

# Robusno upravljanje autonomnim podvodnim vozilom s četiri propulzora

---

Žarak, Nikola

Master's thesis / Diplomski rad

2023

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:380990>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

**Nikola Žarak**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:

Nikola Žarak

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Josipu Kasaću na strpljenju, velikoj pomoći i savjetima pri izradi ovoga rada.

Također se zahvaljujem svojim roditeljima i prijateljima na podršci tijekom razdoblja studiranja.

Nikola Žarak



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: <b>602 - 04 / 23 - 6 / 1</b>	
Ur.broj: <b>15 - 23 -</b>	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Nikola Žarak**

JMBAG: 0035216993

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Robusno upravljanje autonomnim podvodnim vozilom s četiri propulzora**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Robust control of an autonomous underwater vehicle with four thrusters**

Opis zadatka:

Autonomna podvodna vozila su postala nezamjenjivi alati u podvodnim istraživanjima i operacijama, poput istraživanja podvodnih ekosustava, istraživanja potopljenih olupina ili izviđanja podvodnih područja. Autonomna podvodna vozila su sposobna za samostalno kretanje i izvršavanje zadataka, što značajno smanjuje rizik za ljudske operatere u opasnim ili teško dostupnim područjima. Međutim, podvodna vozila su osjetljiva na vanjske poremećaje, kao što su podvodne struje, koje mogu bitno utjecati na njihovo kretanje i učinkovitost. Osnovni zadatak ovog rada je implementacija robusnog upravljanja autonomnim podvodnim vozilom s četiri propulzora pod utjecajem nemjerljivih vanjskih poremećaja poput podvodnih struja.

U radu je potrebno:

- Implementirati nelinearni dinamički model autonomnog podvodnog vozila sa šest stupnjeva slobode gibanja u Matlabu.
- Provesti linearizaciju nelinearnog dinamičkog modela autonomnog podvodnog vozila.
- Provesti sintezu linearnog regulatora za problem slijeđenja proizvoljne referentne trajektorije, u slučaju bez vanjskih poremećaja.
- Provesti sintezu adaptivnog regulatora uz pretpostavku nepoznatih parametara podvodnog vozila, u slučaju bez vanjskih poremećaja.
- Provesti sintezu robusnog nelinearnog regulatora s kliznim režimom (engl. sliding-mode controller) u slučaju vanjskih poremećaja.
- Implementirati robusni estimator derivacija signala u slučaju adaptivnog i robusnog upravljanja.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

4. svibnja 2023.

6. srpnja 2023.

17. – 21. srpnja 2023.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof.dr.sc. Josip Kasać

Prof. dr. sc. Ivica Garašić

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Motivacija .....	1
1.2. Struktura rada.....	2
2. PODVODNA VOZILA .....	3
2.1. Općenito.....	3
2.2. Podjela autonomnih podvodnih vozila.....	4
2.2.1. Vozila za plitke vode (eng. Shallow water survey AUV).....	4
2.2.2. Vozila za srednje dubine vode (eng. Mid-water AUV).....	5
2.2.3. Vozila za velike dubine vode (eng. Deep-water AUV).....	6
2.2.4. Glideri .....	6
2.3. Razvoj i konstrukcija autonomnog podvodnog vozila.....	7
2.3.1. Konstrukcija trupa.....	8
2.3.1.1. Laminarno i turbulentno strujanje.....	9
2.3.1.2. Oblik podvodnog vozila.....	10
2.3.2. Zaranjanje.....	11
2.3.3. Propulzija .....	12
2.3.4. Napajanje .....	12
2.4. Utjecajni čimbenici na podvodno vozilo .....	13
2.4.1. Uzgon.....	13
2.4.2. Stabilnost.....	13
2.4.3. Hidrodinamičko prigušenje.....	13
2.4.4. Coriolisova sila .....	14
2.4.5. Efekt dodane mase .....	14
2.4.6. Okolišne sile.....	14
2.4.7. Tlak .....	14
3. MATEMATIČKI MODEL PODVODNOG VOZILA .....	15
3.1. Modeliranje podvodnog vozila .....	15
3.2. Osnovna gibanja vozila .....	15
3.3. X4 – AUV.....	16
3.3.1. Koordinatni sustav .....	16
3.3.2. Kinematički model.....	18
3.3.3. Dinamički model.....	19
3.3.3.1. Propulzijski sustav .....	19
3.3.3.2. Matrica inercije i mase .....	20
3.3.3.3. Izvod dinamičkog modela.....	21
4. SINTEZA UPRAVLJAČKIH ZAKONA.....	25

---

4.1. Sinteza linearnog regulatora.....	25
4.2. Sinteza adaptivnog regulatora.....	28
4.3. Sinteza robusnog (sliding-mode) regulatora .....	30
5. SIMULACIJSKI REZULTATI .....	34
5.1. Primjena regulatora na linearnom modelu .....	35
5.1.1. Linearni regulator.....	35
5.1.2. Adaptivni regulator .....	37
5.1.3. Robusni regulator .....	40
5.2. Primjena regulatora na punom nelinearnom modelu .....	42
5.2.1. Linearni regulator.....	42
5.2.2. Adaptivni regulator .....	44
5.2.3. Robusni regulator .....	48
5.3. Usporedba regulatora .....	51
6. ZAKLJUČAK.....	53
LITERATURA.....	54

## POPIS SLIKA

Slika 2.1	Podjela podvodnih vozila [1] .....	3
Slika 2.2	Autonomno podvodno vozilo REMUS [3] .....	5
Slika 2.3	Autonomno podvodno vozilo SeaBED [4] .....	5
Slika 2.4	Autonomno podvodno vozilo SENTRY [5].....	6
Slika 2.5	Autonomno podvodno vozilo Seaglider [6] .....	7
Slika 2.6	Razvojni proces podvodnog vozila [1].....	8
Slika 2.7	Usporedba laminarnog i turbulentnog strujanja [1] .....	9
Slika 2.8	Primjer trupa pogodnog za laminarno strujanje [1] .....	10
Slika 2.9	Vozila s torpedu oblikom trupa [1] .....	11
Slika 2.10	Vozila s ostalim oblicima trupa [1] .....	11
Slika 3.1	X4 – AUV [1].....	16
Slika 3.2	Koordinatni sustavi [1].....	17
Slika 3.3	Propulzijski sustav [1] .....	19
Slika 5.1	Pozicije i kutevi vozila uz primjenu regulatora na linearni model.....	35
Slika 5.2	3D trajektorija vozila uz primjenu regulatora na linearni model .....	35
Slika 5.3	Upravljačke varijable vozila uz primjenu regulatora na linearni model .....	36
Slika 5.4	Pogreške praćenja trajektorije uz primjenu regulatora na linearni model.....	36
Slika 5.5	Pozicije i kutevi vozila uz primjenu adaptivnog regulatora na linearni model.....	37
Slika 5.6	3D trajektorija vozila uz primjenu adaptivnog regulatora na linearni model .....	37
Slika 5.7	Upravljačke varijable vozila uz primjenu adaptivnog regulatora na linearni model .....	38
Slika 5.8	Pogreške praćenja trajektorije uz primjenu adaptivnog regulatora na linearni model.....	38
Slika 5.9	Estimacija parametara vozila uz primjenu regulatora na linearni model .....	39
Slika 5.10	Estimacija brzina vozila uz primjenu regulatora na linearni model.....	39
Slika 5.11	Pozicije i kutevi vozila uz primjenu robusnog regulatora na linearni model.....	40
Slika 5.12	3D trajektorija vozila uz primjenu robusnog regulatora na linearni model .....	40
Slika 5.13	Upravljačke varijable vozila uz primjenu robusnog regulatora na linearni model	41
Slika 5.14	Pogreške praćenja trajektorije uz primjenu robusnog regulatora na linearni model .....	41
Slika 5.15	Pozicije i kutevi vozila za linearni regulator .....	42
Slika 5.16	3D trajektorija vozila za linearni regulator .....	42
Slika 5.17	Upravljačke varijable vozila za linearni regulator .....	43
Slika 5.18	Pogreške praćenja trajektorije za linearni regulator .....	43
Slika 5.19	Pozicije i kutevi vozila za adaptivni regulator .....	44
Slika 5.20	3D trajektorija vozila za adaptivni regulator.....	45
Slika 5.21	Upravljačke varijable vozila za adaptivni regulator.....	45
Slika 5.22	Pogreške praćenja trajektorije za adaptivni regulator .....	46
Slika 5.23	Estimacija parametara vozila .....	46
Slika 5.24	Estimacija brzina vozila .....	47
Slika 5.25	Pozicije i kutevi vozila za robusni regulator .....	48
Slika 5.26	3D trajektorija vozila za robusni regulator.....	48
Slika 5.27	Upravljačke varijable vozila za robusni regulator.....	49
Slika 5.28	Pogreške praćenja trajektorije za robusni regulator .....	49



## POPIS TABLICA

Tablica 5.1 Fizikalni parametri .....	34
Tablica 5.2 Pretpostavke i performanse regulatora .....	51
Tablica 5.3 Prednosti, nedostatci te robusnost regulatora.....	52

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\mathbf{F}_\xi$	-	Vektor ukupne translacijske sile
$\mathbf{J}_b$	-	Matrica inercije vozila
$\mathbf{J}_f$	-	Matrica dodatne inercije
$\mathbf{M}_f$	-	Matrica dodatne mase
$\mathbf{v}_t^T$	-	Translacijski vektor brzine
$C_d$	-	Koeficijent hidrodinamičkog trenja
$I_x$	kgm <sup>2</sup>	Moment inercije oko osi X
$I_y$	kgm <sup>2</sup>	Moment inercije oko osi Y
$I_z$	kgm <sup>2</sup>	Moment inercije oko osi Z
$T_{rot}$	J	Rotacijska kinetička energija
$T_{trans}$	J	Translacijska kinetička energija
$\dot{V}$	-	Derivacija Lyapunovljeve funkcije
$e_x$	m	Regulacijska pogreška u smjeru X – osi
$e_y$	m	Regulacijska pogreška u smjeru Y – osi
$e_z$	m	Regulacijska pogreška u smjeru Z – osi
$m_1$	kg	Masa vozila u smjeru X – osi
$m_2$	kg	Masa vozila u smjeru Y – osi
$m_3$	kg	Masa vozila u smjeru Z – osi
$m_b$	kg	Masa vozila
$p_x$	N	Fiktivni poremećaj
$u_1$	N	Ukupni potisak vozila u smjeru X – osi
$u_2$	Nm	Moment oko osi $\phi$
$u_3$	Nm	Moment oko osi $\theta$
$u_4$	Nm	Moment oko osi $\psi$
$x_d(t)$	m	Referentno stanje u smjeru X – osi
$y_d(t)$	m	Referentno stanje u smjeru Y – osi
$z_d(t)$	m	Referentno stanje u smjeru Z – osi
$\mathbf{F}$	-	Vektor ukupne translacijske sile i rotacijskog momenta
$\mathbf{J}$	-	Matrica inercije sustava
$\mathbf{M}$	-	Matrica mase sustava
$\mathbf{R}$	-	Matrica transformacije između mirujućeg i gibajućeg koordinatnog sustava
$\mathbf{S}(\mathbf{q})$	-	Matrica transformacije kinematičkog modela vozila
$\mathbf{q}$	-	Vektor pozicije i orijentacije vozila
$A$	m <sup>2</sup>	Efektivna površina vozila
$D$	Ns/m	Koeficijent viskoznog trenja
$F$	N	Sila potiska

---

$L$	J	Lagrangian sustava
$T$	J	Kinetička energija sustava
$U$	J	Potencijalna energija sustava
$V$	-	Lyapunovljeva funkcija
$r$	m	Radijus trupa vozila
$v$	m/s	Brzina vozila
$\eta$	-	Vektor orijentacije vozila
$\xi$	-	Vektor pozicije vozila
$\tau$	-	Vektor rotacijskog momenta
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća fluida
$\omega$	rad/s	Brzina vrtnje propelera

## SAŽETAK

Upravljanje autonomnim podvodnim vozilima je kompleksan zadatak zbog nelinearnih i vremenski varijantnih parametara modela, kao i nesigurnosti u vezi s vanjskim poremećajima. Podvodna vozila koja imaju više stupnjeva slobode gibanja od broja aktuatora predstavljaju dodatan izazov jer nije moguće upravljati svakim stupnjem slobode pojedinačno. U ovom radu je promatran X4-AUV, vozilo s 4 aktuatora (propelera) bez kormila za skretanje. Glavni cilj rada bio je razviti i analizirati tri različita regulatora za praćenje zadane referentne trajektorije. Implementiran je nelinearni dinamički model podvodnog vozila sa šest stupnjeva slobode gibanja u Matlabu te provedena linearizacija modela. Nakon toga, provedena je sinteza linearnog regulatora za slijeđenje referentne trajektorije bez vanjskih poremećaja, adaptivnog regulatora uz pretpostavku nepoznatih parametara vozila također bez vanjskih poremećaja, te robusni nelinearni regulator s kliznim režimom za upravljanje u slučaju vanjskih poremećaja. Dodatno, implementiran je robusni estimator derivacija signala za adaptivno i robusno upravljanje. Kroz provedene simulacije i analizu rezultata, provjerena je ispravnost i robusnost razvijenih regulatora za upravljanje autonomnim podvodnim vozilima.

Ključne riječi: podvodno vozilo, podupravljani mehanički sustavi, adaptivno upravljanje, robusno upravljanje

## **SUMMARY**

The control of autonomous underwater vehicles is a complex task due to the nonlinear and time-varying parameters of the model, as well as uncertainties related to external disturbances. Underwater vehicles with more degrees of freedom than the number of actuators present an additional challenge since it is not possible to control each degree of freedom individually. This thesis focuses on the X4-AUV, a vehicle with four actuators (propellers) and no rudder for steering. The main goal of the thesis was to develop and analyze three different controllers for tracking a desired reference trajectory. A nonlinear dynamic model of the underwater vehicle with six degrees of freedom was implemented in Matlab, and the model was linearized. Subsequently, a linear controller for tracking the reference trajectory without external disturbances, an adaptive controller assuming unknown vehicle parameters also without external disturbances, and a robust nonlinear sliding-mode controller for control in the presence of external disturbances were developed. Additionally, a robust signal derivative estimator was implemented for adaptive and robust control. Through simulations and analysis of the results, the accuracy and robustness of the developed controllers for managing autonomous underwater vehicles were verified.

Key words: underwater vehicle, underactuated mechanical systems, adaptive control, robust control

# 1. UVOD

## 1.1. Motivacija

Oceani pokrivaju oko 70% površine Zemlje [1] te imaju velik utjecaj na postojanje i evoluciju svih živih bića. Kako bi se provela istraživanja oceana te iskoristili resursi koje nude, posljednja desetljeća su posvećena razvoju tehnologija koje bi pomogle u izvođenju takvih operacija. Podvodna robotika je bitan znanstveni aspekt zbog širokih područja primjene poput istraživanja oceana, nadzora i kontrole podvodnih postrojenja te instalacija raznih vojnih objekata. Iz tog razloga su razvijena tzv. podvodna vozila koja se generalno mogu podijeliti na vozila s posadom i vozila bez posade. Zanimljiv je drugi tip vozila bez posade (eng. *Unmanned Underwater Vehicles, UUV*) koji se dalje dijele na daljinski upravljana vozila (eng. *Remotely Operated Vehicles, ROV*) te autonomna vozila (eng. *Autonomous Underwater Vehicles, AUV*). ROV i AUV tipovi vozila su većinski plijenili pažnju industrijskog te istraživačkog svijeta jer su prilagodljivi raznim surovim uvjetima kojima su izloženi te na taj način umanjuju opasnost za ljude i potrebu za ljudskom posadom. Razlika između AUV – a i ROV – a je ta što je kod AUV komunikacija ostvarena pomoću integrirane upravljačke jedinice te može raditi neovisno bez potrebe za ručnim upravljanjem dok su ROV kontinuirano upareni s ljudskim operaterom pomoću žične ili bežične komunikacije na brodu ili na tlu. S obzirom na prednosti AUV – a poput iskoristivosti, pokretljivosti i niskih operativnih troškova, dobivaju veću pozornost od ROV – a [1]. AUV imaju velik značaj u podvodnim zadacima zbog mogućnosti manevriranja u ogromnim dubinama i uskim prolazima jer nije potrebna fizička veza koja bi ograničavala domet i manevarsku sposobnost. Takva karakteristika izravno utječe na razvoj upravljačkog sustava za takvo vozilo tj. zahtjeva napredne upravljačke zakone te specifične metode upravljanja za obavljanje željenih zadataka. AUV predstavlja zahtjevan zakon upravljanja s obzirom na to da su većina takvih vozila podaktuirana tj. posjeduju manje aktuatora od stupnjeva slobode gibanja što nameće razna ograničenja na brzinu i akceleraciju vozila. Također kinematički i dinamički modeli takvih vozila su znatno nelinearni što otežava sintezu željenog regulatora. Većina autonomnih podvodnih vozila ima 6 stupnjeva slobode gibanja. U ovome radu se promatra vozilo pod nazivom „X4 – AUV“ koje ima 4 aktuatora što znači da spada u klasu podaktuiranih vozila za kojeg će biti izveden zakon upravljanja za različite uvjete poznavanja karakteristika vozila te poremećajima kojima je izloženo.

## 1.2. Struktura rada

U **drugom poglavlju** dan je detaljniji pregled podvodnih vozila, uvedene su fundamentalne ideje i koncepti povezani s podvodnim vozilima, njihove konstrukcije i sl. Neki faktori uzeti u obzir su konstrukcija trupa, propulzija te napajanje. Također su dotaknuti faktori koji utječu na samo podvodno vozilo poput uzgona, hidrodinamičkog prigušenja, Coriolisovih sila te efekt dodane mase.

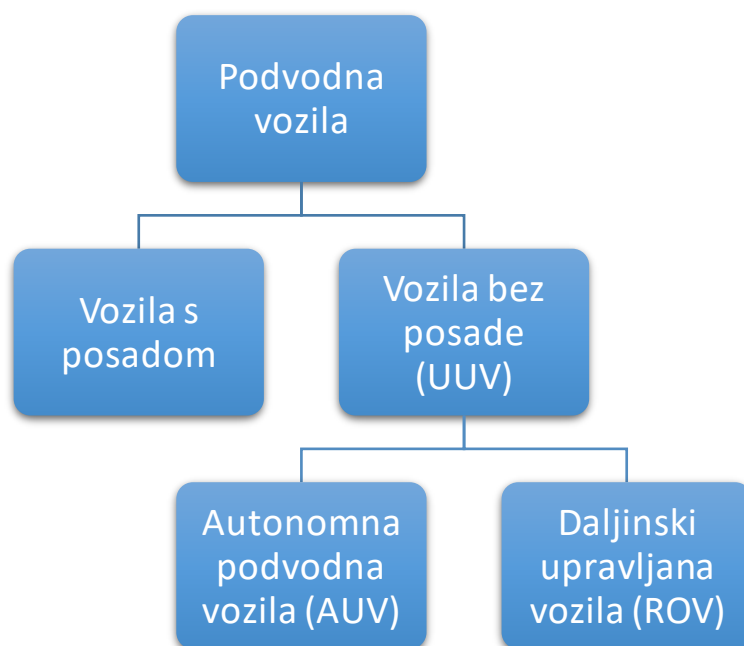
**Treće poglavlje** uvodi matematički model podvodnog vozila s 4 propulzora i 6 stupnjeva slobode gibanja tj. opis njegovog gibanja u matematičkom svijetu. Izveden je kinematički, dinamički te linearizirani model koji će se u sljedećem poglavlju koristiti za sintezu regulatora. U **četvrtom poglavlju** je provedena sinteza linearnog regulatora za problem slijeđenja proizvoljne referentne trajektorije na temelju linearnog modela, izveden je adaptivni regulator koji estimira nepoznate parametre podvodnog vozila poput mase i koeficijenta viskoznog trenja te je na kraju provedena sinteza robusnog nelinearnog regulatora (eng. *sliding-mode controller*) u prisutnosti nepoznatih poremećaja u vidu podvodnih struja.

**Peto poglavlje** prikazuje rezultate simulacija izvedenih regulatora primijenjenih na dinamički model podvodnog vozila implementiran u programskom alatu Matlab. Dan je osvrt na svaki regulator zasebno te su navedeni prednosti i nedostaci svakog. Na kraju poglavlja dana je sažeta usporedba svakih od navedenih upravljačkih zakona.

## 2. PODVODNA VOZILA

### 2.1. Općenito

Podvodna vozila se sve više primjenjuju u raznim područjima poput znanstvenih istraživanja, komercijalnih te rekreativnih aktivnosti. Vozila se većinom koriste za specifičnu primjenu ovisno o potrebi stoga postoji širok spektar kategorizacije takvih vozila. Jedna od tih kategorizacija je prikazana na slici 2.1.



Slika 2.1 Podjela podvodnih vozila [1]

Kao što je rečeno u uvodu, ovaj rad je orijentiran prema tipu vozila bez posade UUV, a konkretnije autonomnim vozilima. AUV imaju integriranu upravljačku jedinicu koja koristi informacije dobavljene od strane senzora kako bi odredila informacije koje je potrebno poslati na aktuatora da bi se izvršio zadani zadatak. S obzirom na to da je ovisnost o ispravnosti spominjanih komponenti velika, potreban je robusni dizajn samog vozila. Glavno ograničenje AUV – a je energijski kapacitet koji je moguće fizički ugraditi u vozilo. Većina AUV – a koristi razne baterije koje pružaju potrebnu propulziju i snagu. Stoga je ukupna dostupna energija ograničena od strane volumena ili težine baterija te gustoće energije istih. Navedene karakteristike uvelike utječu na konstrukcijske izvedbe ovakvih vozila. Autonomna priroda vozila određuje ključne faktore kao što su pouzdanost, robusnost te upravljivost. Kombinacija ovih faktora pokazuje da je proces razvoja AUV – a iterativan.



Za razliku od AUV – a, ROV je povezan s radnom stanicom na tlu te ta veza omogućuje komunikaciju između vozila i operatera. Kod većine ROV – a upravljački sustav je polu - automatiziran što znači da su neki elementi automatizirani npr. kontrola dubine što omogućuje operateru da se koncentrira na finese određenog zadatka. Zbog ovako izvedene komunikacije, ROV nije ograničen s energijskim kapacitetom kao AUV što uvelike olakšava dizajn takvog vozila.

Potrebni domet vozila također može značajno utjecati na karakteristike AUV – a prilikom razvoja. Npr. u slučaju dizajna AUV – a malog dometa stavlja se manji značaj na propulzivnu iskoristivost energije te se na taj način ostvaruje prostor za korištenje uređaja veće potrošnje energije kako bi se optimizirale i prilagodile potrebe zadatka. Glavni izazovi razvoja AUV – a su navigacija, komunikacija, autonomija te izdržljivost. Autonomija je glavni aspekt koji se bavi elektronikom te zakonima upravljanja. Tijekom obavljanja zadataka, AUV prolazi kroz razne manevarske scenarije stoga je potrebno prilagoditi upravljačke zakone na temelju različitih scenarija. Također dinamika AUV – a je nelinearna i vremenski varijantna tj. masa i sila uzgona nisu konstantni tijekom različitih uvjeta kojima je izloženo vozilo pod vodom. Podložno je raznim vanjskim poremećajima što posebno otežava modeliranje hidrodinamičkih sila.

## **2.2. Podjela autonomnih podvodnih vozila**

Unutar grupe autonomnih vozila postoje podgrupe vozila podijeljene po principu konkretne primjene. Ovakva vozila dijele zajedničke karakteristike te se većina AUV – a može podijeliti na sljedeće kategorije [2]:

### **2.2.1. Vozila za plitke vode (eng. *Shallow water survey AUV*)**

Ovaj tip vozila se koristi do dubine 500 m te se uglavnom koriste za oceanografski nadzor relativno blizu površine. Tipično su manje veličine zato što nisu pod utjecajem visokog tlaka vode. Većinom se koriste za nadzor velikih prostora pa brzine koje postižu su relativno visoke s obzirom na ostala slična vozila. Primjer ovakvih vozila su REMUS, Iver i sl. [2]. REMUS je prikazan na slici 2.2.



**Slika 2.2** Autonomno podvodno vozilo REMUS [3]

### **2.2.2. Vozila za srednje dubine vode (eng. Mid-water AUV)**

Odnose se na klasu AUV – a za dubine do 2500 m koji se također uglavnom koriste za nadzore, konkretnije morskog tla. Uglavnom su veće veličine kako bi se nosili s visokim tlakom na većim dubinama, iz čega proizilazi potreba za većim potiskom te snagom. Ovisno o primjeni, ovakav AUV postiže brzine u rasponu 1 knot/h do 4-5 knot/h. Primjer ovakvih vozila su SeaBED, REMUS i sl. [2]. SeaBED je prikazan na slici 2.3.



**Slika 2.3** Autonomno podvodno vozilo SeaBED [4]

### 2.2.3. Vozila za velike dubine vode (eng. Deep-water AUV)

Vozila za velike dubine vode su dizajnirani za dubine veće od 2500 m. S obzirom na velike tlakove koje ovakva vozila moraju izdržati, vrlo su velike i guste konstrukcije. Kako zaranjanje do takvih dubina traje jako dugo, ovakva vozila se šalju na dugačke zadatke kako bi se maksimalno iskoristili. Iz toga proizilazi potreba za velikim energijskim kapacitetom te se koriste uglavnom vrlo blizu morskog tla za visoko rezolucijske nadzore. Primjer vozila za velike dubine vode su ABE, SENTRY, JAGUAR i sl. [2]. Na slici 2.4 je prikazano SENTRY podvodno vozilo.



Slika 2.4 Autonomno podvodno vozilo SENTRY [5]

### 2.2.4. Glideri

Glideri se odnose na podvodna vozila koja koriste promjene u uzgonu i temperaturi vode zajedno sa krilima kako bi prebacili vertikalno gibanje u horizontalno. Ovakvi motori tipično postižu veće iskoristivosti od konvencionalnih generatora potiska što uvelike povećava njihov domet do tisuće kilometara. Ovakva vozila uglavnom rade bliže površini vode te nisu za korištenje na dubinama većim od 1000 m. Primjeri glidera su Spray, Seaglider, Slocum i sl. [2]. Na slici 2.5 je prikazano autonomno podvodno vozilo Seaglider.



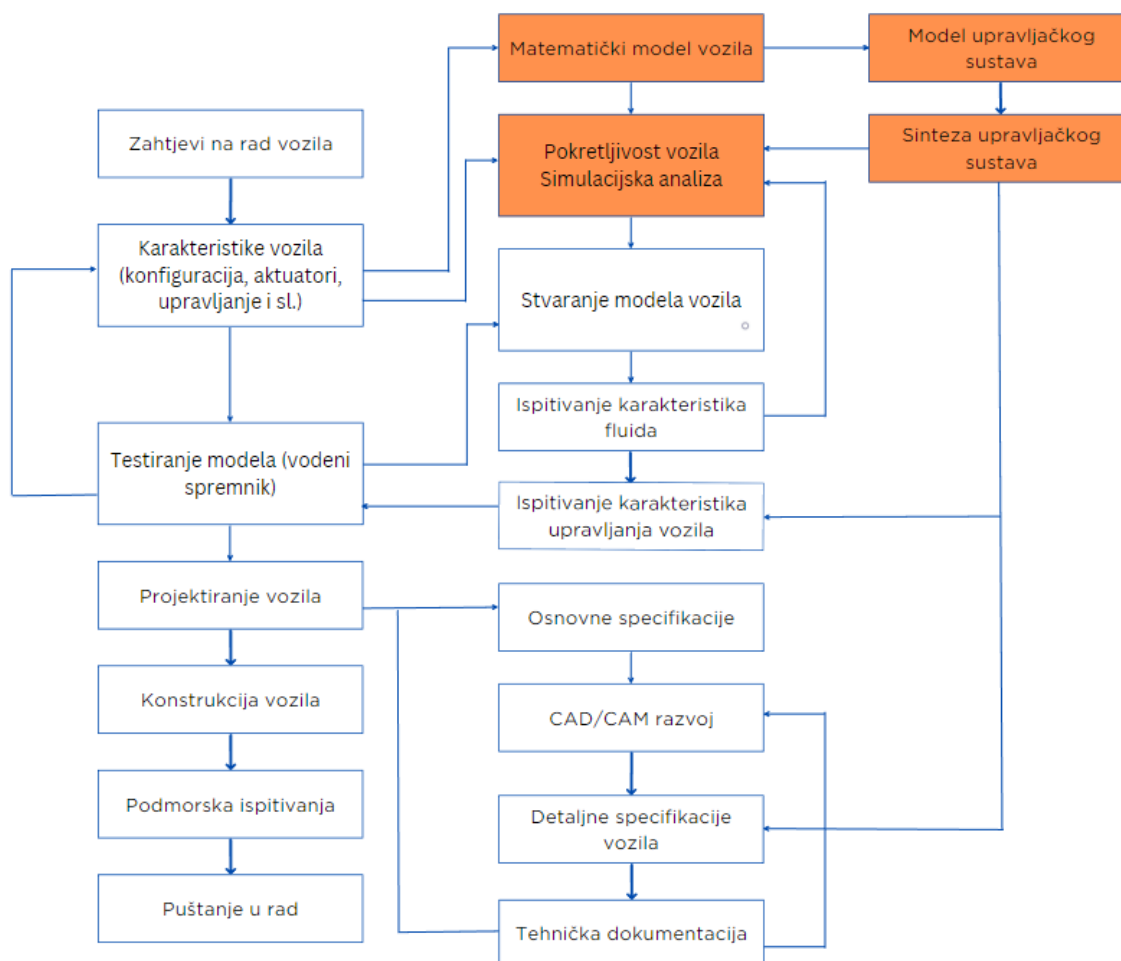
**Slika 2.5** Autonomno podvodno vozilo Seaglider [6]

### **2.3. Razvoj i konstrukcija autonomnog podvodnog vozila**

Na slici 2.6 prikazana je moguća metoda razvoja podvodnog vozila. Proces razvoja uključuje definiranje karakteristika vozila poput konfiguracije, aktuatora, upravljanja, sensorike, a sve s obzirom na potrebne uvjete eksploatacije. Testiranje modela kroz navedene procese može rano identificirati potrebne preinake prije same konstrukcije vozila te na taj način omogućiti optimalan tijek razvoja prototipa i smanjiti rizik potrebe rekonstrukcije i većih modifikacija nakon već izvedene konstrukcije.

Postoji nekoliko aspekata u električnom i mehaničkom dijelu razvoja autonomnog podvodnog vozila kako bi on bio uspješan. Za razvoj takvog vozila potrebno je imati čvrstu podlogu znanja, fundamentalnih koncepata i teorije o procesima i fizikalnim zakonima koji utječu na podvodno vozilo. Jedni od bitnih aspekata koji će se obraditi u sljedećim poglavljima su konstrukcija trupa, propulzija, zaranjanje te električno napajanje





Slika 2.6 Razvojni proces podvodnog vozila [1]

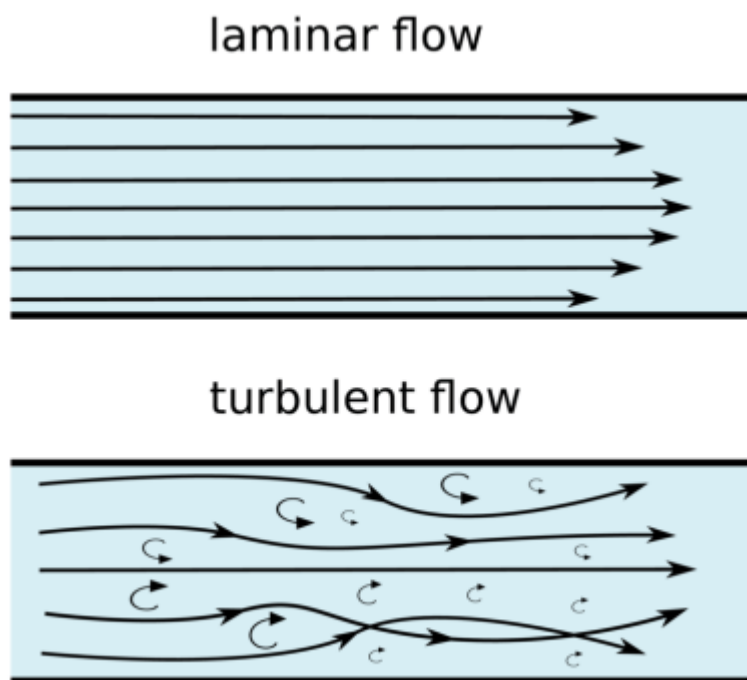
### 2.3.1. Konstrukcija trupa

Jedne od temeljnih karakteristika podvodnog vozila su veličina i oblik. Oblik podvodnog vozila je prvi korak u njegovom razvoju te on određuje primjenu, efikasnost i domet vozila. Postoje razni oblici podvodnih vozila kao što su [1]:

- Torpedo trup, veliki i mali
- Zaobljeni (okrugli) trup, laminarno strujanje
- Pravokutni aerodinamički trup
- Vozila s više trupova

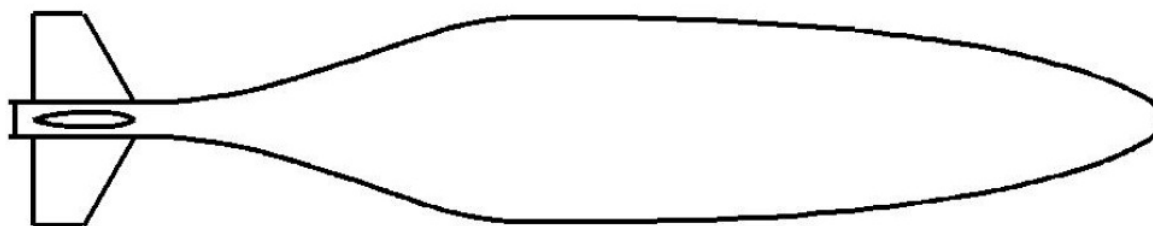
### 2.3.1.1. Laminarno i turbulentno strujanje

Trup koji je konstruiran da generira laminarno strujanje fluida oko sebe ostvaruje nizak faktor trenja. Kod laminarnog strujanja, čestice fluida se kreću pravilno u slojevima te je faktor trenja puno niži nego kod turbulentnog strujanja gdje se čestice fluida kreću eratično što rezultira s većim tangencijalnim naprežanjem između slojeva. Taj fenomen je prikazan na slici 2.7.



**Slika 2.7 Usporedba laminarnog i turbulentnog strujanja [1]**

Kako bi se odredio tip strujanja, laminaran ili turbulentan, koristi se bezdimenzijska značajka Reynoldsov broj tj. omjer inercijskih i viskoznih sila u strujanju fluida. Laminarno strujanje nastupa pri niskim vrijednostima Reynoldsovog broja te je karakterizirano kao glatko, konstantno gibanje fluida. Turbulentno strujanje nastupa pri većim vrijednostima te je karakterizirano vrtlozima, nepravilnim gibanjem čestica fluida. Kako bi se održalo laminarno strujanje, trup treba biti konstruiran tako da se promjer postepeno povećava gledajući od vrha trupa. Na taj način se stvara poželjan gradijent tlaka preko 60 – 70 % površine trupa. U tom području površina trupa treba biti čim glađa i hidrodinamički čišća što je više moguće. Primjer takvog dizajna trupa je prikazan na slici 2.8.

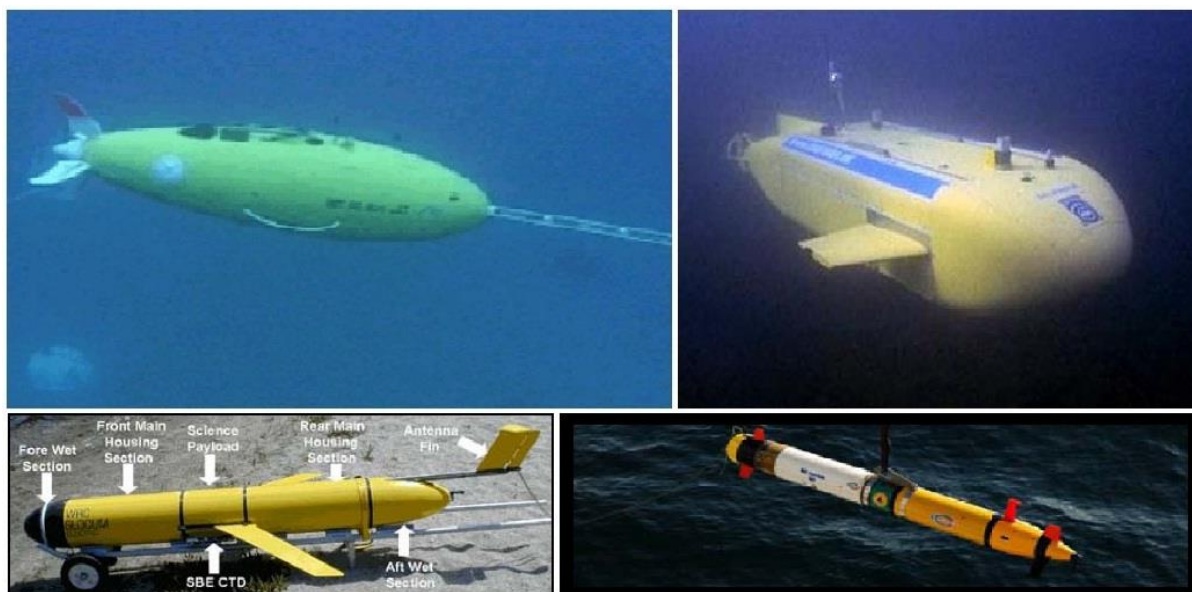


**Slika 2.8** Primjer trupa pogodnog za laminarno strujanje [1]

### 2.3.1.2. Oblik podvodnog vozila

Većina današnjih autonomnih podvodnih vozila koja se koriste u industriji se mogu klasificirati prema obliku trupa – torpedobuoy oblik i ostali oblici. Ovakva podjela je bitna jer određuje mnogo karakteristika autonomnog podvodnog vozila. Klasični torpedobuoy oblik trupa ima manji faktor trenja i postiže puno veće brzine. Podvodna vozila s torpedobuoy oblikom trupa uobičajeno koriste krmni potisak i peraje kako bi kontrolirala gibanje stoga im je potrebna konstantna translacijska brzina kako bi imali potpunu kontrolu nad vozilom. Generalno podvodna vozila s torpedobuoy oblikom trupa imaju puno veći domet te pružaju solidne performanse u prisutnosti osrednjih jačina morskih struja. Ovakva vozila imaju 6 stupnjeva slobode gibanja, 3 rotacije te 3 translacije, ali nije moguće upravljanje svakim od njih zasebno što posebno otežava autonomno upravljanje.

Ostali oblici trupa su namijenjeni za podvodna vozila pri puno nižim brzinama. Veći faktor oblika za ovakva vozila znači veći faktor trenja, što otežava primjenu u uvjetima jačih morskih struja. Niže brzine i veća manevarska sposobnost omogućuju vozilu veću navigacijsku točnost stoga su ova vozila namijenjena za fotografske nadzore visoke razlučivosti te široko mapiranje tla. Razlika ove dvije klase vozila je analogna razlici aviona i helikoptera. Svaki od njih ima određene prednosti te je namijenjen za različite primjene. Ove dvije klase vozila su prikazane na slikama 2.9 i 2.10.



Slika 2.9 Vozila s torpedno oblikom trupa [1]



Slika 2.10 Vozila s ostalim oblicima trupa [1]

### 2.3.2. Zaranjanje

S obzirom na to da je volumen podvodnog vozila konstantan, sila koja djeluje suprotno od smjera sile uzgona mora biti veća od same sile uzgona kako bi vozilo zaronilo. Ovo se može postići na dva načina. Jedan od načina je da se poveća masa podvodnog vozila koristeći balast, a drugi način bi bio koristeći dodatne potisnike. Primjena balasta je češća s obzirom na to da je ova metoda većinom mehaničke prirode te uključuje pumpe i komprimirani zrak kako bi se uzela i ispuštala određena količina vode. U slučaju korištenja dodatnih potisnika, oni bi trebali biti usmjereni davanju potiska prema dolje pa je ta metoda iznimno neefikasna s obzirom na potrošnju energije te nije primjerena za velike dubine. Kako bi se smanjila veličina balastnih spremnika ili potrebna generirana sila potisnika, podvodna vozila su konstruirana tako da imaju neutralni uzgon tj. težina vozila je takvog iznosa da je približno manja ili jednaka sili uzgona.



### 2.3.3. *Propulzija*

Sva autonomna podvodna vozila moraju imati neki izvor potiska te je taj dio većinom najveći potrošač energije. Većina vozila koriste motore kako bi pogonili potisnike uslijed velikih troškova alternativnih metoda. Pozicija potisnika na vozilu utječe na stupnjeve slobode gibanja koji se mogu izravno upravljati. Njihova pozicija također može uzrokovati interferenciju s elektroničkim komponentama stoga je iznimno važno ju uzeti u obzir pri konstrukciji. Pri jednolikom gibanju, generirani potisak je jednak trenju koje dolazi od vozila prema izrazu [1]:

$$F = 0,5\rho v^2 AC_d \quad (2.1)$$

gdje je  $\rho$  gustoća fluida,  $v$  je brzina vozila,  $A$  je efektivna površina, a  $C_d$  je koeficijent hidrodinamičkog trenja. Potrošnja energije sustava propulzije se ekstremno povećava s brzinom vozila s obzirom na to da je snaga potiska jednaka umnošku potiska i brzine, što znači da je snaga potiska kubna funkcija brzine. Uzimajući to u obzir, s obzirom na to da podvodna vozila imaju ograničen energijski kapacitet, ona se moraju gibati takvom brzinom da ne troše previše energije, ali u isto vrijeme ograničiti vrijeme obavljanja zadatka.

### 2.3.4. *Napajanje*

Električna energija u autonomnim podvodnim vozilima je uglavnom dobavljana pomoću baterija. Idealni raspored baterija je da su povezane u paralelu s diodama između svake od njih tako da omoguće jednako pražnjenje i da spriječe tok struje između baterija. Osigurači bi trebali biti implementirani kako bi spriječili prekomjerni tok struje u slučaju kratkog spoja ili nekog drugog električnog kvara komponenata. S obzirom na to da autonomna podvodna vozila imaju ograničen izbor izvora napajanja, komponente i oprema za njih bi trebali biti odabrani tako da troše što je manje energije moguće tako da omoguće baterijama što veće vrijeme podvodnom vozilu da obavi svoj zadatak.

## **2.4. Utjecajni čimbenici na podvodno vozilo**

Pri konstrukciji autonomnog podvodnog vozila, postoji nekoliko čimbenika koje je potrebno uzeti u obzir kao što su uzgon, hidrodinamičko prigušenje, Coriolisova sila te efekt dodane mase. Uzgon je jedan od glavnih faktora za uzeti u obzir s obzirom na to da on direktno utječe na sposobnost vozila za zaron kao i za njegovu stabilnost. Na stabilnost utječu i vanjske sile kao i tlak koji je također iznimno bitan za uzeti u obzir.

### **2.4.1. Uzgon**

Iznos sile uzgona koje utječe na tijelo je jednak težini volumena fluida koji je istisnut od tog istog tijela. Sposobnost tijela da pluta ovisi o odnosu sile uzgona te težine tijela. Ukoliko je sila uzgona većeg iznosa od težine tijela, ono će plutati na površini, a ako je sila uzgona manjeg iznosa od težine tijela, ono će potonuti na tlo. Ukoliko su sila uzgona i težina tijela jednakog iznosa, tijelo će ostati na jednom mjestu.

### **2.4.2. Stabilnost**

Ukoliko pretpostavimo okolni mirujući fluid, stabilnost statičnog uronjenog tijela ovisi o poziciji težišta tijela i hvatišta sile uzgona. Hvatište sile uzgona je u težištu volumena istisnutog dijela fluida. Ukoliko težište i hvatište sile uzgona nisu u istoj vertikalnoj ravnini, tada će nastupiti destabilizacija uslijed stvaranja momenta između težine i sile uzgona. Idealno bi te dvije sile trebale ležati na istom pravcu te s određenim razmakom između njih i to tako da se težište nalazi ispod hvatišta sile uzgona. Kako bi se dodatno povećala stabilnost, centar trenja koji je određen s težištem efektivne površine vozila, bi trebao biti poravnat s hvatištima vanjskih sila koje djeluju na vozilo.

### **2.4.3. Hidrodinamičko prigušenje**

Pri kretanju tijela kroz fluid, sile koje djeluju na tijelo suprotno od smjera gibanja su viskozne sile trenja te izazivaju hidrodinamičko prigušenje. Glavni uzrok su sile otpora te trenje na stijenkama trupa vozila. Ove sile imaju značajan utjecaj na dinamiku autonomnog podvodnog vozila te uslijed toga ubacuju nelinearnosti u model. Trenje na stijenkama trupa vozila se mogu zanemariti u odnosu na sile otpora stoga je inače dovoljno samo uzeti njih u obzir pri izračunu hidrodinamičkog prigušenja.

#### **2.4.4. Coriolisova sila**

Coriolisova sila je inercijska sila koja djeluje okomito tj. u smjeru normale na smjer gibanja tijela. Iznos Coriolisove sile je proporcionalan brzini i rotaciji koordinatnog sustava. Djelovanje ove sile ima za posljedicu da se putanja tijela deformira iako u stvarnosti to nije istina nego tako djeluje samo zbog gibanja koordinatnog sustava tijela. S obzirom na to da koordinatni sustav autonomnog podvodnog vozila rotira u odnosu na vanjski koordinatni sustav, utjecaj Coriolisove sile se uzima u obzir pri definiranju dinamičkih jednadžbi gibanja vozila.

#### **2.4.5. Efekt dodane mase**

Fenomen koji također utječe na podvodna vozila je efekt dodane mase. Kada se vozilo kreće pod vodom, okolni fluid koji okružuje vozilo se ubrzava zajedno sa vozilom. Ovo utječe na dinamiku vozila na način da je nužno uzeti u obzir dodatnu silu koja je potrebna da se ubrza okolni fluid. U jednadžbama gibanja se taj efekt modelira kao dodana masa. Utjecaj na efekt dodane mase imaju sama masa vozila, momenti inercije te značajan utjecaj također ima i oblik samog vozila. Koeficijenti potrebni za izračun dodane mase se većinom dobivaju empirijskim putem, raznim eksperimentima i numeričkim metodama.

#### **2.4.6. Okolišne sile**

Okolišni poremećaji su čimbenik koji posebno utječe na gibanje i stabilnost podvodnog vozila. U slučaju autonomnog podvodnog vozila, ti poremećaji mogu biti u obliku valova, morskih struja te vjetra. Dok je vozilo uronjeno, utjecaj valova i vjetra se može uglavnom zanemariti. Najznačajniji poremećaji u tom slučaju dolaze od strane morskih struja. Ukoliko se vozilo nalazi u kontroliranom okolišu, kao što je bazen, utjecaj ovih sila se praktički može zanemariti.

#### **2.4.7. Tlak**

Podvodni tlak je uzrokovan težinom fluida, u ovom slučaju vode, što djeluje na neko tijelo. Tlak se većinom izražava kao apsolutni ili kao razlika stvarnog i okolišnog tlaka. Na površini vode, tlak se uzima kao atmosferski. Za svakih 10 m dubine, tlak se povećava za otprilike 1 atm tj. 101325 Pa. Iako je funkcija promjene tlaka linearna, rast tlaka s dubinom je značajan te podvodna vozila moraju biti konstruirana tako da podnose takve razine tlaka pogotovo podvodna vozila namijenjena za velike dubine.

### 3. MATEMATIČKI MODEL PODVODNOG VOZILA

Prisutnost kompleksnih i nelinearnih opterećenja na vozilo poput hidrodinamičkog otpora, prigušenja, sila uzgona, Coriolisovih i centrifugalnih sila te potisaka propelera [7] otežava upravljanje istim. U ovom poglavlju dan je uvodni pregled modeliranja podvodnih vozila, definirana su osnovna gibanja vozila, opisana je konstrukcijska izvedba X4 – AUV – a te njegovog modeliranja iz čega slijedi sinteza regulatora u sljedećem poglavlju.

#### 3.1. Modeliranje podvodnog vozila

Modeliranje podvodnih vozila objedinjuje grane statike i dinamike krutog tijela. Statika se bavi proučavanjem tijela u mirovanju ili gibanju stalnom brzinom dok se dinamika bavi tijelima u gibanju promjenjivom brzinom tj. akceleracijom različitom od nule. Grana dinamike se dijeli na dva dijela: kinematika, koja proučava isključivo gibanje tijela te kinetika, koja proučava i sile koje uzrokuju gibanje [8].

Kao što je već rečeno, jednadžbe gibanja podvodnog vozila su znatno nelinearne. Sile i momenti koji djeluju na vozilo kroz fluid ovise o mnogim faktorima. Faktori uključuju karakteristike samog vozila (duljina, geometrija i sl.), karakteristike gibanja (linearne, kutne brzine i sl.) te karakteristike samog fluida (gustoća, viskoznost i sl.). Nakon izvođenja jednadžbi gibanja AUV – a, potrebno je odrediti relevantne koeficijente u navedenim jednadžbama te iz toga generirati kompletni dinamički model.

#### 3.2. Osnovna gibanja vozila

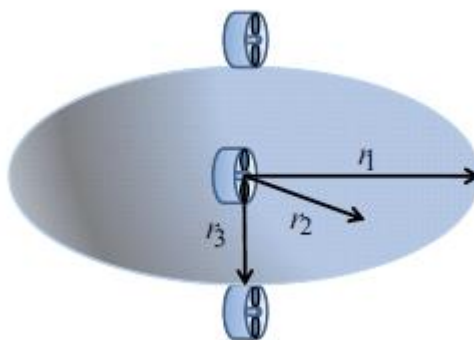
U automatskom upravljanju vozila, zadatci upravljanja se generalno mogu svesti na 3 osnovna tipa:

- Gibanje od točke do točke. Iz poznate početne konfiguracije vozila, potrebno je postići gibanje do zadane konačne konfiguracije neovisno o trajektoriji.
- Vremenski invarijantno praćenje trajektorije. U ovom slučaju vozilo također treba postići zadanu konačnu konfiguraciju, ali pritom mora pratiti zadanu geometrijsku trajektoriju. Početna konfiguracija može i ne mora se nalaziti na trajektoriji.
- Vremenski varijantno praćenje trajektorije. Kod ovog tipa upravljanja vozilo treba pratiti zadanu trajektoriju u Kartezijskom sustavu tj. geometrijsku trajektoriju definiranu u vremenu, krećući od početne konfiguracije.

Gibanje od točke do točke se može smatrati problemom stabilizacije vozila u željenoj ravnotežnoj točki dok je praćenje referentne trajektorije problem gdje pogreška između referentnog i stvarnog stanja vozila treba asimptotski konvergirati nuli. Uobičajeno je stabilizacija u željenoj točki jednostavnija za provesti osim za neholonomičke sustave kod kojih vrijedi obrnuto [8].

### 3.3. X4 – AUV

X4 – AUV je podvodno vozilo eliptičnog oblika trupa koje posjeduje 4 propelera bez kormila za upravljanje čime spada u klasu podaktuiranih sustava. Eliptični oblik umanjuje sile trenja koje djeluju na trup pri gibanju kroz vodu u odnosu na npr. sferni oblik [1]. Vozilo je prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1 X4 – AUV [1]

#### 3.3.1. Koordinatni sustav

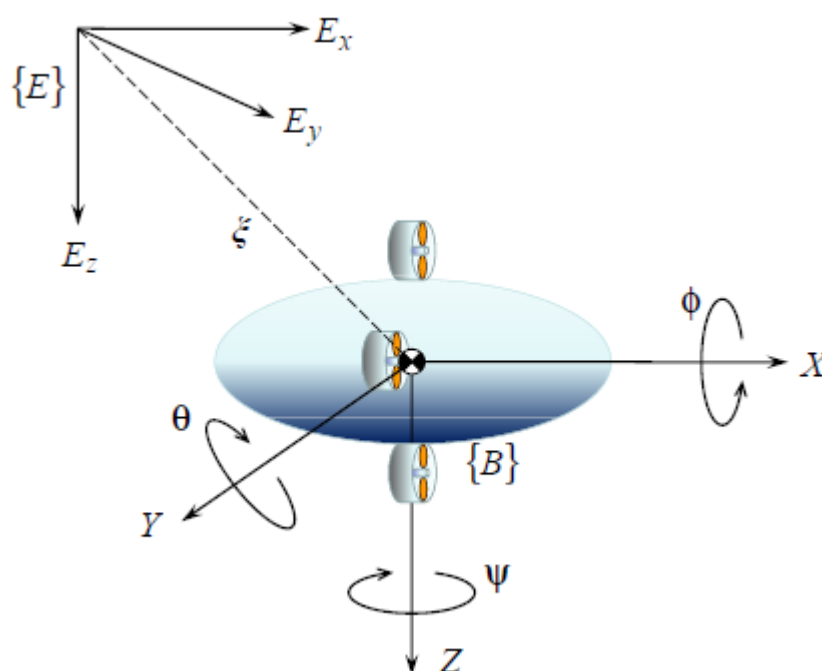
Kako bi se opisala gibanja podvodnog vozila potrebno je definirati posebne koordinatne sustave, mirujući i gibajući koordinatni sustav. Mirujući koordinatni sustav je uobičajeno postavljen na fiksnom mjestu na Zemlji dok se gibajući nalazi i giba zajedno s vozilom. Osi gibajućeg koordinatnog sustava od kojih se dvije poklapaju s glavnim osima inercije vozila su definirane na sljedeći način [8]:

X – longitudinalna os

Y – transverzalna os

Z – normalna os

Takav raspored koordinatnih sustava je prikazan na slici 3.2.



Slika 3.2 Koordinatni sustavi [1]

Pomoću ovako definiranih koordinatnih sustava, s mirujućim je moguće odrediti orijentaciju vozila u prostoru dok je s gibajućim moguće odrediti brzinu i akceleraciju što je korisno pri navigaciji.

Ako se definira težište tijela u gibajućem koordinatnom sustavu sa  $\xi = [x \ y \ z]^T$  te kutevi zakreta osi X, Y i Z sa  $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ , matrica transformacije  $R$  između dva koordinatna sustava je dana sa [1]:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

### 3.3.2. Kinematički model

Kinematički model sustava obuhvaća jednadžbe gibanja bez uzimanja u obzir sila koje generiraju to gibanje. Ovakav model omogućava odvajanje dinamike samog vozila od njegovog gibanja. Pomoću matrice transformacije definirane jednadžbom (3.1) te definiranjem vektora  $\mathbf{q}^T = [\xi^T \quad \eta^T]$ , dobiva se kinematička jednadžba gibanja vozila:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{v} \quad (3.2)$$

koja se može reducirati na sljedeći oblik:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta\sin\psi & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

zato što X4 – AUV ima puni potisak samo u smjeru X – osi, gdje je  $\mathbf{v} = [\dot{x}_b \quad \dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T$   $\dot{x}_b$  je definiran kao translacijska brzina u smjeru X – osi dok je  $[\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T$  vektor kutne brzine u pripadajućim smjerovima osi.

S obzirom na to da X4 – AUV ima brzinu  $v_x$  samo u smjeru X – osi gibajućeg koordinatnog sustava, translacijski vektor brzine se može reducirati na:

$$\mathbf{v}_t^T = [v_x \quad 0 \quad 0] \quad (3.4)$$

Ako se matrica transformacija prilagodi na sljedeći oblik:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}] \quad (3.5)$$

gdje su  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  i  $\mathbf{a}$  redom prvi, drugi i treći stupac matrice transformacije  $\mathbf{R}$ , translacijski vektor brzine  $\xi$  u mirujućem koordinatnom sustavu postaje:

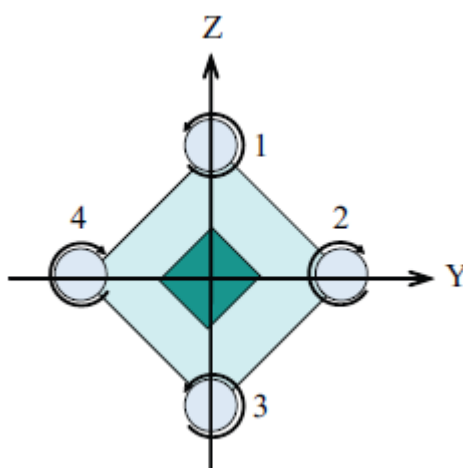
$$\xi = \mathbf{n}v_x \quad (3.6)$$

### 3.3.3. Dinamički model

Dinamički model za AUV je definiran kako bi se provela sinteza regulatora te izvele simulacije. Kako bi ga u potpunosti izveli potrebno je opisati osnovne koncepte propulzijskog sustava te uvesti matrice inercije i mase.

#### 3.3.3.1. Propulzijski sustav

Propulzijski sustav za X4 – AUV ronilicu se sastoji od 4 propelera postavljena horizontalno i vertikalno, preuzimajući koncept quadrotora. Upravljanje ronilicom se postiže tako da brzine pojedinačnih propelera variraju te tako prilagođavaju sile i momente koje generiraju. Svaki propeler generira silu i moment oko svoje osi rotacije kao i silu trenja u suprotnom smjeru od gibanja ronilice. Ukoliko se jedan par propelera okreće u suprotnom smjeru od drugog para rješava se potreba za kormilima. Također se longitudinalna rotacija postiže razlikom kutne brzine parova propelera. Akceleracija u jednom smjeru se postiže povećavajući brzinu vrtnje sva 4 propelera zajedno. Shematski prikaz stražnje strane ronilice se vidi na slici 3.3.



Slika 3.3 Propulzijski sustav [1]

Ukoliko se svi propeleri vrte istom brzinom i to propeleri 1 i 3 u smjeru suprotnom kazaljci na satu, a propeleri 2 i 4 u smjeru kazaljke na satu, hidrodinamički moment te kutna akceleracija oko longitudinalne osi je jednaka nuli. Kutna akceleracija oko transverzalne i normalne osi može biti korištena neovisno o utjecaju na longitudinalnu os. Svaki par propelera koji se vrte u istom smjeru upravljajući s jednom osi, a pritom jedan propeler povećava brzinu i drugi smanjuje, će održati ravnotežu oko longitudinalne osi.



### 3.3.3.2. Matrica inercije i mase

Kako se ronilica giba, kreće se kroz fluid. Taj efekt prolaženja kroz fluid stvara silu koja se suprotstavlja akceleraciji. Zbog utjecaja te sile na ronilicu, u dinamički model se ubacuje dodatna masa i inercija kako bi se simulirao sličan efekt. Dodatna masa i inercija ovise uvelike o konstrukcijskoj izvedbi ronilice i gustoći fluida kojim se kreće. Za simetrični trup ronilice kakav ima X4 – AUV, dodatna masa i inercija su dijagonalne [8] te se mogu napisati na sljedeći način:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) = m_b \mathbf{I} + \mathbf{M}_f \quad (3.7)$$

$$\mathbf{J} = \text{diag}(I_x, I_y, I_z) = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_f \quad (3.8)$$

U gornjim izrazima  $m_1, m_2$  i  $m_3$  označavaju ukupnu masu u X, Y i Z smjeru,  $I_x, I_y$  i  $I_z$  označavaju ukupnu inerciju u X, Y i Z smjeru,  $m_b$  je masa ronilice,  $\mathbf{J}_b$  je matrica inercije ronilice,  $\mathbf{I}$  je jedinična matrica dimenzija 3 x 3,  $\mathbf{M}_f$  je matrica dodatne mase, a  $\mathbf{J}_f$  je matrica dodatne inercije.

Matrica dodatne mase te matrica dodatne inercije se mogu definirati na sljedeći način:

$$\mathbf{M}_f = \text{diag}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{J}_f = \text{diag}(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}) \quad (3.10)$$

gdje se elementi ovih matrica za ronilicu X4 – AUV radijusa  $r_1 = 5r$  i  $r_2 = r_3 = r$  mogu definirati prema [1]:

$$\bar{A} = 3.94\pi r^3 \quad (3.11)$$

$$\bar{B} = \bar{C} = 5.96\pi r^3 \quad (3.12)$$

$$\bar{P} = 0 \quad (3.13)$$

$$\bar{Q} = \bar{R} = 24.3\pi r^3 \quad (3.14)$$

### 3.3.3.3. Izvod dinamičkog modela

Pomoću Lagrange metode izvodi se dinamički model za X4 – AUV ronilicu s bitnom pretpostavkom tijela neutralnog uzgona tj. smatra se da se utjecaj gravitacije te sile uzgona na ronilicu međusobno poništava. Izraz za ukupnu kinetičku energiju slijedi:

$$T = T_{trans} + T_{rot} \quad (3.15)$$

gdje su  $T_{trans}$  i  $T_{rot}$  translacijska i rotacijska kinetička energija definirane sljedećim izrazima:

$$T_{trans} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.16)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.17)$$

tako da se ukupna kinetička energija može zapisati na sljedeći način:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.18)$$

Iz pretpostavke o neutralnom uzgonu tijela, potencijalna energija se može smatrati:

$$U = 0 \quad (3.19)$$

Ukoliko se uzme generalizirana koordinata  $\mathbf{q}^T = [\boldsymbol{\xi}^T \quad \boldsymbol{\eta}^T]$ , Lagrangian  $L$  zadovoljava sljedeće jednakosti:

$$L = T - U \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (3.21)$$

Iz jednadžbi (2.18), (2.19) i (2.20) slijedi:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}) \quad (3.22)$$

Svaki član u jednadžbi (2.21) je određen na sljedeći način:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Sada jednadžba (2.21) glasi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}) \end{bmatrix} = \mathbf{F} \quad (3.26)$$

gdje je generalizirana sila  $\mathbf{F}$  dana izrazima:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\xi \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi]^T \quad (3.28)$$

$\mathbf{F}_\xi$  i  $\boldsymbol{\tau}$  su ukupna translacijska sila i rotacijski moment koji utječu na ronilicu. Ako se definira  $u_1$  kao input za upravljanje translacijskim pomakom u smjeru X – osi te  $f_i$  potisak generiran od strane svakog propelera, tada je  $u_1$  definiran na sljedeći način:

$$u_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad (3.29)$$

Sada se pomoću matrice transformacije može izračunati ukupna translacijska sila na ronilicu izrazom:

$$\mathbf{F}_\xi = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi \\ \cos\theta \sin\psi \\ -\sin\theta \end{bmatrix} [f_1 + f_2 + f_3 + f_4] \quad (3.30)$$

Ako se definira moment generiran od svakog propelera kao  $\tau_{Mi}$ , moment oko svake osi tijela je dan izrazima:

$$\tau_\phi = \tau_{M1} + \tau_{M2} + \tau_{M3} + \tau_{M4} \quad (3.31)$$

$$\tau_\theta = (f_1 - f_3)l \quad (3.32)$$

$$\tau_\psi = (f_2 - f_4)l \quad (3.33)$$

gdje je  $l$  udaljenost između težišta ronilice i propelera.

Ukupno translacijsko i rotacijsko gibanje ronilice je dano sljedećim izrazima:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}_\xi = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi \\ -\sin\theta \end{bmatrix} [f_1 + f_2 + f_3 + f_4] \quad (3.34)$$

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{M1} + \tau_{M2} + \tau_{M3} + \tau_{M4} \\ (f_1 - f_3)l \\ (f_2 - f_4)l \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Jednadžba (2.35) se može preformulirati pomoću Coriolisovog izraza definiranog u [1] na sljedeći način:

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z) \\ -\dot{\theta}\dot{\psi}(I_z - I_x) \\ -\dot{\theta}\dot{\psi}(I_x - I_y) \end{bmatrix} + J_t \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ -\dot{\theta} \end{bmatrix} [\omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3] = \begin{bmatrix} \tau_{M1} + \tau_{M2} + \tau_{M3} + \tau_{M4} \\ (f_1 - f_3)l \\ (f_2 - f_4)l \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

gdje je  $J_t$  moment inercije propelera te  $\omega_i$  brzina vrtnje propelera.

Konačno, ako se definira:

$$\Omega = \omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3 \quad (3.37)$$

puni dinamički model ronilice po komponentama je dan sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x} &= \cos\theta \cos\psi u_1 \\
m_2 \ddot{y} &= \cos\theta \sin\psi u_1 \\
m_3 \ddot{z} &= -\sin\theta u_1 \\
I_x \ddot{\phi} &= \dot{\theta}\psi(I_y - I_z) + u_2 \\
I_y \ddot{\theta} &= \dot{\phi}\psi(I_z - I_x) - J_t \dot{\psi}\Omega + l u_3 \\
I_z \ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta}(I_x - I_y) + J_t \dot{\theta}\Omega + l u_4
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Uz pretpostavku vrlo malih kuteva:  $\cos(\alpha) \sim 1$ ,  $\sin(\alpha) \sim \alpha$ , zanemarenjem kvadratičnih članova malih kuteva i brzina te momenta inercije propelera izvodi se (bi)linearni dinamički model:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x} &= u_1 \\
m_2 \ddot{y} &= \psi u_1 \\
m_3 \ddot{z} &= -\theta u_1 \\
I_x \ddot{\phi} &= u_2 \\
I_y \ddot{\theta} &= u_3 \\
I_z \ddot{\psi} &= u_4
\end{aligned} \tag{3.39}$$

pomoću kojega će se puno jednostavnije provesti sinteza svih regulatora.

## 4. SINTEZA UPRAVLJAČKIH ZAKONA

### 4.1. Sinteza linearnog regulatora

Za sintezu linearnog regulatora koristit će se metoda eksterne linearizacije te prethodno izvedeni bilinearni model (3.39). Naime, kako bi se konstruirao linearni PD regulator, potrebno je prvo u potpunosti linearizirati model što znači eliminirati članove gdje se množe upravljačke varijable s varijablama stanja. To nije moguće napraviti s trenutnim modelom, stoga je potrebno dodati fiktivnu struju u vidu poremećaja koji će se kompenzirati metodom eksterne linearizacije te na taj način u potpunosti linearizirati model. Takav modificirani model je prikazan na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x} &= -p_x + u_1 \\
 m_2 \ddot{y} &= \psi u_1 \\
 m_3 \ddot{z} &= -\theta u_1 \\
 I_x \ddot{\phi} &= u_2 \\
 I_y \ddot{\theta} &= u_3 \\
 I_z \ddot{\psi} &= u_4
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdje je  $p_x$  fiktivni poremećaj.

Metoda eksterne linearizacije podrazumijeva sljedeće pretpostavke:

**Pretpostavka 1.** Mjerljivost svih varijabli stanja (pozicije i brzine).

**Pretpostavka 2.** Poznavanje egzaktnih vrijednosti parametara modela

**Upravljački zadatak:** Konstruirati linearni regulator  $u_1, u_2, u_3$  i  $u_4$  s ciljem da varijable stanja  $x(t), y(t)$  i  $z(t)$  slijede željena vremenski varijabilna referentna stanja  $x_d(t), y_d(t)$  i  $z_d(t)$ .

Definiraju se regulacijske pogreške:

$$e_x = x - x_d(t), \quad e_y = y - y_d(t), \quad e_z = z - z_d(t) \tag{4.3}$$

Prvi korak je sinteza zakona upravljanja  $u_1$  koji omogućava slijeđenje komponente referentne trajektorije  $x_d(t)$ . Ako se u prvu jednadžbu dinamičkog modela ubaci regulacijska pogreška definirana u (4.3), dobiva se jednadžba pogreške:

$$m_1 \ddot{e}_x = -m \ddot{x}_d(t) - p_x + u_1 \tag{4.4}$$

Odabirom upravljačke varijable  $u_1$ :

$$u_1 = p_x + m_1(\ddot{x}_d(t) - k_{x1}\dot{e}_x - k_{x2}e_x) \quad (4.5)$$

dobiva se dinamika pogreške:

$$\ddot{e}_x + k_{x1}\dot{e}_x + k_{x2}e_x = 0 \quad (4.6)$$

koja je stabilna za pozitivne vrijednosti pojačanja  $k_{x1}$  i  $k_{x2}$ .

Dalje je potrebno provesti sintezu zakona upravljanja  $u_4$  koji omogućava slijeđenje komponente referentne trajektorije  $y_d(t)$  jer upravljačka varijabla  $u_4$  direktno utječe na kut  $\psi$  koji indirektno utječe na poziciju  $y$ . Ako se u drugu jednadžbu dinamičkog modela ubaci regulacijska pogreška definirana u (4.3), dobiva se jednadžba pogreške:

$$m_2 e_y = -m_2 y_d(t) + \psi u_1 \quad (4.7)$$

Deriviranjem gornje jednadžbe dva puta te ubacivanjem zadnje jednadžbe dinamičkog modela (3.2) dobiva se pojavljivanje upravljačke varijable  $u_4$  u jednadžbi pogreške:

$$m_2 e_y^{(4)} = -m_2 y_d^{(4)}(t) + \frac{u_4}{I_z} u_1 + 2\psi \dot{u}_1 + \psi \ddot{u}_1 \quad (4.8)$$

Odabirom upravljačke varijable  $u_4$ :

$$u_4 = \frac{I_z}{u_1} \left( m_2 y_d^{(4)} - 2\psi \dot{u}_1 - \psi \ddot{u}_1 \right) - \frac{m_2 I_z}{u_1} (k_{y3} \ddot{e}_y + k_{y2} \dot{e}_y + k_{y1} e_y + k_{y0} e_y) \quad (4.9)$$

dobiva se dinamika pogreške:

$$e_y^{(4)} + k_{y3} \ddot{e}_y + k_{y2} \dot{e}_y + k_{y1} e_y + k_{y0} e_y = 0 \quad (4.10)$$

koja je stabilna za navedena pozitivna pojačanja koja zadovoljavaju Hurwitzov kriterij stabilnosti te se mogu odrediti metodom podešavanja polova.

Konačno je potrebno provesti sintezu zakona upravljanja  $u_3$  koji omogućava slijeđenje komponente referentne trajektorije  $z_d(t)$ . Ako se u treću jednadžbu dinamičkog modela ubaci regulacijska pogreška definirana u (4.3), dobiva se jednadžba pogreške:

$$m_3 e_z = -m_3 z_d(t) - \theta u_1 \quad (4.11)$$

Deriviranjem gornje jednadžbe dva puta te ubacivanjem pete jednadžbe dinamičkog modela (4.2) dobiva se pojavljivanje upravljačke varijable  $u_3$  u jednadžbi pogreške:

$$m_3 e_z^{(4)} = -m_3 z_d^{(4)}(t) - \frac{u_3}{I_y} u_1 - 2\theta \dot{u}_1 - \theta \ddot{u}_1 \quad (4.12)$$

Odabirom upravljačke varijable  $u_3$ :

$$u_3 = -\frac{I_y}{u_1} \left( m_3 z_d^{(4)} - 2\theta \dot{u}_1 - \theta \ddot{u}_1 \right) + \frac{m_3 I_y}{u_1} (k_{z3} \ddot{e}_z + k_{z2} \dot{e}_z + k_{z1} e_z + k_{z0} e_z) \quad (4.13)$$

dobiva se dinamika pogreške:

$$e_z^{(4)} + k_{z3} \ddot{e}_z + k_{z2} \dot{e}_z + k_{z1} e_z + k_{z0} e_z = 0 \quad (4.14)$$

koja je stabilna za navedena pozitivna pojačanja te se mogu odrediti metodom podešavanja polova. Vidi se da je upravljačka varijabla  $u_2$  ostala neupotrebljena stoga bi se ona mogla iskoristiti za stabilizaciju kuta  $\phi$ .

Navedeni upravljački zakon ima veliku manu, a to je potreba za postojanjem morske struje u modelu kako bi se ona kompenzirala te na taj način u potpunosti linearizirao model. To se ni u kojem stvarnom slučaju ne može garantirati te je realnija alternativa u igru ubaciti viskozno trenje koje se ionako mora uzeti u obzir. Takav model bi izgledao na sljedeći način:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -D\dot{x} + u_1 \\ m_2 \ddot{y} &= -D\dot{y} + \psi u_1 \\ m_3 \ddot{z} &= -D\dot{z} - \theta u_1 \\ I_x \ddot{\phi} &= u_2 \\ I_y \ddot{\theta} &= u_3 \\ I_z \ddot{\psi} &= u_4 \end{aligned} \quad (4.15)$$

gdje je  $D$  koeficijent viskoznog trenja.

S obzirom na to da je viskozno trenje u izravnoj vezi samo s upravljačkom varijablom  $u_1$ , potrebno je samo nju modificirati. Ukoliko se u prvu jednadžbu modela (4.15) ubaci regulacijska pogreška (4.3) dobiva se:

$$m_1 \ddot{\tilde{x}} + D\dot{\tilde{x}} + m_1 \ddot{x}_d + D\dot{x}_d = u_1 \quad (4.16)$$

Odabirom upravljačke varijable  $u_1$ :

$$u_1 = m_1 \ddot{x}_d + D\dot{x}_d - K_p \tilde{x} - K_d \dot{\tilde{x}} \quad (4.17)$$

dobiva se dinamika zatvorenog kruga:

$$m_1 \ddot{\tilde{x}} + (D + K_d) \dot{\tilde{x}} + K_p \tilde{x} = 0 \quad (4.18)$$

gdje se pojačanja  $K_d$  i  $K_p$  određuju iz željenih polova koji moraju biti negativni i realni.

Ovakav model će se koristiti za sinteze regulatora u sljedećim poglavljima.



Iz izvedenih upravljačkih zakona je vidljivo da je za provedbu istih potrebno mjerenje svih varijabli stanja, postojanje „fiktivne“ struje, egzaktno poznavanje mase i koeficijenta viskoznog trenja te poznavanje vremenskih derivacija upravljačkog zakona  $u_1$ . To može biti problematično pogotovo u slučaju postojanja nepoznatih poremećaja o kojima ovise upravljački zakoni. Jedan od načina rješavanja problema **Pretpostavke 1.** tj. derivacija signala je estimacija vremenske derivacije neke kontinuirane funkcije primjenom sliding-mode filtra [10]:

$$\dot{\zeta}_e = v_\zeta = -\rho_\zeta \text{sign}(\zeta_e - \zeta) \quad (4.19)$$

gdje je  $\zeta_e$  estimacija od neke tražene funkcije  $\zeta$ , a  $v_\zeta$  je estimacija od  $\dot{\zeta}$ . Pojačanje  $\rho_\zeta$  je odabrano tako da zadovoljava sljedeći uvjet:

$$\rho_\zeta > \max(|\dot{\zeta}|) \quad (4.20)$$

Vrijedi napomenuti kako diskontinuirana funkcija signum može prouzročiti tzv. „chattering“ odnosno velike skokove upravljačke varijable. U tu svrhu se uvode aproksimacije signum funkcije od kojih je jedna:

$$\text{sign}(\zeta) \approx \tanh(K\zeta) \quad (4.21)$$

gdje pozitivan faktor  $K$  poprima neku dovoljno visoku vrijednost.

## 4.2. Sinteza adaptivnog regulatora

Adaptivno upravljanje je vrlo koristan alat kod upravljanja autonomnih podvodnih vozila s obzirom na to da se nalaze u zahtjevnim i dinamičnim okruženjima koja otežavaju modeliranje i samo upravljanje. Metoda adaptivnog upravljanja služi kako bi se parametri podvodnog vozila podešavali u realnom vremenu u ovisnosti o promjenama u okolišu ili samom vozilu. Jedan od ključnih parametara za koji se može izvesti adaptivni zakon promjene je masa vozila. Promjene tog parametra mogu doći uslijed promjene samog tereta vozila ili odvajanja nekog dijela konstrukcije. Dodatni parametar koji vrijedi adaptirati je koeficijent viskoznog trenja koji ovisi o brojnim faktorima te ga je vrlo teško precizno odrediti bez niza eksperimentalnih ispitivanja. Adaptivno upravljanje poboljšava performanse i efikasnost podvodnog vozila tako što umanjuje utjecaj neočekivanih promjena u okolini te održava optimalnu izvedbu. Nadalje poboljšava točnost i pouzdanost navigacije vozila te smanjuje potrošnju energije.

**Pretpostavka 1.** Mjerljivost ili estimacija svih varijabli stanja (pozicije i brzine).

**Pretpostavka 2.** Nisu poznate egzaktno vrijednosti mase i koeficijenta viskoznog trenja.

**Upravljački zadatak:** Konstruirati adaptivni regulator  $u_1, u_2, u_3$  i  $u_4$  s ciljem da varijable stanja  $x(t), y(t)$  i  $z(t)$  slijede željena vremenski varijabilna referentna stanja  $x_d(t), y_d(t)$  i  $z_d(t)$ .

Ako se u prvu jednadžbu modela (4.15) uvrsti  $\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d(t)$ , dobiva se:

$$m_1 \ddot{\tilde{x}} + m \ddot{x}_d + D \dot{x} = u_1 \quad (4.22)$$

Kako bi se provela sinteza adaptivnog regulatora, gornju jednadžbu je potrebno svesti na jednadžbu prvog reda, stoga se uvodi pomoćna varijabla:

$$r = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} \quad (4.23)$$

gdje je  $\lambda$  neki pozitivan parametar.

Ako se uvrsti  $\ddot{\tilde{x}} = \dot{r} - \lambda \dot{\tilde{x}}$  u izraz (4.22) dobiva se:

$$m_1 \dot{r} - m_1 \lambda \dot{\tilde{x}} + m_1 \ddot{x}_d + D \dot{x} = u_1 \quad (4.24)$$

odnosno

$$m_1 \dot{r} + m_1 \dot{x}_r + D \dot{x} = u_1 \quad (4.25)$$

gdje je

$$\dot{x}_r = \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \quad (4.26)$$

Definira se zakon upravljanja u sljedećem obliku:

$$u_1 = -kr + \hat{m}_1 \dot{x}_r + \hat{D} \dot{x} \quad (4.27)$$

gdje je  $k > 0$ , a  $\hat{m}_1$  i  $\hat{D}$  estimirane vrijednosti parametara  $m_1$  i  $D$ .

Uvrštavanjem izraza (4.27) u izraz (4.25) dobiva se dinamika zatvorenog kruga:

$$m_1 \dot{r} + kr + \tilde{m}_1 \dot{x}_r + \tilde{D} \dot{x} = 0 \quad (4.28)$$

gdje su  $\tilde{m}_1 = m_1 - \hat{m}_1$  i  $\tilde{D} = D - \hat{D}$ .

Pretpostavlja se Lyapunovljeva funkcija u obliku:

$$V = \frac{1}{2} m_1 r^2 + \frac{1}{2} \gamma m_1^2 + \frac{1}{2} \gamma D^2 \quad (4.29)$$

Nakon deriviranja Lyapunovljeve funkcije i sređivanja izraza, derivacija Lyapunovljeve funkcije glasi:

$$\dot{V} = -kr^2 - \tilde{m}_1 (r \dot{x}_r + \gamma \dot{\hat{m}}_1) - \tilde{D} (r \dot{x} + \gamma \dot{\hat{D}}) \quad (4.30)$$

gdje je  $\gamma$  pozitivan parametar tj. brzina estimacije.

Izjednačavanjem izraza u zagradi s nulom, derivacija Lyapunovljeve funkcije bit će negativno semidefinitna te se na taj način dobiva adaptivni zakon podešavanja parametara:

$$\dot{\hat{m}}_1 = -\frac{1}{\gamma} r \ddot{x}_r \quad (4.31)$$

$$\dot{\hat{D}} = -\frac{1}{\gamma} r \dot{x} \quad (4.32)$$

S obzirom na konstrukciju podvodnog vozila X4 – AUV, može se smatrati da je  $m_1 = m_2 = m_3$  pa se izvedeni adaptivni zakon može iskoristiti u ostatku regulatora koji je identičan kao kod linearnog s tom promjenom što su korišteni estimirani parametri.

#### Konačni upravljački zakoni adaptivnog regulatora:

$$u_1 = -kr + \hat{m}_1 \ddot{x}_r + \hat{D} \dot{x} \quad (4.33)$$

$$u_3 = -\frac{I_y}{u_1} \left( \hat{m}_3 z_d^{(4)} - 2\theta \dot{u}_1 - \theta \ddot{u}_1 \right) + \frac{\hat{m}_3 I_y}{u_1} (k_{z3} \ddot{e}_z + k_{z2} \dot{e}_z + k_{z1} e_z + k_{z0} e_z) \quad (4.34)$$

$$u_4 = \frac{I_z}{u_1} \left( \hat{m}_2 y_d^{(4)} - 2\psi \dot{u}_1 - \psi \ddot{u}_1 \right) - \frac{\hat{m}_2 I_z}{u_1} (k_{y3} \ddot{e}_y + k_{y2} \dot{e}_y + k_{y1} e_y + k_{y0} e_y) \quad (4.35)$$

### 4.3. Sinteza robusnog (sliding-mode) regulatora

Robusni regulator s kliznim režimom rada (eng. *sliding-mode controller*) je jedna od moćnijih nelinearnih strategija upravljanja dinamičkim sustavima koja se temelji na diskontinuiranom upravljačkom signalu što omogućava sustavu da „klizi“ po zadanoj površini u faznoj ravnini. Jedna od ključnih prednosti ovog regulatora je njegova robusnost na vanjske poremećaje i nesigurnosti u modelu. Za razliku od ostalih metoda upravljanja koje zahtijevaju točne modele sustava kojima upravljaju, regulator s kliznim režimom rada se prilagođava na moguće nesigurnosti i nepoznanice u modelu tako da nije potrebno egzaktno poznavanje dinamike sustava. Kako se u oceanima često znaju pojaviti neočekivani poremećaji u vidu morskih struja, regulator s kliznim režimom rada je jedna od mogućih metoda koje se mogu primijeniti za rješavanje tog problema.

**Pretpostavka 1.** Mjerljivost ili estimacija svih varijabli stanja (pozicije i brzine).

**Pretpostavka 2.** Poznavanje svih parametara modela.

**Upravljački zadatak:** Konstruirati robusni regulator s kliznim režimom rada regulator  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  i  $u_4$  s ciljem da varijable stanja  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$  slijede željena vremenski varijabilna referentna stanja  $x_d(t)$ ,  $y_d(t)$  i  $z_d(t)$  u prisutnosti nepoznatih vanjskih poremećaja  $d_x(t)$  i  $d_y(t)$ .

Modificirani model (4.15) je prikazan na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x} &= -D\dot{x} + u_1 + d_x \\
 m_2 \ddot{y} &= -D\dot{y} + \psi u_1 + d_y \\
 m_3 \ddot{z} &= -D\dot{z} - \theta u_1 \\
 I_x \ddot{\phi} &= u_2 \\
 I_y \ddot{\theta} &= u_3 \\
 I_z \ddot{\psi} &= u_4
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Sinteza robusnog regulatora je slična kao kod adaptivnog regulatora u prethodnom poglavlju.

Ako se u prvu jednadžbu modela (4.36) uvrsti  $\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d(t)$ , dobiva se:

$$m_1 \ddot{\tilde{x}} + m \ddot{x}_d + D\dot{x} + d_x = u_1 \tag{4.37}$$

Ponovno, kao i kod sinteze adaptivnog regulatora, gornju jednadžbu je potrebno svesti na jednadžbu prvog reda, stoga se uvodi pomoćna varijabla tj. „sliding“ površina:

$$s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} \tag{4.38}$$

gdje je  $\lambda$  neki pozitivan parametar.

Ako se uvrsti  $\ddot{\tilde{x}} = \dot{s} - \lambda \dot{\tilde{x}}$  u izraz (4.37) dobiva se:

$$m_1 \dot{s} - m_1 \lambda \dot{\tilde{x}} + m_1 \ddot{x}_d + D\dot{x} + d_x = u_1 \tag{4.39}$$

odnosno

$$m_1 \dot{s} + m_1 \ddot{x}_r + D\dot{x} + d_x = u_1 \tag{4.40}$$

gdje je

$$\ddot{x}_r = \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \tag{4.41}$$

Definira se zakon upravljanja u sljedećem obliku:

$$u_1 = -ks - \rho(x, \dot{x}, t) \text{sign}(s) \tag{4.42}$$

gdje je  $k > 0$ , a  $\rho(x, \dot{x}, t)$  je pojačanje sliding-mode regulatora.

Funkcija  $\text{sign}(s)$  je definirana na sljedeći način:

$$\text{sign}(s) = \frac{s}{|s|} \quad (4.43)$$

Uvrštavanjem izraza (4.42) u izraz (4.40) dobiva se dinamika zatvorenog kruga:

$$m_1 \dot{s} + ks + m_1 \ddot{x}_r + D\dot{x} + d_x + \rho(x, \dot{x}, t)\text{sign}(s) = 0 \quad (4.44)$$

Pretpostavi se Lyapunovljeva funkcija u obliku:

$$V = \frac{1}{2} m_1 s^2 \quad (4.45)$$

te njezina derivacija iznosi:

$$\dot{V} = m_1 s \dot{s} = s(-ks - m_1 \ddot{x}_r - D\dot{x} - d_x - \rho(x, \dot{x}, t)\text{sign}(s)) \quad (4.46)$$

tj. ako se iskoristi izraz (4.43):

$$\dot{V} = -ks^2 - m_1 s \ddot{x}_r - sD\dot{x} - s d_x - \rho(x, \dot{x}, t)|s| \quad (4.47)$$

Ukoliko je poznata gornja vrijednost poremećaja  $d_x$ , pojačanje sliding-mode regulatora  $\rho(x, \dot{x}, t)$  je moguće egzaktno odrediti tako da derivacija Lyapunovljeve funkcije bude negativno semidefinitna. U ovom slučaju bi regulator mogao kompenzirati i nepoznavanje egzaktnosti mase i koeficijenta viskoznog trenja, ali s obzirom na to da je poznavanje tih parametara nužno za preostali dio regulatora, smatra se da su poznati. Pojačanje regulatora je također moguće odrediti heuristički povećavanjem njegove vrijednosti dok se ne dobiju zadovoljavajući rezultati.

Preostalo je još definirati upravljačku varijablu  $u_4$  s obzirom na to da ona indirektno utječe na poremećaj  $d_y$ . Ponovno se može iskoristiti već izvedeni zakon upravljanja kao kod linearnog regulatora, s dodatkom sliding-mode člana  $u_{4s}$  koji će kompenzirati poremećaj  $d_y$ :

$$u_4 = \frac{I_z}{u_1} \left( m_2 y_d^{(4)} - 2\psi \dot{u}_1 - \psi \ddot{u}_1 \right) - \frac{m_2 I_z}{u_1} (k_{y3} \ddot{e}_y + k_{y2} \dot{e}_y + k_{y1} e_y + k_{y0} e_y) + u_{4s} \quad (4.48)$$

gdje je

$$u_{4s} = -\rho_y \text{sign}(s_y) \quad (4.49)$$

Pojačanje  $\rho_y$  mora zadovoljavati sljedeći kriterij kako bi uspješno kompenzirao poremećaj:

$$\rho_y > \max\{|d_y|\} \quad (4.50)$$

Kako je jednadžba (4.48) četvrtog reda, sliding površina poprima sljedeći oblik:

$$s_y = \ddot{\tilde{y}} + k_2 \dot{\tilde{y}} + k_1 \tilde{y} + k_0 \tilde{y} \quad (4.51)$$

gdje navedena pojačanja  $k_i$  moraju zadovoljiti Hurwitzov kriterij stabilnosti:  $k_2 k_1 > k_0$ .

Kako poremećaji djeluju samo u XY ravnini, upravljačka varijabla  $u_3$  ostaje ista kao i kod linearnog regulatora:

$$u_3 = -\frac{I_y}{u_1} \left( m_3 z_d^{(4)} - 2\dot{\theta}\dot{u}_1 - \theta\ddot{u}_1 \right) + \frac{m_3 I_y}{u_1} (k_{z3}\ddot{e}_z + k_{z2}\dot{e}_z + k_{z1}e_z + k_{z0}e_z) \quad (4.52)$$

S obzirom na to da je mjerljiva samo pozicija vozila u vremenu, kao i kod adaptivnog regulatora, derivacije pogrešaka praćenja je potrebno estimirati koristeći sliding-mode filter (4.19). Prilikom simulacije uviđeno je da sliding-mode filter ne može zadovoljavajuće estimirati drugu derivaciju pogreške praćenja tj. akceleraciju vozila. Iz tog razloga je potrebno ugraditi uređaj za mjerenje akceleracije ili koristiti sofisticiraniju metodu estimacije derivacija signala.

## 5. SIMULACIJSKI REZULTATI

Nakon provedene sinteze linearnog, adaptivnog te robusnog regulatora na sustavu autonomnog podvodnog vozila, potrebno je provjeriti ispravnost upravljačkih zakona na punom dinamičkom modelu takvog vozila. Simulacije su provedene u softveru MATLAB integrirajući diferencijalne jednadžbe numeričkom metodom Runge-Kutta. Početni uvjeti su jednaki nuli, a početna stanja estimatora mase i koeficijenta viskoznog trenja  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $D = 10 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ .

Fizikalni parametri autonomnog podvodnog vozila X4 – AUV su uzeti iz [1] i [8] te su prikazani u tablici 5.1.

**Tablica 5.1 Fizikalni parametri**

$m_1$ [kg]	21,1554
$m_2$ [kg]	21,1617
$m_3$ [kg]	21,1617
$I_x$ [kgm <sup>2</sup> ]	1
$I_y$ [kgm <sup>2</sup> ]	1,1906
$I_z$ [kgm <sup>2</sup> ]	1,1906
$r$ [m]	0,1
$D$ [Ns/m]	5

S obzirom na to da regulator mora omogućiti praćenje zadanog referentnog stanja, za simulaciju su odabrane sljedeće trajektorije:

$$x_d(t) = 0,5t \quad (5.1)$$

$$y_d(t) = \cos(0,5t) \quad (5.2)$$

$$z_d(t) = \sin(0,5t) \quad (5.3)$$

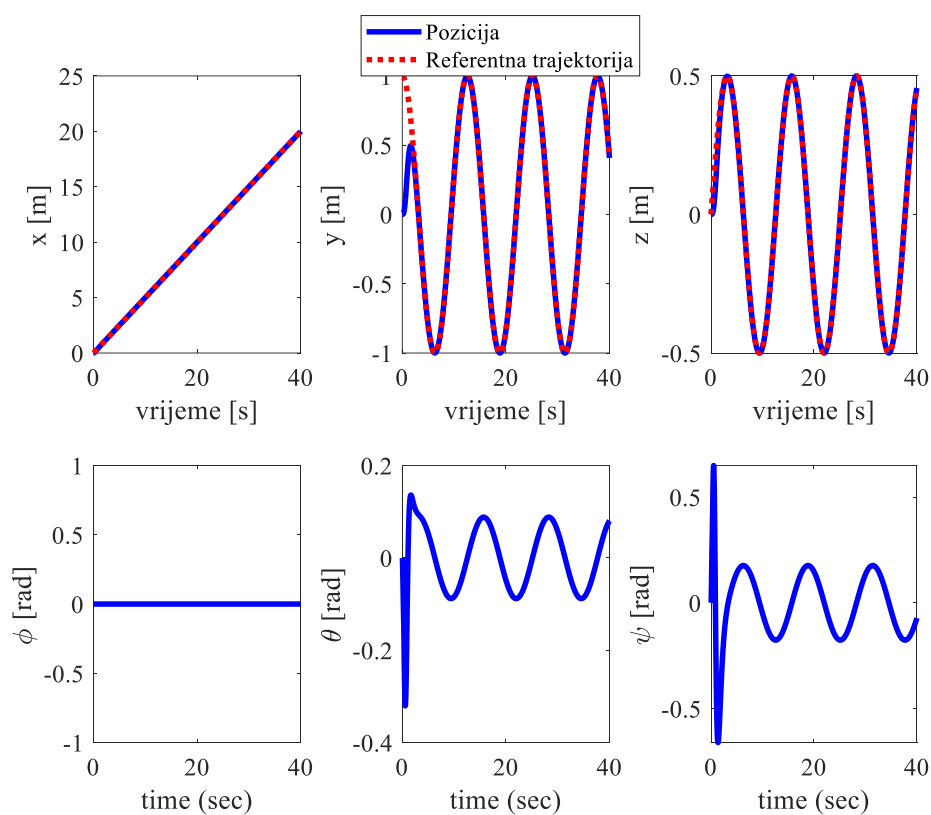
a poremećaji pri simulaciji robusnog regulatora su odabrani prema sljedećim izrazima:

$$d_x = -1,5\sin(3t) \quad (5.4)$$

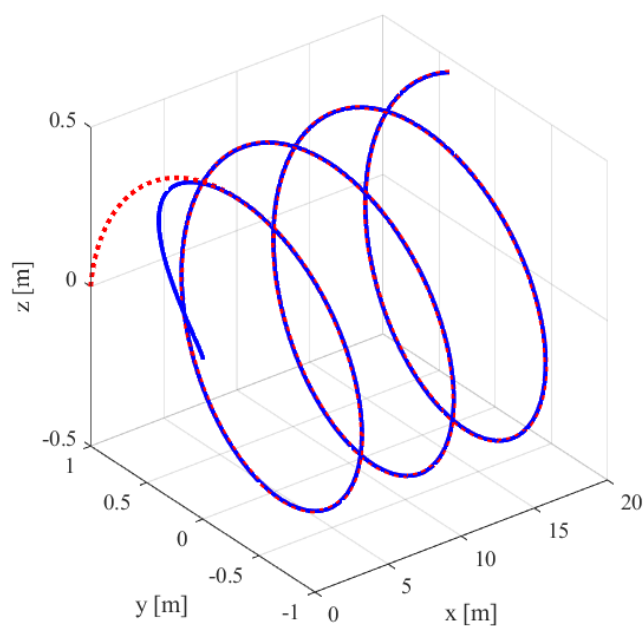
$$d_y = 1,5\sin(4t) \quad (5.5)$$

## 5.1. Primjena regulatora na linearnom modelu

### 5.1.1. Linearni regulator

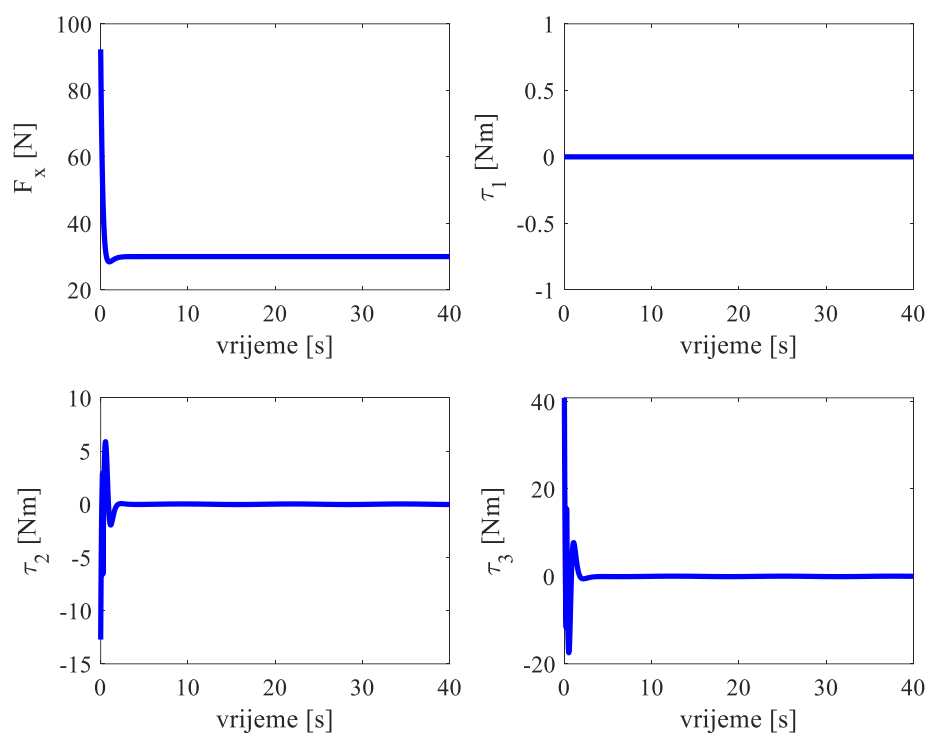


Slika 5.1 Pozicije i kutevi vozila uz primjenu regulatora na linearni model

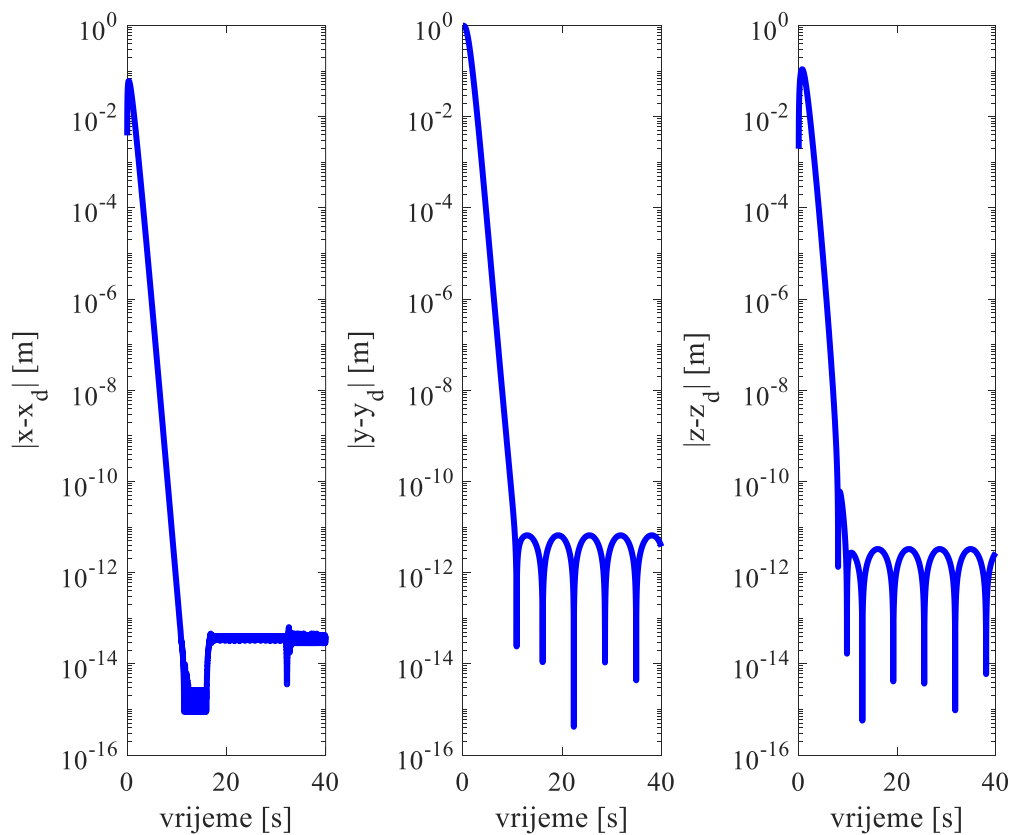


Slika 5.2 3D trajektorija vozila uz primjenu regulatora na linearni model



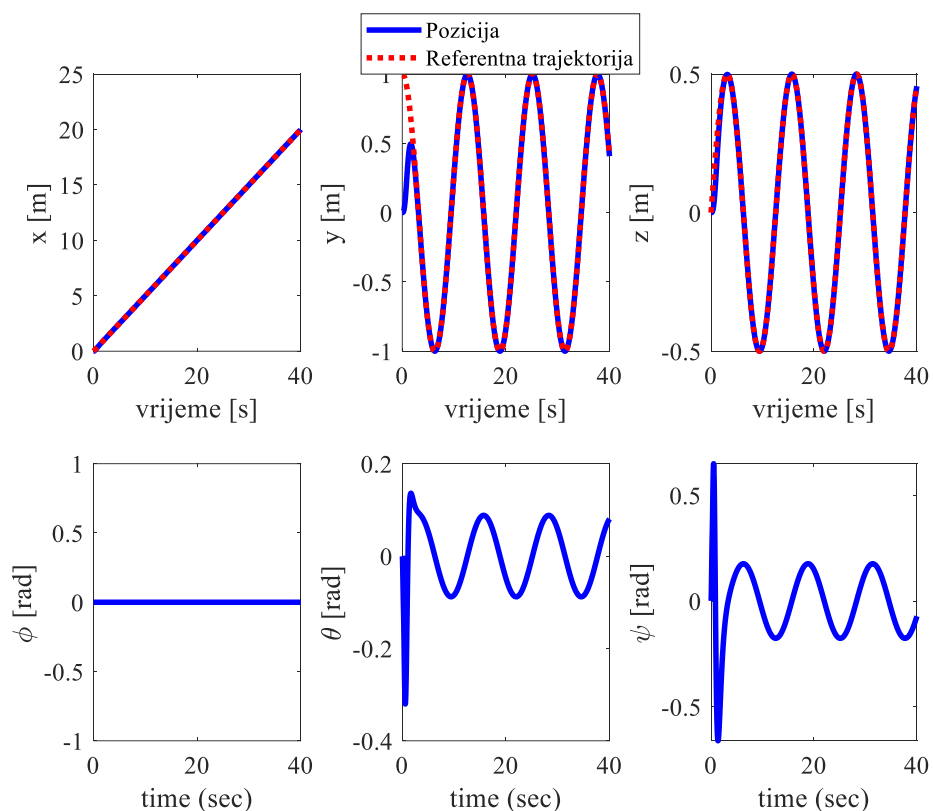


Slika 5.3 Upravljačke varijable vozila uz primjenu regulatora na linearni model

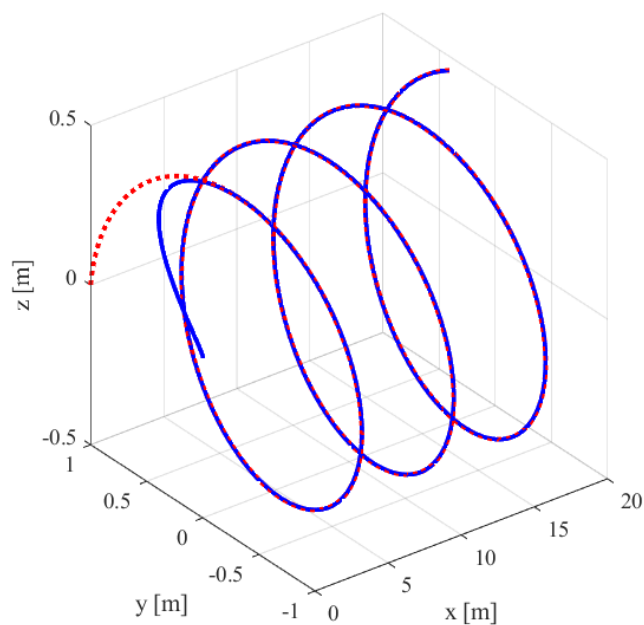


Slika 5.4 Pogreške praćenja trajektorije uz primjenu regulatora na linearni model

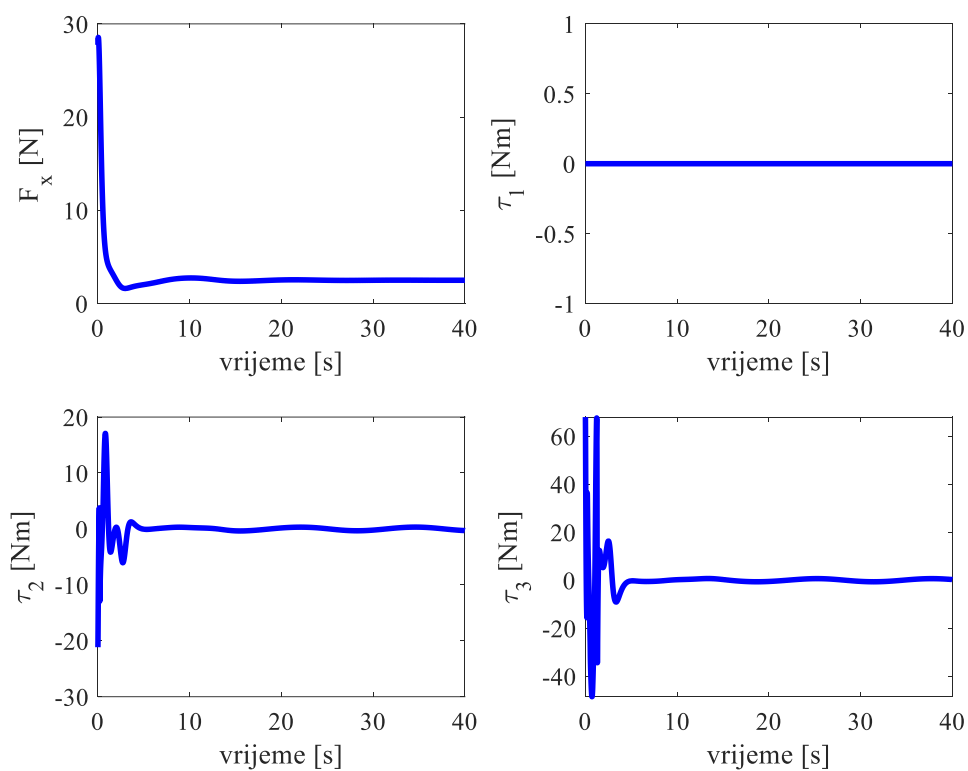
### 5.1.2. Adaptivni regulator



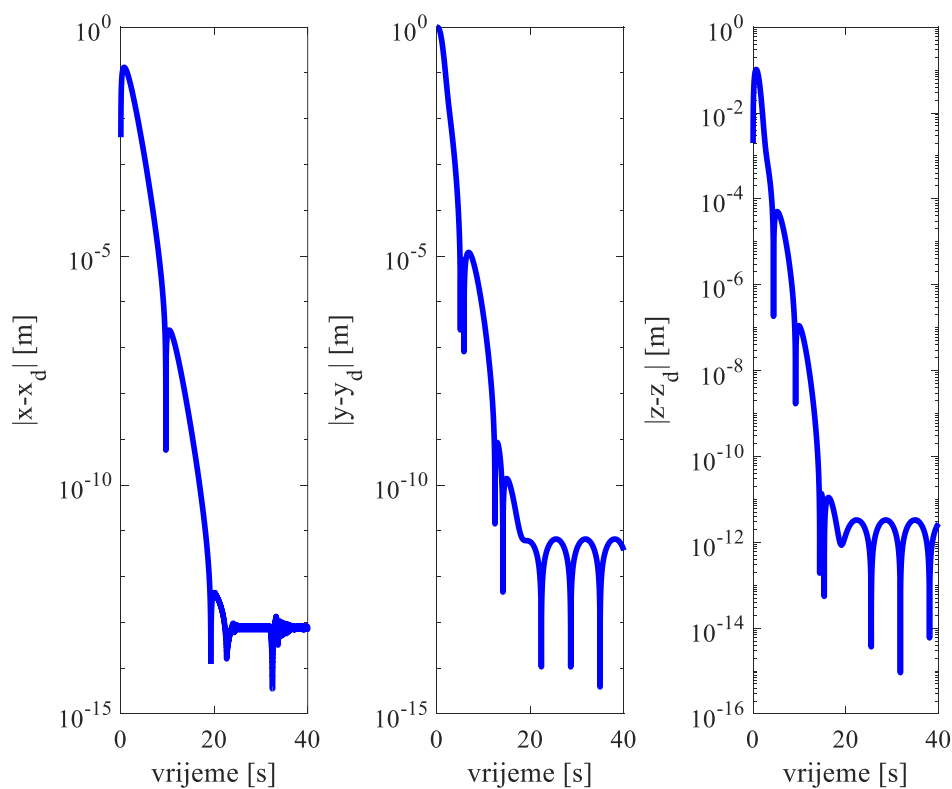
Slika 5.5 Pozicije i kutevi vozila uz primjenu adaptivnog regulatora na linearni model



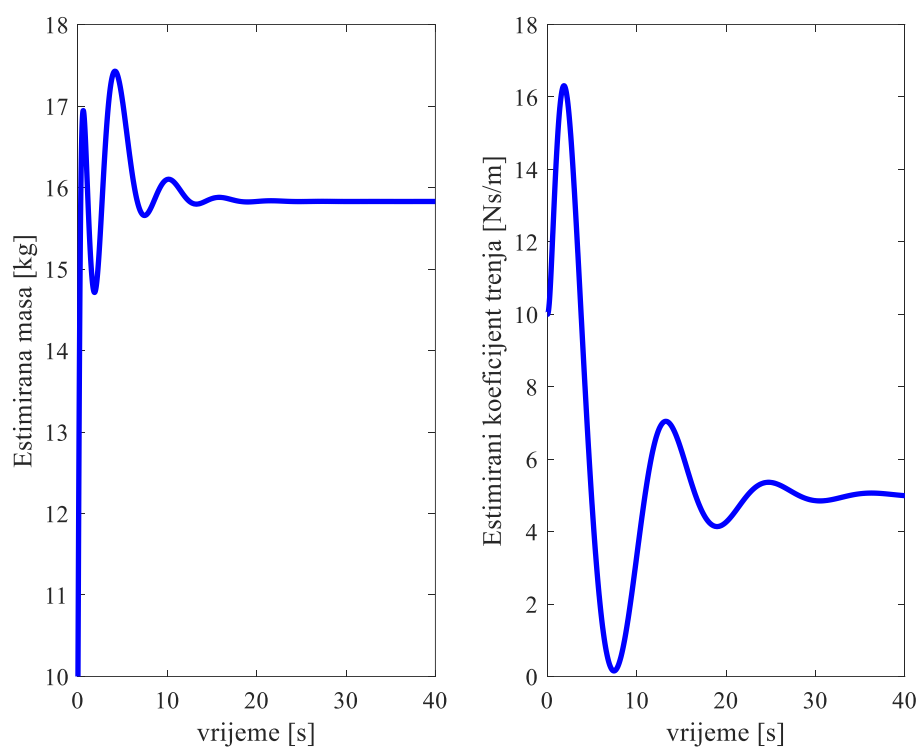
Slika 5.6 3D trajektorija vozila uz primjenu adaptivnog regulatora na linearni model



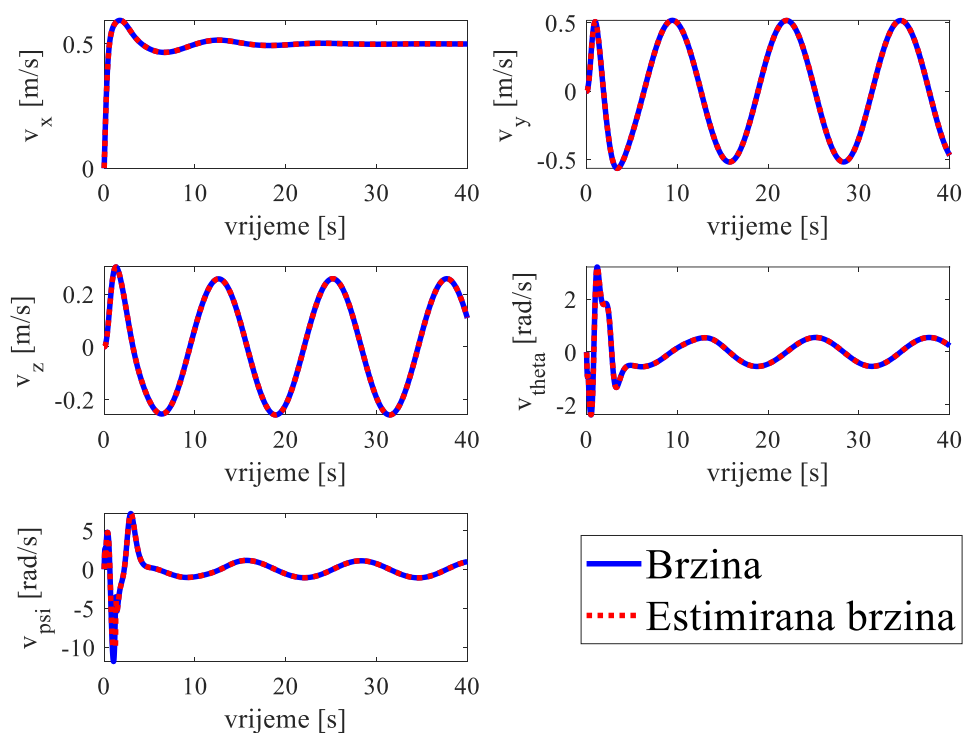
**Slika 5.7** Upravljačke varijable vozila uz primjenu adaptivnog regulatora na linearni model



**Slika 5.8** Pogreške praćenja trajektorije uz primjenu adaptivnog regulatora na linearni model

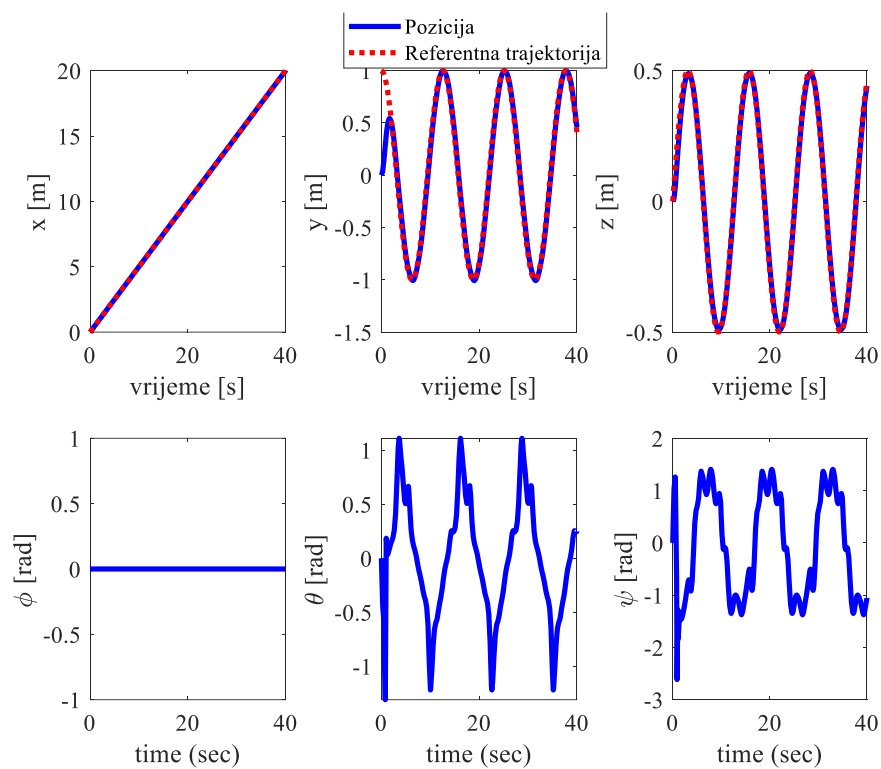


**Slika 5.9** Estimacija parametara vozila uz primjenu regulatora na linearni model

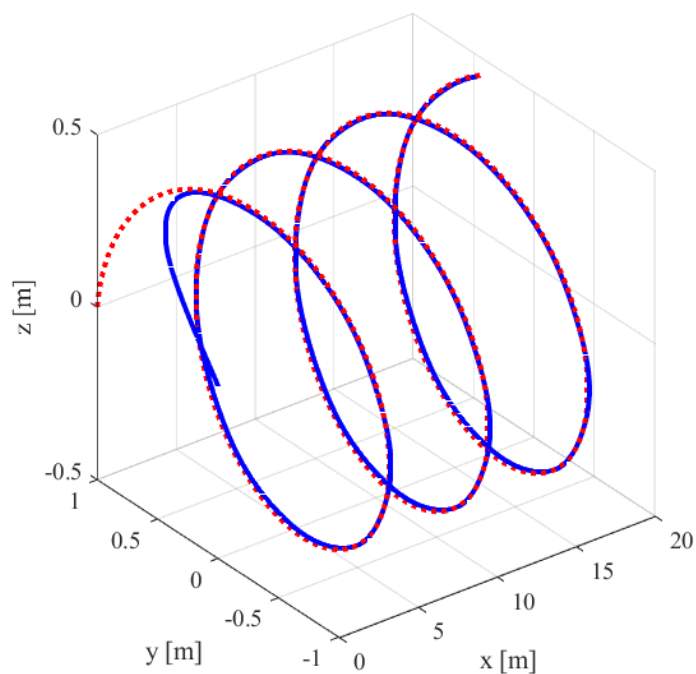


**Slika 5.10** Estimacija brzina vozila uz primjenu regulatora na linearni model

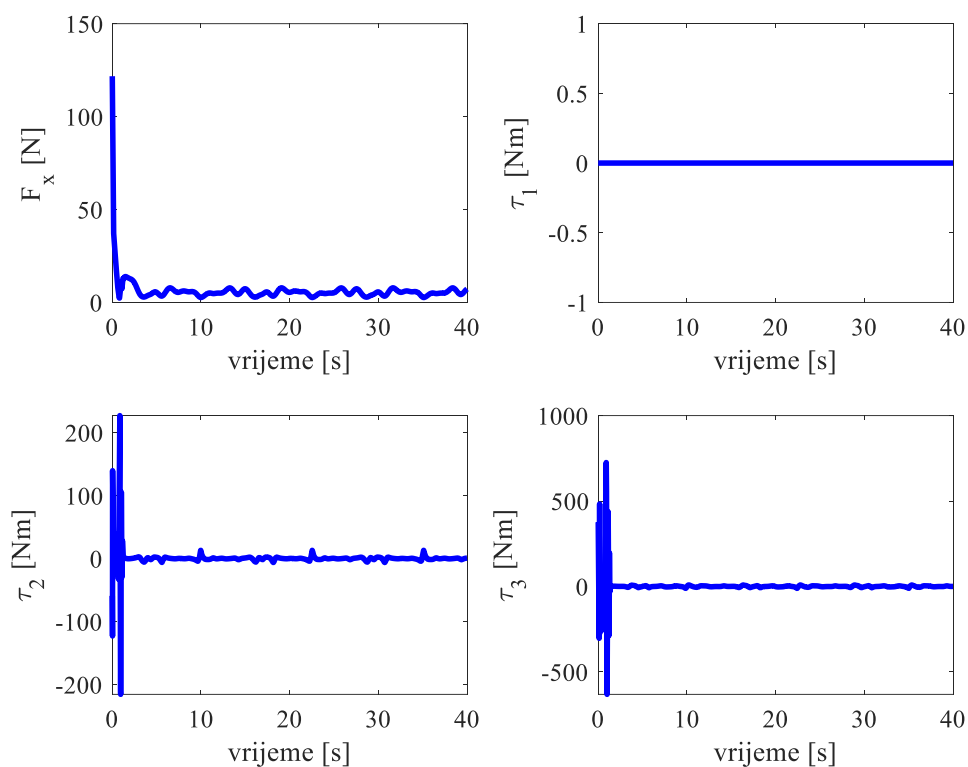
### 5.1.3. Robusni regulator



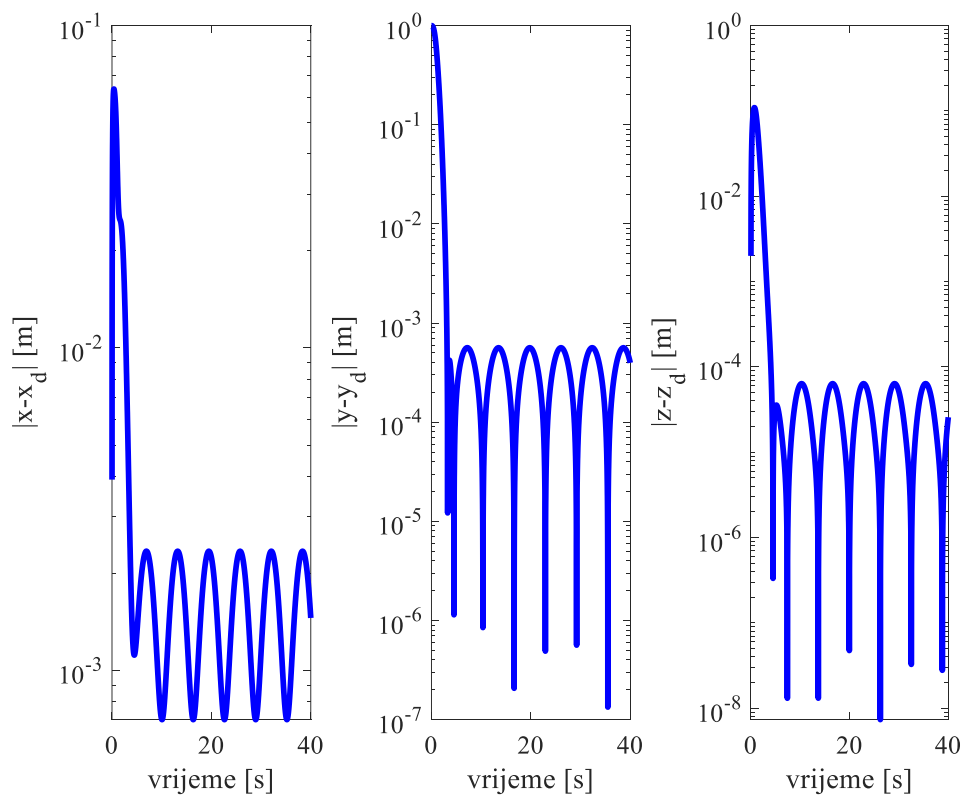
Slika 5.11 Pozicije i kutevi vozila uz primjenu robusnog regulatora na linearni model



Slika 5.12 3D trajektorija vozila uz primjenu robusnog regulatora na linearni model



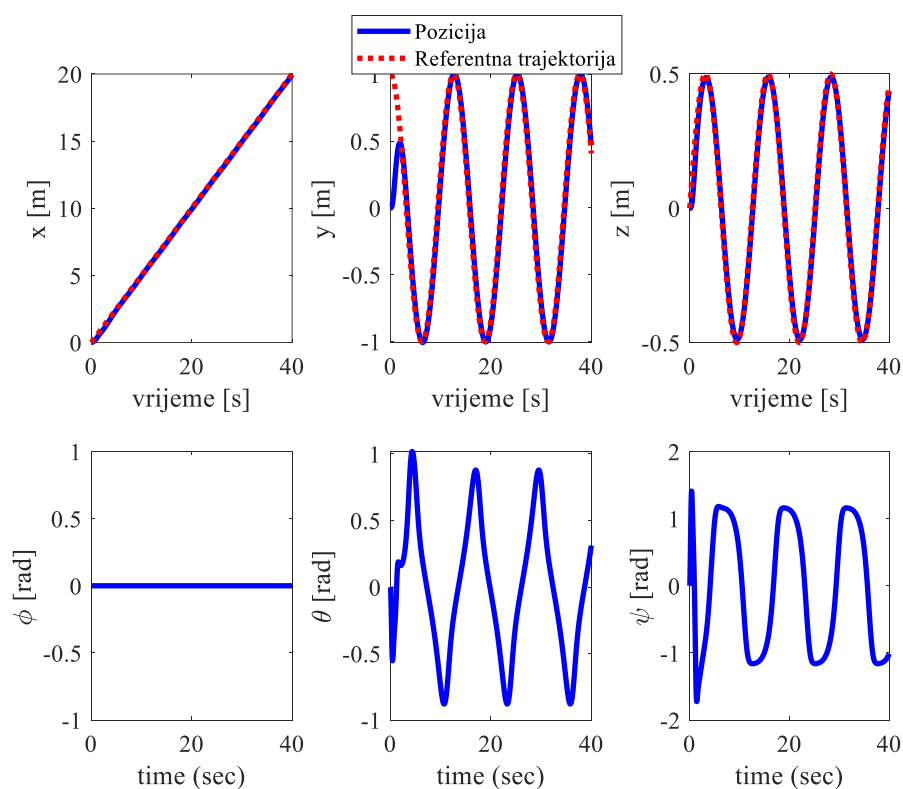
Slika 5.13 Upravljačke varijable vozila uz primjenu robusnog regulatora na linearni model



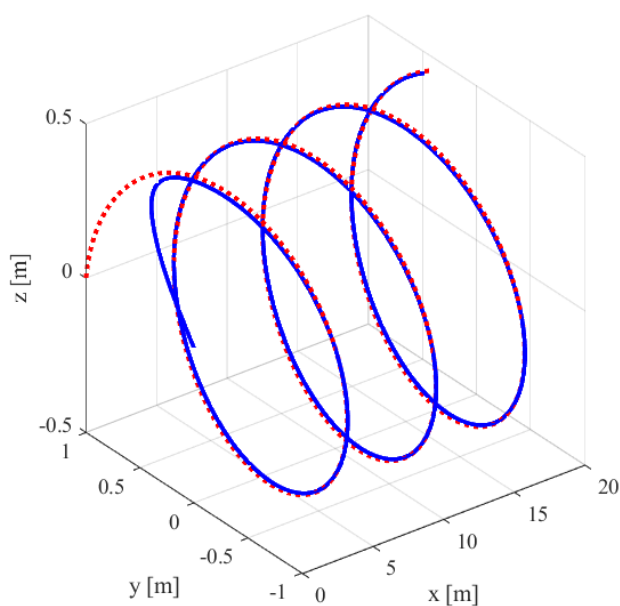
Slika 5.14 Pogreške praćenja trajektorije uz primjenu robusnog regulatora na linearni model

## 5.2. Primjena regulatora na punom nelinearnom modelu

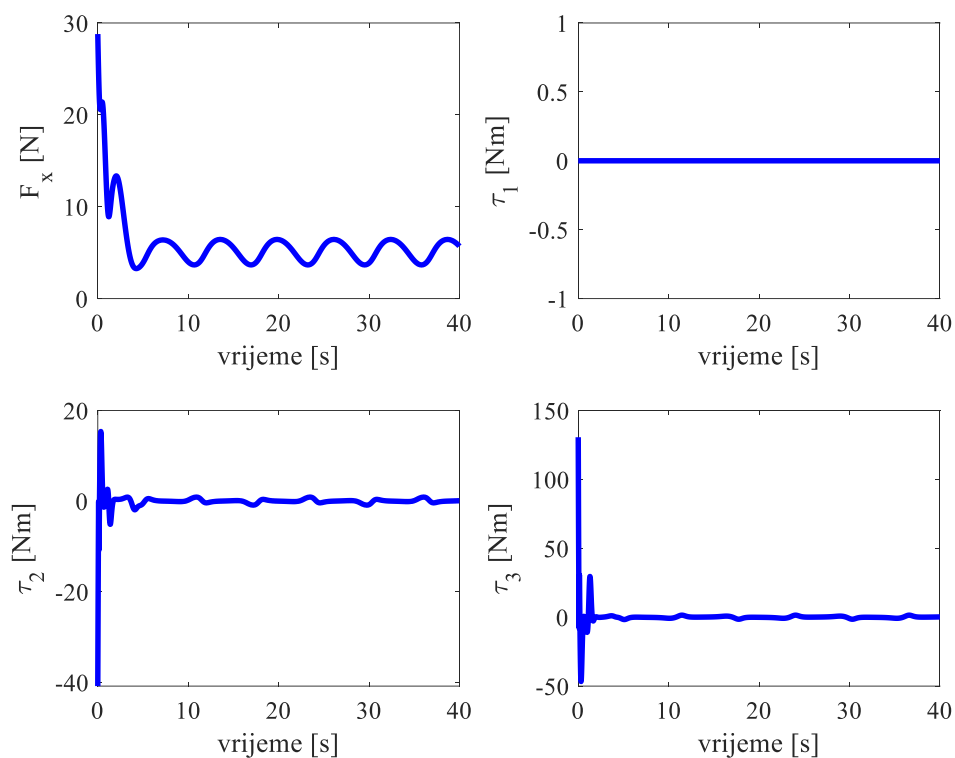
### 5.2.1. Linearni regulator



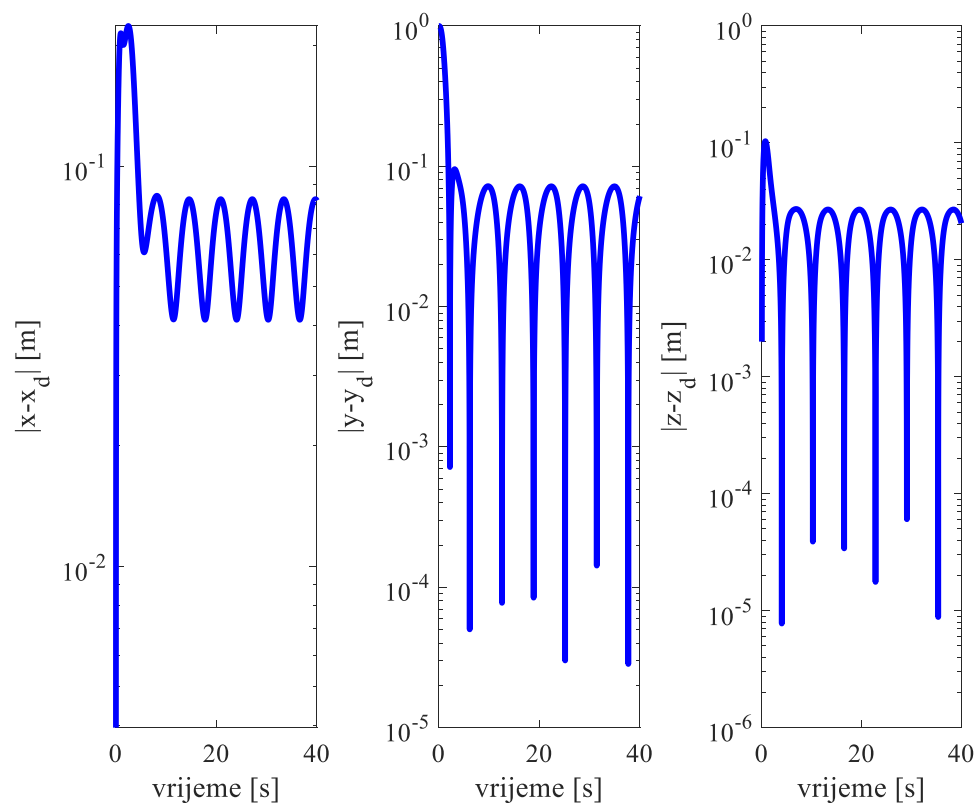
Slika 5.15 Pozicije i kutevi vozila za linearni regulator



Slika 5.16 3D trajektorija vozila za linearni regulator



Slika 5.17 Upravljačke varijable vozila za linearni regulator

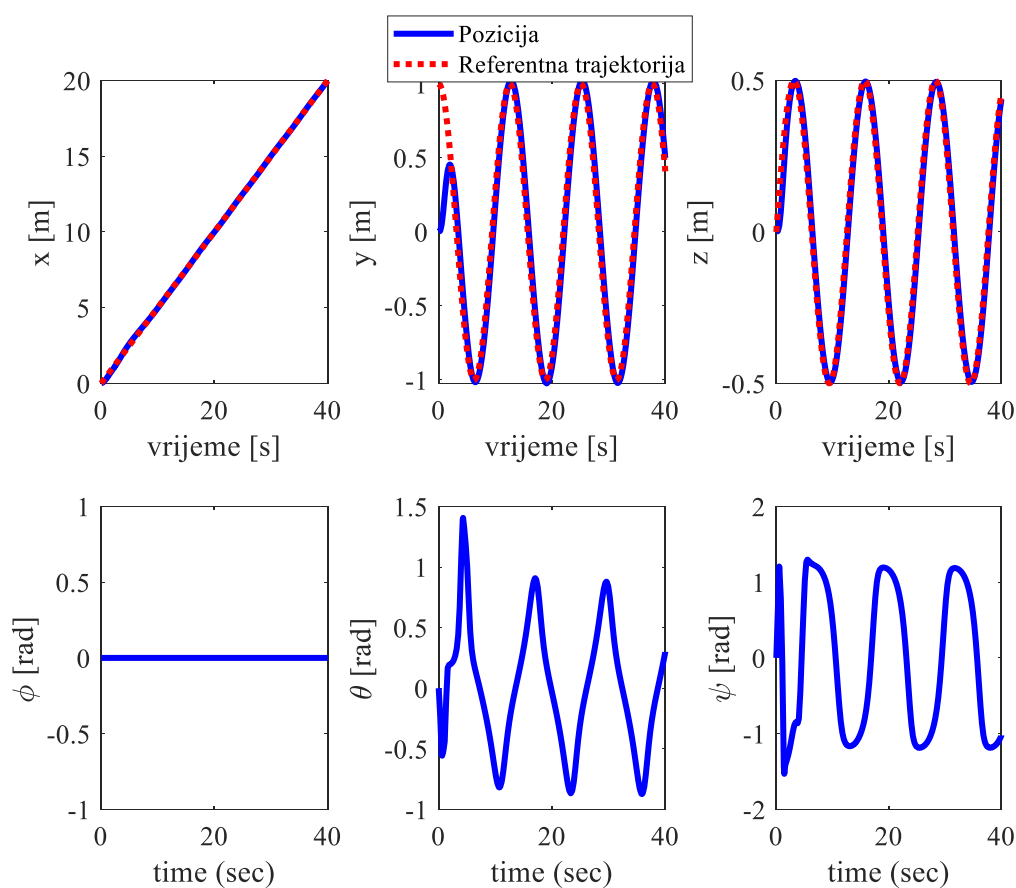


Slika 5.18 Pogreške praćenja trajektorije za linearni regulator

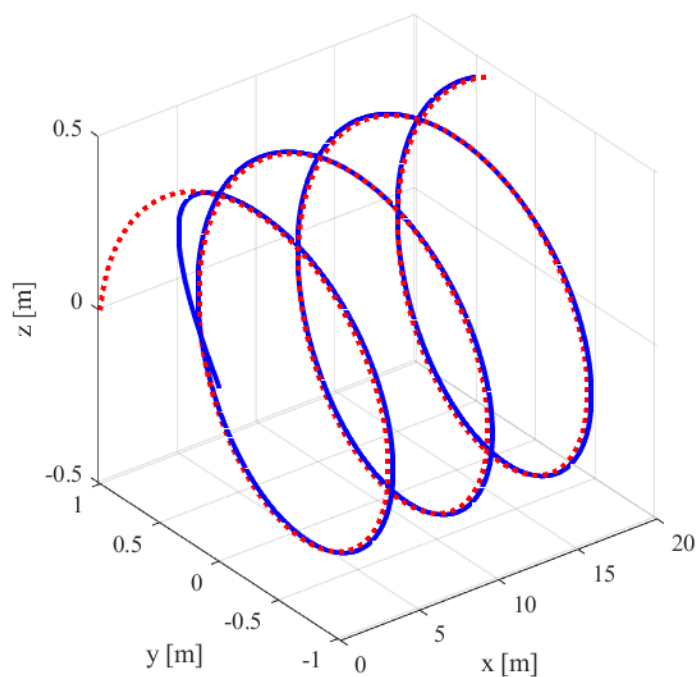


Na slikama 5.15 – 5.18 se može vidjeti da izvedeni regulator omogućuje konvergenciju prema referentnoj trajektoriji, ali s regulacijskim odstupanjem, što nije slučaj kod primjene regulatora na linearnom modelu prema slikama 5.1 – 5.4. Uzrok tome je primjena izvedenog linearnog regulatora na puni model autonomnog podvodnog vozila (3.38) uz dodatak viskoznog trenja. Također je potrebno uzeti u obzir iznose upravljačkih varijabli. S obzirom na to da se u literaturi ne mogu naći podaci o korištenim propulzorima za ovakav tip podvodnog vozila, potrebno je osigurati da odabrani propulzori mogu pružiti zahtijevani iznos sile potiska.

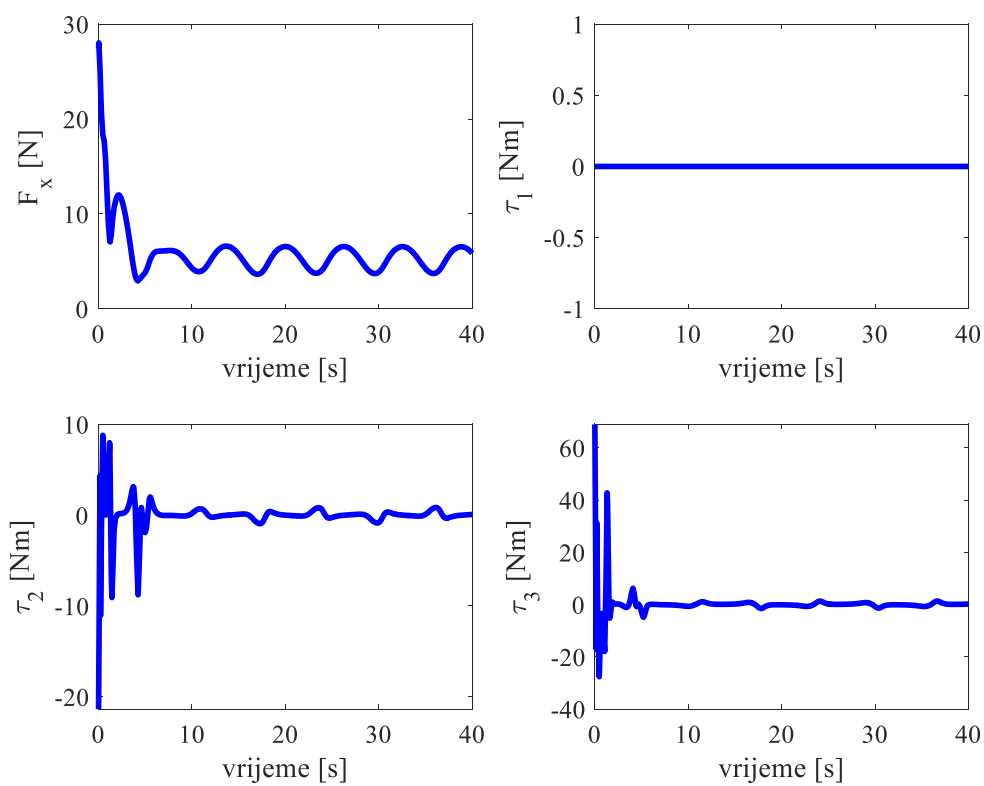
### 5.2.2. Adaptivni regulator



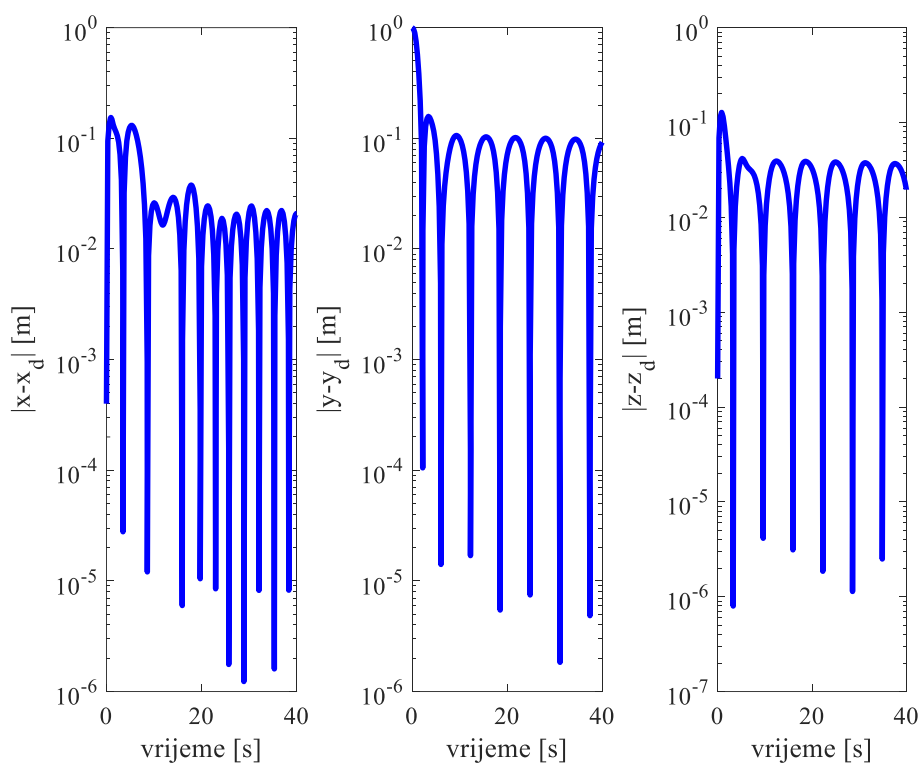
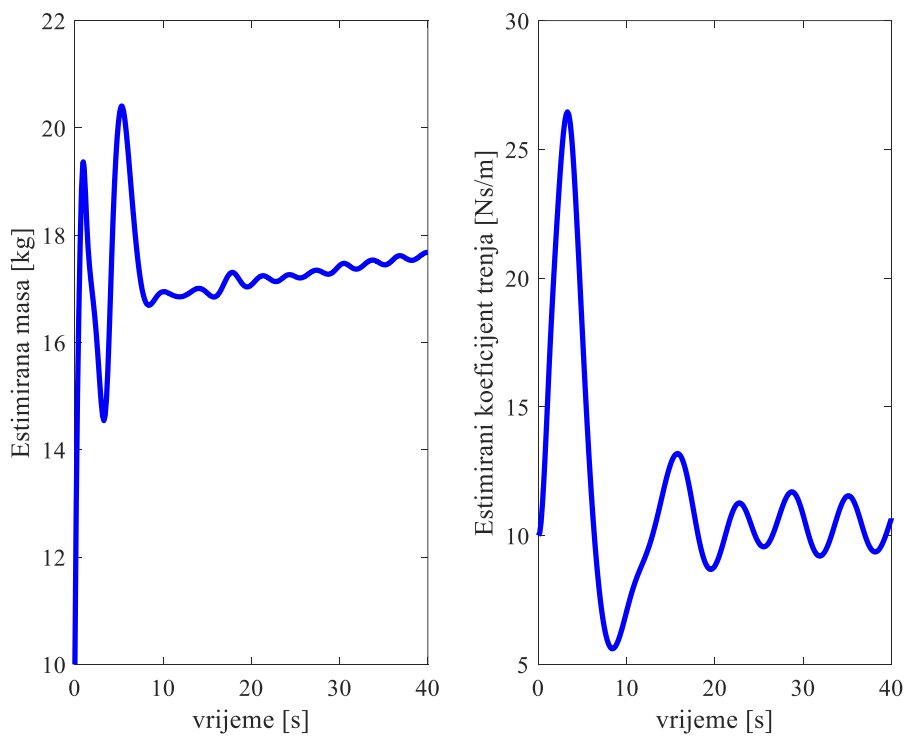
Slika 5.19 Pozicije i kutevi vozila za adaptivni regulator

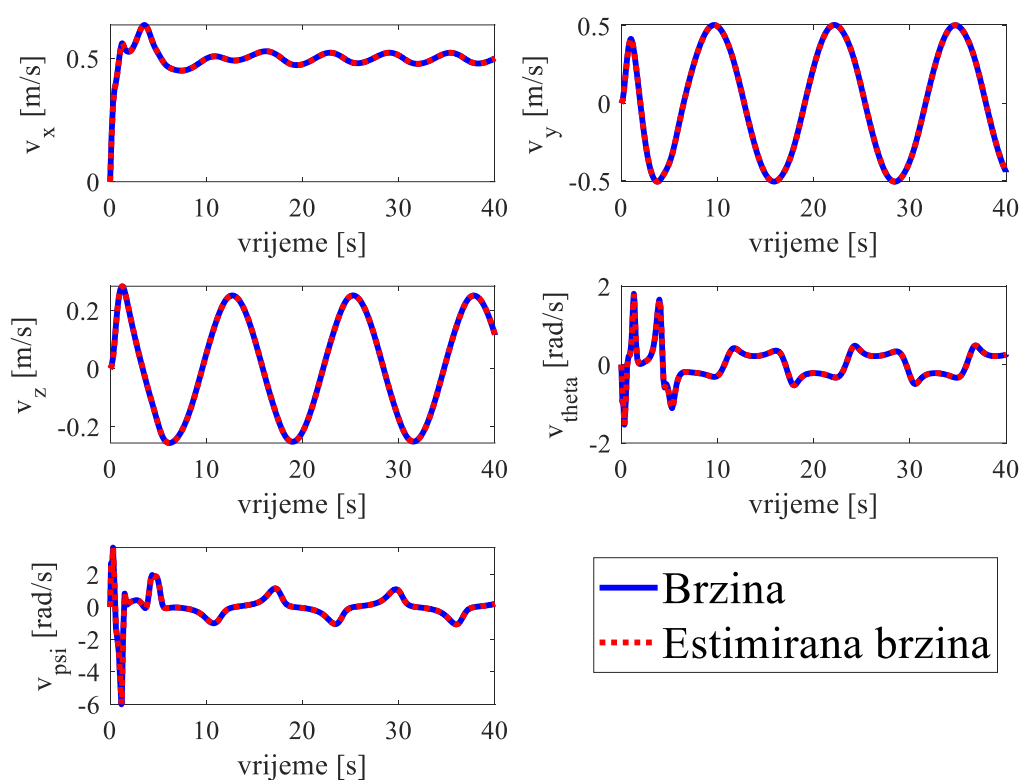


Slika 5.20 3D trajektorija vozila za adaptivni regulator



Slika 5.21 Upravljačke varijable vozila za adaptivni regulator

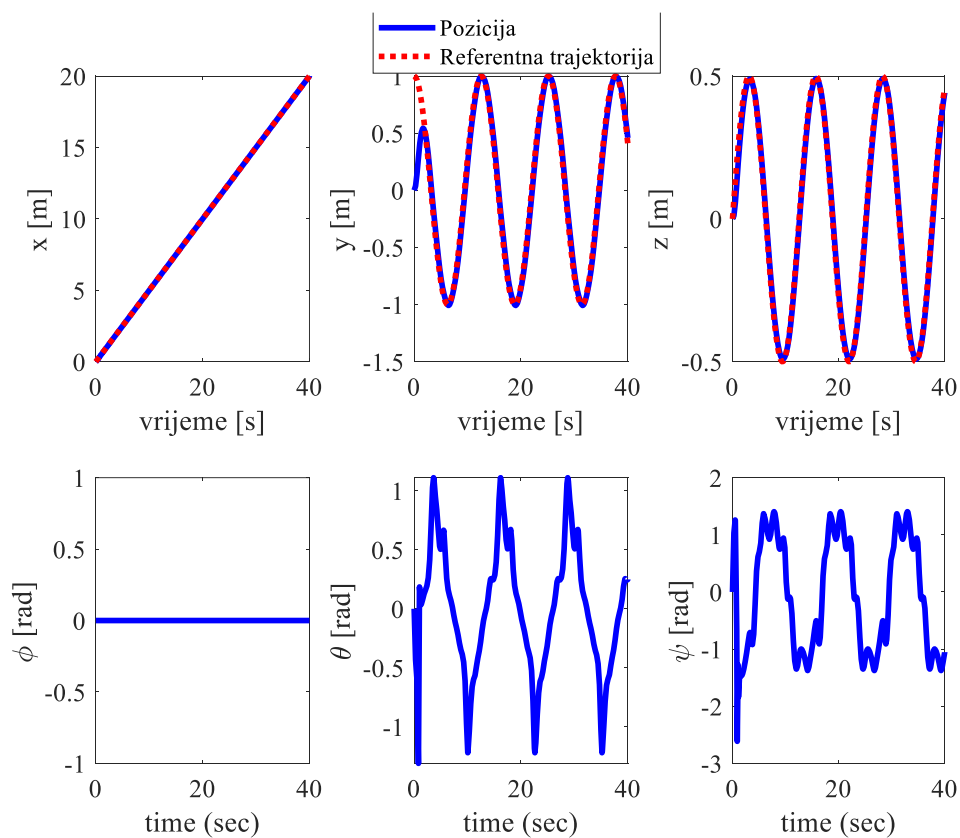
**Slika 5.22 Pogreške praćenja trajektorije za adaptivni regulator****Slika 5.23 Estimacija parametara vozila**



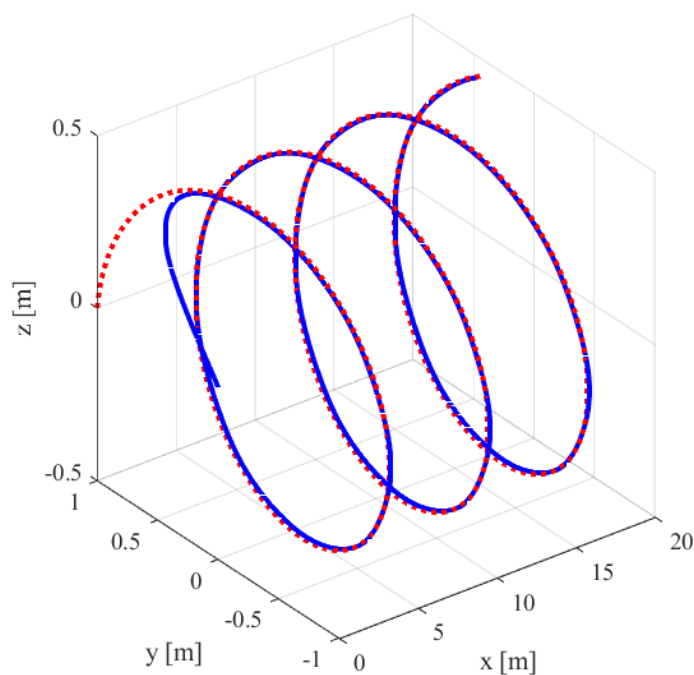
**Slika 5.24** Estimacija brzina vozila

Na rezultatima simulacije prema slikama 5.5 – 5.8 te 5.19 – 5.22 je vidljivo kako adaptivni regulator postiže vrlo slične rezultate kao i linearni, s tom prednošću što parametri modela nisu eksplicitno poznati. Na slikama 5.9 i 5.23 se može vidjeti kako se estimirane vrijednosti mase i koeficijenta viskoznog trenja mijenjaju s vremenom. Također na slikama 5.10 i 5.24 se može vidjeti da sliding-mode filter za estimaciju brzine estimira potrebne brzine bez problema.

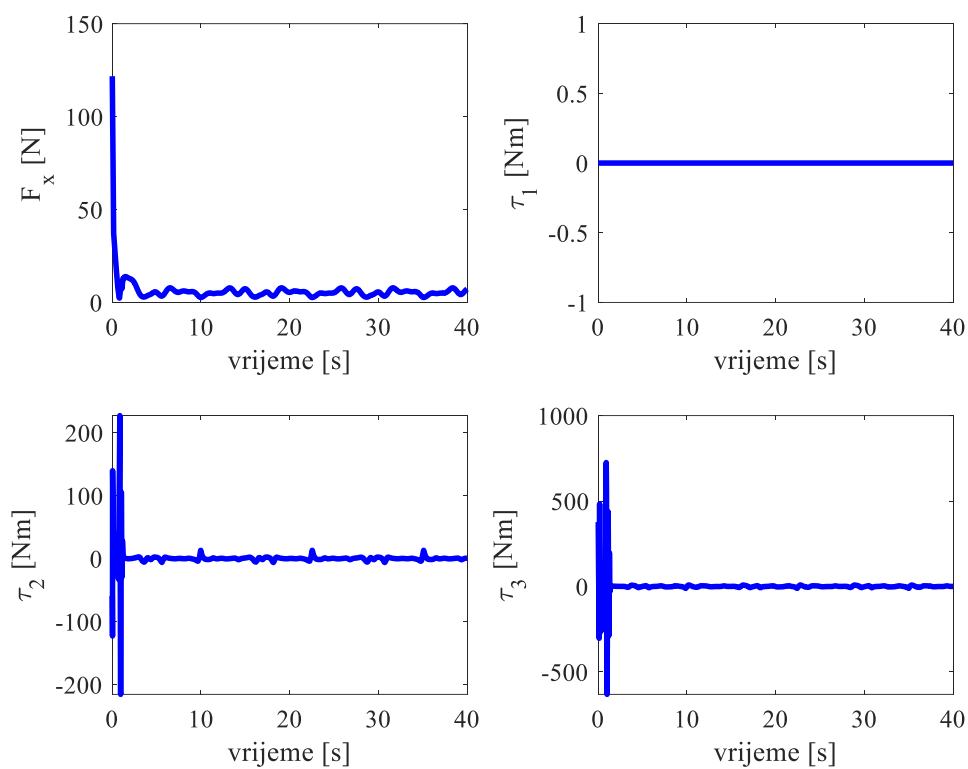
### 5.2.3. Robusni regulator



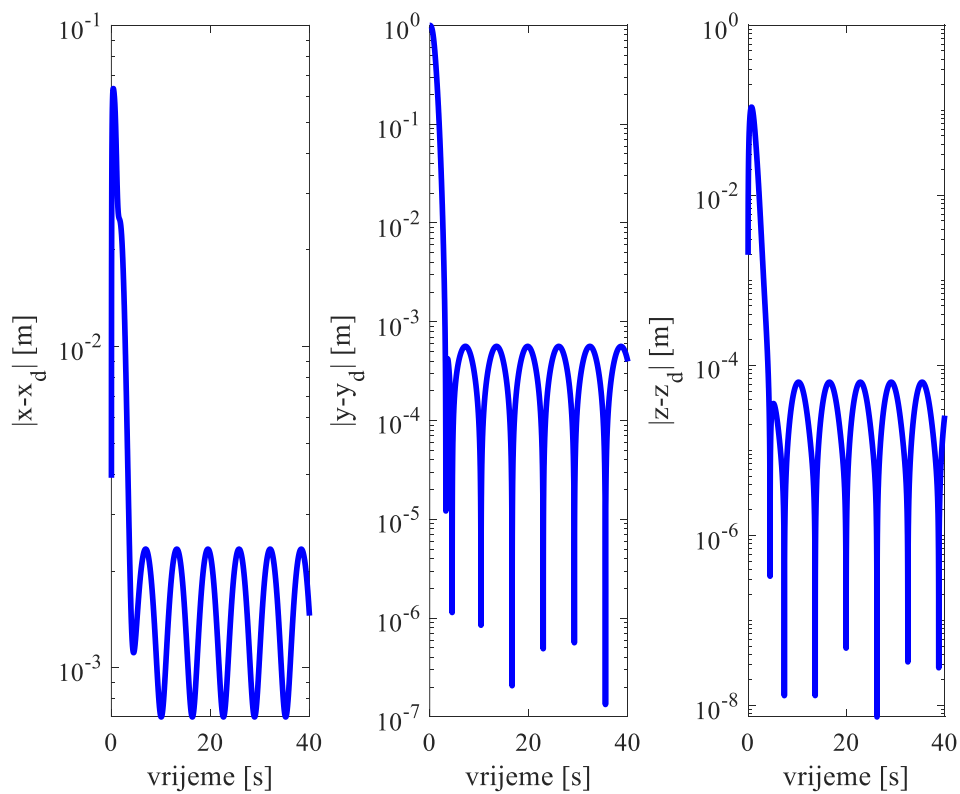
Slika 5.25 Pozicije i kutevi vozila za robusni regulator



Slika 5.26 3D trajektorija vozila za robusni regulator



Slika 5.27 Upravljačke varijable vozila za robusni regulator



Slika 5.28 Pogreške praćenja trajektorije za robusni regulator

U slučaju robusnog (sliding-mode) regulatora, situacija je malo drugačija. Ako se pogledaju pozicije i kutevi vozila, upravljačke varijable te regulacijska odstupanja na slikama 5.11 – 5.14 i 5.25 – 5.28, vidljivo je da regulator također uspješno prati referentnu trajektoriju te odbacuje poremećaje u X i Y smjeru. Takve performanse dolaze pod cijenu većih upravljačkih varijabli na početku u odnosu na prethodna dva regulatora, što je posljedica postavljanja pojačanja sliding-mode regulatora. Ukoliko se koristi ovaj regulator, iznimno je bitno provjeriti karakteristike korištenih propulzora, kako bi se osigurale potrebne sile potiska.

### 5.3. Usporedba regulatora

U tablici 5.2 i 5.3 je navedena usporedba 3 korištena regulatora, njihove prednosti i nedostaci, performanse, pretpostavke, robusnost i sl.

**Tablica 5.2 Pretpostavke i performanse regulatora**

	<b>Pretpostavke o modelu</b>	<b>Performanse</b>
<b>Linearni regulator/Eksterna linearizacija</b>	Potrebno poznavanje kompletnog modela te mjerljivost svih varijabli stanja.	Korištenjem eksterne linearizacije, uvijek možemo dobiti asimptotsku konvergenciju ukoliko je regulator primijenjen na model iz kojeg je izveden. U suprotnom slučaju uvijek se javlja regulacijsko odstupanje. Ne može uspješno odbacivati nepoznate poremećaje.
<b>Adaptivni regulator</b>	Potrebno poznavanje matematičkog modela, nije nužno poznavati vrijednosti parametara modela. Mjerljivost/estimacija svih varijabli stanja.	Omogućava asimptotsku konvergenciju kao i linearni regulator.
<b>Robusni (sliding-mode) regulator</b>	Regulator ne sadrži parametre modela u matematičkom izrazu tako da nije nužno poznavanje modela. Mjerljivost/estimacija svih varijabli stanja.	Asimptotska konvergencija ukoliko je pojačanje regulatora dovoljno veliko. Uspješno odbacuje vanjske poremećaje ako se može ocijeniti vršna vrijednost poremećaja.



**Tablica 5.3 Prednosti, nedostaci te robusnost regulatora**

	<b>Prednosti/Nedostaci</b>	<b>Robusnost</b>
<b>Linearni regulator/Eksterna linearizacija</b>	Jednostavna metoda za implementaciju, s redom modela sustava raste stupanj složenosti. Uspješno odbacuje proizvoljni konstantan poremećaj. Nužno poznavanje kompletnog modela upravljanja.	U slučaju eksterne linearizacije, nužno poznavanje kompletnog dinamičkog sustava kako bi se kompenzirale nelinearnosti. Linearni PD i PID ne ovise o modelu sustava.
<b>Adaptivni regulator</b>	Složenija metoda za implementaciju te raste kompleksnost kod većeg reda sustava. Omogućava upravljanje sustavima s nepoznatim parametrima. Uspješno estimira i djelomično nepoznati poremećaj, ali ukoliko je poremećaj potpuno nepoznat, nema koristi.	Djelomično robusan, potrebno djelomično poznavanje modela, vrijednosti parametra modela nisu nužni za regulator.
<b>Robusni (sliding-mode) regulator</b>	Jednostavna implementacija, regulator ne ovisi o modelu sustava. Odbacuje potpuno nepoznate poremećaje ukoliko je poznata gornja vrijednost poremećaja. Nedostatak je pojava fenomena „chattering“ – visokofrekvencijskih oscilacija upravljačkih varijabli – oštećenje aktuatora. Uzrokuje visoke peakove u upravljačkim varijablama ukoliko je pojačanje regulatora preveliko.	Kako i samo ime govori, najrobusniji od navedenih regulatora, potpuno neovisan o parametrima i dinamičkim članovima sustava pa i poremećaja.

## 6. ZAKLJUČAK

U ovom radu provedena je temeljita analiza i usporedba tri vrste regulatora: linearni regulator s eksternom linearizacijom, adaptivni regulator i robusni (sliding-mode) regulator. Svaki od ovih regulatora ima svoje prednosti i nedostatke koje je važno uzeti u obzir pri odabiru najprikladnijeg regulatora za konkretni sustav. Linearni regulator s eksternom linearizacijom predstavlja jednostavnu metodu implementacije koja osigurava asimptotsku konvergenciju ako se primjenjuje na model iz kojeg je izveden. Međutim, zahtjeva potpuno poznavanje kompletnog modela sustava i mjerljivost svih varijabli stanja. Također, linearni regulator može uspješno odbacivati poznate konstantne poremećaje, ali nije robusan protiv nepoznatih poremećaja. Adaptivni regulator omogućava upravljanje sustavima s nepoznatim parametrima, što je korisno u situacijama kada vrijednosti parametara nisu potpuno poznate. Njegova prednost je u tome što ne zahtijeva precizno poznavanje vrijednosti parametara modela, već samo mjerljivost ili estimaciju varijabli stanja. Međutim, adaptivni regulator može biti složeniji za implementaciju i računski je zahtjevniji kada se primjenjuje na sustave većeg reda. Robusni (sliding-mode) regulator je najrobusniji od navedenih regulatora. On ne zahtijeva poznavanje parametara modela niti poznavanje kompletne dinamike sustava. Može osigurati asimptotsku konvergenciju ako je pojačanje regulatora dovoljno veliko. Također, robusni regulator je učinkovit u odbacivanju vanjskih poremećaja ako se može ocijeniti njihova vršna vrijednost. Međutim, potrebno je uzeti u obzir da robusni regulator može izazvati "chattering" fenomen, tj. visokofrekvencijske oscilacije upravljačkih varijabli, što može oštetiti aktuatora i uzrokovati visoke peakove u upravljačkim varijablama ako je pojačanje regulatora preveliko. Pri donošenju odluke o odabiru regulatora, važno je razmotriti performanse, robusnost i složenost implementacije. Performanse se odnose na sposobnost regulatora da postigne željene referentne vrijednosti i održava stabilnost sustava. Robusnost se odnosi na otpornost regulatora na vanjske poremećaje i nesigurnosti u parametrima modela. Složenost implementacije također može utjecati na resurse i vrijeme potrebno za konfiguraciju i podešavanje regulatora. Optimalan odabir regulatora trebao bi se temeljiti na specifičnim zahtjevima i karakteristikama sustava koji se upravlja. Važno je pronaći ravnotežu između performansi, robusnosti i složenosti implementacije kako bi se postigao optimalan rezultat u upravljanju sustavom.

## LITERATURA

- [1] Z. Binti, „Underactuated Control for an Autonomous Underwater Vehicle with Four Thrusters“, doktorski rad, Okayama University, Okayama, Sep. 2012.
- [2] P. Shah, „Design Considerations for Engineering Autonomous Underwater Vehicles“, magistarski rad, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2007.
- [3] REMUS AUV, <https://www.kongsberg.com/maritime/about-us/news-and-media/news-archive/2016/hydroid-introduces-the-new-generation-remus-100-auv/>, pristup 12.5.2023
- [4] SeaBED AUV, <https://auvac.org/74-2/>, pristup 12.5.2023.
- [5] Sentry AUV, <https://www.whoi.edu/what-we-do/explore/underwater-vehicles/aUvs/sentry/>, pristup 12.5.2023.
- [6] Seaglider AUV, <https://apl.uw.edu/project/project.php?id=seaglider/>, pristup 12.5.2023.
- [7] G. Indiveri, „Modelling and Identification of Underwater Robotics Systems“, doktorski rad, University of Genova, Genova, 1998.
- [8] T.I. Fossen, „Guidance and Control of Ocean Vehicles“, John Wiley & Sons Ltd., 1994.
- [9] D. Majetić, J. Kasać, D. Brezak, „Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja – Viševarijabilni sustavi“, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [10] J. Kasać, S. Stevanović, T. Žilić, J. Stepanić, „Robust output tracking control of a quadrotor in the presence of external disturbances“, Transactions of FAMENA, Vol. 37, No. 4, pp. 29-42, 2013.