

# Razvoj i usporedba algoritama za procjenu zamora uzrokovanog slučajnim vibracijama u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

---

Večerić, Sara

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:509399>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-23**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



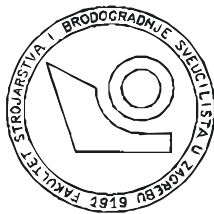


SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**DIPLOMSKI RAD**

**Sara Večerić**

Zagreb, 2023.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

---

# Razvoj i usporedba algoritama za procjenu zamora uzrokovanog slučajnim vibracijama u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

---

Mentori:  
Doc. dr. sc. Zvonimir Tomičević, mag.ing.mech.  
Dr. sc. Damjan Čakmak, mag.ing.mech.

Studentica:  
Sara Večerić

Zagreb, 2023.

~Zahvala~

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru, doc. dr. sc. Zvonimiru Tomičeviću na iskazanom povjerenju tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem svojim dragim prijateljima koji su mi uljepšali i olakšali ovo moje dugogodišnje studiranje.

Zahvaljujem se svojim prekrasnim roditeljima i sestri Ivoni na njihovoj neizmjernej podršci tijekom svake sekunde mog studiranja.

Posebno zahvaljujem mom komentoru dr.sc. Damjanu Čakmak na iskazanom povjerenju, strpljenju, uloženom trudu i vremenu. Zahvaljujem na podijeljenom znanju, korisnim savjetima i smjernicama, a najviše na ugodnom i korektnom odnosu.

Sara Večerić,  
Zagreb, 1. srpnja 2023.



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 23 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Sara Večerić** JMBAG: 0035212809

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Razvoj i usporedba algoritama za procjenu zamora uzrokovanog slučajnim vibracijama u vremenskoj i frekvencijskoj domeni**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Development and comparison of algorithms for the assessment of fatigue induced by random vibrations in the time and frequency domains**

Opis zadatka:

Metoda „toka kiše“ (eng. *rainflow*) u praksi se smatra najtočnijom i najfizikalnijom metodom za brojanje ciklusa nepravilnih amplituda. Navedena metoda omogućuje pojednostavljenje složene povijesti naprezanja različitih amplituda na niz pojednostavljenih ciklusa naprezanja konstantnih amplituda. Na takav niz jednostavnih ciklusa moguće je primijeniti Palmgren-Minerovo pravilo za procjenu oštećenja akumuliranog u konstrukciji. Metoda „toka kiše“ je inkrementalno-iterativna metoda i stoga postaje računalno zahtjevna za vrlo duge povijesti naprezanja. U slučaju normalno raspodijeljenog signala stoga je uobičajeno koristiti približne i računalno slabije zahtjevne spektralne teorije „toka kiše“ u frekvencijskoj domeni. Usprkos relativno brzom tijeku proračuna, spektralne teorije u nekim slučajevima daju nepouzdanе (ponekad prekonzervativne, a ponekad preliberalne) rezultate predviđanja zamora.

U ovom radu potrebno je osmisliti i razviti analitičke i numeričke vibracijske modele za procjenu zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni na temelju slučajne povijesti naprezanja.

Tijekom rada potrebno je:

1. Opisati fenomen visokocikličkog zamora materijala i način procjene zamora pomoću Palmgren-Minerovog pravila u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.
2. Detaljno opisati način brojanja ciklusa nepravilnih amplituda metodom „toka kiše“ za ponavljajuću povijest naprezanja (eng. *repeating stress history*) prema ASTM E1049-85 normi.
3. Osmisliti i dokumentirati analitički i numerički (metoda konačnih elemenata) model za procjenu visokocikličkog statističkog zamora metodom „toka kiše“ u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.
4. Koristiti Dirlikovu približnu spektralnu teoriju.
5. Međusobno usporediti i komentirati analitičke i numeričke rezultate analiza spektralnog zamora.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

4. svibnja 2023.

6. srpnja 2023.

17. – 21. srpnja 2023.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Izv. prof. dr. sc. Zvonimir Tomičević

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

Dr. sc. Damjan Čakmak

## Sadržaj

<b>Sadržaj</b> .....	<b>I</b>
<b>Popis slika</b> .....	<b>II</b>
<b>Popis tablica</b> .....	<b>III</b>
<b>Popis oznaka</b> .....	<b>IV</b>
<b>Popis skraćenica</b> .....	<b>V</b>
<b>Sažetak</b> .....	<b>VI</b>
<b>Summary</b> .....	<b>VII</b>
<b>1. Uvod</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Visokociklički zamor materijala</b> .....	<b>2</b>
2.1. <i>S-N</i> metoda .....	5
2.2. Palmgren-Minerovo pravilo.....	6
<b>3. Metode brojanja ciklusa</b> .....	<b>9</b>
3.1. <i>Rainflow</i> metoda (metoda brojanja „toka kiše“) .....	9
3.2. <i>Rainflow</i> metoda za ponavljajuću povijest naprezanja.....	11
<b>4. Obrada signala</b> .....	<b>14</b>
4.1. Gaussova raspodjela .....	14
4.2. Fourierova transformacija slučajnog signala .....	18
<b>5. Prostor stanja</b> .....	<b>20</b>
5.1. Prostor stanja u programskom paketu <i>MATLab</i> .....	23
5.2. Hadamardov produkt matrica.....	25
<b>6. Spektralni parametri slučajnog signala</b> .....	<b>27</b>
<b>7. Dirlik-ova približna spektralna teorija</b> .....	<b>30</b>
<b>8. Analitička metoda</b> .....	<b>32</b>
8.1. Generiranje uzbude.....	32
8.2. Definiranje geometrije i odziv.....	35
8.3. Analiza rezultata.....	38
<b>9. Numerička metoda</b> .....	<b>42</b>
<b>10. Usporedba rezultata</b> .....	<b>52</b>
<b>11. Zaključak</b> .....	<b>54</b>
<b>12. Literatura</b> .....	<b>55</b>

## Popis slika

Slika 1. a) Stohastičko, b) Periodičko, c) Harmonijsko opterećenje [3] .....	3
Slika 2. Harmonijski ciklus naprezanja [3].....	4
Slika 3. Slučajevi harmonijskog cikličkog naprezanja ovisno o $R$ [4] .....	5
Slika 4. $S-N$ metoda [2] .....	6
Slika 5. Složena povijest naprezanja [3] .....	7
Slika 6. Karakteristike ciklusa [prilagođeno iz 9] .....	9
Slika 7. Primjer <i>Rainflow</i> metode [2] .....	10
Slika 8. Primjer <i>Rainflow</i> metode za ponavljajuću povijest naprezanja [prilagođeno iz 10].....	12
Slika 9. Prikaz brojanja ciklusa [prilagođeno iz 10].....	12
Slika 10. Izrada histograma iz vremenske povijesti, [prilagođeno iz 14].....	17
Slika 11. Vibracijski sustav.....	22
Slika 12. a) Uskopojasan signal, b) Bimodalni signal, c) Širokopojasan signal, d) Usporedba u PSD dijagramu [prilagođeno iz 17] .....	28
Slika 13. Dijagram toka proračuna zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.....	33
Slika 14. a) PSD sile, b) slučajan signal uzbude.....	34
Slika 15. Gaussova krivulja signala uzbude.....	35
Slika 16. a) PSD naprezanja odziva, b) Povijest naprezanja odziva .....	37
Slika 17. Gaussova krivulja odziva .....	38
Slika 18. Prikaz brojanja vrhova i udolina .....	38
Slika 19. Histogram - usporedba metoda.....	39
Slika 20. $S-N$ krivulja materijala.....	40
Slika 21. Kumulativno oštećenje .....	41
Slika 22. Dijagram toka numeričke analize u vremenskoj domeni.....	43
Slika 23. Dijagram toka numeričke analize u frekvencijskoj domeni.....	44
Slika 24. Geometrija modela.....	45
Slika 25. Kreiranje <i>step-a fn</i> .....	46
Slika 26. Uređivanje <i>step-a fn</i> .....	46
Slika 27. Kreiranje <i>step-a mod_dyn</i> .....	47
Slika 28. Određivanje vremenskoj perioda i vremenskog inkrementa .....	47
Slika 29. Određivanje modalnog prigušenja.....	48
Slika 30. Kreiranje <i>step-a dyn_fn</i> .....	48
Slika 31. Određivanje raspona frekvencije i broj točaka potrebnih za analizu .....	49
Slika 32. Opterećenje u vremenskoj domeni .....	49
Slika 33. Opterećenje u frekvencijskoj domeni .....	50
Slika 34. Broj ciklusa do loma u vremenskoj domeni.....	50
Slika 35. Vrijeme do loma u frekvencijskoj domeni .....	51
Slika 36. Parametri za dobivanje rezultata u frekvencijskoj domeni .....	51

## **Popis tablica**

Tablica 1. Usporedba rezultata analitičke i numeričke metode u frekvencijskoj domeni .....	52
Tablica 2. Usporedba rezultata analitičke i numeričke metode u vremenskoj domeni .....	53
Tablica 3. Usporedba rezultata u vremenskoj i frekvencijskoj domeni .....	53



## Popis oznaka

### Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
${}_2F_1(\cdot)$	–	Gausova/obična HiperGeometrijska funkcija
$b$	–	Basquinov zamorni eksponent
$B'_f$	$(\text{N/mm}^2)^m$	Spektralni eksponent zamorne čvrstoće
$C_r$	–	Faktor krijeste/vrha ( $0 \leq C_r \leq \infty$ )
$D$	–	Ukupno zamorno oštećenje ( $0 \leq D \leq 1$ )
$D_{1,2,3}$	–	Dirlikovi parametri prilagodbe ( $0 \leq D_{1,2,3} \leq 1$ )
$e$	–	Baza prirodnog logaritma ( $e \cong 2.718281$ )
$E[0]$	Hz	Očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi
$E[P]$	Hz	Očekivani broj vrhova po sekundi
$f$	Hz	Frekvencija uzbude ( $f = \Omega / (2\pi)$ )
$f_{\text{Nyq}}$	Hz	Nyquistova frekvencija ( $f_{\text{Nyq}} = f_{\text{sr}} / 2$ )
$f_{\text{sr}}$	Hz	Frekvencija uzorkovanja
$F$	N	Sila
$i$	–	Imaginarna jedinica ( $i = \sqrt{-1}$ )
$i, j, k, n$	–	Indeks (cijeli broj, $i, j, k, n = 1 \dots \infty$ )
$l_0$	mm	Početna duljina
$l$	mm	Duljina nakon deformacije
$m$	–	Spektralni zamorni eksponent ( $m = -1/b$ )
$m_n$	$(\text{N/mm}^2)^2 \text{Hz}^n$	$n$ -ti spektralni moment
$m_{n,i}$	$(\text{N/mm}^2)^2 \text{Hz}^n$	$n$ -ti spektralni moment $i$ -tog procesa
$N$	–	Ukupni broj varijabli
$N_f$	–	Broj ciklusa do zamornog loma
$p_{\text{PDF}}$	$1/(\text{N/mm}^2)$	Funkcija gustoće vjerojatnosti naprezanja
$q$	–	Bezdimenzijska amplituda/vrijednost
$R$	–	Dirlikov parametar prilagodbe ( $0 \leq  R  \leq 1$ )
$S_a$	$\text{N/mm}^2$	Amplituda inženjerskog naprezanja ( $S_a = S_r / 2$ )
$S'_f$	$\text{N/mm}^2$	Eksponent zamorne čvrstoće
$S_h$	$\text{N/mm}^2$	Povijest naprezanja
$S_{\text{PSD}}$	$(\text{N/mm}^2)^2/\text{Hz}$	Spektralna gustoća snage naprezanja
$S_r$	$\text{N/mm}^2$	Raspon inženjerskog naprezanja
$S_{\text{RMS}}, x_{\text{RMS}}$	$\text{N/mm}^2$	Efektivna vrijednost naprezanja
$t$	s	Vrijeme
$T_f$	s	Vrijeme do zamornog loma
$t_{\text{max}}$	s	Ukupno vrijeme
$v_{0,P}$	Hz	Očekivana frekvencija niskofrekventne komponente procesa
$x$	$\text{N/mm}^2$	Varijabla naprezanja
$Z$	–	Normalizirani raspon naprezanja
$DFT(\cdot)$	$\text{N/mm}^2$	Rezultat Fourierove transformacije povijesti naprezanja
$DFT^{-1}(\cdot)$	$\text{N/mm}^2$	Rezultat inverzne Fourierove transformacije naprezanja

## Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
$\alpha_n$	–	$n$ -ti bezdimenzijski spektralni parametar
$\Gamma(\cdot)$	–	Potpuna Eulerova Gama funkcija
$\gamma, \alpha_2$	–	Faktor nepravilnosti ( $0 \leq \gamma \leq 1$ )
$\delta, \alpha_1$	–	prvi bezdimenzijski spektralni parametar ( $0 \leq \delta \leq 1$ )
$\delta_2$	–	Vanmarckeov spektralni parametar drugog procesa (visokofrekventna komponenta)
$\kappa$	–	Faktor spljoštenosti/zašiljenosti
$\lambda$	–	Parametar spektralne širine pojasa ( $\lambda = \sqrt{1 - \gamma^2}$ )
$\mu, \bar{x}$	N/mm <sup>2</sup>	Aritmetička sredina naprezanja
$\pi$	rad	Ludolfov broj ( $\pi \cong 3.14159$ )
$\sigma$	N/mm <sup>2</sup>	Standardna devijacija naprezanja
$\varsigma, S_k$	–	Faktor asimetrije/iskrivljenosti
$\sigma^2, \text{Var}(x)$	(N/mm <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>	Varijanca naprezanja
$\varphi$	rad	Fazni kut
$\Phi(\cdot)$	–	Bezdimenzijska funkcija standardne normalne distribucije
$\zeta$	–	Omjer modalnog prigušenja
$\Omega$	rad/s	Kružna frekvencija uzbude

## Popis skraćenica

Oznaka	Puno značenje
a	Amplituda
anlt	Analitički
c	Kumulativno
DFT	Diskretna Fourierova transformacija
Dr	Dirlik
FFT	Brza Fourierova transformacija
FT	Fourierova transformacija
FOR	Zahtjev za izlaz polja ( <i>Field Output Request</i> )
FRF	Funkcija frekvencijskog odgovora
HOR	Zahtjev za ispis povijesti ( <i>History Output Request</i> )
IFFT	Inverzna brza Fourierova transformacija
NB	Uskopojasno
Nyq	Nyquist
PSD	Spektralna gustoća snage
r	Raspon
RFC	Brojanje ciklusa tōka kiše
RMS	Efektivna vrijednost

## Sažetak

Ovaj rad bavi se razvojem i usporedbom algoritama za procjenu zamora uzrokovanog slučajnim vibracijama. Rezultati obje metode dobiveni su u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

Na početku rada opisan je fenomen zamornog loma, *S-N* metoda i Palmgren-Minerovo pravilo.

Detaljno je opisana *Rainflow* metoda brojanja ciklusa za ponavljajuću povijest naprezanja u vremenskoj domeni prema ASTM E1049-85 normi. *Rainflow* metoda za ponavljajuću povijest naprezanja je metoda kojom se pojednostavljuju složene povijesti naprezanja promjenjivih amplituda u niz jednostavnih ciklusa naprezanja konstantnih amplituda.

S obzirom da proračun visokocikličkog zamora u vremenskoj domeni za dugu povijest naprezanja postaje računalno zahtjevan, u svrhu pojednostavljenja, korištene su približne spektralne teorije u frekvencijskoj domeni. U ovom radu korištena je i detaljno opisana Dirlik-ova spektralna teorija.

Opisane su sve formulacije potrebne za procjenu visokocikličkog zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni, na temelju kojih je odrađena analiza.

U zadnjem dijelu prikazan je sam tijek analize i rezultati analitičke i numeričke analize za procjenu zamora. Rezultat analize je vrijeme do loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Analitička analiza provedena je pomoću algoritma napisanog u programskog paketu *MATLab R2017b*, a numerička analiza pomoću programskih paketa *Abaqus* i *Fe-Safe*.

Ključne riječi: *zamorni lom, uzbuda, odziv, Rainflow metoda, povijest naprezanja, akumulirano oštećenje, broj ciklusa do loma, Dirlik-ova spektralna teorija, frekvencijska domena.*

## Summary

This thesis deals with the development and comparison of algorithms for fatigue assessment induced by random vibrations. The results obtained in both methods were obtained in the time and frequency domains.

At the beginning, the phenomenon of fatigue fracture, the  $S-N$  method and the Palmgren-Miner rule are described.

The Rainflow cycle counting method for repetitive stress history in the time domain according to the ASTM E1049-85 standard is described in detail. The Rainflow method for repeating stress history is a method that simplifies complex stress histories of variable amplitudes into a series of simple stress cycles of constant amplitudes. The calculation of this method is in the time domain.

Since the calculation of high cycle fatigue in the time domain for a long stress history becomes computationally demanding, for the purpose of simplification, approximate spectral theories in the frequency domain are used. In this work, the Dirlik spectral theory is used and described in detail.

All the formulations necessary for the assessment of high-cycle fatigue in the time and frequency domain are described, based on which the analysis was performed.

In the last part, the analysis process and the results of the analytical and numerical analysis for fatigue assessment are presented. The result of the analysis is the time to failure in the time and frequency domains. The analytical analysis was performed using an algorithm written in the *MATLab R2017b* software package, and the numerical analysis was performed using the *Abaqus* and *Fe-Safe* software packages.

**Keywords:** *fatigue failure, excitation, response, Rainflow method, stress history, cumulative damage, number of cycles to failure, Dirlik spectral theory, frequency domain.*

## 1. Uvod

U ovom radu naglasak je na rješavanje problema zamora materijala uslijed djelovanja slučajnih vibracija. Fenomen zamora materijala je kompleksan. Problem zamora materijala može se odrediti pomoću analitičke i numeričke metode. U svakoj od metoda može se procijeniti zamor materijala u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. U ovom radu razrađen je postupak za procjenu zamora u obje metode. Analitička metoda razvijena je u programskom paketu *MATLab*, a numerička *Abaqus* i *Fe-Safe*.

Rezultat za procjenu zamora materijala u obje domene je vrijeme do loma. Za dobivanje vremena do loma u vremenskoj domeni koristi se metoda „toka kiše“. Metoda „toka kiše“ je metoda za brojanje ciklusa kod slučajne povijesti naprezanja. Ova metoda smatra se najtočnijom metodom, no takav proračun za duge povijesti naprezanja postaje veoma računalno zahtjevan.

Spektralne teorije definirane su u frekvencijskoj domeni i uvelike pojednostavljaju proračun. U ovom radu korištena je Dirlik-ova spektralna teorija. Također, Dirlik-ova spektralna teorija implementirana je u programskom paketu *Fe-Safe* koji je korišten u ovom radu za numeričku analizu. No, spektralne teorije u nekim slučajevima daju nepouzdan rezultate previđanja zamora.

Rad se bavi procjenom kumuliranog oštećenja konstrukcije korištenjem gore navedenih metoda i domena. Cilj ovog rada je usporedba rezultata vremena do loma analitičke i numeričke metode.

## 2. Visokociklički zamor materijala

Visokociklički zamor materijala je pojava postupnog razaranja materijala uslijed dugotrajnog, vremenski promjenjivog djelovanja dinamičkih naprezanja. Rezultat takvog djelovanja je lom konstrukcije koji se najčešće događaju bez ikakvog upozorenja. Zamorno ponašanje konstrukcije ovisi o

- redoslijedu opterećenja,
- karakteristici materijala,
- geometriji konstrukcije [1].

Oštećenje uslijed zamora materijala pojavljuje se u obliku pukotine. Pukotine najčešće nastaju na mjestima gdje postoji koncentracija naprezanja, a lom na mjestu najveće koncentracije naprezanja. Kod dinamičkog opterećivanja pukotina se širi zbog stalne promjene opterećenja. Gornja granica nosivosti materijala konstrukcije smanjuje se širenjem pukotine. Do loma dolazi kada nosivi presjek ne može izdržati nazivno opterećenje odnosno kada je nametnuto naprezanje zbog smanjenja nosive površine naraslo na iznos jednak vlačnoj čvrstoći materijala.

Karakteristike visokocikličkog zamora s obzirom na trenutak nastupanja su [2]:

- lom nastupa nakon velikog broja ciklusa opterećenja ( $N_f > 10^5$ ),
- naprezanja i deformacije su u elastičnom području,
- koristi se  $S-N$  krivulja (Wohler, 1860.)

U nastavku prikazani su parametri pomoću kojih se mogu definirati parametri koji se koriste za analizu zamora materijala i dobiveni su pomoću statičkog vlačnog pokusa. Razlikuje se inženjerski i stvarni pristup. Inženjerskim pristupom pojednostavljuje se proračun i pretpostavlja se da je poprečni presjek jednak početnom poprečnom presjeku  $A_0$  koji je konstantan. Kod stvarnog proračuna uzima se poprečni presjek  $A$  na mjestu suženja [2].

Inženjersko naprezanje:

$$S = \frac{F}{A_0}, \quad (2.1)$$

gdje je  $F$  sila.

Stvarno naprezanje:

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (2.2)$$

Inženjerska deformacija:

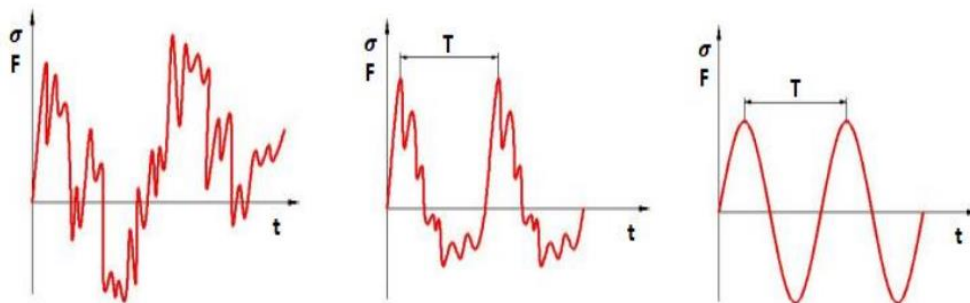
$$e = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad (2.3)$$

gdje je  $l$  duljina uzorka nakon deformacije, a  $l_0$  početna duljina uzorka.

Stvarna deformacija:

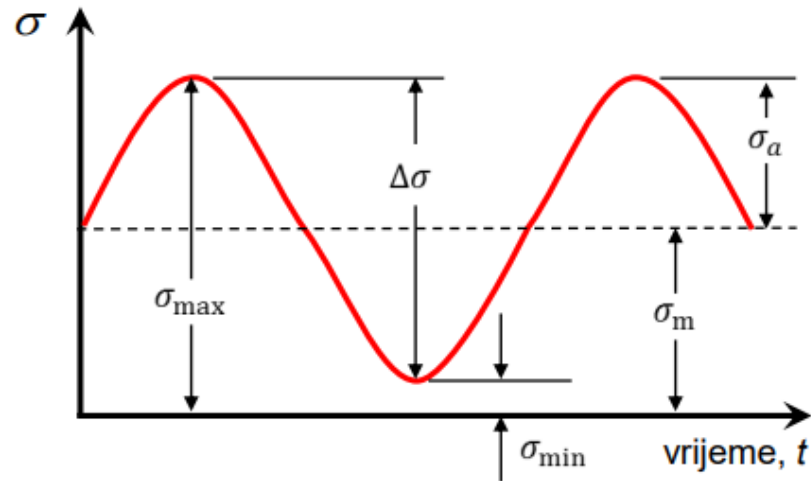
$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}. \quad (2.4)$$

Opterećenje konstrukcije može biti statičko i dinamičko. U ovom radu naglasak je na dinamičkom opterećenju. Slika 1. prikazuje dinamičko cikličko opterećenje koje može biti stohastičko, periodičko i harmonijsko. Kod stohastičkog ili slučajnog dinamičkog opterećenja amplitude su nepravilne odnosno promjenjive. Periodičko dinamičko opterećenje ima nepravilne amplitude koje se ponavljaju u vremenu. Cikličko harmonijsko opterećenje je pravilna periodička promjena opterećenja i opisana je sinusoidom.



Slika 1. a) Stohastičko, b) Periodičko, c) Harmonijsko opterećenje [3]

Na slici 2. prikazano je harmonijsko dinamičko opterećenje sa karakteristikama koje su potrebne za računanje zamora materijala. Za potrebe proračuna, periodička dinamička opterećenja mogu se aproksimirati harmonijskim dinamičkim opterećenjem, uz uvjet konstantne amplitude i srednjeg naprezanja.



Slika 2. Harmonijski ciklus naprezanja [3]

Raspon naprezanja jednak je dvostrukoj amplitudi ili razlici najvećeg i najmanjeg naprezanja:

$$\sigma_r \equiv \Delta\sigma = |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = 2 \cdot \sigma_a. \quad (2.5)$$

Amplituda naprezanja jednaka je polovici raspona naprezanja:

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right| = \frac{\sigma_r}{2}. \quad (2.6)$$

Srednje naprezanje jednako je srednjoj vrijednosti između najvećeg i najmanjeg naprezanja:

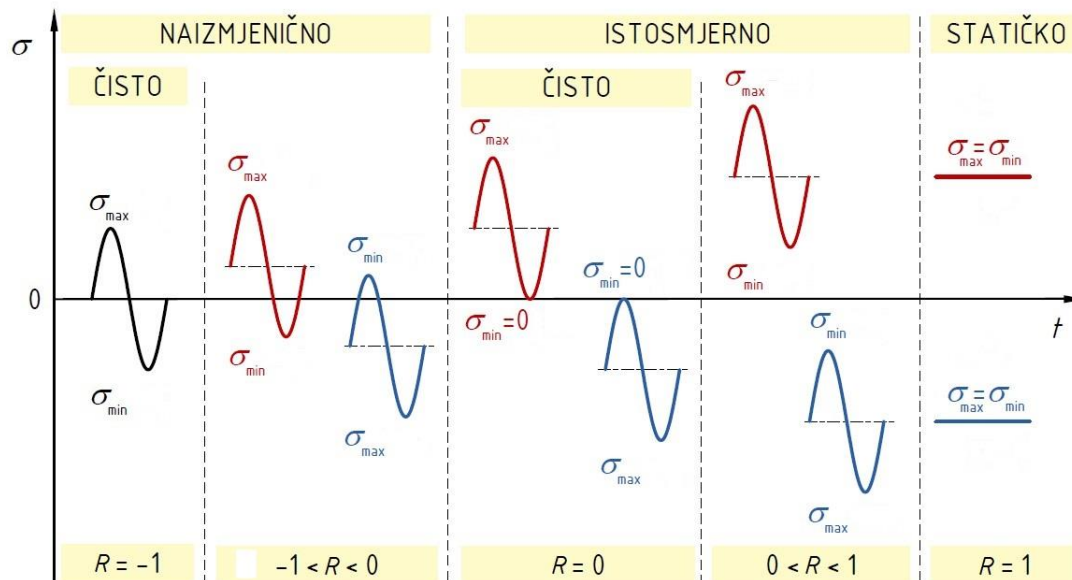
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \quad (2.7)$$

Odnos graničnih naprezanja jednak je omjeru najmanjeg i najvećeg naprezanja:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (2.8)$$

Za određivanje harmonijskog cikličkog opterećenja potrebno je odrediti odnos graničnih naprezanja  $R$  i srednju vrijednost naprezanja. Odnos graničnih naprezanja određen je granicama  $-1 \leq R \leq 1$ . Čisto naizmjenično opterećenje je kada je  $R = -1$  i srednje naprezanje jednako nuli. Takvo naprezanje obuhvaća i vlačno i tlačno područje s jednakim apsolutnim vrijednostima. Slika 3. prikazuje slučajeve za različite vrijednosti odnosa graničnih naprezanja  $R$ .



Slika 3. Slučajevi harmonijskog cikličkog napreznja ovisno o  $R$  [4]

## 2.1. S-N metoda

Wöhler je 1860. godine postavio temelje S-N metode [1]. Wöhlerova krivulja prikazuju ovisnost dinamičke čvrstoće o broju ciklusa  $N$  za određeni odnos graničnih napreznja  $R$ . Određuje se u laboratoriju na uređajima koji se zovu umaralice. Provodi se tako da se identični uzorci izlažu različitim promjenjivim opterećenjima do pojave pukotine ili do potpunog loma, zatim se zapisuje u dijagram broj ciklusa do loma  $N$  i amplituda napreznja  $S_a$ . S-N krivulja može se aproksimirati izrazom [5], [2]:

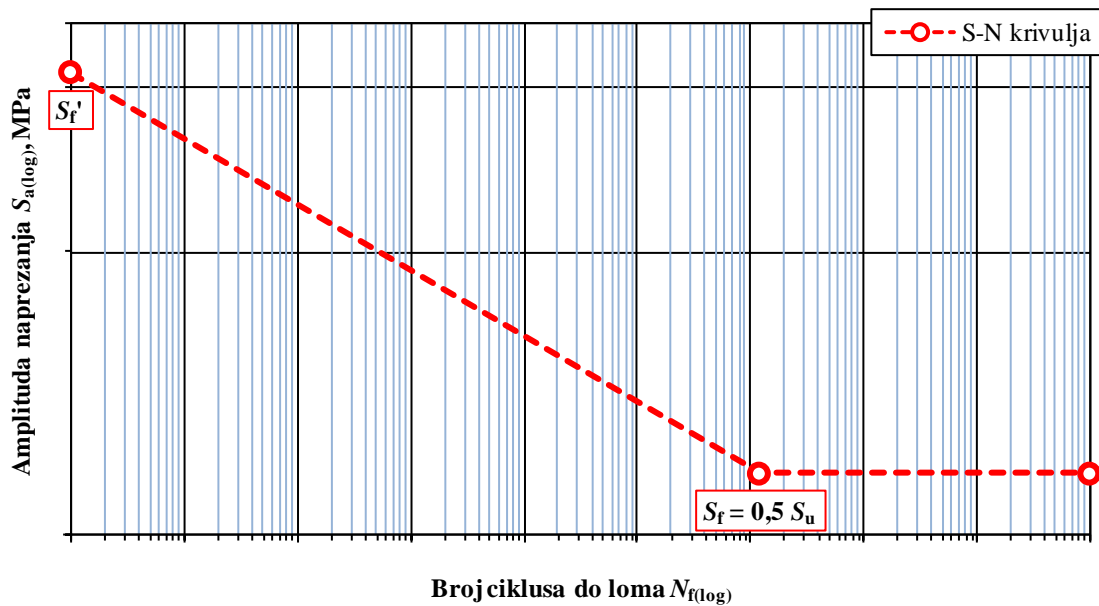
$$S_a = S'_f \cdot (N_f)^b, \quad (2.9)$$

gdje je  $S'_f$  amplituda zamorne čvrstoće,  $b$  eksponent zamorne čvrstoće,  $S_a$  amplituda napreznja, a  $N_f$  broj ciklusa do loma.

Kada vrijednost amplitude napreznja iznosi približno pola vlačne čvrstoće, krivulja postaje vodoravna. Taj dio predstavlja trajnu dinamičku čvrstoću. Trajna dinamička čvrstoća je najveće napreznje koje materijal izdrži pri neograničenom broju ciklusa za dani omjer napreznja i vrstu opterećenja [3]. Iskustvena vrijednost trajne dinamičke čvrstoće glasi:

$$S_f \approx 0,5 \cdot S_u. \quad (2.10)$$

Na slici 4. prikazana je  $S-N$  krivulja koja se obično prikazuje u logaritamskom mjerilu zbog preglednosti.  $S-N$  krivulja je karakteristika materijala i prikazuje odnos amplitude naprezanja i broja ciklusa do loma.



Slika 4.  $S-N$  metoda [2]

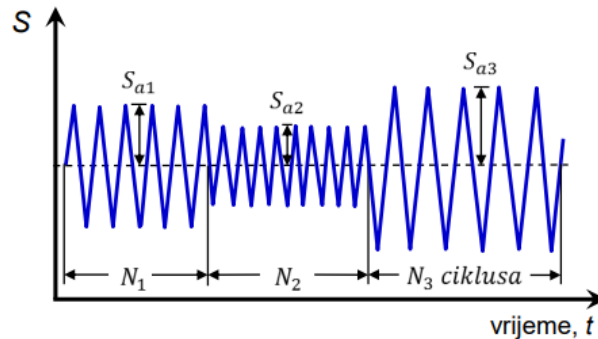
$S-N$  metoda vrijedi u elastičnom području čvrstoće materijala. Drugim riječima, sva naprezanja, pa čak i lokalna naprezanja, manja su od granice tečenja materijala. Kako se amplituda naprezanja smanjuje, povećava se broj ciklusa za lom uslijed zamora.

$S-N$  krivulja može se izravno koristiti ako je srednje naprezanje nula, odnosno  $R = -1$ . Međutim, većina opterećenja stvara profile srednjih naprezanja različitih od nule. Potrebno je stoga uvesti korektivne faktore koji uzimaju u obzir utjecaj srednjeg naprezanja. Srednje naprezanje može biti u vlačnom ili tlačnom području. Nepogodnije je vlačno srednje naprezanje zato što ubrzava pojavu zamora.

## 2.2. Palmgren-Minerovo pravilo

$S-N$  krivulja daje broj ciklusa do loma za harmonijski ciklus konstantne amplitude. Kod stohastičkog opterećenja, povijest naprezanja nije konstantne amplitude, te se  $S-N$  krivulja primjenjuje za svaki ciklus zasebno. Oštećenje uslijed zamora može se izračunati tako da se prvo izdvoje iz povijesti naprezanja ciklusi naprezanja koristeći metode brojanja ciklusa. Nakon što se provede brojanje ciklusa, oštećenje uslijed zamora može se odrediti korištenjem  $S-N$  krivulje materijala i korištenjem Palmgren-Minerovog pravila [6], [7].

Kako bi se moglo primijeniti Palmgren-Minerovo pravilo, povijest naprezanja mora se prethodno rastaviti na jednostavnije cikluse, gdje je svaki ciklus određen pripadajućom konstantnom amplitudom naprezanja. Stohastičko opterećenje može se smatrati periodičkim uz dovoljno dugu povijest naprezanja. Na Slici 5. prikazana je povijest naprezanja gdje su ciklusi razvrstani u skupine konstantne amplitude.



Slika 5. Složena povijest naprezanja [3]

Svaki ciklus ima pripadajuće kumulirano oštećenje koje je proporcionalno broju ciklusa do loma  $N_f$  pri konstantnoj amplitudi  $S_a$ . Oštećenje uzrokovano za više različitih  $n$  ciklusa je:

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}, \quad (2.11)$$

gdje je  $N_i$  broj ponavljanja istog ciklusa.

Palmgren-Minerovo pravilo predstavlja relaciju za kumulirano (nakupljeno) oštećenje uslijed dinamičkog opterećenja s promjenjivom amplitudom, a prikazano je izrazom:

$$D_{\text{uk}} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} = \frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} \dots + \frac{n_n}{N_{fn}}, \quad (2.12)$$

gdje je  $D_{\text{uk}}$  ukupno kumulirano oštećenje,  $N_{fi}$  je broj ciklusa određeno iz  $S$ - $N$  krivulje, a  $n_i$  je ukupan broj ciklusa pri konstantnoj amplitudi naprezanja  $S_{ai}$ . Lom se predviđa kada zbroj omjera bude veći ili jednak od 1 tj. 100%.

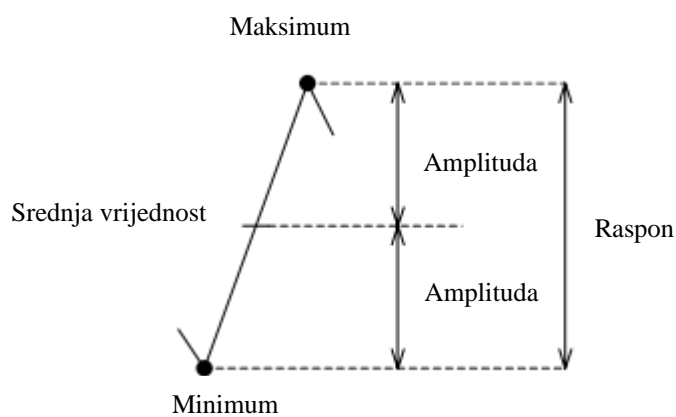
Ograničenja Palmgren-Minerovog pravila su [8]:

- Pretpostavlja se da svi ciklusi određene veličine čine istu količinu štete, nezavisno o redoslijedu opterećivanja konstrukcijske komponente.

- Budući da Palmgren-Minerovo pravilo pretpostavlja da je kumulativno oštećenje sastavljeno od linearno akumuliranih oštećenja, deformacije i naprezanja trebaju ostati u elastičnom području.
- Palmgren-Minerovo pravilo pretpostavlja da prisutnost ciklusa naprezanja amplitude  $S_2$  ne utječe na oštećenje uzrokovano ciklusom naprezanja amplitude  $S_1$ .
- Pravilo za štetu uzrokovanu ciklusom naprezanja amplitude  $S_1$  je isto kao i pravilo za štetu uzrokovanu ciklusom naprezanja amplitude  $S_2$ .

### 3. Metode brojanja ciklusa

Povijesti naprezanja su najčešće stohastička tj. nepravilna. Složene stohastičke povijesti naprezanja potrebno je pojednostaviti kako bi se mogle identificirati sve promjene tijekom trajanja signala. Metoda brojanja ciklusa je postupak koji pretvara zadanu povijest naprezanja u skup prebrojanih ciklusa određenog raspona naprezanja. Ciklus se definira određivanjem njegove najviše i najniže točke tj. njegovog maksimuma i minimuma. Predviđanje životnog vijeka uslijed zamora zahtijeva cikluse naprezanja. Slika 6. prikazuje općeniti odnos amplitude ciklusa, raspon i srednju vrijednost.



Slika 6. Karakteristike ciklusa [prilagodeno iz 9]

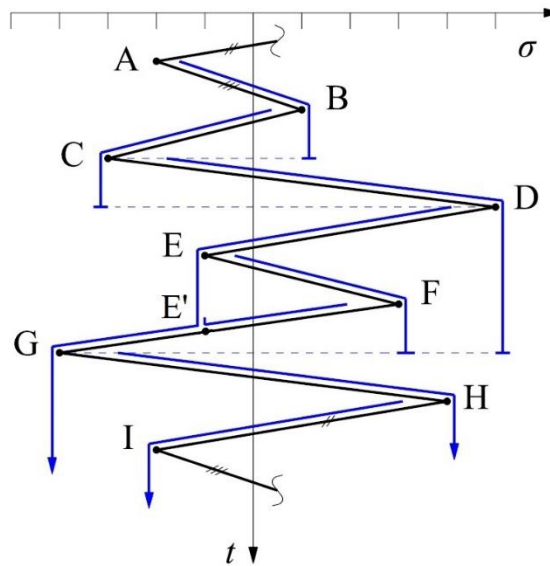
Metode brojanja ciklusa dijele se na jednoparametarske i dvoparametarske. Kod jednoparametarske metode brojanja ciklusa ciklusi se razvrstavaju samo po razlici naprezanja. Dvoparametarska metoda brojanja ciklusa uzima u obzir razliku naprezanja i vrijednost srednjeg naprezanja [6].

#### 3.1. Rainflow metoda (metoda brojanja „toka kiše“)

*Rainflow* metoda prepoznata je kao najpreciznija metoda za utvrđivanje oštećenja kod kompleksnog opterećenja zato što uzima u obzir i male i velike raspone naprezanja. Ova metoda se često koristi s obzirom da koristi parametre koji su izravno povezani s zamornim oštećenjem. Metoda „toka kiše“ ima dodatnu prednost u odnosu na druge metode zato što uz razvrstavanje ciklusa po razlikama naprezanja, uzima u obzir i srednje naprezanje. Takvo brojanje naziva se dvoparametarsko. Razvili su je Matsuishi i Endo 1968. godine [6], [5].

Metoda „toka kiše“ dobila je naziv po izgledu dijagrama koji podsjeća na padanje kiše po krovu pagode (Slika 7.). Rubovi tog krova predstavljaju vrhove i udoline, odnosno lokalne maksimume i minimume. Ova metoda broji pune cikluse i polu-cikluse. Prvi korak ove metode

je rotacija dijagrama za  $90^\circ$  u smjeru kazaljke na satu, tako da apscisa  $t$  gleda prema dolje, a vrh dijagrama predstavlja točka A (Slika 7.). Zatim se od vrha dijagrama pusti zamišljeni tok vode.



Slika 7. Primjer Rainflow metode [2]

Princip prepoznavanja zatvorenih krivulja koje tvore cikluse i polucikluse objašnjen na temelju slike 7. [2]:

- voda teče odozgo prema dolje (gravitacija),
- voda teče najprije iz točke A (točka I je zadnja po redu),
- tok vode iz sljedećeg ekstrema započinje tek kada tok vode iz prethodnog ekstrema završi (npr. točka B je na redu prije točke C),
- voda teče sve dok: **(1)** ne *prođe* pored većeg ili jednakog maksimuma ili minimuma od onog s kojeg je krenula (točke A, B, C i E), **(2)** ne *ispadne* (točke D, G i H), **(3)** ne *naiđe* na prethodni mlaz (točka F),
- zatvorene krivulje (one koje su naišle na prethodni mlaz – spojnica E-F-E') tvore pune/cijele cikluse (Slika 7.),
- krivulje koje se nisu zatvorile (spojnice A-B, B-C, C-D, D-G, G-H i H-I) tvore polu-cikluse (engl. *one-half cycle*) (Slika 7.).

Algoritam za provedbu Rainflow metode, namijenjen programiranju, može se naći u ASTM normi E1049-85. Za kompleksne i duge signale pogodnija je primjena računala.

Primjena metode „toka kiše“ i pohranjivanje njezinih rezultata zahtijeva preliminarnu obradu opterećenja koja se sastoji od uzorkovanja, izdvajanja ekstrema i na kraju kvantificiranje vrijednosti u razrede. Metoda brojanja „toka kiše“ zahtijeva samo uzastopne ekstreme niza opterećenja, koji se moraju izdvojiti iz uzorkovanog niza. [1]

### 3.2. **Rainflow metoda za ponavljajuću povijest naprezanja**

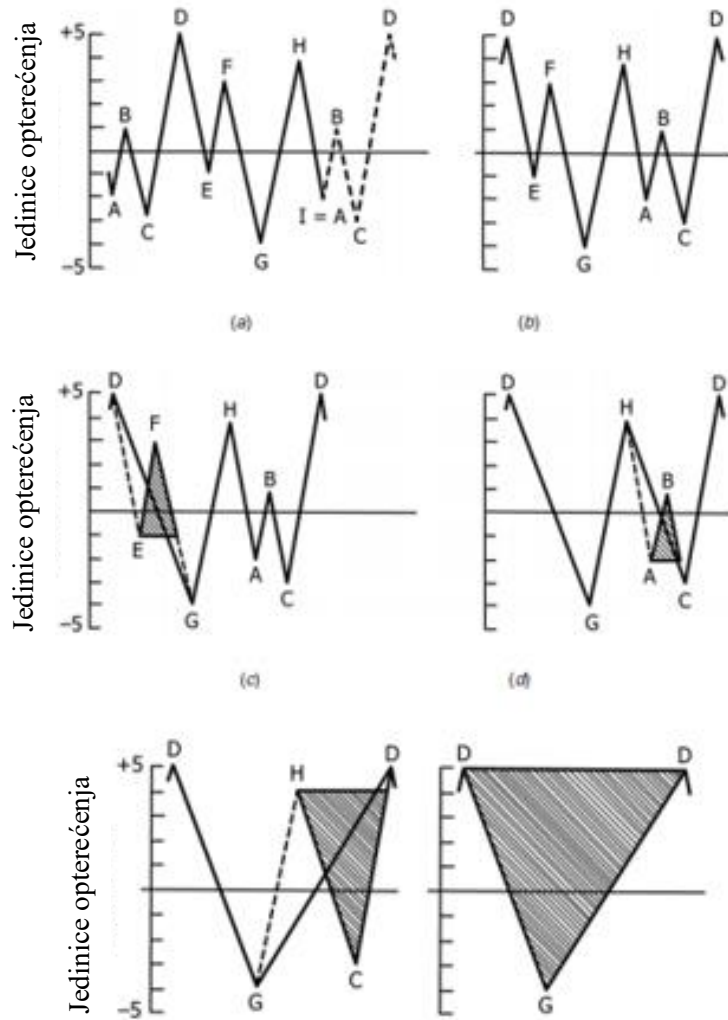
Kada povijest naprezanja predstavlja neki dulji signal, tada se može očekivati da se ciklusi te povijesti naprezanja uzastopno ponavljaju u vremenu. Budući da se ciklusi u praksi, koliko god bili kompleksni redovito ponavljaju, proračun zamora proveden je pojednostavljenom *Rainflow* metodom [2]. Povijest naprezanja raspoređuje se tako da brojanje počne s najvišim vrhom ili najnižom udolinom. Takvo brojanje ciklusa ne sadrži polucikluse, nego samo pune cikluse. Svi rasponi odgovaraju zatvorenoj krivulji histereze, tj. čine zatvorene trokute. Ova metoda naziva se još metoda triju uzastopnih točaka, te je jedna od poznatijih *Rainflow* metoda.

Princip brojanja ciklusa za ponavljajuću povijest naprezanja:

X predstavlja raspon koji se razmatra, a Y prethodni raspon susjedan rasponu X. Kada je  $X > Y$ , tada se prethodni raspon smatra punim ciklusom. Ako ciklus nije izbrojan, onda treba provjeriti sljedeća 4 vrha, sve dok se ne dođe do punog ciklusa [9]

Na primjeru slike 8. pokazano je brojanje ciklusa prema ASTM normi [9] :

$Y=E-F$ ,  $X=F-G$ ,  $X>Y$ , E-F sa točkom F, koja se nalazi na dijelu F-G, zatvaraju trokut te se broji kao puni ciklus, i točke E i F se odbacuju. Brojanje se zaustavlja kada se odrede svi puni ciklusi u signalu (E-F-E', A-B-A', H-C-H' i D-G-D).

Slika 8. Primjer *Rainflow* metode za ponavljajuću povijest naprezanja [prilagođeno iz 10]

Raspon	Broj ciklusa	Događaji
10	0	
9	1	D-G
8	0	
7	1	H-C
6	0	
5	0	
4	1	E-F
3	1	A-B
2	0	
1	0	

Slika 9. Prikaz brojanja ciklusa [prilagođeno iz 10]



U vremenskoj domeni, povijest naprezanja funkcija je vremena. Prednost RFC metode je mogućnost primjene Palmgren-Minerovog pravila. Standardan RFC algoritam koristi se radi procjene ukupnog akumuliranog oštećenja  $D_{\text{RFC}}$  i odgovarajućeg broja ciklusa do loma  $N_{\text{RFC}}$ . Relacije za RFC primjenom Palmgren-Minerovog zapisa glase [10]:

$$D_{\text{RFC}} [S_h(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} \Rightarrow N_{\text{RFC}} = \frac{1}{D_{\text{RFC}}} \Rightarrow T_{\text{RFC}} = t_{\text{max}} N_{\text{RFC}}, \quad (3.1)$$

gdje je  $T_{\text{RFC}}$  vrijeme do loma, a  $S_h$  povijest naprezanja. Uvedeno je ukupno vrijeme trajanja analize ponavljajućeg procesa naprezanja  $t_{\text{max}}$ .

## 4. Obrada signala

Obrada signala bavi se analizom procesa koji općenito mogu biti deterministički ili slučajni. Deterministički proces je proces koji se može opisati eksplicitnom matematičkom relacijom. Vrijednosti unutar niza, kao što je vremenska povijest, mogu se uspješno ekstrapolirati ili predvidjeti, barem unutar dopuštene granice pogreške. Kada se razmatraju, na primjer, izmjereni podaci iz determinističkog dinamičkog sustava, očekuje se da će pod jednakim uvjetima promatrani ponovljeni odziv sustava uvijek biti jednak. Primjer determinističkog procesa je sinusoida [11].

Zamor uslijed vibracija često se odnosi na opterećenja koja potječu iz okoline, kao što su morski valovi i struje, neravnine ceste i vibracije pogonskog motora. Kod takvih procesa teško je predvidjeti buduće stanje, te se takvi procesi nazivaju slučajni procesi. Slučajni proces je proces koji se ne može opisati eksplicitnom matematičkom relacijom, ali mora ispunjavati zahtjeve vezane uz vjerojatnost i statističke prosjeke. Odziv se može definirati kinematičkim veličinama ili naprezanjima i deformacijama, ali uvijek s varijablama slučajne prirode [11].

Slučajan proces može se definirati kao statistički ako je signal Gaussov, stacionaran i ergodičan, Slučajan proces definiran je kao stacionaran ako su sve statističke karakteristike u procesu neovisne o vremenu tj. ne mijenjaju se pri pomicanju vremena. Proces je ergodičan ako statističko mjerenje za svaki uzorak predstavlja statističko mjerenje za bilo koji uzorak. Vrlo je korisno ako je pretpostavka ergodičnosti valjana jer to znači da se jedan dugi uzorak može koristiti za izračunavanje bilo koje željene statistike, umjesto mjerenja mnogo različitih zapisa [12].

### 4.1. Gaussova raspodjela

U vremenskoj domeni da bi se proces adekvatno analizirao, potrebno je uzeti dovoljno velik broj mjerenih uzoraka, koji se zatim analiziraju kao grupa. Tako veliku količinu podataka teško je analizirati u usporedbi s opisom procesa u frekvencijskoj domeni. Slučajni proces definiran je kombinacijom funkcije gustoće vjerojatnosti amplitude PDF i spektralne gustoće snage PSD.

Slučajna varijabla je takva veličina čija se trenutna vrijednost ne može predvidjeti. Slučajna varijabla sa Gaussovskom raspodjelom je normalno raspodijeljena i zove se normalna devijacija. Može se objasniti preko centralnog graničnog teorema, koji kaže da će svaka

slučajna varijabla koja je zbroj nekoliko nezavisnih slučajnih varijabli slijediti Gaussovu raspodjelu ako je broj slučajnih varijabli koje doprinose zbroju razumno velik i nijedna pojedinačna slučajna varijabla ne dominira raspodjelom [12].

Svi ciklusi izbrojani u procesu su slučajni događaji, sa svojom vlastitom vjerojatnošću pojavljivanja, i stoga ih treba karakterizirati funkcijom gustoće vjerojatnosti (PDF). Za slučajnu varijablu kaže se da je Gaussovska ako je njena funkcija gustoće vjerojatnosti u sljedećem obliku:

$$p_{\text{PDF}}^{\text{norm}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (4.1)$$

gdje je  $\mu$  aritmetička sredina uzoraka, dok je parametar  $\sigma$  pripadajuća standardna devijacija.

Aritmetička sredina uzoraka, označena kao  $\bar{x}$  ili  $\mu$ , je zbroj vrijednosti uzoraka podijeljenih ukupnim brojem stavki u uzorku. Aritmetička sredina glasi:

$$\bar{x} \equiv \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}. \quad (4.2)$$

Varijanca je očekivanje kvadratne devijacije slučajne varijable  $x_i$  od srednje vrijednosti. Varijanca efektivno mjeri koliko skup brojeva odstupa od prosječne vrijednosti. Jednadžba varijance glasi:

$$\text{Var}(x) \equiv \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right]. \quad (4.3)$$

Standardna devijacija je mjera broja varijacija ili disperzija skupa vrijednosti. Za diskretnu slučajnu varijablu, kao korijen od varijance, standardna devijacija zapisuje se kao:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} \equiv \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right]}. \quad (4.4)$$

Efektivna vrijednost RMS skupa vrijednosti je korijen kvadrata aritmetičke sredine za vrijednosti  $x_i^2$ . U slučaju kada su skupovi od  $N$  uzoraka, RMS je određen relacijom:

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}. \quad (4.5)$$

Za srednju vrijednost jednakoj nuli, Gaussovski slučajni signal za dovoljnu statističku relevantnu duljinu, numeričke vrijednosti teže sličnim vrijednostima tj.  $\sigma \approx x_{\text{RMS}}$ .

Faktor asimetrije je mjera asimetrije raspodjele slučajne varijable oko njezine srednje vrijednosti. Vrijednost nagiba iskrivljenosti može biti pozitivna, nula, negativna ili nedefinirana. Faktor asimetrije jednak je nuli kod normalne distribucije, ili bilo koje savršene simetrične distribucije. Izraz faktora asimetrije glasi:

$$\zeta \equiv S_k = \frac{M_3}{(M_2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{\left( \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right)^3} = \frac{\frac{1}{N} \left[ (x_1 - \bar{x})^3 + (x_2 - \bar{x})^3 + \dots + (x_N - \bar{x})^3 \right]}{\left( \sqrt{\frac{1}{N} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right]} \right)^3}, \quad (4.6)$$

gdje su  $M_2$  i  $M_3$  drugi i treći statistički centralni momenti. Opći izraz za  $n$ -ti statistički centralni moment glasi:

$$M_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^n. \quad (4.7)$$

Faktor zašiljenosti (kurtoza) opisuje oblik raspodjele vjerojatnosti i definira vršnu vrijednost raspodjele. Faktor zašiljenosti je mjera zašiljenosti oko vrha krivulje raspodjele naprezanja. Izraz faktora zašiljenosti glasi:

$$\kappa = \frac{M_4}{(M_2)^2} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} = \frac{\frac{1}{N} \left[ (x_1 - \bar{x})^4 + (x_2 - \bar{x})^4 + \dots + (x_N - \bar{x})^4 \right]}{\left( \frac{1}{N} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right] \right)^2}. \quad (4.8)$$

Ako je kurtoza manja od 3, raspodjela je ravnija nego uobičajeno. Kada je kurtoza jednaka 3, raspodjela je normalna. Ako je kurtoza veća od 3 raspodjela je zaoštrenija od normalne.

Ako je uzorak podataka Gaussovski, tada je vrijednost kurtoze jednaka 3. Prekoračenje kurtoze definirano je izrazom:

$$\kappa_0 = \kappa - 3. \quad (4.9)$$

Faktor vrha je relativno česta statistička mjera u analizi signala. Definiran je kao omjer maksimalne apsolutne vrijednosti uzorka signala za RMS vrijednost. Faktor vrha pokazuje koliko su ekstremni vrhovi u signalu. Za nultu srednju vrijednost slučajnog uzorka signala faktor vrha glasi:

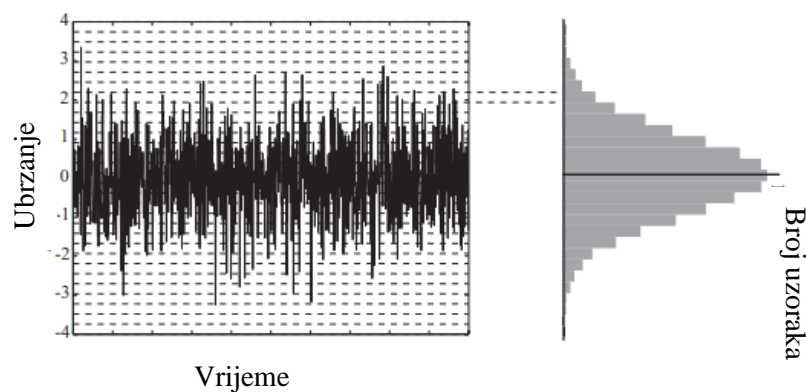
$$C_r = \frac{\max\{|x_i|\}}{x_{\text{RMS}}}. \quad (4.10)$$

Faktor vrha bitno je svojstvo signala, s obzirom da ukazuje koliko je šiljat signal.

Signal je statistički relevantan i Gaussovski ako kod analiziranja postojećeg slučajnog signala faktori daju sljedeće rezultate:

- Aritmetička srednja vrijednost napreznaja  $\bar{x}$  i faktor asimetrije  $\zeta$  su približni nuli,
- Faktor zašiljenosti (kurtoza)  $\kappa$  je iznosa 3
- Faktor vrha  $C_r$  je veći od 4 [13].

Histogram se sastoji od diskretnog broja vrijednosti, gdje je svaka vrijednost broj uzoraka signala u određenom rasponu amplitude. Histogram pokazuje u kojoj mjeri se pojavljuje određeni raspon amplitude u signalu. Na slici prikazan je postupak izrade histograma.



Slika 10. Izrada histograma iz vremenske povijesti, [prilagodeno iz 14]

## 4.2. Fourierova transformacija slučajnog signala

Vibracije linearnih struktura su harmonijske prirode i stoga se obično analiziraju u frekvencijskoj domeni [11]. Fourierova transformacija omogućuje bilo kojem procesu u vremenskoj domeni, da bude opisan i kao funkcija frekvencije odnosno u frekvencijskoj domeni. Primjenom Fourierove transformacije svaki se složeni signal razlaže na više pojedinačnih sinusnih funkcija i daje povratnu informaciju o frekvenciji svih sinusoida koje su potrebne za opisivanje tog vremenskog signala.

Ako je signal stohastički, proces u frekvencijskoj domeni opisan je pomoću dijagrama PSD spektralne gustoće snage. Spektralna gustoća snage PSD opisuje kako je snaga raspoređena po frekvencijskom sadržaju slučajnog procesa [11]. RMS je korijen površine ispod PSD krivulje.

PSD dobiven nakon FT zadržava informacije o amplitudi svakog sinusnog vala i odbacuje informacije o fazi. PSD se dobiva pomoću kvadrata brze Furierove transformacije podijeljene sa frekvencijskom razlučivošću iz vremenske domene, i prikazan je relacijom:

$$S_{\text{PSD}}(f) = \frac{|DFT|^2}{\Delta f}, \quad (4.11)$$

gdje je  $\Delta f$  frekvencijski inkrement.

Kada je signal izmjeren za neko konačno vrijeme  $T$  koristi se diskretna Fourierova transformacija, koja je opisana jednadžbom:

$$DFT \{x_n(t)\} = X_k(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n e^{-i \frac{2\pi(k-1)(n-1)}{N}}, \quad (4.12)$$

gdje je  $N$  ukupni broj uzoraka,  $n$  je trenutni položaj uzorka,  $x_n$  je vrijednost signala u odgovarajućem vremenu,  $k$  je položaj trenutne frekvencije,  $i$  je imaginarni broj  $i = \sqrt{-1}$ , a  $X_k$  je rezultat diskretne Fourierove transformacije.

Kada je broj diskretnih točaka  $N=2^J$ , koristi se brza Fourierova transformacija. Brza Fourierova transformacija je specijalan slučaj diskretne Fourierove transformacije, i ona je opisana jednadžbom:

$$\overbrace{X_k = X_k^{\Re} + iX_k^{\Im}}^{k\text{-ti koeficijent}} \equiv \overbrace{X_{N+2-k}^{\Re} - iX_{N+2-k}^{\Im}}^{\text{desni koeficijent}} = X_{N+2-k}. \quad (4.13)$$

Desni Fourierov koeficijent  $X_{N+2-k}$  u jednadžbi (4.14) je kompleksno konjugiran  $k$ -ti koeficijent  $X_k$ . S obzirom da iznos maksimalnog desnog koeficijenta u jednadžbi (4.14) ne može biti veći od  $N$ , kako bi relacija bila valjana minimum indeksa  $k$  mora iznositi  $k_{\min} = 2$ . Maksimalna vrijednost indeksa  $k$  može biti  $k_{\max} = N/2$ , što je ujedno i vrijednost na kojoj je postignuta Nyquistova frekvencija.

Inverzna Fourierova transformacija (IFT) koristi se za pretvorbu frekvencijskog signala u vremensku domenu. Kod korištenja diskretnih podataka, koristi se diskretna inverzna Fourierova transformacija. U vremenskoj domeni, DIFT definira se kao:

$$DFT^{-1}\{X_k(f)\} = x_n(t) = \sum_{k=1}^N X_k e^{i \frac{2\pi(k-1)(n-1)}{N}}. \quad (4.14)$$

Sve vrijednosti su realne vrijednosti. Parsevalov teorem povezuje energiju vremenske i frekvencijske domene. Parsevalov teorem koristi se radi provjere valjanosti izvršene Fourierove transformacije, i opisan je sljedećim izrazima:

$$DFT\{x_n(t)\} = X_k(f) \Leftrightarrow DFT^{-1}\{X_k(f)\} = x_n(t) \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x_n(t)]^2 \equiv \sum_{k=1}^N |X_k(f)|^2. \quad (4.15)$$

Zbroj kvadrata funkcije DFT mora bit jednak kvadratu funkcije pripadajućeg inverza IDFT. Analogno, energija signala u vremenskoj domeni mora biti jednaka energiji signala u frekvencijskoj domeni.

## 5. Prostor stanja

Opis prostora stanja dinamičkog sustava odnosi se na minimalni skup poznatih varijabli kao varijable stanja, koje u potpunosti opisuju sustav i njegov odgovor na bilo koji skup ulaza [14]. U ovom slučaju naglasak je na određeni skup varijabli stanja koje se temelje na varijablama pohrane energije u sustavima. Općeniti izraz s pripadajućim mjernim jedinicama za opis prostora stanja glasi:

$$\text{PSD ulaz} \odot |\text{TF}|^2 = \text{PSD izlaz} \quad (5.1)$$

$$\frac{\text{N}^2}{\text{Hz}} \times \left[ \frac{\text{MPa}}{\text{N}} \right]^2 = \frac{\text{MPa}^2}{\text{Hz}}$$

Kako bi se prijenosna funkcija prevela u ispravne jedinice za PSD analizu, prijenosna funkcija mora se kvadrirati. Mjerne jedinice PSD izlaza su jedinice interesa na kvadrat po hercu.

Matematički opis sustava u terminima minimalnog skupa varijabli  $x_i(t), i=1, \dots, n$  zajedno sa poznatim podacima o tim varijablama u početnom trenutku  $t_0$  i ulazu sustava za vrijeme  $t \geq t_0$ , dovoljni su za predviđanje budućeg sustava stanja i izlaza sustava. Ako sustav ima vremenski nepromjenjive koeficijente prostor stanja može se opisati jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdje je  $\dot{\mathbf{x}}$  jednadžba stanja,  $\mathbf{x}$  vektor varijabli stanja,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}$  vektor ulaza  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}$  vektor izlaza  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ,  $n$  broj varijabli stanja,  $m$  broj pobuda,  $p$  broj izlaznih signala,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  vektor od  $n$  diferencijalnih jednadžbi i  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  vektor od  $p$  diferencijalnih jednadžbi.

Ako je sustav linearan, prostor stanja ima oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (5.4)$$

gdje je  $\mathbf{A}$  matrica koeficijenta sustava,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}$  matrica ulaza,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C}$  matrica izlaza,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\mathbf{D}$  matrica prijenosa sustava,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , a vektori imaju matricni oblik  $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  i  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ .



Za  $n$  varijabli stanja prikazana je proširena matrica jednadžbe (5.3) i (5.4):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}^{n \times 1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^{n \times n} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}^{n \times 1} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & \cdots & B_{nm} \end{bmatrix}^{n \times m} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}^{m \times 1} \quad (5.5)$$

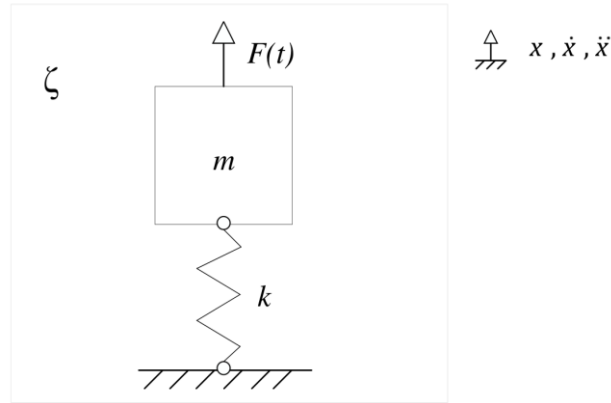
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}^{p \times 1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & \cdots & \cdots & C_{pn} \end{bmatrix}^{p \times n} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}^{n \times 1} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1m} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{p1} & \cdots & \cdots & D_{pm} \end{bmatrix}^{p \times m} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}^{m \times 1} \quad (5.6)$$

Nakon raspisivanja proširene matrice, prikazane su proširene jednadžbe iz te matrice:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + \cdots + A_{1n}x_n(t) + B_{11}u_1(t) + B_{12}u_2(t) + \cdots + B_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + \cdots + A_{2n}x_n(t) + B_{21}u_1(t) + B_{22}u_2(t) + \cdots + B_{2m}u_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= A_{n1}x_1(t) + A_{n2}x_2(t) + \cdots + A_{nn}x_n(t) + B_{n1}u_1(t) + B_{n2}u_2(t) + \cdots + B_{nm}u_m(t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_{11}x_1(t) + C_{12}x_2(t) + \cdots + C_{1n}x_n(t) + D_{11}u_1(t) + D_{12}u_2(t) + \cdots + D_{1m}u_m(t) \\ y_2(t) &= C_{21}x_1(t) + C_{22}x_2(t) + \cdots + C_{2n}x_n(t) + D_{21}u_1(t) + D_{22}u_2(t) + \cdots + D_{2m}u_m(t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= C_{p1}x_1(t) + C_{p2}x_2(t) + \cdots + C_{pn}x_n(t) + D_{p1}u_1(t) + D_{p2}u_2(t) + \cdots + D_{pm}u_m(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Na slici 11. prikazan je sustav s jednim stupnjem slobode koji se sastoji od mase, opruge s krutosti  $k$ , modalnog prigušenja i sile  $F(t)$ . Ovaj slučaj predstavlja formu vibriranja gdje  $x$  predstavlja apsolutni pomak mase  $m$ . Svaka vlastita frekvencija ima pripadajući omjer modalnog prigušenja  $\zeta$ . Dakle, ako sustav ima poznatu vlastitu frekvenciju i formu vibriranja, može se primijeniti modalno prigušenje.



Slika 11. Vibracijski sustav

Za zadani sustav, diferencijalna jednačba drugog reda opisana je izrazom:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (5.9)$$

Sustav ima 2 stanja  $n = 2$ , masu i oprugu koji omogućuju pohranu energije, 1 ulaz  $m = 1$  i 1 izlaz  $p = 1$ . S obzirom na poznatu diferencijalnu jednačbu, uvedene su supstitucije koje olakšavaju kasnije rješavanje jednačbi:

$$x_1(t) = x(t) = y_1(t), \quad (5.10)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = \ddot{x}_1(t), \quad (5.11)$$

$$F(t) = u_1(t). \quad (5.12)$$

Uvrštavanjem poznatih parametara, jednačbe stanja glase:

$$\dot{x}_1(t) = 0 \cdot x_1(t) + 1 \cdot x_2(t) + 0 \cdot u_1(t), \quad (5.13)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) + \frac{u_1(t)}{m}.$$

Matrični zapis jednačbi stanja (5.13) glasi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} [u_1(t)], \quad (5.14)$$

Uvrštavanjem poznatih parametara u matricu izlaza dobiva se:

$$y_1(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0] [u_1(t)] \quad (5.15)$$

Iz jednadžbi (5.14) i (5.15) mogu se odrediti matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = [0] \quad (5.16)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = [y_1(t)], \quad \mathbf{u}(t) = [u_1(t)] \quad (5.17)$$

## 5.1. Prostor stanja u programskom paketu *MATLab*

Za rješavanje prostora stanja u programskom paketu *MATLab* koristi se prijenosna funkcija. Prijenosna funkcija prikazuje jednostavan opis ulaza i izlaza sustava. Stoga možemo koristiti prijenosnu funkciju za predviđanje relativnog pomaka konstrukcije množenjem amplitude opterećenja  $F$  s prijenosnom funkcijom  $TF$  za određenu frekvenciju primijenjenog opterećenja. Općeniti izraz za prijenosnu funkciju glasi:

$$TF = \frac{\text{IZLAZ}}{\text{ULAZ}}. \quad (5.18)$$

Korištenjem Hadamardovog produkta dijeljenja, jednadžba može se napisati i kao:

$$TF = \text{IZL} \oslash \text{UL}. \quad (5.19)$$

Za rješavanje transfer funkcije za zadani sustav, prikazan je općeniti zapis za računanje sile:

$$F = k \cdot x \Rightarrow x = \frac{F}{k}, \quad (5.20)$$

U matričnom zapisu jednadžba glasi:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{k}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{F}_0. \quad (5.21)$$

Pomak u ovom slučaju definiran je kao izlaz, a sila kao ulaz te se uvrštavanjem u jednadžbu (5.21) dobiva:

$$\mathbf{TF} \times \mathbf{F}_0 = \mathbf{x}_0. \quad (5.22)$$

Općeniti zapis PSD apsolutnog pomaka glasi:

$$\mathbf{x}_{\text{PSD}} = \mathbf{TF}_x^2 \odot \mathbf{F}_{\text{PSD}} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{N}^2} \times \frac{\text{N}^2}{\text{Hz}} \right]. \quad (5.23)$$

Relacija između prijenosne funkcije naprezanja i prijenosne funkcije pomaka glasi:

$$\mathbf{TF}_S = \mathbf{S}_{\text{corr}} \odot \mathbf{TF}_x, \quad (5.24)$$

gdje je  $\mathbf{S}_{\text{corr}}$  korekcijski faktor naprezanja i definiran je izrazom:

$$S_{\text{corr}} = \frac{E}{l_0}. \quad (5.25)$$

U ovom radu izlaz prostora stanja je PSD naprezanja. Naprezanje je proporcionalno sili kao što je prikazano izrazom:

$$S = \frac{F}{A}. \quad (5.26)$$

Također, sila je proporcionalna pomaku prema izrazu:

$$F = kx. \quad (5.27)$$

Dakle, naprezanje je proporcionalno relativnom pomaku i time se mogu primijeniti sljedeće jednadžbe:

$$\mathbf{TF} = \mathbf{S}_0 \oslash \mathbf{F}_0, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{TF} = \frac{\mathbf{kx}_0}{\mathbf{A}} \oslash \mathbf{F}_0, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{S}_{\text{PSD}} = |\mathbf{TF}|^2 \odot \mathbf{F}_{\text{PSD}}. \quad (5.30)$$

Izraz za računanje prijenosne funkcije u programskom paketu *MATLAB* glasi:

$$\mathbf{TF} = \frac{\text{FRF}}{F_0}, \quad (5.31)$$

gdje je FRF funkcija frekvencijskog odgovora.

Korištenjem integrala za računanje odziva srednjeg kvadrata dobiva se izraz za rješavanje izlaza prijenosne funkcije [15]:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} |H_n(\Omega)|^2 d\Omega., \quad (5.32)$$

gdje je  $H_n$  funkcija oblika [10]:

$$H_n(\Omega) = \frac{B_0 + (i\Omega)B_1 + (i\Omega)^2 B_2 + \dots + (i\Omega)^{n-1} B_{n-1}}{A_0 + (i\Omega)A_1 + (i\Omega)^2 A_2 + \dots + (i\Omega)^n A_n}. \quad (5.33)$$

Za diferencijalnu jednadžbu (5.9),  $n = 2$  i uvrštavanjem  $B_0 = 1, A_0 = k, A_1 = c, A_2 = m, F = 1$ , funkcija glasi:

$$\text{FRF} = \frac{1}{k + i\Omega c + (i\Omega)^2 m} = \frac{B_0}{A_0 + i\Omega A_1 + (i\Omega)^2 A_2}, \quad (5.34)$$

$$\text{FRF} = \frac{0(i\Omega)^2 + 0(i\Omega)^1 + F_0(i\Omega)^0}{m(i\Omega)^2 + c(i\Omega)^1 + k(i\Omega)^0} \Rightarrow \text{TF} = \frac{\text{FRF}}{F_0}. \quad (5.35)$$

Kada su prijenosna funkcija i matrice prostora stanja definirane, u programskom paketu *Matlab* koristi se izraz:

$$\text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}), [\text{tf\_num}, \text{tf\_den}] = \text{ss2tf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \Leftrightarrow [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \text{tf2ss}(\text{tf\_num}, \text{tf\_den}). \quad (5.36)$$

## 5.2. Hadamardov produkt matrica

Hadamardov produkt je binarna operacija koja uzima dvije matrice istih dimenzija i vraća matricu umnoženu odgovarajućim elementima. Hadamardov produkt je asocijativan i distributivan. Za razliku od matričnog produkta, on je također komutativan. Za matrice različitih dimenzija Hadamardov produkt je nedefiniran.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} \quad (5.37)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

U ovom radu korišten je i Hadamardov produkt dijeljenja. Kao i za množenje, dvije matrice koje se dijele moraju biti istih dimenzija, te rezultat dijeljenja je također matrica istih dimenzija.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \oslash \mathbf{B} \quad (5.39)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \oslash \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

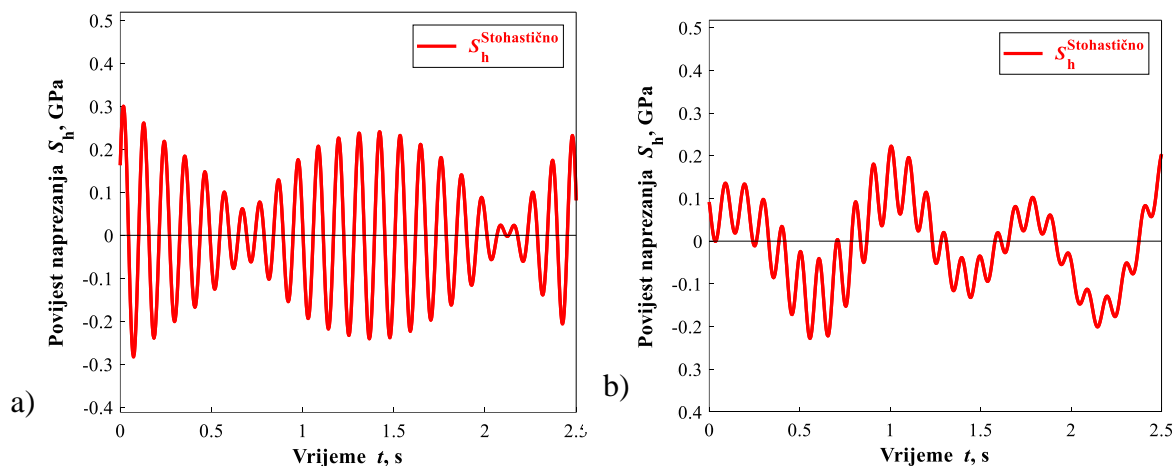
## 6. Spektralni parametri slučajnog signala

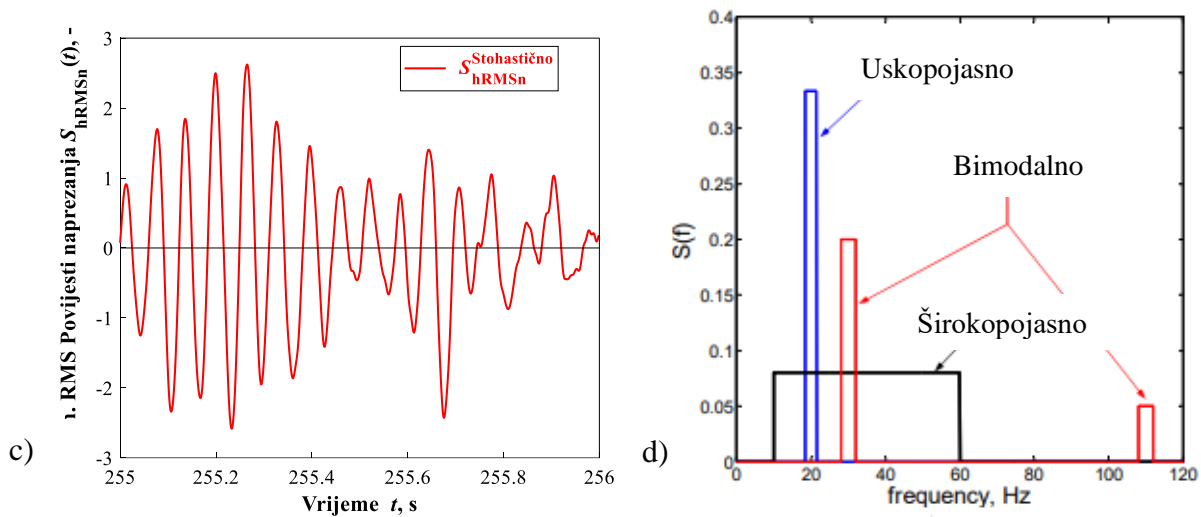
U ovom radu stohastičko opterećenje slučajnog procesa u frekvencijskoj domeni definirano je pripadajućom spektralnom gustoćom snage naprezanja  $S_{\text{PSD}}(f)$ , gdje je  $f$  frekvencija izražena u Hz. Postoje dvije definicije PSD-a, dvostrani PSD i jednostrani PSD koji je određen Nyquistovom frekvencijom. Za dobivanje jednostranog PSD-a, potrebno je izračunati broj jednostranog PSD uzorka do Nyquistove frekvencije koji glasi:

$$M = \frac{N}{2} + 1, \quad (6.1)$$

gdje je  $N$  ukupan broj diskretnih točaka.

Svaki PSD može biti funkcija vlastite kružne frekvencije  $\Omega_n$  (rad/s) ili frekvencije  $f = \Omega_n / (2\pi)$  (Hz). Slika uspoređuje tri uzorka vremenske povijesti naprezanja koji pripadaju različitim vrstama slučajnog uzorka procesa. Slučajni procesi mogu biti uskopojasni, širokopojasni i bimodalni. Za signal koji je uskopojasan kaže se da ima vrh oko jedne frekvencije, odnosno rezonantne frekvencije vibrirajućeg sustava. Kod bimodalnog procesa dominiraju dvije osnovne frekvencije. Povijest naprezanja širokopojasnog signala pokriva širok raspon frekvencija [16].





Slika 12. a) Uskopojasan signal, b) Bimodalni signal, c) Širokopojasan signal, d) Usporedba u PSD dijagramu [prilagođeno iz 17]

Za dobivanje rezultata u frekvencijskoj domeni potrebno je detaljno opisati sljedeće statističke karakteristike stacionarnog procesa. Spektralni momenti i parametri širine pojasa koriste se za kvantificiranje u kojoj se mjeri određeni proces može smatrati uskopojasnim ili širokopojasnim [17]. Generalizirani oblik za  $n$ -ti spektralni moment  $m_n$  glasi:

$$m_n = \int_0^{f_{\max} \rightarrow \infty} f^n S_{\text{PSD}}(f) df, \quad (6.2)$$

gdje je  $S_{\text{PSD}}(f)$  spektralna gustoća snage naprezanja i uobičajeno je definiran mjernom jedinicom  $\text{MPa}^2/\text{Hz}$ .

Prema teoriji, za slučajno opterećenje nulti spektralni moment približno jednak je varijanci slučajnog signala  $m_0 = \text{Var}(x)$ . Te je tada standardna devijacija  $\sigma \cong \sqrt{m_0}$ . U ovom radu koristi se efektivna vrijednost naprezanja i opisana je jednadžbom:

$$S_{\text{RMS}} = \sqrt{\int_0^{f_{\max} \rightarrow \infty} S_{\text{PSD}}(f) df} = \sqrt{m_0}. \quad (6.3)$$

gdje je  $S_{\text{RMS}}$  korijen nultog spektralnog momenta  $m_0$ .



Osim spektralnih momenata, potrebno je definirati ostale statističke parametre. Tipične spektralne statističke veličine za Gaussovski proces glase:

$$E[0] = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}, \quad E[P] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}, \quad \gamma (0 \leq \gamma \leq 1) = \frac{E[0]}{E[P]}, \quad \lambda (0 \leq \lambda \leq 1) = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (6.4)$$

gdje je  $E[0]$  očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi,  $E[P]$  očekivani broj vrhova po sekundi,  $\gamma$  faktor nepravilnosti, a  $\lambda$  parametar spektralne širine pojasa. Za idealni uskopojasni proces  $\gamma$  teži prema 1, dok za širokopojasne procese  $\gamma$  je jednak nuli. Budući da je  $E[P] \geq E[0]$  i svi spektralni parametri su realne i pozitivne skalarne vrijednosti, granice od  $\gamma$  i  $\lambda$  su uvijek između 0 i 1 [18], [17], [14].

Iz općenitog spektralnog momenta  $m_n$ , odgovarajući bezdimenzijski spektralni parametar  $\alpha_n$  i pripadajuće najčešće izvedenice glase:

$$\alpha_n (0 \leq \alpha_n \leq 1) = \frac{m_n}{\sqrt{m_0 m_{2n}}} \Rightarrow \alpha_1 = \delta = \frac{m_1}{\sqrt{m_0 m_2}}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \equiv \gamma, \quad (6.5)$$

gdje  $\delta \equiv \alpha_1$  i  $\alpha_2 \equiv \gamma$  su specijalni slučajevi dobiveni iz bezdimenzijskog spektralnog parametra  $\alpha_n$  za  $n = 1$  odnosno  $n = 2$ . Faktor nepravilnosti  $\alpha_2$  karakterizira široko/usko-pojasnost procesa.

Oštećenje po sekundi, tj. intenzitet oštećenja, broj ciklusa do zamornog loma i pripadajuće vrijeme do zamornog loma u frekvencijskoj domeni dani su relacijama:

$$\frac{D_{\text{PDF}}}{t_{\text{max}}} \left[ p_{(\text{PDF})}(S_r) \right] = \frac{E[P]}{B'_{\text{rf}}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{(\text{PDF})}(S_r) dS_r \Rightarrow N_{\text{fPDF}} = \frac{1}{D_{\text{PDF}}} \Rightarrow T_{\text{fPDF}} = t_{\text{max}} N_{\text{fPDF}} \quad (6.6)$$

gdje je  $t_{\text{max}}$  ukupno maksimalno vrijeme ponavljajućeg referentnog signala,  $B'_{\text{rf}}$  spektralni eksponent zamorne čvrstoće iskazan u mjernoj jedinici  $\text{MPa}^m$ , a  $p_{(\text{PDF})}$  je funkcija gustoće vjerojatnosti u mjernim jedinicama  $1/\text{MPa}$ . Inverzni negativni Basquinov eksponent  $m$  je bezdimenzijski parametar i definiran je izrazom  $m = -b^{-1}$ . Izraz za računanje integrala glasi:

$$I_{(\text{PDF})}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{(\text{PDF})}(S_r) dS_r \Rightarrow \frac{D_{\text{PDF}}}{t_{\text{max}}} = \frac{E[0 \dots P]}{B'_{\text{rf}}} I_{(\text{PDF})}(S_r). \quad (6.7)$$

## 7. Dirlik-ova približna spektralna teorija

S obzirom da je korištenje metode toka kiše dugotrajan proces, korištenje spektralnih teorija pojednostavljuje analizu visokocikličkog zamora. U ovom radu korištena je Dirlikova metoda.

Najčešće korištena metoda za računanje vremena do loma u frekvencijskoj domeni je Dirlikova metoda. Dirlikova metoda opisuje ponašanje materijala pri uskopojasnom opterećenju kao i pri širokopojasnom opterećenju. U Dirlikovoj metodi kombinirane su dvije Rayleigh-eve funkcije vjerojatnosti i eksponencijalna funkcija vjerojatnosti. [19]

Za rješavanje Dirlikove metode u ovom radu potrebno je prethodno:

- Izračunati spektralne momente reda 0, 1, 2 i 4 spektralne gustoće snage naprezanja.
- Odrediti spektralne statističke veličine.

Izraz za Dirlikov približni PDF glasi:

$$Z = \frac{S_r}{2\sqrt{m_0}} \Rightarrow p_{Dr}(Z) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left( \overbrace{\frac{4}{5} e^{\frac{-4Z}{5D_1}}}^{\text{eksponencijalno}} + \overbrace{\frac{D_2 Z}{R^2} e^{\frac{-Z^2}{2R^2}}}^{\text{Rayleigh/NB}} + \overbrace{D_3 Z e^{\frac{-Z^2}{2}}}^{\text{Rayleigh/NB}} \right), \quad (7.1)$$

gdje je  $Z$  normalizirani raspon naprezanja, a preostali parametri definirani su kao:

$$D_1 = 2\gamma \frac{\delta - \gamma}{1 + \gamma^2}, \quad R = \frac{\gamma(1 - \delta) - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}, \quad D_2 = \frac{\gamma(1 - \delta) - D_1^2}{R - R^2}, \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2. \quad (7.2)$$

Iz jednadžbi (7.2) može se primijetiti da su pripadajući koeficijenti isključivo funkcije  $\delta$  i  $\gamma$ . Intenzitet oštećenja  $D/t_{\max}$  glasi:

$$\frac{D_{Dr}}{t_{\max}} = \frac{E[P]}{B'_{rf}} \int_0^\infty S_r^m p_{Dr}(S_r) dS_r = \frac{E[P]}{B'_{rf}} I_{Dr}(S_r) \Rightarrow N_{fDr} = \frac{1}{D_{Dr}} \Rightarrow T_{fDr} = t_{\max} N_{fDr}, \quad (7.3)$$

gdje je broj ciklusa do zamornog loma obrnuto proporcionalan kumulativnom oštećenju, dok je vrijeme do zamornog loma proporcionalno ukupnom vremenu i  $N_{fDr}$ .

Integral iz jednadžbe (7.3) glasi:

$$I_{Dr}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{Dr}(S_r) dS_r = (\sqrt{m_0})^m \left[ \overbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^m D_1^{m+1} \Gamma(1+m)}^{\text{eksponencijalno}} + \overbrace{(\sqrt{8})^m (D_2 |R|^m + D_3) \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}^{\text{Rayleigh/NB}} \right] \quad (7.4)$$

Sređivanjem konačnih granica integracije u vrijednosti raspona naprezanja  $S_r$ , kumulativni integral i pripadajuće kumulativno oštećenje glase:

$$I_{Dr}^c(S_r) = \int_0^{S_r} S_r^m p_{Dr}(S_r) dS_r = I_{Dr}(S_r) - (\sqrt{m_0})^m \left[ \overbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^m D_1^{m+1} \Gamma\left(1+m, \frac{2S_r}{5D_1\sqrt{m_0}}\right)}^{\text{eksponencijalno}} + \overbrace{(\sqrt{8})^m \left[ D_2 |R|^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r^2}{8R^2 m_0}\right) + D_3 \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r^2}{8m_0}\right) \right]}^{\text{Rayleigh/NB}} \right] \quad (7.5)$$

$$\frac{D_{Dr}^c}{t_{\max}} = \frac{E[\mathbf{P}]}{B'_{rf}} I_{Dr}^c(S_r) \quad (7.6)$$

Mnogi su radovi pokazali kako je Dirlik-ova metoda daleko bolja od drugih postojećih metoda u procjeni zamora u frekvencijskoj domeni. No, rezultati dobiveni ovom metodom su približni, bez teoretskog potkrjepljenja [20], [16].

Rezultati dobiveni korištenjem spektralnih teorija mogu biti liberalni ili konzervativni u odnosu na rezultate dobivene u vremenskoj domeni. Liberalne metode predviđaju manje kumulativno oštećenje, a konzervativne veće.

## 8. Analitička metoda

U ovom poglavlju opisana je analitička metoda za procjenu visokocikličkog statističkog zamora dobivena u programskom paketu *MATLab R2017b*. Razmatrana je metoda u frekvencijskoj domeni Dirlik koja je zatim uspoređena s rezultatima metode „toka kiše“ u vremenskoj domeni.

### 8.1. Generiranje uzbude

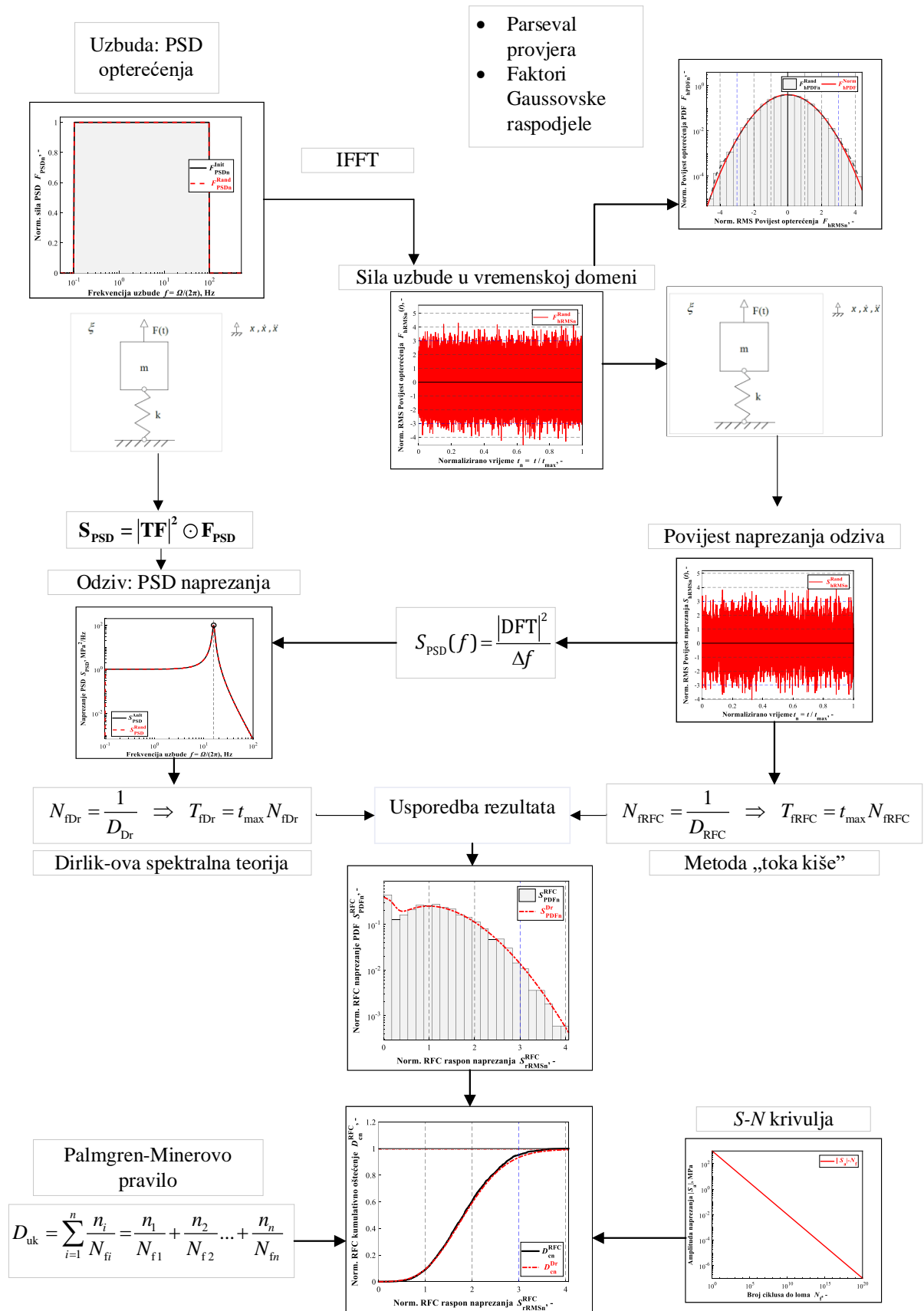
Prvi korak analize je generiranje uzbude. Za definiranje PSD opterećenja potrebni su sljedeći ulazni parametri:

- Ukupan broj diskretnih točaka korištenih u simulaciji  $N(n=18) = 2^n = 262144$
- Frekvencija uzorkovanja  $f_{sr} = 1024$  Hz
- Sila spektralne gustoće snage  $F_{PSD} = 1$  N<sup>2</sup>/Hz
- Donja granica frekvencije  $f_{min} = 0,1$  Hz
- Gornja granica frekvencije  $f_{max} = 100$  Hz

Također, potrebni izračunati parametri za simulaciju su:

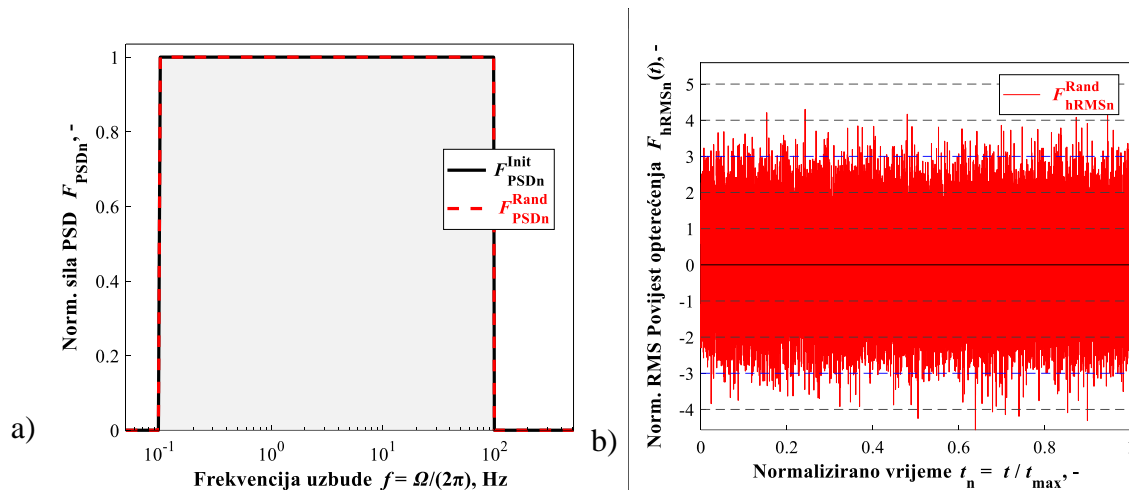
- $M = N / 2 + 1 = 131073$
- $f_{Nyq} = f_{sr} / 2 = 512$  Hz
- $t_{max} = N / f_{sr} = 256$  s
- $\Delta t = 1 / f_{sr} = 0,00097656$  s
- $\Delta f = 1 / t_{max} = 0,0039$  Hz
- $RMS = 15,7996$  MPa

Slika 13. prikazuje dijagram toka koji prikazuje sve potrebne korake za dobivanje vremena do loma. Svaki dio dijagrama toka opisan je u nastavku.



Slika 13. Dijagram toka proračuna zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

Na slici 14. prikazan je signal uzbude u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Slika 14. a) prikazuje početnu, analitičku uzbudu sile PSD u odnosu na frekvenciju uzbude. Ovaj signal diskretiziran je s  $N$  diskretnih točaka. Crna linija predstavlja prethodno definirani PSD opterećenja, a crvena linija prikazuje PSD opterećenja nakon Fourierove transformacije iz povijesti opterećenja u svrhu provjere. Slika 14. b) prikazuje slučajan signal dobiven pomoću inverzne brze Fourierove transformacije iz frekvencijske u vremensku domenu. Povijest opterećenja normalizirana je na način da je vrijednost ordinate skalirana s RMS-om.

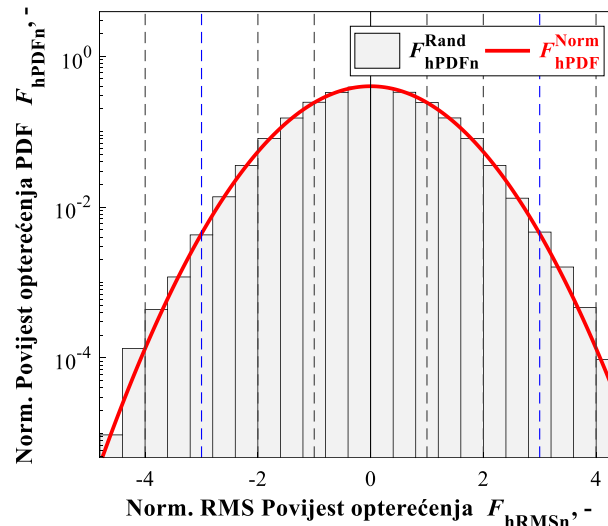


Slika 14. a) PSD sile, b) slučajan signal uzbude

Kako bi se provjerila ispravnost Fourierovih transformacija, koristi se Parsevalov teorem. Prema Parsevalovom teoremu, zbroj kvadrata funkcije signala u vremenskoj i frekvencijskoj domeni mora biti jednak, a opisan je sljedećim izrazom:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x_n(t)]^2 \equiv \sum_{k=1}^N |X_k(f)|^2. \quad (8.1)$$

Na slici 15. prikazana je Gaussova krivulja za signal uzbude slučajnog procesa. Gaussova krivulja poprilično točno opisuje histogram, stoga se može zaključiti da je signal normalne/Gaussovske raspodjele. Faktor vrha je približno između 4 i 5, aritmetička srednja vrijednost naprezanja je jednaka nuli, kao i faktor asimetrije, a faktor zašiljenosti je približno jednak tri. S obzirom na izračunate faktore, može se reći da je signal Gaussovski, ergodičan i stacionaran.



Slika 15. Gaussova krivulja signala uzbude

## 8.2. Definiranje geometrije i odziv

Za definiranje geometrije elementa i pripadnih parametara potrebno je znati krutost, prigušenje, masu i modul elastičnosti. Element je definiran kao kvadar dimenzija 1x1x1 mm, te kao diskretni model koji ima odvojenu masu i krutost. Modul elastičnosti materijala iznosi  $E = 200000$  MPa, a masa je  $m = 20$  t.

Izraz za računanje aksijalne krutosti glasi:

$$k = \frac{AE}{l_0}, \quad (8.2)$$

gdje je  $A$  površina poprečnog presjeka,  $E$  modul elastičnosti i  $l_0$  početna duljina.

U ovoj analizi omjer modalnog prigušenja iznosi 0,05, a općeniti izraz za računanje omjera modalnog prigušenja glasi:

$$\zeta = \frac{c}{\sqrt{mk}}, \quad (8.3)$$

gdje je  $c$  koeficijent prigušenja iznosa  $c = 200$  Ns/mm,  $\Omega_n$  vlastita kružna frekvencija rad/s.

Izraz za vlastitu kružnu frekvenciju računa se prema jednadžbi:

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.4)$$

Kada je korišten omjer modalnog prigušenja, izraz za prigušenu vlastitu kružnu frekvenciju glasi:

$$\Omega_{nc} = \sqrt{(\Omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2}. \quad (8.5)$$

Izraz za dobivanje vlastite frekvencije glasi:

$$f_n = \frac{\Omega_n}{2\pi}. \quad (8.6)$$

U frekvencijskoj domeni prijenosna funkcija je neovisna o ulaznom opterećenju i temeljna je karakteristika sustava. Izraz za transfer funkciju glasi:

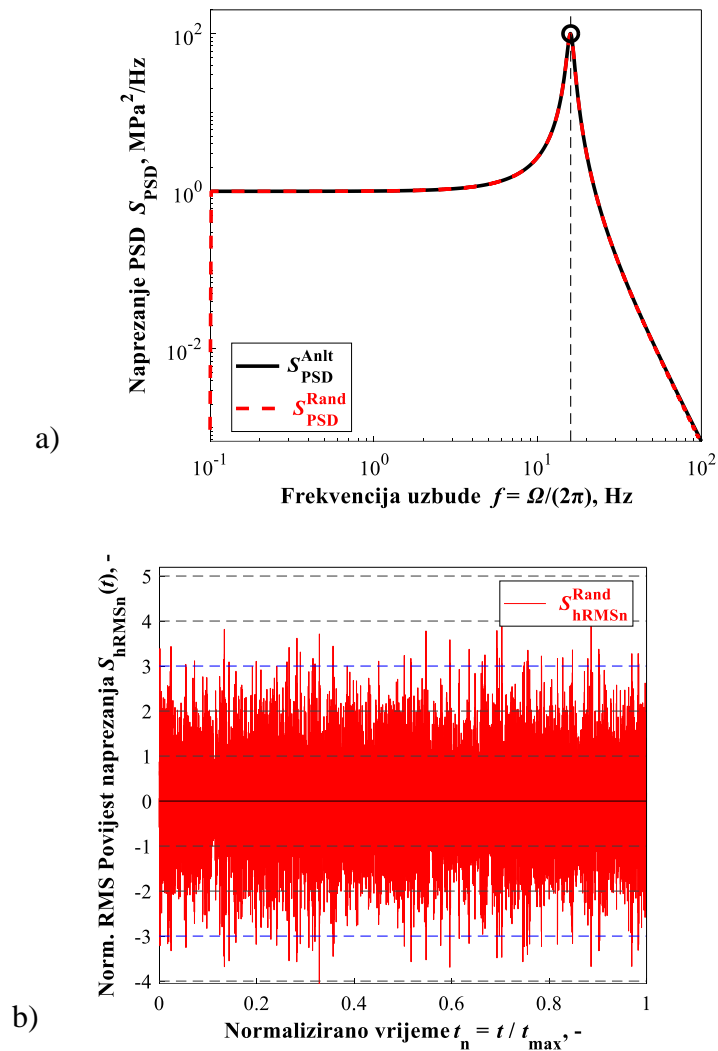
$$\mathbf{TF} = \mathbf{S}_0 \mathcal{O} \mathbf{F}_0. \quad (8.7)$$

Izraz za PSD naprezanje prikazan pomoću transfer funkcije glasi:

$$\mathbf{S}_{\text{PSD}} = |\mathbf{TF}|^2 \odot \mathbf{F}_{\text{PSD}}. \quad (8.8)$$

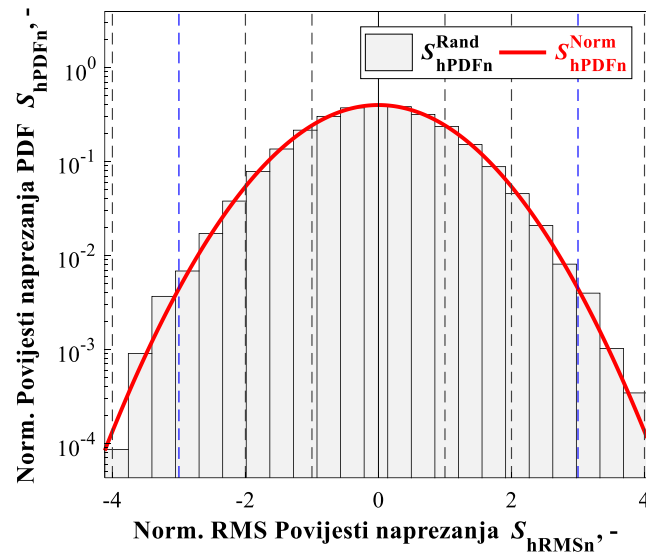
Nakon što se model pobudi, u frekvencijskoj domeni korištenjem prostora stanja opisanog u poglavlju 5. dobiva se odziv u obliku dijagrama naprezanja PSD po frekvenciji. Slika 16 a) prikazuje PSD dijagram naprezanja odziva skaliran logaritamskim mjerilom. Na slici 16 b) prikazan je slučajan odnosno stohastički signal u vremenskoj domeni. Signal je dobro definiran s obzirom da normalizirani odgovor signala prelazi razine  $\pm 4$  RMS, što daje dodatnu provjeru u općoj statističkoj konvergenciji rezultata simulacije.





Slika 16. a) PSD naprežanja odziva, b) Povijest naprežanja odziva

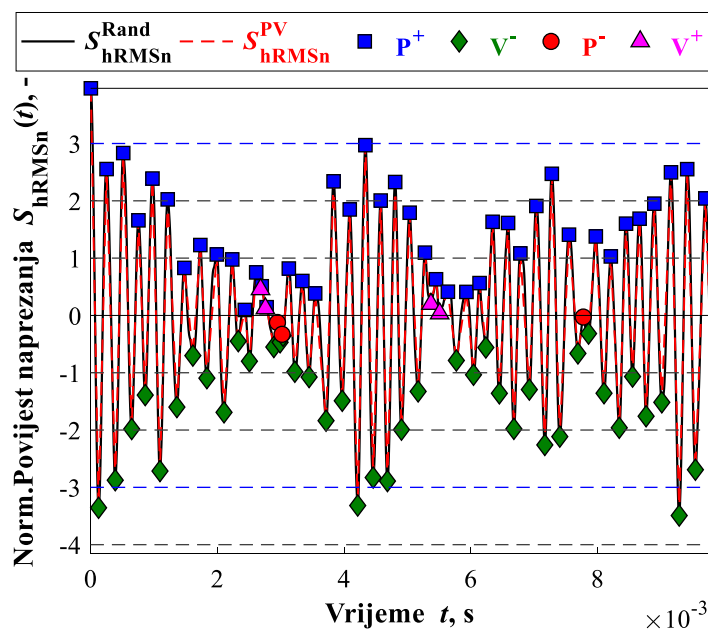
Na slici 17. prikazana je Gaussova krivulja koja opisuje histogram signala odziva. Izračunati parametri za određivanje pouzdanosti signala podudaraju se prethodno dobivenim signalima slike te se može reći da je signal Gaussovski, ergodičan i stacionaran.



Slika 17. Gaussova krivulja odziva

### 8.3. Analiza rezultata

Nakon dobivanja signala odziva u frekvencijskoj i vremenskoj domeni, potrebno je obraditi signal kako bi dobili rezultate vezane uz zamor loma tj. vrijeme do zamornog loma  $T_f$ . U vremenskoj domeni obrađuje se povijest naprezanja metodom „toka kiše“ na način da se izbroje vrhovi i udoline. Princip brojanja ciklusa prikazan je na slici 18. Ako se vrh ili udolina nalazi iznad osi  $x$ , broji se kao pozitivan vrh ili pozitivna udolina, odnosno ako se nalazi ispod osi  $x$  broji se kao negativan vrh ili negativna udolina.

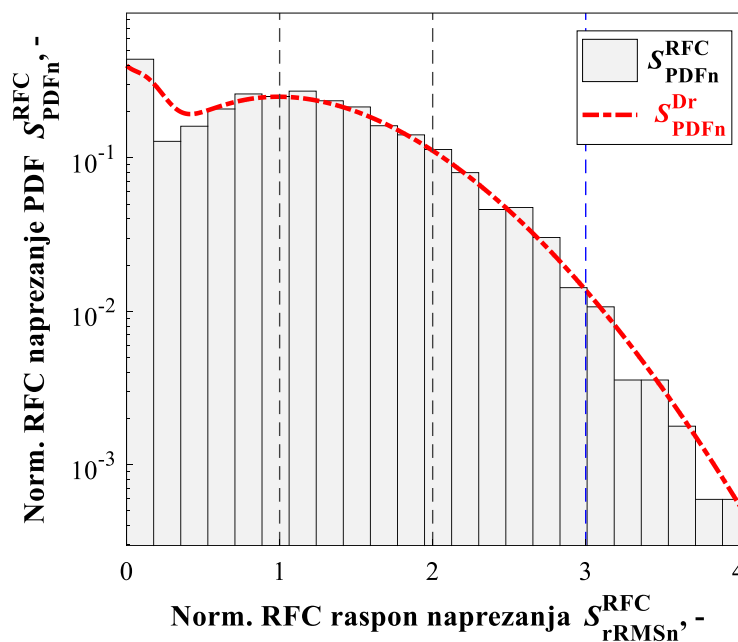


Slika 18. Prikaz brojanja vrhova i udolina

U frekvencijskoj domeni vrijeme do zamornog loma izračunato je pomoću Dirlik-ove spektralne metode. Potrebni podaci za računanje zamornog loma u frekvencijskoj domeni su:

- Spektralni momenti  $m_0, m_1, m_2, m_4$
- Očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi  $E[0]$ , očekivani broj vrhova po sekundi  $E[P]$ , prvi bezdimenzijski spektralni parametar i faktor nepravilnosti

Na slici 19. prikazan je histogram metode „toka kiše“. Apscisa prikazuje normaliziran RFC raspon napreznja, a na ordinati je prikazana normalizirana gustoća vjerojatnosti napreznja. Vidljivo je da Dirlikova krivulja poprilično točno opisuje histogram.



Slika 19. Histogram - usporedba metoda

Potrebni ulazni podaci  $S-N$  krivulje za računanje zamornog loma su:

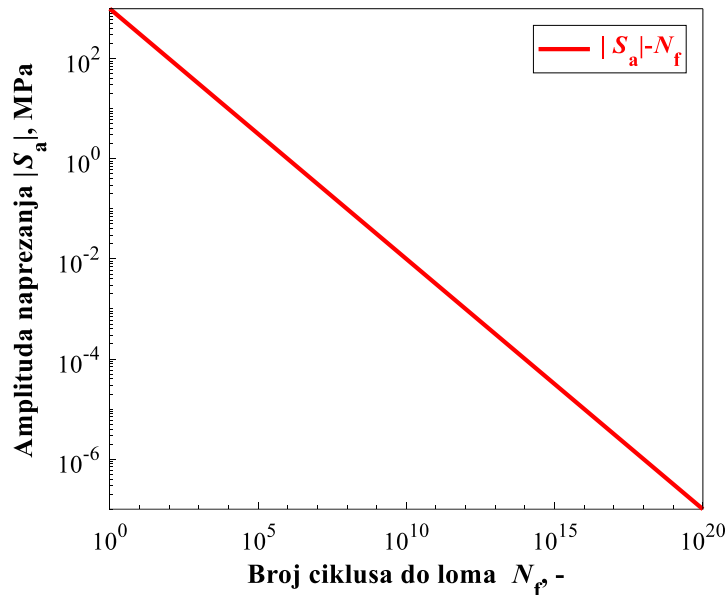
- Definiranje Basquinove krivulje: spektralni zamorni eksponent ( $m = -1/b$ )  $m = 2$ , eksponent zamorne čvrstoće  $S'_f = 1000$  MPa
- Parametri zamora: spektralni eksponent zamorne čvrstoće

$$B_r = 2^m S'_f{}^m = 4000000 \text{ MPa}^m \text{ i basquinov zamorni eksponent } b = -1/m = -0,5$$

$S-N$  krivulja koristi se za modeliranje svojstva materijala. Kod cikličkog opterećenja konstantne amplitude, postoji linearni odnos između ciklusa do loma  $N$  i primijenjenog raspona

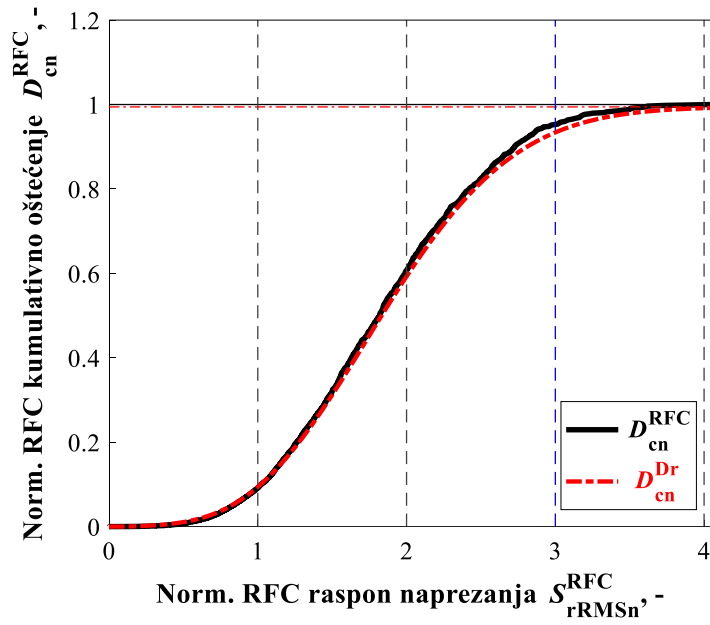
naprezanja  $S_a$ . Za dobivanje rezultata kumulativnog oštećenja potrebno je primijeniti  $S-N$  krivulju (Slika 20.) i Palmgren-Minerovo pravilo koje glasi:

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}. \quad (8.9)$$



Slika 20.  $S-N$  krivulja materijala

Slika 21. prikazuje na ordinati normalizirano kumulativno oštećenje kao funkciju RMS i normaliziranog RFC raspona naprezanja na apscisi. Oštećenje za Dirlik spektralnu teoriju je normalizirano izrazom  $D_n = D_{\text{Dirlik}} / D_{\text{RFC}}$ , gdje je  $D_{\text{RFC}}$  referentna, skalirana vrijednost dobivena u programskom paketu *MATLab R2017b*. Dirlikova krivulja oštećenja konvergira tj. približava se pripadajućoj horizontalnoj osi. Iz slike 21. vidljivo je da Dirlikova metoda predviđa manje oštećenje u odnosu na RFC oštećenje, odnosno predviđa liberalnije rješenje.



Slika 21. Kumulativno oštećenje

## 9. Numerička metoda

U ovom poglavlju opisana je numerička metoda. Numerička metoda odvija se prvo u programskom paketu *Abaqus* gdje se dolazi do prijenosne funkcije ili odziva. Zatim se u programskom paketu *Fe-Safe* dolazi do rezultata za statističku procjenu zamora. Numerička metoda napravljena je za dobivanje vremena do loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

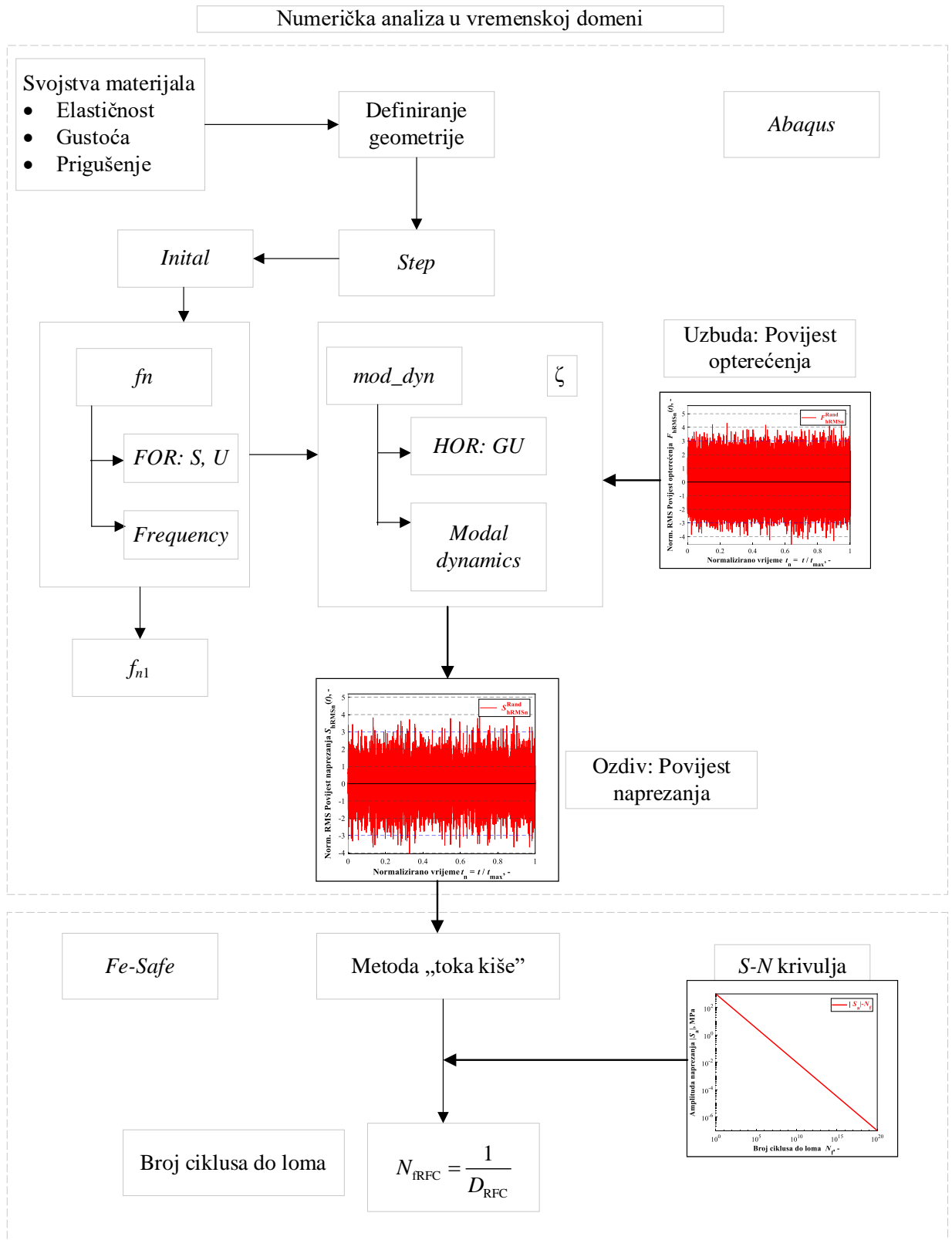
Analiza zamora uslijed vibracija u frekvencijskoj domeni zahtjeva:

- PSD ulaza
- prijenosne funkcije izračunate pomoću FE modela (u ovom slučaju pomoću *Abaqus-a*).

Jednom kada su dobivene prijenosne funkcije, bilo koji broj radnih ciklusa može se prilagoditi uz vrlo malo računalnog napora. Ovaj pristup zahtijeva manju pohranu podataka i računalno je učinkovitiji od pristupa u vremenskoj domeni. [10]

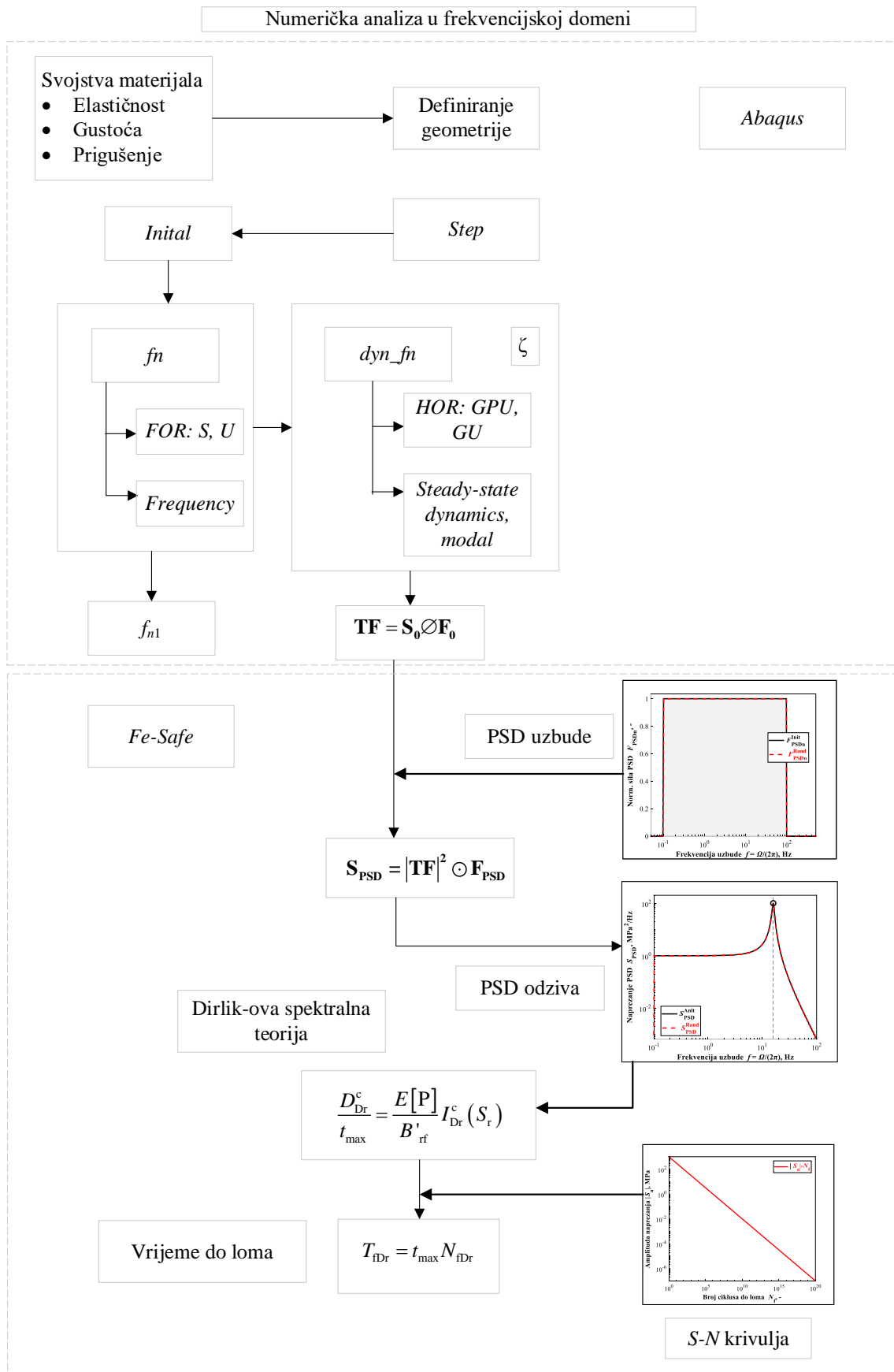
Numerička analiza u programskom paketu *Abaqus* podijeljena je na modalnu i dinamičku analizu. Modalna analiza odnosno problem vlastitih vrijednosti je matematički pristup pronalaska vlastitih kružnih frekvencija u sustavu. Za svaku vlastitu kružnu frekvenciju mogu se odrediti forme vibriranja koje predstavljaju oblik deformacije u tijelu na različitim frekvencijama uzbude. Pomoću dinamičke analize dobiva se odziv.

Na slici 22. prikazan dijagram toka koji prikazuje princip rada numeričke metode za procjenu zamora u vremenskoj domeni, gdje je FOR zahtjev za izlaz polja, a HOR zahtjev za ispis povijesti.



Slika 22. Dijagram toka numeričke analize u vremenskoj domeni

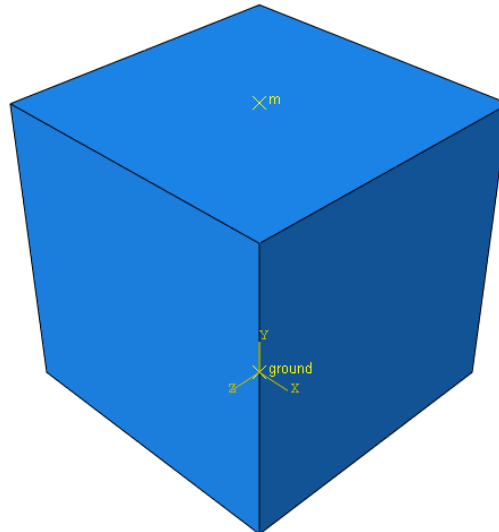
Na slici 23. prikazan je dijagram toga koji prikazuje princip rada numeričke metode za procjenu zamora u frekvencijskoj domeni.



Slika 23. Dijagram toka numeričke analize u frekvencijskoj domeni

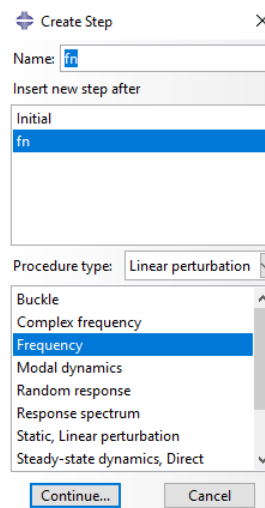


Numerička analiza započinje u programskom paketu *Abaqus* kreiranjem geometrije modela u modulu *Part*. Zadana geometrija je kocka dimenzija 1x1x1 mm. U modulu *Property* kreiraju se i pridružuju svojstva materijala elastičnost, gustoća i prigušenje. U modulu *Assembly* kreirane su dvije referentne točke, gdje jedna točka predstavlja podlogu, a druga masu kako je prikazano na slici 24. Te točke su u modulu *Interaction* vezane na geometriju.

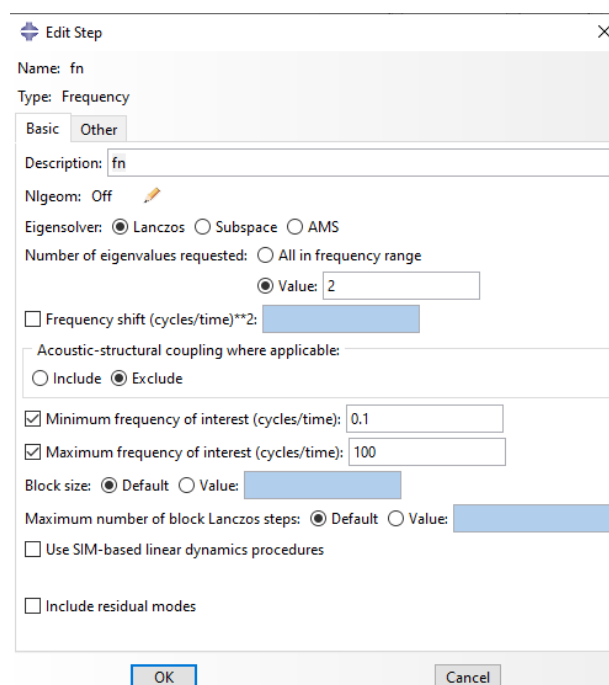


**Slika 24. Geometrija modela**

Nakon postavljanja geometrije, u modulu *Step* definirane su dvije *step* grupe. Prva grupa definirana je za opterećenja u vremenskoj domeni, a druga u frekvencijskoj. Prvo je kreiran *step initial* kojeg *Abaqus* stvara sam. Zatim je potrebno ručno kreirati *step fn* u kojem se računaju vlastite kružne frekvencije. *Step fn* kreiran je postupkom *Linear perturbation* i *frequency step*-om. Taj korak je prikladan za rješavanje problema vlastitih frekvencija i nužno ga je definirati prije koraka dinamičkog opterećenja s modalnim prigušenjem.

Slika 25. Kreiranje *step-a fn*

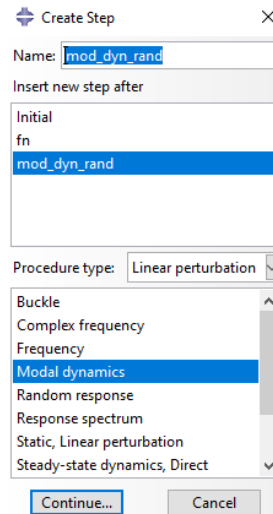
U *Field Outout Request* za zadani *step* odabiru se varijable  $S$  komponente naprezanja i  $U$  translacija i rotacija. Te varijable su izlazni podaci od interesa i omogućuju spremanje podataka u .odb datoteku. U opciji *edit step* potrebno je odabrati solver Lanczos i minimalnu i maksimalnu frekvenciju kojom se određuje raspon u kojem će se tražiti vlastite kružne frekvencije.

Slika 26. Uređivanje *step-a fn*

*Step Inital* i *fn* jednaki su u analizi obje domene. Time je odrađena modalna analiza, te je bitno napomenuti da nijedan drugi korak izrade *step-a* u dinamičkoj analizi nije moguć bez

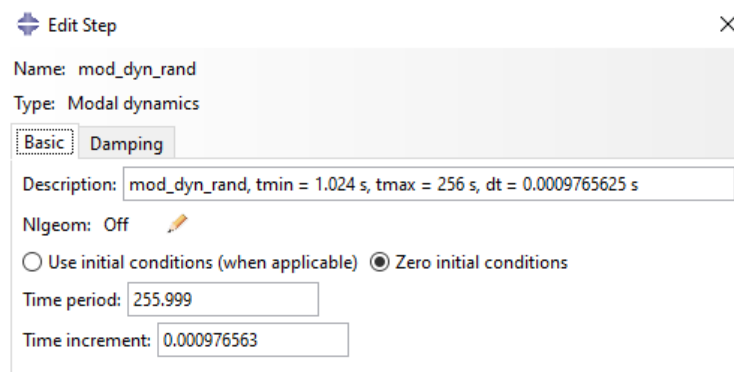
određivanja *Frequency step*-a *fn*. Iznos dobivene prve vlastite frekvencije iz *step*-a *fn*, koristi se kao parametar dinamičke analize.

Za numeričku analizu u vremenskoj domeni izrađuje se *step mod\_dyn* koji je određen postupkom *Linear perturbation* i *Modal Dynamics step*-om. Podešavanjem *step*-a navedenim naredbama omogućuje se analiza u vremenskoj domeni za povijest naprezanja.



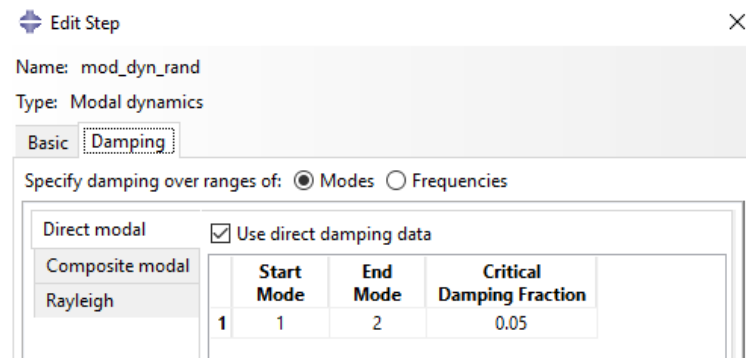
Slika 27. Kreiranje *step*-a *mod\_dyn*

U opciji *History Output Request* kreira se *mod\_dyn\_rand-GU* koji bilježi vrijednosti generaliziranih pomaka *GU*. U opciji *Edit step* potrebno je odrediti vremenski period i vremenski inkrement prikazan na slici 28.



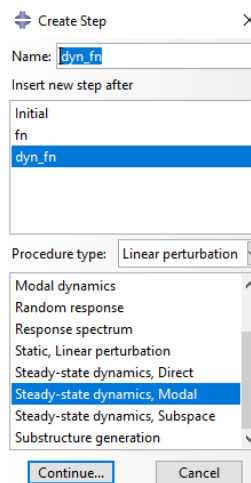
Slika 28. Određivanje vremenskog perioda i vremenskog inkrementa

U *Edit step*-u potrebno je postaviti jedinstveno modalno prigušenje. Odabran je bezdimenzijski faktor prigušenja  $\zeta = 0,05$  i on je jednak u cijeloj analizi.

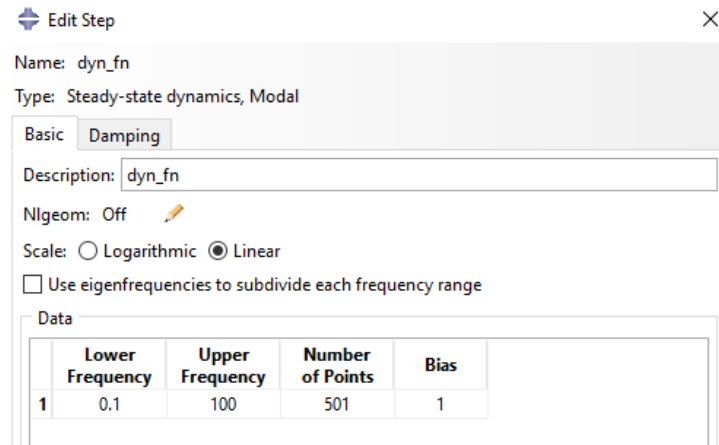


Slika 29. Određivanje modalnog prigušenja

Za numeričku analizu u frekvencijskoj domeni izrađuje se *step dyn\_fn* koji je određen postupkom *Linear perturbation* i *Steady-state dynamics, Modal step*-om. Određivanjem ovog koraka omogućeno je rješavanje dinamičkih problema s harmonijskom uzбудom.

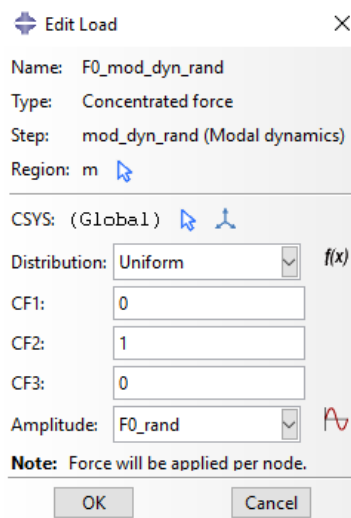
Slika 30. Kreiranje step-a *dyn\_fn*

U opciji *History Output Request* kreira se *dyn\_fn-GPU-GU* koji bilježi generalizirane pomake *GU* i fazni kut generaliziranih pomaka *GPU*. U opciji *Edit step* potrebno je odrediti donju i gornju frekvenciju i dovoljan broj točaka na koji se raspon frekvencija dijeli.



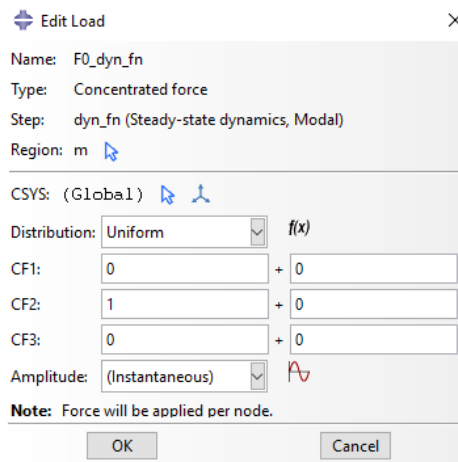
Slika 31. Određivanje raspona frekvencije i broj točaka potrebnih za analizu

U modulu *Load* postavljaju se rubni uvjeti i opterećenja. Prvi korak je potpuno uklještenje referentne točke podloge i omogućavanje referentnoj točki mase pomak u smjeru  $y$ . Rubni uvjeti određuju se za *step Initial*. U vremenskoj domeni postavljena je koncentrirana sila iznosa 1 N uz amplitudu slučajne povijesti naprezanja koja odgovara nametnutom PSD-u.



Slika 32. Opterećenje u vremenskoj domeni

U frekvencijskoj domeni postavljena je koncentrirana sila u referentnoj točki  $m$  iznosa 1 N.

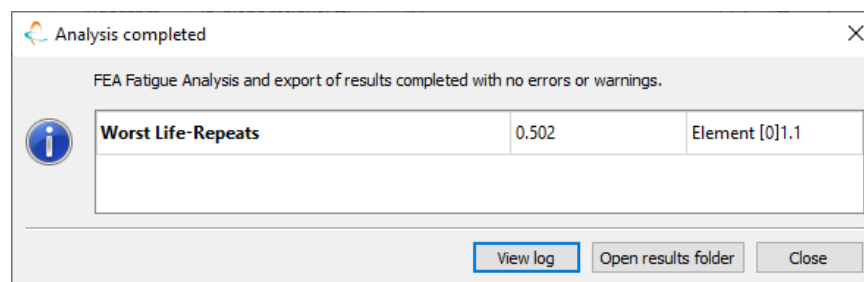


Slika 33. Opterećenje u frekvencijskoj domeni

U modulu *Mesh* definiraju se mreže konačnih elemenata. Odabrani konačni element je linearni heksaedarski element tipa C3D8R koji ima 8 čvorova i 1 integracijsku točku. Zatim se kreira *Job* u modulu *Job* koji služi za definiranje imena i načina izbacivanja baze podataka odb.datoteke.

Numeričkom metodom u *Abaqus*-u dobivene su informacije o odzivu. Rezultat analize u frekvencijskoj domeni je prijenosna funkcija pomoću koje se u *Fe-Safe* programskom paketu dolazi do PSD naprezanja. Nadalje, postupak analize nastavlja se u programskom paketu *Fe-Safe* za dobivanje rezultata za procjenu zamora.

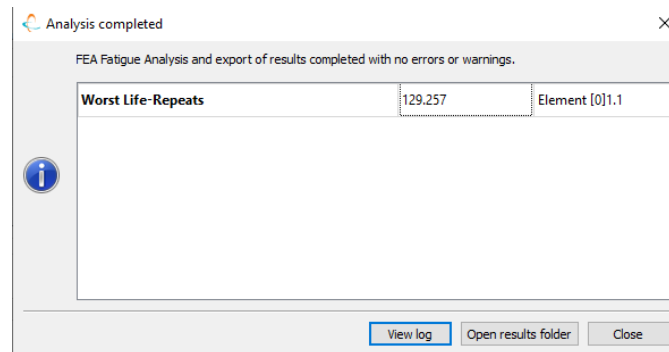
Procjena zamora u vremenskoj domeni započinje učitavanjem povijesti naprezanja odziva dobivenog u *Abaqus*-u. Zatim je potrebno učitati podatke za definiranje karakteristike materijala, odnosno *S-N* krivulje, gdje su parametri  $m=2$ ,  $S_f=1000$  MPa. Nakon definiranja materijala i odziva, potrebno je učitati model konačnog momenta i pokrenuti analizu. Rezultat analize u vremenskoj domeni je broj ciklusa do loma  $N_f$ .



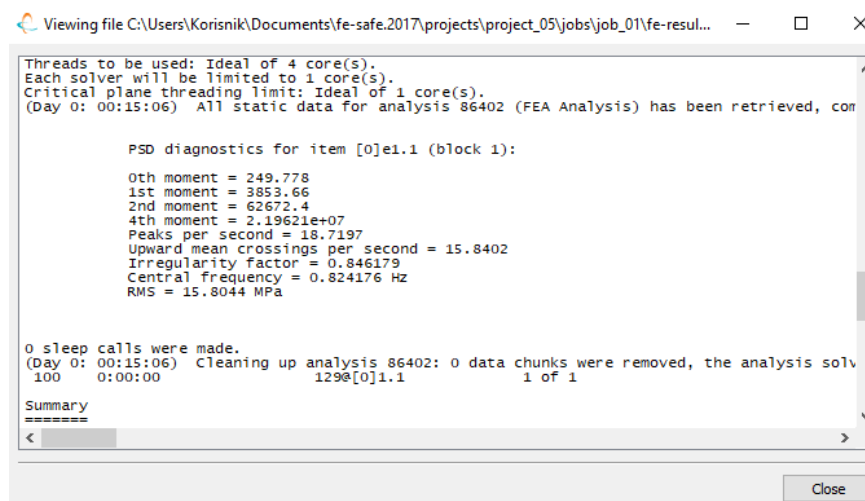
Slika 34. Broj ciklusa do loma u vremenskoj domeni

Procjena zamora u frekvencijskoj domeni započinje učitavanjem konačnog elementa za PSD analizu. Nakon pridruživanja karakteristike materijala, pokrenuta je analiza. Rezultat

analize u frekvencijskoj domeni je vrijeme do loma  $T_f$ . *Fe-Safe* koristi Dirlik-ovu spektralnu teoriju za dobivanje rezultata za procjenu zamora.



Slika 35. Vrijeme do loma u frekvencijskoj domeni



Slika 36. Parametri za dobivanje rezultata u frekvencijskoj domeni

## 10. Usporedba rezultata

U ovom poglavlju prikazana je usporedba rezultata dobivena analitičkom metodom u programskom paketu *MATLab* i numeričkom metodom u programskim paketima *Abaqus* i *Fe-Safe*. U obje analize korišteni su jednaki ulazni parametri.

Tablica 1. prikazuje usporedbu rezultata vremena do loma i pripadajućih parametara u frekvencijskoj domeni i njihovu relativnu grešku. Relativna greška izračunava se izrazom:

$$\text{Relativna greška} = \frac{\text{Numeričko rješenje} - \text{Analitičko rješenje}}{\text{Analitičko rješenje}} \cdot 100\%$$

**Tablica 1. Usporedba rezultata analitičke i numeričke metode u frekvencijskoj domeni**

	Analitička metoda	Numerička metoda	Relativna greška
$f_{n1}$	15,9155	15,915	-0,003141592 %
$m_0$	249,8779	249.778	-0,039979526 %
$m_1$	3853,6941	3853.66	-0,000884865 %
$m_2$	62673,0839	62672.4	-0,001091218 %
$m_4$	21968859,5048	$2,19621 \times 10^7$	-0,030768574 %
$E[0]$	15,8371	15.8402	0,019574291 %
$E[P]$	18,7225	18.7197	-0,014955268%
$\alpha_2$	0,84589	0.846179	0,034165199 %
RMS	15,8075	15.8044	-0,019610944 %
$T_f$	129,2535	129,257	0,002707857 %

Tablica 2. prikazuje usporedbu rezultata vremena do loma i pripadajućih parametara u vremenskoj domeni. Za usporedbu analitičke i numeričke metode, potrebno je rezultat procjene zamora numeričke analize broj ciklusa do loma pomnožiti s  $t_{\max}$ .



**Tablica 2. Usporedba rezultata analitičke i numeričke metode u vremenskoj domeni**

	Analitička metoda	Numerička metoda	Relativna greška
$f_{n1}$	15,9155	15,915	-0,003141592 %
$N_f$	0,50205	0,502	-0,009959167 %
$T_f$	128,5258	128,512	-0,010737144 %

Tablica 3. prikazuje usporedbu rezultata vremena do loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

**Tablica 3. Usporedba rezultata u vremenskoj i frekvencijskoj domeni**

	Vremenska domena	Frekvencijska domena	Relativna greška
$T_f$ – Analitička metoda	128,5258	129,2535	0,566189823%
$T_f$ – Numerička metoda	128,512	129,257	0,5797124%

Analitička metoda postavljena je kao najtočnija metoda. Numerička metoda je aproksimativna i najčešće korištena u praksi. Usporedbom rezultata, pokazano je kako obje metode daju skoro jednake rezultate uz jako malu, skoro zanemarivu relativnu grešku. Također, vrijeme do loma dobiveno u vremenskoj i frekvencijskoj domeni pokazuje veliko poklapanje. Korištenjem spektralnih teorija znatno se pojednostavljuje proračun, stoga je bitno da su rezultati dobiveni u obje domene približno jednaki.

## 11. Zaključak

U radu je opisan koncept brojanja ciklusa za slučajnu povijest naprezanja. Detaljno je opisana metoda brojanja ciklusa za ponavljajuću povijest naprezanja metoda „toka kiše“ koja daje rezultate vremena do loma u vremenskoj domeni.

Proračun u frekvencijskoj domeni proveden je Dirlik-ovom spektralnom teorijom. Pomoću Dirlik-ove spektralne teorije dobiven je rezultat za vrijeme do loma.

Razvijen je algoritam u računalnom alatu *MATLab R2017b* za procjenu visokocikličkog zamora uslijed slučajnih vibracija u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Pomoću razvijenog algoritma dobiven je PSD dijagram uzbude te pripadajuća povijest naprezanja, transfer funkcija, PSD uzbude i pripadajuća povijest naprezanja uzbude, PDF histogram i dijagram kumulativnog oštećenja.

Također, prikazan je postupak za dobivanje vremena do loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni pomoću numeričke metode u računalnim alatima *Abaqus* i *Fe-Safe*. Pomoću *Abaqus*-a u frekvencijskoj domeni dobivena je izlazna informacija prijenosne funkcije, a u vremenskoj domeni povijest naprezanja uzbude. Izlazni podaci dobiveni pomoću *Abaqus*-a učitani su u *Fe-Safe*. *Fe-Safe* u frekvencijskoj domeni daje informaciju o vremenu do loma i pripadajuće spektralne parametre. U *Fe-Safe* korištena je Dirlik-ova spektralna teorija. U vremenskoj domeni dobivena je informacija o broju ciklusa do loma.

Nakon provedene analitičke i numeričke analize, uspoređeni su rezultati u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Dirlik-ova spektralna teorija daje liberalnije rješenje u odnosu na metodu „toka kiše“ u obje analize. Rezultati vremena do loma analitičke i numeričke analize poprilično se poklapaju, uz jako malu relativnu grešku. Numerička analiza često se primjenjuje u praksi, te se može zaključiti da daje dobra rješenja.

## 12. Literatura

- [1] C. Amzallag\*, Standardization of the rainflow counting Standardization of the rainflow counting, 1993.
- [2] D. Čakmak, Rainflow metoda, Seminarski rad iz kolegija Mehanika oštećenja i mehanika loma, Zagreb: FSB, 2014.
- [3] Z. Tonković, Presentacija Zamor konstrukcije kolegij Pogonska čvrstoća, FSB.
- [4] N. Kranjčević, Elementi Strojeva, Poglavlja iz kolegija Elementi konstrukcija I, IA i IB, Zagreb: FSB, 2012.
- [5] O. Stephens, Metal Fatigue in Engineering, Second Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [6] S. Večerić, Procjena zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni za bimodalni spektar, Završni rad, FSB, Zagreb, 2021.
- [7] M. Matijević, Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora iz stohastičke povijesti, Završni rad, FSB Zagreb, 2021.
- [8] G. I., VIBRATION FATIGUE ANALYSIS AND TESTING OF NOTCHED BEAMS, MIDDLE EAST TECHNICAL UNIVERSITY, 2019..
- [9] A. Standards, E1049 – 85, Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis, 2011.
- [10] N. S. F. Bishop, Finite Element Based Fatigue Calculations, Farnham: NAFEMS Ltd, 2000.
- [11] M. Slavič, Vibration Fatigue by Spectral Methods, Elsevier: 1st Edition, From Structural Dynamics to Fatigue Damage – Theory and Experiments, 2020.
- [12] N. Bishop, The use of frequency domain parameters to predict structural fatigue, Coventra, England: Ph.D. Thesis, University of Warwick, 1988.
- [13] A. Brandt, Noise and vibration analysis, University of Southern Denmark, 2011.
- [14] D. Rowell, State-Space Representation of LTI Systems, 2002.
- [15] D. Newland, An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis, New York: University of Cambridge.

- [16] D. Dirlik, Dirlik and Tovo-Benasciutti Spectral Methods in Vibration, University of Ferrara, 2021.
- [17] D. Benasciutti, Fatigue analysis of random loadings, Ph.D. Thesis, Italy: University of Ferrara, 2005.
- [18] R. Tovo, Cycle distribution and fatigue damage under broad-band random loading, *International Journal of Fatigue* 24(11) (2002) 1137–1147.
- [19] C. Lalanne, Fatigue Damage, Mechanical Vibration and Shock Analysis, Revised and Updated 3rd Edition, Volume 4, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2014. (First edition published 2002).
- [20] D. Benasciutti, On fatigue damage assessment in bimodal random processes, *International Journal of Fatigue* 29(2) (2007), 232 – 244.
- [21] T. Jiao, Probabilistic Analysis of Fatigue Due to Gaussian Load Processes, *Probabilistic Engineering Mechanics* 5(2) (1990) 76–83.
- [22] D. Čakmak, Explicit solution of Rice/Lalanne peak probability distribution for statistical fatigue assessment in the frequency domain, *Procedia structural integrity* 31C (2021) 98–104.
- [23] T. Dirlik, Application of computers in fatigue analysis, Ph.D. Thesis, University of Warwick, Coventry, England, 1985..
- [24] J. Bendat, Probability functions for random responses: prediction of peaks, fatigue damage and catastrophic failures, Technical Report/NASA report on contract NAS-5-4590, NASA CR-33, Washington, 1964.
- [25] R. Andrews, Special functions, Cambridge University Press, 1999.
- [26] E. Kutleša, Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora metodom toka kiše, Završni rad, FSB, Zagreb, 2021.
- [27] M. Mršnik, Frequency-Domain Methods for a Vibration-Fatigue-Life Estimation - Application to Real Data, *International Journal of Fatigue* 47 (2013) 8–17.
- [28] D. Benasciutti, Comparison of spectral methods for fatigue analysis of broad-band Gaussian random processes, *Probabilistic Engineering Mechanics* 21(4) (2006), 287 - 299.