svrhu, u sklopu diplomskog rada potrebno je:

- 1) provesti pregled literature na temu optimiranja upravljačkih varijabli HEV
- 2) opisati općenitu metodu optimiranja zasnovanu na Pontryaginovom principu minimuma (PMP) te ilustrirati primjenu na jednostavnom dinamičkom modelu (npr. s jednom varijablom stanja)
- 3) proučiti postojeći model Toyota hibridnog pogona serijsko-paralelne konfiguracije i analizirati pripadne rezultate optimiranja upravljačkih varijabli dobivene primjenom algoritma dinamičkog programiranja (DP) te rezultate simulacije pogona uz korištenje optimalne upravljačke strategije zasnovane na minimizaciji ekvivalentne potrošnje goriva (eng. Equivalent Consumption Minimization Strategy, ECMS)
- 4) primijeniti PMP metodu za optimiranje upravljačkih varijabli modela pogona iz t. 3
- 5) provesti usporednu analizu PMP, DP i ECMS rezultata, u smislu potrošnje goriva i potrebnog vremena izvođenja algoritma/simulacije, za nekoliko karakterističnih certifikacijskih voznih ciklusa kao što su npr. NEDC, HWFET, US06, UDDS, WLTP i sl.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

4. svibnja 2023.

Datum predaje rada:

6. srpnja 2023.

Predviđeni datumi obrane:

17. – 21. srpnja 2023.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Branimir Škugor

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Ivica Garašić

## SADRŽAJ

POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
POPIS KRATICA .....	X
SAŽETAK.....	XI
SUMMARY .....	XII
1. UVOD .....	1
2. MODEL TOYOTE PRIUS .....	3
2.1. Princip rada pogona Toyote Prius .....	3
2.2. Modeliranje mehaničkog dijela pogona .....	4
2.3. Kvazi-statički model baterije .....	6
3. OPTIMIRANJE UPRAVLJAČKIH VARIJABLI POGONA .....	8
3.1. Dinamičko programiranje .....	8
3.2. RB+ECMS strategija upravljanja.....	9
3.2.1. Strategija upravljanja zasnovana na bazi pravila .....	9
3.2.2. Proširenje RB regulatora ECMS strategijom .....	9
3.3. Teorija optimalnog upravljanja i Pontryaginov princip minimuma.....	11
3.3.1. Nužni uvjeti optimalnog upravljanja bez ograničenja [6] .....	11
3.3.2. Optimalno upravljanje s ograničenjima vektora upravljanja .....	13
3.3.3. Primjena Pontryaginovog principa minimuma .....	14
4. REZULTATI.....	17
4.1. Certifikacijski vozni ciklusi .....	17
4.2. Simulink model i validacija Matlab modela .....	18
4.3. Usporedba PMP metode.....	21
4.3.1. Rezultati UDDS voznog ciklusa .....	21
4.3.2. Rezultati HWFET voznog ciklusa.....	26

---

4.3.3. Rezultati NEDC voznog ciklusa .....	30
4.4. Usporedba vremena izvođenja PMP strategije.....	35
5. ZAKLJUČAK .....	39
LITERATURA .....	41
Prilog A – Parametri pogona Toyote Prius .....	42
Prilog B – Primjer rješenja optimalnog upravljanja.....	43
B.1. Analitičko rješenje [6] .....	43
B.2. Rješenje PMP metode.....	46

## POPIS SLIKA

Slika 1. Blokovski dijagram pogona Toyote Prius [5].	3
Slika 2. Gubici praznog hoda i efikasnost transmisije.	5
Slika 3. Korisnost i krivulja maksimalnog momenta SUI motora.	5
Slika 4. Korisnost i krivulja maksimalnog momenta M/G1 stroja.	6
Slika 5. Korisnost i krivulja maksimalnog momenta M/G2 stroja.	6
Slika 6. Nadomjesni električni krug baterije (a) i karakteristika napona otvorenog kruga (b).	7
Slika 7. Zadana brzina vozila i moment pogonskih kotača UDDS voznog ciklusa.	17
Slika 8. Zadana brzina vozila i moment pogonskih kotača HWFET voznog ciklusa.	18
Slika 9. Zadana brzina vozila i moment pogonskih kotača NEDC voznog ciklusa.	18
Slika 10. Simulink model pogona korišten za generiranje rezultata dinamičkog programiranja.	19
Slika 11. Usporedba rezultata Matlab i Simulink modela (UDDS ciklus).	20
Slika 12. Usporedba rezultata Matlab i Simulink modela (HWFET ciklus).	20
Slika 13. Usporedba rezultata stanja napunjenosti PMP, DP i RB+ECMS metode (UDDS).	22
Slika 14. Usporedba rezultata potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode (UDDS).	22
Slika 15. Usporedba potrošnje goriva na UDDS ciklusu.	23
Slika 16. Usporedba PMP i DP rezultata za različite zadane konačne vrijednosti SoC-a (UDDS).	24
Slika 17. Radne točke motora dobivene PMP, DP i RB+ECMS metodom (UDDS).	25
Slika 18. Vremenski profili upravljačkih varijabli PMP-a i DP-a (UDDS).	25
Slika 19. Usporedba rezultata stanja napunjenosti PMP, DP i RB+ECMS metode (HWFET).	27
Slika 20. Usporedba rezultata potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode (HWFET).	27
Slika 21. Radne točke motora dobivene PMP, DP i RB+ECMS metodom (HWFET).	28
Slika 22. Vremenski profili upravljačkih varijabli PMP-a i DP-a (HWFET).	28
Slika 23. Usporedba PMP i DP rezultata za različite zadane konačne vrijednosti SoC-a (HWFET).	29
Slika 24. Usporedba potrošnje goriva na UDDS ciklusu.	30
Slika 25. Usporedba rezultata stanja napunjenosti PMP, DP i RB+ECMS metode (NEDC).	31
Slika 26. Usporedba rezultata potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode (NEDC).	32
Slika 27. Radne točke motora dobivene PMP, DP i RB+ECMS metodom (NEDC).	32
Slika 28. Vremenski profili upravljačkih varijabli PMP-a i DP-a (NEDC).	33



---

Slika 29. Usporedba snage baterije kod DP i PMP metode na NEDC ciklusu [800-1050 s]. .	34
Slika 30. Usporedba potrošnje goriva na NEDC ciklusu. ....	35
Slika 31. Dobivene vrijednosti $\lambda_0$ i SoC-a po iteracijama tijekom procesa traženja optimalne $\lambda$ binarnim pretraživanjem (UDDS). ....	36
Slika 32. Dobivene vrijednosti $\lambda_0$ i SoC-a po iteracijama tijekom procesa traženja optimalne $\lambda$ binarnim pretraživanjem (UDDS). ....	36
Slika 33. Vrijeme provođenja jedne iteracije PMP proračuna u ovisnost o broju upravljačkih varijabli za UDDS i HWFET ciklus. ....	37
Slika 34. Ovisnost konačne potrošnje goriva o rezoluciji upravljačkih varijabli (UDDS). ....	38
Slika 35. Ovisnost konačne potrošnje goriva o rezoluciji upravljačkih varijabli (HWFET). ..	38
Slika 36. Optimalno rješenje varijable stanja $x(t)$ jednostavnog dinamičkog modela. ....	45
Slika 37. Optimalno rješenje upravljačke varijable $u(t)$ jednostavnog dinamičkog modela. ...	45
Slika 38. Optimalno rješenje Lagrangeovog multiplikatora $\lambda$ jednostavnog dinamičkog modela. ....	46
Slika 39. Usporedba analitičkog rješenja i rješenja PMP metode na primjeru jednostavnog dinamičkog modela. ....	47

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Usporedba konačnih vrijednosti stanja napunjenosti i potrošnje PMP, DP i RB+ECMS metode za razne konačne vrijednosti SoC-a na UDDS ciklusu.....	26
Tablica 2. Usporedba konačnih vrijednosti stanja napunjenosti i potrošnje PMP, DP i RB+ECMS metode za razne konačne vrijednosti SoC-a na HWFET ciklusu.....	30
Tablica 3. Parametri pogona Toyote Prius .....	42

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A_{ek}$	g/Ws	Specifična potrošnja goriva
$A_f$	m <sup>2</sup>	Čeona površina vozila
$C_1, C_2$	-	Integracijske konstante
$C_d$	-	Koeficijent aerodinamičkog otpora
$k_1, k_2$	-	Koeficijenti načina rada električnih strojeva M/G1 i M/G2
$E_f$	J/kg	Specifična energija goriva
$F$	-	Podintegralna funkcija u ciljnoj funkciji
$\mathbf{f}$	-	Opća funkcija stanja sustava
$\mathbf{g}$	-	Vektor ograničenja upravljačkih varijabli
$g$	m/s <sup>2</sup>	Ubrzanje sile teže
$H$	-	Hamiltonian
$h$	-	Prijenosni omjer transmisije
$i$	A	Struja baterije
$i_o$	-	Prijenosni omjer izlazne redukcije pogona
$J$	-	Ciljna funkcija
$m_{bat}$	kg	Virtualna potrošena masa goriva iz baterije
$m_{eq}$	kg	Ekvivalentna masa potrošenog goriva
$m_f$	kg	Masa potrošenog goriva
$m_{fuel}$	kg	Stvarna masa potrošenog goriva
$m_v$	kg	Masa vozila
$n_{cell}$	-	Broj ćelija baterije
$P_{bat}$	W	Snaga baterije

---

$P_e$	W	Snage SUI motora
$P_{mg1}$	W	Snaga električnog stroja M/G1
$P_{mg2}$	W	Snaga električnog stroja M/G2
$P_0$	W	Gubici praznog hoda
$Q_{max}$	As	Nabojski kapacitet baterije
$r$	m	Efektivni polumjer gume
$R$	$\Omega$	Unutarnji otpor baterije
$R_{ic}$	$\Omega$	Unutarnji otpor baterije tokom punjenja
$R_{idc}$	$\Omega$	Unutarnji otpor baterije tokom pražnjenja
$R_o$	-	Faktor otpora kotrljanja
$SoC$	-	Stanje napunjenosti baterije
$SoC_f$	-	Konačna vrijednost SoC-a
$SoC_{max}$	-	Gornji limit na SoC baterije
$SoC_{min}$	-	Donji limit na SoC baterije
$t$	s	Vrijeme
$t_0$	s	Početno vrijeme
$t_f$	s	Konačno vrijeme
$\mathbf{u}$	-	Vektor upravljačkih varijabli
$U_{oc}$	V	Napon otvorenog kruga baterije
$u$	-	Upravljačka varijabla
$v_v$	m/s	Brzina vozila
$\mathbf{x}$	-	Vektor stanja
$x$	-	Varijabla stanja
$\mathbf{x}_0$	-	Početni vektor stanja

---

$\alpha$	°	Nagib ceste
$\eta_{bat}$	-	Korisnost baterije
$\eta_e$	-	Korisnost SUI motora
$\eta_{mg1}$	-	Korisnost M/G1 stroja
$\eta_{mg2}$	-	Korisnost M/G2 stroja
$\eta_{mt}$	-	Faktor efikasnosti pogona
$\lambda$	-	Vektor Lagrangeovih multiplikatora
$\lambda$	-	Lagrangeov multiplikator
$\rho_{air}$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća zraka
$\tau_{cd}$	Nm	Okretni moment pogonskog vratila
$\tau_e$	Nm	Okretni moment SUI motora
$\tau_{e,max}$	Nm	Gornji limit okretno momenta SUI motora
$\tau_{mg1}$	Nm	Okretni moment M/G1 električnog stroja
$\tau_{mg2}$	Nm	Okretni moment M/G2 električnog stroja
$\tau_{mg1,max}$	Nm	Gornji limit okretnog momenta M/G1 stroja
$\tau_{mg1,min}$	Nm	Donji limit okretnog momenta M/G1 stroja
$\tau_{mg2,max}$	Nm	Gornji limit okretnog momenta M/G1 stroja
$\tau_{mg2,min}$	Nm	Donji limit okretnog momenta M/G1 stroja
$\tau_{mt}$	Nm	Mehanički gubici transmisije
$\tau_R$	Nm	Okretni moment pogonskih kotača
$\phi$	-	Vektorska funkcija u ciljnoj funkciji
$\omega_{cd}$	rad/s	Brzina vrtnje pogonskog vratila
$\omega_e$	rad/s	Brzina vrtnje SUI motora
$\omega_{e,max}$	rad/s	Gornji limit brzine vrtnje SUI motora

$\omega_L$	rad/s	Brzina vrtnje pogonskog vratila kotača
$\omega_{mg1}$	rad/s	Brzina vrtnje M/G1 električnog stroja
$\omega_{mg2}$	rad/s	Brzina vrtnje M/G2 električnog stroja
$\omega_{mg1,max}$	rad/s	Gornji limit brzine vrtnje M/G1 stroja
$\omega_{mg1,min}$	rad/s	Donji limit brzine vrtnje M/G1 stroja
$\omega_{mg2,max}$	rad/s	Gornji limit brzine vrtnje M/G2 stroja
$\omega_{mg2,min}$	rad/s	Donji limit brzine vrtnje M/G2 stroja

**POPIS KRATICA**

DP	Dinamičko programiranje
ECMS	Strategija minimizacije ekvivalentne potrošnje goriva ( <i>engl. Equivalent Consumption Minimization Strategy</i> )
HEV	Hibridno električno vozilo
PMP	Pontryaginov princip minimuma
RB	Regulator zasnovan na bazi pravila ( <i>engl. Rule-based</i> )
SoC	Stanje napunjenosti ( <i>engl. State-of-Charge</i> )
SUI motor	Motor s unutarnjim izgaranjem

## SAŽETAK

Hibridna električna vozila (HEV) sadrže dva ili više izvora energije koji se mogu istovremeno koristiti kako bi se zadovoljili zahtjevi vozača u pogledu željene brzine vozila i okretnog momenta na kotačima. Zbog povećane kompleksnosti pogona, potrebno je pametno usmjeravati tokove snage kako bi se iskoristio njihov puni potencijal i u konačnici smanjila ukupna potrošnja goriva. Stoga je u ovom radu predstavljena metoda optimiranja upravljačkih varijabli HEV pogona zasnovana na teoriji optimalnog upravljanja i Pontryaginovom principu minimuma (PMP). U svrhu demonstracije predstavljene PMP metode iskorišten je postojeći kvazi-statički model HEV pogona putničkog vozila, te je temeljem simulacijskih rezultata provedena usporedna analiza spram algoritma dinamičkog programiranja (DP) koji za dani nelinearni optimizacijski problem garantira globalno optimalno rješenje te upravljačke strategije zasnovane na pravilima (eng. Rule Based, RB) i trenutnom optimiranju (eng. *Equivalent Consumption Minimization Strategy*, ECMS; RB+ECMS).

Ključne riječi: hibridna električna vozila, optimiranje, Pontryaginov princip minimuma, potrošnja goriva, stanje napunjenosti baterije



## **SUMMARY**

Hybrid electric vehicles (HEV) contain two or more energy sources which can be used simultaneously in order to meet the driver's demands in terms of desired vehicle speed and wheel torque. Due to increased powertrain complexity, it is necessary to manage the available power flows wisely in order to use their full potential and ultimately reduce total fuel consumption. Therefore, a control variable optimisation method of a hybrid electric vehicle powertrain based on the theory of optimal control and Pontryagin's minimum principle (PMP) has been presented. In order to demonstrate the presented PMP method, an existing quasi-static HEV powertrain model of a passenger vehicle was used and a simulation results based comparative analysis of PMP method, dynamic programming (DP) algorithm which for a given non-linear optimisation problem guarantees globally optimal solution, and a rule-based (RB) control strategy with instantaneous optimization of equivalent fuel consumption (ECMS; RB+ECMS) was conducted.

Key words: hybrid electric vehicles, optimization, Pontryagin's minimum principle, fuel consumption, battery state of charge

## 1. UVOD

U posljednjih nekoliko godina, ostvaren je značajan napredak u području hibridnih električnih vozila (HEV) i baterijskih električnih vozila (BEV) s ciljem da u što većem broju zamijene konvencionalna vozila u prometu. Glavni nedostatak konvencionalnih vozila koji se pogone isključivo motorom s unutarnjim izgaranjem (SUI, *engl. Internal Combustion Engine, ICE*) je zagađenje okoliša potrošnjom fosilnih goriva uz emisiju štetnih i stakleničkih plinova. Povećanjem električnih vozila u prometu, veći dio energije mogao bi se iskoristiti iz obnovljivih izvora energije i na taj način smanjiti zagađenje. Međutim, baterijska električna vozila koja bi se mogla u potpunosti pogoniti električnom energijom, trenutno nisu dovoljno razvijena kako bi u potpunosti zamijenila konvencionalna vozila. Njihov temeljni problem s kojim se suočavaju je visoka cijena i još uvijek nedovoljan domet u čistoj električnoj vožnji. S druge strane, hibridna električna vozila nalaze se negdje između konvencionalnih i baterijskih električnih. Njihova konfiguracija omogućava im pogon električnom energijom iz baterije putem električnih strojeva koji mogu raditi kao motori i kao generatori (M/G strojevi), a u isto vrijeme dio snage mogu dobiti iz SUI motora čija je primarna uloga povećanje dometa vozila. Samim time što HEV-ovi sadržavaju više pogonskih komponenti, mogu se ostvariti određene prednosti nad konvencionalnim vozilima. Na primjer, kod konvencionalnih vozila, SUI motor mora sam pokriti sve zahtjeve u vožnji, što znači da se njegova radna točka mora postaviti prema trenutnim zahtjevima brzine i momenta, što ne mora biti pogodno po pitanju potrošnje goriva. HEV može izbjeći tu situaciju kombiniranim korištenjem SUI motora i M/G stroja, tako da se SUI motor postavi u optimalnu radnu točku, a s M/G strojem se doda ili oduzme onoliko snage koliko je potrebno, što može rezultirati poboljšanom korisnošću cijeloga pogona. Na taj način, dodatno se poboljšava domet vozila i smanjuje potrošnja goriva. Mnoge strategije upravljanja hibridnim električnim vozilima bave se upravo time – ispunjavanjem zahtjeva za brzinom vozila i okretnim momentom kotača uz postavljanje pogona u radnu točku sa što većom ukupnom korisnošću kako bi se ostvarila što manja potrošnja.

Kako bi se u cijelosti iskoristile prednosti koje omogućava hibridna transmisija, potrebno je na optimalan način upravljati pogonom vozila. U tu svrhu, razvijene su mnoge strategije upravljanja od kojih svaka nudi određeni kompromis između optimalnosti rješenja i jednostavnosti izvođenja. Primjer jednostavnog i robusnog sustava upravljanja je regulator zasnovan na bazi pravila (*engl. Rule-based, RB*) gdje se na temelju zahtjeva za snagom vozača i trenutnog stanja napunjenosti baterije SUI motor postavlja u radno područje s višom korisnošću, a ostali električni strojevi se tada prilagođavaju motoru [1]. RB strategija računalno

je efikasna i lako ju je implementirati, ali nedostatak joj je podoptimalnost. Unaprjeđenje RB strategije je strategija upravljanja temeljena na minimizaciji ekvivalentne potrošnje goriva (*engl. Equivalent Consumption Minimisation Strategy, ECMS*) gdje se radne točke pogonskih komponenata ne odabiru samo prema optimalnim radnim točkama SUI motora, nego se u obzir uzimaju i korisnosti ostalih pogonskih komponenti [1]. ECMS općenito može dati bolje rezultate nego RB, pa se često te dvije metode kombiniraju kako bi se objedinile njihove prednosti. Rezultat toga je strategija upravljanja koja uzima u obzir korisnosti svih komponenata sustava kao i ECMS, ali uz robusnost koju osigurava jednostavan RB regulator [1].

Performanse strategija upravljanja koje su namijenjene izvođenju u realnom vremenu mogu se usporediti s referentnim mjerilom dobivenim optimiranjem upravljačkih varijabli pogona van realnog vremena korištenjem primjerice algoritma dinamičkog programiranja (DP) [2]. DP je algoritam koji za zadani (poznati) ciklus i nelinearni model HEV pogona daje globalno optimalno rješenje uz diskretizaciju vremena, upravljačkih varijabli i varijabli stanja modela. Zbog iznimne računalne složenosti i zahtjeva za poznavanje cjelokupnog voznog ciklusa unaprijed, DP se ne može koristiti za izračun rješenja upravljanja na vozilu u realnom vremenu, već se može koristiti samo kao alat za analizu i usporedbu van realnog vremena. Osim DP-a često se u svrhu optimiranja upravljačkih varijabli koristi i metoda zasnovana na Pontryaginovom principu minimuma (PMP) [3].

U ovom radu razmatra optimiranje upravljačkih varijabli van realnog vremena temeljeno na PMP-u i teoriji optimalnog upravljanja, gdje se upravljački signali određuju temeljem minimizacije Hamiltonian ciljne funkcije. Pritom je posebna pažnja posvećena usporednoj analizi s DP algoritmom te RB+ECMS strategijom.

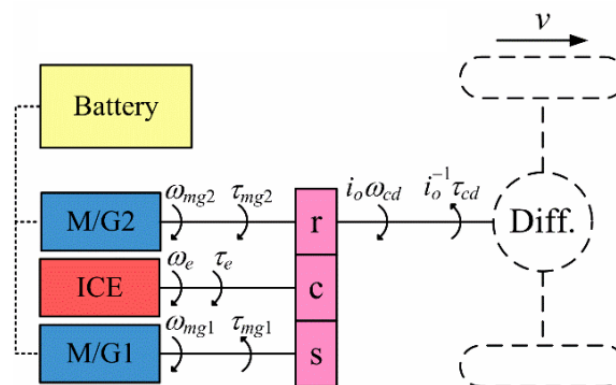
Diplomski rad je podijeljen i organiziran na sljedeći način. U drugom poglavlju, detaljno se opisuje model korištenog hibridnog pogona. U trećem poglavlju, opisuje se DP algoritam za optimiranje upravljačkih varijabli, RB+ECMS strategija upravljanja te teorija optimalnog upravljanja s naglaskom na PMP metodu. U nastavku poglavlja, pokazuje se primjena metode za optimiranje upravljačkih varijabli navedenog pogona. U četvrtom poglavlju, prikazani su rezultati PMP metode i uspoređeni s rezultatima dobivenim korištenjem drugih metoda. Konačna razmatranja i zaključak, dani su u posljednjem petom poglavlju.

## 2. MODEL TOYOTE PRIUS

U ovom poglavlju opisuje se model pogona vozila Toyota Prius koji je korišten u ovom radu. Svi podaci vezani uz model preuzeti su iz [1]. Parametri pogona dani su u tablici 3 u Prilogu A.

### 2.1. Princip rada pogona Toyote Prius

Slika 1 prikazuje blokovski dijagram serijsko-paralelne konfiguracije pogona Toyote Prius. Navedeni pogon sastoji se od SUI motora koji služi kao glavni pokretač pogona, dva električna stroja (M/G1 i M/G2) koji mogu raditi kao i u motorskom i u generatorskom načinu rada, baterije, diferencijala i planetarnog prijenosnika koji služi kao dijelilo snage. M/G1 stroj obično radi u generatorskom načinu rada i služi kako bi se radna točka SUI motora mogla postaviti u područje relativno visoke korisnosti. M/G2 s druge strane radi u motorskom načinu rada i pogoni vozilo tijekom normalnog načina vožnje, a prelazi u generatorski način rada tijekom regenerativnog kočenja. Električna energija dobivena regenerativnim kočenjem sprema se u bateriju iz koje se ta ista električna energija kasnije može iskoristiti za vožnju u čisto električnom načinu rada ili kao dodatak snage (*engl. Power boost*) u vožnji kada je potrebno svladati velika opterećenja po pitanju snage.



Slika 1. Blokovski dijagram pogona Toyote Prius [5].

Korišteni model pogona spada u vrstu kvazi-statičkih unazadnih modela (*engl. Backward model*), odnosno radi se o nekauzalnom modelu hibridnog pogona kojemu su upravljačke varijable brzina vrtnje (ili brzina vozila) i okretni moment pogonskih kotača, a izlazi su stanje napunjenosti baterije (*engl. State of Charge, SoC*) i potrošnja goriva. Sadrži SoC kao jedinu varijablu stanja te je opisan jednostavnim kinematskim jednadžbama (električne i mehaničke prijelazne pojave su zanemarene). Ovaj tip modela koristan je za analize tokova snage te razvoj i početno ispitivanje upravljačkih strategija pogona.

Upravljačke varijable navedenog modela pogona moguće je definirati na temelju zadanog profila brzine vozila za određeni vozni ciklus. Potrebni moment na pogonskim kotačima koji bi ostvario zadanu brzinu vozila uz savladavanje svih otpora vožnje može se izračunati koristeći jednadžbu uzdužne dinamike vozila [2]:

$$\tau_R = r[m_v \dot{v}_v + m_v g \sin \alpha + R_0 m_v \cos \alpha + 0.5 \rho_{air} C_d A_f v_v^2], \quad (1)$$

gdje je  $\tau_R$  okretni moment pogonskih kotača,  $r$  efektivni polumjer gume,  $m_v$  masa vozila,  $v_v$  brzina vozila,  $g$  ubrzanje sile teže,  $\alpha$  kut nagiba ceste,  $R_0$  faktor otpora kotrljanja,  $\rho_{air}$  gustoća zraka,  $C_d$  koeficijent aerodinamičkog otpora, a  $A_f$  čeona površina vozila. Prema jednadžbi (1), moment na pogonskim kotačima mora svladati otpore ubrzanja, uspona, kotrljanja te aerodinamičke otpore.

## 2.2. Modeliranje mehaničkog dijela pogona

Brzina vrtnje SUI motora te brzine vrtnje elektromotora M/G1 i M/G2 međusobno su povezane preko planetarnog prijenosnika (v. sliku 1) i opisuju se sljedećim kinematskim jednadžbama:

$$\omega_{mg2} = i_o \omega_{cd} = i_o \omega_L, \quad (2)$$

$$\omega_{mg1} = (h + 1) \omega_e - i_o \omega_L, \quad (3)$$

$$\tau_{mg1} = (h + 1)^{-1} \tau_e, \quad (4)$$

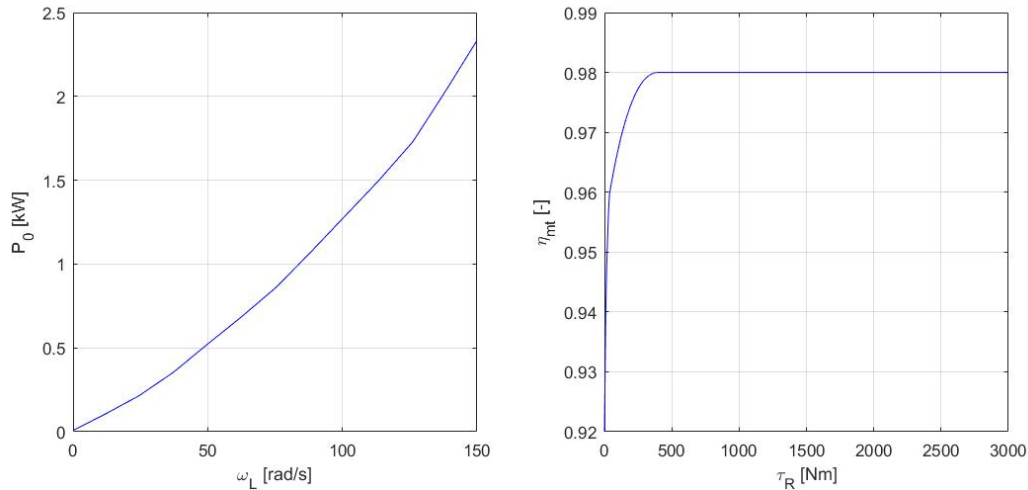
$$\tau_{mg2} = i_o^{-1} \tau_{cd} - h(h + 1)^{-1} \tau_e, \quad (5)$$

gdje su  $\omega_e$  i  $\tau_e$  brzina vrtnje i moment SUI motora,  $\omega_{mg1}$  i  $\tau_{mg1}$  brzina vrtnje i moment M/G1 stroja,  $\omega_{mg2}$  i  $\tau_{mg2}$  brzina vrtnje i moment M/G2 stroja,  $\omega_{cd}$  i  $\tau_{cd}$  brzina vrtnje i moment na izlazu transmisije,  $\omega_L$  je brzina vrtnje pogonskog vratila kotača,  $i_o$  je konačni prijenosni omjer pogonske osovine, a  $h$  je prijenosni omjer planetarnog prijenosnika.

Izlazni moment transmisije  $\tau_{cd}$  mora pokriti zahtjev za traženim momentom na pogonskim kotačima  $\tau_R$ , te mehaničke gubitke transmisije  $\tau_{mt}$  prema izrazu:

$$\tau_{cd} = \tau_R + \tau_{mt} = \frac{P_0(\omega_L)}{\omega_L} + \frac{\tau_R}{\eta_{mt}(\tau_R)}, \quad (6)$$

gdje su  $P_0(\omega_L)$  gubici praznog hoda, a  $\eta_{mt}(\tau_R)$  faktor efikasnosti ovisan o opterećenju. Ovisnosti gubitaka  $P_0$  o brzini vrtnje  $\omega_L$  te efikasnosti  $\eta_{mt}$  o momentu  $\tau_R$  prikazane su na slici 2.

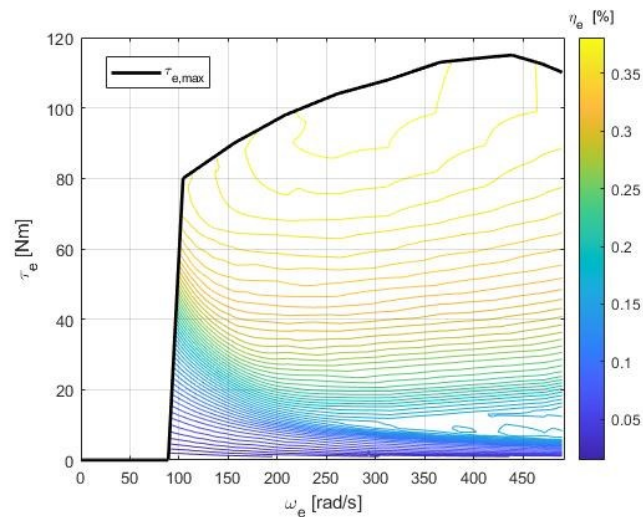


Slika 2. Gubici praznog hoda i efikasnost transmisije.

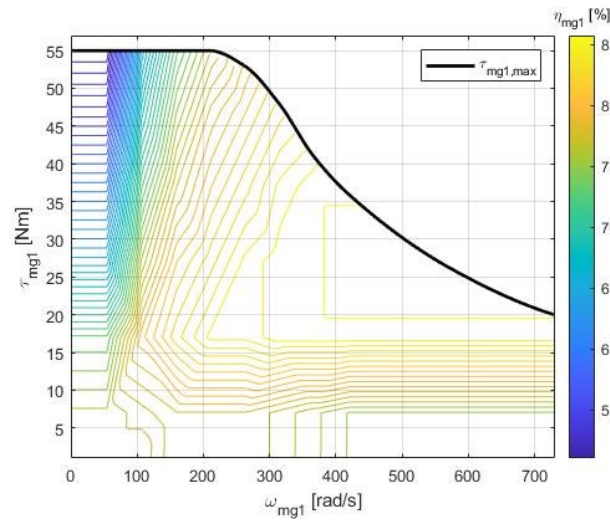
Radno područje svake pogonske komponente ograničeno je odgovarajućom krivuljom maksimalnog momenta, a svi gubici koji nastaju u pogonskim komponentama uzimaju se u obzir putem statičkih mapa korisnosti. Slike 3-5 prikazuju mape korisnosti motora i električnih strojeva, zajedno s krivuljama maksimalnog momenta pojedinog stroja. Iz mape korisnosti SUI motora, potrošnja goriva može se za zadanu radnu točku izračunati preko izraza:

$$\dot{m}_f(\omega_e, \tau_e) = \frac{\tau_e \omega_e}{E_f \eta_e(\omega_e, \tau_e)}, \quad (7)$$

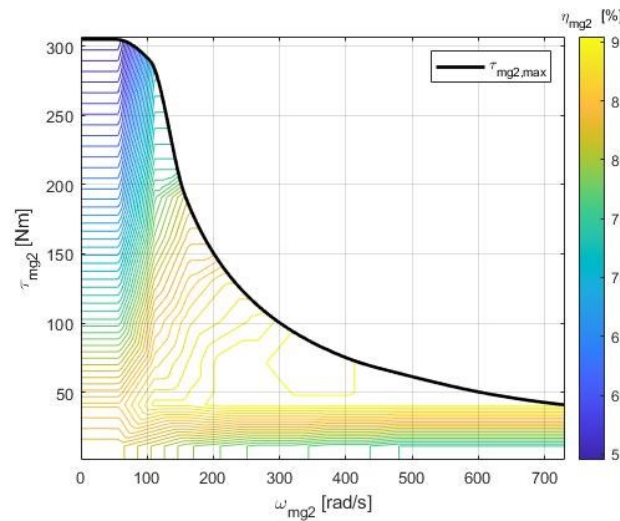
gdje je  $\eta_e$  korisnost, a  $E_f$  specifična energija goriva koja iznosi 41760 J/g.



Slika 3. Korisnost i krivulja maksimalnog momenta SUI motora.



Slika 4. Korisnost i krivulja maksimalnog momenta M/G1 stroja.



Slika 5. Korisnost i krivulja maksimalnog momenta M/G2 stroja.

### 2.3. Kvazi-statički model baterije

Baterija je opisana kvazi-statičkim modelom u obliku nadomjesnog električnog kruga koji se sastoji od nelinearnog napona otvorenog kruga  $U_{oc}$  i unutarnjeg otpora  $R$ . Vrijednost napona otvorenog kruga  $U_{oc}$  ovisi o SoC-u, dok vrijednost otpora  $R$  ovisi samo o smjeru struje baterije, odnosno ovisi o tome puni li se baterija ili prazni.

Snaga koja se dovodi ili odvodi iz baterije određena je snagama električnih strojeva M/G1 i M/G2 i može se izračunati prema formuli:

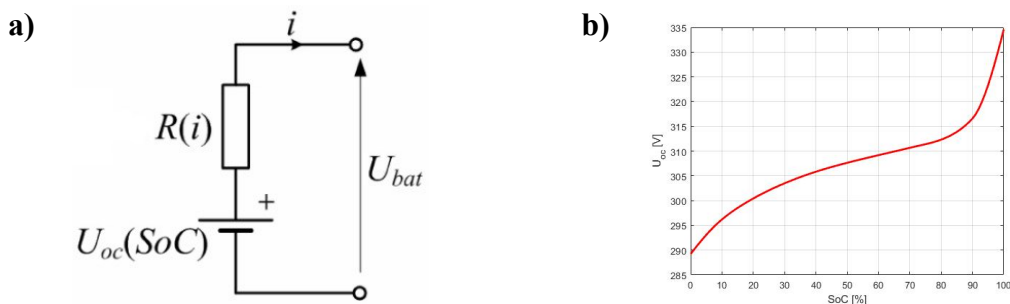
$$P_{bat} = P_{mg2} - P_{mg1} = \omega_{mg2} \tau_{mg2} \eta_{mg2}^{k_2} - \omega_{mg1} \tau_{mg1} \eta_{mg1}^{k_1}, \quad (8)$$

gdje je  $P_{bat}$  snaga baterije,  $P_{mg1}$  i  $P_{mg2}$  su snage električnih strojeva M/G1 odnosno M/G2,  $\eta_{mg1}$  i  $\eta_{mg2}$  su korisnosti elektromotora, dok se koeficijenti  $k_1$  i  $k_2$  postavljaju na vrijednost -1 za slučaj kada pojedini električni stroj radi kao motor te na vrijednost +1 kada radi kao generator. Predznak snage baterije pozitivan je za slučaj pražnjenja, a negativan za slučaj punjenja baterije. Negativan predznak ispred  $P_{mg1}$  u jednadžbi (8) ukazuje na to da M/G1 nominalno radi kao generator, tj. za pozitivan iznos snage  $P_{mg1}$  vraća snagu u bateriju i obrnuto, za razliku od M/G2 stroja koji za pozitivan iznos snage crpi snagu iz baterije.

Jednadžba stanja baterije može se za navedeni model baterije napisati kao:

$$\frac{dSoC}{dt} = \frac{-i}{Q_{max}} = \frac{\sqrt{U_{oc}^2(SoC) - 4R(i)P_{bat}} - U_{oc}(SoC)}{2Q_{max}R(i)}, \quad (9)$$

gdje je  $i$  struja,  $Q_{max}$  nabojski kapacitet,  $U_{oc}$  napon otvorenog kruga,  $R$  unutarnji otpor, te  $P_{bat}$  snaga baterije. Slika 6 prikazuje nadomjesni električni krug baterije i karakteristiku napona otvorenog kruga u ovisnosti o SoC-u.



Slika 6. Nadomjesni električni krug baterije (a) i karakteristika napona otvorenog kruga (b).



### 3. OPTIMIRANJE UPRAVLJAČKIH VARIJABLI POGONA

U ovom poglavlju opisat će se DP algoritam za optimiranje upravljačkih varijabli i RB+ECMS upravljačka strategija čiji će se rezultati usporediti s rezultatima optimiranja PMP metode.

#### 3.1. Dinamičko programiranje

Dinamičko programiranje je metoda matematičke optimizacije koja za određeni dinamički sustav generira globalno optimalno rješenje upravljačkih varijabli koje minimizira zadanu funkciju cilja uz istovremeno zadovoljavanje svih postojećih ograničenja vektora stanja i upravljačkog vektora. Kako bi se DP optimiziranje moglo provesti, optimizacijski problem mora se diskretizirati u vremenu te u varijablama stanja i upravljačkim varijablama. Pošto DP garantira globalnu optimalnost dobivenog rješenja, često se koristi u svrhu postavljanja referentnog mjerila za realistične strategije upravljanja HEV pogonima kako bi se stekao generalni uvid u najbolji način upravljanja pogonom u svrhu smanjenja potrošnje goriva. Služeći se tim saznanjima, postojeće realne strategije upravljanja mogu se prilagoditi prema rješenjima DP-a i na taj način poboljšati. Međutim, pošto se optimizacijski problem diskretizira, važno je napomenuti da je rješenje DP-a globalno optimalno, ali samo za danu rezoluciju vektora stanja i upravljačkih varijabli, odnosno moguće je ostvariti preciznija (točnija) rješenja ukoliko se poveća broj mogućih diskretnih vrijednosti u proračunu, ili ukoliko se poveća broj vremenski diskretnih trenutaka. Upravo to ograničenje predstavlja glavni nedostatak DP-a. Točnije, DP karakterizira velika računalna složenost što uzrokuje i dugo vrijeme izračuna, što ga za preveliki broj mogućih vrijednosti varijabli stanja i upravljačkih varijabli čini neupotrebljivim. Pošto vrijeme izvođenja DP algoritma raste eksponencijalno s brojem varijabli stanja i upravljačkih varijabli, čak i ako se ne upotrebljava pretjerano velika rezolucija varijabli, provođenje DP-a može trajati satima ili čak i danima, što ga u svakom slučaju ograničava na isključivo upotrebu van realnog vremena. Na primjer, vrijeme izvođenja DP algoritma za optimizacijski problem upravljanja pogonom Toyote Prius s rezolucijom varijable stanja SoC-a od 450 točaka, te rezolucijom upravljačkih varijabli brzine vrtnje i momenta motora od 150 i 550 točaka, trajalo je 38 sati za vozni ciklus diskretiziran sa 1183 vremenskih trenutaka [4]. Dodatni nedostatak koji onemogućava primjenu DP-a u stvarnoj vožnji je taj da je za generiranje rješenja potrebno poznavati cijeli profil voznog ciklusa unaprijed.

Algoritam dinamičkog programiranja provodi se u dvije faze. Prvu fazu čini računanje unatrag u vremenu, odnosno od posljednjeg vremenski diskretnog  $k$ -tog koraka, do prvog. Za svaku diskretnu vrijednost stanja, u svakom vremenskom koraku, traži se kombinacija upravljačkih

varijabli koja minimizira zadanu ciljnu funkciju te se optimalni upravljački vektor tada sprema u memoriju. Druga faza sastoji se u rekonstrukciji optimalnog rješenja od prvog do posljednjeg koraka koristeći zapamćene optimalne vrijednosti upravljačkih varijabli.

### 3.2. RB+ECMS strategija upravljanja

#### 3.2.1. Strategija upravljanja zasnovana na bazi pravila

Za slučaj upravljanja pogonom Toyote Prius, glavni cilj RB strategije je putem nadređenog sustava upravljanja zadati radnu točku SUI motoru u području relativno visoke korisnosti, koja se tada ostvaruje regulacijom brzine vrtnje M/G1 stroja i definiranjem momenta M/G2 stroja. Pošto je SUI motor pogonska komponenta s najnižom korisnošću, a električni strojevi M/G1 i M/G2 mogu raditi u širokom području s relativno visokom korisnošću, što boljim iskorištenjem SUI motora pokušava se ostvariti što manja ukupna potrošnja goriva. RB predstavlja upravljanje orijentirano prema SUI motoru, a sam zakon upravljanja je vrlo jednostavan. Ukoliko je traženi zahtjev za snagom malen, SUI motor se uopće ne koristi. U slučaju srednjih i visokih zahtjeva za snagom, SUI motor se postavlja što bliže krivulji maksimalnog momenta pošto to područje karakterizira relativno visoka korisnost. Zahtjev za snagom koja se traži iz SUI motora ovisi i o SoC-u baterije. Ukoliko se baterija previše prazni tada se povećava zahtjev za snagom iz SUI motora, dok s druge strane, ukoliko je baterija puna te u njoj ima viška naboja, zahtjev za snagom SUI motora se smanjuje kako bi se potaknulo korištenje električne energije. Iako je ovo rješenje jednostavno i upotrebljivo u stvarnoj vožnji, ono tipično odstupa od optimalnog i dodatna poboljšanja su moguća. U tu svrhu, RB strategija kombinira se s ECMS strategijom kako bi se postigli bolji rezultati.

#### 3.2.2. Proširenje RB regulatora ECMS strategijom

Cilj ECMS strategije nije više minimizacija isključivo potrošnje goriva, nego se u obzir uzima i električna energija potrošena iz baterije. Pošto ta dva izvora energije predstavljaju dvije različite fizikalne veličine, oni nisu izravno usporedivi te se te dvije veličine kombiniraju i zajedno razmatraju preko izraza za ekvivalentnu potrošnju goriva:

$$\dot{m}_{eq} = \dot{m}_{fuel} + \dot{m}_{bat}, \quad (10)$$

gdje je:

$\dot{m}_{eq}$  - ekvivalentna potrošnja goriva,

$\dot{m}_{fuel}$  – stvarna potrošnja goriva,

$\dot{m}_{bat}$  – virtualna potrošnja goriva iz baterije.

Ekvivalentna potrošnja goriva može se izračunati na temelju snage SUI motora i snage baterije prema jednadžbi:

$$\dot{m}_{eq} = \begin{cases} A_{ek}P_e + A_{ek}\eta_{bat}P_{bat}, & \text{za } P_{bat} < 0 \text{ (punjenje)} \\ A_{ek}P_e + \bar{A}_{ek}\eta_{bat}^{-1}P_{bat}, & \text{za } P_{bat} > 0 \text{ (pražnjenje)} \end{cases}, \quad (11)$$

gdje je  $\eta_{bat}$  korisnost električne energije baterije, a  $A_{ek}$  specifična potrošnja goriva koja se računa prema izrazu:

$$A_{ek} = \frac{m_f(\omega_e, \tau_e)}{3.6 \cdot 10^6} \left[ \frac{g}{Ws} \right]. \quad (12)$$

$\bar{A}_{ek}$  je srednja specifična potrošnja goriva SUI motora na krivulji maksimalnog okretnog momenta.

Kod ECMS metode, odabire se ona radna točka SUI motora koja minimizira ekvivalentnu potrošnju gorivu. U općem slučaju, ta radna točka ne podudara se sa optimalnom radnom točkom motora. Razlog tome je što se u ovom slučaju u obzir uzimaju i korisnosti električnih strojeva te se viša ukupna korisnost pogona može ostvariti pomicanjem SUI motora u malo lošije radno područje ako to znači da će električni strojevi raditi s višom korisnosti. U nastavku će se opisati tri varijante ECMS strategije koje se redom označavaju:

- i.) 1D-ECMSa,
- ii.) 1D-ECMSb,
- iii.) 2D-ECMS.

Ove varijante se razlikuju u području pretraživanja optimalne radne točke. 1D-ECMSa strategija traži radnu točku koja minimizira ekvivalentnu potrošnju goriva na krivulji maksimalnog momenta motora, dok 1D-ECMSb pretražuje krivulju konstantne snage motora i na njoj odabire optimalnu točku u pogledu ekvivalentne potrošnje. Konačno, 2D-ECMS strategija traži optimalnu radnu točku na cijelom dostupnom radnom području motora.

Poboljšanja se mogu ostvariti kombinacijom RB i ECMS strategije. Korištenjem isključivo ECMS strategije ne može se garantirati održivost SoC-a baterije. U tu svrhu, ECMS se kombinira s RB regulatorom, koji također u sebi sadržava i regulator SoC-a. Konačna RB+ECMS strategija upravljanja kombinira 1D-ECMSb i 2D-ECMS strategije na sljedeći način. Ukoliko je vrijednost SoC-a blizu ciljne, nije potrebno dodatno puniti ni prazniti

bateriju, pa se optimalna radna točka određuje prema 2D-ECMS strategiji. Ukoliko postoji odstupanje SoC-a od ciljane vrijednosti, RB regulator SoC-a može tražiti određenu snagu od SUI motora kako bi se SoC vratio na ciljanu vrijednost, a tada 1D-ECMSb daje optimalnu radnu točku za traženu snagu SUI motora.

### 3.3. Teorija optimalnog upravljanja i Pontryaginov princip minimuma

Način na koji se može upravljati nekim sustavom nije jednoznačan, nego postoji više mogućih rješenja upravljačkih signala kojim se može na različite načine djelovati na određeni sustav. Cilj optimalnog upravljanja je pronaći onaj upravljački signal koji, po nekom zadanom kriteriju, najbolje djeluje na zadani sustav. U kontekstu upravljanja HEV-ovima, optimizacijski kriterij često je vezan uz postizanje što manje potrošnje goriva. Međutim, dobivanje analitičkog rješenja upravljanja pogonom primjenom teorije optimalnog upravljanja nije izvedivo pošto HEV predstavlja prekompleksan sustav, te bi analitički izrazi optimalnog upravljačkog signala bili prekomplikirani za izvođenje i rješavanje. Međutim, primjenom Pontryaginovog principa minimuma moguće je savladati određene nedostatke i ograničenja optimalnog upravljanja i u konačnici dobiti rješenje upravljačke varijable. U nastavku poglavlja izvest će se ključne jednadžbe optimalnog upravljanja te će se Pontryaginov princip minimuma objasniti i primijeniti za optimalno upravljanje pogonom Toyote Prius.

#### 3.3.1. Nužni uvjeti optimalnog upravljanja bez ograničenja [6]

Uzmimo u obzir matematički model sustava opisan sljedećim nelinearnim diferencijalnim jednadžbama i početnim uvjetima:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (13)$$

gdje je  $\mathbf{x}(t)$   $n$ -dimenzionalni vektor stanja,  $\mathbf{u}(t)$   $m$ -dimenzionalni vektor upravljanja,  $t_0$  početno vrijeme, a  $t_f$  konačno vrijeme. Problem optimalnog upravljanja svodi se na pronalaženje upravljačkog signala  $\mathbf{u}(t)$  koji minimizira zadanu ciljnu funkciju:

$$J = \phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \quad (14)$$

uz zadovoljavanje sustava jednadžbi (13), gdje je  $\phi$  vektorska funkcija. Primjenom metode Lagrangeovih multiplikatora  $\lambda$ , sustav jednadžbi (13) može se dodati u funkciju cilja (14):

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \{F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}(t)]\} dt. \quad (15)$$

Potom se definira Hamiltonian funkcija:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (16)$$

koja se uvrštava u izraz (15):

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] dt. \quad (17)$$

Parcijalnom integracijom nove funkcije cilja (17) slijedi:

$$J = \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)] dt. \quad (18)$$

Prva varijacija ciljne funkcije u ovisnosti o varijaciji vektora stanja i vektora upravljanja iznosi:

$$\delta J = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda} \right) \cdot \delta \mathbf{x}|_{t=t_f} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x}|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \right] dt. \quad (19)$$

Početno stanje je zadano te iz toga slijedi:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \implies \delta \mathbf{x}(t_0) = 0. \quad (20)$$

Nužan uvjet optimalnosti navodi da prva varijacija ciljne funkcije mora biti jednaka nuli za proizvoljne varijacije vektora stanja i vektora upravljanja. Na temelju toga dobivamo izraze za nužne uvjete optimalnosti:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}, \quad (23)$$

odnosno, izrazi koji moraju biti zadovoljeni kako bi određeni upravljački vektor  $\mathbf{u}(t)$  predstavljao stacionarnu vrijednost ciljne funkcije su sljedeći:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (24)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad (26)$$

uz zadane početne i rubne uvjete:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}. \quad (27)$$

Prethodno izvedeni izrazi mogu se napisati u drugom, kompaktnijem, obliku korištenjem Hamiltonovih kanonskih jednadžbi. Za Hamiltonian definiran kao u izrazu (16), nužni uvjeti optimalnosti mogu se zapisati u sljedećem obliku:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad (28)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (30)$$

### 3.3.2. Optimalno upravljanje s ograničenjima vektora upravljanja

Prethodno izvedeni izrazi vrijede za slučajeve optimalnog upravljanja kada nema ograničenja na vektor upravljanja. Osim toga, pretpostavilo se da su rješenja optimalnih vektora stanja i upravljačkih signala neprekinuta na intervalu  $t_0 \leq t \leq t_f$ . Ukoliko postoje zadana ograničenja na vektor upravljanja opisana funkcijom:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}(t), t) \geq 0, \quad (31)$$

tada više nije moguće odrediti optimalno rješenje koristeći izraz:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad (32)$$

pošto je moguće da rješenje dobiveno na temelju izraza (30) ne zadovoljava uvjete postavljene u (31). Nadalje, postoji mogućnost da se pomoću izraza (32) ne može odrediti optimalno

rješenje upravljačkog signala, čak i u slučaju kada ne postoje ograničenja (31). Jedan od slučajeva je problem singularnog optimalnog upravljanja, odnosno slučaja kada je Hamiltonian u linearnoj ovisnosti s upravljačkim signalom, te se tada parcijalnom derivacijom ne pojavljuju komponente upravljačkog signala  $\mathbf{u}$  u konačnom izrazu i nije moguće pronaći rješenje. Drugi mogući slučaj je da izraz (32) ima više rješenja te tada nije definirano koje rješenje treba uzeti kao optimalno. Navedeni problemi mogu se riješiti koristeći Pontryaginov princip minimuma (odnosno maksimuma), koji glasi [6]:

*U slučajevima svih singularnih i neregularnih situacija, uključujući i ograničenja vektora upravljanja, izbor komponenti vektora upravljanja mora biti takav da minimizira (odnosno maksimizira) vrijednost Hamiltoniana:*

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (33)$$

uz to da i dalje vrijede izrazi (28) i (29), uz odgovarajuće početne i rubne uvjete (14). Prema Pontryaginovom principu minimuma, optimalno rješenje upravljačkog signala ne mora biti sačinjeno od neprekidnih vremenskih funkcija upravljačkog signala, već se optimalni upravljački signal može sastojati od prekidnih vremenskih funkcija definiranih u konačnom broju vremenskih trenutaka unutar zadanog vremenskog intervala  $t_0 \leq t \leq t_f$ .

Postupak primjene teorije optimalnog upravljanja ilustriran je na jednostavnom dinamičkom modelu i dan u Prilogu B.

### 3.3.3. Primjena Pontryaginovog principa minimuma

Koristeći prethodno izvedene izraze, metoda optimiranja zasnovana na Pontryaginovom principu minimuma može se primijeniti za određivanje upravljačkih varijabli pogona Toyote Prius. Cilj je pronaći upravljački vektor koji minimizira potrošnju goriva za zadani vozni ciklus definiran na vremenskom intervalu  $0 \leq t \leq t_f$ . Ciljna funkcija koja se minimizira je tada:

$$J = \int_0^{t_f} \dot{m}_f(\mathbf{u}, t) dt. \quad (34)$$

Upravljački vektor  $\mathbf{u}$  čine brzina vrtnje i okretni moment SUI motora:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \omega_e(t) \\ \tau_e(t) \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Vektor stanja sadrži jednu varijablu, a to je stanje napunjenosti, pa prema izrazu (13) vrijedi:

$$\dot{x} = S\dot{C} = f(\text{SoC}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (36)$$

gdje funkcija  $f$  definira dinamiku pogona na temelju jednadžbi modela (9) opisanog u poglavlju 2.3.

Upravljačka strategija mora zadovoljavati fizička ograničenja pogona u pogledu minimalnih i maksimalnih ostvarivih brzina vrtnji i momenata svih pogonskih komponenata, te dodatno ograničenje vezano uz stanje napunjenosti baterije. Stoga moraju biti zadovoljeni izrazi:

$$0 \leq \omega_e \leq \omega_{e,\max}, \quad (37)$$

$$0 \leq \tau_e \leq \tau_{e,\max}, \quad (38)$$

$$\omega_{mg1,\min} \leq \omega_{mg1} \leq \omega_{mg1,\max}, \quad (39)$$

$$\tau_{mg1,\min} \leq \tau_{mg1} \leq \tau_{mg1,\max}, \quad (40)$$

$$\omega_{mg2,\min} \leq \omega_{mg2} \leq \omega_{mg2,\max}, \quad (41)$$

$$\tau_{mg2,\min} \leq \tau_{mg2} \leq \tau_{mg2,\max}, \quad (42)$$

$$\text{SoC}_{\min} \leq \text{SoC} \leq \text{SoC}_{\max}. \quad (43)$$

Ograničenja brzina i momenata određena su na temelju statičkih karakteristika pogonskih komponenata, dok je ograničenje na SoC postavljeno kako bi se spriječilo postizanje preniskih i previsokih vrijednosti SoC-a pošto tada može doći do trajnog oštećenja baterije. Vrijednosti su postavljene tako da vrijedi  $\text{SoC}_{\min} = 0.3$  i  $\text{SoC}_{\max} = 0.9$ . Prema izrazu (16), definira se Hamiltonian:

$$H = \dot{m}_f(\mathbf{u}, t) + \lambda S\dot{C}. \quad (44)$$

Prema jednadžbi (29) vrijedi:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \text{SoC}}, \quad (45)$$

što se nakon parcijalnog deriviranja može zapisati kao:

$$\dot{\lambda} = -\lambda \frac{\partial S\dot{C}}{\partial \text{SoC}}. \quad (46)$$

Parcijalna derivacija u izrazu (46) može se odrediti deriviranjem izraza (9) po SoC-u, čime se dobiva izraz [3]:



$$\frac{\partial \dot{S}oC}{\partial SoC} = \frac{\frac{2U_{oc}(SoC) \frac{\partial U_{oc}(SoC)}{\partial SoC} - 4P_{bat} \frac{\partial R(i)}{\partial SoC}}{2\sqrt{U_{oc}^2(SoC) - 4P_{bat}R(i)}} - \frac{\partial U_{oc}(SoC)}{\partial SoC}}{2Q_{max}R(i)} - \frac{(\sqrt{U_{oc}^2(SoC) - 4P_{bat}R(i)} - U_{oc}(SoC)) \frac{\partial R(i)}{\partial SoC}}{2Q_{max}R^2(i)}. \quad (47)$$

Pošto u razmatranom modelu unutarnji otpor baterije nije funkcija SoC-a, nego se mijenja jedino ovisno o smjeru struje, vrijedi:

$$\frac{\partial R(i)}{\partial SoC} = 0, \quad (48)$$

na temelju čega se izraz (47) može pojednostaviti i zapisati u konačnom obliku kao:

$$\frac{\partial \dot{S}oC}{\partial SoC} = \frac{\frac{\partial U_{oc}(SoC)}{\partial SoC} \left( \frac{U_{oc}(SoC)}{\sqrt{U_{oc}^2(SoC) - 4P_{bat}R(i)}} - 1 \right)}{2Q_{max}R(i)}. \quad (49)$$

Prema Pontryaginovom principu minimuma, optimalne upravljačke varijable su one koje u svakom vremenskom koraku ostvaruju najmanju vrijednost Hamiltoniana (44), poštujući pritom zadana ograničenja (37)-(43) i jednadžbu stanja (36). Kako bi se u svakom koraku pronašlo optimalno rješenje, vrijednosti upravljačkih varijabli se diskretiziraju te se za svaku moguću kombinaciju izračunava Hamiltonian. Na kraju se kao optimalna sačuva ona kombinacija za koju se pokazuje da postiže minimalnu vrijednost Hamiltoniana. U slučaju da određena kombinacija upravljačkih varijabli uzrokuje kršenje zadanih ograničenja navedenih u izrazima (37)-(43), vrijednost Hamiltoniana se automatski postavlja na izrazito visoke vrijednosti koje nisu ostvarive na druge načine, te se na taj način sprječava da ta kombinacija upravljačkih varijabli rezultira minimalnim Hamiltonianom i bude odabrana. Treba napomenuti kako u PMP metodi početan iznos Lagrangeovog multiplikatora  $\lambda$  nije poznat, te je njegovu početnu vrijednost potrebno odrediti iterativnim postupkom na sljedeći način. Prvo se odabere proizvoljan iznos  $\lambda_0$  na početku simulacije te se provede PMP metoda na cijelom vremenskom horizontu. Dobiveno konačno rješenje SoC-a poprimit će tada određenu vrijednost koja se u općem slučaju neće podudarati sa ciljnim konačnim iznosom, odnosno zadanim rubnim uvjetom. U tom slučaju, zadaje se nova početna vrijednost Lagrangeovog multiplikatora  $\lambda$  te se navedeni postupak PMP metode ponovno provodi. Taj iterativni postupak provodi se sve dok  $\lambda_0$  ne konvergira na iznos uslijed kojeg će konačni SoC biti jednak ciljnom.

## 4. REZULTATI

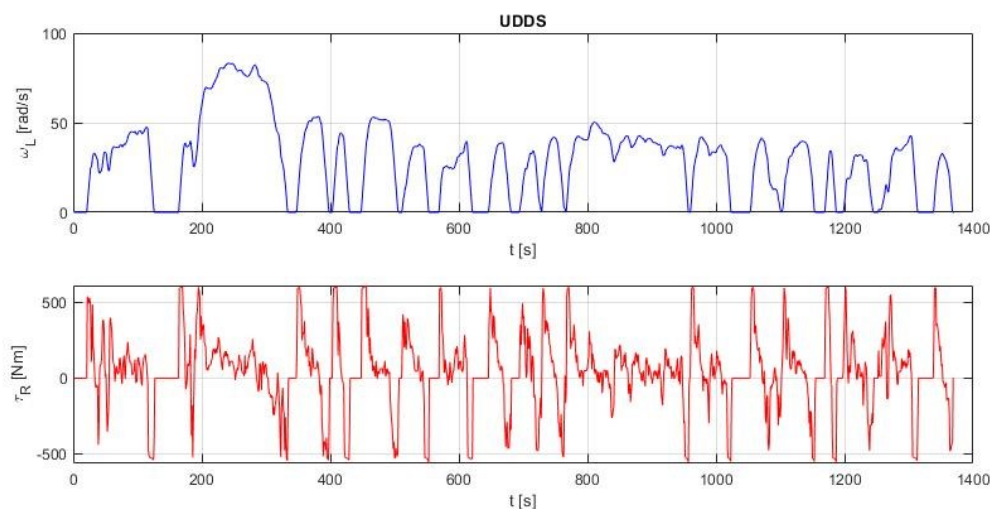
U ovom dijelu rada prikazat će se i usporediti rezultati dobiveni PMP metodom s rezultatima DP-a i ECMS strategije, odnosno konačne strategije koja kombinira RB i 1D-ECMSb te 2D-ECMS strategiju, za opisani model pogona Toyote Prius.

### 4.1. Certifikacijski vozni ciklusi

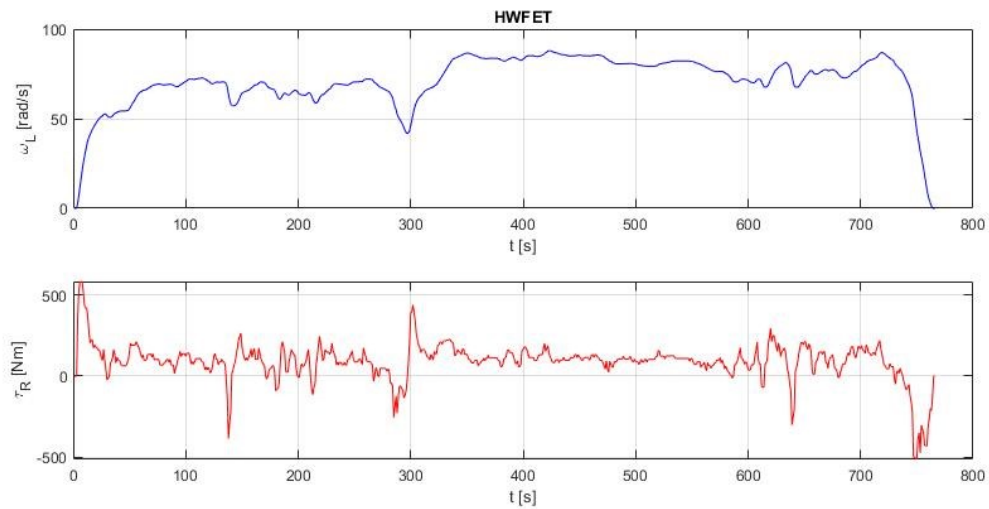
Rezultati su dobiveni provođenjem simulacija na certificiranim voznim ciklusima. Vozni ciklusi definirani su profilom brzine vozila u zadanim vremenskim trenucima, koji je u ovom slučaju bio definiran svake sekunde. Definirani profil brzine vozila koristi se kao upravljačka varijabla u modelu pogona koja se mora ostvariti. Nadalje, na temelju zadanog profila brzine za određeni ciklus, prema izrazu (1) određuje se i druga upravljačka varijabla koju model pogona mora zadovoljiti, a to je moment na pogonskim kotačima. Za generiranje i analizu rezultata u ovom radu, koristila su se tri vozna ciklusa:

1. UDDS (*engl. Urban Dynamometer Driving Schedule*),
2. HWFET (*engl. Highway Fuel Economy Test*) i
3. NEDC (*engl. New European Driving Cycle*).

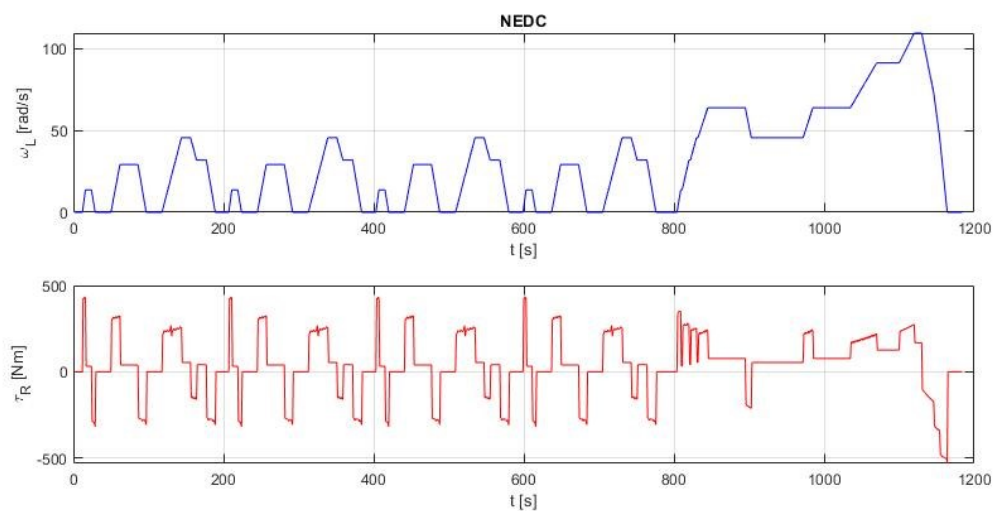
UDDS tipičan je vozni ciklus kojim se testira potrošnja goriva ili ostvariv domet električnih vozila, a simulira gradske uvjete vožnje. S druge strane, HWFET vozni ciklus predstavlja uvjete u vožnji tipične za autocestu ili brzu cestu, dok je NEDC napravljen za procjenu emisija plinova vozila. Definirani profili brzina vozila, zajedno sa izračunatim potrebnim momentom na pogonskim kotačima, prikazani su na slikama 7, 8 i 9 za sva tri vozna ciklusa.



Slika 7. Zadana brzina vozila i moment pogonskih kotača UDDS voznog ciklusa.



Slika 8. Zadana brzina vozila i moment pogonskih kotača HWFET voznog ciklusa.

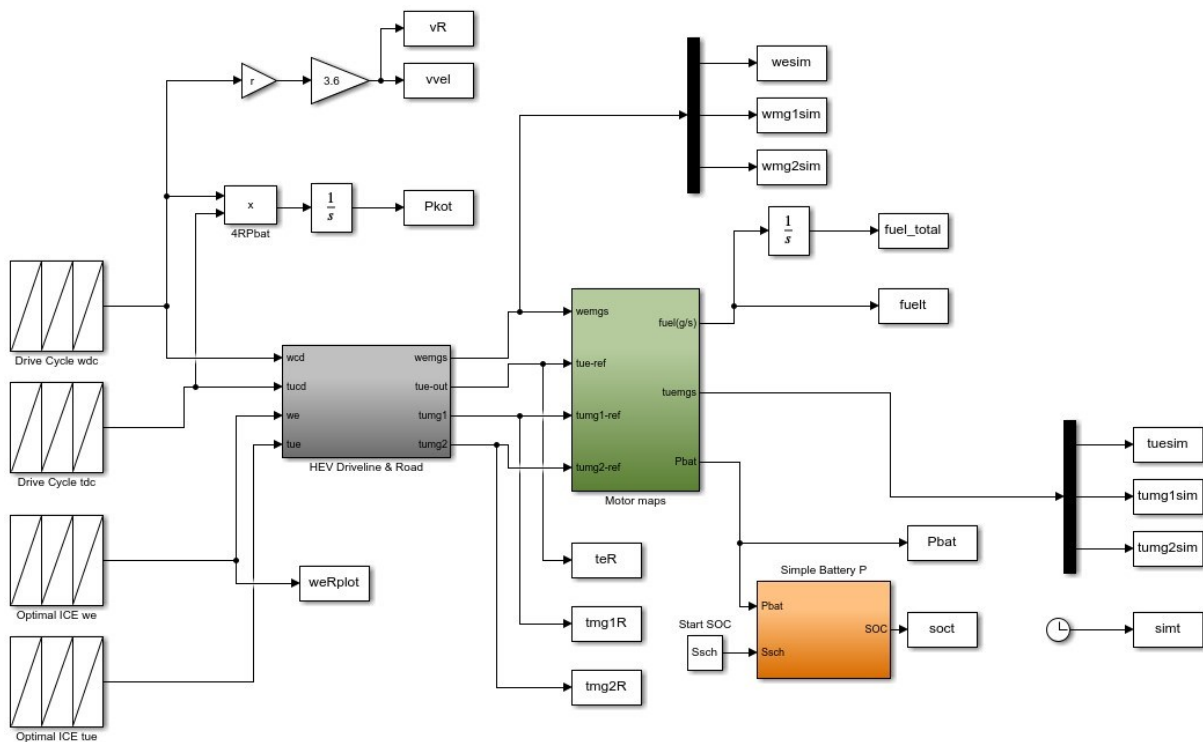


Slika 9. Zadana brzina vozila i moment pogonskih kotača NEDC voznog ciklusa.

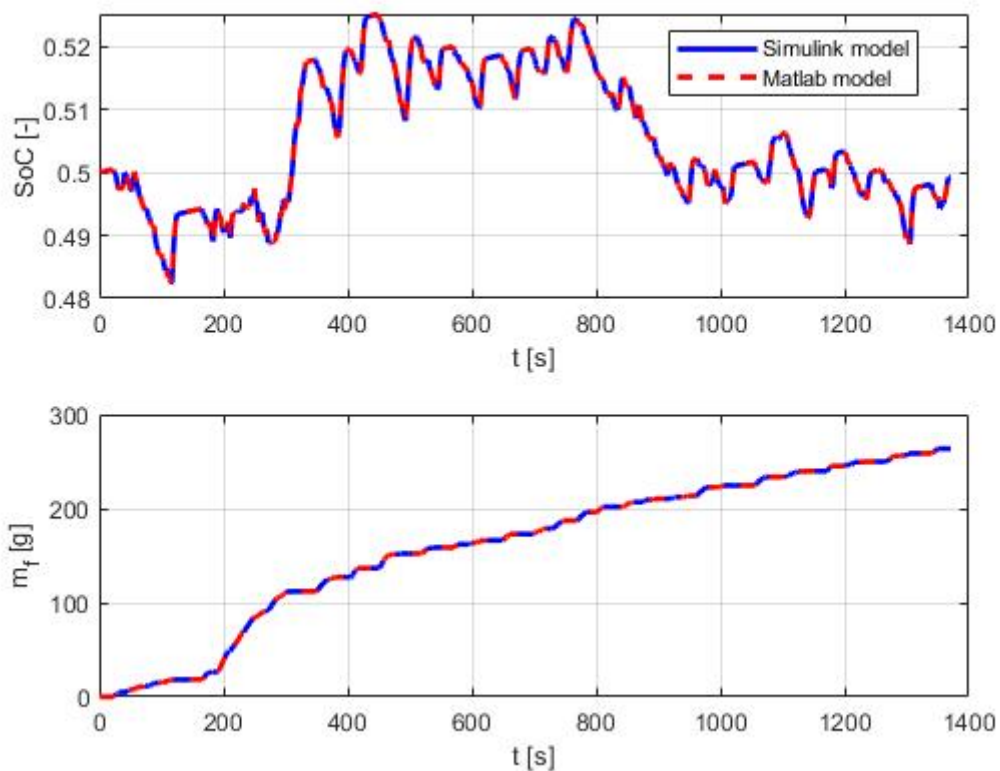
## 4.2. Simulink model i validacija Matlab modela

Rezultati PMP metode dobiveni su korištenjem modela implementiranom u obliku Matlab skripte, u smislu da su sve korištene jednadžbe modela pogona te svi nužni proračuni za provođenje PMP metode (izračun i minimizacija Hamiltoniana, određivanje  $\lambda_0$ , itd.) definirani i riješeni putem Matlab koda. S druge strane, algoritam DP-a te ECMS strategija nisu izrađeni u ovom radu, nego se njihova već gotova rješenja u ovom radu koriste isključivo radi usporedne

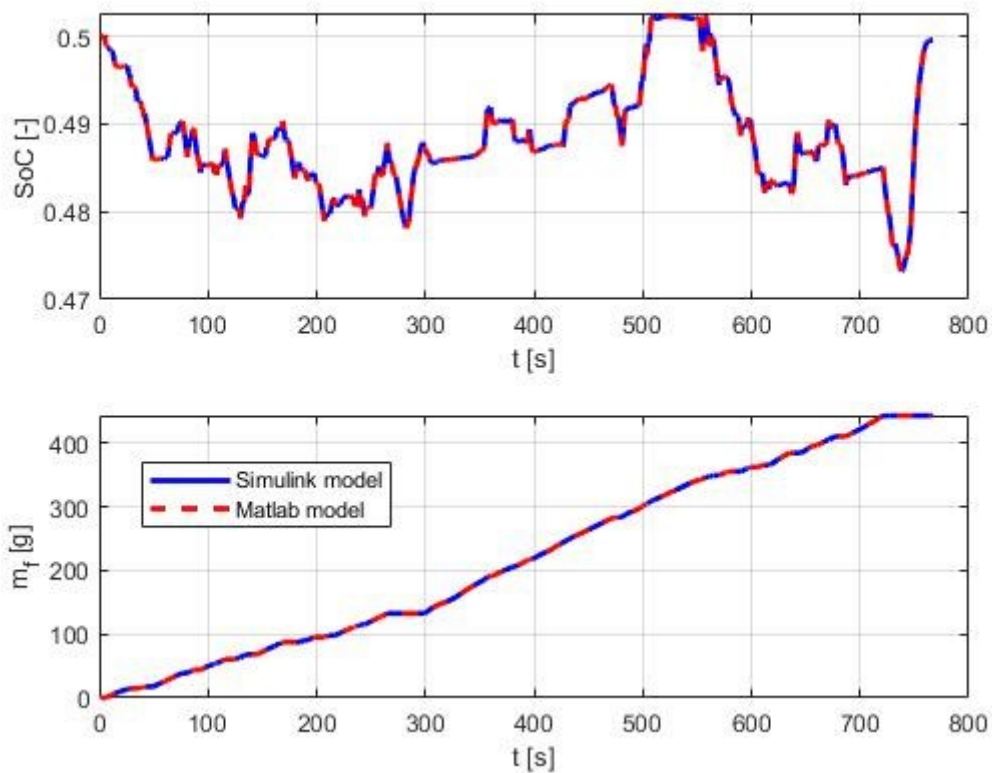
analize rezultata. Međutim, rezultati DP-a i ECMS strategije generirani su korištenjem postojećeg Simulink modela izrađenom prema istom modelu pogona Toyote Prius. Simulink model pogona koji se koristio za generiranje rezultata dinamičkog programiranja iz prethodno određenih upravljačkih varijabli, prikazan je na slici 10. Kako bi se rezultati dobiveni PMP metodom i Matlab modelom u obliku koda mogli usporediti s rezultatima DP-a i EMCS-a iz Simulink modela, korišteni modeli moraju biti međusobno ekvivalentni. Slike 11 i 12 prikazuju usporedbu rezultata Matlab koda i Simulink modela. Prikazani su rezultati SoC-a i potrošnje goriva dobiveni PMP metodom na UDDS i HWFET voznim ciklusima. Plava puna linija predstavlja rezultate Simulink modela, a crvena isprekidana rezultate Matlab skripte. Obje simulacije provedene su za isti set upravljačkih varijabli. Vidljivo je da se dobiveni rezultati podudaraju, odnosno da Matlab skripta i Simulink model daju iste rezultate za iste upravljačke varijable, iz čega slijedi da su ta dva modela jednoznačna i da je zadani model pogona na isti način modeliran u oba slučaja. Prema tome, moguća je izravna usporedba rezultata PMP metode te rezultata DP i ECMS strategije.



Slika 10. Simulink model pogona korišten za generiranje rezultata dinamičkog programiranja.



Slika 11. Usporedba rezultata Matlab i Simulink modela (UDDS ciklus).



Slika 12. Usporedba rezultata Matlab i Simulink modela (HWFET ciklus).

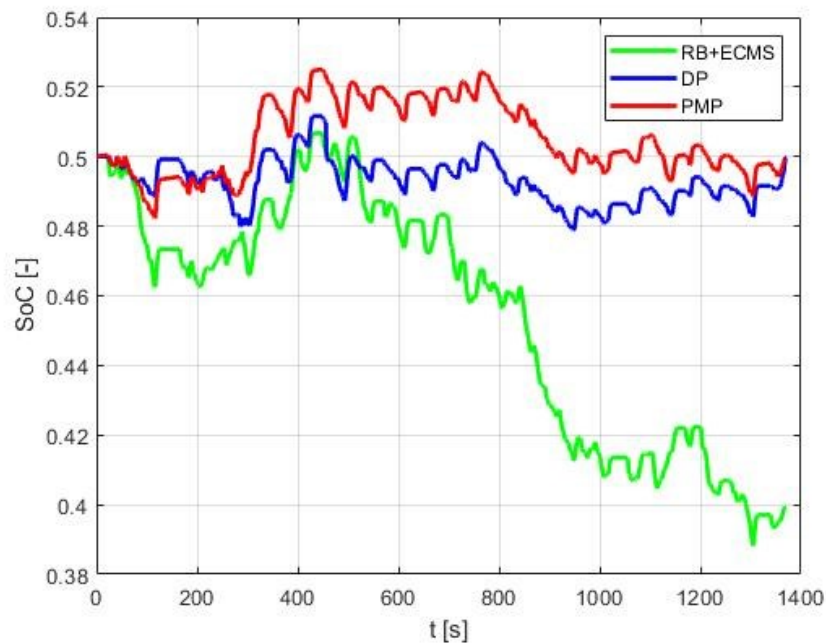
### 4.3. Usporedba PMP metode

Provedena je usporedba PMP metode te DP-a i ECMS strategije simulacijama na tri prethodno navedena ciklusa. Početni iznos SoC-a u svakom ciklusu bio je postavljen na 0.5, s tim da je konačno ciljano stanje također bilo postavljeno na 0.5. Kako bi rješenje PMP metode na kraju ciklusa postiglo vrijednost SoC-a blizu 0.5, provelo se određivanje optimalnog iznosa  $\lambda_0$  prema prethodno opisanom iterativnom postupku, te se uzela ona konačna vrijednost  $\lambda_0$  za koji je konačni SoC postigao vrijednost unutar intervala [0.4999, 0.5001]. Rezolucija upravljačkih varijabli brzine vrtnje i momenta motora bila je postavljena na 50x50 točaka u PMP metodi, dok je u slučaju DP-a rezolucija brzine vrtnje motora bila 150 točaka, momenta motora 550, ali je kod DP-a postojala i rezolucija varijable stanja, odnosno SoC-a u iznosu od 450 točaka [4].

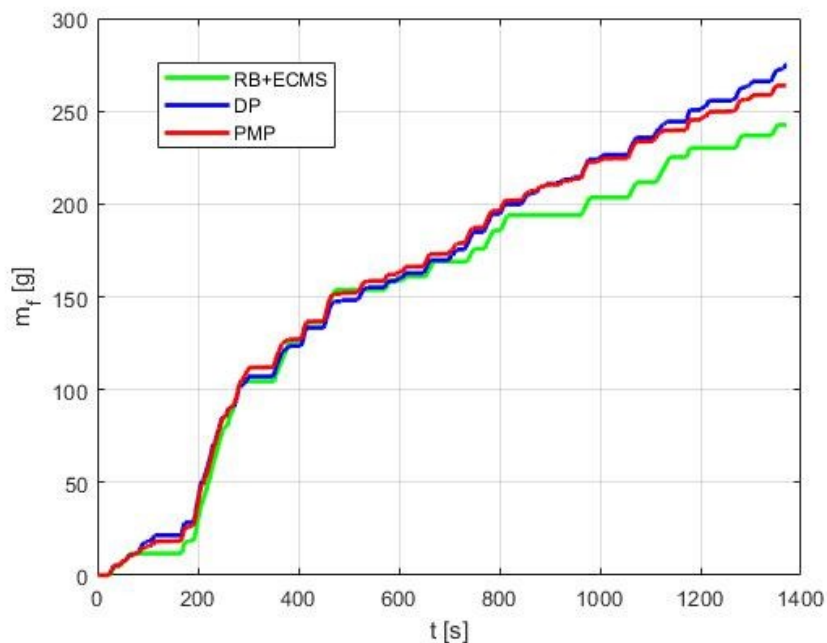
#### 4.3.1. Rezultati UDSS voznog ciklusa

Slike 13 i 14 prikazuju rezultate SoC-a i potrošnje goriva dobivene PMP metodom, DP-om i RB+ECMS strategijom na UDSS voznom ciklusu, s početnom i konačnom vrijednosti SoC-a u iznosu od 50 %. Crvena linija prikazuje rezultate PMP metode, dok su DP rezultati prikazanim plavom, a RB+ECMS rezultati zelenom linijom. Iz rezultata SoC-a vidljivo je da PMP metoda i DP završavaju na praktički istoj zadanoj konačnoj vrijednosti SoC-a dok RB+ECMS metoda kroz veći dio voznog ciklusa pretjerano troši električnu energiju te na kraju ciklusa ne postiže istu vrijednost kao i ostale dvije metode. Razlog tome je taj što je DP-u direktno zadano konačno stanje te su sve upravljačke varijable odabrane kako bi se u konačnici to stanje i ostvarilo. S druge strane, konačna vrijednost SoC-a kod PMP metode unaprijed je definirana odabirom odgovarajuće  $\lambda_0$ . Nadalje, rezultati potrošnje goriva pokazuju kako PMP, uz jednaki konačni SoC, postiže manju potrošnju goriva nego DP [NAVESTI kolko]. Uzevši u obzir rezoluciju upravljačkih varijabli brzine vrtnje i momenata motora, uočljivo je da je DP u tom pogledu imao veći broj točaka kojim je mogao upravljati sustavom, a s time i bolju rezoluciju, te je na taj način mogao preciznije odabrati radne točke i bolje upravljati sustavom. Međutim, prednost PMP-a nad DP-om je taj da PMP ne zahtjeva diskretizaciju po vektoru stanja za razliku od DP-a. Na taj način, moguće je da PMP zbog potpune slobode koju ima po pitanju iznosa SoC-a uspijeva dobiti bolje rezultate od DP-a koji je u tom pogledu ograničen izborom. Daljnjim povećanjem rezolucije kod DP-a, trebalo bi se eventualno postići bolje rješenje. U svakom slučaju, PMP rezultati pokazuju se jako blizu globalno optimalnima s tim da je karakteristika SoC-a kod PMP-a malo drugačija. Iako je krivulja potrošnje goriva tijekom ciklusa slična i kod

PMP-a i kod DP-a, PMP metoda skoro cijeli dio ciklusa prolazi na nešto višim vrijednostima SoC-a.



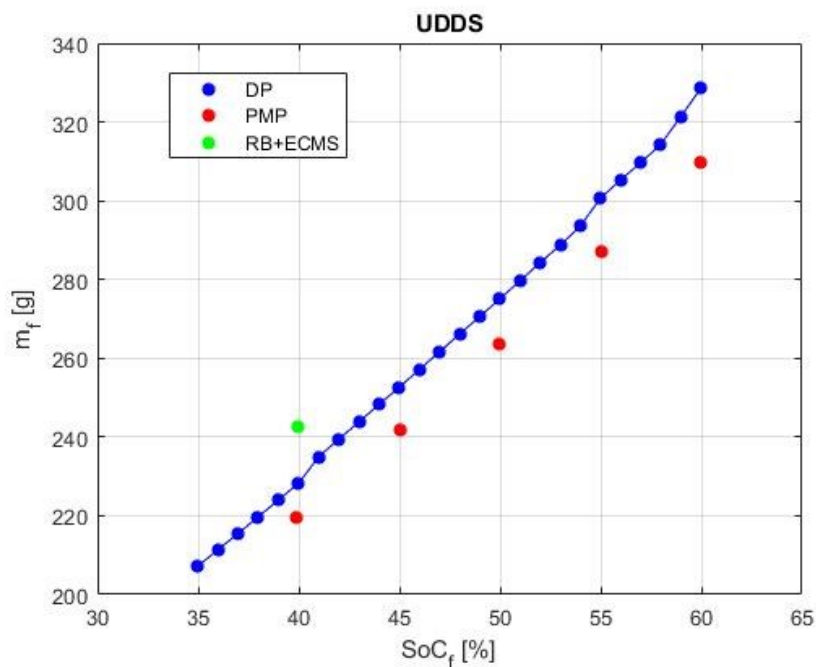
Slika 13. Usporedba rezultata stanja napunjenosti PMP, DP i RB+ECMS metode (UDDS).



Slika 14. Usporedba rezultata potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode (UDDS).

Potrošnju RB+ECMS metode nije moguće izravno usporediti sa preostale dvije pošto je niža ukupna potrošnja dobivena na račun povećanog trošenja električne energije iz baterije. Kako bi se rezultati potrošnje goriva različitih metoda mogle izravno usporediti, potrebno ih je svesti i

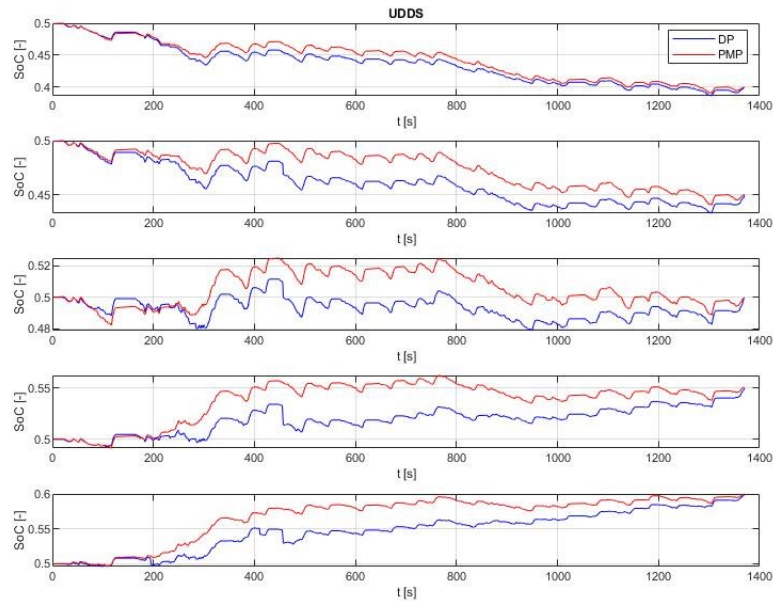
uspoređivati na istoj konačnoj vrijednosti SoC-a. Pošto DP predstavlja globalno optimalno rješenje, najpogodnije je za ocjenjivanje ostalih metoda. U tu svrhu, rješenja potrošnje goriva primjenom DP-a izračunaju se za veći broj vrijednosti konačnog SoC-a te se dobiveni rezultati interpoliraju pravcima. Na ovaj način, rezultati bilo kojih strategija upravljanja mogu se izravno usporediti za razne konačne vrijednosti SoC-a, kako je prikazano na slici 15. Plave točke interpolirane pravcima predstavljaju izračunate vrijednosti dobivene DP-om za UDSS ciklus. Crvene točke predstavljaju rezultate PMP metode dobivene na istom ciklusu za različite konačne vrijednosti SoC-a koje su dobivene koristeći različite vrijednosti  $\lambda_0$ , dok zelena točka predstavlja konačno rješenje RB+ECMS metode. Vidljivo je da je za istu konačnu vrijednost SoC-a od oko 40 %, RB+ECMS metoda potrošila najviše goriva što ju ovdje čini najlošijom metodom. S druge strane, za sve vrijednosti SoC-a, PMP metoda postigla je najmanju potrošnju.



Slika 15. Usporedba potrošnje goriva na UDSS ciklusu.

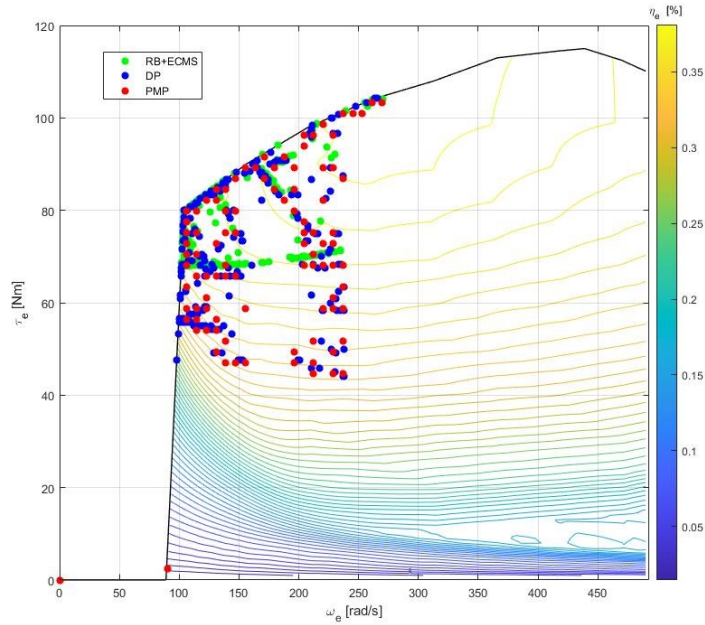
Slika 16 prikazuje različite krivulje SoC-a PMP i DP metode za različite zadane iznose konačnog SoC-a na UDSS ciklusu, čiji su konačni iznosi već prikazani na slici 15 za vrijednosti SoC-a u iznosu od 40, 45, 50, 55 i 60 %.



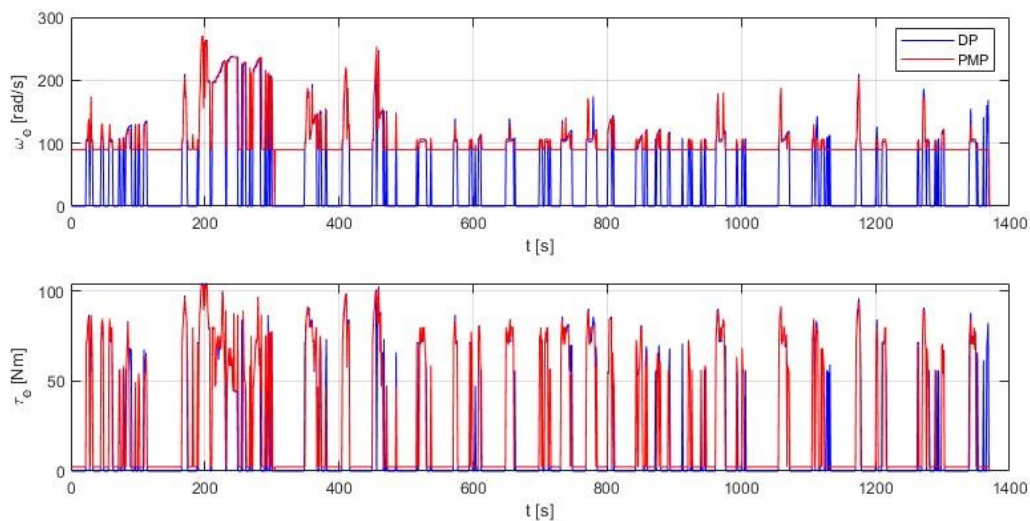


Slika 16. Usporedba PMP i DP rezultata za različite zadane konačne vrijednosti SoC-a (UDDS).

Slika 17 prikazuje rezultate radnih točaka motora dobivenih PMP, DP i RB+ECMS metodom za zadano početno i konačno stanje SoC-a od 50% na UDDS ciklusu. Rezultati pokazuju da DP vrlo često postavlja radne točke blizu krivulje maksimalnog momenta gdje SUI motor ima relativno visoku korisnost, ali također ima i mnogo točaka koje su izvan tog područja. PMP postavlja radne točke na slična mjesta kao i DP, dok RB+ECMS češće odstupa od krivulje maksimalnog momenta te postavlja mnoge točke u područje oko 70 Nm. Nadalje, slika 18 prikazuje usporedbu upravljačkih varijabli brzine vrtnje i momenta SUI motora dobivenih PMP-om i DP-om u vremenu. Upravljačke varijable PMP metode podudaraju se s brzinama vrtnje i momentima dobivenih DP-om kroz cijeli ciklus, s tim da je glavna razlika ta da PMP metoda prilikom mirovanja vozila ne gasi motor nego se on vrti na minimalnoj brzini vrtnje od oko 90 rad/s uz skoro zanemarivi moment.



Slika 17. Radne točke motora dobivene PMP, DP i RB+ECMS metodom (UDDS).



Slika 18. Vremenski profili upravljačkih varijabli PMP-a i DP-a (UDDS).

Podaci konačnih iznosa SoC-a i potrošnje goriva za PMP i DP metodu za UDDS ciklus dani su u tablici 1.  $SoC_f$  stupac prikazuje zadane ciljane vrijednosti SoC-a. Vrijednosti u zagradama pokazuju koliko je određeni rezultat PMP ili RB+ECMS metode bolji ili lošiji od DP-a po pitanju potrošnje goriva za dani SoC. Vidljivo je da PMP za svaku zadanu konačnu vrijednost SoC-a postiže bolje rezultate po pitanju potrošnje od DP-a, s tim da postiže čak 5.74 % manju potrošnju goriva za slučaj s ciljanom konačnom vrijednosti SoC-a u iznosu od 60 %. Kod

RB+ECMS metode nije moguće direktno zadati konačni SoC pa je stoga prikazano jedino dobiveno rješenje i ono pokazuje 6.29 % veću potrošnju goriva u odnosu na DP.

Tablica 1. Usporedba konačnih vrijednosti stanja napunjenosti i potrošnje PMP, DP i RB+ECMS metode za razne konačne vrijednosti SoC-a na UDDS ciklusu

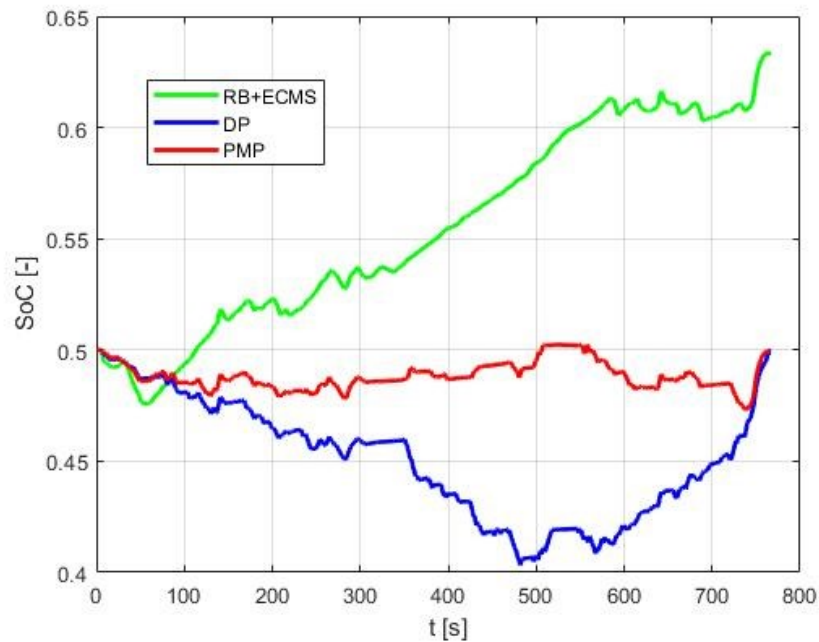
SoC <sub>f</sub> [-]	PMP		DP		RB+ECMS	
	SoC [-]	$m_f$ [g]	SoC [-]	$m_f$ [g]	SoC [-]	$m_f$ [g]
0.40	0.3991	219.64 (-3.8 %)	0.4000	228.32		
0.45	0.4501	241.88 (-4.26 %)	0.4499	252.63		
0.50	0.4993	263.78 (-4.11 %)	0.4998	275.11	0.3993	242.68 (+6.29 %)
0.55	0.5506	287.10 (-4.53 %)	0.4500	300.72		
0.60	0.5997	309.82 (-5.74 %)	0.6000	328.69		

#### 4.3.2. Rezultati HWFET voznog ciklusa

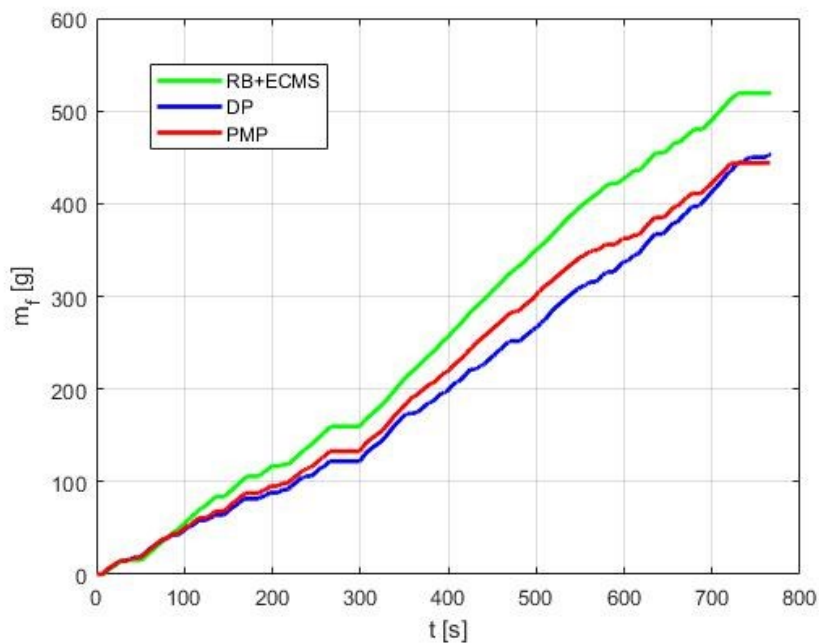
Slike 19 i 20 prikazuju rezultate SoC-a i potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode, dok se na slikama 21 i 22 prikazuju odabrane radne točke navedenih metoda. Rezultati su dobiveni na HWFET ciklusu za zadanu početnu i konačnu vrijednost SoC-a u iznosu od 50 %. Prema slici 19, vidljivo je da je PMP, kao i DP, ponovno uspio ostvariti zadanu konačnu vrijednost SoC-a koristeći odgovarajuću vrijednost  $\lambda_0$ . PMP na početku ciklusa troši više goriva nego DP, pa na taj način većinu ciklusa prolazi s višim iznosom SoC-a i većom količinom potrošenog goriva. Međutim, na kraju ciklusa PMP uspijeva sačuvati veću količinu goriva nego DP pošto je tada na već dovoljno visokom SoC-u i ne mora trošiti mnogo goriva kako bi vratio energiju u bateriju. U konačnici, rezultati pokazuju da za praktički isto konačno SoC-a, PMP postiže manju potrošnju od DP-a. RB+ECMS strategija na ovom ciklusu troši mnogo više goriva, ali to gorivo iskorištava kako bi punila bateriju.

Radne točke ICE-a dobivene PMP metodom postavljene su na jako slična mjesta kao i radne točke dobivene dinamičkim programiranjem, kao što je vidljivo na slici 21. PMP i DP na ovom ciklusu odmiču optimalne točke nešto dalje od krivulje maksimalnog momenta, ali su i dalje postavljene u području relativno visoke korisnosti. Radne točke motora dobivene RB+ECMS

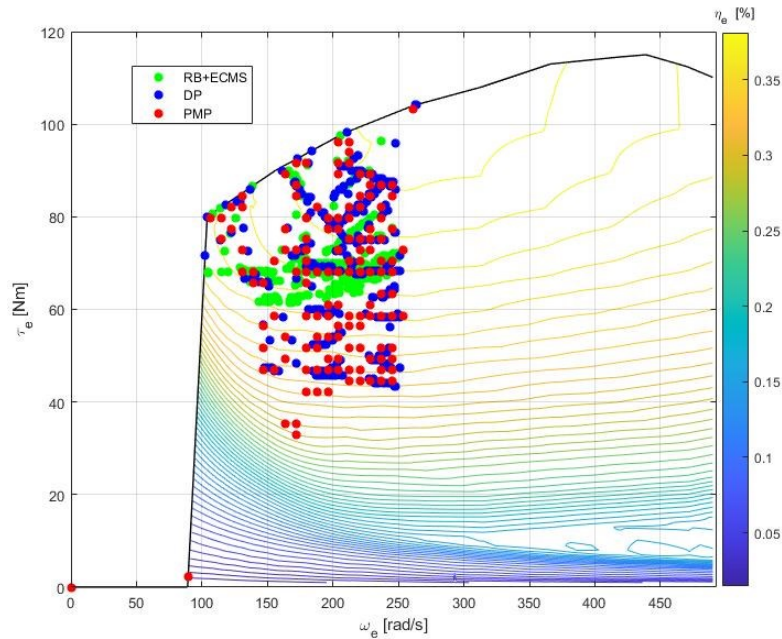
metodom postavljene su nešto niže, odnosno na nižim iznosima momenta, od točaka PMP i DP metode. Međutim, RB+ECMS metoda nikada se ne spušta u radno područje ispod 60 Nm, dok PMP i DP rade i u tom području. Usporedba upravljačkih varijabli PMP-a i DP-a u vremenu pokazuje da tijekom vožnje te dvije metode zadaju skoro iste točke, s tim da PMP i dalje održava brzinu vrtnje SUI motora na niskim okretajima tijekom mirovanja.



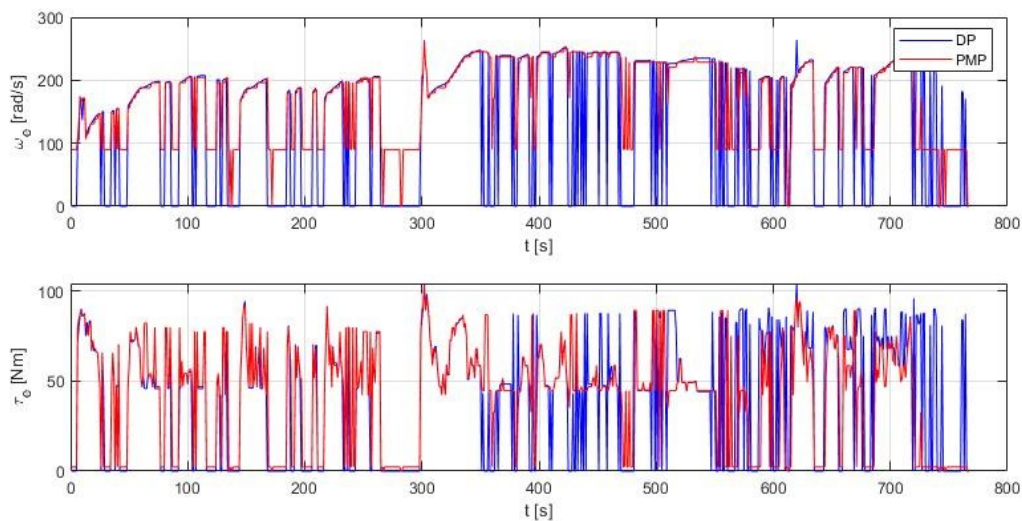
Slika 19. Usporedba rezultata stanja napunjenosti PMP, DP i RB+ECMS metode (HWFET).



Slika 20. Usporedba rezultata potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode (HWFET).



Slika 21. Radne točke motora dobivene PMP, DP i RB+ECMS metodom (HWFET).

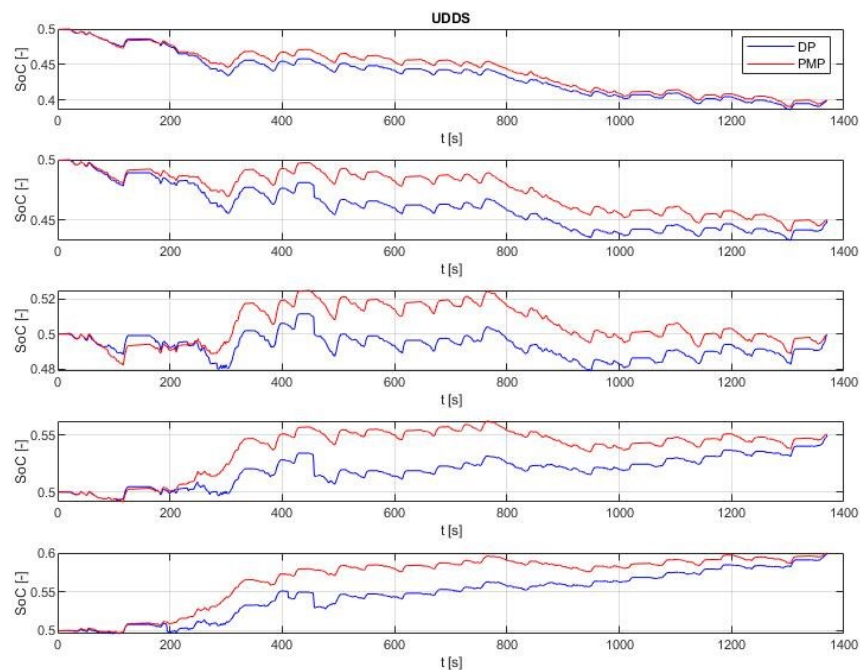


Slika 22. Vremenski profili upravljačkih varijabli PMP-a i DP-a (HWFET).

Usporedba različitih rezultata krivulja SoC-a PMP metode i DP-a na HWFET ciklusu, uz identično početno stanje (50 %) te različita zadana konačna stanja u iznosima od 40, 45, 50, 55 i 60 %, prikazana je na slici 23. Kao i kod UDSS voznog ciklusa, tako i ovdje PMP vrlo rano tijekom voznih ciklusa povećava SoC u odnosu na DP metodu te u nastavku voznog ciklusa skoro na isti način koristi električnu energiju, samo to radi pri višim iznosima SoC-a.

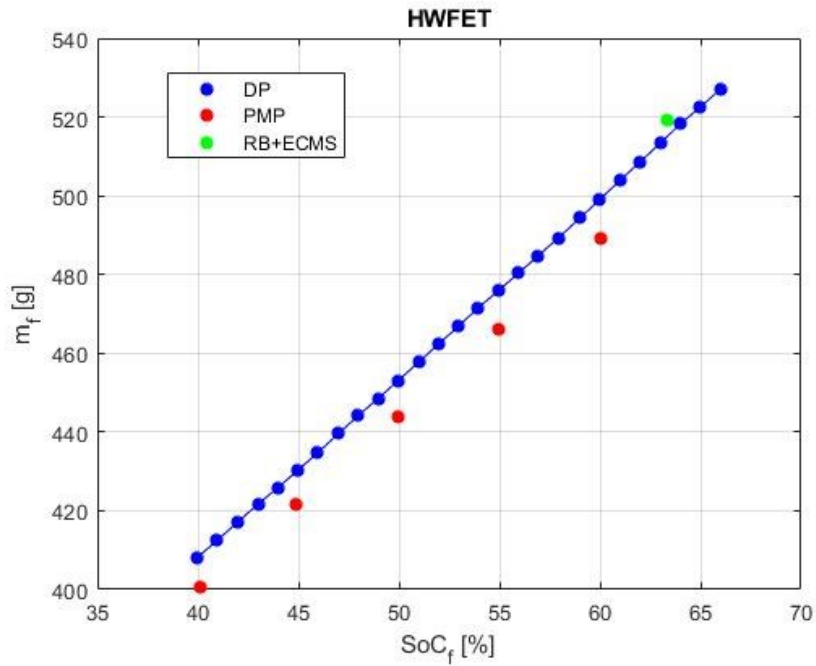
Slika 24 prikazuje usporedbu konačne potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode na HWFET ciklusu za rezultate s istom početnom vrijednosti SoC-a (50 %) i različitom zadanom

konačnom vrijednosti. Plave točke predstavljaju rezultate DP-a koji se koriste kao mjerilo, dok crvene točke predstavljaju rezultate PMP metode dobivene na temelju ciljane konačne vrijednosti SoC-a u iznosima od 40, 45, 50, 55 i 60 %. Rješenje RB+ECMS metode za HWFET ciklus označeno je zelenom bojom. Iako se RB+ECMS metoda ponašala znatno drugačije od ostale dvije po pitanju potrošnje goriva i električne energije, pokazuje se da dobiveno rješenje s pojačanim trošenjem goriva na račun uštede električne energije nije daleko od onog rješenja koje bi DP postigao za isti takav način rada. Nadalje, PMP metoda se ponovno pokazuje kao najbolja po pitanju potrošnje goriva, na svim krajnjim iznosima SoC-a. Dobivene konačne vrijednosti SoC-a i potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode za navedene podatke prikazane su u tablici 2. Pokazuje se da PMP ostvaruje približno 2 % manju potrošnju u usporedbi s DP-om na svim mjerenjima. Nadalje, RB+ECMS metoda se pokazala jako blizu DP-u, sa samo 0.82 % većom potrošnjom goriva.



Slika 23. Usporedba PMP i DP rezultata za različite zadane konačne vrijednosti SoC-a (HWFET).





Slika 24. Usporedba potrošnje goriva na UDDS ciklusu.

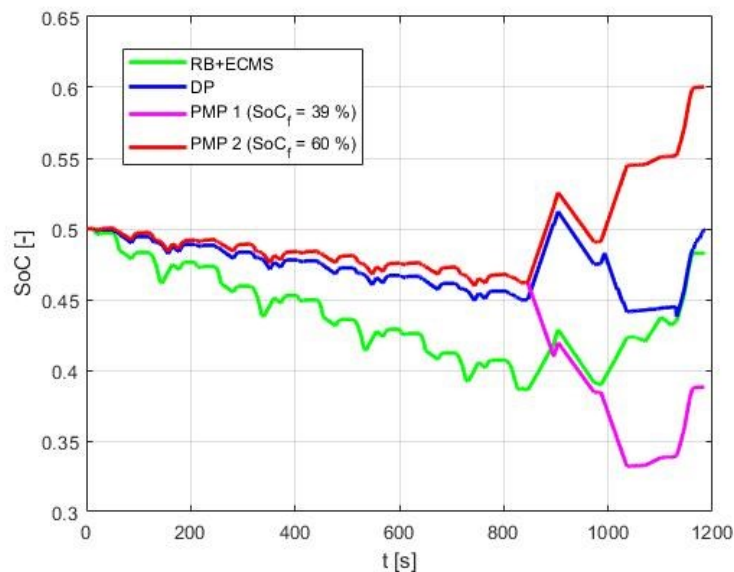
Tablica 2. Usporedba konačnih vrijednosti stanja napunjenosti i potrošnje PMP, DP i RB+ECMS metode za razne konačne vrijednosti SoC-a na HWFET ciklusu

$SoC_f [-]$	PMP		DP		RB+ECMS	
	$SoC [-]$	$m_f [g]$	$SoC [-]$	$m_f [g]$	$SoC [-]$	$m_f [g]$
0.40	0.4015	400.51 (-1.88 %)	0.3998	408.18		
0.45	0.4491	421.49 (-2.03 %)	0.4496	430.24		
0.50	0.4996	443.91 (-2.00 %)	0.4994	452.95	0.6333	519.18 (+0.82 %)
0.55	0.5494	466.22 (-2.08 %)	0.5500	476.13		
0.60	0.6005	489.31 (-1.95 %)	0.5999	499.03		

#### 4.3.3. Rezultati NEDC voznog ciklusa

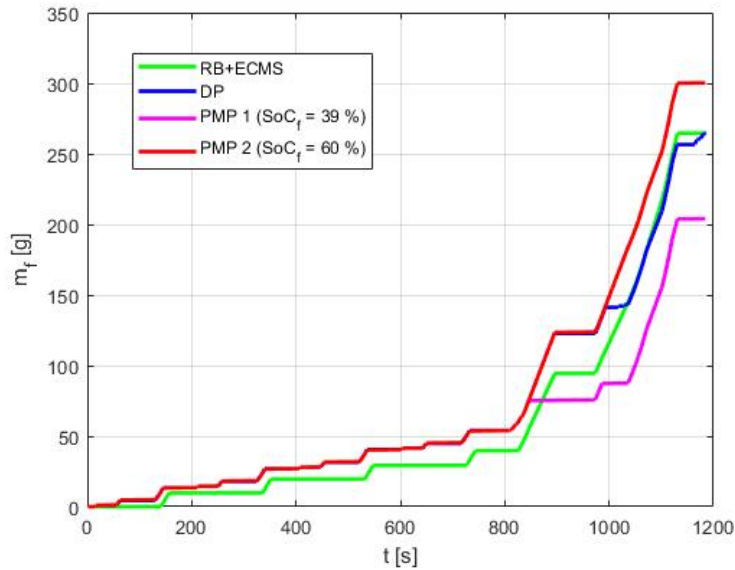
Slika 25 prikazuje rezultate SoC-a za NEDC ciklus, dok slike 26, 27 i 28 prikazuju potrošnju goriva, radne točke motora i upravljačke varijable u vremenu. Početni SoC u svim slučajevima je 0.5, a ciljano konačno stanje za PMP i DP metodu je također postavljeno na 0.5. Za ovaj zadani ciklus, PMP metoda nije u mogućnosti postići ciljani konačni SoC od 50 %. Rezultati

SoC-a primjenom PMP metode slični su DP-u do 850 s, nakon toga se pojavljuju dvije različite skupine rezultata PMP metode. Naime, u postupku traženja optimalnog  $\lambda_0$  binarnim pretraživanjem dolazi do konvergencije  $\lambda_0$  prema nekoj konačnoj vrijednosti koja u općem slučaju uspijeva ostvariti ciljanu vrijednost SoC-a na kraju ciklusa. Međutim, u ovom slučaju, ukoliko  $\lambda_0$  konvergira prema konačnoj vrijednosti s jedne strane, konačna vrijednost SoC-a završava na vrijednosti od 38.81 % i taj slučaj predstavlja skupina rezultata PMP 1. Nadalje, ukoliko  $\lambda_0$  pak konvergira prema konačnoj verziji s druge strane, konačna vrijednost SoC-a završava na vrijednosti 60.03 %. Kada se  $\lambda_0$  nalazi blizu konvergirane vrijednosti, i najmanja daljnja promjena  $\lambda_0$  uzrokuje rezultat konačnog SoC-a da se prebaci u drugu skupinu rezultata te nije moguće pronaći  $\lambda_0$  koja će za zadani vozni ciklus, i zadanu rezoluciju, ostvariti konačnu vrijednost SoC-a od zadanih 50 %. RB+ECMS metoda također pokazuje sličnu karakteristiku promjene SoC-a i potrošnje goriva kao i DP te postiže rezultate koji su jako slični u kontekstu konačne potrošnje goriva. Potrošnja električne energije još je uvijek nešto veća kod ECMS metode zbog podoptimalnost navedene metode.



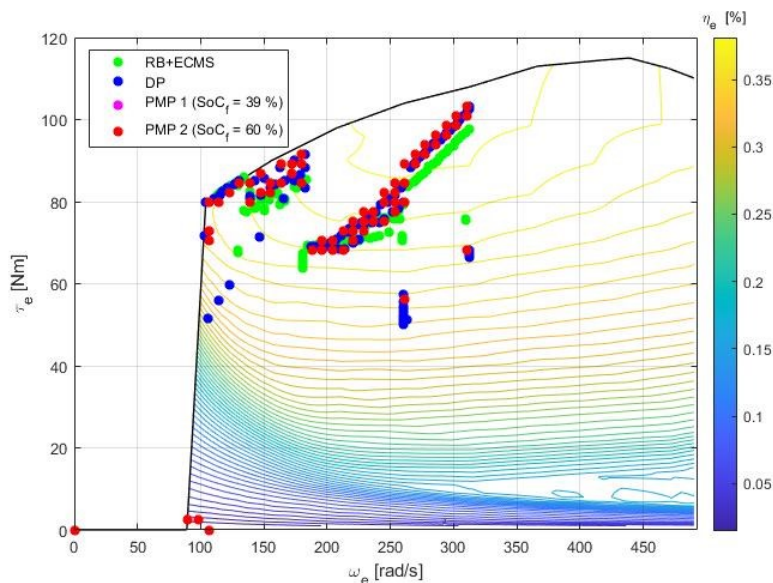
Slika 25. Usporedba rezultata stanja napunjenosti PMP, DP i RB+ECMS metode (NEDC).



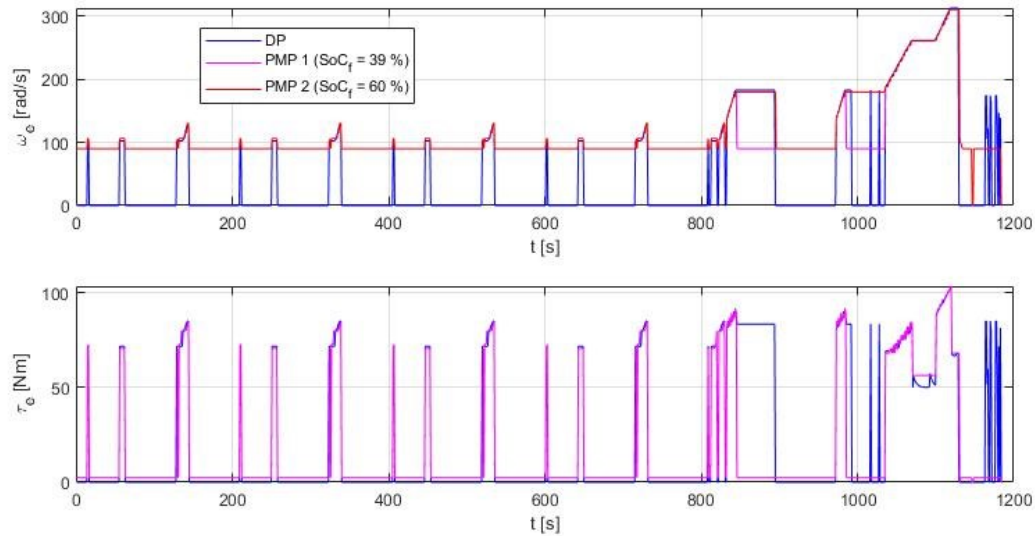


Slika 26. Usporedba rezultata potrošnje goriva PMP, DP i RB+ECMS metode (NEDC).

Sve tri metode postavljaju radne točke motora u slično područje, s tim da RB+ECMS ponovno nastoji postaviti te točke na niže vrijednosti od PMP-a i DP-a. PMP i DP često rade na jako sličnim točkama s tim da postoje radne točke koje odabire isključivo DP. Većina radnih točaka nije više na krivulji maksimalnog momenta nego je pomaknuta prema unutrašnjosti. PMP ponovno postavlja brzinu vrtnje na 90 rad/s s jako malim momentima dok vozilo miruje. Nadalje, PMP i DP pokazuju slične odzive upravljačkih varijabli kroz cijeli ciklus, s jednim značajnim razlikama između 850 i 1050 s.

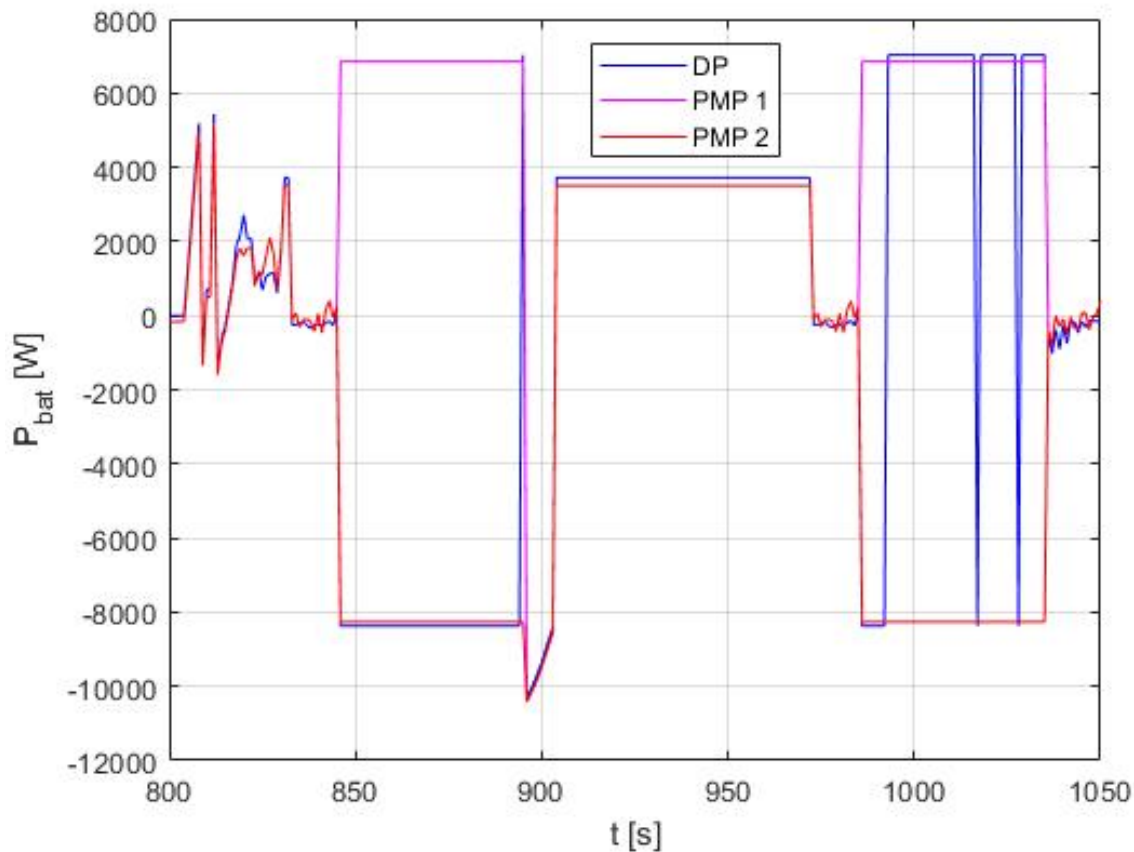


Slika 27. Radne točke motora dobivene PMP, DP i RB+ECMS metodom (NEDC).



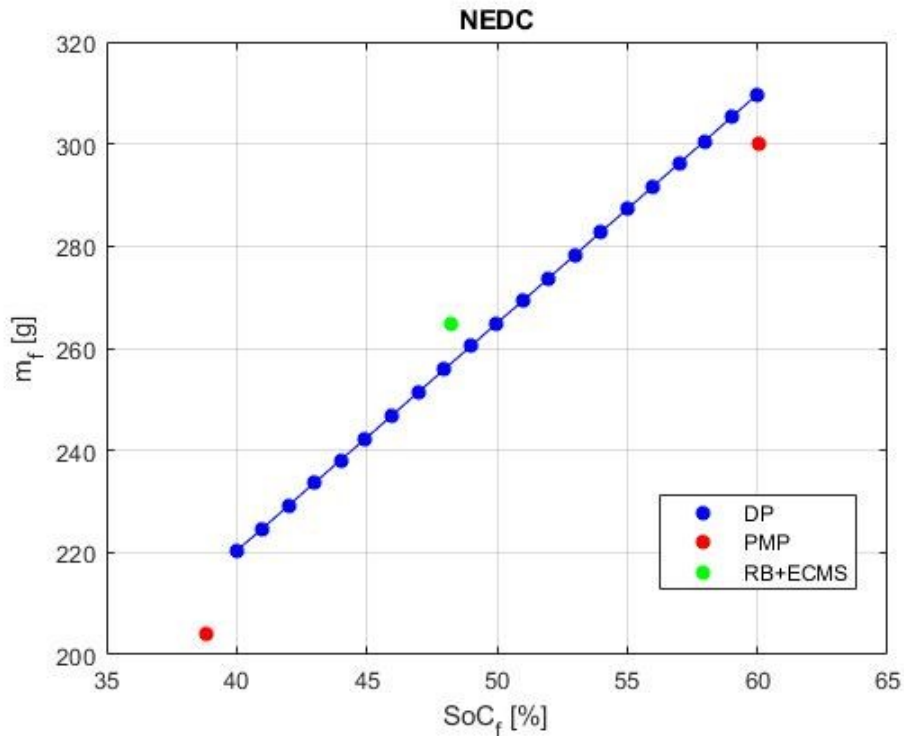
Slika 28. Vremenski profili upravljačkih varijabli PMP-a i DP-a (NEDC).

Na slici 29 prikazana je usporedba snage baterije dobivene DP-om, te PMP metodom za obje skupine rezultata, PMP 1 i PMP 2. Slika prikazuje samo vremensko razdoblje između 800 i 1050 s, pošto tada dolazi do odstupanja rezultata kod PMP metode. Uočljiva su dva područja gdje postoje značajne razlike u rezultatima. Prvo karakteristično područje počinje malo prije 850 s i završava malo prije 950 s, dok drugo karakteristično područje počinje oko 980 s i završava oko 1030 s. DP algoritam, pošto vidi cijeli vremenski horizont, može u bilo kojem dijelu ciklusa dovesti odgovarajuće odluke kako bi na kraju završio na zadanoj vrijednosti SoC-a. Zbog toga, DP u prvom području postiže negativne iznose snage baterije i na taj način puni bateriju, a onda u drugom karakterističnom području zadaje pozitivnu snagu i na tada smanjuje SoC. Na taj način, DP uspijeva na samom kraju ciklusa regenerativnim kočenjem postići zadanu ciljanu vrijednost. Međutim, rezultati pokazuju da PMP metoda nikad ne djeluje različito u ta dva karakteristična područja. PMP 1 rezultati dobiveni su kada je PMP metoda u oba slučaja praznila bateriju, dok su PMP 2 rezultati dobiveni su kada se baterija u oba slučaja punila. Ovisno o početnoj vrijednosti  $\lambda_0$ , PMP metoda će na tim dijelovima ciklusa ili u oba slučaja prazniti bateriju ili ju u oba slučaja puniti. Ne postoji  $\lambda_0$  koji bi za danu rezoluciju omogućio PMP metodi da u ovim karakterističnim područjima postupi drugačije. Pošto je jedino još na kraju ciklusa ostao period gdje se vozilo zaustavlja, tada se još može samo regenerativnim kočenjem povećati SoC, te PMP nema mogućnosti ispraviti odstupanje SoC-a od zadane vrijednosti.



Slika 29. Usporedba snage baterije kod DP i PMP metode na NEDC ciklusu [800-1050 s].

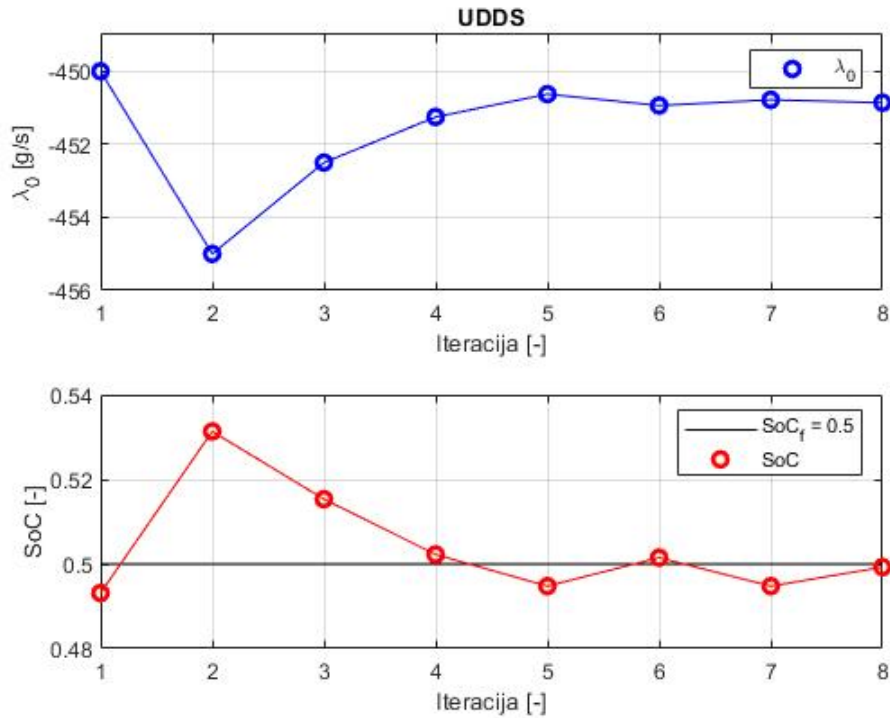
Usporedba potrošnje goriva PMP i RB+ECMS metode s rezultatima DP-a na prikazana je na slici 30. PMP metodom nije bilo moguće postići zadane konačne vrijednosti SoC-a, ali se i dalje mogu usporediti rezultati koji su završili na različitim iznosima SoC-a. Veći broj točaka izvan prikazanog raspona nije razmatran pošto nisu dostupni rezultati dinamičkog programiranja za te vrijednosti SoC-a. Dobivena rješenja PMP metode ponovno su ispod krivulje rješenja DP-a za isti SoC, što ukazuje da je PMP metoda davala skoro optimalna rješenja u većem dijelu ciklusa, odnosno sve dok samog kraja kada dolazi do odstupanja SoC-a. Iako je RB-EMCS metoda postigla sličan iznos potrošnje goriva kao i DP za slučaj konačnog SoC-a od 50 %, RB+ECMS metoda to je postigla uz nešto manji SoC što ukazuje da je pretjerano trošila električnu energiju.



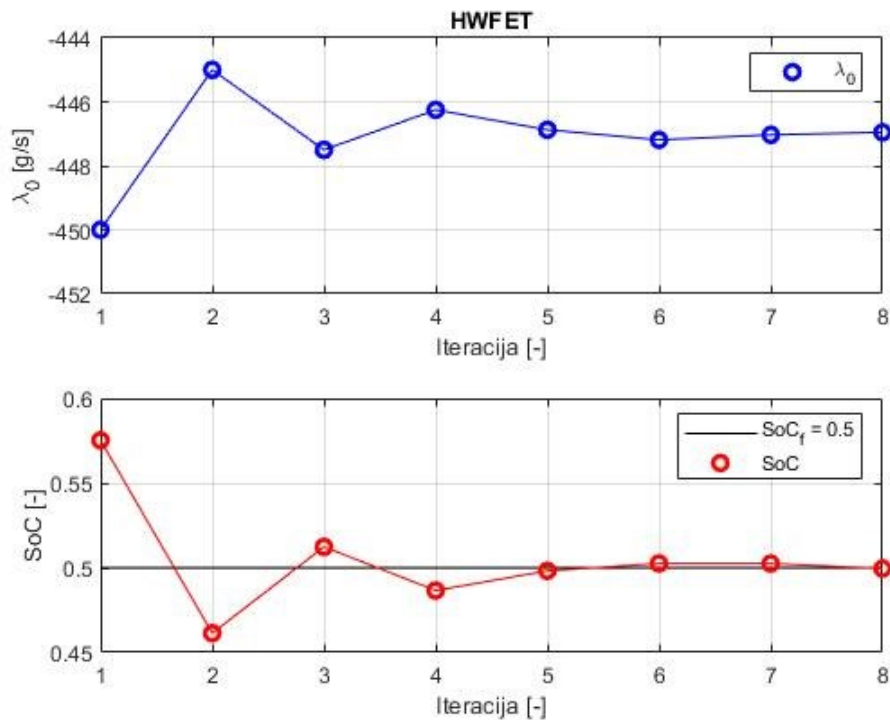
Slika 30. Usporedba potrošnje goriva na NEDC ciklusu.

#### 4.4. Usporedba vremena izvođenja PMP strategije

Vrijeme potrebno za provođenje PMP metode najvećim dijelom ovisi o početnoj procjeni  $\lambda_0$ , odnosno o broju iteracija potrebnom da  $\lambda_0$  konvergira do optimalne vrijednosti za koju se dobiva ciljani konačni SoC. Slike 31 i 32 prikazuju promjenu iznosa parametra  $\lambda$  po iteracijama tijekom iterativnog procesa traženja optimalne  $\lambda_0$  binarnim pretraživanjem, na UDDS i HWFET ciklusu. Na slikama su također prikazane i dobivene vrijednosti SoC-a na kraju svake iteracije. Zadani ciljani konačni iznos SoC-a iznosio je 50 %, a iterativni postupak određivanja  $\lambda_0$  prekinuo se kada je konačno odstupanje dobivenog i ciljanog SoC-a bilo manje od 0.1 %. Rezultati pokazuju da se s dobrom početnom procjenom već nakon 5 iteracija dobiva vrijednost SoC-a na kraju ciklusa koja nije daleko od ciljane. Daljnjim provođenjem iterativnog postupka nije moguće ostvariti značajnija poboljšanja.

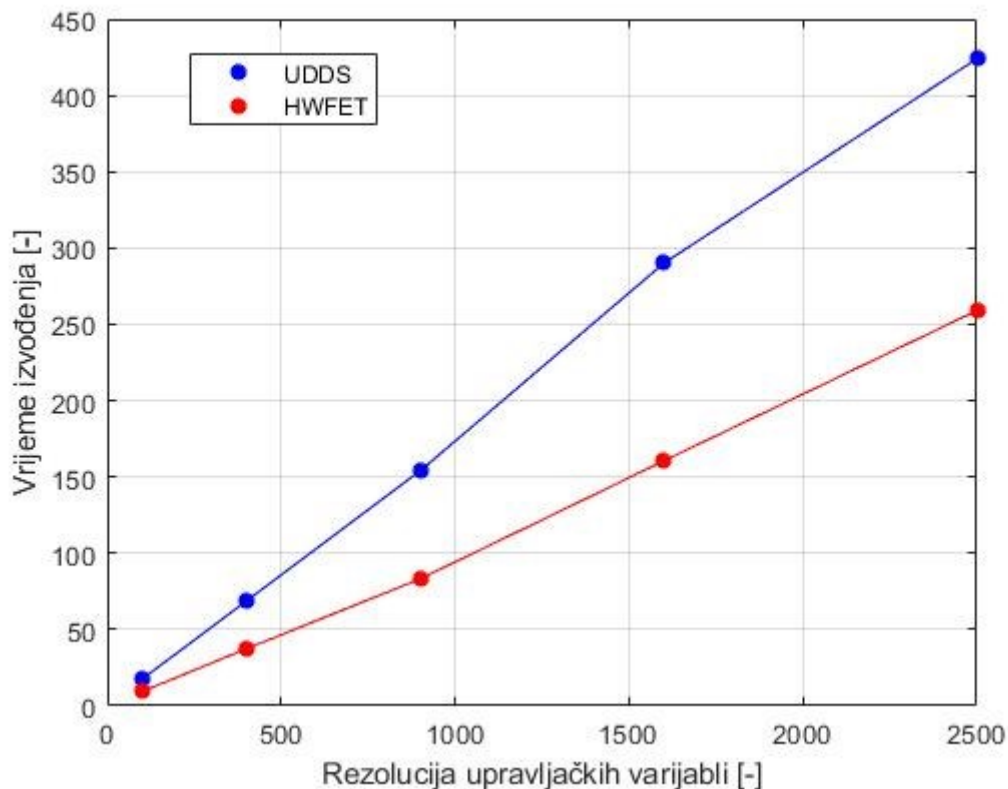


Slika 31. Dobivene vrijednosti  $\lambda_0$  i SoC-a po iteracijama tijekom procesa traženja optimalne  $\lambda$  binarnim pretraživanjem (UDDS).



Slika 32. Dobivene vrijednosti  $\lambda_0$  i SoC-a po iteracijama tijekom procesa traženja optimalne  $\lambda$  binarnim pretraživanjem (UDDS).

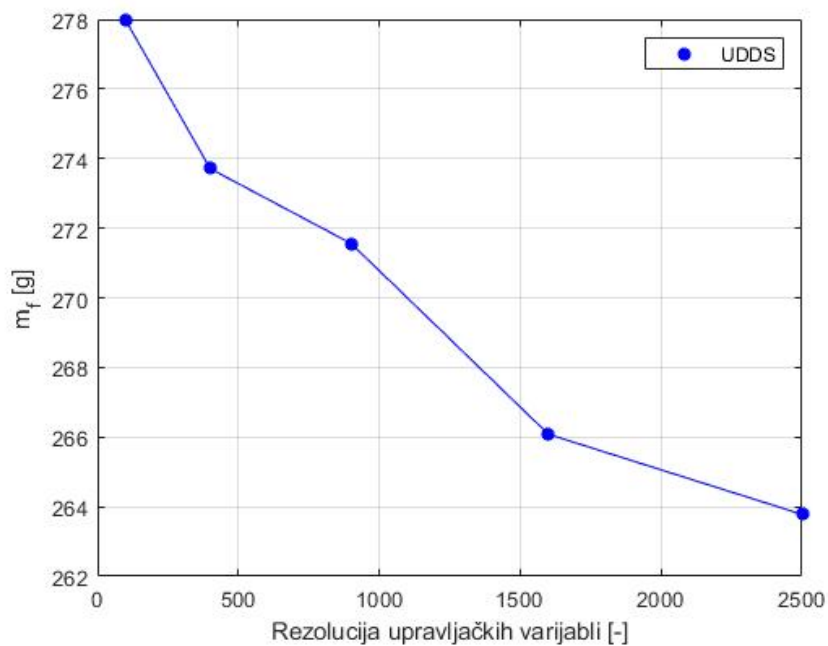
Nadalje, utjecaj na vrijeme potrebno za provođenje PMP metode također ovisi o odabranoj rezoluciji upravljačkih varijabli, odnosno o broju radnih točaka motora koje se uzimaju u obzir. Slika 33 prikazuje prosječno vrijeme potrebno za provođenje jedne iteracije PMP proračuna na UDSS (plava boja) i HWFET (crvena boja) ciklusima, u ovisnosti o rezoluciji, odnosno broju dostupnih radnih točaka motora. Kako se povećava rezolucija upravljačkih varijable, tako se i linearno povećava vrijeme izvođenja PMP proračuna. Nadalje, u obzir treba uzeti i duljinu voznog ciklusa, odnosno broj vremenskih trenutaka u kojima se provodi proračun. UDSS vozni ciklus traje skoro duplo duže od HWFET voznog ciklusa, pa u njegovom slučaju i vrijeme izvođenja PMP metode skoro duplo duže



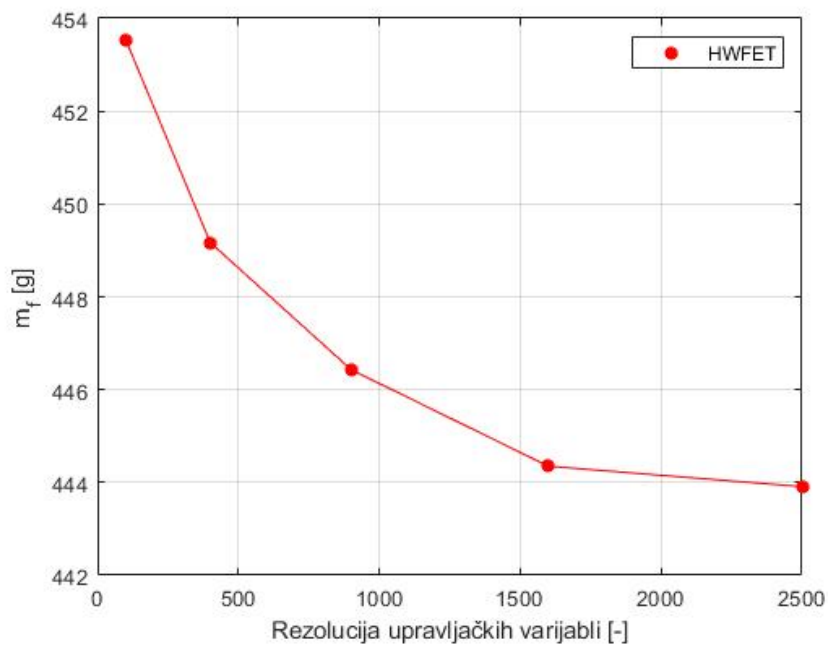
Slika 33. Vrijeme provođenja jedne iteracije PMP proračuna u ovisnost o broju upravljačkih varijabli za UDSS i HWFET ciklus.

Slike 34 i 35 prikazuju rezultate konačne potrošnje goriva na UDSS i HWFET ciklusima u ovisnosti o rezoluciji upravljačkih varijabli, odnosno broju radnih točaka motora. Rezultati su dobiveni uz početnu i konačnu vrijednost SoC-a u iznosu od 50 %. Vidljivo je da povećanjem rezolucije upravljačkih varijabli, PMP metoda može bolje upravljati pogonom, te za istu konačnu vrijednost SoC-a može postići sve manju potrošnju goriva. Također je vidljivo kako se daljnjim povećanjem broja upravljačkih varijabli sve manje i manje može poboljšati

potrošnja goriva, te nema smisla pretjerano poboljšavati rezoluciju jer tada se uz jako male promjene u rezultatima može značajno produžiti vrijeme proračuna.



Slika 34. Ovisnost konačne potrošnje goriva o rezoluciji upravljačkih varijabli (UDDS).



Slika 35. Ovisnost konačne potrošnje goriva o rezoluciji upravljačkih varijabli (HWFET).

## 5. ZAKLJUČAK

Strategija upravljanja temeljena na Pontryaginovom principu minimuma pokazala se kao vrlo vrijedna metoda koja može postići dobre rezultate bez pretjerane računalne složenosti. Rezultati PMP-a usporedili su se s rezultatima DP-a te su se čak na validiranom modelu postigli bolji rezultati. Pokazuje se da PMP postiže oko 2 % smanjenu potrošnju goriva u odnosu na DP na HWFET ciklusu i čak do 5.74 % na UDDS ciklusu. Iako DP garantira globalno optimalno rješenje, to rješenje je i dalje onoliko točno koliko to njegova rezolucija upravljačkih varijabli i vektora stanja dopušta. Moguće je da je PMP metoda uspjela postići bolje rezultate isključivo zato što ona ne zahtjeva diskretizaciju po varijabli stanja, odnosno SoC-u. Nadalje, rezultati pokazuju kako je PMP metoda često postavljala motor u slična radna područja kao i DP, te se tijekom voznih ciklusa na sličan način trošila električna energija i gorivo, što upućuje kako rješenja PMP metode ne bi trebala biti daleko od optimalnih. S druge strane, RB+ECMS metoda znatno se razlikuje u odnosu na ostale dvije, ali to je i očekivano. Za razliku od DP-a i PMP metode, RB+ECMS realna je strategija upravljanja koja ne vidi cijeli vremenski horizont unaprijed nego mora donijeti upravljačke odluke ovisno o trenutnom stanju. Iako PMP nema uvid u cijeli ciklus na identičan način kao i DP, iterativnim postupkom odabira parametra  $\lambda_0$  odbacuju se nezadovoljavajuća rješenja i zapravo se kao konačno rješenje uzima samo ono za koje se već tada unaprijed zna da daje zadovoljavajuće rezultate. PMP metoda temelji se na teoriji optimalnog upravljanja te bi na taj način, kao i kod DP-a, njena rješenja trebala biti nalik optimalnima. Prednost koju PMP metoda ostvaruje u odnosu na DP vezana je uz računalnu složenost i vrijeme izvođenja proračuna. Ovisno o korištenoj rezoluciji, DP proračun može trajati danima, što ga čini daleko neupotrebljivim kao izvor upravljačkih varijabli u realnim uvjetima vožnje. S druge strane, PMP metodom mogu se postići dobri rezultati čak i uz manju rezoluciju upravljačkih varijabli te se na taj način proračun može izvesti puno brže. Koliko je točno vremena potrebno za provedbu PMP metode nije lako odrediti, pošto to ovisi o mnogo drugih faktora. Čak i ako uz zadanu rezoluciju vrijeme izračuna jedne iteracije ne traje dugo, vrijeme potrebno za provedbu cijelog iterativnog postupka pronalaska optimalne početne vrijednosti  $\lambda_0$  može potrajati i desetak puta duže, ovisno o preciznosti početne procjene i optimizacijskom problemu. Međutim, glavni nedostatak PMP metode je u tome što je to vrsta optimalnog upravljanja, a ne regulacije. Kao što je već spomenuto, pošto se  $\lambda_0$  bira na temelju konačnog rješenja koje se njome postiže, upravljačka strategija već je unaprijed predodređena za cijeli vozni ciklus. Osim toga, na temelju rezultata NEDC ciklusa pokazalo se kako postoji mogućnost da PMP metoda uopće nije u mogućnosti generirati ispravno rješenje i postići



ciljano konačno stanje. Nema načina kojim možemo garantirati da je bilo koje rješenje dobiveno PMP metodom u ovom obliku optimalno, kao što je to moguće kod DP-a. Nadalje, zbog nedostatka prave povratne veze u PMP metodi, ona nije upotrebljiva u realnim uvjetima vožnje. Bolja rješenja možda bi se postigla ukoliko bi se uz PMP metodu koristio i regulator koji bi tijekom voznog ciklusa mijenjao vrijednost  $\lambda_0$  i na taj način se prilagodio trenutnim uvjetima u vožnji, ali ta razmatranja prelaze područje ovog rada.

---

## LITERATURA

- [1] Škugor, B., Deur, J., Cipek, M., Pavković, D.: *Design of a power-split hybrid electric vehicle control system utilizing a rule-based controller and an equivalent consumption minimization strategy*, 2014.
- [2] L. Guzzella, Sciarretta A.: *Vehicle Propulsion Systems - Introduction to Modeling and Optimization 2 nd ed.*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- [3] Soldo, J.: *Pontryagin's Minimum Principle Energy Management Control Strategy for Parallel Plug-in Hybrid Electrical Vehicle*, Zagreb
- [4] Cipek, M.: *Optimiranje upravljačkih varijabli hibridnih električnih pogona – 6. Auditorna vježba (UHEV)*, Zagreb, 2018.
- [5] Škugor, B.: *Sustav upravljanja hibridnim električnim vozilom zasnovan na primjeni baze pravila (RB) – 6. Auditorna vježba (UHEV)*, Zagreb, 2017.
- [6] Kasać, J.: *Vođenje tehničkih sustava – Materijali za predavanja i vježbe*, Zagreb, 2007.

## Prilog A – Parametri pogona Toyote Prius

Tablica 3. Parametri pogona Toyote Prius

$R_{ic}$ [ $\Omega$ ]	$R_{idc}$ [ $\Omega$ ]	$Q_{\max}$ [As]	$i_o$ [-]	$h$ [-]
0.0197	0.0269	23400	3.95	2.6
$n_{cell}$ [-]	$r$ [m]	$\omega_{e,\max}$ [rad/s]	$\omega_{mg1,\max}$ [rad/s]	$\omega_{mg2,\max}$ [rad/s]
40	0.3045	490	730	730
$\tau_{e,\max}$ [Nm]	$\tau_{mg1,\max}$ [rad/s]	$\tau_{mg2,\max}$ [rad/s]		
115	55	305		

## Prilog B – Primjer rješenja optimalnog upravljanja

### B.1. Analitičko rješenje [6]

Postupak pronalaženja analitičkog rješenja optimalnog upravljanja prikazat će se na jednostavnom primjeru dinamičkog modela s jednom varijablom stanja. Za matematički model opisan diferencijalnom jednačbom:

$$\dot{x} = -x + u, \quad (50)$$

sa zadanim početnim uvjetom i vremenskim intervalom:

$$x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (51)$$

potrebno je odrediti varijablu stanja  $x(t)$  i upravljačku varijablu  $u(t)$  koje minimiziraju funkciju cilja:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^2 + u^2) dt. \quad (52)$$

Prema izrazu (16), Hamiltonian sustava jednak je:

$$H = \frac{1}{2} (x^2 + u^2) + \lambda(-x + u). \quad (53)$$

Prema (29) i (30), mogu se zapisati kanonske jednačbe:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda - x, \quad (54)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0, \quad (55)$$

iz čega dodatno slijedi:

$$u = -\lambda. \quad (56)$$

Uvrštavanjem (56) u (50) dobije se:

$$\dot{x} = -x - \lambda. \quad (57)$$

Deriviranjem izraza (57) može se izvesti:

$$\ddot{x} = -\dot{x} - \dot{\lambda}, \quad (58)$$

te uvrštavanjem izraza (54) i (57) u (58), te sređivanjem, dobije se diferencijalna jednačba drugog reda:

$$\ddot{x} - 2x = 0, \quad (59)$$

čije je rješenje:

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}, \quad (60)$$

te njena derivacija:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2}C_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}C_2 e^{-\sqrt{2}t}. \quad (61)$$

Uvrštavanjem izraza (61) i (62) u (58) te sređivanjem, dobije se izraz za  $\lambda$ :

$$\lambda(t) = -C_1(\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}t} + C_2(\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}t}. \quad (62)$$

Na temelju rubnih uvjeta:

$$x(0) = x_0, \quad (63)$$

$$\lambda(T) = 0, \quad (64)$$

iz jednačbi (60) i (62) mogu se odrediti integracijske konstante  $C_1$  i  $C_2$ :

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0, \quad (65)$$

$$\lambda(T) = -C_1(\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}T} + C_2(\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}T} = 0, \quad (66)$$

čiji se konačni izrazi mogu zapisati kao:

$$C_1 = \frac{(\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}T} x_0}{(\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}T} + (\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}T}}, \quad (67)$$

$$C_2 = \frac{(\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}T} x_0}{(\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}T} + (\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}T}}. \quad (68)$$

Slike 36-38 prikazuju rješenje optimalne krivulje varijable stanja, upravljačke varijable i Lagrangeovog multiplikatora riješenog primjera za sljedeće rubne uvjete:

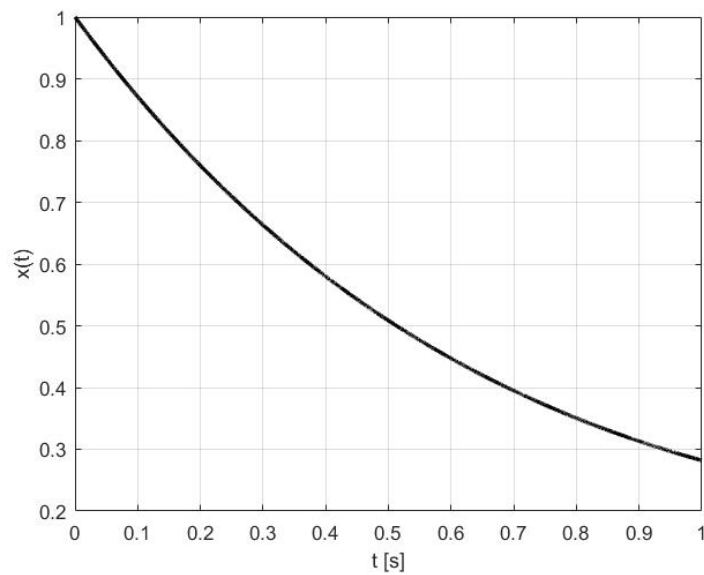
$$x_0 = 1, \quad T = 1 \text{ s}. \quad (69)$$

Konačni iznos varijable stanja iznosi:

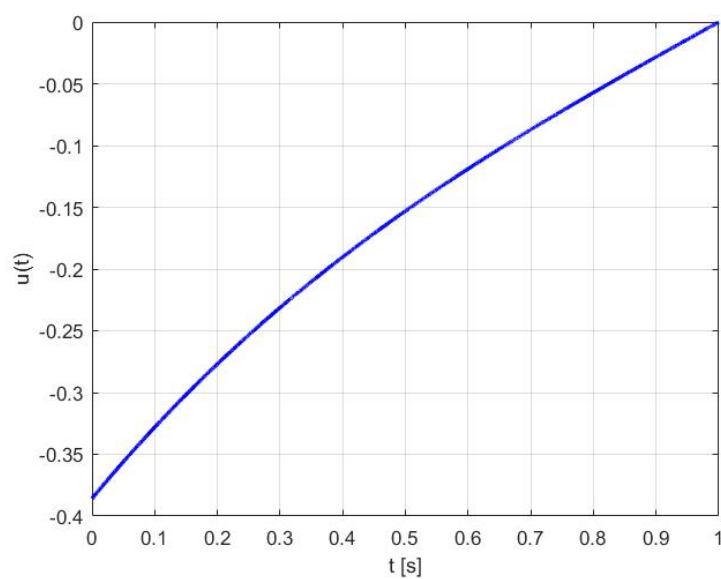
$$x(T) = 0.282, \quad T = 1 \text{ s}, \quad (70)$$

dok je početni iznos Lagrangeovog multiplikatora  $\lambda$  jednak:

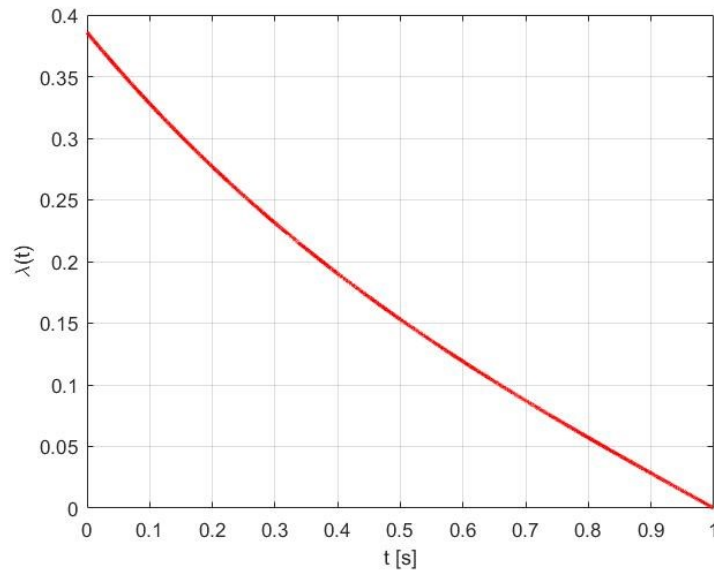
$$\lambda(0) = 0.3858. \quad (71)$$



Slika 36. Optimalno rješenje varijable stanja  $x(t)$  jednostavnog dinamičkog modela.



Slika 37. Optimalno rješenje upravljačke varijable  $u(t)$  jednostavnog dinamičkog modela.

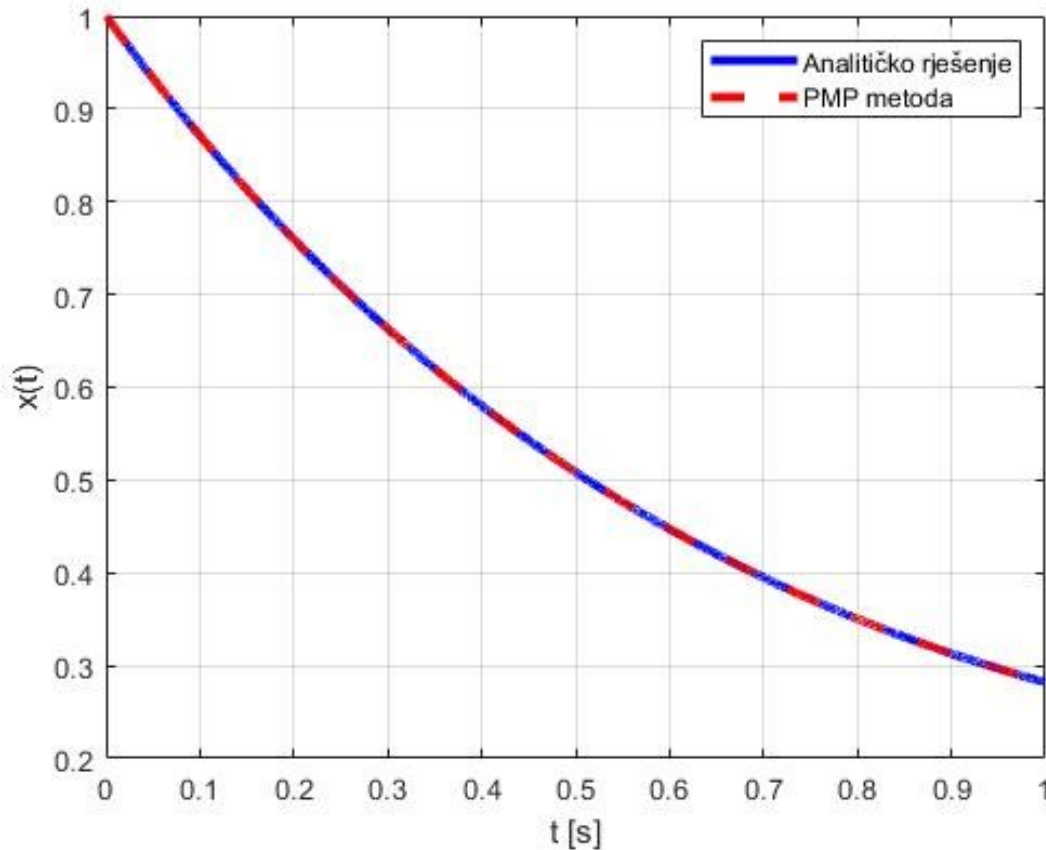


Slika 38. Optimalno rješenje Lagrangeovog multiplikatora  $\lambda$  jednostavnog dinamičkog modela.

## B.2. Rješenje PMP metode

Optimalno rješenje za prethodno analitički riješen zadatak dobiveno je u Matlabu korištenjem metode koja se temelji na Pontryaginovom principu minimuma (PMP metoda). Prvi dio pronalazjenja rješenja je identičan – na temelju zadanih jednadžbi (50) i (52) potrebno je definirati Hamiltonian (53), te izračunati nužni uvjet optimalnosti prema izrazu (54). Za razliku od vremenski kontinuiranog analitičkog rješenja gdje se izrazi za upravljačke varijable dobivaju putem izraza (55), u navedenoj se metodi vrijeme i mogući iznosi upravljačkih varijabli diskretiziraju te se u svakom vremenskom koraku traže oni iznosi upravljačkih varijabli koji u tom trenutku postižu najmanji (minimalni) iznos Hamiltoniana. Prema Pontryaginovom principu minimuma, ako Hamiltonian postiže minimalnu vrijednost za određene upravljačke varijable, tada te upravljačke varijable predstavljaju optimalno rješenje. Postupak se provodi tako da se u svakom koraku provede izračun Hamiltoniana za sve moguće kombinacije upravljačkih varijabli te se na kraju sačuva ona kombinacija koja ga minimizira i ta se kombinacija proglasi optimalnom. Nakon što se odredi optimalan vektor upravljanja za jedan vremenski trenutak, izračunava se novi vektor stanja prema (50) i novi iznos Lagrangeovog multiplikatora koristeći (54), te se zajedno koriste u sljedećem koraku za izračun novih Hamiltoniana. Prolaskom kroz sve diskretne vremenske trenutke, pronalaze se svi optimalni iznosi diskretiziranih upravljačkih varijabli i varijabli stanja te se postupak završava.

Slika 39 prikazuje usporedbu rezultata dobivenih analitičkim rješenjem i PMP metodom za primjer jednostavnog dinamičkog modela. Analitički rezultati prikazani su punom plavom bojom, a rezultati PMP metodom isprekidanom crvenom. U PMP metodi, početna vrijednost Lagrangeovog multiplikatora  $\lambda$  postavljena je na istu početnu vrijednost kao što je dobiveno analitičkom metodom. Vidljivo je da u tom slučaju PMP metoda daje iste rezultate kao i analitičko rješenje.



Slika 39. Usporedba analitičkog rješenja i rješenja PMP metode na primjeru jednostavnog dinamičkog modela.