

# Termohidrauličke oscilacije dvofaznog toka

---

**Krtolačić, Josip**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:716788>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-10**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Josip Krtolačić

ZAGREB, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD  
TERMOHIDRAULIČKE OSCILACIJE DVOFAZNOG TOKA

Mentor:  
prof. dr. sc. Dražen Lončar

Student:  
Josip Krtolačić

ZAGREB, 2023.

*Zahvaljujem se profesoru Lončaru na ukazanoj pomoći pri pisanju ovog rada i na izvrsnim predavanjima koja su me uvela u temu nestabilnosti dinamičkih sustava. Također hvala i profesoru Krizmaniću na strpljenju u odgovaranju na brojna pitanja o računalnoj mehanici fluida. Tijekom pisanja ovog rada od velike su pomoći bili moj dragi prijatelj i sumještanin Ivan Batistić, profesorica Tessa Uroić i svi kolege iz soba 222 i 221, uljepšali ste mi vrijeme pisanja rada!*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, svibanj 2023.

Josip Krtolačić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - 6 / 1	
Ur. broj: 15 - 23 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Josip Krtolačić**

JMBAG: 0035204483

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Termohidrauličke oscilacije dvofaznog toka**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Two-phase flow thermohydraulic oscillations**

Opis zadatka:

Analiza dinamičkog ponašanja dvofaznog toka značajna je zbog razumijevanja i predviđanja lokalnih i globalnih fenomena stabilnosti. Mogućnost intenzivnijeg prijenosa topline i/ili mase razlog je raširene primjene sustava koji koriste fazni prijenos topline i višefazni protok, ne samo na makro razini, u velikim parogeneratorima, nego i na mikro razini, najčešće u paralelnim mikrokanalnim hladnjacima elektroničkih komponenata.

Oscilacije i nestabilnosti toka načelno se nepovoljno odražavaju na performanse i sigurnost sustava. Zbog toga je poznavanje različitih oblika nestabilnosti i uvjeta pod kojima se javljaju, ključno za projektiranje i vođenje sustava s dvofaznim ili višefaznim tokom.

U okviru rada potrebno je:

1. Opisati vrste i mehanizme nastajanja oscilacija i nestabilnosti dvofaznog toka i ilustrirati ih dostupnim prikazima eksperimenata;
2. Prikazati matematičke modele i metode njihova rješavanja koji se koriste za opis dinamičkih pojava dvofaznog toka;
3. Za odabrani primjer primjenom pretpostavki jednodimenzijskog strujanja provesti numeričku simulaciju termohidrauličkih oscilacija dvofaznog toka.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

2. ožujka 2023.

4. svibnja 2023.

8. – 12. svibnja 2023.

Zadatak zadao:

  
Prof.dr.sc. Dražen Lončar

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	viii
Popis tablica	x
Popis oznaka	xi
Sažetak	xi
Summary	xii
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Dvofazno strujanje</b>	<b>3</b>
2.1. Klasifikacija strujanja u vertikalnim cijevima . . . . .	3
2.1.1. Mjehurićasto isparavanje . . . . .	3
2.1.2. Klipoliko strujanje . . . . .	5
2.1.3. Bućkasto strujanje (eng. <i>Churn Flow</i> ) . . . . .	6
2.1.4. Disperzno-prstenasti tok . . . . .	6
2.1.5. Maglovito strujanje . . . . .	7
2.2. Klasifikacija strujanja u horizontalnim cijevima . . . . .	7
2.2.1. Mjehurićasto isparavanje . . . . .	7
2.2.2. Stratificirano strujanje . . . . .	8

2.2.3. Stratificirano valovito strujanje . . . . .	8
2.2.4. Intermitentno strujanje . . . . .	8
2.2.5. Disperzno-prstenasti tok . . . . .	9
2.2.6. Maglovito strujanje . . . . .	9
2.3. Određivanje režima strujanja . . . . .	9
<b>3. Nestabilnosti dvofaznog strujanja</b>	<b>11</b>
3.1. Statičke nestabilnosti . . . . .	12
3.1.1. Ledineggove nestabilnosti . . . . .	13
3.1.2. Nestabilnosti zbog distribucije toka u paralelnim cijevima . . . . .	14
3.1.3. Promjena režima strujanja . . . . .	14
3.1.4. Kriza kipljenja . . . . .	15
3.1.5. Oscilacije pada tlaka . . . . .	16
3.2. Dinamičke nestabilnosti . . . . .	18
3.2.1. Valne oscilacije gustoće . . . . .	19
3.2.2. Termo-akustične oscilacije . . . . .	21
3.3. Mikrokanalni izmjenjivači . . . . .	21
3.4. Nestabilnosti pri kondenzaciji . . . . .	22
3.5. Prevencija oscilacija . . . . .	24
3.5.1. Modifikacije sustava . . . . .	24
3.5.2. Poznavanje pogonskih uvjeta . . . . .	26
<b>4. Numerička simulacija</b>	<b>28</b>
4.1. Metoda konačnih volumena . . . . .	29
4.2. Matematički model . . . . .	29
4.2.1. Pretpostavke . . . . .	29
4.2.2. Geometrija i diskretizacija . . . . .	30
4.3. Diferencijalne jednačbe . . . . .	30
4.4. Inicijalizacija ili proračun početnih uvjeta . . . . .	31
4.5. Rubni uvjeti . . . . .	32
4.6. Metode rješavanja sustava spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačbi	33
4.7. Diskretizacija jednačbi nezavisnih veličina . . . . .	35
4.7.1. Diskretizacija jednačbi brzine i tlaka . . . . .	35
4.7.2. Diskretizacija jednačbe za izračun entalpije . . . . .	41



4.7.3. Diskretizacija jednadžbe za izračun temperature stijenske . . . . .	42
4.8. Eksperimentalne relacije . . . . .	43
4.8.1. Pad tlaka zbog utjecanja trenja . . . . .	43
4.8.2. Koeficijent prijelaza topline . . . . .	44
4.8.3. Svojstva fluida . . . . .	45
4.9. Nelinearnosti i stabilnost . . . . .	46
4.9.1. <i>Upwind</i> diskretizacija . . . . .	47
4.9.2. Podrelaksacija . . . . .	47
4.9.3. Sigmoidalna funkcija . . . . .	49
4.9.4. Courantov uvjet i Nyquistova frekvencija . . . . .	50
4.10. Matrični prikaz sustava algebarskih jednadžbi . . . . .	51
4.11. Thomasov algoritam . . . . .	52
4.12. Reziduali . . . . .	53
<b>5. Rezultati</b>	<b>55</b>
5.1. Isparavanje iz stanja pothladene kapljevine . . . . .	56
5.2. Tranzijentno stanje porasta temperature ogrjevnog medija . . . . .	59
5.3. Skokovit pad temperature na ulazu . . . . .	60
5.4. Divergencija . . . . .	61
<b>6. Zaključak</b>	<b>64</b>
<b>A. Prilog - neki kodovi</b>	<b>66</b>
A.1. Python kod Thomasovog algoritma . . . . .	66
A.2. Python kod jednadžbe za temperaturu stijenske . . . . .	67
A.3. Rješavač trenutka . . . . .	68
A.4. Tranzijentni rješavač . . . . .	68
A.5. Stablo direktorija programa . . . . .	69
<b>Literatura</b>	<b>71</b>

# Popis slika

2.1	Režimi strujanja u vertikalnoj cijevi . . . . .	4
2.2	Taylorovi mjehurići . . . . .	6
2.3	Režimi dvofaznog strujanja u horizontalnim cijevima, preuzeto iz [1] . . . . .	8
2.4	Mapa režima strujanja, preuzeta iz [1]. . . . .	10
3.1	Grafički prikaz uvjeta statičke stabilnosti. . . . .	13
3.2	Nukyjamin dijagram za vodu, preuzet iz [2] . . . . .	15
3.3	Sustav podložan oscilacijama pada tlaka i pripadajuća $N$ -krivulja, preuzeto iz [3]. . . . .	16
3.4	Mjerene vrijednosti tlaka na ulazu i masenog protoka na ulazu pri analizi oscilacija pada tlaka, preuzeto iz [4]. . . . .	18
3.5	Mjerene vrijednosti tlaka na ulazu i masenog protoka na ulazu pri analizi oscilacija vala gustoće, preuzeto iz [4]. . . . .	20
3.6	Mapa stabilnosti kondenzirajuće struje, preuzeto iz [5]. . . . .	23
3.7	Promjena unutarnje karakteristike s različitim zatvorenostima prigušnog ventila, preuzeto iz [6]. . . . .	25
3.8	Omjer gustoća faza vode pri različitim tlakovima. . . . .	25
3.9	Mapa stabilnosti koju su izveli Achard i dr. [7]. . . . .	27
4.1	Shematski prikaz dvaju pristupa korištenih za rješavanje spregnutih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi . . . . .	33
4.2	Nepomaknuta mreža (gore) i pomaknuta (dolje) . . . . .	35

4.3	Prikaz eksperimentalnih veličina u ovisnosti o termodinamičkom udjelu pare. . . . .	44
4.4	Usporedba spline interpoliranih vrijednosti zavisnih veličina s istim vrijednostima očitanim iz baze podataka. . . . .	46
4.5	Diskontinuirana funkcija koeficijenta trenja izgladena sigmoidalnom funkcijom . . . . .	49
5.1	Polja temperatura inicijalnog i stacionarnog stanja . . . . .	56
5.2	Postizanje stacionarnog stanja iz stanja pothlađene kapljevine. . . . .	57
5.3	Polje brzine u vremensko-prostornoj domeni. . . . .	58
5.4	Tranzijentne veličine pri povišenju temperature ogrjevnog medija . . . . .	60
5.5	Odziv sustava na skokovit pad temperature ustrojne kapljevine. . . . .	61
5.6	Vrijednost tlaka na ulaznom volumenu i broj iteracija u ovisnosti o vremenu	62
5.7	Termodinamički udio pare prije i nakon početka oscilatornog ponašanja simulacije. . . . .	62

# Popis tablica

5.1	Podrelaksacijski faktori . . . . .	55
5.2	Usporedba bezdimenzijskih veličina . . . . .	63

# Sažetak

Oscilacije dvofaznog toka mogu izazvati pogonske probleme ili pucanje dijelova postrojenja, pa je predviđanje oscilacija neophodno za njihovo sprječavanje. Dan je pregled režima strujanja smjese kapljevina-para i opis termohidrauličkih oscilacija dvofaznog toka. Opisane su najviše istražene nestabilnosti dvofaznog toka koje se ujedno i najčešće pojavljuju. Klasifikacija je provedena slijedom opisa u dostupnoj literaturi. Režimi strujanja bit će bitni kod računanja pada tlaka i koeficijenta prijelaza topline u poglavlju - *Numerička simulacija*, u kojem je izvedena diskretizacija jednadžbi koje opisuju sustav metodom konačnih volumena i objašnjavaju se načini rješavanja problema numeričke matematike implementirani pri razvoju rješavača. Na kraju su izloženi rezultati četiriju simulacija, tri prikazuju različite tranzijentne pojave, dok četvrta pokazuje pojavu numeričkih nestabilnosti i divergencije.

**Ključne riječi:** nestabilnosti dvofaznog toka, oscilacije, isparivač, metoda konačnih volumena, numerička simulacija

# Summary

Oscillations of two-phase flow can cause operational problems or even the rupture of plant and system components, so predicting oscillations is necessary for their prevention. A review of the flow regimes of the liquid-vapor mixture and a description of the thermohydraulic oscillations of two-phase flow are given. The most extensively studied and most frequently occurring instabilities of two-phase flow are described, and a classification is conducted based on the available literature. Flow regimes will be important in calculating pressure drop and heat transfer coefficient in the chapter - "Numerical Simulation", where the discretization of equations describing the system is performed using the finite volume method and ways of solving numerical mathematics problems implemented in the solver development are explained. Finally, the results of four simulations are presented, three of which show different transient phenomena, while the fourth shows the occurrence of numerical instabilities and divergence.

**Keywords:** two-phase flow instabilities, oscillations, evaporator, finite volume method, numerical simulation

# 1 | Uvod

Dvofazni tok nalazi svoju primjenu u mnogim područjima strojarstva kao što su energetika, HVAC, pneumatski transport i hlađenje elektroničkih komponenti. Dvije najveće prednosti dvofaznog strujanja su intenzivni prijenos topline i akumulacija topline u latentnoj formi pri stalnoj temperaturi ili malim razlikama temperature. Osim značajnih prednosti, sustavi s dvofaznim tokom povlače sa sobom problematiku s kojom se neće susresti inženjer koji proračunava sustave s jednofaznim strujanjem. Koeficijent prijelaza topline i koeficijent pada tlaka zbog utjecaja trenja teško se određuju, često iterativno, pa različiti autori procjenjuju točnost svojih proračuna s relativnom pogreškom od  $\pm 50\%$ , dok se izrazi s relativnom pogreškom  $\pm 25\%$  smatraju jako točnima [1]. Nadalje, treba voditi računa o različitim problemima koji mogu nastupiti kao što je kritičan toplinski tok - nepoželjno pogonsko stanje pri kojem sloj pare djeluje kao izolator pa temperatura stijenke naglo raste, nekad do temperature taljenja materijala cijevi. Stabilnost strujanja je od naročite važnosti u generatorima pare nuklearnih elektrana, dok se u novije vrijeme sve se češće proračunava kod konstruiranja mikrokanalnih izmjenjivača.

Jednodimenzionalno dvofazno strujanje opisano je sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje su nerješive analitički pa se rješavaju numeričkim metodama. Kod jako specifičnih numeričkih problema komercijalni rješavači ne mogu pronaći rješenje koje zadovoljava pa se programiraju posebni rješavači. Pisanje takvog rješavača zahtijeva dobro razumijevanje numeričkog načina rješavanja sustava PDJ kao i fizike sustava. Računalni programi za predviđanje pojava nestabilnosti počeli su se razvijati sedamdesetih godina prošlog stoljeća, većina ih koristi pretpostavku jednodimenzionalnog stru-

janja, pomaknutu mrežu i implicitni rješavač, kao što je napravljeno u ovom radu. Ovaj će rad pristupiti analizi nestabilnosti dvofaznog toka tako da će se kompletna dinamika sustava opisati što je realnije moguće da bi se nestabilnosti manifestirale istim fizikalnim principima kao što se pojavljuju u realnosti.



## 2 Dvofazno strujanje

Višefazno strujanje je tok fluida s više od jedne faze. Iako bi se strujanje klasificiralo kao dvofazno pri bilo kojoj kombinaciji faza ovaj rad je limitiran na jednokomponentno strujanje mješavine kapljevine i pare.

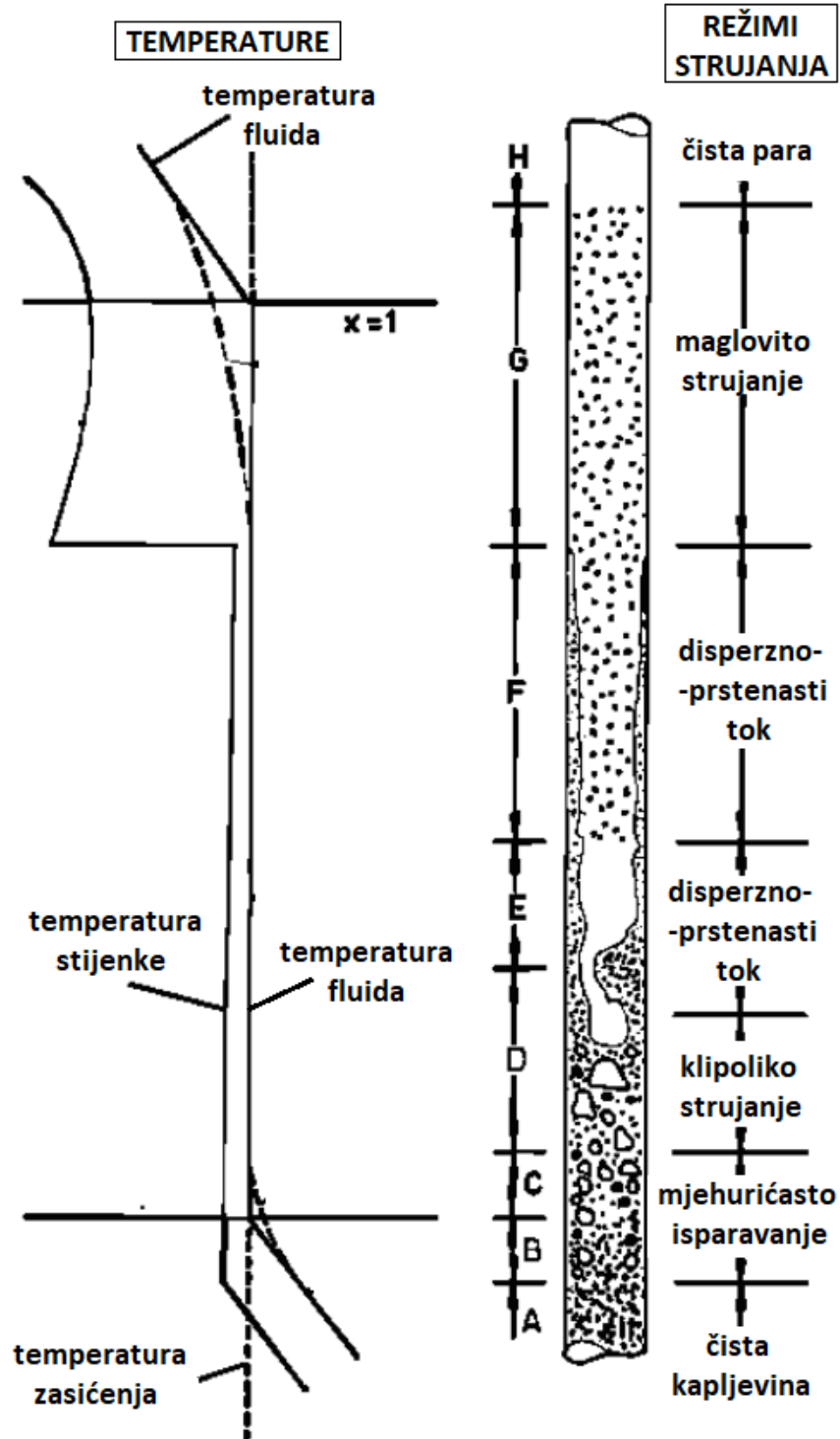
### 2.1. Klasifikacija strujanja u vertikalnim cijevima

Precizno određivanje režima strujanja bitno je za predviđanje udjela pare, koeficijenta prijelaza topline i pada tlaka dvofaznog strujanja. Promjena režima strujanja može značajno utjecati na dinamiku isparavanja te je samo po sebi izvor nestabilnosti (vidi poglavlje 3.1.3.). Iako klasifikacija na prvi pogled djeluje striktno definirana, valja imati na umu da u realnim sustavima ne postoji jasno vidljiva granica između različitih režima strujanja. Isparavanje unutar cijevi često se, zbog konzistentnosti rezultata, eksperimentalno analizira dovođenjem konstantnog toplinskog toka fluidu koje se osigurava istosmjernom električnom strujom (veličina koju je lako regulirati). Za početak promatramo takvu vertikalnu cijev opisanu od strane Thome-a [1] prikazanu na slici 2.1 preuzetoj od istog autora.

#### 2.1.1. Mjehurićasto isparavanje

Pothlađeni fluid ustrujava u grijanu cijev te se zagrijava ravnotežno i jednofazno (zona A), temperatura stijenke niža je od lokalne temperature isparavanja.

Jednom kad temperatura stijenke nadiđe temperaturu zasićenja pri lokalnom tlaku dolazi do mjehurićastog isparavanja u pregrijanom graničnom sloju (zona B). Fluid van



Slika 2.1: Režimi strujanja u vertikalnoj cijevi

termalnog graničnog sloja je i dalje pothlađen pa mjehurići kondenziraju kako se približavaju osi cijevi. Isti režim strujanja nastavlja se jednom kad fluid dosegne temperaturu isparavanja (zona C), ali kapljevina u osi cijevi dovoljno je zagrijana da mjehurići ne implodiraju s udaljavanjem od stijenke. Mjehurićasto strujanje karakterizirano je suspendiranim mjehurićima u kapljevitoj masi. Iako ovakav tip strujanja ima raspon masenih udjela pare od jednog sićušnog mjehurića u velikom spremniku do strujanja pjenaste materije koja sadrži manje od 1% masenog udjela kapljevite faze [8], kod fenomena isparavanja u cijevima se o mjehurićastom isparavanju govori u kontekstu malih udjela vlage s mjehurićima znatno manjim od promjera cijevi [1]. Firak [9] razlikuje *emulzijski tok*, koji se razlikuje od mjehurićastog po puno većem broju manjih mjehurića i postiže se visokom gustoćom masenog toka u ranoj fazi isparavanja.

Na suprotnoj strani spektra veličine mjehurića nalazi se tip strujanja pri kojem je mjehurić toliko velik da zauzme veći dio poprečnog presjeka cijevi. Dovoljno je važan u strojarstvu da nosi zasebno ime - *klipoliki režim toka*, o kojemu će biti više riječi u sljedećem poglavlju.

### 2.1.2. Klipoliko strujanje

Klipoliki režim toka (eng. *slug flow*) je strujanje u cijevi s mjehurićima toliko velikima da ispunjavaju cijeli poprečni presjek cijevi (zona D). U svakodnevici ovaj tip strujanja može se primijetiti u slamci kad je čaša skoro prazna ili u grlu boce iz koje tekućina istače držeći je naopako<sup>1</sup> [8]. Thome [1] navodi kako je pri isparavanju klipolikog toka karakteristična pojava Taylorovih mjehurića. Taylorovi mjehurići imaju oblik metka: hemisferični vrh i cilindrično tijelo, prikazani su na slici 2.2 koja je isječak iz rada "*On shapes and motion of an elongated bubble in downward liquid pipe flow*" [10] gdje se o spomenutim mjehurićima može više pročitati. Pri ovakvom strujanju može se dogoditi da fluid između mjehurića i stijenke struji prema dolje zbog utjecaja gravitacije, iako je ukupni maseni protok usmjeren prema zenitu. Takvo ponašanje može izazvati lokalne nestabilnosti - prijelazima mjehurića između režima strujanja prikazanih na slici.

---

<sup>1</sup>Ova dva slučaja primjeri su dvokomponentnog strujanja s vodom kao kapljevnom i zrakom kao plinoviom.



Slika 2.2: Taylorovi mjehurići

### 2.1.3. Bučkasto strujanje (eng. *Churn Flow*)

Mnogi autori izostave ovaj režim strujanja jer je prijelazna pojava između klipolikog i disperzno prstenastog toka, a u manjim cijevima spomenuta se promjena režima odvija bez ovog prijelaznog stanja. Kako se udio pare klipolikog toka povećava, povećava se brzina strujanja te nastaju nestabilnosti koje su posljedica međudnosa gravitacijskih i posmičnih sila na Taylorove mjehure [1]. Zbog izraženih lokalnih nestabilnosti ovaj se režim strujanja nastoji izbjevati.

### 2.1.4. Disperzno-prstenasti tok

Kad smična napreznja mjehura prema fluidu nadjačaju gravitacijski utjecaj tekućina biva istisnuta iz središta cijevi te formira film uz stijenku cijevi (zona F). Spomenuti sloj fluida nije jednolikog presjeka već se na granici s parom pojavljuju valovi, osim toga, para i dalje može sadržavati sitne kapljice. (Thome [1] izdvaja još jednu mogućnost gdje kapljice disperzirane u pari tvore vidljive strukture, te naziva taj tip strujanja "Whispy annular flow".) Ovo strujanje je stabilno, zbog toga je disperzno-prstenasti tok poželjan režim strujanja u isparivačima.

### 2.1.5. Maglovito strujanje

Pri jako velikim udjelima pare i velikim brzinama strujanja para ima dovoljno kinetičke energije da savlada površinsku napetost sloja fluida te se sloj razbija i fluid se raspoređuje po presjeku cijevi u formi kapljica toliko malenih da se ne mogu vidjeti golim okom. Unutar zone G u kontaktu sa stijenkom je para, pa je koeficijent prijelaza topline znatno manji. Smanjeni prijelaz topline uzrokuje sporije hlađenje stijenke i povećanu temperaturu iste, do te mjere da u nekim sustavima postoji opasnost od taljenja cijevi (progorijevanje). Iako je prijelaz topline ograničen, postoje četiri načina izmjene topline: jednofazni prijelaz topline na paru, prijelaz topline na kapljice koje dopiru na stijenku, prijelaz topline s pare na kapljice udaljenije od stijenke, te prijelaz topline zračenjem sa stijenke prema kapljicama. Zbog smanjenog prijelaza topline, kapljice postoje u neravnotežnoj smjesi na lokacijama gdje je termodinamički udio pare  $x_t$  veći od jedinice. Jednom kad zadnja kapljica ispari počinje jednofazno ravnotežno strujanje čiste pare (zona H).

## 2.2. Klasifikacija strujanja u horizontalnim cijevima

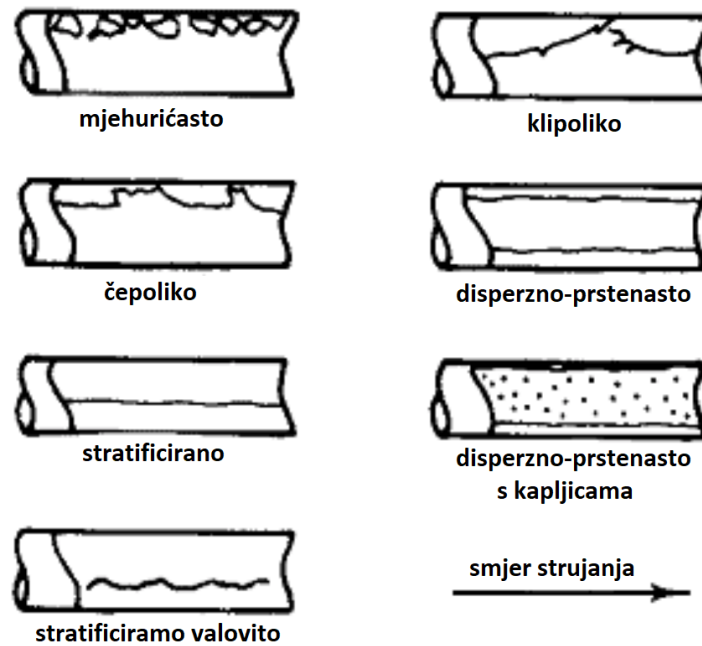
U horizontalnim stijenkama gravitacijska komponenta djeluje okomito na smjer strujanja. Raspodjela faza po presjeku je neujednačena jer sile uzgona tjeraju paru u gornji dio cijevi. Smjesa je nehomogenija što je veći omjer smičnih naprezanja pred gravitacijskima. Taj se odnos uspoređuje Eötvösovom brojem.

$$Eö = \frac{\Delta\rho g L^2}{\gamma} \quad (2.1)$$

Pri visokim brzinama tok postaje sve više aksijalno simetričan, a time sličniji toku pri visokim brzinama u vertikalnoj cijevi.

### 2.2.1. Mjehurićasto isparavanje

Pri niskim brzinama mjehurići se nakupljaju u gornjem dijelu cijevi, a pri iznimno velikim brzinama mjehurići mogu biti ravnomjerno raspoređeni po presjeku cijevi. Kako je stijenka većim dijelom oplahnuta kapljevinom, prijenos topline je intenzivan pa temperatura stijenke mjehurićastog isparavanja nadmašuje temperaturu fluida za najviše nekoliko desetaka stupnjeva čak uz intenzivno zagrijavanje.



Slika 2.3: Režimi dvofaznog strujanja u horizontalnim cijevima, preuzeto iz [1]

### 2.2.2. Stratificirano strujanje

Pri niskim brzinama strujanja gravitacijski utjecaj prevlada te dolazi do potpunog odvajanja dviju faza, gusta kapljevina pada na dno cijevi te graniči s parom preko neporemećene horizontalne površine.

### 2.2.3. Stratificirano valovito strujanje

Povećanjem brzina stratificiranog strujanja na granici faza nastaju valovi koji putuju u smjeru strujanja amplituda valova funkcija je razlike brzina dviju faza. Strujanje se smatra stratificiranim sve dok su amplitude valova dovoljno niske da brijeg vala ne dotiče gornju najvišu točku unutrašnjosti stijenke, tada nastupa...

### 2.2.4. Intermitentno strujanje

Već spomenuti valovi koji oplakuju gornju površinu cijevi stvaraju opreku prolasku parne faze, između njih se nalaze valovi niže amplitude. Unutar većih valova nalaze se sitni paroviti mjehurići. Thome [1] dijeli ovaj tip strujanja na dvije potkategorije:

”*plug*” (čepoliko<sup>2</sup>) i ”*slug*” (klipoliko).

**Čepoliko strujanje:** Ovaj režim sastoji se od izduženih parnih mjehura. Promjer mjehura je manji od promjera cijevi tako da kapljevina cijelo vrijeme oplakuje donji dio stijenke.

**Klipoliko strujanje:** Pri većim brzinama strujanja i većim udjelima pare promjer mjehura usporediv je s promjerom cijevi. Valovi kapljevine odvajaju mjehuriće slično kao kod istoimenog strujanja u vertikalnim cijevima.

### 2.2.5. Disperzno-prstenasti tok

Slično kao i kod strujanja u vertikalnim cijevima, u disperzno-prstenastom toku se stvara kapljeviti film uz stijenkicu cijevi, a para struji kroz središte filma, razlika je u obliku filma koji je u slučaju vertikalnog strujanja deblji na donjem dijelu cijevi nego na gornjem i dolazi do pojave nisko-amplitudnih valova. Pri danjem isparavanju gornji, tanji sloj fluida prvi se isušuje, tu nastaje tranzicija prema stratificirano valovito strujanju<sup>3</sup>.

### 2.2.6. Maglovito strujanje

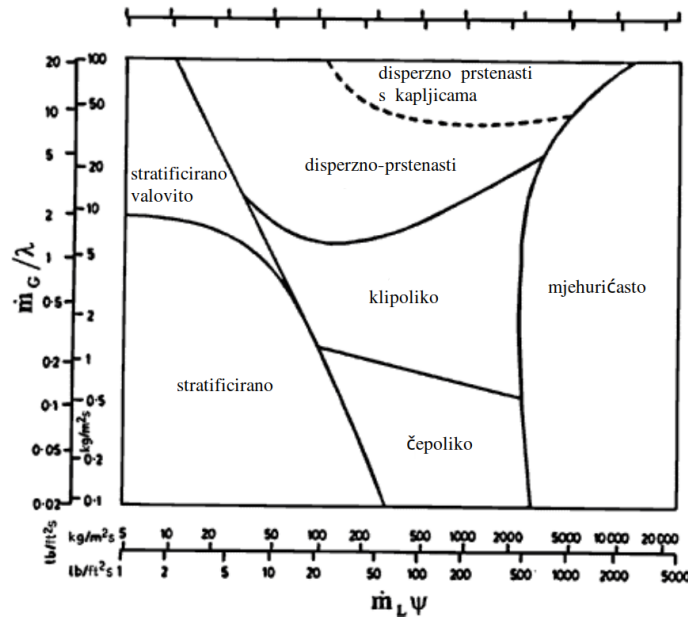
Kako je gravitacijski utjecaj na sićušne kapljice zanemariv, maglovito strujanje u vertikalnim i horizontalnim cijevima nema značajne razlike, slično se može reći za jednofazno parovito strujanje.

## 2.3. Određivanje režima strujanja

Kao što je već spomenuto, različiti režimi strujanja imat će velik utjecaj na pogonske karakteristike sustava, zato je predviđanje lokalnog režima strujanja bitno pri proračunu dvofaznih sustava bez obzira traže li se moguće nestabilnosti ili ne. Najpraktičniji projektantski pristup je korištenje adekvatnih dijagrama - mapa režima strujanja. Najčešće korištene koordinate u ovakvim mapama su udio pare i specifični maseni tok, iako postoje mape s drugačijim koordinatama, nekad bezdimenzijskim. Kao primjer jedne mape dan je dijagram na slici 2.4 čije su koordinate specifični maseni tokovi pojedine faze.

<sup>2</sup> Čepoliko strujanje slobodan je prijevod autora, dok je naziv klipoliko strujanje koristio Firak [9].

<sup>3</sup> Dobar primjer nedostatka konkretne granice pri klasifikaciji strujanja



Slika 2.4: Mapa režima strujanja, preuzeta iz [1].

Zbog različitih svojstava tvari kao što su specifična toplina isparavanja, viskoznost pojedine faze ili površinske napetosti na granicama komponenti mape se ne mogu svesti na bezdimenzijske parametre koji bi opisali više medija, zato su dijagrami napravljeni za pojedinu radnu tvar<sup>4</sup>. Taj problem su neki autori odlučili zaobići tako što su izveli izraze kojima se računaju granice udjela pare pri kojima se odvijaju tranzicije iz jednog stanja u drugo, a uzimaju u obzir svojstva fluida.

<sup>4</sup>Postoje i mape mješavina, tako Wallis [8], prilaže mapu mješavine vode i zraka kojoj su dvije koordinate specifični maseni tok pojedine komponente.



# 3 Nestabilnosti dvofaznog strujanja

Oscilacije protoka i tlaka dvofaznog strujanja uzrokuju vibracije sustava, buku, rad sustava na nepovoljnijim radnim točkama, smanjuju životnih vijek komponenti te mogu predstavljati opasnost na strukturni integritet cijelog sustava. Osim toga, oscilatorno ponašanje može izazvati krizu ključanja pri čemu dolazi do prijenosa topline pri većim razlikama temperatura te mogućem taljenju materijala izmjenjivača (progrijavanja). Navedeni fenomeni mogu se pojaviti kako pri isparavanju tako i pri kondenzaciji.

Na samom početku bi trebalo napomenuti da ovaj rad ne ulazi u detalje mikroskopskih nestabilnosti kao što su kavitacija, Kelvin–Helmholtzova nestabilnost ili Rayleigh–Taylorova nestabilnost (Taylorovi mjehurići nazvani su po ovom tipu nestabilnosti, vidi poglavlje 2.1.2.), već se fokusira na makroskopske pojave koje se odnose na sustav kao cjelinu.

Boure i dr. (1972) [11] prvi su uveli klasifikaciju nestabilnosti dvofaznih strujanja na *statičke* - pri kojima mala promjena u rubnim uvjetima odvodi sustav u drugo stacionarno stanje različito od inicijalnog te se mogu predvidjeti stacionarnom analizom; te *dinamičke* - nestabilnosti sustava u kojima inercija, vrijeme propagacije svojstva, stlačivost i ostali dinamički fenomeni igraju značajnu ulogu. Za predviđanje dinamičkih nestabilnosti nužna je dinamička analiza. Isti autor dijeli nestabilnosti dvofaznog strujanja na *složene* - nestabilnosti uzrokovane različitim mehanizmima koji se ne mogu promatrati svaki za sebe, te *čiste* - one koje mogu. Posljednja podjela je na *sekundarne* - one koje mogu nastati samo nakon nastanka *primarnih*. Primarna nestabilnost može biti uzrokovana nekom dugom nestabilnosti, a sekundarna mora.

### 3.1. Statičke nestabilnosti

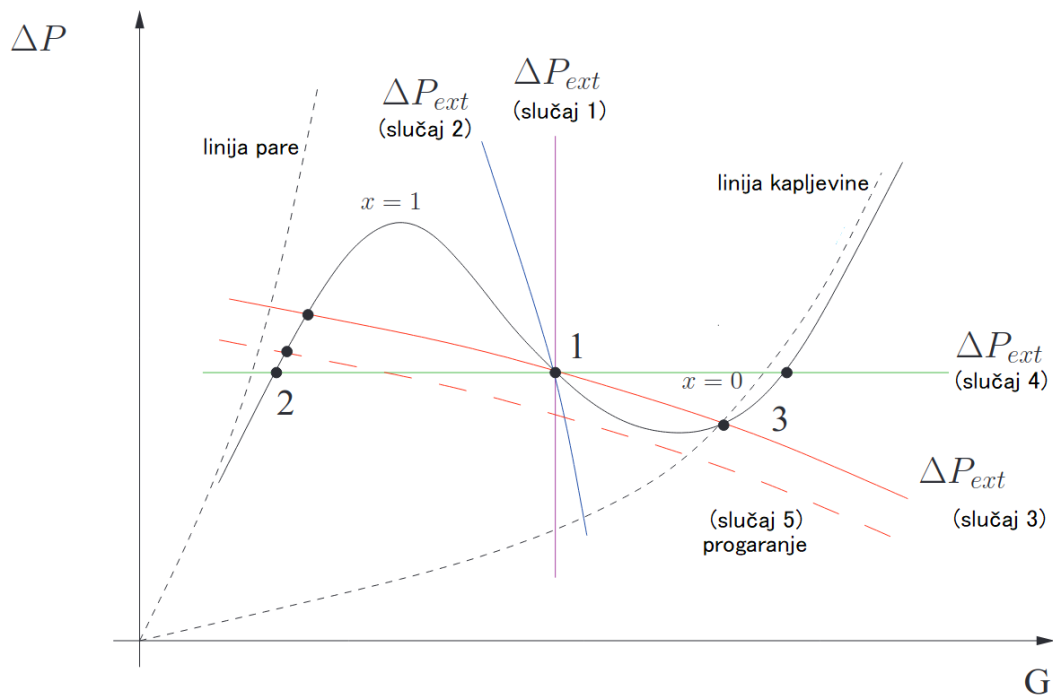
Kao što je već spomenuto, statičke se nestabilnosti mogu predvidjeti stacionarnom analizom sustava, za potrebe takve analize posebno se ističe jedna međuovisnost: funkcija pada tlaka o nametnutoj gustoći masenog protoka  $\Delta p - G$ . Ovisnost pada tlaka isparivačke sekcije o gustoći masenog protoka  $\Delta p_{int} - G$  naziva se *interna* ili *unutarnja karakteristika* sustava, a ako se promatra visina dobave pumpe  $\Delta p_{ext} - G$  ta se funkcija naziva *eksterna* ili *vanjska karakteristika*. Sjecišta tih funkcija su radne točke sustava.

Fizikalne pojave koje se događaju u isparivaču, kao što će se vidjeti u poglavlju 4., su kompleksne i sve veličine su međuovisne, što nas ne bi trebalo obeshrabriti od pokušaja njihovog razumijevanja. Negativno područje karakteristike isparivača može se tumačiti tako da brža ulazna struja daje manje vremena čestici da se zagrije, a samim time manje fluida ispari - manje isparenog fluida rezultira manjim padom tlaka zbog ubrzanja i manjim padom tlaka zbog trenja (vidi sliku 4.3 b)). Ako se isparivaču nametne konstantni toplinski tok pri jako malim masenim protocima, skoro cijela domena bit će ispunjena parom pa je strujanje jednofazno i pad tlaka rasti će s porastom masenog toka; ako je strujanje iznimno brzo, fluid prostruji kroz isparivač i ne stigne primiti dovoljno energije za isparavanje, pa je cijela domena ispunjena fluidom i opet će nagib u  $\Delta p - G$  dijagramu biti pozitivan, ali postoji područje dvofaznog strujanja između te dvije krajnosti u kojima postoji mogućnost negativnog nagiba u  $\Delta p - G$  dijagramu - koji se zbog oblika krivulje često naziva *N-dijagram*. Spomenuti negativan nagib nužan je, ali ne i dovoljan<sup>1</sup> uvjet pojave Ledinegovih nestabilnosti, drugi uvjet je manji negativan nagib vanjske karakteristike na istom dijagramu, što se može dogoditi pri korištenju volumetričkih pumpi. Kad bi negativan nagib unutarnje karakteristike bio manji od nagiba eksterne, dvije funkcije sjekle bi se u jednoj, stabilnoj točki. Uvjet statičke stabilnosti dan je jednadžbom 3.1:

$$\left. \frac{\partial \Delta p}{\partial G} \right|_{int} > \left. \frac{\partial \Delta p}{\partial G} \right|_{ext} \quad (3.1)$$

Dijagram kakav se može pronaći u većini literature o Ledinegovim nestabilnostima dan je na slici 3.1 koja je preuzeta iz [3].

<sup>1</sup>Od autoru dostupnih izvora Fowler[12] jedini tvrdi da je negativan nagib i dovoljan uvjet pojave oscilacija te da je eksterna karakteristika nebitna, a ne primjećuje da je pretpostavio horizontalnu eksternu karakteristiku (nametnut pad tlaka) i tako potpuno zanemario uvjet dan jednadžbom 3.1.



Slika 3.1: Grafički prikaz uvjeta statičke stabilnosti.

### 3.1.1. Ledineggove nestabilnosti

Pionirski rad na temu nestabilnosti dvofaznih strujanja napisao je Ledinegg [13] 1938.<sup>2</sup> po kome je najčešće analizirana stacionarna nestabilnost dobila ime. Stacionarna analiza predstaviti će se koristeći dijagram 3.1: Točka 1 je, uz eksternu karakteristiku (slučaj 3), nestabilna točka, u bilo kojem trenutku sustav može, s jednakom vjerojatnošću, prijeći u režim rada definiran točkom 2 ili 3. Praktični sustavi rijetko će obitavati u nestabilnoj točki 1. Veća opasnost industrijskim postrojenjima su tranzicije uzrokovane poremećajima. Poremećaj može biti manifestiran na vanjskoj (češće) ili na unutarnjoj karakteristici. Nestabilnost uzrokovana malom promjenom vanjske karakteristike primjećuje se promjenom vanjske karakteristike iz (slučaj 3) na (slučaj 5); tada se događa nagla tranzicija iz stabilne točke 3 u stabilnu točku 2.

Vrijeme tranzicije uvelike ovisi o veličini sustava, Ruspini [3] navodi istraživanja gdje je mjereno vrijeme tranzicije tridesetak sekundi, ne navodeći gabarite sustava.

Ledineggova nestabilnost u praksi je često popraćena *oscilacijama vala gustoće* [3],

<sup>2</sup>Neki ovo otkriće pripisuju Schnackenbergu, godinu ranije.

ali o toj i o ostalim kompozitnim tranzicijama bit će više govora kasnije (vidi poglavlje 3.2.1.).

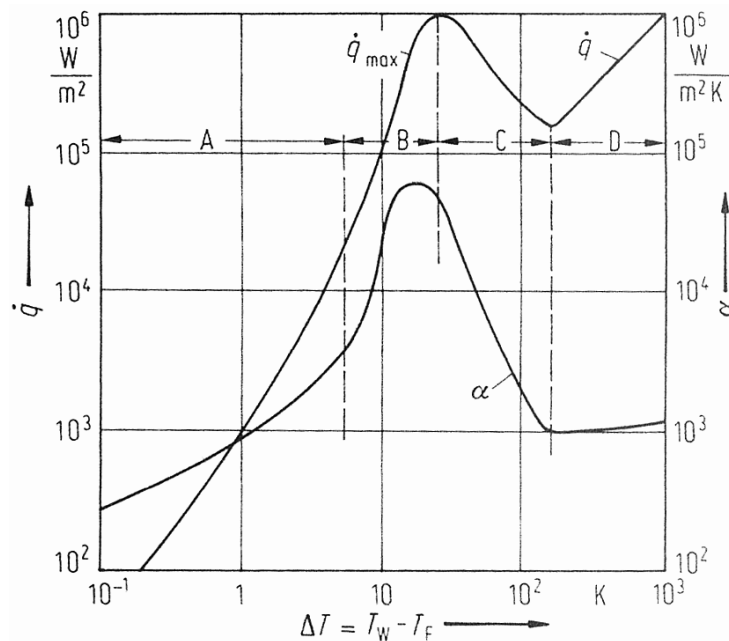
### 3.1.2. Nestabilnosti zbog distribucije toka u paralelnim cijevima

Svaka  $N$ -krivulja ima familiju eksternih karakteristika koje ju sijeku u tri točke. Ukupna interna karakteristika dva paralelna kanala mnogo je kompleksnija od superpozicije individualnih karakteristika svakog od kanala, toliko da je Ruspini [3] pokazao da postoji familija horizontalnih vanjskih karakteristika koja siječe unutarnju karakteristiku dvaju paralelnih kanala u devet točaka! Jasno je da povećanjem broja kanala kompleksnost sustava raste. Tako dolazi do neravnomjerne raspodjele strujanja i do oscilacija u kanalima.

Ruspini [3] navodi istraživanje Y. Taitel i dr. (2003) u kojem su analizirane četiri paralelne cijevi s razdjelnicima na ulazu i izlazu, a kroz sustav struji mješavina vode i zraka. Spomenuti autori su pokazali da pri malim brzinama strujanja obiju faza maseni tok struji pretežito u jednoj cijevi dok kroz preostale tri voda uopće ne struji. Pri povišenju razlike tlaka počinje strujanje u drugoj cijevi, pa danjim povećanjem protoka strujanje u trećoj, i tek pri visokim protocima dolazi do ravnomjernog strujanja u paralelnim cijevima. Minzer i dr.[14] pokazali su eksperimentom da se stacionarno stanje ne može odrediti samo iz rubnih uvjeta, već je bitna putanja kojom se do stacionarnog stanja došlo, što bi svrstalo ovaj tip nestabilnosti u kategoriju dinamičkih.

### 3.1.3. Promjena režima strujanja

Ovakve nestabilnosti karakterizirane su promjenom mehanizma prijenosa topline te se mogu primijetiti naglim povećanjem temperature stijenke [9]. Različiti režimi strujanja, osim prijenosa topline, drugačije se ponašaju i po pitanju pada tlaka; pod jako specifičnim uvjetima postoji mogućnost da jedno nestabilno stanje uzrokuje promjenu režima strujanja u drugo nestabilno stanje, pa se dobije oscilatorno strujanje. Najintenzivnije tranzicije su one između disperzno-prstenastog toka i klipolikog režima toka.

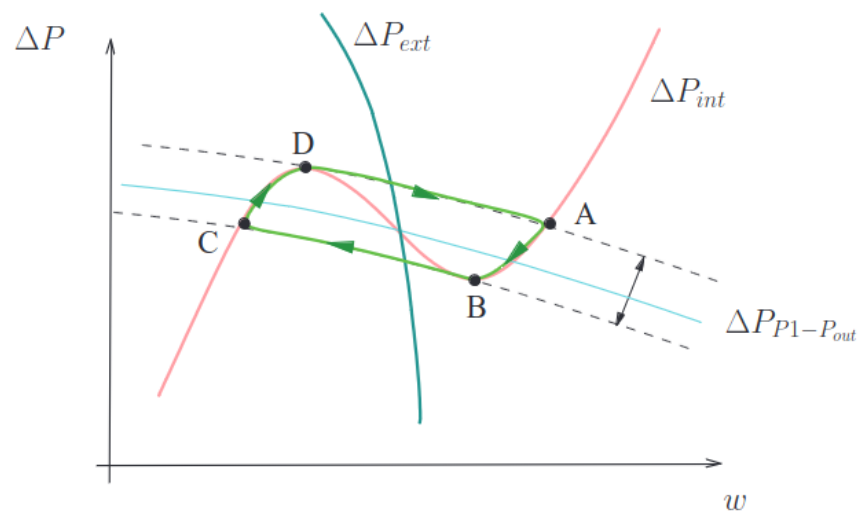
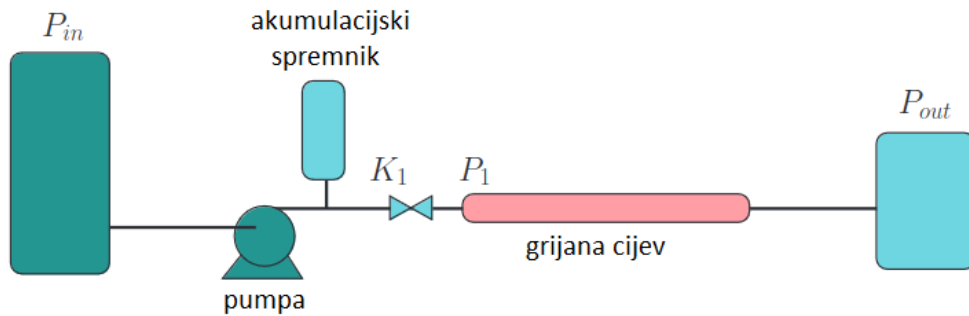


Slika 3.2: Nukiyamin dijagram za vodu, preuzet iz [2]

### 3.1.4. Kriza kipljenja

Kriza kipljenja nastupa pri tranziciji iz mjehurićastog u filmsko isparavanje (inverzni disperzno-prstenasti tok, tip strujanja opisan u poglavlju 2.1.4., samo su faze zamijenile mjesta), kako je prijenos topline značajno manji sa suhe stijenke na paru nego sa stijenke na dvofaznu smjesu (Leidenfrostov fenomen), temperatura stijenke se naglo povećava. Kao što je već spomenuto, statičke nestabilnosti se mogu predvidjeti stacionarnom analizom, tako Galović [2] predlaže korištenje Nukiyaminovog dijagrama 3.2 - ovisnosti specifičnog toplinskog toka o razlici temperatura stijenke i fluida. Na spomenutom dijagramu da se primijetiti kako želimo održavati sustav u području B gdje je izmjena topline najintenzivnija, ali valja paziti da ne prijeđemo lokalni maksimum jer je će sustav doživjeti naglu tranziciju po horizontali do sljedećeg stabilnog stanja gdje će toplinski tok biti približno jednak, ali će temperatura stijenke naglo porasti. O'Neill i Mudawar [6] navode da temperatura stijenke može porasti nekoliko stotina Kelvina što može dovesti do taljenja.

Firak [9] razlikuje krizu kipljenja prvog reda kao do sad opisanu, koja nastaje iz mjehurićastog strujanja i krizu kipljenja drugog reda, koja nastaje iz disperzno prstenastog toka. Slično kao kod krize kipljenja prvog reda, dolazi do naglog povećanja temperature



Slika 3.3: Sustav podložan oscilacijama pada tlaka i pripadajuća  $N$ -krivulja, preuzeto iz [3].

stijenke, ali je to povećanje manje.

### 3.1.5. Oscilacije pada tlaka

Oscilacije pada tlaka pojavljuju se u sustavima sa stlačivim volumenom uzvodno od (ili unutar [11]) grijane površine. Dinamička nestabilnost pojavljuje se kao sekundarni fenomen čiji je nužan uvjet postojanje statičke nestabilnosti, tj. negativnog nagiba u  $\Delta p - G$  dijagramu. Karakterizirane su visokim oscilacijama pogonskih parametara i velikim periodima oscilacija (vidi sliku 3.4).

Prateći sliku 3.3 može se primijetiti da su rubni uvjeti isparivača definirani tlakom

u akumulacijskom spremniku, karakteristikama ventila  $K_1$  i tlaku niskotlačnog spremnika  $P_{out}$ , ti rubni uvjeti definiraju vanjsku karakteristiku sustava<sup>3</sup>. Kad trenutna radna točka (sjecište unutarnje i vanjske karakteristike) ne zadovoljava uvjet statičke stabilnosti definiran nejednadžbom 3.1, može doći do oscilatornog ponašanja sustava. Unutar jednog perioda dogode se četiri procesa:

$A - B$ : pražnjenje (smanjenje tlaka) akumulacijskog spremnika,

$B - C$ : promjena režima strujanja iz jednofaznog (kapljevinu) u dvofazno uz smanjenje protoka,

$C - D$ : punjenje akumulacijskog spremnika,

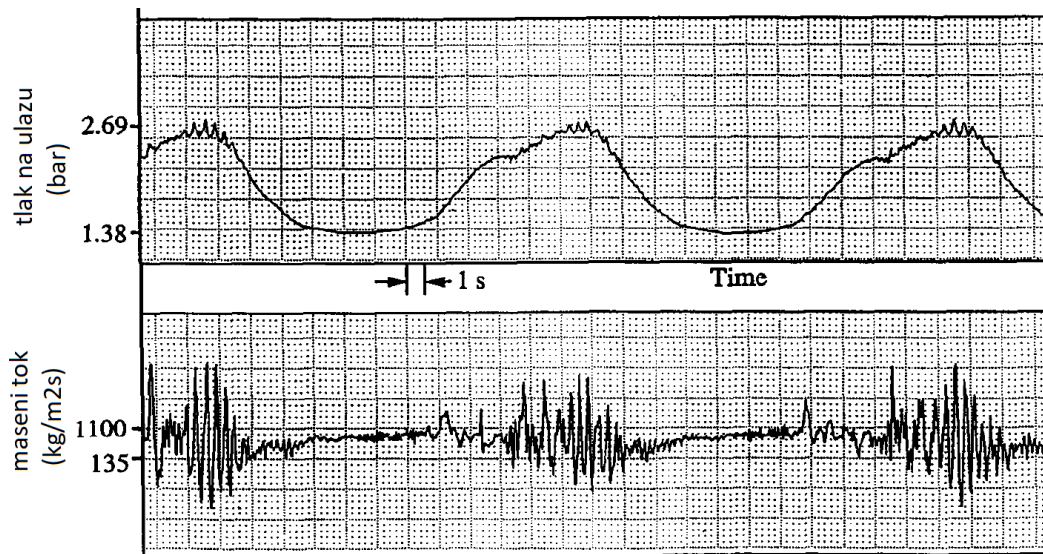
$D - A$ : promjena režima strujanja iz dvofaznog u kapljevitost strujanje.

Procesi  $B - C$  i  $D - A$  istovjetni su onima opisanima u poglavlju 3.1.1., tj. tranziciji radne točke iz 3 u 2 na slici 3.1. Maulbetsch i Griffith [15], su pokazali da minimalni volumen akumulacijskog spremnika uz kojeg će se oscilacije održati opada s povećanjem toplinskog toka<sup>4</sup>, a u slučaju jako dugih grijanih sekcija ( $L/D > 150$ ) oscilacije pada tlaka ostaju samoodržive bez akumulacijskog spremnika zato što je ukupan volumen fluida već dovoljno stlačiv. Prethodnu tvrdnju Ruspini [3] smatra kontroverznom, i navodi istraživanje Akigawe i Sakaguchija (1971) koji nisu izmjerili oscilacije pri bezdimenzivskoj duljini  $L/D > 10000$ .

Ding i Kakac [4], primjećuju zastoj u porastu tlaka visokotlačnog spremnika, što se primjećuje na slici 3.4, nakon čega porast tlaka ponovno počinje s puno većim oscilacijama pogonskih parametara, tako je proces  $C - D$  puno kompleksniji nego "pražnjenje"  $A - B$ . Visokofrekventne valne oscilacije gustoće superponirane su na padajući dio krivulje tlaka spremnika kod horizontalnih cijevi, dok su superponirane na rastući dio iste krivulje kod vertikalnih cijevi (više o valnim oscilacijama gustoće u poglavlju 3.2.1.).

<sup>3</sup>Postavljanje ventila na uzvodno ili nizvodno od grijane cijevi može smatrati promjenom unutarnje ili vanjske karakteristike, ovisno o tome gdje se postavila granica sustava. Kada je ventil unutar granica sustava tada će mijenjati oblik  $N$ -krivulje i smatra se modifikacijom unutarnje karakteristike. Taj isti ventil može se smatrati modifikacijom vanjske karakteristike ako se granice sustava postave tako da ne uključuju ventil. Granice sustava su dvije točke između kojih se mjeri razlika tlaka u  $\Delta p - G$  dijagramu.

<sup>4</sup>Takav zaključak ima smisla s obzirom na to da je negativan nagib  $N$ -krivulje izraženiji pri visokim toplinskim tokovima [11].



Slika 3.4: Mjerene vrijednosti tlaka na ulazu i masenog protoka na ulazu pri analizi oscilacija pada tlaka, preuzeto iz [4].

### Oscilacije pada tlaka u paralelnim kanalima

Ozawa i Nakinishi [16] istraživali su oscilacije pada tlaka u paralelnim kanalima strujanjem mješavine zraka i vode. Podijelili su ovaj specifičan slučaj na tri načina strujanja: sinkroni režim - gdje su oscilacije svih kanala u fazi, protufazni režim - pri kojem maseni tok pojedine komponente u paralelnom kanalu kasni polovinu perioda za susjedom, te višefazni - kad maseni tokovi pojedinih kanala osciliraju različitim frekvencijama.

## 3.2. Dinamičke nestabilnosti

Za opis i predviđanje dinamičkih nestabilnosti potrebno je uzeti u obzir dinamičke efekte kao što je inercija mase fluida, čisto kašnjenje itd. Boure [11] koristi frekvenciju oscilacija kako bi iz eksperimentalnih rezultata zaključio je li fenomen dinamičke ili statičke prirode, a [6] se protivi tom načinu klasifikacije tvrdnjom da frekvencije DWO oscilacija jednog sustava mogu postati jednake frekvencijama oscilacija pada tlaka drugog.



### 3.2.1. Valne oscilacije gustoće

Valne oscilacije gustoće (*Density Wave Oscillation*, u nastavku teksta DWO) tip je oscilacija koje su uzrokovane povratnom vezom konvektivnog prijenosa gustoće i puno brže propagiranog tlačnog vala.

Ding i Kakac [4] izmjerili su povećanje amplitude oscilacija s povećanjem masenog protoka, smanjenjem toplinskog toka i povećanjem pothlađenja. Frekvencija oscilacija pada s povećanjem masenog toka, raste s povećanjem toplinskog toka i pada s porastom pothlađenja na ulazu. Primjećuju da donji dio horizontalne cijevi ne mijenja temperaturu jer je stalno oplakivan kapljevinom (vidi poglavlje o intermitentnom strujanju 2.2.4.), dok gornji dio pokazuje fluktuacije temperature.

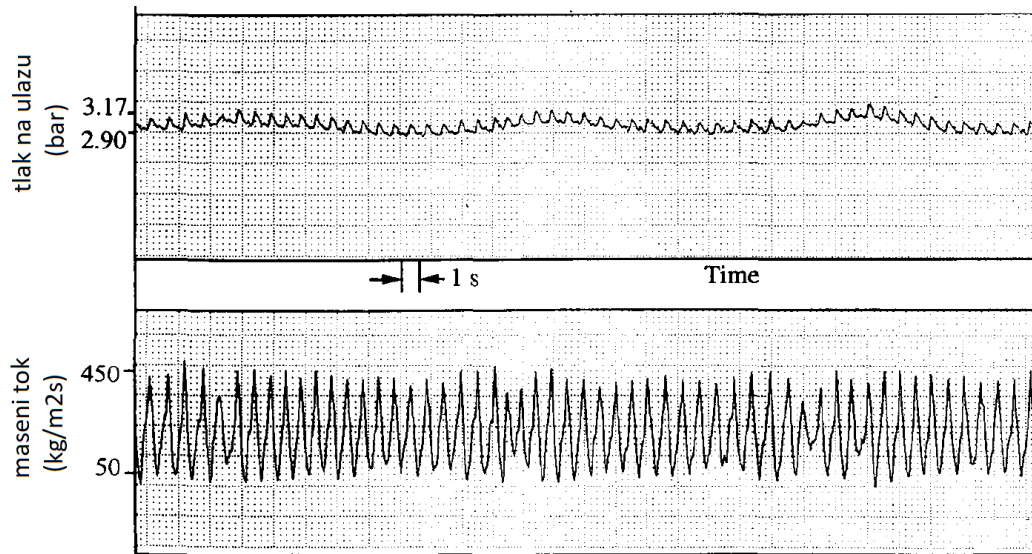
Ruspini [3] jedini je od navedenih autora podijelio ovaj tip oscilacija na tri kategorije, tako će biti učinjeno i u ovom radu.

#### Tipa 1: zbog utjecaja gravitacije

Ovaj tip oscilacija dokumentiran je u sustavima s dugim vertikalnim grijanim cijevima s negrijanim cijevima uzvodno od ogrjevnice površine. U vertikalnim cijevima hidrostatski tlak odgovoran je za značajan udio ukupnog pada tlaka, zato mala relativna promjena ukupnog pada tlaka čini značajnu razliku pada tlaka trenja i ubrzanja, osim toga, pri dinamičkim promjenama lokalnih udjela pare mijenjat će se ukupna težina vodenog stupca, a time i hidrostatski pad tlaka. Razumijevanje ovog fenomena nužno je pri projektiranju sustava prirodne cirkulacije. Collins i Gacesa [17] izmjerili su pojavu  $DWO_I$  u sustavu s prisilnom konvekcijom.

#### Tipa 2: zbog utjecaja trenja

Privremeno zatvaranje ventila na ustrujnom otvoru (sniženje brzine ustrujavanja) rezultira padom masenog protoka, manji maseni protok daje više vremena čestici da se zadrži u sustavu pa raste srednja specifična entalpija i pada prosječna gustoća u sustavu - takvi poremećaji utječu na pad tlaka i na prijelaz topline. Za određene konfiguracije spomenuti inicijalni poremećaj može uzrokovati asinkronost tlaka na izlazu i masenog protoka na ulazu čiji međudodnos izaziva samoodržavajuće oscilacije. Kako je gustoća svojstvo koje se prenosi konvektivno, čisto kašnjenje je uzrok ovih oscilacija, zato je period oscilacija približno jednak razlici vremena propagacije tlačnog poremećaja od



Slika 3.5: Mjerene vrijednosti tlaka na ulazu i masenog protoka na ulazu pri analizi oscilacija vala gustoće, preuzeto iz [4].

izlaza do ulaza i vremena potrebnog materijalnoj čestici za jedan prolaz sustava.

$$\frac{\tau_{\text{DWO}}}{\tau_{\text{čestice u sustavu}}} \in [1, 2] \quad (3.2)$$

Iako je ovaj fenomen objašnjen u kratkim crtama, predviđanje nastajanja DWO zahtijevan je posao, a kvalitetna analiza uključit će puno više parametara, kao što su toplinska inercija ogrjevne površine, prigušni ventili na ulazu i izlazu, razliku brzina dviju faza, pothlađenje, gravitacijski utjecaj, itd.

Mehanizam nastajanja DWO naveden gore najčešće je objašnjenje uzroka ovakvih pojava, ali valja paziti pri jednostavnom objašnjavanju kompleksnih dinamičkih pojava jer postoje druga elegantna i intuitivna objašnjenja kao što je promjena centra mase sustava. Ustaljeno objašnjenje ne uzima u obzir oscilacije istog tipa koje nastaju pri različitim uvjetima kao što je isparavanje u vertikalnoj adijabatskoj cijevi. Rizwan [18] ide toliko daleko da kritizira spomenutu logiku i zaključuje da uzrok nastajanja DWO drugog reda ne ovisi značajno o propagaciji valova različitih gustoća kroz sustav. Po njemu su asinkroni mehanizmi promjena tlaka na ulazu u ovisnosti o ustrujnoj brzini (vidi jednadžbu 4.10) i odgođena promjena pada tlaka u ovisnosti o ustrujnoj brzini.

### Tipa 3: zbog utjecaja tromosti

Ovaj tip oscilacija nije privukao veću pažnju znanstvene zajednice, od literature korištene za pisanje ovog rada, samo Achard i dr. [7] spominje  $DWO_3$ , u kontekstu "otoka stabilnosti" (regije označene s  $D_2$  na slici 3.9) i Ruspini [3] koji ovaj tip nestabilnosti samo spominje u teorijskoj obradi tematike.

#### 3.2.2. Termo-akustične oscilacije

Frekvencijski raspon ovih oscilacija najviši je od do sada navedenih te iznosi 5 - 100 Hz. Rezonancija se pojavljuje kad je frekvencija nastajanja parnih mjehurića na stijenci približno jednaka frekvenciji stojnog harmonijskog vala sustava. Predviđanje ove pojave je iznimno teško jer je brzina širenja tlačnog poremećaja dvofaznog strujanja teško određiva veličina. Brzinu zvuka<sup>5</sup> dvofazne smjese teško je izračunati jer ta veličina ne ovisi samo o stanju smjese već i o prostornoj raspodjeli faza (režimu strujanja, kad se govori o strujanju u cijevi). Weixiu Shi i Lisheng Pan [20] su promatrajući akustične nestabilnosti kroz staklenu stijenku primijetili ta mjehurići "trepću", tj. sužavaju se i šire u kratkom vremenskom rasponu.

Ovaj tip nestabilnosti ne valja miješati s fenomenom *mehaničkih vibracija*, visokofrekventnih (1000 do 10000 Hz) oscilacija čija frekvencija upada u raspon ljudskog sluha, pa se mogu dijagnosticirati slušanjem. Uzrok mehaničkih vibracija je implouzija mjehurića, te se mogu izbjeći podešavanjem pothlađenja ulazne struje [3].

### 3.3. Mikrokanalni izmjenjivači

Iznimno mali promjeri cijevi osiguravaju veliku izmjenjivačku površinu u malom volumenu. Velika izmjenjivačka površina u kombinaciji s koeficijentom prijelaza topline dva reda veličine većim čini mikrokanalne izmjenjivače s dvofaznim strujanjem izvrsnim ponorima topline za sitne elektroničke komponente. Smanjenjem promjera ispod

---

<sup>5</sup>Ista se veličina u prethodnoj rečenici spominje koristeći precizniji izraz *brzina širenja tlačnog poremećaja*. Kod strujanja dvofazne smjese *brzina zvuka* u jednom kontekstu može predstavljati brzinu širenja tlačnog poremećaja, dok u drugom može označavati termodinamičku brzinu zvuka [19]  $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$  koje poprimaju različite vrijednosti u dvofaznim smjesama. U ovom tekstu brzina zvuka označavat će brzinu širenja tlačnog poremećaja osim ako nije drugačije naglašeno.

određene granice mijenjaju se fizikalni mehanizmi prijenosa topline i tvari, pa proračuni izvedeni za makrokanalne sustave više ne važe. Kriteriji koji definiraju granicu između mikrokanalnih i makrokanalnih sustava najčešće će biti funkcija Eötvösovog broja 2.1 ili bezdimenzijske veličine koja opisuje iste efekte kao Eötvösov broj:  $Co$  i  $Bo$ <sup>6</sup> i/ili kapilarnu duljinu  $L_{cap} = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_f - \rho_g)}}$ . Promatranjem različitih tranzicijskih kriterija primijetiti će se da se često kapilarna duljina uspoređuje s promjerom cijevi, što ima smisla jer kapilarna duljina predstavlja veličinu formiranih mjehurića, a kanal će se smatrati mikrokanalnim kad je veličina formiranih mjehurića usporediva s promjerom cijevi. Pri velikim promjerima, mjehurić formiran na stijenci neće značajno utjecati na istiskivanje kapljevine, dok u mikrokanalu hoće<sup>7</sup>.

Mjehurićasto isparavanje u mikrokanalu nikad neće biti potpuno razvijeno jer se formirani mjehurići kaotično spajaju i formiraju izdužene mjehuriće slične onima na slici 2.2) u ranoj fazi isparavanja[21].

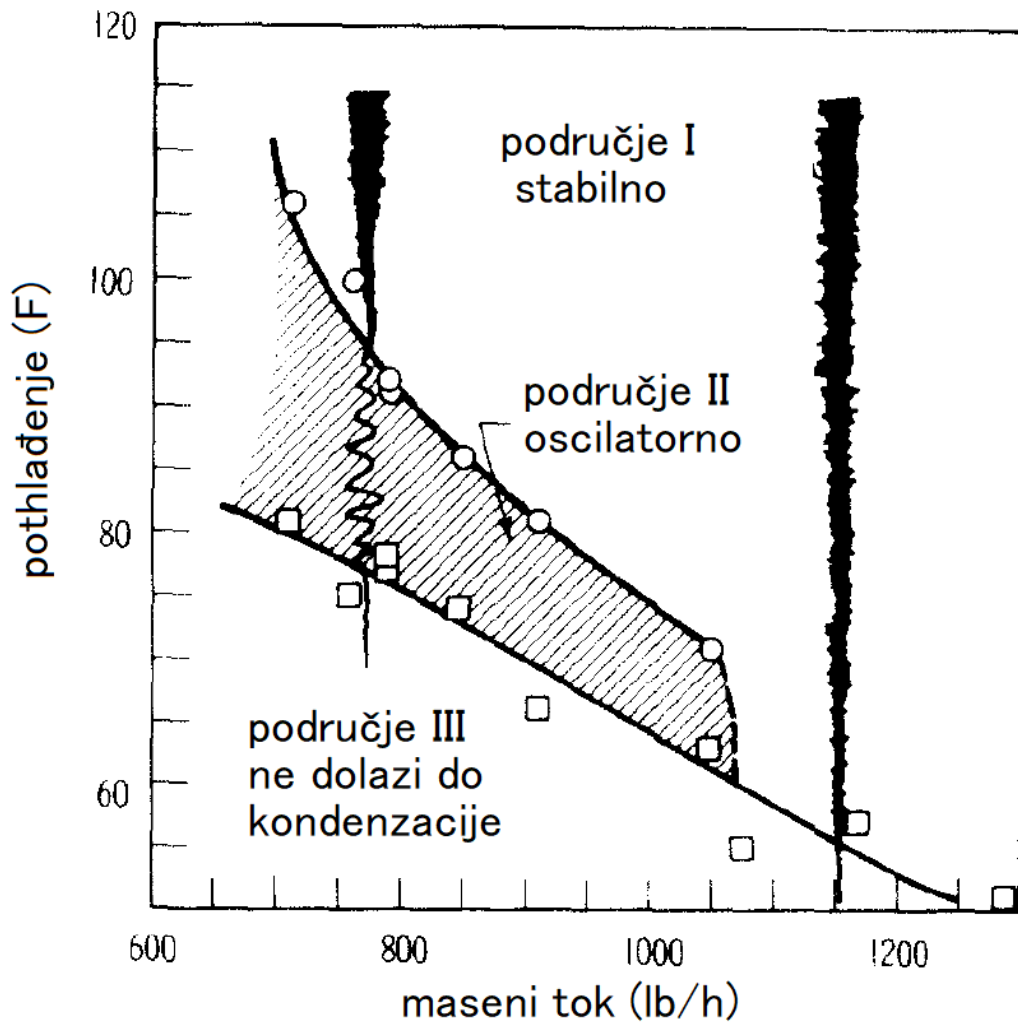
### 3.4. Nestabilnosti pri kondenzaciji

Na temu nestabilnosti dvofaznih strujanja pri odvođenju topline provedeno je malo istraživanja. Westendorf i Brown [5] napisali su prvi opsežan opis nestabilnosti pri kondenzaciji, te prilažu dimenzijsku mapu stabilnosti (slika 3.6) za definiranu cijev u ovisnosti o masenim protocima i pothlađenju ulazne struje. Osim toga, isti autori su primijetili dva različita mehanizma oscilacija: visokofrekventni, u rasponu od 50 do 200 Hz i niskofrekventni, u rasponu od 1 do 10 Hz. Uzrokom visokofrekventnih oscilacija smatra se fenomen sličan termo-akustičnim oscilacijama pri isparavanju opisanima u poglavlju 3.2.2., dok se uzrok niskofrekventnih oscilacija ne može pripisati ni oscilacijama pada tlaka ni DWO, činjenica koja naglašava veliku razliku između strujanja s kondenzacijom i onog s isparavanjem.

Strujanja s kondenzacijom bit će stabilnija jer je kriterij nastanka  $N$ -krivulje puno zahtjevniji. Uspoređujući sa strujanjem pri isparavanju, utjecaj pada tlaka zbog trenja ne može imati negativan nagib, pa trenje djeluje stabilizirajuće. Zato će negativni nagibi

<sup>6</sup>Spomenute bezdimenzijske veličine mogu se izraziti kao  $Eö = \frac{Bo}{8} = \frac{1}{8Co^2}$ .

<sup>7</sup>Valja primijetiti kako tranzicijski kriterij uključuje svojstva fluida, tako postoji cijeli raspon promjera koji će se smatrati mikrokanalima ako kroz njega struji voda, a ako struji rashladni medij kao što je FC-72 neće.



Slika 3.6: Mapa stabilnosti kondenzirajuće struje, preuzeto iz [5].

$\Delta p - G$  krivulje biti postignuti samo pri jako niskom broju trenja  $\Lambda$  (bezdimenzijski parametar koji određuje utjecaj trenja na ponašanje sustava, opisan je u poglavlju 3.5.2. i vertikalna je koordinata mape na slici 3.9).

## 3.5. Prevenirica oscilacija

Pristup prevenciji može se podijeliti na *modifikacije sustava* i *poznavanje pogonskih uvjeta*.

### 3.5.1. Modifikacije sustava

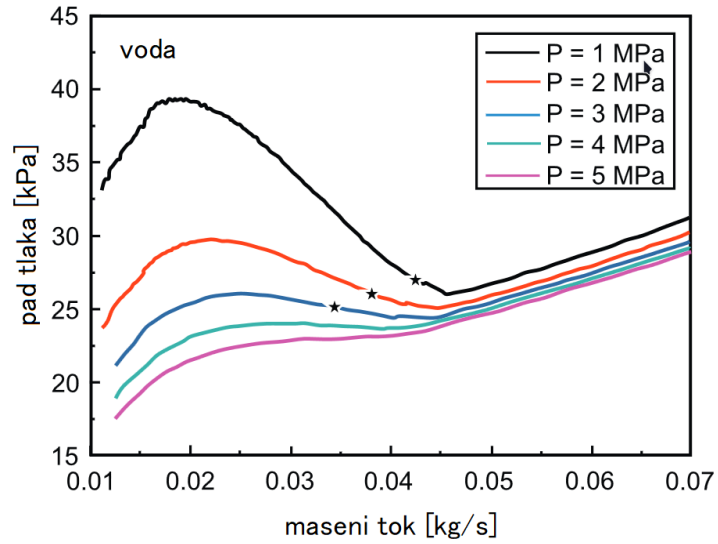
#### Sprječavanje pojave Ledineggove nestabilnosti

Modifikacije sustava najčešće nastoje ukloniti negativan nagib iz unutarnje karakteristike. To se može postići ugradnjom prigušnog ventila uzvodno od isparivačke površine. Što je autoritet ventila veći, pad tlaka zbog ubrzanja i trenja dvofaznog strujanja je manji, a ta dva efekta su odgovorna za negativan nagib u  $\Delta p - G$  dijagramu. Učin prigušnog ventila na unutarnju karakteristiku vidi se na slici 3.7. Ovakva modifikacija zahtijeva ugradnju jače pumpe i veće pogonske troškove zbog nepovrativih gubitaka na prigušnom ventilu.

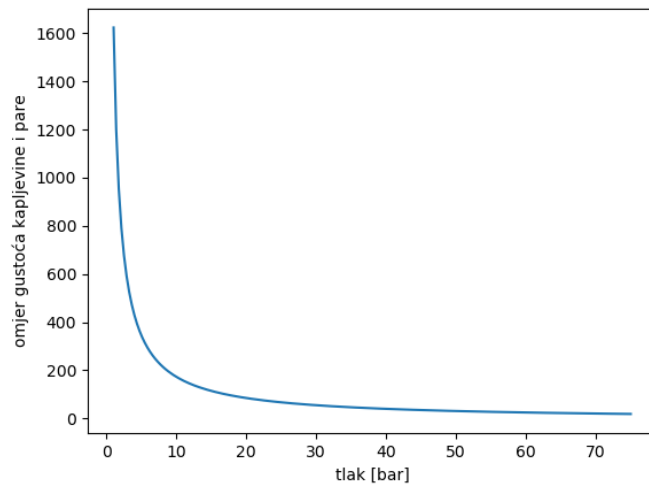
Drugi način sprječavanja Ledineggove nestabilnosti modifikacijom sustava je povećanje ukupnog radnog tlaka. Podizanjem tlaka smanjuje se omjer specifičnih volumena dviju faza pa su promjene uzrokovane isparavanjem manje<sup>8</sup>. Učinak na unutarnju karakteristiku sustava kvalitativno je sličan onom prikazanom na slici 3.7. Ovom metodom se podiže temperatura isparavanja pa takva modifikacija nije primjenjiva u rashladnim sustavima. Podizanje ukupnog tlaka nije poželjno ni u kotlovima jer viši tlakovi uvjetuju strože zahtjeve na čvrstoću komponenti; više temperature radne tvari smanjit će razliku temperatura ogrjevne i radne tvari, time i prijenos topline; također, temperatura dimnih plinova ne može se spustiti na dovoljno nisku temperaturu, a tako se iskorištava manje toplinske energije.

---

<sup>8</sup>Tako je numerička simulacija proradila. Pri niskim tlakovima isti kod divergira, vidi sliku 3.8.



Slika 3.7: Promjena unutarnje karakteristike s različitim zatvorenostima prigušnog ventila, preuzeto iz [6].



Slika 3.8: Omjer gustoća faza vode pri različitim tlakovima.

### Spriječavanje valnih oscilacija gustoće

Prigušni ventil postavljen uzvodno od ogrjevne površine povećat će pad tlaka trenja kapljevine, kako se pad tlaka kapljevite faze može smatrati proporcionalnim masenom protoku pri malim promjenama, te dvije veličine imaju nulti fazni pomak. Tako će ustrojni prigušni ventil umanjiti DWO oscilacije.

Prigušni ventil postavljen nizvodno od ogrjevne površine također usporava strujanje povećanjem brzine, ali usporeno strujanje daje više vremena fluidu da preuzme toplinu sa stijenke, pa više fluida ispari i brzina dvofazne smjese postaje veća. Primjećuje se asinkrono ponašanje ulazne brzine i pada tlaka na prigušnom ventilu, taj asinkronitet uzrokuje povećanje amplitude oscilacija koja raste s autoritetom prigušnog ventila.

Ako konstruktor ima takav izbor, poželjno je smanjiti duljinu grijane površine jer je pokazano da manja duljina grijane površine smanjuje DWO pri jednakoj predanoj toplini.

### 3.5.2. Poznavanje pogonskih uvjeta

#### Spriječavanje pojave Ledineggove nestabilnosti

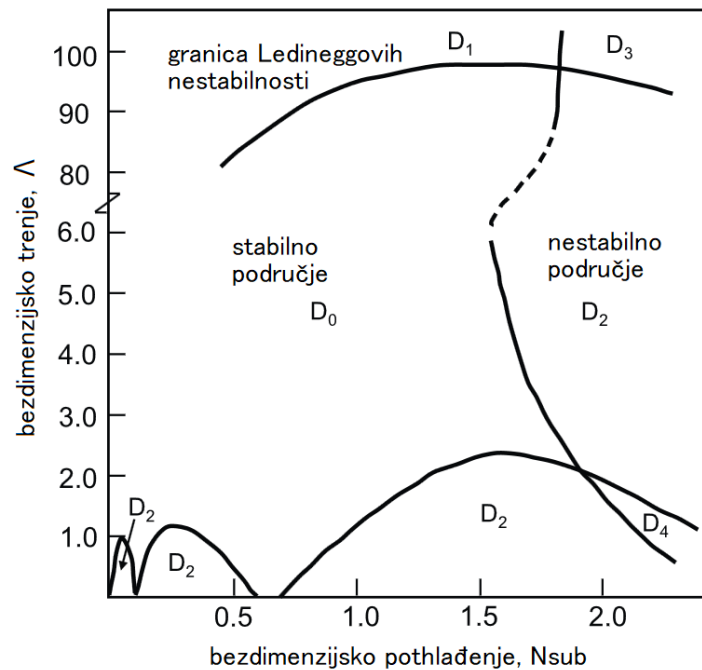
Bitna točka unutarne karakteristike je lokalni minimum  $N$ -krivulje, koja se u literaturi naziva OFI (*Onset of Flow Instability*). Različiti autori izvodili su korelacije kojima se računaju neki kritični parametri, najčešće računata bezdimenzijska veličina je Stantonov broj  $St$ , koji je omjer topline predane fluidu i referentnog toplinskog kapaciteta.

$$St = \frac{q}{\rho_l u h_r}$$

Poznavajući gornji limit Stantonovog broja lako se može izračunati maksimalni toplinski ili minimalni maseni tok u sustavu prije pojave Ledineggove nestabilnosti.

Drugi način predviđanja graničnih pogonskih uvjeta uključuje detaljniju analizu dinamičkog sustava. Achard i dr. [7] pokušali su konstruirati mapu pojave Ledineggove nestabilnosti i DWO. Mapa je konstruirana računajući četiri relevantna bezdimenzijska parametra: Eulerov broj  $Eu = \frac{\Delta p}{\rho_f U_f^2}$ , Freudeov broj  $Fr = \frac{U_f^2}{gL_H}$ , bezdimenzijski faktor trenja  $\Lambda = \frac{fL_H}{2D_H}$  i bezdimenzijsko pothlađenje  $N_{sub} = \frac{v_{fg}(h_f - h_i)}{v_f h_{fg}}$ . Područja stabilnosti tako se prikazuju mapi s koordinatama  $[N_{sub}, \Lambda]$ . Autori nalaze nestabilna područja tražeći korijene sustava jednadžbi u desnoj, nestabilnoj poluravnini. U detalje izvoda





Slika 3.9: Mapa stabilnosti koju su izveli Achard i dr. [7].

neće se ulaziti jer je opisan u spomenutom radu, više se može saznati u skripti [22]. Spomenuti dijagram prikazan je na slici 3.9.

Osim prikazanog dijagrama, spomenuti rad sadrži mape s drugačijim bezdimezijskim koordinatama uključujući trodimenzionalne mape. Pri očitavanju spomenutih mapa valja paziti područje u kojem vrijede, praktički cijeli rad [7] limitiran je uskim područjem Freudeovih brojeva ( $Fr^{-1} \in [40, 50]$  i  $\tilde{j} \in [0.3, 0.7]$ ) Zanimljivo je da rad jednom metodologijom predviđa DWO i Ledineggove oscilacije jer su pokazali da DWO teži Ledineggovim oscilacijama kad njihova frekvencija teži nuli.

## 4 | Numerička simulacija

U ovom poglavlju objašnjava se implementirani postupak rješavanja jednodimenzionalnog sustava spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednažbi. Četiri nezavisne nepoznanice su brzina strujanja  $u$ , tlak  $p$ , specifična entalpija  $h$  i temperatura stijenke  $\theta_s$  unutar koje struji promatrani fluid. Računalni program napisan je tako da se u svakoj unutarnjoj iteraciji računaju, zapisuju i uspoređuju vrijednosti sedam veličina; četiri nezavisne i 3 zavisne koje su: gustoća, temperatura i specifični toplinski tok s unutarnje strane stijenke. Zapisivanje nezavisnih veličina korisno je jer se ionako moraju izračunati u trenutnoj iteraciji, a izračunate vrijednosti koristi će kao pretpostavka sljedeće iteracije.

Rješavač je *segregated* tipa, što znači da se u svakoj iteraciji rješavaju uzastopne četiri obične diferencijalne jednažbe s najnovijim pretpostavkama preostalih veličina koje ostaju konstantne. Takvo rješavanje znatno je točnije od *shooting* metoda<sup>1</sup> kakve koriste Keser [23] i Chatorgoon [24] jer se njihovom metodom poremećaj propagira samo nizvodno, a eliptične diferencijalne jednažbe tretiraju se kao parabolične.

---

<sup>1</sup>Metoda kojom se problem s rubnim uvjetima reducira na problem s početnim uvjetima. Za ovaj konkretan slučaj, uvjet pada tlaka u sustavu zadovoljio bi se pogađanjem brzine na ustrujnoj površini. Ovakva metoda je računalno brza, ali ima veliku manu: rubni uvjet pada tlaka će na  $N$ -krivulji zadovoljiti 3 različite pretpostavke ulaznih brzina, a odabrana brzina ovisna je o inicijalnoj pretpostavci i metodi traženja nultočke, naravno da ponašanje fizikalnog sustava ne smije biti ovisno o metodi kojom ga računamo.

## 4.1. Metoda konačnih volumena

Metoda konačnih volumena metoda je rješavanja sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi tako što ih svodi na sustav algebarskih jednadžbi. Čest je pristup rješavanju problema računalne mehanike fluida zato što su, za razliku od metode konačnih razlika i metode konačnih elemenata, sustavi izvedeni MKV-a konzervativni. Konzervativnost je svojstvo da sustav zadovoljava konzervativne zakone, a proizlazi iz izvođenja jednadžbi, koje je prikazano u poglavlju 4.7.. Integracijom i primjenom Ostrogradsky - Gaussovog teorema, suma svih tokova konzervativnih veličina izjednačava se s izvorišnim članom.

Spomenuto svođenje na sustav algebarskih zahtijeva određene pretpostavke, tako će se pri prostornoj diskretizaciji unijeti pretpostavka da je svojstvo  $\phi$  u središtu volumena srednja vrijednost tog svojstva u konačnom volumenu .

$$\phi_i \approx \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \phi dV \quad (4.1)$$

Vremenski gradijenti također će se diskretizirati, primijenit će se implicitna vremenska diskretizacija koja je nužna za iznimno nelinearne probleme kakvim se ovaj rad bavi. Pri proračunu vremenskih gradijenata uzima u obzir vrijednost svojstva koje se trenutno računa  $\phi^n$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\phi^n - \phi^{n-1}}{\Delta t} \quad (4.2)$$

## 4.2. Matematički model

Postavljeni model jednostavna je cijev postavljena između dva spremnika na različitom tlaku, gdje se u visokotlačnom spremniku nalazi pothlađena kapljevina. Model je sličan onom kojeg koristi Fowler [12] u svojoj analizi, ali uz manje pojednostavljenja. Fowler postavlja matematički model kojim promatra same nestabilnosti, dok će ovaj rad pokušati opisati dinamički sustav sa što realnijim pretpostavkama kako bi se tražene nestabilnosti manifestirale na isti način kao što se pojavljuju u prirodi.

### 4.2.1. Pretpostavke

Svojstva materijala cijevi (čelik) u ovoj se analizi smatraju nepromjenjivima s temperaturom, a stalan je i koeficijent prelaska topline sa strane ogrjevnog medija. Izrazito

nefizikalna pretpostavka je konstantna temperatura dimnih plinova bez obzira na to što im se oduzima energija. Pravilnije bi bilo modelirati sustav kao protusmjerni ili čak križni izmjenjivač topline, ali takav sustav bi (među ostalim) zahtijevao da se modelira više različitih cijevi u više dimenzija što nadilazi ambicije ovog rada. Gradijent temperature vode u radijalnom i tangencijalnom smjeru se zanemario, kao i gradijent temperature cijevi u istim smjerovima pa se sustav može smatrati jednodimenzionalnim (sve promjene odvijaju se po aksijalnoj koordinati). Da bi se ispunila jednodimenzionalnost pretpostavlja se da je smjesa homogena, što u stvarnosti nije, naročito u neravnotežnom procesu isparavanja pothlađene kapljevine. Neki autori<sup>2</sup> rješavaju problem nehomogenosti tako što rješavaju sve potrebne jednadžbe za svaku od dviju faza.

#### 4.2.2. Geometrija i diskretizacija

Jednadžbe su diskretizirane metodom konačnih volumena na dvije mreže: nepomaknutoj i pomaknutoj, *upwind* shemom diskretizacije. Mreže su prikazane na slici 4.2. Pretpostavka da se isparivač promatra kao jedna cijev olakšala je simulaciju jer se geometrija reducira na jednu prostornu koordinatu, samim time prostorna diskretizacija je trivijalna: cijev duljine  $L$  podjeli se na  $N_L$  jednakih dijelova (strukturirana mreža)<sup>3</sup>.

Vremenska diskretizacija provedena je jednako naivno kao prostorna:  $\Delta t = \tau/N_t$ , gdje je  $\tau$  ukupno proračunsko vrijeme, a  $N_t$  je broj vremenskih trenutaka. Bolje bi se iskoristili računalni resursi da se vremenski korak prilagođavao vremenskim derivacijama nekih bitnih veličina.

### 4.3. Diferencijalne jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju fluid preuzete su iz [24].

---

<sup>2</sup>Boure i dr. [11] preporučuju ovaj pristup, ali ga ne implementiraju, Siikonen [25] ga implementira, ali samo u svrhu analize tranzijentnih pojava, ne traži i ne dobiva nestabilnosti. Taj način rješavanja u ovom bi slučaju imao sedam nezavisnih jednadžbi, po tri za svaku fazu i jednu za računanje temperature stijenke.

<sup>3</sup>Pri izvođenju jednadžbi nije se vodilo računa o mogućim razlikama duljina središnjih volumena, pa nestrukturirana mreža nije primjenjiva.

Zakon očuvanja mase:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

Zakon očuvanja količine gibanja:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{trenja} + \rho g \sin \beta = 0 \quad (4.4)$$

Zakon očuvanja energije:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( h + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho u \left( h + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \rho u g = \frac{\partial p}{\partial t} + q_w \quad (4.5)$$

Jednadžba koja opisuje temperaturu cijevi jednadžba je provođenja preuzeta iz [2], opisuje provođenje kroz jednodimenzionalnu šipku s volumnim izvorišnim članom:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial \theta_s}{\partial t} &= -\frac{\partial q_x}{\partial x} + \phi_V \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} &= \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \frac{\phi_V}{\rho c} \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} + \frac{\phi_V}{\rho c} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Gdje je volumenski izvorišni član  $\phi_V$  dominantan i jednak je razlici toplinskog toka kojeg cijev prima od ogrjevnog medija i toplinskog toka kojeg cijev predaje fluidu.

Sve navedene jednadžbe specifičan su oblik opće konveksijsko-difuzijske jednadžbe [26], koja za 1D slučaj konzervativne veličine  $\phi$  poprima sljedeći oblik:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = S_\phi \quad (4.7)$$

## 4.4. Inicijalizacija ili proračun početnih uvjeta

Tranzijentni sustavi zahtijevaju definirane početne uvjete. Zato se inicijalno rješenje računa kao stacionarno strujanje čistog fluida uniformnih svojstava i brzine s linearnim gradijentom tlaka sa zadanom vrijednosti na izlazu. Takvo stanje ne zadovoljava sve jednadžbe, ali dovoljno je blizu realnosti da rješavač može izračunati sljedeće stanje (naravno, s većim brojem iteracija). Netočnosti uvedene primitivnim proračunom početnog stanja iščeznuti će nakon nekoliko vremenskih iteracija, te sigurno neće utjecati na proračun kad se u sustavu pojavi prvi parni mjehurić. Preporučuje se da se

rezultati CFD simulacije koji nisu pod utjecajem početnih uvjeta očitavaju nakon tri "ispiranja domene" (I. Batistić, privatna korespondencija), vrijeme ispiranja domene je vrijeme potrebno da materijalna čestica dođe od ulazne do izlazne granice<sup>4</sup>.

## 4.5. Rubni uvjeti

Na izlaznom otvoru cijevi događa se miješanje fluida: radna tvar brzinom  $u_{(N_i-1)}$  miješa se s radnom tvari u spremniku nižeg tlaka pa je tlak posljednjeg volumena jednak tlaku spremnika (kinetička energija fluida se nepovratno gubi miješanjem s radnom tvari u spremniku). Takav rubni uvjet s dovoljnom se točnošću može opisati tako da se sve veličine "kopiraju" iz posljednjeg volumena. Takva praksa je uobičajena kod istrujnih otvora u računalnoj mehanici fluida i opisuje se nultim gradijentom veličina na izlazu iz domene (Neumannov rubni uvjet).

$$p_{x=L_c} = p_{\text{spremnik}} \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=L_c} = 0 \quad (4.9)$$

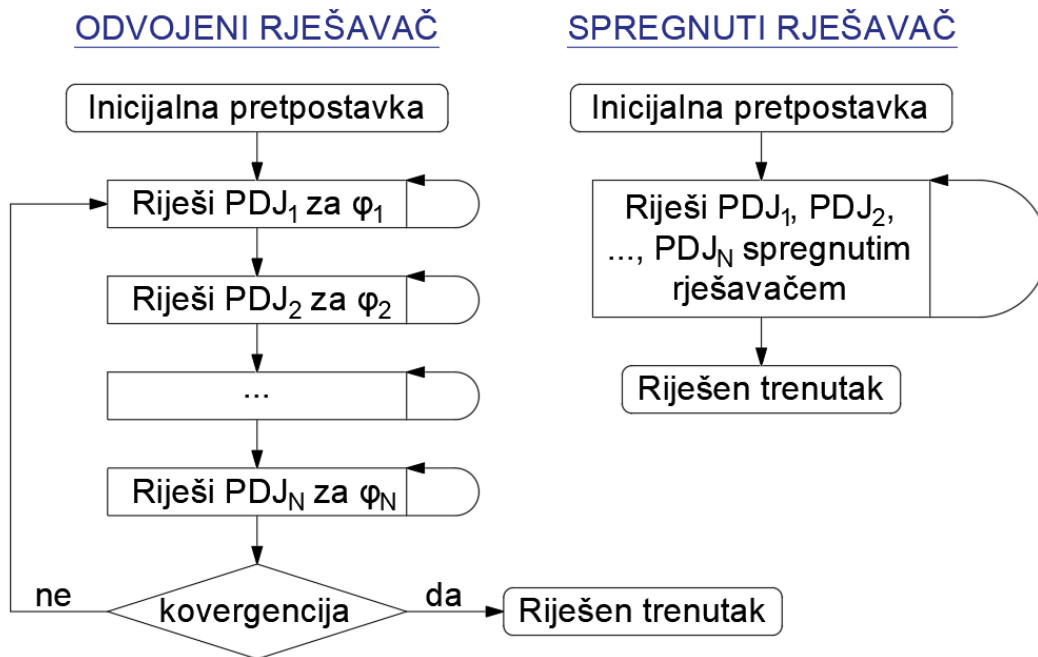
Na ulaznom otvoru pretpostavit će se da nema gubitaka, ali ne smije se napraviti greška mnogih autora i pretpostaviti da je statički tlak prvog volumena jednak statičkom tlaku u uzvodnom spremniku, izjednačiti se moraju dinamički tlakovi spremnika i prvog volumena zato što se energija tlaka u spremniku "troši" na ubrzavanje fluida<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} p_{\text{din, spremnik}} &= p_{\text{din, ulaz}} \\ p_{\text{spremnik}} + \frac{u_{\text{spremnik}}^2}{2} &= p_{\text{ulaz}} + \frac{u_{\text{ulaz}}^2}{2} \\ p_{\text{spremnik}} &= p_{\text{ulaz}} + \frac{u_{\text{ulaz}}^2}{2} \\ u_{\text{ulaz}} &= \sqrt{\frac{p_{\text{spremnik}} - p_{\text{ulaz}}}{2}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Jasno se vidi da su tlak na ulazu u domenu i brzina u istoj točki međuovisni. Inicijalna ekspanzija smatra se izentropskom, miješanje na izlazu promatra se kao nepovrativi gubitak. Gornja jednadžba ima očit numerički problem: Pretpostavka polja tlaka s

<sup>4</sup>Ista veličina koristi se pri analizi DWO, vidi poglavlje 3.2.1..

<sup>5</sup>Taj efekt spomenut je kao mogući uzrok nestabilnosti u poglavlju 3.2.1..



Slika 4.1: Shematski prikaz dvaju pristupa korištenih za rješavanje spregnutih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

vrijednosti tlaka na ulaznom licu većom od vrijednosti tlaka u visokotlačnom spremniku prekinuti će računalni program. Utjecaj tog problema će se umanjiti eksplicitnom podrelaksacijom polja tlaka (vidi poglavlje 4.9.2.).

## 4.6. Metode rješavanja sustava spregnutih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

Mazumder [27] predlaže dva načina rješavanja skupa spregnutih diferencijalnih jednačbi - odvojeni (*segregated*) i spregnuti (*coupled*). Oba pristupa imaju svoje prednosti i mane, ali odabire se odvojeni ponajviše zato što je lakši za programirati i lako se dodaju dodatne jednačbe. Time je omogućeno da se sustav programira i provjerava tako da se uzme najviše pretpostavki (najmanje jednačbi) pa se postepeno smanjuje broj pretpostavki (povećava broj jednačbi). Neiskusnim programerima - skupini kojoj pripada autor ovog rada, takav je pristup puno pristupačniji jer se greške u programiranju i diskretizaciji jednačbi mogu primijetiti u ranijoj fazi razvoja te je lakše ispraviti iste.

Jedna unutarnja iteracija daje rezultat polja jedne od veličina. Kod implementiranog sustava algoritam odvojenog rješavača slijedi sljedeće upute:

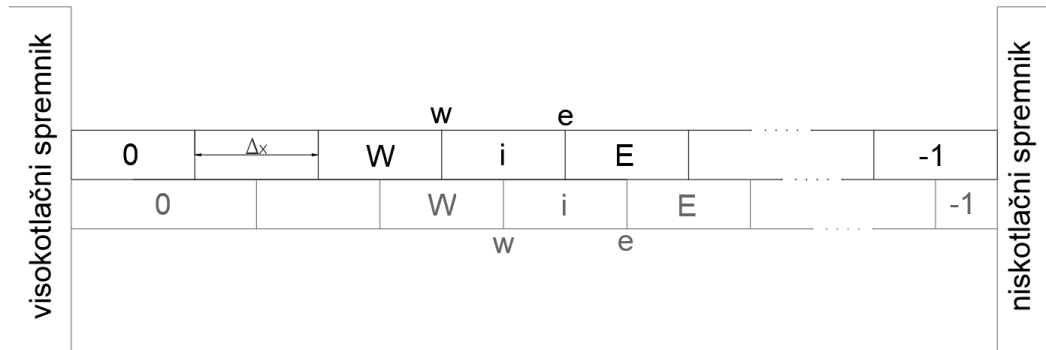
- Riješi polje tlaka,
- riješi brzinu, entalpiju i gustoću na ulaznom licu,
- riješi polje brzine,
- riješi polje entalpije,
- riješi polje gustoće,
- riješi polje temperature,
- riješi koeficijent prijelaza topline,
- riješi polje temperature stijenke i
- riješi specifični toplinski tok.

Odvojenim rješavačima preporučuje se ponavljanje unutarnjih iteracija dok rezidual ne postigne vrijednost reda veličine  $10^{-3}$  [27], kod implementiranog sustava nema unutarnjih iteracije zato što se pojedino polje rješava Thomasovim algoritmom koji rješava sustav na računalnu točnost u dva prolaza (vidi poglavlje 4.11.). Tako implementirani rješavač ima samo vanjsku (Picardovu) iteraciju unutar koje se Thomasov algoritam poziva onoliko puta koliki je broj nepoznatih polja (brzine, tlaka, entalpije i temperature stijenke) te se unutar te iteracije zapisuju polja posredno izračunatih veličina (temperature, gustoće i specifičnog toplinskog toka), što nas dovodi do sljedeće prednosti implementacije odvojenog rješavača - problem nelinearnosti.

Spregnuti rješavači koji rješavaju nelinearni sustav moraju svakom iteracijom ponovno računati članove sustava, dok odvojeni pristup mijenja članove svakom iteracijom bez obzira na nelinearnost sustava, pa nema razlike u programiranju odvojenog rješavača za linearne i nelinearne sustave.

Usprkos svim navedenim prednostima odvojenog tipa rješavača, spregnuti je češće korišten u komercijalnim programima zbog superiorne konvergencije [27]. Naravno opisane metode nisu jedine koje se koriste za rješavanje skupova parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, metodologija rješavanja uvelike ovisi o prirodi problema.





Slika 4.2: Nepomaknuta mreža (gore) i pomaknuta (dolje)

## 4.7. Diskretizacija jednadžbi nezavisnih veličina

Zbog stabilnosti numeričkog postupka i elegancije izvođenja diskretiziranih sustava, diskretizacija se provela na dvije mreže: nepomaknutoj mreži na kojoj se zapisuju tlak, entalpija i temperatura stijenke; te na pomaknutoj, gdje se zapisuje brzina. Mreža je pomaknuta u smjeru strujanja za pola duljine volumena kako preporučuje Virag [26]. Notacija će se provesti u skladu s Python programskim jezikom u kojem je rješavač napisan: tako je prvi element vektora označen s 0, drugi s 1, predzadnji s  $-2$  te zadnji s  $-1$ .

### 4.7.1. Diskretizacija jednadžbi brzine i tlaka

Integriramo jednadžbu 4.3 od lica  $w$  do lica  $e$  nepomaknute mreže. Središtu  $i$ -tog volumena pomaknute mreže odgovara lice  $e$   $i$ -tog volumena nepomaknute mreže. *Upwind* shemom diskretizacije gustoća u toj točki (koja se zapisuje na nepomaknutoj mreži) odgovara gustoći  $i$ -tog volumena.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_w^e \rho dx + \int_w^e \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx &= 0 \\
 \frac{\Delta x}{\Delta t} (\rho_i - \rho_i^{n-1}) + \rho_e u_e - \rho_w u_w &= 0 \\
 \rho_e u_e - \rho_w u_w &= -\frac{\Delta x}{\Delta t} (\rho_i - \rho_i^{n-1})
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

### Izvod jedandžbi za unutarnju ćeliju

Primjenom pretpostavki metode konačnih volumena na jednadžbu 4.4 integriranoj po volumenu  $i$  pomaknute mreže računamo polje brzina:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho_e + \rho_e u_e \right) \cdot u_e - \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho_w + \rho_w u_w \right) \cdot u_w = - \frac{dp}{dx} \Big|_{f,i} \Delta x - \rho_i g \sin \beta \Delta x - (p_e - p_w) \\ & \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[i+1] + \rho[i+1]u[i] \right) \cdot u[i] - \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[i] + \rho[i]u[i-1] \right) \cdot u[i-1] = \\ & - \frac{dp}{dx} \Big|_f [i] \Delta x - \rho[i] g \sin \beta \Delta x - (p[i+1] - p[i]) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Iz gornje jednadžbe eksplicitno se izrazi brzina  $u[i]$ . Cilj ovakvog izražavanja brzine u ćeliji  $i$  je naknadna supstitucija u jednadžbu očuvanja mase kako bi se dobila diskretizirana jednadžba tlaka koja bi imala onakav oblik kakvog bi dobili diskretizacijom eliptičnog člana.

$$u[i] = \frac{\left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[i] + \rho[i]u[i-1] \right) \cdot u[i-1] - \frac{dp}{dx} \Big|_f [i] \Delta x - \rho[i] g \sin \beta \Delta x - (p[i+1] - p[i])}{\frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[i+1] + \rho[i+1]u[i]} \quad (4.13)$$

Taj način je izabran jer se polje tlaka propagira trenutno po domeni<sup>6</sup> a takve pojave opisuju se eliptičnim članovima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (članovi s drugim prostornim gradijentom). Ovakav postupak napravljen je po uzoru na SIMPLE algoritam, a sličan postupak primijenjen u jednodimenzionalnom dvofaznom strujanju navodi i Siikonen [25]. Zato se gornja jednadžba svodi i na prethodnu ćeliju pomaknute mreže, tj. drugu ćeliju koja dijeli pola svoje domene s pripadajućim volumenaom nepomaknute mreže.

$$u[i-1] = \frac{\left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[i-1] + \rho[i-1]u[i-2] \right) \cdot u[i-2] - T - G - (p[i] - p[i-1])}{\frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[i] + \rho[i]u[i-1]} \quad (4.14)$$

Gdje su:

$$\begin{aligned} T &= \frac{dp}{dx} \Big|_f [i-1] \Delta x \\ G &= \rho[i-1] g \sin \beta \Delta x \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Tlačni poremećaj se u realnim sustavima propagira brzinom zvuka, ali taj se efekt zanemaruje u ovoj simulaciji. Jasno je da ova simulacija neće lučiti nestabilnosti uzrokovane širenjem tlačnog poremećaja.

Jednadžba 4.14 ista je kao 4.13 s indeksima umanjanim za 1.

Supstitucijom članova po shemi prikazanoj na slici 4.2 izvede se jednadžba očuvanja mase na unutarnjoj ćeliji nepomaknute mreže:

$$\begin{aligned}\rho_e u_e - \rho_w u_w &= -\frac{\Delta x}{\Delta t}(\rho_i - \rho_i^{n-1}) \\ \rho[i]u[i] - \rho[i-1]u[i-1] &= -\frac{\Delta x}{\Delta t}(\rho[i] - \rho^{n-1}[i])\end{aligned}\quad (4.15)$$

u tu jednadžbu će se uvrstiti jednadžbe 4.13 i 4.14 te će se dobivena jednadžba urediti na oblik dan jednadžbom 4.47 da bi se dobila jednadžba polja tlaka unutarnje ćelije.

$$\begin{aligned}& \left( -\frac{\rho[i-1]}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[i] + \rho[i]u[i-1]} \right) p[i-1] \\ & + \left( \frac{\rho[i-1]}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[i] + \rho[i]u[i-1]} + \frac{\rho[i]}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[i+1] + \rho[i+1]u[i]} \right) p[i] \\ & + \left( -\frac{\rho[i]}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[i+1] + \rho[i+1]u[i]} \right) p[i+1] \\ & = -\frac{\Delta x}{\Delta t}(\rho[i] - \rho^{n-1}[i]) \\ & + \frac{(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[i-1] + \rho[i-1]u[i-2]) \cdot u[i-2] - \frac{dp}{dx}\Big|_f [i-1]\Delta x - \rho[i-1]g \sin \beta \Delta x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[i] + \rho[i]u[i-1]} \rho[i-1] \\ & - \frac{(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[i] + \rho[i]u[i-1]) \cdot u[i-1] - \frac{dp}{dx}\Big|_f [i]\Delta x - \rho[i]g \sin \beta \Delta x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[i+1] + \rho[i+1]u[i]} \rho[i]\end{aligned}\quad (4.16)$$

### Izvod jednadžbi brzine i tlaka na ustrojnoj ćeliji

Isti postupak mora se ponoviti na ustrojnoj ćeliji kako bi se uzeli u obzir rubni uvjeti.

$$\begin{aligned}\rho_e u_e - \rho_w u_w &= -\frac{\Delta x}{\Delta t}(\rho_i - \rho_i^{n-1}) \\ \rho[0]u[0] - \rho_{ul}u_{ul} &= -\frac{\Delta x}{\Delta t}(\rho[0] - \rho^{n-1}[0])\end{aligned}\quad (4.17)$$

Jednadžba za izračun vrijednosti brzine u ćeliji koja graniči s ustrojnim licem.

$$\left( \frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[1] + \rho[1]u[0] \right) \cdot u[0] = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t}\rho_{ul} + \rho_{ul}u_{ul} \right) \cdot u_{ul} - \frac{dp}{dx}\Big|_f [0]\Delta x - \rho[0]g \sin \beta \Delta x - (p[1] - p[0])\quad (4.18)$$

Već pojašnjeno eksplicitno izražavanje brzine po uzoru na izvod jednadžbe 4.13:

$$u[0] = \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \rho_{ul} + \rho_{ul} u_{ul}\right) \cdot u_{ul} - \frac{dp}{dx} \Big|_f [0] \Delta x - \rho[0] g \sin \beta \Delta x - (p[1] - p[0])}{\frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[1] + \rho[1] u[0]}$$

Rubni uvjet za brzinu na ustrujnom licu izvodi se iz Bernoullijeve jednadžbe. Energija koja je pohranjena u fluidu u formi tlaka mijenja oblik kako bi fluid ubrzao iz mirujućeg stanja do brzine na ustrujnom licu.

$$u_{ul} = \sqrt{\frac{2(p_{vs} - p[0])}{\rho_{ul}}} \quad (4.19)$$

Gdje  $p_{vs}$  označava tlak visokotlačnog spremnika.

Izraz  $\sqrt{\frac{2(p_{vs} - p[0])}{\rho_{ul}}}$  očigledno treba linearizirati. Traži se funkcija koja opisuje ponašanje promatranog člana jednadžbom pravca. Implementira se Taylorov razvoj prvog reda razvijen oko pretpostavljene vrijednosti  $p[0]$ .

$$u_{ul} = \sqrt{\frac{2(p_{vs} - p[0])}{\rho_{ul}}} \quad (4.20)$$

$$u_{ul} = u_{ul}(p) + \frac{du_{ul}}{dp} \cdot (p - p[0]) \quad (4.21)$$

Izrazi se algebarski indentitet koji odgovara derivaciji jednadžbe 4.20, pa nastavimo s linearizacijom:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{a(b-x)} = \frac{-a}{2\sqrt{a(b-x)}} \quad (4.22)$$

$$\frac{du_{ul}}{dp} = \frac{-\frac{2}{\rho_{ul}}}{2\sqrt{\frac{2(p_{vs} - p[0])}{\rho_{ul}}}} = \frac{-1}{\sqrt{2\rho_{ul}(p_{vs} - p[0])}}$$

$$u_{ul} = \sqrt{\frac{2(p_{vs} - p[0])}{\rho_{ul}}} + \frac{-1}{\sqrt{2\rho_{ul}(p_{vs} - p[0])}} \cdot (p[0] - p[0]) \quad (4.23)$$

Jednadžbu napišemo u kompaktnijem obliku kako bi daljnja manipulacija bila preglednija:

$$\begin{aligned} u_{ul} &= \sqrt{\frac{2(p_{vs} - p[0])}{\rho_{ul}}} + \frac{p[0]}{\sqrt{2\rho_{ul}(p_{vs} - p[0])}} - \frac{1}{\sqrt{2\rho_{ul}(p_{vs} - p[0])}} \cdot p[0] \\ &= U_0 + U_1 \cdot p[0] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sada se brzine uvrštavaju u jednadžbu kontinuiteta i supstituiraju se članovi  $U_0$  i  $U_1$  čime se dobija jednadžba koja definira članove matričnog sustava jednadžbe tlaka s rubnim uvjetom na ulazu:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\rho[0]}{\frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[1] + \rho[1]u[0]} + \frac{\rho_{ul}}{\sqrt{2\rho_{ul}(p_{vs} - p[0])}} \right) p[0] \\
& + \left( -\frac{\rho[0]}{\frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[1] + \rho[1]u[0]} \right) p[1] \\
& = \frac{\Delta x}{\Delta t} (\rho[0] - \rho^{n-1}[0]) \\
& + \sqrt{2\rho_{ul}(p_{vs} - p[0])} \\
& + \frac{p[0]\sqrt{\rho_{ul}}}{\sqrt{2(p_{vs} - p[0])}} \\
& - \frac{\left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho_{ul} + \rho_{ul}u_{ul} \right) \cdot u_{ul} - \frac{dp}{dx} \Big|_f [0] \Delta x - \rho[0]g \sin \beta \Delta x}{\frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[1] + \rho[1]u[0]} \rho[0]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Svi članovi desne strane i koeficijenta uz nepoznanicu biti će supstituirani kao poznate veličine zadnje iteracije.

### Isti postupak na istrujnoj ćeliji

Na slici 4.2 da se primjetiti kraća duljina posljednjeg volumena pomaknute mreže, zato će izvodi algebarskih jednadžbi posljednjeg i predposljednjeg volumena pomaknute mreže (volumenâ koji graniče s posljednjim volumenom nepomaknute).

$$\rho[-1]u[-1] - \rho[-2]u[-2] = -\frac{\Delta x}{\Delta t} (\rho[-1] - \rho^{n-1}[-1]) \tag{4.26}$$

Zakon očuvanja količine gibanja na posljednjem volumenu pomaknute mreže sa zadanim tlakom na istrujnom licu<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[-1] + \rho[-1]u[-1] \right) \cdot u[-1] - \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho[-1] + \rho[-1]u[-2] \right) \cdot u[-2] \\
& = -\frac{dp}{dx} \Big|_f [-1] \Delta x - \rho[-1]g \sin \beta \Delta x - (p_{iz} - p[-1])
\end{aligned} \tag{4.27}$$

<sup>7</sup>Iako govorimo o zadanoj vrijednosti veličine na granici ne smije se spominjati Dirichletov rubni uvjet jer jednadžba 4.26 računa brzine, a rubni uvjet je postavljen na vrijednost tlaka, brzina na istrujnom licu je varijabilna.

Brzina posljednjeg volumena  $u[-1]$  se izrazi eksplicitno:

$$u[-1] = \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]\right) \cdot u[-2] - \frac{dp}{dx}\Big|_f[-1]\Delta x - \rho[-1]g \sin \beta\Delta x - (p_{iz} - p[-1])}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-1]}$$

Zakon očuvanja količine gibanja na predposljednjem volumenu pomaknute mreže:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]\right) \cdot u[-2] - \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-2] + \rho[-2]u[-3]\right) \cdot u[-3] \\ & = -\frac{dp}{dx}\Big|_f[-2]\Delta x - \rho[-2]g \sin \beta\Delta x - (p[-1] - p[-2]) \end{aligned}$$

Brzina predposljednjeg volumena pomaknute mreže  $u[-2]$  izražen eksplicitno:

$$u[-2] = \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-2] + \rho[-2]u[-3]\right) \cdot u[-3] - \frac{dp}{dx}\Big|_f[-2]\Delta x - \rho[-2]g \sin \beta\Delta x - (p[-1] - p[-2])}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]}$$

Eksplicitni izrazi za brzine se uvrste u jednadžbu očuvanja mase:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]\right) \cdot u[-2] - \frac{dp}{dx}\Big|_f[-1]\Delta x - \rho[-1]g \sin \beta\Delta x - (p_{iz} - p[-1])}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-1]} \rho[-1] \\ & - \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-2] + \rho[-2]u[-3]\right) \cdot u[-3] - \frac{dp}{dx}\Big|_f[-2]\Delta x - \rho[-2]g \sin \beta\Delta x - (p[-1] - p[-2])}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]} \rho[-2] \\ & = -\frac{\Delta x}{\Delta t}(\rho[-1] - \rho^{n-1}[-1]) \end{aligned}$$

Nakon manje algebarske mozgalice dobije se algebarska jednadžba za izračun tlaka u posljednje dvije ćelije:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\rho[-2]}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]}\right) p[-2] \\ & + \left(\frac{\rho[-2]}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]} + \frac{\rho[-1]}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-1]}\right) p[-1] \\ & = \frac{\rho[-1]}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-1]} p_{iz} \\ & \quad - \frac{\Delta x}{\Delta t}(\rho[-1] - \rho^{n-1}[-1]) \tag{4.28} \\ & + \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-2] + \rho[-2]u[-3]\right) \cdot u[-3] - \frac{dp}{dx}\Big|_f[-2]\Delta x - \rho[-2]g \sin \beta\Delta x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]} \rho[-2] \\ & - \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-2]\right) \cdot u[-2] - \frac{dp}{dx}\Big|_f[-1]\Delta x - \rho[-1]g \sin \beta\Delta x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}\rho[-1] + \rho[-1]u[-1]} \rho[-1] \end{aligned}$$

Dobivenom jednadžbom završava najteži dio izvoda sustava algebarskih jednadžbi, gdje se posebna pažnja trebala posvetiti pravilnoj supstituciji. Sljedeće jednadžbe ne zahtijevaju supstituciju.

#### 4.7.2. Diskretizacija jednadžbe za izračun entalpije

Diskretizacijom jednadžbe 4.5 dobije na nepomaknutoj mreži dobije se:

$$-\rho_w u_w h_w + \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho_i h_e + \rho_e u_e h_e = P + Q - M + T - \rho_e \frac{u_e^3}{2} + \rho_w \frac{u_w^3}{2} - G \quad (4.29)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} P &= (p_i - p_i^{n-1}) \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ Q &= \frac{A_w}{A_u} q_w \\ M &= \rho_i \frac{u_i^2}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ T &= \rho_i \left( h_i + \frac{u_i^2}{2} \right) \Big|^{n-1} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ G &= \rho_i u_i g \Delta x \end{aligned}$$

*Upwind* shemom diskretizacije supstituiraaju se vrijednosti u središtima volumena te se dobiju sljedeće jednadžbe iz kojih se daju iščitati elementi matičnog sustava algebarskih jednadžbi.

$$\begin{aligned} (-\rho_{i-1} u_{i-1}) h_{i-1} + \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho_i + \rho_i u_i \right) h_i &= P + Q - M + T - \rho_i \frac{u_i^3}{2} + \rho_{i-1} \frac{u_{i-1}^3}{2} - G \\ \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho_0 + \rho_0 u_0 \right) h_0 &= P + Q - M + T - \rho_0 \frac{u_0^3}{2} + \rho_{ul} \frac{u_{ul}^3}{2} + \rho_{ul} u_{ul} h_{ul} - G \\ (-\rho_{-2} u_{-2}) h_{-2} + \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \rho_{-1} + \rho_{-1} u_{-1} \right) h_{-1} &= P + Q - M + T - \rho_{-1} \frac{u_{-1}^3}{2} + \rho_{-2} \frac{u_{-2}^3}{2} - G \end{aligned} \quad (4.30)$$

Kako gornji sustav predstavlja običnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda, dovoljan je jedan rubni uvjet, taj se uvjet očituje u desnoj strani jednadžbe postavljene na ustrujni volumen gdje se pojavljuje član  $h_{ul}$ , a izračunava se na sljedeći način:

$$h_{ul} = h_{vs} - \frac{u_{ul}^2}{2}$$

Gornja jednadžba opisuje povrativu ekspanziju mirujućeg fluida, dio unutrašnje energije mijenja oblik u kinetičku. Valja primijetiti da je specifična entalpija puno većeg reda veličine te bi se specifična entalpija ustrojnog lica mogla aproksimirati s  $h_{ul} = h_{vs}$  bez unošenja značajne pogreške.

### 4.7.3. Diskretizacija jednadžbe za izračun temperature stijenke

Počnimo s raspisivanjem izvorišnjeg člana u jednadžbi 4.6:

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} + \frac{\phi_V}{\rho c}$$

$$\int_e^w \frac{\partial \theta_s}{\partial t} dx = \frac{\lambda}{\rho c} \int_e^w \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial x^2} dx + \int_e^w \frac{\phi_V}{\rho c} dx$$

Sada implementiramo pretpostavke 4.1 i 4.2:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} (\theta_{s,i} - \theta_{s,i}^{n-1}) = \frac{\lambda}{\rho c} \left( \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right|_e - \left. \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right|_w \right) + \frac{\Phi_V}{\rho c}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} (\theta_{s,i} - \theta_{s,i}^{n-1}) = \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{\theta_{s,E} - \theta_{s,i}}{\Delta x} - \frac{\theta_{s,i} - \theta_{s,W}}{\Delta x} \right)$$

$$+ \frac{1}{\rho c} [A_v \alpha_v \cdot (\theta_{dp} - \theta_s) - A_u \alpha_u \cdot (\theta_s - \theta_f)]$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} (\theta_{s,i} - \theta_{s,i}^{n-1}) = \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{\theta_{s,E} - 2\theta_{s,i} + \theta_{s,W}}{\Delta x} \right)$$

$$+ \frac{1}{\rho c} [A_v \alpha_v \cdot (\theta_{dp} - \theta_s) - A_u \alpha_u \cdot (\theta_s - \theta_f)]$$

Nakon kraće algebarske manipulacije i pretpostavke adijabatskih rubnih uvjeta na spojevima stijenke sa spremnicima dobije se jednadžba iz koje se mogu očitati članovi matičnog sustava središnjeg, ustrojnog i istrojnog volumena:

$$(-K_c) \theta_{i-1} + \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} + 2K_c + P_v + P_u \right) \theta_i + (-K_c) \theta_{i+1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \theta_i^{n-1} + P_v \theta_{dp} + P_u \theta_f \quad (4.31)$$

$$\left( \frac{\Delta x}{\Delta t} + K_c + P_v + P_u \right) \theta_0 + (-K_c) \theta_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \theta_1^{n-1} + P_v \theta_{dp} + P_u \theta_f \quad (4.32)$$

$$(K_c) \theta_{-2} + \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} - K_c + P_v + P_u \right) \theta_{-1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \theta_{-1}^{n-1} + P_v \theta_{dp} + P_u \theta_f \quad (4.33)$$



gdje su:

$$K_c = \frac{\lambda_c}{\rho_c c_c \Delta x}$$

$$P_v = \frac{4D_v \alpha_v}{\rho_c c_c (D_v^2 - D_u^2)}$$

$$P_u = \frac{4D_u \alpha_u}{\rho_c c_c (D_v^2 - D_u^2)}$$

Implementacija ove jednadžbe u programu dana je u Dodatku [A.2.](#).

## 4.8. Eksperimentalne relacije

Kako bi se što vjernije opisala fizika sustava potrebno je koristiti izvedene eksperimentalne izraze i svojstva dvofazne mješavine. Ove funkcije najveći su izvori nelinearnosti, pa je njihova programska implementacija bitna za stabilnost numeričkog rješavača.

### 4.8.1. Pad tlaka zbog utjecanja trenja

Ruspini [3] pad tlaka računa po Müller-Steinhagen i Heck korelacijama iz Thomeove *Engineering Data Book III* [1], pa će s u ovoj analizi napraviti isto. Tribbe i Müller-Steinhagen (2000) su pokazali da ovaj izraz najbolje opisuje mjerene vrijednosti za različita dvofazna strujanja među kojima je istraženo više rashladnih tvari. Korelacija je u suštini empirijska interpolacija između pada tlaka strujanja masenog protoka čiste kapljevine i čiste pare. Spomenuti izraz dan je jednadžbom [4.34](#).

$$\left. \frac{dp}{dz} \right|_{fric} = G(1-x)^{1/3} + Bx^3 \quad (4.34)$$

$$G = A + 2(B - A)x$$

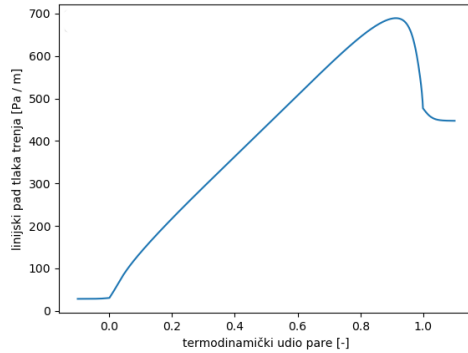
$$A = \left. \frac{dp}{dz} \right|_L$$

$$B = \left. \frac{dp}{dz} \right|_G$$

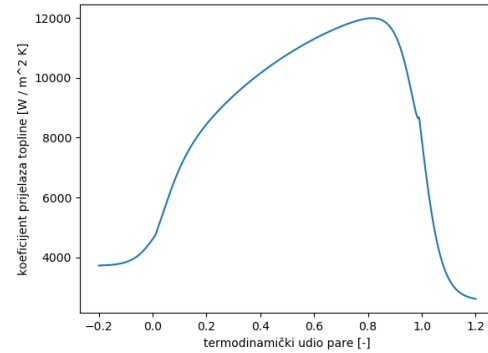
Za izračun pada tlaka zbog trenja pojedine faze koristi se izraz Swamee-Jain preuzet iz Ruševljanove skripte [28]:

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log_{10} \left( \frac{\epsilon}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (4.35)$$

Kako se funkcija [4.34](#) ponaša pri isparavanju prikazano je na slici [4.3 a](#)).



a) Gradient tlaka zbog trenja.



b) Koeficijent prijelaza topline.

Slika 4.3: Prikaz eksperimentalnih veličina u ovisnosti o termodinamičkom udjelu pare.

#### 4.8.2. Koeficijent prijelaza topline

Kao eksperimentalni izraz za koeficijent prijelaza topline unutar stijenske koristila se Gungor-Wintertonova korelacija (1987.). Izraz je odabran zato što je funkcija kontinuirana pri  $x = 0$ <sup>8</sup> te ne sadrži računalno skupe `if` naredbe. Osim toga, među najtočnijim je izrazima navedenim u *Wolverine Engineering Data Book III* [1].

Izraz uspoređuje koeficijent prijelaza topline dvofaznog strujanja  $\alpha_{tp}$  i koeficijent toplinskog toka koji bi se mogao mjeriti ili računati pri jednakom masenom protoku čistog fluida  $\alpha_L$ , taj odnos  $E_{new}$  računa se prema jednadžbi 4.36.

$$E_{new} = 1 + 3000Bo^{0.86} + 1.12 \left( \frac{x}{1-x} \right)^{0.75} \left( \frac{\rho_l}{\rho_g} \right)^{0.41} \quad (4.36)$$

Gdje bezdimenzijska veličina  $Bo$  predstavlja faktor isparavanja (*boiling number*) i sam je funkcija toplinskog toka:

$$Bo = \frac{q}{\rho u h_{lg}}$$

Često se uz bezdimenzijske veličine piše što one fizikalno predstavljaju, faktor isparavanja odnos je masi dovedene topline i topline potrebne za isparavanje te mase. Pri analitičkim proračunima očigledna je potrebna iterativnog postupka jer  $\alpha_{tp}$  ovisi o  $Bo$ , koji ovisi o  $q$  koji opet ovisi o  $\alpha_{tp}$ . U sustavu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi ovakav međuodnos samo je još jedan izvor nelinearnosti gdje će se pretpostavka tretirati kao

<sup>8</sup>Ovaj uvjet je manje bitan jer bi se diskontinuiteti ionako izgledili sigmoidalnom funkcijom (vidi poglavlje 4.9.3.).

poznаницa na eksplicitnoj, desnoj strani jednadžbe. Pedantnije oko uočiti će singularitet u jednadžbi 4.36 (funkcija  $E_{new}$  teži u pozitivnu beskonačnost kod stanja suhozasićene pare). Takva funkcija je nefizikalna te bi izazvala numeričke probleme pa se problem riješio limitiranjem maksimalnog udjela pare na  $x_{max} = 0.999^9$ .

Koeficijent prijelaza topline kapljevite faze  $\alpha_L$  se prema preporuci istog izvora [1] računa prema izrazu Petukhova<sup>10</sup> :

$$Nu_L = \frac{f}{8} \cdot \frac{RePr}{1.07 + 12.7 \sqrt{\left(\frac{f}{8}\right)} (Pr^{2/3} - 1)}$$

Gdje je faktor trenja  $f$  kapljevine izračunat pomoću već spominjanog izraza 4.35.

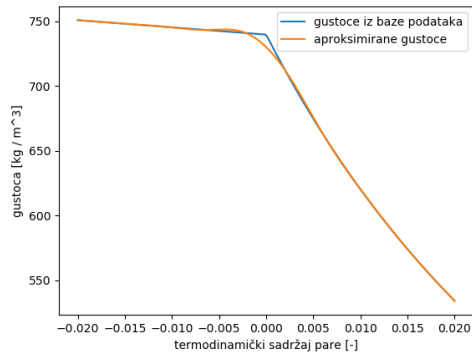
### 4.8.3. Svojstva fluida

Tlak i entalpija fluida računaju se prema postupku navedenom u poglavlju 4.6.. Korištenjem poznatog tlaka i entalpije računaju se dvije zavisne veličine - gustoća i temperatura. Korištenjem CoolProp baze podataka ispunjava se matrica zavisne veličine u ovisnosti o  $p$  i  $h$  u rasponima  $p \in [p_{min}, p_{max}]$  i  $h \in [h_{min}, h_{max}]$ . Pri računanju zavisnih veličina povlače se rezultati iz snimljenih matrica te se interpoliraju. Bonilla i dr. [29] interpoliraju vrijednosti Hermite spline interpolacijom dok `scipy.interpolate.RectBivariateSpline`, interpolacijski program korišten u ovom radu, koristi običnu spline interpolaciju. Takva metodologija odabrana je kako bi se izgladili diskontinuiteti prvih derivacija svojstava pri pojavi isparavanja, osim toga, primijetio se brži proračun ovakvom metodom od izravnog povlačenja svojstava iz CoolProp Python modula<sup>11</sup>. Spomenuti rasponi tlaka i entalpije moraju obuhvatiti cijelu domenu proračuna jer korišteni interpolacijski program linearno ekstrapolira vrijednosti van domene što znači da su svi rezultati van odabranog pravokutnika u  $p-h$  dijagramu netočni. Valja pripaziti na veličinu odabrane matrice, jer bi pregusto uzorkovanje uzrokovalo visokofrekventne oscilacije pri pokušaju opisivanja nederivabilne točke  $x = 0$  (i usporilo bi simulaciju zbog pretraživanja veće memorije), a prerijetko uzorkovanje ne bi opisivalo

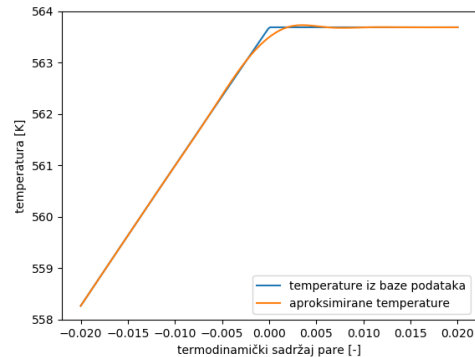
<sup>9</sup>Funkcija i dalje poprima visoke vrijednosti na desnom rubu svoje domene, pa se na slici 4.3 b) može primijetiti "neobično" ponašanje funkcije u toj točki. Srećom, simulacija nikad ne simulira stanje s tom vrijednosti koordinate, pa ne treba voditi računa o unošenju greške u rezultat.

<sup>10</sup>Često se za ovu primjenu koristi izraz Dittus-Boeltera ( $Nu = 0.023 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.4}$ ), koji je jednostavniji, ali odabran je izraz Petukhova jer je valjan za veći raspon visokih Reynoldsovih brojeva.

<sup>11</sup>Subjektivna primjedba autora. Razlika u brzini nije mjerena.



a) Usporedba očitanih gustoća



b) Usporedba očitanih temperatura

Slika 4.4: Usporedba spline interpoliranih vrijednosti zavisnih veličina s istim vrijednostima očitanim iz baze podataka.

funkciju precizno. Na slici 4.4 valja primijetiti derivabilnost spline funkcija. Domena obaju dijagrama je  $\pm 2\%$  udjela parne faze kako bi se prikazalo najveće odstupanje koje nastaje pri pojavi parne faze, odstupanja na ostalim točkama su zanemariva.

## 4.9. Nelinearnosti i stabilnost

Numeričko rješavanje iznimno nelinearnih problema zahtijeva različite načine suočavanja s problemom jer problem nelinearnosti nema univerzalan postupak rješavanja. Problem se mora sagledati s numeričke i s fizikalne strane kako bi se utjecaj nelinearnosti minimizirao i kako bi se izbjegla divergencija rješenja. Usprkos tome, sustav je često divergirao, pa se implementirao proces zapisivanja rezultata u zaseban direktorij nakon svakog proračunatog vremenskog koraka po uzoru na `OpenFOAM`. Na taj se način simulacija mogla ponovno pokrenuti iz zadnjeg stabilnog vremenskog koraka poslije stabilizirajućih zahvata kao što su smanjenje vremenskog koraka i faktora podrelaksacije. Osim toga, zapisivanje svakog vremenskog koraka dobra je praksa kod dugotrajnih simulacija kao što je rad računala preko noći bez straha da će rezultati biti izgubljeni u slučaju divergencije ili inih greški.

Stablo direktorija prikazano je u Prilogu .

### 4.9.1. *Upwind* diskretizacija

*Upwind* diskretizacija je metoda diskretizacije izračuna vrijednosti na licima, iako je metoda diskretizacije prvog reda točnosti, pokazala se iznimno stabilna za konvektivno dominantne probleme. Diskretizirano svojstvo na licu poprima vrijednost ćelije iz koje fluid struji prema licu, matematički se ta logika zapisuje, a često i programira na sljedeći način:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_O, & \text{za } (\rho u)_e \geq 0 \\ \phi_E, & \text{za } (\rho u)_e < 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Vidi se da *upwind* diskretizacija zahtijeva `if` provjere, koje su računalno skupe, pa se koristila preporuka Mazumdera [27] da se implementira algebarska funkcija koja vraća isti rezultat:

$$(\rho u)_e \phi_e = \frac{|(\rho u)_e| + (\rho u)_e}{2} \phi_O - \frac{|(\rho u)_e| - (\rho u)_e}{2} \phi_E \quad (4.38)$$

### 4.9.2. Podrelaksacija

Numeričko rješavanje sustava jednadžbi obavlja se procesom prikazanim na slici 4.1. Stabilan sustav će konvergirati - svakom sljedećom iteracijom sustav će biti bliži rješenju), a nestabilan će divergirati - svaka sljedeća iteracija udaljit će sustav od rješenja. Pri divergenciji računalni program će "puknuti": pojavit će se negativan broj pod korijenom ili u logaritmu, baza podataka fizikalnih svojstava vratiti će rješenje koje nije broj kad se kao ulaz u funkciju unese nerealno visoka vrijednost ili negativne vrijednosti apsolutnih tlakova i temperatura itd.

Sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje jednodimenzionalno dvofazno strujanje je *krut*. Sustav je krut kad postoje veličine kojima su vremenske konstante promjena različite (velike za temperaturu, male za tlak), takav sustav često divergira pri rješavanju određenim numeričkim metodama čak i kada su vremenske derivacije veličina malene. Stabilnost krutih sustava postiže se pravilnom diskretizacijom, smanjenjem vremenskog koraka i primjenom podrelaksacije: umjetnim održavanjem rješenja iteracije blizu pretpostavke tako da se uzme samo dio izračunatog rješenja (eksplicitna), ili povećanjem dijagonalne dominantnosti matrice (implicitna). Jer podrelaksacija smanjuje brzinu konvergencije (potrebno je više iteracija do rješenja) treba je koristiti samo kada je potrebno i ako se koristi neka se koriste najveće moguće vrijednosti. Samo će se spomenuti

moćnost lažne konvergencije pri suviše niskim vrijednostima eksplicitne podrelaksacije.

### Eksplicitna podrelaksacija

Kao što je već spomenuto, podrelaksacija održava rješenje pojedine iteracije blizu pretpostavke, eksplicitna podrelaksacija to radi na očigledan način - eksplicitno. Kad se riješi diferencijalna jednačba u sljedeću Picardovu iteraciju uzima se algebarska sredina rješenja i pretpostavke.

$$\phi = (1 - \alpha_e) \cdot \phi_{\text{pretpostavljeno}} + \alpha_e \cdot \phi_{\text{izracunato}} \quad (4.39)$$

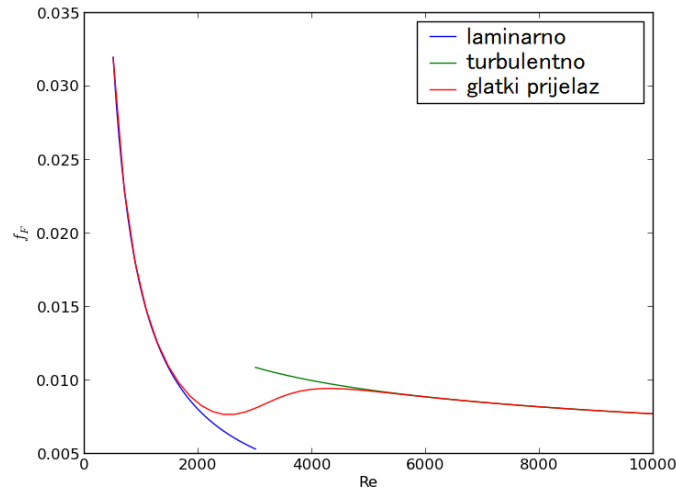
Što je faktor podrelaksacije  $\alpha$  bliži nuli, kao rješenje iteracije uzima se izračunato polje bliže pretpostavljenom, to čini iterativni postupak stabilnijim, ali konvergenciju sporijom jer je promjena rješenja manja sa svakom iteracijom. Sljedeći ekstrem bio bi uzeti podrelaksacijski faktor jednak jedinici<sup>12</sup>, takav odabir jednak je ne korištenju podrelaksacije (jednačba 4.39 postaje  $\phi = \phi_{\text{izracunato}}$ ).

### Implicitna podrelaksacija

Implicitna podrelaksacija malo je sofisticiraniji način podrelaksiranja rezultata, jer se primjenjuje na samom sustavu jednačbi. Implicitnom podrelaksacijom nikad ne dobijemo rješenje udaljeno od početnog, već se divergencije spriječe prije računanja "udaljenog" rješenja tako što se poveća dijagonalna dominantnost matrice i vektor desne strane. Implicitna podrelaksacija primijenila se na jednačbi za izračun brzine 4.12 i jednačbi za izračun entalpije 4.30. Tlak i temperatura stijenske podrelaksirani su eksplicitno jer bi implicitna podrelaksacija promijenila difuzijsku prirodu koja proizlazi iz eliptičnih diferencijalnih jednačbi [30]. Sustavi generirani eliptičnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama imaju zbroj članova elemenata van dijagonale jednak negativnom dijagonalnom članu, pa se difuzija kao fizikalni fenomen najbolje opisuje takvim matričnim sustavom, implicitna podrelaksacija promijenila bi to svojstvo matrice.

Primijetilo se da jednačbu temperature stijenske nije uopće potrebno podrelaksirati zato što je već izrazito dijagonalno dominantna. Taj zaključak mogao se donijeti

<sup>12</sup>Virag [26] spominje i nadrelaksaciju, kad je faktor  $\alpha$  veći od jedinice. Koristi se za ubrzanje konvergencije stabilnih linearnih jednačbi.



Slika 4.5: Diskontinuirana funkcija koeficijenta trenja izgladena sigmoidalnom funkcijom

promatranjem fizike sustva: Očito je da će na temperaturu ćelije više utjecati suma toplinskih tokova izvana i prema fluidu nego susjedni čelični volumen. Primjena implicitne podrelaksacije na tridijagonalni sustav jednažbi prikazana je jednažbom 4.40.

$$a_i \phi_{i-1} + \frac{1}{\alpha_i} b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i + \frac{1 - \alpha_i}{\alpha_i} \cdot b_i \phi_i \quad (4.40)$$

Uspoređivanjem jednažbi da se primijetiti kako jednažba 4.40 teži u 4.47 kada  $b_i \phi_i \rightarrow b_i \phi_i$ , tj. kako rješenje konvergira.

### 4.9.3. Sigmoidalna funkcija

Svi problematični diskontinuiteti u programu riješili su se interpolacijom pomoću sigmoidalne funkcije. Sigmoidalna funkcija  $\sigma(x) = 1/(1 + e^{-x})$  je diferencijabilna pa skokoviti prijelaz postaje gladak. Kitchin [31] koristi sigmoidalnu funkciju kako bi "spojio" funkcije koeficijenta trenja na prijelazu iz laminarno u turbulentno strujanje. Njegovi rezultati prikazani su na slici 4.5.

Implementacija sigmoidalne interpolacije između funkcija  $F_1(x)$  i  $F_2(x)$  na prijelazu

$x_0$  obavi se na sljedeći način:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-(x-x_0)}{\alpha}}} \quad (4.41)$$

$$F(x) = [1 - \sigma(x)]F_1(x) + \sigma(x)F_2(x) \quad (4.42)$$

Gdje funkcija  $F \rightarrow F_1$  za  $x \ll x_0$ , a  $F \rightarrow F_2$  za  $x \gg x_0$ , veličina  $\alpha$  određuje širinu prijelaznog područja.

#### 4.9.4. Courantov uvjet i Nyquistova frekvencija

Courantov uvjet izveden je i postavlja se na sustave s eksplicitno računatim vremenskim derivacijama, ali iskustvo je pokazalo da je Courantov broj  $Co$  bitan i kod rješavača baziranim na implicitno računatim vremenskim derivacijama. Spomenuta bezdimenzijska veličina bitna je kod prostorno-vremenske diskretizacije i za jednodimenzionalni slučaj računa se kao:

$$Co = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad (4.43)$$

Courantov uvjet za eksplicitne rješavače  $Co < 1$  postavlja granicu nesmotrenom povećanju gustoće mreže. Lako je primijetiti kako smanjenjem prostornog koraka valja proporcionalno smanjenju isto učiniti vremenskom koraku kako bi Courantov broj ostao isti. Implicitni rješavači sustava linearnih jednadžbi bezuvjetno su stabilni [3], ali pri analizi nelinearnih sustava korisno je voditi računa o ovoj bezdimenzijskoj značajki. Korisnički priručnik komercijalnog rješavača Ansys Fluent [32] ima zadanu vrijednost Courantovog broja  $Co = 5$  ako je korisnik ne promijeni, ali navode da se ta varijabla može povećati do  $Co = 100$ . Također navode da Courantov broj treba održavati niskim pri početku simulacije kad su nelinearnosti najizraženije.

Iako Courant–Friedrich–Lewyjev uvjet ima matematičko uporište u izvodu metode konačnih volumena <sup>13</sup> autor ovog rada smatra vrijednim spomenuti intuitivno objašnjenje koje čini uvjet shvatljivijim i lakše pamtljivim: Čestica fluida koja se u prethodnom vremenskom koraku nalazila neposredno prije ulaza u susjedni volumen pri Courantovom broju manjem od jedinice sigurno će se u sljedećem vremenskom koraku nalaziti

<sup>13</sup>Dokaz je prvobitno izveden za metodu konačnih razlika, davno prije pojave računala, a postoji i za metodu konačnih elemenata.



u susjednoj ćeliji, zato što po definiciji 4.43 ne može preći udaljenost veću od duljine volumena; ali ista ta čestica će se, pri povećanju  $Co$ , u računatom vremenskom koraku prijeći udaljenost dužu od duljine volumena, tako će postojati cijeli skup čestica koje su "preskočile" susjedni volumen. Za  $Co > 2$  ni jedna materijalna čestica neće se u dva uzastopna trenutka nalaziti u dvije susjedne ćelije, tu nastaju nestabilnosti.

Smanjenje vremenskog koraka općenito djeluje stabilizirajuće zato što se povećava dijagonalna dominantnost matrice.

Pri dinamičkoj simulaciji nestabilnosti potrebno je voditi računa i o Nyquistovoj frekvenciji (ne miješati s Nyquistovim kriterijem stabilnosti). Kad se kontinuirane funkcije opisuju diskretiziranim uzorkom potrebno je da diskretizirani vremenski korak bude barem dva puta manji od perioda oscilacija (a poželjno je da bude još manji) kako bi diskretni uzorak pravilno opisao kontinuirane pojave.

$$\Delta t < \frac{\tau_f}{2} \quad (4.44)$$

## 4.10. Matrični prikaz sustava algebarskih jednadžbi

Moukalled [33] predlaže uobičajeni način konstruiranja matričnog sustava: Za svaku veličinu  $\phi$  koja je vektor s onoliko skalarnih članova koliko je prostornih volumena  $N_x$  treba postojati  $N_x$  nezavisnih jednadžbi da bi sustav bio definiran. Ako su jednadžbe linearne (ako nisu linearizirati će se) sustav izgleda kao prikazan:

$$\begin{aligned} a_{00}\phi_0 + a_{01}\phi_1 + \cdots + a_{0,N-1}\phi_{N-1} &= b_0 \\ a_{10}\phi_0 + a_{11}\phi_1 + \cdots + a_{1,N-1}\phi_{N-1} &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{N-1,0}\phi_0 + a_{N-1,1}\phi_1 + \cdots + a_{N-1,N-1}\phi_{N-1} &= b_{N-1} \end{aligned}$$

Sustav se zapisuje matricno na sljedeći način:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}}_{\phi} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (4.45)$$

Numeriranje volumena za jednodimenzionalni slučaj je trivijalan posao gdje će volumen s višom oznakom uvijek biti bliži izlaznoj domeni. Tako će volumen 1 graničiti s ulaznom domenom i s volumenom 2.

Kao što se vidi po indeksima nepoznanica u jednadžbama 4.12 do 4.33 u jednoj se jednadžbi pojavljuju samo članovi  $i-1$ ,  $i$  i  $i+1$  što znači da će matrica biti tridijagonalna.

## 4.11. Thomasov algoritam

Iako Mazumder [27] predlaže da unutarnja iteracija ima red točnosti 2 ili 3, takvo nas razmatranje ne zanima jer Thomasov algoritam (bivajući pojednostavljena metoda Gaussove eliminacije), rješava matricni sustav egzaktno.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{N-1} \\ 0 & & & a_N & b_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}}_{\phi} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (4.46)$$

Za rješavanje trodijagonalnog sustava Thomasovim algoritmom uopće nije potreban matricni zapis, dovoljno je da se sustav za svaki volumen može prikazati kao:

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i \quad (4.47)$$

Konvektivno dominantni jednodimenzionalni problemi diskretizirani metodama prvog reda točnosti, kakav je ovaj, mogu se tako prikazati.

Thomasov algoritam radi u 2 prolaza, u prvom se sustav  $Mx = r$  prikazuje kao  $Ux = \rho$ . Na sustavu 4.48 prvi prolaz obavljen je na prva 2 reda. Ovakva pretvorba ne može se računati vektorski već iterativno, petljom, jer svaki sljedeći redak zahtijeva rezultat prethodnog. Sljedećim prolazom po sustavu u suprotnom smjeru računa se nepoznanica  $x$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{N-1} \\ 0 & & & a_N & b_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}}_{\phi} = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (4.48)$$

Broj računskih operacija proporcionalan je s veličinom matrice, što je puno bolje uspoređujući s Gaussovom eliminacijom gdje je broj računskih operacija potrebnih za rješavanje sustava proporcionalan trećoj potenciji veličine sustava [34]. Tako će sustav sa 100 volumena zahtijevati 10000 puta više računskih operacija Gaussovom eliminacijom nego korištenjem Thomasovog algoritma<sup>14</sup>! Python kod Thomasovog algoritma dan je u prilogu A.

## 4.12. Reziduali

Kao i vektor rješenja polja, rezidual je vektor koji ima onoliko elemenata koliko je konačnih volumena. Već je spomenuto da Thomasov algoritam rješava matrični sustav egzaktno, pa nema smisla računati rezidual uobičajenim postupkom  $r = Ax - b$ , jer bi rezidual svake iteracije bio jednak nulvektoru, već se rezidual svakog polja računa relativnom razlikom vrijednosti polja dviju uzastopnih iteracija  $r = \frac{x_2 - x_1}{x_2}$ . Kriterij konvergencije rješenja postiže se uspoređivanjem željenih reziduala s reprezentativnim. Željeni rezidual odabire korisnik (reda veličine  $10^{-5}$ ), a reprezentativni se računa iz vektora reziduala polja. Postoji više načina računanja reprezentativnog reziduala, a ovdje će se spomenuti tri najkorištenija:  $L_1$ ,  $L_2$ , i  $L_\infty$  norme.

<sup>14</sup>Što ne znači 10000 puta duže vremena rješavanja zbog pametnih rješenja modernih programskih jezika kao što su paralelizacija i vektorizacija.

$L_1$  norma daje reprezentativni rezidual računanjem algebarske sredine apsolutnih vrijednosti elemenata reziduala:

$$r_{rep} = \frac{\sum_i |r_i|}{N}$$

$L_2$  norma računa reprezentativni rezidual kao dijagonalu u  $N$ -dimenzionalnom prostoru:

$$r_{rep} = \sqrt{\frac{\sum_i r_i^2}{N}}$$

$L_\infty$  norma vraća maksimum apsolutnih vrijednosti elemenata reziduala:

$$r_{rep} = \max |r_i|$$

Koristi se  $L_2$  norma reziduala jer uzima u obzir cijeli vektor, a uz to strože penalizira veća odstupanja čime se dobiva glađe i stabilnije rješenje.

## 5 Rezultati

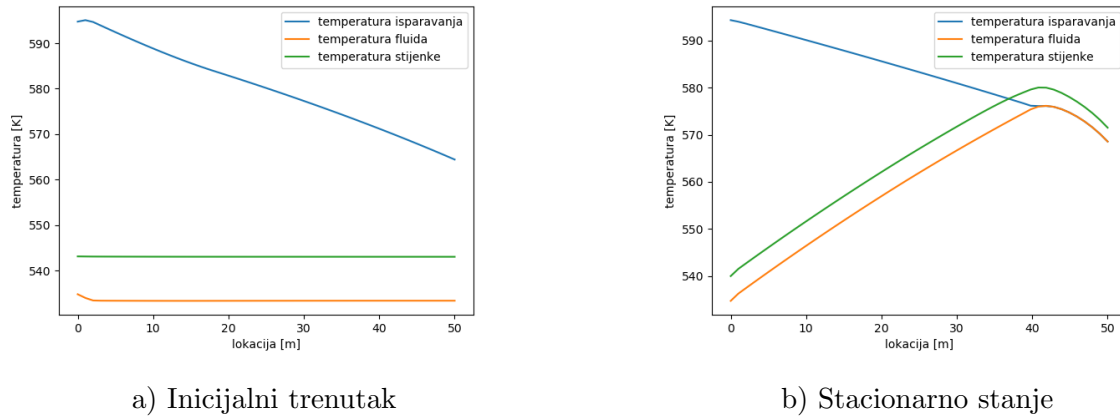
U ovom poglavlju bit će predstavljeni neki od rezultata računalne simulacije. Treba imati na umu da svaki izračunati vremensko-prostorni događaj sadrži zapisane skalare sedam veličina, zato rješenje simulacije ima oblik  $n_t \times n_l \times 7$  gdje je  $n_t$  broj izračunatih trenutaka, a  $n_l$  broj konačnih volumena. Sustav se podijelio na  $n_l = 50$  konačnih volumena, dok je izabrani vremenski korak  $\Delta t = 0.05$  s (ukupno proračunsko vrijeme  $\tau_{ukupno} = 40$  s osigurava postizanje stacionarnog stanja). Inače se kod rješavanja nestlačivog strujanja koriste podrelaksacijski faktori između 0.3 i 0.7, dok se u ovom rješavaču zbog velikih nelinearnosti koriste puno niže vrijednosti. navedene u tablici 5.1.

Tablica 5.1: Podrelaksacijski faktori

veličina	$u$	$p$	$h$	$\rho$	$T$	$T_s$	$q$
podrelaksacijski faktor	0.05	0.1	0.05	0.002	1	1	0.5
implicitna / eksplicitna	i	e	i	e	e	e	e

Podrelaksacijski faktori odabrani su metodom pokušaja i pogrešaka, da bi se postigla konvergencija uz najmanji broj iteracija. Veličine s velikom vremenskom konstantom promijene kao što je temperatura fluida  $T$  i temperatura stijenke  $T_s$  se ne podrelaksiraju ( $\alpha = 1$ ). Najviše se podrelaksira polje gustoće  $\rho$  zbog velikih vremenskih i prostornih derivacija na lokaciji isparavanja. Prije pojave isparavanja simulacija konvergira s preporučenim vrijednostima podrelaksacijskih faktora.

Iako su se provele simulacije korištenjem različitih parametara i rubnih uvjeta kako bi se primijetile oscilacije, oscilacije nakon iščezavanja tranzijentnih pojava nisu postignute, pa će biti prikazani rezultati dviju tranzijentnih pojava i jednog divergirajućeg sustava.



Slika 5.1: Polja temperatura inicijalnog i stacionarnog stanja

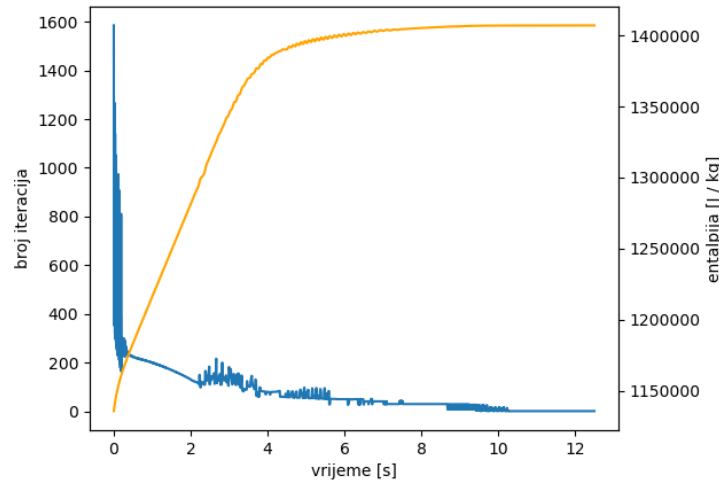
## 5.1. Isparavanje iz stanja pothlađene kapljevine

Preko 90% termohidrauličkih ispitivanja spada u područje nuklearne sigurnosti [3], pa je prirodno da se numerička simulacija postavi na pogonske tlakove i temperature nuklearnih reaktora. Takav pristup olakšao je numeričku simulaciju jer je pri visokim tlakovima smanjen omjer gustoća parne i kapljevite faze (vidi sliku 3.8), a samim time i diferencijalna promjena gustoće mješavine u ovisnosti o porastu entalpije pri isparavanju, što je bio jedan od najizazovnijih numeričkih problema pri razvoju rješavača.

Simulirana je konfiguracija kao na slici 4.2, a geometrija i rubni uvjeti su: tlak niskotlačnog spremnika postavljen je na  $p_{ns} = 75$  bar; tlak visokotlačnog spremnika je  $p_{vs} = 115$  bar; radna tvar je voda; duljina horizontalne ( $\sin \beta = 0$ ), hrapave ( $k = 0.01$  mm), čelične ( $c = 880 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ ,  $\lambda = 45 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ ,  $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) cijevi DN40 je  $L_c = 50$  m; temperatura ogrjevnog medija je  $T_{om} = 570^\circ\text{C}$  uz fiksni koeficijent prijelaza topline  $\alpha_v = 2500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ ; temperatura vode u visokotlačnom spremniku je  $T_{vs} = 260^\circ\text{C}$  što je pothlađenje od  $\Delta T = 30.53^\circ\text{C}^1$  u odnosu na temperaturu isparavanja pri tlaku istrujnog spremnika. Spomenuti parametri, uz početne uvjete, potpuno defniraju sustav.

Na slici 5.1 a) prikazana su inicijalna polja temperatura radne tvari i stijenke, te temperatura isparavanja za lokalni tlak. Polje temperature vode nije uniformno, što se vidi po povišenoj temperaturi na ulaznom volumenu. Uzrok tome je funkcija inicijalizacije

<sup>1</sup>Pothlađenje se svodi na razliku temperatura na izlazu, jer bi se definiranjem pothlađenja u bilo kojoj drugoj točki moglo dogoditi stanje pozitivnog pothlađenja uz isparavanje na izlazu.

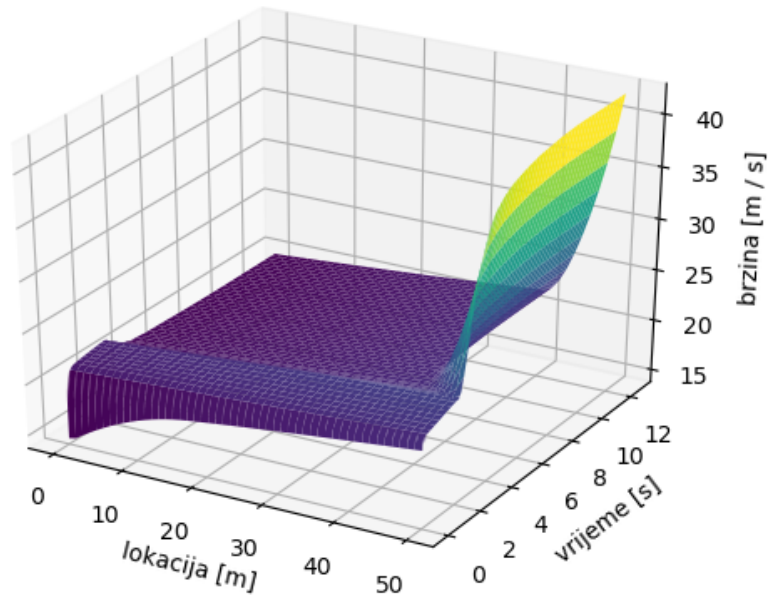


Slika 5.2: Postizanje stacionarnog stanja iz stanja pothlađene kapljevine.

koja rješava sustav za stanje pothlađene kapljevine s trivijalnom pretpostavkom nakon vremena  $\Delta t$ , detaljnije u poglavlju 4.4. Iz slike se također može primijetiti negativan nagib temperature isparavanja s duljinom, što znači da postoje konfiguracije sustava u kojem bi došlo do isparavanja čak i uz uvjet adijabatske stijenke.

Na slici 5.1 b) primjećuje se promjena oblika funkcije temperature isparavanja zbog promjene polja tlaka pri isparavanju. Može se također primijetiti da se temperatura isparavanja i temperatura stijenke sijeku prije pojave isparavanja (kad temperatura stijenke postaje jednaka temperaturi isparavanja). Sjecište plave i zelene linije označava granicu zona A i B, a spajanje plave i narančaste linije označava granice zona B i C na slici 2.1. Naravno da pretpostavka homogenog strujanja ne dopušta pothlađeno isparavanje, pa simulacija ne razlikuje pothlađeno mjehuričasto isparavanje od pothlađenog strujanja.

Sustav postiže potpuno stacionarno stanje onog trenutka kad su rješenja dvaju uzastopnih trenutaka jednaka. Za prvu pretpostavku rješenja sljedećeg trenutka uzeto je rješenje prošlog, pa će u stacionarnom stanju rješavač zadovoljiti nakon jedne iteracije. Prikaz postizanja stacionarnog stanja dan je na slici 5.2. Na toj se slici da primijetiti postignuto stacionarno stanje kad se broj iteracija stabilizira na vrijednosti 1 (nedugo nakon desete sekunde). Uzrok jako velikom broju iteracija na početku simulacije je taj što inicijalizirano rješenje ne zadovoljava skup jednadžbi na dovoljnu točnosti. Inici-



Slika 5.3: Polje brzine u vremensko-prostornoj domeni.

jalno rješenje očito ne uzima u obzir promjenu gustoće kapljevine u ovisnosti o tlaku, a samim time polje brzina nije zadovoljeno, zato sustavu treba nekoliko vremenskih trenutaka da se odmakne od nefizikalnosti uvedenih početnom pretpostavkom. Prosječna brzina u inicijalnom trenutku je  $\bar{u}_{t=0} = 21.058 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  pa treće ispiranje domene spomenuto u poglavlju 4.4. nastupa u vremenskom trenutku  $t = 7.478 \text{ s}$ <sup>2</sup>. Točnost rezultata prije tog trenutka pod utjecajem je greške inicijalno pretpostavljenog rješenja. Maksimalna vrijednost Courantova broja (poglavlje 4.9.4.) iznosi  $Co_{max} = 0.213$ . Vremenska i prostorna diskretizacija su izvedene na najjednostavniji mogući način 4.7., pa Courantov broj ovisi samo o polju brzina.

Za fizikalni prikaz postizanja stacionarnosti odabrana je entalpija u izlaznoj ćeliji; brzina bi bila loš izbor jer bi bila relativno nepromijenjena sve do pojave isparavanja,

<sup>2</sup>Isparavanje započinje unutar tog vremena pa brzina fluida značajno poraste na istrujnom kraju cijevi, tako se domena ispere brže od navedenog vremena. Prosječno vrijeme čestice u sustavu unutar prvih deset sekundi je  $\frac{1}{\Delta t} \int_{t=0}^{t=10} \bar{u} dt = 27.067 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Ali kako je spomenut kriterij samo iskustveni savjet, ne treba se baviti takvim sitnicama.

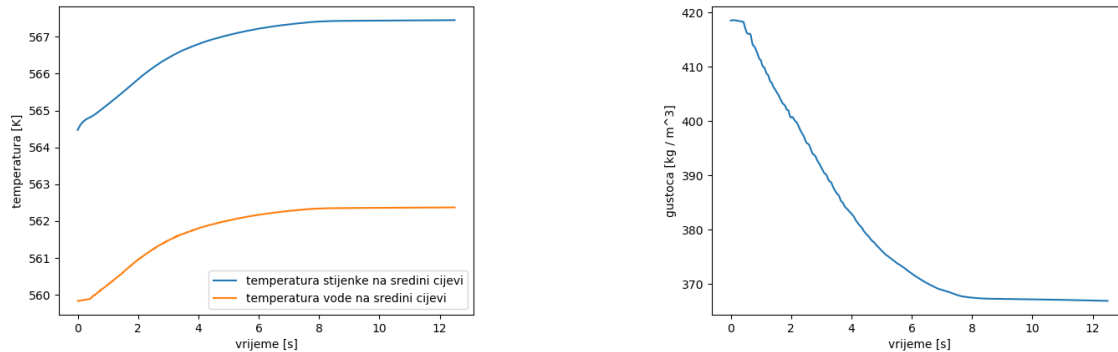


a temperatura bi se prestala mijenjati s pojavom isparavanja, pa bi se mogao dobiti dojam da sustav konvergira ranije, iz sličnog razloga se za lokaciju promatranja promjena odabrao istrujni volumen, do kojeg će konvektivno nošeni poremećaj stići najkasnije. Rezultat polja brzine u vremensko - prostornoj domeni prikazan je na slici 5.3. Na slici se primjećuje usporavanje fluida na ulazu kad počne isparavanje, usporavanje je uzrokovano povećanjem ukupnog pada tlaka zbog ekspanzije na istrujnom kraju cijevi. Na istom dijagramu se može primijetiti greška uzrokovana inicijalnom pretpostavkom i kako se ta greška brzo ispravlja.

## 5.2. Tranzijentno stanje porasta temperature ogrjevnog medija

Rješavač može podnijeti skokovite promjene parametara, kao što je trenutna promjena temperature ogrjevnog medija između dva proračunska trenutka.

Inicijalno stanje ove simulacije je stacionarno stanje prikazano u prethodnom poglavlju. Svi parametri i rubni uvjeti su isti, samo se temperatura ogrjevnog medija povećala za 20 K. Prema kriteriju provjere stacionarnosti objašnjenog u prethodnom poglavlju, stacionarno stanje počinje u  $t = 8.495$  s, ranije od stacionarnog stanja u prethodnom poglavlju koje je postignuto u  $t = 10.265$  s, ta razlika je očekivana s obzirom na to da sustav prolazi kroz manju tranziciju. Jedan od implementiranih načina provjere stacionarnog stanja je analiza toplinskih tokova na dva lica stijenke. U stacionarnom stanju toplinski tok doveden stijenci od strane dimnih plinova jednak je onom koji je od stijenke predan vodi. Relativna razlika tih toplinskih tokova u  $t = 8.5$  s iznosi 0.0137%, dok u zadnjem proračunskom trenutku iznosi 0.0048%. Očito je da je stacionarno stanje postignuto, a zanimljivo je primijetiti relativnu razliku istog reda veličine kao što su nametnuti reziduali ( $10^{-5}$ ). Toplinski tok je veličina koja je zbog eksperimentalnog izraza za  $\alpha_u$  nelinearno osjetljiva na promjenu svih ostalih veličina, pa najčešće zadnja konvergira. Zahtjev na postignute rezidualne mogao se, umjesto uspoređivanjem vrijednosti svih veličina isprogramirati da bude zahtjev na postignute rezidualne toplinskog toka i brzine; simulacija bi davala iste rezultate, a bila bi brža. Po tome se vidi nužnost razumijevanja fizike sustava pri kvalitetnom programiranju simulacija. Tromije i stabilnije veličine kao što su temperatura stijenke i temperatura vode postignu vrijednost



a) Promjena temperature vode i temperature stijenke na sredini cijevi.

b) Promjena gustoće u istrujnom volumenu.

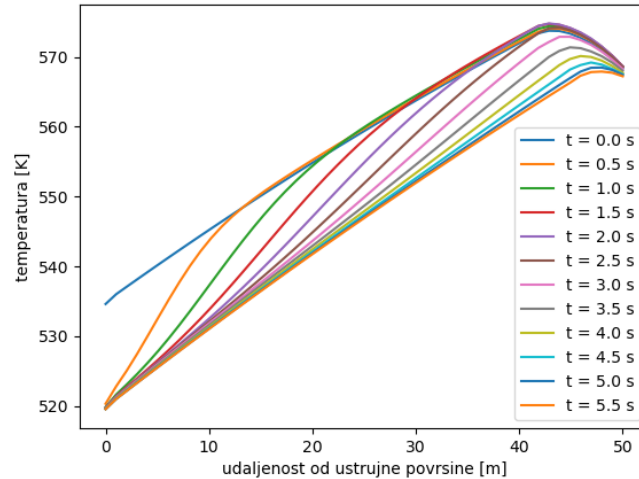
Slika 5.4: Tranzijentne veličine pri povišenju temperature ogrjevnog medija

reziduala reda veličine  $10^{-10}$ .

### 5.3. Skokovit pad temperature na ulazu

Skokovite promjene rubnih uvjeta ostvarive su numerički, ali ne i fizikalno. Često se skokovit poremećaj koristi za analizu ponašanja dinamičkog sustava (prijelazna funkcija). U ovom će radu skokovita promjena demonstrirati stabilnost rješavača, a izvesti će se tako što će temperatura vode u uzvodnom spremniku biti spuštена za  $\Delta T = -15$  K. Kao i u prethodnom poglavlju, kao početno stanje bit će uzeto stacionarno rješenje iz poglavlja 5.1.

Na slici 5.5 prikazana je familija krivulja prostorne raspodjele temperature fluida. Vremenski korak između dva očitana rezultata je  $\Delta t = 0.5$  s. Jasno se može vidjeti konvektivni prijenos hladne struje. Rješavač podnosi nametnuti poremećaj relativno lako: maksimalni broj iteracija jednog vremenskog koraka je 182 (usporedi s vrijednostima iteracija na slici 5.2, gdje maksimum broja iteracija postiže devet puta veće vrijednosti). Stacionarno stanje postiže se nakon  $t = 8.2$  s što je skoro jednako kao kod simulacije skokovitog povećanja temperature dimnih plinova iz prethodnog poglavlja.



Slika 5.5: Odstup sustava na skokovit pad temperature ustrujne kapljice.

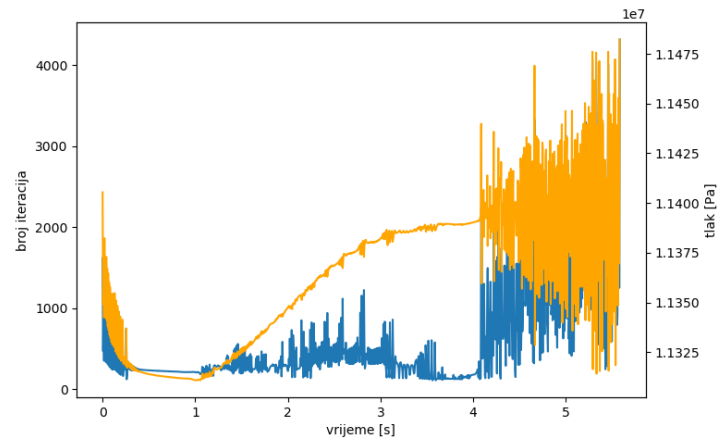
## 5.4. Divergencija

Provedena je tranzijentna simulacija isparavanja iz stanja pothlađene kapljice kao u poglavlju 5.1., jedina je razlika vrijednost pothlađenja ustrujne kapljice koja je postavljena da bude  $\Delta T = 15^\circ\text{C}$ . Na slici 5.6 primjećuje se početak divergencije oko četvrte sekunde simuliranog vremena.

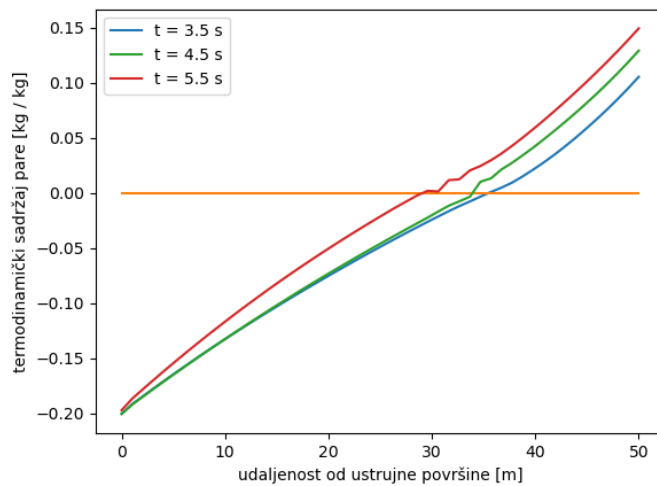
Na slici 5.7 prikazan je termodinamički udio pare prije i nakon početka oscilatornog ponašanja simulacije. Krivulja  $x_{termo}$  kontinuirana pola sekunde prije tog trenutka, a pola sekunde kasnije se lomi oko nultočke  $x_{termo} = 0$ , tj. na lokaciji početka isparavanja. Razlog da lokacija početka isparavanja bude izvor numeričkih nestabilnosti su nelinearnosti u toj točki: realne funkcije gustoće i temperature nederivabilne su u odnosu na promjenu entalpije, derivacija koeficijenta prijelaza topline je najveća, a pad tlaka pokazuje najveće promjene.

Iako bi bilo korisno usporediti sustav s mapama stabilnosti iz [7], to se ne može zbog velike razlike u Freudeovom broju analiziranih sustava<sup>3</sup>. Bezdimenzijske veličine sustava iz spomenutog rada najsličnijeg simuliranom i iste veličine izračunate za simulirani rad

<sup>3</sup>Kad bi se iskoristila spomenuta mapa (zanemarujući razliku u Freudeovom broju) zaključilo bi se da je sustav nestabilan zbog prevelikog bezdimenzijskog pothlađenja  $N_{sub}$ , a stabilna simulacija je uspješna uz veće pothlađenje, što bi po Achardu značilo veću nestabilnost. Takva analiza ne smije se shvatiti ozbiljno zbog već spomenute razlike u Freudeovom broju.



Slika 5.6: Vrijednost tlaka na ulaznom volumenu i broj iteracija u ovisnosti o vremenu



Slika 5.7: Termodinamički udio pare prije i nakon početka oscilatornog ponašanja simulacije.

dane su u tablici 5.2.

Tablica 5.2: Usporedba bezdimenzijskih veličina

Bezdimenzijska veličina	Achard	Krtolačić
$N_{sub}$	$\in [0, 2]$	1.68
$\Lambda$	$\in [0, 6.4]$	2.60
$Fr^{-1}$	$\in [40, 50]$	0.64
$\tilde{j}$	0.7	0.59

Na dijagramu porasta tlaka prikazanom na slici 5.6 mogu se primijetiti periodičke oscilacije tlaka na ulazu perioda  $\tau_0 = 0.375$  s. Prosječna brzina čestice u sustavu u vremenu pojave tih oscilacija je  $\bar{u} = 22.589 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  što bi značilo da vrijeme zadržavanja čestice u sustavu iznosi  $\tau_s = 2.213$  s. Ta vremena ne ispunjavaju kriterij perioda oscilacija zadan jednadžbom 3.2 pa im DWO nije uzrok. Oscilacije ne odgovaraju frekvencijskom rasponu termo-akustičnih oscilacija niti bi im iste mogle biti uzrok jer se brzina propagacije tlačnog poremećaja nije uzela u obzir. Frekvencije oscilacija reda su veličine koje bi očekivali od oscilacija pada tlaka, ali nema razloga vjerovati da je divergencija uzrokovana PDO, a ne numeričkim nestabilnostima.

## 6 | Zaključak

Simulacija opisuje tranzijentno ponašanje fluida i cijevi usprkos izrazitim nelinearnostima u jednadžbama. Rješavač je konvergirao nakon implementacije više različitih metoda stabilizacije numeričkog rješenja: koristila se pomaknuta mreža, *slipne* interpolacija osigurala je derivabilnost svojstava fluida, diskontinuiteti eksperimentalnih jednadžbi izgladjeni su sigmoidalnom funkcijom, *upwind* metoda diskretizacije često je stabilna u konvekcijom dominiranim sustavima, koristila se implicitna i eksplicitna podrelaksacija, a odabrani vremenski korak zadovoljava Courantov kriterij u svim konačnim volumenima. Iskoristile su se prednosti *Python* programskog jezika kao što je vektORIZACIJA kako bi se smanjilo računalno vrijeme. Kod je čitak, učinkovit i lako nadogradiv. Također, dijelovi koda mogu se koristiti u drugim projektima: funkcija koeficijenta topline dvofaznog strujanja se može koristiti u istu svrhu kod drugačijih proračuna, a funkcije `rjesavac` i `rjesavac_trenutka`, ispisani u Prilogu (A.4. i A.3.) mogu se koristiti kod drugih iterativnih tranzijentnih rješavača.

Prikazani su simulacije četiri različita tranzijentna slučaja: zagrijavanje iz stanja pothlađene kapljevine, skokovita promjena temperature dimnih plinova, skokovita promjena temperature uzvodnog spremnika te simulacija koja divergira.

Simulacija nije lučila tražene nestabilnosti. Retrospektivno gledajući, preoptimistično je bilo za očekivati da će detaljno simuliran sustav sam dati tražene nestabilnosti, naročito s obzirom na jednostavnost sustava koji se sastoji od dva spremnika i grijane cijevi s definiranim nagibom u odnosu na horizontalu. Sustav bi se mogao učiniti podložnijim na DWO dodavanjem prigušnih ventila varijabilnog koeficijenta ventila na krajevima cijevi ili podložniji oscilacijama pada tlaka dodavanjem akumulacijskog

spremnika i prigušnog ventila uzvodno od grijane površine. Iako je metoda konačnih volumena u stanju simulirati oscilatorne sustave (npr. von Karmanove vrtloge kod opstrujavanja cilindra), oscilatorno ponašanje dinamičkog sustava pravilnije bi bilo računati metodama kojima se tradicionalno računa podložnost sustava na oscilacije kao što su bifurkacijska teorija [12], spektralna analiza [3] ili nekom od metoda koje koriste Laplaceove transformacije da bi pronašli granice stabilnosti  $Re(s) = 0$  [7].

# A | Prilog - neki kodovi

## A.1. Python kod Thomasovog algoritma

```
def tdma(a, b, c, d):
    n = len(d)
    w = np.zeros(n - 1, float)
    g = np.zeros(n, float)
    p = np.zeros(n, float)

    w[0] = c[0] / b[0]
    g[0] = d[0] / b[0]

    for i in range(1, n - 1):
        w[i] = c[i] / (b[i] - a[i - 1] * w[i - 1])
    for i in range(1, n):
        g[i] = (d[i] - a[i - 1] * g[i - 1]) / (b[i] - a[i - 1] * w[i - 1])
    p[n - 1] = g[n - 1]
    for i in range(n - 1, 0, -1):
        p[i - 1] = g[i - 1] - w[i - 1] * p[i]
    return p
```



## A.2. Python kod jednadžbe za temepraturu stijenske

Navedena je funkcija temperature stijenske jer je najjednostavnija i najkraća. Struktura funkcije ista je kao kod računanja ostalih nezavisnih veličina: tvore se vektori  $a$ ,  $b$  i  $c$  - koji predstavljaju donju, glavnu i gornju dijagonalu matrice sustava te vektor desne strane  $d$ . Tad se poziva Thomasov rješavač koji rješi sustav.

```
def temp_stijenke(temp_stijenke_proslog_trenutka, temperatura_fluida, alpha_u,
                  dx):
    n = len(dx)
    a = np.zeros(n)
    a[1:-1] = - lambda_c / (rho_c * c_c * dx[1:-1])
    a[0] = 0
    a[-1] = lambda_c / (rho_c * c_c * dx[-1])
    a = a[1:]
    b = np.zeros(n)
    b[1:-1] = dx[1:-1] / dt \
        + 2 * lambda_c / (rho_c * c_c * dx[1:-1]) \
        + 4 * d_v * alpha_vanjsko / (rho_c * c_c * (d_v ** 2 - d_u ** 2)) \
        + 4 * d_u * alpha_u[1:-1] / (rho_c * c_c * (d_v ** 2 - d_u ** 2))
    b[0] = dx[0] / dt \
        + lambda_c / (rho_c * c_c * dx[0]) \
        + 4 * d_v * alpha_vanjsko / (rho_c * c_c * (d_v ** 2 - d_u ** 2)) \
        + 4 * d_u * alpha_u[0] / (rho_c * c_c * (d_v ** 2 - d_u ** 2))
    b[-1] = dx[-1] / dt \
        - lambda_c / (rho_c * c_c * dx[-1]) \
        + 4 * d_v * alpha_vanjsko / (rho_c * c_c * (d_v ** 2 - d_u ** 2)) \
        + 4 * d_u * alpha_u[-1] / (rho_c * c_c * (d_v ** 2 - d_u ** 2))
    c = np.zeros(n)
    c[1:-1] = - lambda_c / (rho_c * c_c * dx[1:-1])
    c[0] = - lambda_c / (rho_c * c_c * dx[0])
    c[-1] = 0
    c = c[:-1]
    d = dx / dt * temp_stijenke_proslog_trenutka \
```

```

    + 4 * d_v * alpha_vanjsko / (rho_c * c_c * (d_v ** 2 - d_u ** 2)) \
    * temperatura_ogrijevnog_medija \
    + 4 * d_u * alpha_u / (rho_c * c_c * (d_v ** 2 - d_u ** 2)) \
    * temperatura_fluida
return tdma(a, b, c, d)

```

### A.3. Rješavač trenutka

Funkcija `rjesavac_trenutka` prvo uzima za pretpostavku rješenja rezultat prošlog trenutka, pa riješi sustav i ažurira pretpostavku. Ostatak koda posvećen je brojaču vanjskih iteracija.

```

def rjesavac_trenutka(trenutak, vrijednost_proslog_trenutka,
                      podrelaksacija, rezidual_limit):
    global broj_iteracija
    broj_iteracija = 0
    rjesenje_1 = vrijednost_proslog_trenutka
    uvjet = True
    while uvjet:
        rjesenje_2 = vanjska_iteracija(trenutak, rjesenje_1,
                                       vrijednost_proslog_trenutka, podrelaksacija)
        rezidual = manhattan_rjesenja(rjesenje_1, rjesenje_2, 1)
        uvjet = any( np.greater(rezidual, rezidual_limit) )
        rjesenje_1 = rjesenje_2
        broj_iteracija = broj_iteracija + 1
    return rjesenje_1

```

### A.4. Tranzijentni rješavač

Funkcija `rjesavac` je for petlja koja iterativno očitava stanje zadnjeg rješenog trenutka, riješi promatrani proračunski trenutak, pa zapiše rezultate.

```

def rjesavac(pocetni_trenutak, podrelaksacija, rezidual_limit):
    for t in range(pocetni_trenutak, n_t):

```

```

    prosli_trenutak = citaj_stanje(t - 1)
    rjesenje_trenutka = rjesavac_trenutka(t, prosli_trenutak,
    podrelaksacija, rezidual_limit)
    snimi_trenutak(rjesenje_trenutka, t)
return print('rijeseno')

```

## A.5. Stablo direktorija programa

Prikazano je stablo direktorija programa, sa samo inicijalnim rješanim trenutkom 0, struktura direktorija svih riješenih trenutaka je ista.

```

program
├── rezultati
│   └── 0
│       ├── brzina.csv
│       ├── entalpija.csv
│       ├── gustoca.csv
│       ├── informacije.csv
│       ├── tempstijenke.csv
│       ├── temperatura.csv
│       ├── tlak.csv
│       └── toplinskitok.csv
├── skripte
│   ├── funkcije.py
│   ├── postprocessing.py
│   ├── solver.py
│   ├── uvjeti.py
│   └── velicine.py
└── velicinestanja
    ├── entalpijafluida.csv
    ├── entalpijaplina.csv
    ├── entalpije.csv
    ├── gustocafluida.csv
    ├── gustoce.csv
    ├── informacije.txt
    ├── prandtlfluida.csv
    ├── prandtlplina.csv
    ├── temperature.csv
    ├── tlakovi.csv
    ├── toplinskaprovodnostfluida.csv
    └── toplinskaprovodnostplina.csv

```

```
|  
├─ viskoznostfluida.csv  
└─ viskoznostplina.csv
```

Sadržaj svih datoteka unutar direktorija rješenog trenutka 0 je jasan po nazivu datoteke, osim datoteke `informacije.csv` koja pohranjuje četiri veličine: simulirano vrijeme, broj vanjskih iteracija, zadovoljene vrijednosti reziduala i podrelaksaciju.

U direktoriju skripte nalaze se *Python* skripte. Većina funkcija je definirana u skripti `funkcije.py` osim onih za naknadnu obradu rezultata, koje se definiraju i koriste pomoću skripte `postprocessing.py`. Skripta `solver.py` koristi `s` za pokretanje simulacije i spremanje rezultata, dok se rubni uvjeti i konstante definiraju u skriptama `uvjeti.py` i `velicine.py`.

U direktoriju `velicinstanja` nalaze svojstva fluida. Unutar datoteke `informacije.txt` pohranjene su granice domene  $[[p_{min}, p_{max}], [h_{min}, h_{max}]]$  unutar koje su zapisana svojstva i rezolucija (broj uzorkovanih točaka u smjeru svake od koordinata). Sadržaj svih datoteka je jednodimenzionalan (ovisan samo o tlaku) osim `gustoce.csv` i `temperature.csv` koji pohranjuju  $n_p \times n_h$  veličina, gdje je  $n_p$  rezolucija koordinate tlaka, a  $n_h$  je rezolucija koordinate entalpije.

# Literatura

- [1] J.Thome. Engineer data book iii. *Wolverine Tube Inc*, 2006.
- [2] Antun Galović. *Termodinamika 2*. FSB, 2014.
- [3] M. Fernandino L.C. Ruspini, C.A. Dorao. Dynamic simulation of ledinegg instability. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2010.
- [4] Y. Ding, S. Kakaç, and X.J. Chen. Dynamic instabilities of boiling two-phase flow in a single horizontal channel. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 11(4):327–342, 1995.
- [5] W. H. Westendorf i W. F. Brown. Stability of intermixing of high-velocity vapor with its subcooled liquid in concurrent streams. *National Aeronautics and Space Administration*, 1966.
- [6] Issam Mudawar Lucas E. O’Neill. Review of two-phase flow instabilities in macro- and micro-channel systems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020.
- [7] D.A. DREW i R.T. LAHEY JR. J.L. ACHARD. The effect of gravity and friction on the stability of boiling flow in a channel. *Chemical Engineering Communications*, 2014.
- [8] Grahm B. Wallis. *One-dimensional Two-phase flow*. McGraw-Hill, 1969.
- [9] Mihajlo Firak. *Eksperimentalno istraživanje fluktuacije temperature stijenske isparivačke cijevi u području krize kipljenja drugoga reda*. PhD thesis, 1997.

- [10] D. Barnea i L. Shemer A. Fershtman, V. Babin. On shapes and motion of an elongated bubble in downward liquid pipe flow. *American Institute of Physics*, 2017.
- [11] L.S.TONG J.A.BOURE, A.E.BERGLES. Review of two-phase flow instability. *NUCLEAR ENGINEERING AND DESIGN*, 1972.
- [12] A. C. FOWLER. Linear and non-linear stability of heat exchangers. *Mathematical institute, Oxford, England*, 1978.
- [13] M. Ledinegg. Instability of flow during natural and forced circulation. *Die Waerme; Journal Volume: 61*, 1938.
- [14] Uri Minzer, Dvora Barnea, and Yehuda Taitel. Evaporation in parallel pipes - splitting characteristics. *International Journal of Multiphase Flow - INT J MULTIPHASE FLOW*, 30:763–777, 07 2004.
- [15] J S Maulbetsch and P Griffith. A study of system-induced instabilities in forced-convection flows with subcooled boiling. technical report no. 5382-35. 4 1965.
- [16] Mamoru Ozawa, Shigeyasu Nakanishi, Seikan Ishigai, Yuhsuke Mizuta, and Hiroaki Tarui. Flow instabilities in boiling channels : Part 1 pressure drop oscillation. *Jsmc International Journal Series B-fluids and Thermal Engineering*, 22:1113–1118, 1979.
- [17] D. B. Collins and M. Gacesa. Hydrodynamic instability in a full-scale simulated reactor channel. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings*, 184(3):115–126, 1969.
- [18] Rizwan-Uddin. On density-wave oscillations in two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 20(4):721–737, 1994.
- [19] Jean-Michel Ghidaglia Saad Benjelloun. On the sound speed in two-fluid mixtures and the implications for cfd model validation. 2021.
- [20] Weixiu Shi and Lisheng Pan. Experiment investigation on visualization and operating characteristics of closed loop plate oscillating heat pipe with parallel channels. *Journal of Central South University*, 23:2410–2418, 09 2016.

- [21] L. Tadrist. Review on two-phase flow instabilities in narrow spaces. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28(1):54–62, 2007. The International Conference on Heat Transfer and Fluid Flow in Microscale (HTFFM-05).
- [22] Nikola Šerman. *OSNOVE REGULACIJE PROCESA*. Fakultet strojarstva i brodogradnje sveučilišta u Zagrebu, 2020/21.
- [23] Robert Keser. Simulacija prijelaznih pogonskih režima isparivača organskog fluida. *Sveučilište u Zagrebu*, 2014.
- [24] Vijay CHATOORGOON. Sports - a simple non-linear thermalhydraulic stability code. *Nuclear Engineering and Design 93 (1986)*, 1985.
- [25] Timo Siikonen. Numerical method for one-dimensional two-phase flow. *Numerical Heat Transfer*, 2007.
- [26] Ivo Džijan Zdravko Virag. *Računalna dinamika fluida*. UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU, FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE, 2014.
- [27] Sandip Mazumder. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Elsevier, 2016.
- [28] Miroslav Ruševljan. *CJEVOVODI*. Fakultet strojarstva i brodogradnje sveučilišta u Zagrebu, 2011.
- [29] S. Dormido J. Bonilla a, L.J. Yebra a. Chattering in dynamic mathematical two-phase flow models. *Applied Mathematical Modelling*, 2010.
- [30] Tessa Uroic. Implicitly coupled finite volume algorithms. *Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture*, 2019.
- [31] John Kitchin. Smooth transitions between discontinuous functions, 2013.
- [32] Inc ANSYS. *ANSYS Fluent User's Guide*. 2013.
- [33] M. Darwish F. Moukalled, L. Mangani. The finite volume method in computational fluid dynamics. *Springer*, 113:23. – 25., 2016.

- [34] W. T. Lee. Ctridiagonal matrices: Thomas algorithm. *Scientific Computation, University of Limerick*, 2010.