Razvoj analitičke i numeričke metode za statističku procjenu spektralnog zamora

Ciganović, Igor

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

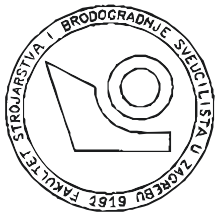
Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:175104

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Igor Ciganović

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Razvoj analitičke i numeričke metode za statističku procjenu spektralnog zamora

Mentori:
Doc. dr. sc. Zvonimir Tomičević,
mag.ing.mech.
Dr. sc. Damjan Čakmak, mag.ing.mech.

Student:
Igor Ciganović

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru, doc. dr. sc. Zvonimiru Tomičeviću na povjerenju tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se svome komentoru dr.sc. Damjanu Čakmaku na vođenju kroz ovaj diplomski i što me upoznao sa zanimljivim područjem zamornog loma i na svim konstruktivnim kritikama, savjetima, korisnim raspravama, pojašnjenjima te najviše od svega strpljenju.

Zahvaljujem se svim svojim kolegicama i kolegama koji su činili svijetlu točku moga studiranja i pomogli da se nekad stresni periodi mnogo ugodnije prođu.

Zahvalio bih se svim svojim prijateljima van fakulteta, a posebice mojoj ekipi iz gyma s kojima je bilo uvijek zadovoljstvo trenirati.

Zahvalio bi se svome ocu što je u pravim trenutcima znao pronaći pravi savjet te ohrabriti me kada je hrabrosti manjkalo.

A najveća zahvala ide mojoj majci, mome najvećem navijaču i potpori, što je uvijek vjerovala u mene čak i u trenutcima kada ja sam nisam.

Igor Ciganović

Zagreb, 10.travnja 2023.

Take small steps every day and you will get there one day.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
Proizvodno inženjerstvo, inženjerstvo materijala, industrijsko inženjerstvo i menadžment, mehatronika i robotika, autonomni sustavi i računalna inteligencija

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: **602 - 04 / 23 - 6 / 1**	
Ur.broj: **15 - 23 -**	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Igor Ciganović** JMBAG: 0035208594

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Razvoj analitičke i numeričke metode za statističku procjenu spektralnog zamora**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Development of analytical and numerical methods for statistical assessment of spectral fatigue**

Opis zadatka:

Visokociklički zamor materijala uzrokovan spektralnim mehaničkim vibracijama malenih amplituda čest je razlog kolapsa konstrukcija u tehničkoj praksi. Norma ASTM E1049-85 daje četiri osnovna načina brojanja ciklusa nepravilnih amplituda: brojanje raspona toka kiše (eng. *rainflow range counting*), brojanje vrhova (eng. *peak counting*), brojanje raspona (eng. *range counting*) i brojanje prelaska nivoa (eng. *level crossing counting*). Sve navedene metode omogućuju pojednostavljenje složenih povijesti naprezanja različitih amplituda na niz jednostavnih ciklusa naprezanja konstantnih amplituda. Na takav niz pojednostavljenih ciklusa moguće je primijeniti Palmgren-Minerovo pravilo za procjenu akumuliranog oštećenja u konstrukciji. Metoda toka kiše (eng. *rainflow*) smatra se najboljom fizikalnom metodom za brojanje ciklusa nepravilnih amplituda budući da uzima u obzir cikluse malih i velikih amplituda naprezanja. Međutim, ona postaje računalno zahtjevna za vrlo duge povijesti naprezanja. U tom slučaju, prikladnije je koristiti približne spektralne teorije toka kiše u frekvencijskoj domeni.

U ovom radu potrebno je osmisliti i razviti analitički i numerički model za procjenu zamora u frekvencijskoj domeni na temelju slučajne povijesti naprezanja.

Tijekom rada potrebno je:

1. Opisati fenomen visokocikličkog zamora materijala i način procjene zamora pomoću Palmgren-Minerovog pravila u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.
2. Detaljno opisati način brojanja ciklusa nepravilnih amplituda metodom toka kiše za ponavljajuću povijest naprezanja (eng. *repeating time history*) prema ASTM E1049-85 normi.
3. Osmisliti i dokumentirati analitički i numerički (metoda konačnih elemenata) model za procjenu visokocikličkog statističkog zamora metodom toka kiše u frekvencijskoj domeni.
4. Koristiti Dirlikovu približnu spektralnu teoriju toka kiše.
5. Međusobno usporediti i komentirati analitičke i numeričke rezultate parametarskih analiza.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Datum predaje rada:	Predviđeni datumi obrane:
2. ožujka 2023.	4. svibnja 2023.	8. – 12. svibnja 2023.

Zadatak zadao: Predsjednik Povjerenstva:

Izv. prof. dr. sc. Zvonimir Tomičević Dr. sc. Damjan Čakmak Prof. dr. sc. Ivica Garašić

Sadržaj

Popis oznaka ..... **V**

Popis skraćenica ..... **VII**

1. Uvod **1**

2. Zamor **2**

2.1. Zamorni lom 3

2.2. *S-N* metoda 9

3. Metode brojanja ciklusa **12**

3.1. Rainflow metoda za ponavljajuću povijest naprezanja 12

4. Slučajan signal **14**

4.1. Statistička parametrizacija Gaussovske distribucije 14

4.2. Spektralna gustoća snage -*PSD* 17

4.3. Spektralni parametri 20

5. Približna Dirlikova spektralna metoda **21**

5.1. Dirlik 21

6. Modalna analiza **23**

6.1. Modalna analiza općenito 23

6.2. Matematički pregled modalne analize 25

6.3. Hadamardov produkt matrica 28

7. Programski paketi **30**

7.1. Abaqus 30

7.2. FE-Safe 30

8. Metodologija **31**

8.1. Analitička metoda 31

8.2. Numerička metoda 34

9. Rezultati **40**

10. Zaključak **44**

Popis slika

Slika 1. Propagacija mikropukotine preko kristalnih zrna [1] ... 3
Slika 2. Shematski prikaz etapa nastanka i širenja pukotine [1] ... 4
Slika 3. Visokociklički i niskociklički zamor u logaritamskom mjerilu [prilagođeno iz 4] ... 5
Slika 4. Statički vlačni pokus a) σ, S-e dijagram, b) korelacija A0/A s uzorkom [5] ... 6
Slika 5. Dinamičko naprezanje: a) harmonijsko, b) nepravilne amplitude [5] ... 7
Slika 6. Slučajevi harmonijskog cikličkog naprezanja ovisni o vremenu [6] ... 8
Slika 7. *S-N* krivulja za čelični materijal [5] ... 10
Slika 8. Povijest naprezanja s razvrstanim ciklusima konstantnih amplituda [4] ... 11
Slika 9. Primjer Rainflow metode za ponavljajuću povijest naprezanja [3] ... 13
Slika 10. Razlaganje složenog signala [11] ... 17
Slika 11. Karakteristične veličine sinusne funkcije [12] ... 18
Slika 12. Prikaz determinističkog signala u frekvencijskoj domeni [12] ... 18
Slika 13. Prikaz stohastičkog signala u frekvencijskoj domeni[12] ... 19
Slika 14. Matematička interpretacija površine ispod grafa PSD-a [13] ... 19
Slika 15. Tipovi vibracija ... 23
Slika 16. Neprigušeni sustav s jednim stupnjem slobode ... 23
Slika 17. Najpoznatiji rješavači u programskom paketu *Abaqus* ... 24
Slika 18. Sustav s n-stupnjeva slobode gibanja (prilagođeno iz [14]) ... 25
Slika 19. Proračunski model a) opći b) prilagođeni ... 31
Slika 20. Dijagram toka razvijene analitičke metode ... 33
Slika 21. Dijagram toka za razvijenu numeričku metodu ... 34
Slika 22. Prikaz numeričkog modela s pripadnim referentnim točkama ... 35
Slika 23. Spajanje referentnih točaka sa geometrijom ... 35
Slika 24. Pridruživanje mase ... 35
Slika 25. Konačni prikaz definiranog modela ... 36
Slika 26. Kreiranje koraka za izračun vlastitih kružnih frekvencija ... 36
Slika 27. Postavljanje parametara rješavača za izračun vlastitih kružnih frekvencija ... 37
Slika 28. Odabrane varijable za *Field Output* ... 37
Slika 29. Izrada koraka za provedbu modalne analize ... 38
Slika 30. Postavljanje frekvencijskog raspona ... 38
Slika 31. Postavljanje prigušenja ... 39
Slika 32. Sadržaj History Outputa ... 39
Slika 33. Ovisnosti amplitude pomaka o frekvenciji uzbude ... 41
Slika 34. Ovisnosti amplituda naprezanja o frekvenciji uzbude ... 42
Slika 35. Ovisnost amplitude pomaka za svaku rezonantnu frekvenciju posebno ... 42
Slika 36. Graf ovisnosti broja dijelova n frekvencijske domene o broju ciklusa do loma ... 43
Slika 37. Dijagram ovisnosti prigušenja o broju ciklusa do loma ... 43

Popis tablica

Tablica 1. Usporedba veličina dobivenih analitičkim i numeričkim putem 40

Popis oznaka

Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
b	–	Basquinov zamorni eksponent
B'_{f}	N/mm^2	Spektralni eksponent zamorne čvrstoće
$\mathbf{C}$	–	Globalna matrica prigušenja
$\mathbf{C_\phi}$		Modalna matrica prigušenja
C_{r}	–	Faktor krijeste/vrha ($0 \le C_{\mathrm{r}} \le \infty$)
D	–	Ukupno zamorno oštećenje ($0 \le D \le 1$)
$D_{1,2,3}$	–	Dirlikovi parametri prilagodbe ($0 \le D_{1,2,3} \le 1$)
e	–	Baza prirodnog logaritma (e $\cong$ 2.718281)
e	%	inženjerska deformacija ($e = (l - l_0)/l$)
$E[0]$	Hz	Očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi
$E[\mathrm{P}]$	Hz	Očekivani broj vrhova po sekundi
$E_i[0]$, $\nu_{0,i}$	Hz	Očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi i-tog procesa
f	HZ	Frekvencija uzbude ($f = \Omega / (2\pi)$)
F	N	sila (općenito)
$\mathbf{F_\phi}$	n	Modalni vektor sila
$\mathbf{F}$	N	Vektor uzbudne sile
i	–	Imaginarna jedinica (i = $\sqrt{-1}$)
i, j, k, n	–	Indeks (cijeli broj, $i, j, k, n = 1 \ldots \infty$)
$\mathbf{K_\phi}$		Modalna matrica krutosti
$\mathbf{K}$	N/mm	Globalna matrica krutosti
$\mathbf{M}$	kg	Globalna matrica masa
$\mathbf{M_\phi}$		Modalna matrica mase
m	–	Spektralni zamorni eksponent ($m = -1/b$)
m_n	(N/mm^2)^{2}Hz^n	n-ti spektralni moment
$m_{n,i}$	(N/mm^2)^{2}Hz^n	n-ti spektralni moment i-tog procesa
N	–	Ukupni broj varijabli
N_{f}	–	Broj ciklusa do zamornog loma
p_{PDF}	1/ (N/mm^2)	Funkcija gustoće vjerojatnosti naprezanja
q	–	Bezdimenzijska amplitude/vrijednost
R	–	Dirlikov parametar prilagodbe ($0 \le \lvert R \rvert \le 1$)
R	-	omjer naprezanja ($R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$)
S	N/mm^2	Inženjersko naprezanje
S_{a}	N/mm^2	Amplituda inženjerskog naprezanja ($S_{\mathrm{a}} = S_{\mathrm{r}} / 2$)
S'_{f}	N/mm^2	Eksponent zamorne čvrstoće
S_{h}	N/mm^2	Povijest naprezanja
S_{PSD}	(N/mm^2)^2/Hz	Spektralna gustoća snage naprezanja
S_{r}	N/mm^2	Raspon inženjerskog naprezanja
S_{RMS}, x_{RMS}	N/mm^2	Efektivna vrijednost naprezanja
t	s	Vrijeme
T_{f}	s	Vrijeme do zamornog loma
$t_{\max}$	s	Ukupno vrijeme
x	N/mm^2	Varijabla naprezanja
$\mathbf{x}$	m	Vektor pomaka masa
$\mathbf{x_0}$		Vektor pomaka u stvarnim koordinatama
$\mathbf{x_{0,n}}$		Normalizirani vektor formi vibriranja

$\dot{\mathbf{x}}$		Vektor brzina masa
$\ddot{\mathbf{x}}$		Vektor akceleracija masa
$\mathbf{y_0}$		Vektor pomaka u modalnim koordinatama
Z	–	Normalizirani raspon naprezanja

Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
α_n	–	*n*-ti bezdimenzijski spektralni parametar
$\Gamma(\cdot)$	–	Potpuna Eulerova Gama funkcija
γ, α_2	–	Faktor nepravilnosti ($0 \leq \gamma \leq 1$)
δ, α_1	–	prvi bezdimenzijski spektralni parametar ($0 \leq \delta \leq 1$)
δ_2	–	Vanmarckeov spektralni parametar drugog procesa (visokofrekventna komponenta)
κ	–	Faktor spljoštenosti/zašiljenosti
ε	mm/mm	Stvarna deformacija
λ	–	Parametar spektralne širine pojasa ($\lambda = \sqrt{1-\gamma^2}$)
$\lambda_{0,i}$	–	Omjer spektralnih momenata *i*-tog procesa
μ, $\overline{x}$	N/mm^2	Aritmetička sredina naprezanja
π	rad	Ludolfov broj ($\pi \cong 3.14159$)
σ	N/mm^2	Standardna devijacija naprezanja
ς, S_k	–	Faktor asimetrije/iskrivljenosti
σ^2, Var(x)	(N/mm^2)^2	Varijanca naprezanja
φ	rad	Fazni kut
$\mathbf{\Phi}$		Normalizirana modalna matrica formi vibriranja
$\mathbf{\phi_M}$		Transformacijska matrica masa
$\Phi(\cdot)$	–	Bezdimenzijska funkcija standardne normalne distribucije
ω_n	rad/s	Vlastita kružna frekvencija
Ω	rad/s	Kružna frekvencija uzbude

Popis skraćenica

Oznaka	Puno značenje
a	Amplituda
c	Kumulativno
Dr	Dirlik
FFT	Brza Fourierova transformacija
FT	Fourierova transformacija
PSD	Spektralna gustoća snage
r	Raspon
RFC	Brojanje ciklusa toka kiše
RMS	Efektivna vrijednost

Sažetak

U okviru ovog rada razvijena je analitička i numerička metoda za statističku procjenu spektralnog zamora. Proračuni u vremenskoj domeni računalno su zahtijevniji od proračuna u frekvencijskoj domeni, stoga su razvijene metode koja su temeljene na proračunima u frekvencijskoj domeni.

U prvom dijelu rada opisana je pojava zamornog loma, propagacija pukotine u materijalu, Wöhlerova krivulja i *S-N* metoda proračuna zamora materijala.

U drugom dijelu rada dan je opis načina brojanja ciklusa nepravilnih amplituda korištenjem *Rainflow* metode za ponavljajuću povijest naprezanja.

Nadalje, opisani su matematički izrazi potrebni za procjenu visokocikličkog zamora u frekvencijskoj domeni. Dan je opis Dirlikove približne spektralne teorije.

Pored toga dan je matematički opis modalne analize, budući da je ista korištena u razvijenim metodama.

U zadnjem dijelu uspoređeni su rezultati analitičke metode dobivenih u programskom paketu *MATLab* i rezultati numeričke metode dobivenih u kombinaciji programskih paketa *Abaqus i FE-Safe*.

Ključne riječi: *zamorni lom, Rainflow metoda, povijest naprezanja, modalna analiza, spektralna teorija, frekvencijska domena*, *Abaqus*, *FE-Safe.*

Summary

Within this study, an analytical and numerical method for statistical estimation of spectral fatigue has been developed. Since time-domain calculations are computationally demanding, the methodology presented encompasses frequency-domain calculations for efficient resource utilization.

The first part of the thesis describes the phenomenon of fatigue failure, crack propagation in materials, the Wöhler curve, and the *S-N* method for fatigue calculations.

The second part of the thesis provides a description of the method for counting cycles of irregular amplitudes using the Rainflow method for repeating stress history.

Furthermore, mathematical expressions necessary for the estimation of high-cycle fatigue in the frequency domain are described. A description of Dirlik's approximate spectral theory is given.

In addition, a general description of modal analysis is provided, as it has been used in the developed methods.

In the last part, a comparison of the results obtained from the analytical method using the MATLAB software package and the results obtained from the numerical method using a combination of the Abaqus and FE-Safe software packages was performed.

Keywords: *fatigue failure, Rainflow method, stress history, modal analysis, spectral theory, frequency domain, Abaqus, FE-Safe*.

1. Uvod

Visokociklički zamor materijala uzrokovan spektralnim mehaničkim vibracijama malenih amplituda čest je razlog kolapsa konstrukcija u tehničkoj praksi. Sama pojava zamora vrlo je kompliciran i predstavlja veliki izazov inženjerima. Do zamora materijala dolazi zbog opterećenja koje je promjenjivo u vremenu. Opterećenje može biti determinističkog ili stohastičkog karaktera odnosno ponavljajuće ili potpuno nasumično. Proračun zamora materijala može se izvršiti u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni.

U ovom radu osmišljena je analitička i numerička metoda za procjenu zamora u frekvencijskoj domeni. Budući da je metodologija rađena u frekvencijskoj domeni objašnjen je način transformacije signala iz vremenske u frekvencijsku domenu. Cilj rada je usporedba rezultata dobivenih analitičkom i numeričkom metodom te prikaz metodologije na jednostavnom primjeru s dva stupnja slobode gibanja koja kasnije može poslužiti za rješavanje sustava mnogo veće kompleksnosti.

2. Zamor

Zamor materijala je fenomen, odnosno pojava, u inženjerskoj praksi koja nastaje pod utjecajem ponavljajućih opterećenja i može dovesti do lomova i deformacija materijala. Ovaj fenomen se prvi put spominje u 19. stoljeću, a znanstvenici i inženjeri su ga počeli proučavati zbog sve veće uporabe željeznih i čeličnih konstrukcija, posebno u željezničkim sustavima. Zamor se može javiti u materijalima kao što su metali, polimerni materijali, drvo i drugi materijali koji se svakodnevno koriste u inženjerskoj praksi. Uzrok zamora je ponavljajuće naprezanje materijala, a ono može biti uzrokovano različitim faktorima, kao što su ciklička opterećenja, vibracije, temperature i slični faktori. Najčešće primjene proučavanja zamora su u konstrukciji aviona, automobila, brodova, mostova, zgrada i drugih konstrukcija. Prethodno navedeni objekti su izloženi različitim vrstama opterećenja i deformacija tijekom svog životnog vijeka, a pravilno proučavanje zamora materijala može pomoći u sprječavanju lomova i oštećenja konstrukcija, što ima veliki utjecaj na sigurnost i životni vijek istih.

Jedan od ključnih događaja u povijesti istraživanja zamora materijala bio je nesreća koja se dogodila u zrakoplovstvu 1940. godine. Tog je dana jedan od novih američkih bombardera B-17 pao nakon samo nekoliko sati leta, a uzrok nesreće bila je upravo njegova strukturalna slabost. Istraživanje ove nesreće otkrilo je da su ciklička opterećenja tijekom leta uzrokovala oštećenja strukture aviona, koja su se nakupljala tijekom vremena, sve dok materijal nije konačno popustio svojom mehaničkom stabilnošću. Ova je nesreća dovela do intenzivnog istraživanja zamora materijala u zrakoplovstvu, što je, pak, dovelo do razvoja novih metoda i materijala koji bi bili izdržljiviji pod cikličkim opterećenjima. Danas se ta ista načela primjenjuju u istraživanju zamora u različitim područjima, uključujući građevinsku industriju, medicinu i transport.

Znanstvenici te inženjeri u današnjici koriste različite metode za proučavanje zamora materijala, kao što su ispitivanje na zavojnom stroju, ispitivanje zavojnih oscilacija, ispitivanje otpornosti materijala i slične. Ove metode omogućuju mjerenje ponašanja materijala pod različitim opterećenjima i otkrivanje stvarnih granica materijala koje ne smiju biti prekoračene kako bi se osigurala sigurnost i trajnost konstrukcija.

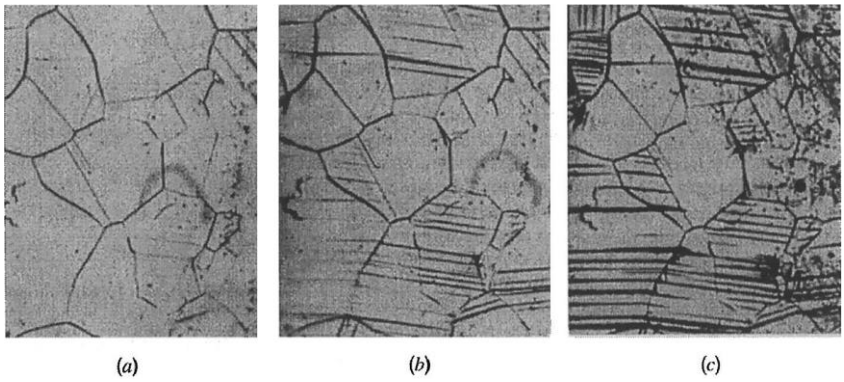
Nastanak zamora materijala je moguće opisati kao postupak koji je usko povezan s nastankom i gibanjem dislokacije unutar kristalne rešetke. Pukotine nastaju upravo na mjestima lokalizirane koncentracije naprezanje. U nastavku će biti opisan sami postupak nastanka zamornog loma.[1]

2.1. Zamorni lom

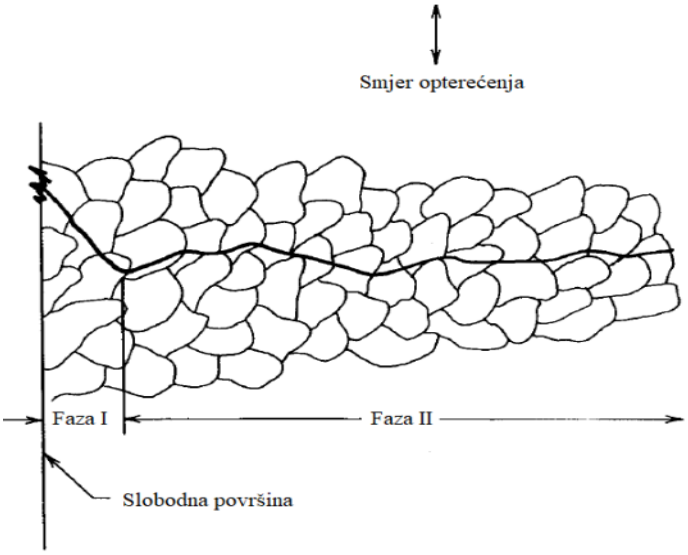
Zamorni lom nastaje kao posljedica rasta i stapanja nepravilnosti u kristalnoj rešetci materijala. Odnosno, nepravilnosti rastu, gomilaju se i šire sve dok ne nastupa konačno puknuće. Tako je moguće izdvojiti tri etape (koraka) kod zamora materijala:

- Inicijalni nastanak pukotine
- Širenje, odnosno rast pukotine
- Prisilni i trenutni lom.

Pukotine u materijalu se najčešće iniciraju na slobodnoj površini, a površinska oštećenja su češća kod materijala s većom vlačnom čvrstoćom. Promjenjivo opterećenje uzrokuje stvaranje intruzija i ekstruzija na površini metala, koje su upravo mjesta inicijacije pukotina. Inicijalni korak umora materijala određuje umorni vijek materijala. Širenje, odnosno rast pukotine spada u drugi korak koji opisuje stvaranje makropukotine iz niza mikropukotina iniciranih u prvom koraku. Ovisno o vlačnom naprezanju, korak inicijacije pukotine može biti u velikom broju slučaja, neprimjetan. Pukotina se obično širi okomito na pravac maksimalnog vlačnog naprezanja, a brzina rasta je od približno 10^{-8} mm do 10^{-3} mm po ciklusu. Naposljetku, nakon prva dva koraka, pukotina počinje naglo rasti i uzrokovati nestabilan (prisilni, nagli) lom konstrukcije. U materijalima koji su skloni krhkom lomu, ova faza započinje kada se dostigne kritična duljina pukotine, dok kod rastezljivih materijala početak loma ovisi o razini naprezanja [2]-[4].



Slika 1. Propagacija mikropukotine preko kristalnih zrna [1]



Slika 2. Shematski prikaz etapa nastanka i širenja pukotine [1]

Zamor materijala je moguće i sistematizirati ovisno o vremenu nastanka loma:

- Visokociklički lom
- Niskociklički lom.

Visokociklički lom

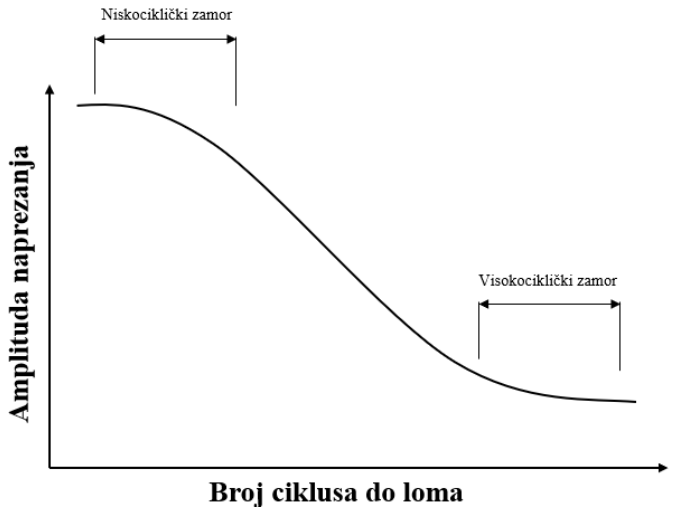
Nastupa pri visokim cikličkim opterećenjima na frekvencijama većim od 1000 ciklusa/sekundi. Također je moguće navesti kako su naprezanja i deformacije u elastičnom području. Česta je uporaba upravo Wöhlerovih ***S-N*** krivulja. Ovaj tip loma obično se događa na metalima i legurama koji se koriste u aplikacijama s velikim brojem ciklusa opterećenja, poput motora s unutrašnjim izgaranjem, zrakoplova, automobila i strojeva.

Niskociklički lom

Nastupa pod utjecajem niskocikličkog naprezanja, uobičajeno manje od 10000 ciklusa. Ovaj tip loma materijala je karakterističan za situacije u kojima postoji koncentracija naprezanja, što može uzrokovati stvaranje i širenje mikropukotina (zbog nepravilnosti u materijalu, poput površinskih ogrebotina, reznih rubova ili nedovoljno obrađenih površina). U takvim situacijama, mikropukotine se mogu proširiti dovoljno da postanu kritične i uzrokuju niskociklički lom materijala. Ovaj tip loma materijala je karakteriziran velikim deformacijama pri lomu i često se javlja kod materijala koji su podložni plastifikaciji, kao što su aluminij, bakar

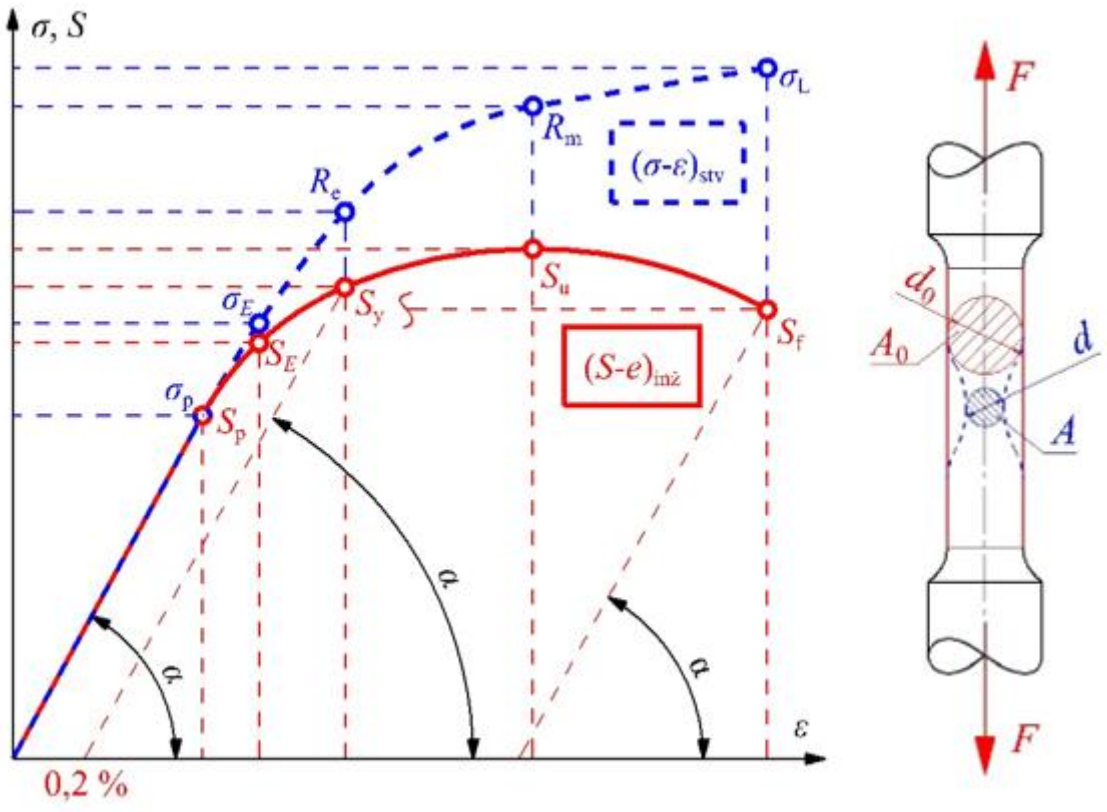
i čelik. Naprezanja i deformacije su tipično u elasto-plastičnom području te je od proračuna potrebno provesti proračun [2]-[5]:

- Broja ciklusa do nastanka pukotine, (N_i) ε-N metoda
- Broj ciklusa rasta pukotine do kritične duljine N_p
- Broj ciklusa do loma: $N_f = N_i + N_p$.



Slika 3. Visokociklički i niskociklički zamor u logaritamskom mjerilu [prilagođeno iz 4]

Kao jedan od osnovnih testova koji se koriste za analizu zamora materijala se koristi statički vlačni pokus. Uz pomoć njega se utvrđuje ponašanje materijala pod opterećenjem, što uključuje njegovu elastičnost, granicu izdržljivosti i deformacijske karakteristike. Postupak se obavlja na način da se uzorak materijala podvrgava postupnom povećanju napetosti sve dok ne dođe do puknuća. Ovaj postupak omogućuje mjerenje rastezljivosti materijala, odnosno omjer između promjene duljine uzorka i početne duljine. Nakon toga se procjenjuje granično naprezanje materijala, odnosno najveća napetost koju materijal može podnijeti bez većeg oštećenja. U nastavku će biti definirani parametri statičkog vlačnog pokusa koji su potrebni za analizu zamora materijala:



Slika 4. Statički vlačni pokus a) σ, S-e dijagram, b) korelacija A0/A s uzorkom [5]

Inženjersko naprezanje:

$$S = \frac{F}{A_0}. \tag{2.1}$$

Stvarno naprezanje:

$$\sigma = \frac{F}{A}. \tag{2.2}$$

Inženjerska deformacija:

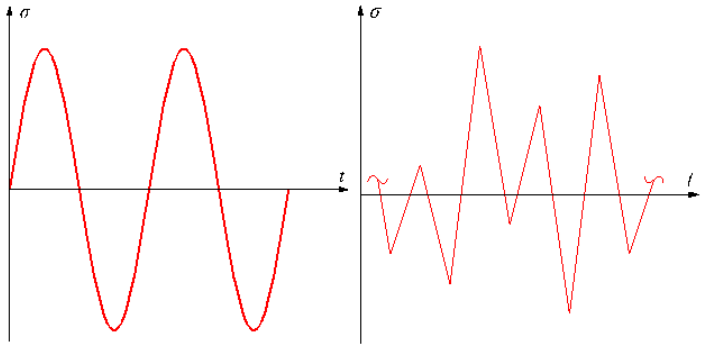
$$e = \frac{l - l_0}{l_0}. \tag{2.3}$$

Stvarna deformacija:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{\mathrm{d}l}{l} = \ln \frac{l}{l_0}. \tag{2.4}$$

Valjano je i navesti kako inženjersko naprezanje uzima u obzir početnu površinu A_0, dok stvarno naprezanje uzima u obzir poprečnu površinu A koja je, po iznosu manja od prethodno navedene. Upravo je tako moguć nastanak jednadžbe stvarnog naprezanja, koje je u stvarnosti veće od inženjerskog naprezanja te značajno utječe na sami dalji tijek proračuna zamora materijala.

Ujedno dinamička opterećenja materijala mogu biti idealizirana ili pak stvarnog prikaza. Odnosno, mogu biti harmonijska (vibracije strojeva) ili pak stohastička (opterećenja uslijed djelovanja vjetra). Harmonijska opterećenja su pravilnog sinusoidnog oblika s konstantnom frekvencijom i amplitudom, dok su stohastička, promjenjive amplitude. Često se harmonijski prikaz opterećenja koristi pri provođenju eksperimentalnih ispitivanja. U usporedbi s harmonijskim opterećenjem, stohastičko opterećenje može biti manje predvidljivo, ali također može biti manje štetno za materijale zbog variranja cikličkog opterećenja tijekom vremena. [2]-[5].



Slika 5. Dinamičko naprezanje: a) harmonijsko, b) nepravilne amplitude [5]

Pri proračunu konstrukcija periodička dinamička opterećenja najčešće se aproksimiraju s harmonijskim dinamičkim opterećenjem, uz uvjet da amplituda i srednje naprezanje ostaju konstantni tijekom vremena. Izrazi korišteni za računanje stvarnog naprezanja vrijede i za inženjersko naprezanje *S*.

Raspon naprezanja jednak je dvostrukoj amplitudi ili razlici najvećeg i najmanjeg naprezanja:

$$\sigma_r \equiv \Delta\sigma = \left|\sigma_{max} - \sigma_{min}\right| = 2 \cdot \sigma_a \,. \tag{2.5}$$

Amplituda naprezanja jednaka je polovici raspona naprezanja:

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right| = \frac{\sigma_r}{2}. \tag{2.6}$$

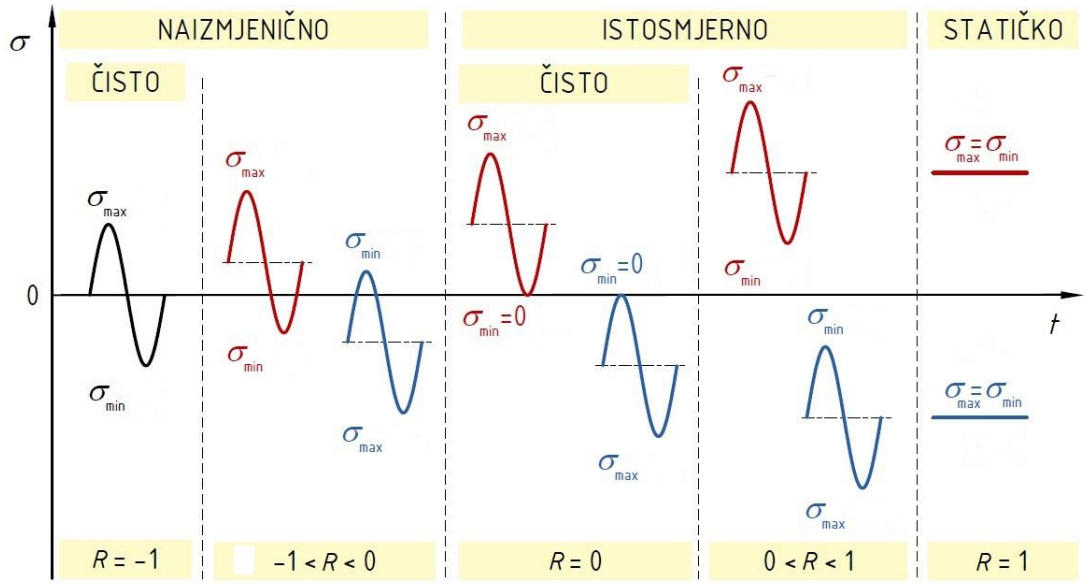
Srednje naprezanje jednako je srednjoj vrijednosti između najvećeg i najmanjeg naprezanja:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}. \tag{2.7}$$

Odnos graničnih naprezanja jednak je omjeru najmanjeg i najvećeg naprezanja:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \tag{2.8}$$

Harmonijsko cikličko naprezanje određeno je odnosom graničnih naprezanja R i srednjom vrijednošću naprezanja. Odnos graničnih naprezanja određeno je granicama $-1<R<1$. Najjednostavniji oblik promjenjivog, dinamičkog opterećenja je kada je naprezanje čisto naizmjenično, slučaj $R=-1$. Takvo naprezanje obuhvaća i vlačno i tlačno područje s jednakim apsolutnim vrijednostima. Slika 6. prikazuje slučajeve za različite vrijednosti R.



Slika 6. Slučajevi harmonijskog cikličkog naprezanja ovisni o vremenu [6]

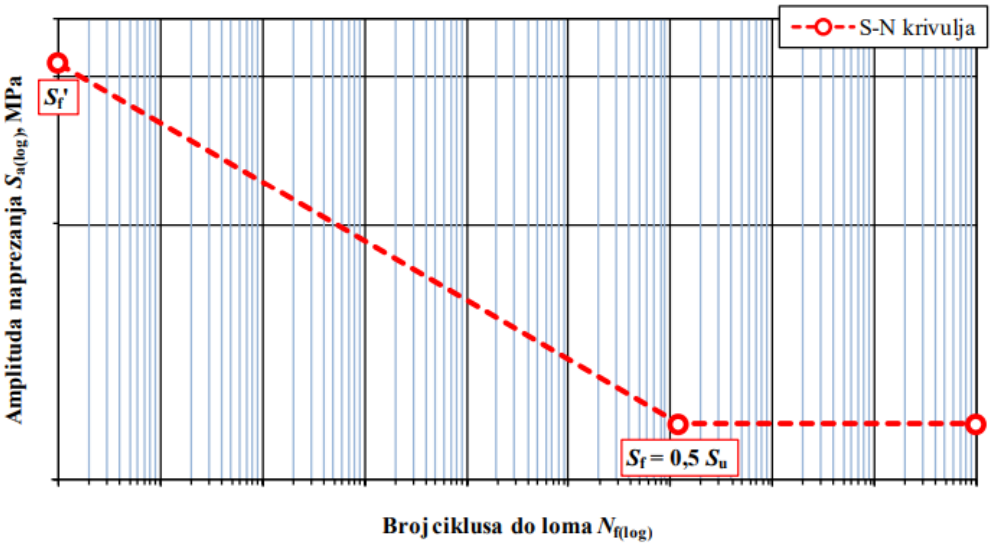
2.2. *S-N* metoda

Metoda se temelji na pretpostavci da je životni vijek materijala određen rasponom naprezanja koji se na njega primjenjuje te da postoji odnos između raspona naprezanja i broja ciklusa do otkaza. *S-N* metoda uključuje grafički prikaz raspona naprezanja prema broju ciklusa do otkaza na logaritamskoj skali, što rezultira nastankom pojedine *S-N* krivulje. Ta se krivulja može koristiti za procjenu životnog vijeka materijala za odgovarajući raspon naprezanja. Valjano je i navesti kako je *S-N* metoda temeljena na statističkim podacima pa tako ne uzima u obzir sve čimbenike koji mogu utjecati na životni vijek materijala, poput svojstava materijala, uvjeta opterećenja i utjecaja okoline. Stoga je potrebno koristiti i druge metode poput analize loma mehanike (mjerenje dimenzija pukotine u materijalu te vrijednosti i utjecaja svih naprezanja kojima je materijal izložen), kako bi se procijenila sigurnosti te pouzdanost strojnih konstrukcija. Metoda se provodi u nekoliko koraka:

1. Priprema dovoljnog broja uzoraka koji bi trebali biti reprezentativni za materijal i uvjete opterećenja koji se žele ispitati.
2. Materijal se podvrgava cikličkom opterećenju pod kontroliranim uvjetima dok se ne dogodi lom ili puknuće. Opterećenje se postupno povećava i smanjuje u amplitudama, a vrijeme, koje je potrebno za izvođenje ciklusa, se mjeri.
3. Tijekom ispitivanja materijala se bilježe podaci o opterećenju (npr. naprezanje, sila), broju ciklusa opterećenja i vremenu koje je proteklo prije nego što se dogodio lom. Ti se podaci potom koriste za izradu odgovarajuće *S-N* krivulje.
4. Nakon prikupljanja podataka, izrađuje se grafički prikaz *S-N* krivulje (Wöhlerov dijagram), prikazivanjem broja ciklusa do loma (*N*) kao funkcije amplitude naprezanja (*S*). Za svaki se pojedini uzorak zapisuje broj ciklusa *N* pri kojem je došlo do pukotine ili do loma. Smanjenje amplitude naprezanja provodi se sve do trenutka kada se uzorak ne lomi iako je izdržao veliki broj graničnih ciklusa. Krivulju kroz točke je moguće opisati izrazom:

$$S_{\mathrm{a}} = S_{\mathrm{f}}^{'} \cdot \left(N_{\mathrm{f}}\right)^{b}, \tag{2.9}$$

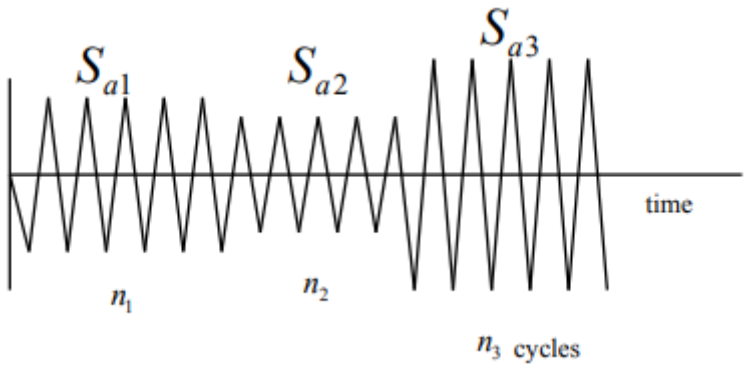
gdje je S'_f koeficijent zamorne čvrstoće, b eksponent zamorne čvrstoće, S_{a} amplituda naprezanja, a N_f broj ciklusa do loma. Izraz vrijedi samo za slučaju R=-1, odnosno čisti naizmjeničan slučaj.



Slika 7. *S-N* krivulja za čelični materijal [5]

Karakterističan je prijelaz nagiba krivulje u horizontalu (konstantnu vrijednost) pri izjednačavanju vrijednosti amplitude s polovičnom vrijednošću vlačne čvrstoće. Upravo je taj dio jednak vrijednosti trajne dinamičke čvrstoće (kada je R = -1, odnosno srednje naprezanje je jednako nuli). Također, primjena *S-N* krivulje, odnosno dijagrama, za slučaj stohastičkog opterećenja materijala promatranog objekta, se svodi na primjenu za svaki ciklus zasebno. Kako amplituda kod stohastičkog slučaja nije konstanta, potrebno je stvoriti povijest naprezanja te signalu, koji je podijeljen u cikluse, odrediti i pridružiti odgovarajuće skupine konstantnih amplituda.

Kod stohastičkog opterećenja, uz dovoljno dugu povijest naprezanja, može se takvo opterećenje smatrati periodičkim. Na Slici 8. prikazana je povijest naprezanja za već sređeno stohastičko opterećenje. Signal naprezanja u vremenu razvrstan je po ciklusima, gdje je svaki ciklus određen pripadajućom konstantnom amplitudom naprezanja. [4],[5].



Slika 8. Povijest naprezanja s razvrstanim ciklusima konstantnih amplituda [4]

Oštećenje uzrokovano jednim ciklusom definirano je izrazom:

$$D = \frac{1}{N}, \tag{2.10}$$

gdje je N broj ponavljanja istog ciklusa tj. srednji život do loma.

Svaki ciklus ima pripadajuće akumulirano oštećenje koje je proporcionalno broju ciklusa do loma N_f pri konstantnoj amplitudi S_a. Oštećenje uzrokovano za više različitih n ciklusa je:

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \tag{2.11}$$

Akumulirano (nakupljeno) oštećenje uslijed dinamičkog opterećenja s promjenjivom amplitudom prikazano je izrazom:

$$D_{uk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{N_{fi}} = \frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} \ldots + \frac{n_n}{N_{fn}}, \tag{2.12}$$

gdje je D_{uk} ukupno akumulirano oštećenje, N je broj ciklusa određeno iz S-N krivulje, a n_i je ukupan broj ciklusa pri konstantnoj amplitudi naprezanja S_{ai} . Izrazom (2.12) je matematički opisano Palmgren-Minerovo pravilo. Prema opisanom pravilu do loma dolazi kada zbroj omjera bude veći ili jednak 1. Kako bi se Palmgren-Minerovo pravilo moglo primijeniti potrebno je složeni ciklus promjenjive amplitude rastaviti na jednostavnije cikluse konstantne amplitude [2]-[5].

3. Metode brojanja ciklusa

Povijest naprezanja često je nepravilna i može biti stohastička ili periodička. Međutim, za primjenu Palmgren-Minerovog pravila, koje je objašnjeno u poglavlju 2., potrebno je pojednostaviti takvu složenu povijest naprezanja tako da se mogu prebrojati sve promjene tijekom trajanja signala. ASTM norma pruža nekoliko metoda za sažimanje složene povijesti naprezanja. Metode brojanja ciklusa omogućuju identificiranje broja pojavljivanja ciklusa određenog raspona naprezanja za složenu povijest naprezanja slučajnog signala.

Kako bi se povijest naprezanja mogla analizirati, potrebno je znati krajnje točke, tj. lokalne ekstreme. Uzimaju se u obzir samo vrhovi i udoline, a odbacuju se točke koje su između [3],[5],[7].

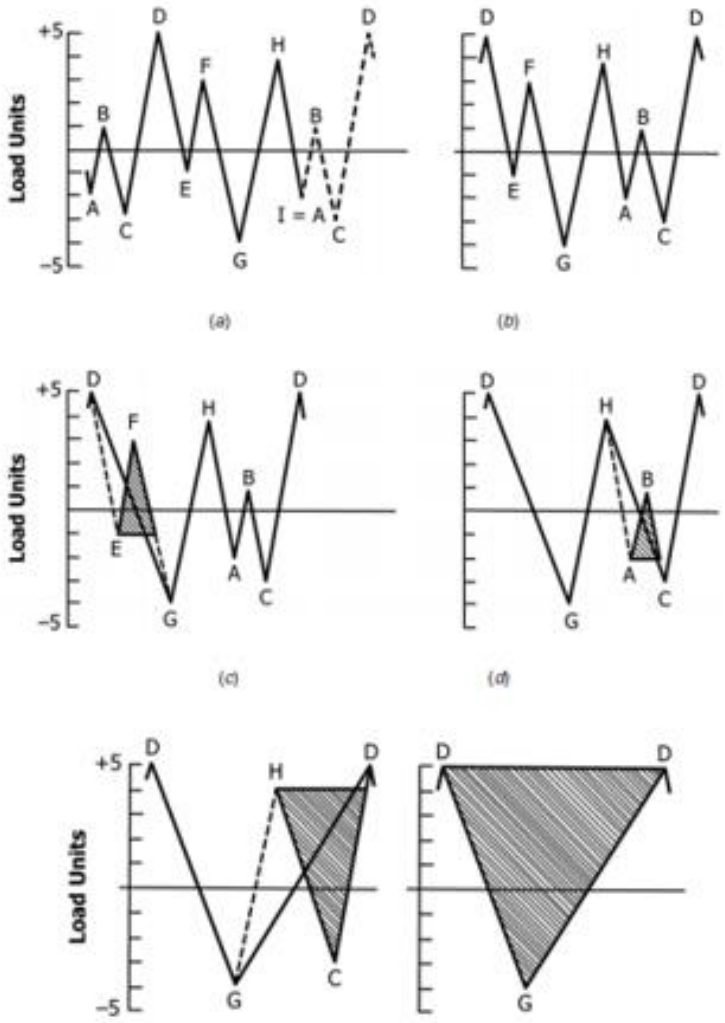
3.1. Rainflow metoda za ponavljajuću povijest naprezanja

Za ponavljajući ciklus (povijest naprezanja) se pretpostavlja da predstavlja period nekog duljeg signala, tj. da se ponavlja u vremenu. Budući da se ciklusi u praksi, koliko god bili kompleksni redovito ponavljaju, proračun zamora može se provesti pojednostavljenom *Rainflow* metodom [3]. Ova metoda naziva se još metoda triju uzastopnih točaka, te je jedna od poznatijih *Rainflow* metoda. Povijest naprezanja rasporedi se tako da brojanje počne s najvišim vrhom ili najnižom udolinom. Traže se zatvoreni ciklusi te se brišu iz dijagrama i zapisuju u tablicu, sve dok ne ostane nijedan. Svi rasponi broje se kao puni ciklusi, i svi rasponi odgovaraju zatvorenoj krivulji histereze, tj. čine zatvorene trokute.

X predstavlja raspon koji se razmatra, a Y prethodni raspon susjedan rasponu X. Kada je X > Y, tada se prethodni raspon smatra punim ciklusom. Ako ciklus nije izbrojan, onda treba provjeriti sljedeća 4 vrha, sve dok se ne dođe do punog ciklusa. [7]

Na primjeru slike 9. pokazano je brojanje ciklusa prema ASTM normi [7]:

Y=E-F, X=F-G, X>Y, E-F s točkom F, koja se nalazi na dijelu F-G, zatvaraju trokut te se broji kao puni ciklus, i točke E i F se odbacuju. Brojanje se zaustavlja kada se odrede svi puni ciklusi u signalu (E-F-E', A-B-A', H-C-H' i D-G-D).



Slika 9. Primjer Rainflow metode za ponavljajuću povijest naprezanja [3]

4. Slučajan signal

Procesi se mogu podijeliti u dvije grupe, a to su: deterministički ili stohastični procesi. Klasičan primjer determinističkog signala je sinusna funkcija. Za razliku od determinističkih signala, stohastičkim signalima nije moguće predvidjeti buduća stanja. Kao primjer jednog stohastičkog signala može se uzeti proces pomicanja tla prouzrokovanog potresom. U okviru ovog diplomskog rada uzeto je kao pretpostavka da je stohastički proces s kojim se radi Gaussovski, stacionaran i ergodičan .

Za stohastički signal kaže se da je stacionaran onda kada njegove statističke karakteristike ostaju konstantne u vremenu.

Za stohastički signal kažemo da je ergodičan onda kada mu statističko mjerenje za svaki uzorak predstavlja statističko mjerenje za bilo koji drugi uzorak. Drugim riječima može se iskoristiti samo jedan uzorak kako bi se izračunale statističke vrijednosti od interesa, a ne treba se mjeriti na više različitih uzoraka. Može se reći da ako je signal stacionaran da je i ergodičan [2]-[4].

4.1. Statistička parametrizacija Gaussovske distribucije

Slučajna varijabla je veličina čija se trenutna vrijednost ne može predvidjeti. Ako ima normalnu distribuciju, naziva se normalna devijacija i može se objasniti pomoću centralnog graničnog teorema. Kada se zbroj velikog broja nezavisnih slučajnih varijabli normalizira, teži asimptotski normalnoj ili Gaussovoj distribuciji. Općeniti oblik funkcije gustoće vjerojatnosti za slučajne varijable u rasponu od {–∞, +∞} je poznat kao generalizirana slučajna varijabla [3],[10],[11].

$$p_{\mathrm{PDF}}^{\mathrm{norm}}\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}, \tag{4.1}$$

μ *:* očekivana raspodjela

σ *:* standardna devijacija

Aritmetička sredina uzoraka, označava se sa $\bar{x}$, definirana je kao zbroj vrijednosti uzoraka podijeljenih s ukupnim brojem uzoraka.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \quad . \tag{4.2}$$

Varijanca se definira kao očekivanje kvadratne devijacije slučajne varijable x_i od srednje vrijednosti odnosno daje nam informaciju koliko skup brojeva odstupa od prosjeka.

$$\mathrm{Var}(x) \equiv \sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{N-1}\left[\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_N - \bar{x}\right)^2\right]. \tag{4.3}$$

Standardna devijacija je mjera broja varijacija ili rasipanje skupa vrijednosti.

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} \equiv \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left[\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_N - \bar{x}\right)^2\right]}\,. \tag{4.4}$$

Efektivna vrijednost RMS (eng. *root mean square*) skupa vrijednosti je korijen kvadrata aritmetičke sredine za vrijednosti x_i^2. U slučaju kada su skupovi od *N* uzoraka, RMS je određen relacijom

$$x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}\,. \tag{4.5}$$

Za Gaussovski slučajni signal s nultom srednjom vrijednosti i dovoljno dugim trajanjem, vrijednosti σ i x_{RMS} su približno jednake, a aritmetička srednja vrijednost naprezanja iz izraza (4.2) je jednaka nuli.

Faktor asimetrije predstavlja mjeru odstupanja raspodjele slučajne varijable oko njene srednje vrijednosti. Ova mjera može biti pozitivna, negativna, nula ili nedefinirana, a naziva se i koeficijent iskrivljenosti. Ako se radi o normalnoj distribuciji ili bilo kojoj savršeno simetričnoj distribuciji, faktor asimetrije jednak je nuli. Formula za izračun faktora asimetrije se koristi u statistici i pomaže u određivanju oblika i svojstava distribucije slučajne varijable.

$$\varsigma \equiv S_{\mathrm{k}} = \frac{M_3}{\left(M_2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{N}\left[\left(x_1 - \overline{x}\right)^3 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^3 + \ldots + \left(x_N - \overline{x}\right)^3\right]}{\left(\sqrt{\frac{1}{N}\left[\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_N - \overline{x}\right)^2\right]}\right)^3}, \quad (4.6)$$

gdje su M_2 i M_3 drugi i treći statistički centralni momenti. Opći izraz za *n*-ti statistički centralni momenat glasi

$$M_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^n . \quad (4.7)$$

Faktor zašiljenosti ili kurtoza je mjera oblika raspodjele vjerojatnosti koja opisuje vršnu vrijednost krivulje raspodjele. On određuje stupanj zašiljenosti oko vrha krivulje raspodjele i može biti pozitivan, nula ili negativan. Faktor zašiljenosti se može izračunati kao normalizirani četvrti centralni moment raspodjele. Ukratko, kurtoza se koristi za opisivanje oblika distribucije vjerojatnosti, a visoka vrijednost kurtoze ukazuje na veću zašiljenost distribucije.

$$\kappa = \frac{M_4}{\left(M_2\right)^2} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^4}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{N}\left[\left(x_1 - \overline{x}\right)^4 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^4 + \ldots + \left(x_N - \overline{x}\right)^4\right]}{\left(\frac{1}{N}\left[\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_N - \overline{x}\right)^2\right]\right)^2}. \quad (4.8)$$

Ako je vrijednost faktora zašiljenosti manja od 3, to ukazuje na to da je krivulja raspodjele vjerojatnosti (PDF) ravnija nego što je to uobičajeno. Ako je faktor zašiljenosti jednak 3, to ukazuje na to da je raspodjela normalna. Ako je faktor zašiljenosti veći od 3, to ukazuje na to da je krivulja raspodjele vjerojatnosti (PDF) zaoštrenija od normalne.

Ako je uzorak podataka Gaussovski, tada je vrijednost kurtoze jednaka 3. Prekoračenje faktora zašiljenosti (kurtoze) dano je izrazom

$$\kappa_0 = \kappa - 3 . \quad (4.9)$$

Faktor vrha je uobičajena mjera u analizi signala koja se odnosi na omjer maksimalne apsolutne vrijednosti uzorka signala i njegove RMS vrijednosti. On pokazuje koliko su vrhovi signala ekstremni. Ako se promatra signal s nultom srednjom vrijednosti, tada se faktor vrha može izraziti preko izraza

$$C_{\mathrm{r}} = \frac{\max\left\{\left|x_i\right|\right\}}{x_{\mathrm{RMS}}}. \tag{4.10}$$

Faktor vrha bitno je svojstvo signala, s obzirom da ukazuje koliko je šiljasta krivulja normalne raspodjele.

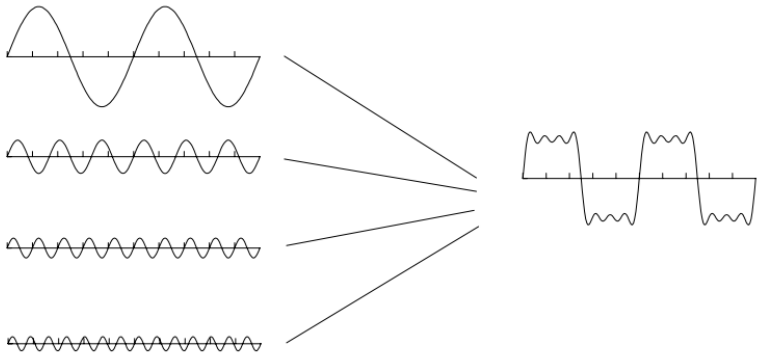
Ako se analizira postojeći slučajni signal, njegova aritmetička srednja vrijednost naprezanja i faktor asimetrije trebali bi biti blizu nule, a kurtoza bi trebala biti oko 3, dok bi faktor vrha trebao biti veći od 4. Ako je signal takav, može se smatrati statistički relevantnim i dovoljno dugim da se smatra normalnim/Gaussovskim signalom.

4.2. Spektralna gustoća snage -*PSD*

PSD -(eng. *Power Spectral Density*)

- P- (eng. Power – snaga)- kvantificira u kojoj mjeri doprinosi svaka frekvencija
- S-(eng.Spectral – spektralna) -označava da se radi u frekvencijskoj domeni
- D-(eng.Density – gustoća) označava doprinos snage signala na određenoj frekvenciji u određenom frekvencijskom rasponu

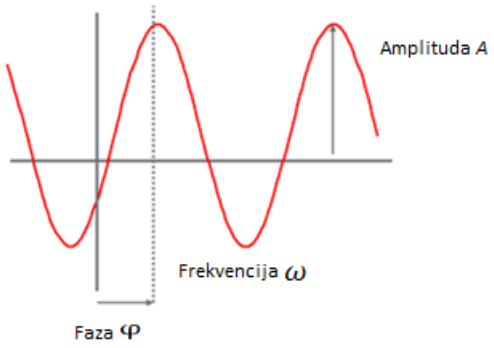
Svaki se signal iz vremenske domene može prevesti u frekvencijsku domenu koristeći Fourierovu transformaciju. Primjenom Fourierove transformacije svaki se složeni signal razlaže na više pojedinačnih sinusnih funkcija koje ga tvore [11].



Slika 10. Razlaganje složenog signala [11]

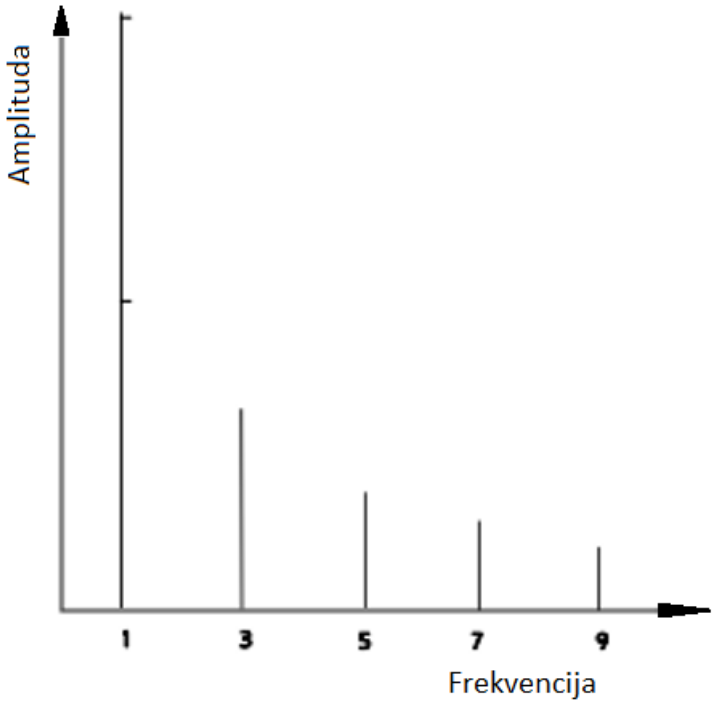
Svaka sinusna funkcija opisana je pomoću tri karakteristične veličine:

- Amplituda
- Frekvencija
- Faza



Slika 11. Karakteristične veličine sinusne funkcije [12]

Ukoliko se radi o deterministčkom signalu, primjenom Fourierove transformacije signal se može prikazati u frekvencijskoj domeni kao što prikazuje Slika 12.



Slika 12. Prikaz deterministčkog signala u frekvencijskoj domeni [12]

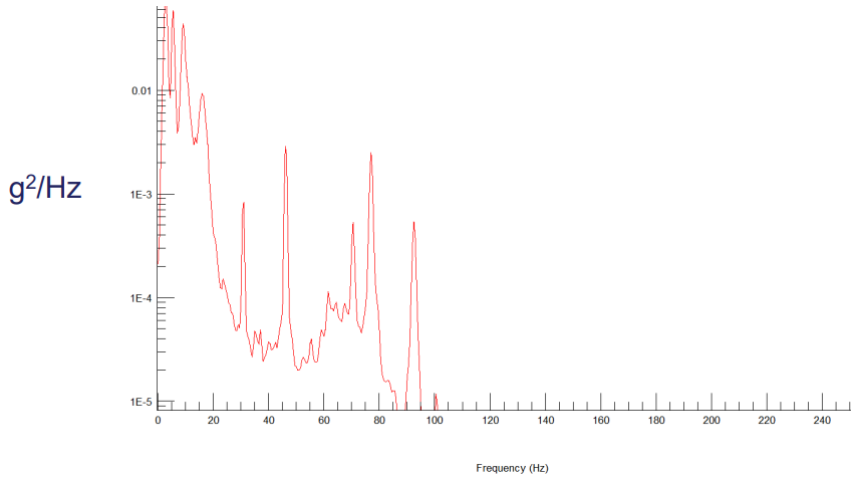
Ako se radi sa stohastičkim signalom, da bi se isti prikazao u frekvencijskoj domeni potrebno je stvoriti *PSD* dijagram. Taj dijagram na ordinatnoj osi ima umjesto amplitude kao što je to slučaj kod deterministčkog signala amplitudu varijable na kvadrat podijeljenu sa frekvencijskom razlučivošću.

$$S_{\mathrm{PSD}}(f) = \frac{|\mathrm{FFT}|^2}{\Delta f}, \tag{4.11}$$

Gdje je:

|FFT|: apsolutna vrijednost kompleksne amplitude originalnog signala na određenoj frekvenciji

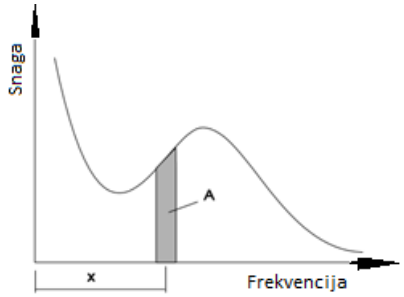
Δf: frekvencijska razlučivost



Slika 13. Prikaz stohastičkog signala u frekvencijskoj domeni[12]

PSD dijagram je čest način prikaza rezultata Fourierove transformacije u inženjerskoj praksi. Na taj se način prikazuju razine snage signala u odnosu na frekvenciju i može se koristiti za određivanje frekvencija od interesa [13].

Važno svojstvo *PSD* dijagrama je da površina ispod dijagrama odgovara korijenu RMS-a signala kao što prikazuje Slika 14.



Slika 14. Matematička interpretacija površine ispod grafa PSD-a [13]

4.3. Spektralni parametri

U vremenskoj domeni povijest naprezanja funkcija je vremena. Prednost RFC metode je mogućnost primjene Palmgren-Minerovog pravila. Standardan RFC algoritam koristi se radi procjene ukupne kumulativne štete D_{RFC} i odgovarajućeg broja ciklusa do loma N_{RFC}. Relacije za RFC primjenom Palmgren-Minerovog zapisa [4] glase

$$D_{\mathrm{RFC}}\left[S_{\mathrm{h}}(t)\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i}{N_{fi}} \;\Rightarrow\; N_{\mathrm{fRFC}}=\frac{1}{D_{\mathrm{RFC}}} \;\Rightarrow\; T_{\mathrm{fRFC}}=t_{\max}N_{\mathrm{fRFC}} \quad , \qquad (4.12\text{a-c})$$

gdje je T_{fRFC} vrijeme do loma. Uvedeno je ukupno vrijeme trajanja analize ponavljajućeg procesa naprezanja $t_{\max}$.

Stohastičko opterećenje tj. naprezanje slučajnog procesa u frekvencijskoj domeni definirano je pripadajućom spektralnom gustoćom snage naprezanja $S_{\mathrm{PSD}}(f)$, gdje je f frekvencija izražena u Hz. Statističke karakteristike stacionarnog procesa mogu biti opisane spektralnim momentima PSD-a. Generalizirani oblik za n-ti spektralni moment m_n, i odgovarajuća efektivna vrijednost tj. standardna devijacija, prikazane su sljedećim izrazima:

$$m_n=\int_0^{f_{\max}\to\infty} f^{\,n}S_{\mathrm{PSD}}(f)\,\mathrm{d}f, \quad S_{\mathrm{RMS}}=\sqrt{\int_0^{f_{\max}\to\infty} S_{\mathrm{PSD}}(f)\,\mathrm{d}f}=\sqrt{m_0} \quad , \qquad (4.13\text{a-b})$$

gdje je S_{RMS} efektivna vrijednost nultog spektralnog momenta m_0 prikazana kao funkcija širokopojasne frekvencije. $S_{\mathrm{PSD}}(f)$ uobičajeno je definiran mjernom jedinicom $\mathrm{MPa}^2/\mathrm{Hz}$. Nadalje, tipične spektralne statističke veličine glase:

$$E[0]=\sqrt{\frac{m_2}{m_0}}, \quad E[\mathrm{P}]=\sqrt{\frac{m_4}{m_2}}, \quad \gamma\left(0\le\gamma\le1\right)=\frac{E[0]}{E[\mathrm{P}]}, \quad \lambda\left(0\le\lambda\le1\right)=\sqrt{1-\gamma^2} \qquad (4.14)$$

gdje je $E[0]$ očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi, $E[\mathrm{P}]$ očekivani broj vrhova po sekundi, γ faktor nepravilnosti, a λ parametar spektralne širine pojasa. Za idealni uskopojasni proces (Narrow-Band), γ teži prema 1, dok za širokopojasne procese γ je jednak nuli. S obzirom da su svi spektralni parametri iz jednadžbe (4.14) realne i pozitivne skalarne vrijednosti, granice

od γ i λ su uvijek između 0 i 1, budući da je $E[\mathrm{P}] \geq E[0]$ [9], [3]. Iz općenitog spektralnog momenta m_n, dobija se odgovarajući bezdimenzijski spektralni parametar α_n:

$$\alpha_n \left(0 \leq \alpha_n \leq 1\right) = \frac{m_n}{\sqrt{m_0 m_{2n}}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \delta = \frac{m_1}{\sqrt{m_0 m_2}}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \equiv \gamma\,, \tag{4.15a-c}$$

gdje $\delta \equiv \alpha_1$ i $\alpha_2 \equiv \gamma$ su specijalni slučajevi dobiveni iz bezdimenzijskog spektralnog parametra α_n za n = 1 odnosno n = 2. Oštećenje po sekundi, tj. intenzitet oštećenja, broj ciklusa do zamornog loma i pripadajuće vrijeme do zamornog loma u frekvencijskoj domeni dane su relacijama:

$$\frac{D_{\mathrm{PDF}}}{t_{\max}}\left[\, p_{(\mathrm{PDF})}\left(S_{\mathrm{r}}\right)\right] = \frac{E\left[\mathrm{P}\right]}{B'_{\mathrm{rf}}} \int_0^{\infty} S_{\mathrm{r}}{}^{m}\, p_{(\mathrm{PDF})}\left(S_{\mathrm{r}}\right) \mathrm{d}S_{\mathrm{r}} \quad \Rightarrow \quad N_{\mathrm{fPDF}} = \frac{1}{D_{\mathrm{PDF}}} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{fPDF}} = t_{\max} N_{\mathrm{fPDF}}\,, \tag{4.16a-c}$$

gdje je $t_{\max}$ ukupno maksimalno vrijeme ponavljajućeg referentnog signala, B'_{rf} spektralni eksponent zamorne čvrstoće iskazan u mjernoj jedinici MPa^{m}, a $p_{(\mathrm{PDF})}$ je funkcija gustoće vjerojatnosti u mjernim jedinicama 1/MPa. Inverzni negativni Basquinov eksponent m je bezdimenzijski parametar i definiran je izrazom $m = -b^{-1}$. Izraz za računanje integrala glasi

$$I_{(\mathrm{PDF})}\left(S_{\mathrm{r}}\right) = \int_0^{\infty} S_{\mathrm{r}}{}^{m}\, p_{(\mathrm{PDF})}\left(S_{\mathrm{r}}\right) \mathrm{d}S_{\mathrm{r}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_{\mathrm{PDF}}}{t_{\max}} = \frac{E\left[\mathrm{P}\right]}{B'_{\mathrm{rf}}} I_{(\mathrm{PDF})}\left(S_{\mathrm{r}}\right). \tag{4.17}$$

5. Približna Dirlikova spektralna metoda

5.1. Dirlik

Najkorištenija spektralna metoda je upravo Dirlikova metoda. Ta se metoda sastoji od tri vrste raspodjela, a to su: eksponencijalna i dvije Rayleigh-eve funkcije gustoće vjerojatnosti.[14]

Izraz za Dirlikov približni PDF glasi:

$$Z = \frac{S_{\mathrm{r}}}{2\sqrt{m_0}} \quad \Rightarrow \quad p_{\mathrm{Dr}}\left(Z\right) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left(\overbrace{\frac{4}{5}\mathrm{e}^{\frac{-4Z}{5D_1}}}^{\text{eksponencijalno}} + \overbrace{\frac{D_2 Z}{R^2}\mathrm{e}^{\frac{-Z^2}{2R^2}}}^{\text{Rayleigh/NB}} + \overbrace{D_3 Z\, \mathrm{e}^{\frac{-Z^2}{2}}}^{\text{Rayleigh/NB}} \right), \tag{5.1}$$

Z: normalizirani raspon naprezanja

D_1,*R*, D_2, D_3 definiraju se izrazima:

$$D_1 = 2\gamma\frac{\delta-\gamma}{1+\gamma^2},\quad R=\frac{\gamma\left(1-\delta\right)-D_1^{\,2}}{1-\gamma-D_1+D_1^{\,2}},\quad D_2=\frac{\gamma\left(1-\delta\right)-D_1^{\,2}}{R-R^2},\quad D_3=1-D_1-D_2\,. \quad (5.2a\text{-}d)$$

U jednadžbama (5.2a-d) valja primijetiti da su koeficijenti ovisni o δ i γ, odnosno jednadžbe (4.17). Intenzitet oštećenja $D/t_{\max}$ definira se kao:

$$\frac{D_{\mathrm{Dr}}}{t_{\max}}=\frac{E\left[\mathrm{P}\right]}{B'_{\mathrm{rf}}}\int_0^{\infty}S_{\mathrm{r}}{}^{m}p_{\mathrm{Dr}}\left(S_{\mathrm{r}}\right)\mathrm{d}S_{\mathrm{r}}=\frac{E\left[\mathrm{P}\right]}{B'_{\mathrm{rf}}}I_{\mathrm{Dr}}\left(S_{\mathrm{r}}\right)\;\Rightarrow\;N_{\mathrm{fDr}}=\frac{1}{D_{\mathrm{Dr}}}\;\Rightarrow\;T_{\mathrm{fDr}}=t_{\max}N_{\mathrm{fDr}}, \quad (5.3a\text{-}b)$$

Integral iz jednadžbe (5.3) se piše kao

$$I_{\mathrm{Dr}}\left(S_{\mathrm{r}}\right)=\int_0^{\infty}S_{\mathrm{r}}{}^{m}p_{\mathrm{Dr}}\left(S_{\mathrm{r}}\right)\mathrm{d}S_{\mathrm{r}}=\left(\sqrt{m_0}\right)^{m}\left[\overbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^{m}D_1^{\,m+1}\Gamma\left(1+m\right)}^{\text{eksponencijalno}}+\overbrace{\left(\sqrt{8}\right)^{m}\left(D_2\left|R\right|^{m}+D_3\right)\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)}^{\text{Rayleigh/NB}}\right]. \quad (5.4)$$

Kumulativni integral i pripadajuće akumulirano oštećenje dobivaju se određivanjem granica integracije u vrijednosti raspona naprezanja S_r

$$I_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{c}}\left(S_{\mathrm{r}}\right)=\int_0^{S_{\mathrm{r}}}S_{\mathrm{r}}{}^{m}p_{\mathrm{Dr}}\left(S_{\mathrm{r}}\right)\mathrm{d}S_{\mathrm{r}}=I_{\mathrm{Dr}}\left(S_{\mathrm{r}}\right)-\left(\sqrt{m_0}\right)^{m}\left[\begin{array}{l}\overbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^{m}D_1^{\,m+1}\Gamma\left(1+m,\frac{2S_{\mathrm{r}}}{5D_1\sqrt{m_0}}\right)}^{\text{eksponencijalno}}+\\ \overbrace{+\left(\sqrt{8}\right)^{m}\left[D_2\left|R\right|^{m}\Gamma\left(1+\frac{m}{2},\frac{S_{\mathrm{r}}{}^{2}}{8R^2m_0}\right)+D_3\Gamma\left(1+\frac{m}{2},\frac{S_{\mathrm{r}}{}^{2}}{8m_0}\right)\right]}^{\text{Rayleigh/NB}}\end{array}\right] \quad (5.5)$$

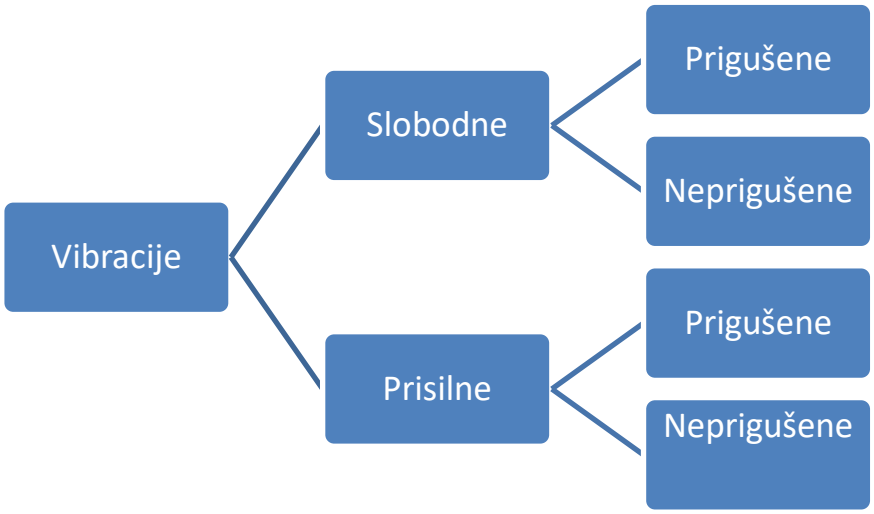
$$\frac{D_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{c}}}{t_{\max}}=\frac{E\left[\mathrm{P}\right]}{B'_{\mathrm{rf}}}I_{\mathrm{Dr}}^{\mathrm{c}}\left(S_{\mathrm{r}}\right). \quad (5.6)$$

Kako ova metoda nije teorijski potkrijepljena, dobiveni rezultati uzimaju se kao aproksimativni [10].

6. Modalna analiza

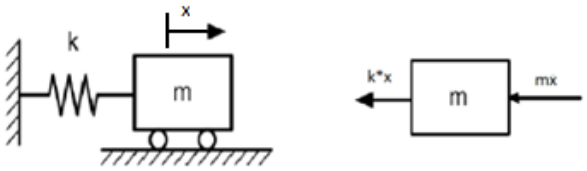
6.1. Modalna analiza općenito

Vibracije se mogu podijeliti u dvije skupine, a to su slobodne vibracije i prisilne vibracije koje se potom dijele u ovisnosti o postojanju prigušnog elementa u sustavu na prigušene i neprigušene kao što i prikazuje Slika 15.



Slika 15. Tipovi vibracija

Ukoliko nema vanjske sile koja djeluje na sustav, sustav može slobodno vibrirati. Gibanje sustava može biti započeto zbog početnog kratkotrajnog poremećaja.



Slika 16. Neprigušeni sustav s jednim stupnjem slobode

Iz neprigušenog sustava s jednim stupnjem slobode gibanja koji prikazuje Slika 16. može se izvesti konačni izraz za vlastitu kružnu frekvenciju sustava koja glasi

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \tag{6.1}$$

Gdje su:

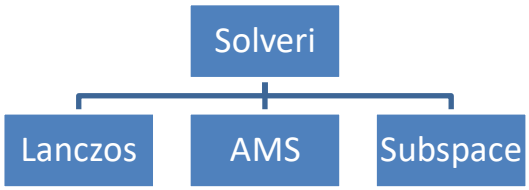
k: krutost sustava, N/m

m: masa sustava, kg

Prema definiciji, vlastita kružna frekvencija je vrijednost frekvencije na kojoj tijelo vibrira kada je pobuđeno iz ravnoteže (npr. kratkotrajni udarac). Nadalje važno je za zapamtiti da svaki sustav koji vibrira može imati beskonačno vlastitih kružnih frekvencija i ovisi samo o krutosti sustava i masi.

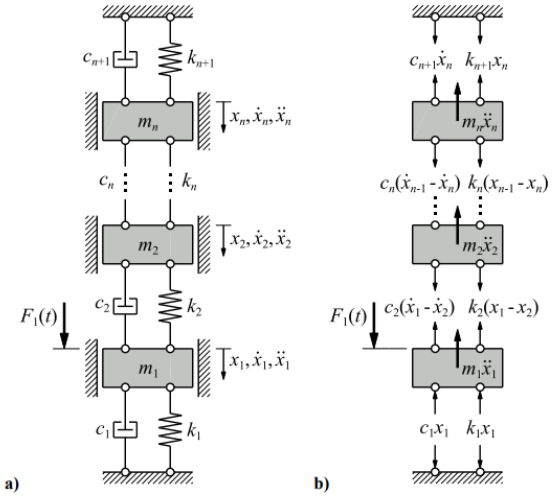
Modalna analiza (naziva se još i problem vlastitih vrijednosti) je matematički pristup pronalaska vlastitih kružnih frekvencija sustava. Za svaku vlastitu kružnu frekvenciju mogu se pronaći tzv. forme vibriranja koje predstavljaju oblik deformacije u tijelu na različitim vlastitim kružnim frekvencijama.

U programskom paketu *Abaqus* postoje nekolicina tzv. rješavača (eng. *solvera*) koji se koriste u modalnoj analizi za pronalazak vlastitih kružnih frekvencija.



Slika 17. Najpoznatiji rješavači u programskom paketu *Abaqus*

6.2. Matematički pregled modalne analize



Slika 18. Sustav s n-stupnjeva slobode gibanja (prilagođeno iz [14])

Za sustav s *n* stupnjeva slobode gibanja dan je matematički opis modalne analize.

Nakon oslobađanja tijela veza dobije sustav se *n* jednadžbi koje se onda mogu formirati u matričnu jednadžbu gibanja

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)\,. \tag{6.2}$$

Gdje je:

M:globalna matrica masa

C:globalna matrica prigušenja

K:globalna matrica krutosti

F:vektor uzbudne sile

x:vektor pomaka masa $m_1, m_2, \ldots m_n$

ẋ:vektor brzina masa $m_1, m_2, \ldots m_n$

ẍ:vektor akceleracija masa $m_1, m_2, \ldots m_n$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & m_{n-1} & 0 \\ Sim. & & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix}. \tag{6.3.}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & c_{n-1}+c_n & -c_n \\ Sim. & & \cdots & -c_n & c_n+c_{n+1} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ Sim. & & \cdots & -k_n & k_n+k_{n+1} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Vlastite kružne frekvencije ω_{nN} neprigušenog sustava s *n*-stupnjeva slobode mogu se dobiti analitički rješavanjem klasičnog problema svojstvenih vrijednosti koji je dan izrazom (6.8). Pretpostavlja se rješenje u harmonijskom obliku $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0 e^{i\Omega t}$ i sila uzbude u harmonijskom obliku $\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}_0 e^{i\Omega t}$.

$$\left[\mathbf{K}\text{-}(\omega_{n,N})^2\mathbf{M}\right]\mathbf{x}(t)=0\,. \tag{6.8.}$$

Izračunate vrijednosti vlastitih kružnih frekvencija koristiti će se za formiranje normaliziranog vektora formi vibriranja $\boldsymbol{x}_{0,n}$ te iz toga matrice $\boldsymbol{\Phi}$ koju nazivamo normalizirana modalna matrica formi vibriranja

$$\mathbf{x}_{0,\mathrm{n}}(\omega_{n,N})=\begin{bmatrix} x_{01,n}(\omega_{n,N}) \\ x_{02,n}(\omega_{n,N}) \\ \vdots \\ x_{0N,n}(\omega_{n,N}) \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} x_{01,n}(\omega_{n1}) & x_{01,n}(\omega_{n2}) & \cdots & x_{01,n}(\omega_{nN}) \\ x_{02,n}(\omega_{n1}) & x_{02,n}(\omega_{n2}) & \cdots & x_{02,n}(\omega_{nN}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{0N,n}(\omega_{n1}) & x_{0N,n}(\omega_{n2}) & \cdots & x_{0N,n}(\omega_{nN}) \end{bmatrix}. \tag{6.9}$$

Množenjem normalizirane i transponirane modalne matrice formi vibriranja globalne matrice mase i ponovno normalizirane modalne matrice formi vibriranja dobiva se modalna matrica masa $\mathbf{M}_{\Phi 0}$ te iz toga modalna transformacijska matrica masa $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{M}}$.

$$\mathbf{M}_{\Phi 0}=\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\Phi=\begin{bmatrix} (m_\phi)_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m_\phi)_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (m_\phi)_{N,N} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi_{\mathbf{M}}=\begin{bmatrix} \frac{x_{01,n}(\omega_{n1})}{\sqrt{(m_\phi)_{1,1}}} & \frac{x_{01,n}(\omega_{n2})}{\sqrt{(m_\phi)_{2,2}}} & \cdots & \frac{x_{01,n}(\omega_{nN})}{\sqrt{(m_\phi)_{N,N}}} \\ \frac{x_{02,n}(\omega_{n1})}{\sqrt{(m_\phi)_{1,1}}} & \frac{x_{02,n}(\omega_{n2})}{\sqrt{(m_\phi)_{2,2}}} & \cdots & \frac{x_{02,n}(\omega_{nN})}{\sqrt{(m_\phi)_{N,N}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{0N,n}(\omega_{n1})}{\sqrt{(m_\phi)_{1,1}}} & \frac{x_{0N,n}(\omega_{n2})}{\sqrt{(m_\phi)_{2,2}}} & \cdots & \frac{x_{0N,n}(\omega_{nN})}{\sqrt{(m_\phi)_{N,N}}} \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

Množenjem globalnih matrica mase, prigušenja i krutosti sa modalnom transformacijskom matricom mase u nastavku vrši se modalna transformacija. Time se dobiva:

Modalna matrica mase

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}{}_{\mathbf{M}}\,\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{M}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathrm{diag}.[1]=\mathbf{I}. \tag{6.11}$$

Modalna matrica prigušenja

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\Phi}}(\zeta_N)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}{}_{\mathbf{M}}\,\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{M}}=2\begin{bmatrix} \zeta_1\omega_{n1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2\omega_{n2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_N\omega_{nN} \end{bmatrix}=\mathrm{diag}.[2\zeta_N\omega_{nN}]=\zeta \tag{6.12}$$

Modalna matrica krutosti

$$\mathbf{K}_{\mathbf{\Phi}}(\omega_{nN}) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}{}_{\mathbf{M}}\,\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{M}} = 2\begin{bmatrix} \omega_{n1}{}^{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{n2}{}^{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{nN}{}^{2} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}.\left[\omega_{nN}{}^{2}\right] = \mathbf{\Omega} \qquad (6.13)$$

Može se primijetiti da su nove transformirane modalne matrice u dijagonalnoj formi koja znatno olakšava računanje. Nadalje množenjem vektora amplituda sila $\mathbf{F}_0$ s modalnom transformacijskom matricom mase $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{M}}$ dobiva se modalni vektor sila $\mathbf{F}_{\phi}$. Nakon toga formira se modalni vektor pomaka $\boldsymbol{y}_0$ prema izrazu (6.14 b). Za potrebe proračuna u sklopu ovog diplomskog rada za omjer prigušenja ζ uzeto je 5%. Konačno izvršava se transformacija modalnog vektora pomaka pomoću modalne transformacijske matrice masa $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{M}}$ u vektor amplituda pomaka u stvarnim koordinatama $\mathbf{x}_0$ prema izrazu (6.14 c) [15].

$$\mathbf{F}_{\Phi} = \Phi_{\mathbf{M}}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_0,\ \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0N} \end{bmatrix} = \left[(i\Omega)^2\mathbf{I} + (i\Omega)\zeta + \Omega\right]^{-1}\mathbf{F}_{\Phi} \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0N} \end{bmatrix} = \Phi_{\mathbf{M}}\mathbf{y}_0 \quad (6.14\text{a-c})$$

6.3. Hadamardov produkt matrica

Neka su zadane matrice **A** i **B** dimenzija *m x n*, gdje im je *m* broj redaka, a *n* broj stupaca.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}. \qquad (6.15.)$$

Hadamardov produkt matrica **A** i **B** je nova matrica **C** koja je također dimenzija *m x n*, čiji se članovi dobivaju množenjem odgovarajućih članova. Oznaka Hadamardovog množenja je „$\odot$“ .

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\odot\mathbf{B} \tag{6.16.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} & a_{14}b_{14} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} & a_{24}b_{24} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} & a_{33}b_{33} & a_{34}b_{34} \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

Za matrice različitih dimenzija Hadamardov produkt je nedefiniran.

Pored navedenog u okviru ovog rada korištena je i operacija Hadamardovog dijeljenja. Također je važno da su matrice istih dimenzija, tako su za primjer ponovno uzete matrice A i B iz izraza (6.15). Rezultat Hadamardovog dijeljenja je matrica **C** istih dimenzija kao matrice **A** i **B** dobivena dijeljenjem odgovarajućih članova. Oznaka Hadamardovog množenja je „$\oslash$“ . [17].

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\oslash\mathbf{B} \tag{6.18.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \oslash \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}/b_{11} & a_{12}/b_{12} & a_{13}/b_{13} & a_{14}/b_{14} \\ a_{21}/b_{21} & a_{22}/b_{22} & a_{23}/b_{23} & a_{24}/b_{24} \\ a_{31}/b_{31} & a_{32}/b_{32} & a_{33}/b_{33} & a_{34}/b_{34} \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

7. Programski paketi

7.1. Abaqus

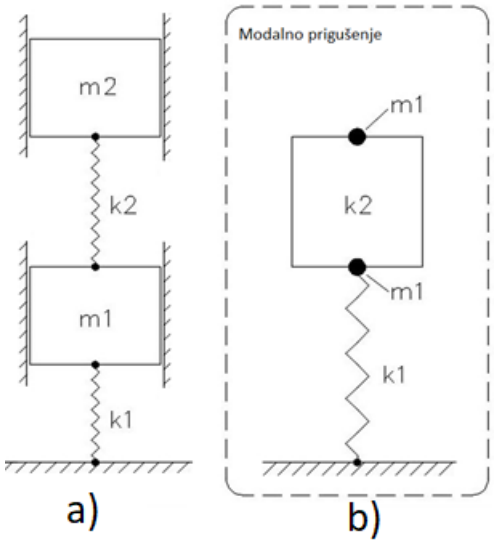
Abaqus je programski paket za numeričko rješavanje problema mehanike i čvrstoće konstrukcija. Razvijen je od strane tvrtke *Dassault Systèmes Simulia Corp*. i koristi se u industriji i akademskim istraživanjima diljem svijeta. *Abaqus* nudi mnoge mogućnosti za modeliranje materijala i struktura, uključujući linearnu i nelinearnu analizu, dinamičku analizu, analizu loma, analizu vibracija i termomehaničku analizu. *Abaqus* također nudi niz dodatnih modula koji proširuju mogućnosti programa. Primjerice, modul za modeliranje kompozitnih materijala i modul za simulaciju tekućina. Kada se model izradi, moguće je provesti analizu koristeći različite metode, poput konačnih elemenata ili metoda konačnih razlika. *Abaqus* također nudi mogućnosti za optimizaciju modela i za vizualizaciju rezultata analize. *Abaqus* se koristi u mnogim industrijama, uključujući inženjerstvo, proizvodnju, naftnu industriju, geotehničko inženjerstvo, medicinu i mnoge druge. Koristi se i u akademskim istraživanjima, poput istraživanja materijala, inženjerskih simulacija i biomehanike.

7.2. FE-Safe

FE-Safe je programski paket za procjenu trajnosti, pouzdanosti materijala i konstrukcija. Razvijen je od strane tvrtke *Dassault Systèmes Simulia Corp*., koristi se u industriji i akademskim istraživanjima diljem svijeta. Isti omogućuje analizu ponašanja materijala i konstrukcija pod različitim uvjetima opterećenja, uključujući cikličko opterećenje, vibracije i termomehaničke uvjete. Također nudi mogućnosti za analizu utjecaja različitih procesa proizvodnje na trajnost materijala. Osnovna ideja *FE-Safe* je da analiza trajnosti i pouzdanosti na procjeni mjesnog naprezanja materijala pod različitim uvjetima opterećenja. Za to se koristi metoda konačnih elemenata. *FE-Safe* nudi mogućnosti procjene trajnosti materijala i konstrukcija, odnosno predviđanje vremena do pojave zamora materijala i otkaza konstrukcije. Također nudi mogućnosti za optimizaciju materijala i konstrukcija u cilju poboljšanja trajnosti i pouzdanosti. *FE-Safe* se koristi u mnogim industrijama, uključujući inženjerstvo, proizvodnju, naftnu industriju, geotehničko inženjerstvo, medicinu i mnoge druge. Koristi se i u akademskim istraživanjima, poput istraživanja materijala, inženjerskih simulacija i biomehanike.

8. Metodologija

8.1. Analitička metoda



Slika 19. Proračunski model a) opći b) prilagođeni

U okviru ovog diplomskog rada razvijena je analitička metoda za statističku procjenu spektralnog zamora. Analitička metoda razvijena je u programskom paketu *MATLab 2017b*. Slika 19.a prikazuje opći model s dva stupnja slobode gibanja prema kojem je metoda razvijena. Slika 19.b prikazuje prilagođeni proračunski model u kojem je opruga k_2 prikazana peko jednog konačnog elementa.

Za potrebe razvoja analitičke metode opruga k_2 smatrana je kao štapni konačni element. Svaki štap ima svoje karakteristike, a to su modul elastičnosti, duljina i površina poprečnog presjeka. Jedno od svojstava štapa je njegova aksijalna krutost kojom se opire promjeni duljine. Izraz za aksijalnu krutost štapa

$$k = \frac{A \cdot E}{L_0}. \tag{8.1.}$$

Gdje su:

A- površina poprečnog presijeka m^2

E- Youngov modul elastičnosti N/m^2

L_0- početna duljina štapa m

Naprezanje se definira kao omjer aksijalne sile F po presjeku štapa A

$$S = \frac{F}{A}. \tag{8.2.}$$

Sila u opruzi se definira kao umnožak krutosti opruge i relativnog pomaka

$$F = k_2 \cdot \Delta x. \tag{8.3.}$$

Kombincijom izraza (8.1 - 8.3) i sređivanjem dobija se izraz koji povezuje relativni pomak i naprezanje.

$$S = \frac{E}{L_0} \cdot \Delta x. \tag{8.4.}$$

Na taj se način nakon provedene modalne analize dobije vektor amplituda pomaka iz kojeg se potom može izračunati naprezanje. Omjer E/L_0 za potrebe ovog rada nazvan je korekcijski faktor naprezanja.

Slika 20. prikazuje potrebne korake za izračun vremena do loma u frekvencijskoj domeni u obliku dijagrama toka.

Metoda započinje formiranjem matrice mase **M**, matrice krutosti **K**, te vektora uzbudnih sila **F**, uz predefinirano prigušenje ζ. Nadalje se odvija modalna analiza koja započinje izračunom vlastitih kružnih frekvencija ω_n. U narednim koracima izračunava se transformacijska matrica $\mathbf{\Phi}_\mathrm{M}$ pomoću koje se prelazi u modalne koordinate te se na kraju dobiva vektor amplituda pomaka $\mathbf{x}_0$.

Da bi se iz vektora amplitude pomaka dobila naprezanja potrebno je najprije vrijednosti naprezanja x_{01} i x_{02} oduzeti čime se dobija $x_{0\mathrm{rel}}$ te potom pomnožiti sa korekcijskim faktorom naprezanja.

$$x_{01} = \frac{F_{\Phi 1} \cdot \Phi_{\mathrm{M}11}}{2i \cdot \zeta_1 \cdot \Omega \cdot {\omega_{n1}}^2 - \Omega^2} + \frac{F_{\Phi 2} \cdot \Phi_{\mathrm{M}12}}{2i \cdot \zeta_2 \cdot \Omega \cdot {\omega_{n2}}^2 - \Omega^2}. \tag{8.5.}$$

$$x_{02} = \frac{F_{\Phi 1} \cdot \Phi_{\mathrm{M}21}}{2i \cdot \zeta_1 \cdot \Omega \cdot {\omega_{n1}}^2 - \Omega^2} + \frac{F_{\Phi 2} \cdot \Phi_{\mathrm{M}22}}{2i \cdot \zeta_2 \cdot \Omega \cdot {\omega_{n2}}^2 - \Omega^2}. \tag{8.6.}$$

$$x_{0\mathrm{rel}} = x_{01} - x_{02}. \tag{8.7.}$$

$$S_0 = \frac{E}{L_0}(x_{01} - x_{02}). \tag{8.8.}$$

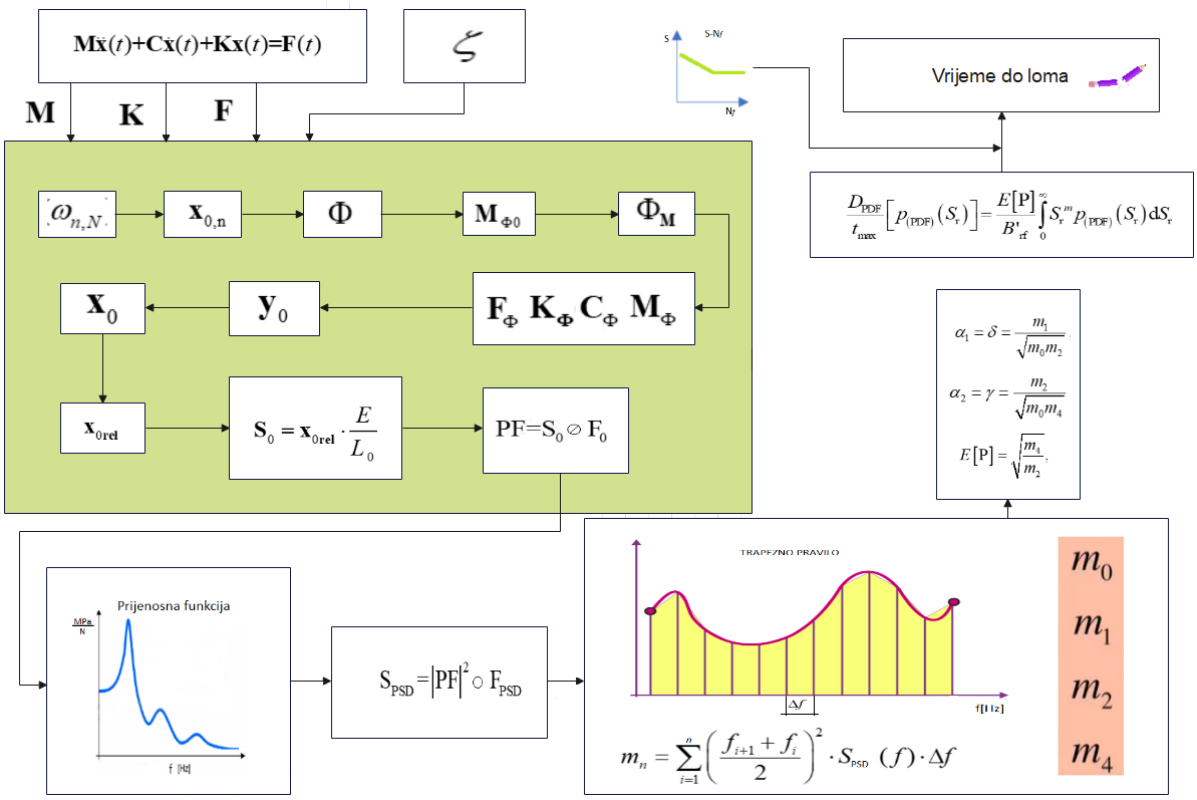
Da bi se iz naprezanja dobila prijenosna funkcija potrebno je koristiti *Hadamardovo* dijeljenje matrica.

$$\mathrm{PF} = S_0 \oslash F_0. \tag{8.9.}$$

Potom se formira S_{PSD} najprije kvadriranjem prijenosne funkcije, a potom *Hadamardovim* množenjem matrica sa F_{PSD}.

$$S_{\mathrm{PSD}} = (\mathrm{PF})^2 \odot F_{\mathrm{PSD}}. \tag{8.10.}$$

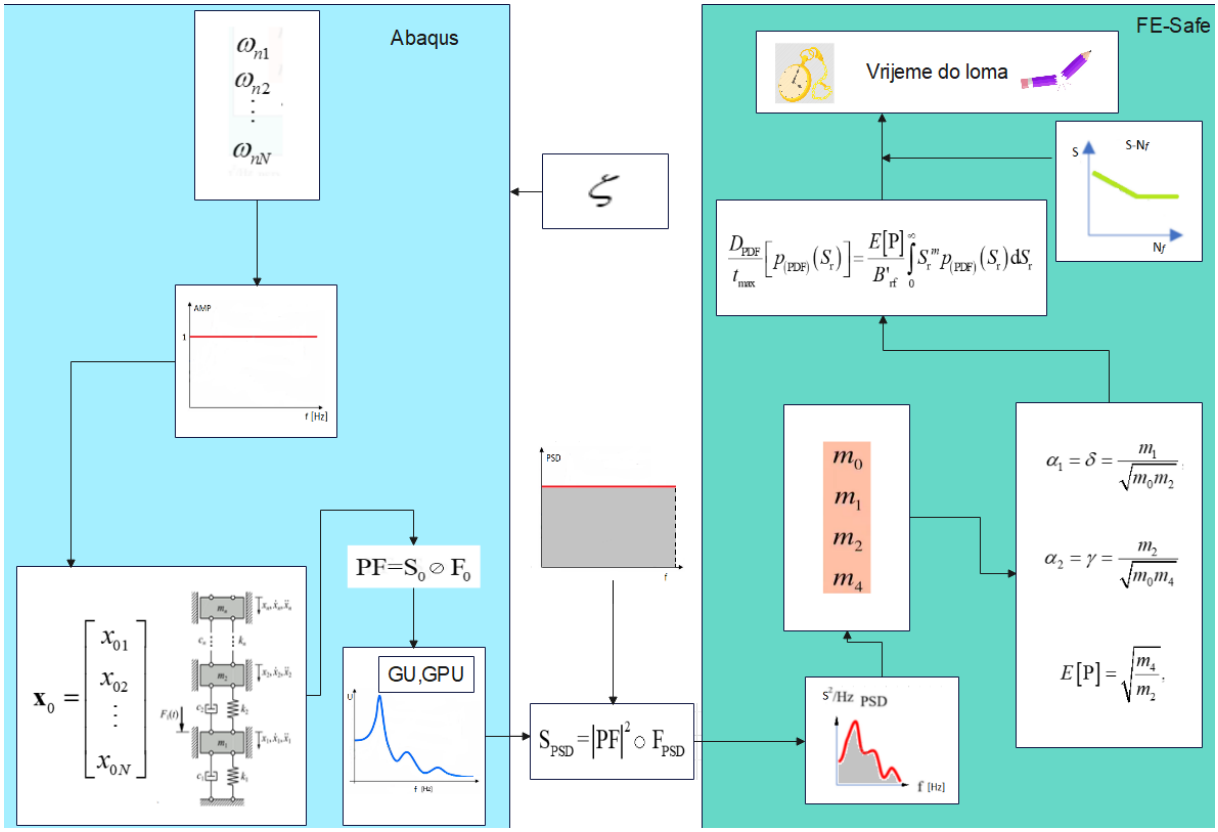
Frekvencijski raspon S_{PSD} potom se dijeli na n dijelova i korištenjem trapeznog pravila izračunavaju se spektralni momenti m_0 m_1 m_2 i m_4. Nadalje se izračunavaju spektralni parametri α_1 i α_2 te *E[P]*. S prethodno izračunatim spektralnim parametrima, odabranom Dirlickovom *PDF* funkcijom i podacima o materijalu iz *S-Nf* dijagrama dobije se konačno vrijeme do loma.



Slika 20. Dijagram toka razvijene analitičke metode

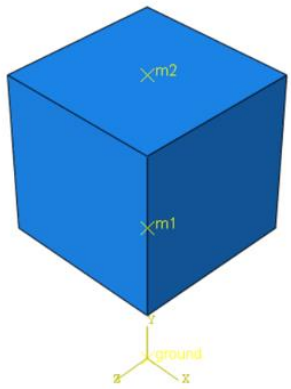
8.2. Numerička metoda

U okviru ovog diplomskog rada osmišljena je numerička metoda za statističku procjenu spektralnog zamora. Metoda je razvijena u kombinaciji programskih paketa *Abaqus* i *FE-Safe*. Slika 21. prikazuje potrebne korake u svakom od prethodno navedenih programa kako bi se izračunalo vrijeme do loma. Radi jednostavnosti prikaz je u obliku dijagrama toka.



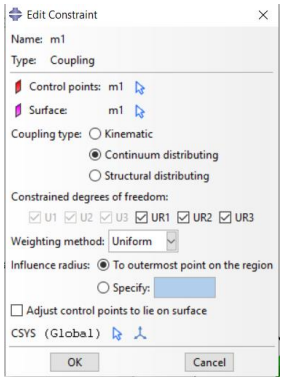
Slika 21. Dijagram toka za razvijenu numeričku metodu

Postavljanje modela započinje u modulu *Part* izradom geometrije odnosno kocke dimenzija 1x1x1 koja predstavlja oprugu k_2 i koja je diskretizirana s jednim konačnim elementom. Nadalje kreirana su u modulu *Property* materijalna svojstva, a to su modul elastičnosti i poissonov faktor te su geometriji dodijeljena svojstva. Sljedeći korak se nastavlja u modulu *Assembly* gdje su izrađene tri referentne točke. Jedna referentna točka predstavlja podlogu (ground), druga masu m_1 treća masu m_2.



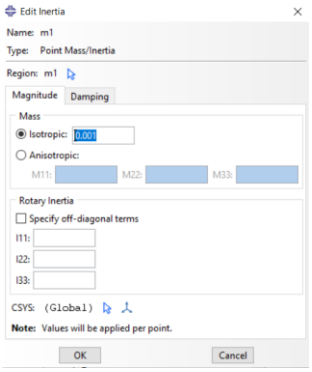
Slika 22. Prikaz numeričkog modela s pripadnim referentnim točkama

Kako referentne točke ovako izrađene nisu spojene s geometrijom već samo postoje u prostoru na ručno definiranim koordinatama potrebno ih je vezati na geometriju, a to se izrađuje u modulu *Interaction* naredom *Create constraint*. Tako se referentna točka m_1 preko naredbe *coupling* spaja na geometriju, te na isti način i točka m_2.



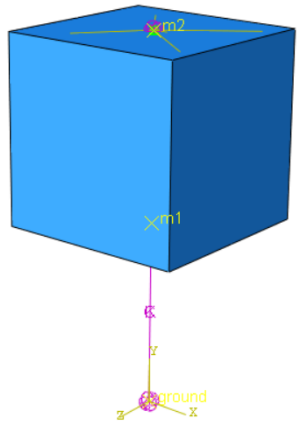
Slika 23. Spajanje referentnih točaka sa geometrijom

U sljedećem koraku točkama m_1 i m_2 pridružuje se masa naredbom *inertias*.



Slika 24. Pridruživanje mase

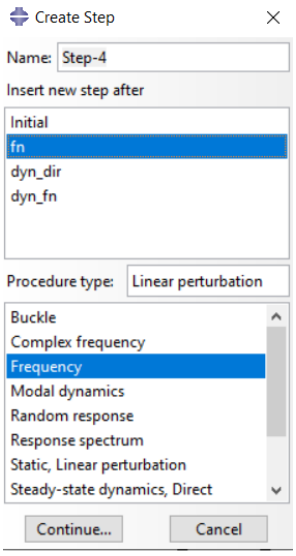
Naredbom *springs/dashpots* u modulu *interactions* definira se opruga k_1 . Odabirom opcije *connect two pairs* stvara se između točaka ground i m_1 opruga k_1 sa prethodno definiranom krutosti.



Slika 25. Konačni prikaz definiranog modela

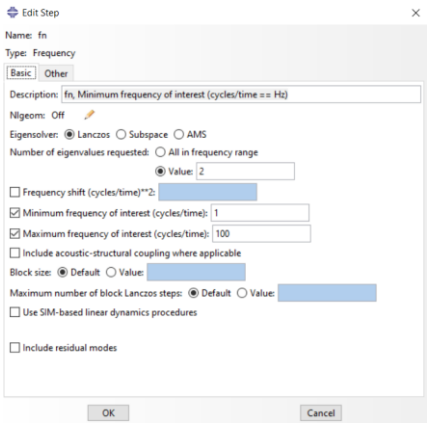
U modulu *Step* definirana su tri *stepa*, a to su: *initial* (*Abaqus* ga stvara sam) te ručno definirani *fn*, *dyn_fn*. *Step*-ovi *fn* i *dyn_fn* potrebni su za kasniji nastavak rada u programskom paketu *FE-Safe* jer isti radi samo s modalnim matricama.

Prvo je potrebno kreirati *step fn* u kojem će se odvijati modalna analiza odnosno u kojem će programski paket računati vlastite kružne frekvencije.



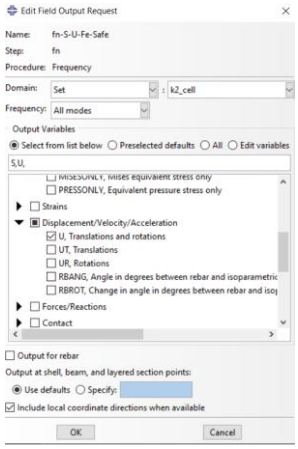
Slika 26. Kreiranje koraka za izračun vlastitih kružnih frekvencija

U *stepu fn* tražene su dvije svojstvene vrijednosti. U opciji *Edit step* odabire se *solver Lanczos* i broj svojstvenih. U postavkama *stepa fn* moguće je dodatno definirati minimalnu frekvenciju i maksimalnu frekvenciju od interesa te se time određuje raspon u kojem će se tražiti vlastite kružne frekvencije.



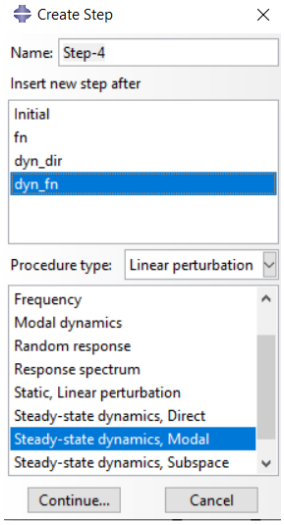
Slika 27. Postavljanje parametara rješavača za izračun vlastitih kružnih frekvencija

Kreiran je u *stepu fn Field Output Request* gdje je moguće odabrati varijable koje će *Abaqus* spremati u .odb file. Odabrani su pomaci U i naprezanja *S*. Dodatno se postavilo da je domena odnosno dio geometrije na kojoj će *Abaqus* pratiti promjene u naprezanjima i pomacima, opruga k_2 („kocka“ u modelu) i da se to odvija kroz cijeli prethodno definirani frekvencijski raspon.



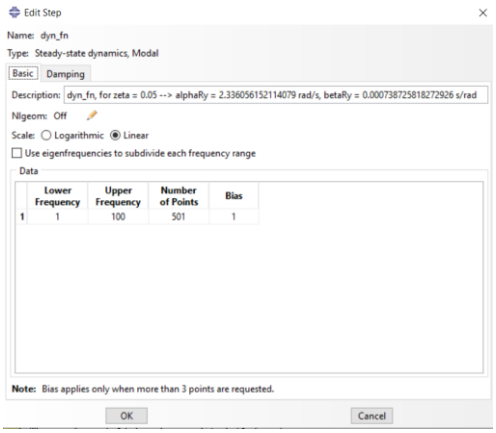
Slika 28. Odabrane varijable za *Field Output*

Da bi se mogla provesti modalna analiza u programskom paketu *Abaqus* morao se kreirati *step fn* u kojem se pronalaze svojstvene vrijednosti, a tek nakon *step dyn_fn* u kojoj se odvija proces modalne analize (obrnuti postupak ne funkcionira).

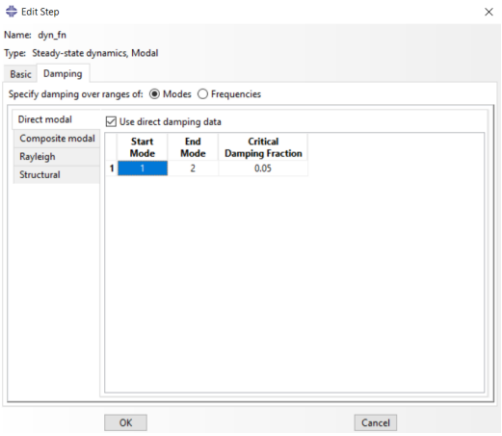


Slika 29. Izrada koraka za provedbu modalne analize

U koraku *Edit Step* postavljen je frekvencijski raspon od interesa između 1 i 100 Hz te broj dijelova na koji se dijel taj raspon. U modulu *Damping* odabrana su oba moda i uneseno prigušenje 0,05.

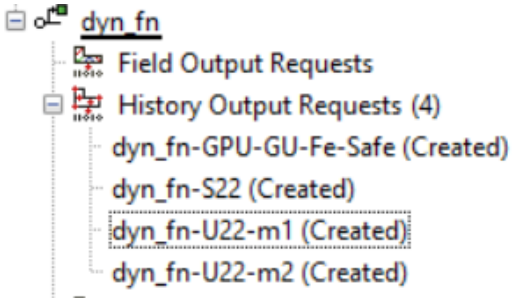


Slika 30. Postavljanje frekvencijskog raspona



Slika 31. Postavljanje prigušenja

Dodatno su kreirana četiri *History Outputa*. Prvi je nazvan dyn_fn-GPU-GU-Fe-Safe i u njega se bilježe vrijednosti GPU i GU na opruzi k_2. Potom dyn_fn_S22 u kojem se bilježe vrijednosti naprezanja u smjeru y osi koja se javljaju u opruzi k_2. Te dodatno dyn_fn-U22-m1 i dyn_fn_U22-m2 kojima se prate vrijednosti pomaka u smjeru osi y referentnih točaka m_1 i m_2.



Slika 32. Sadržaj History Outputa

U modulu *Load* postavljeni su rubni uvjeti i opterećenja sustava. Referentna točka ground je potpuno uklještena dok su referentnim točkama m_1 i m_2 omogućene translacije u smijeru y osi odnosno U_2. Postavljena je sila u točku m_1 u *stepu dyn_fn* i iznosi 100 N. Na kraju se definira *Job* u modulu *Job,* u ovom slučaju nazvan vib_fat.

Numerički proračun nakon Abaqusa se nastavlja u programskom paketu *FE-Safe*. Za dobivenu prijenosnu funkciju izračunatu preko izraza (8.9) i ulazni PSD sile, računa se PSD naprezanja preko izraza (8.10) koji se kasnije koristi za izračun spektralnih momenata m_0 m_1 m_2 i m_4, te potom α_1, α_2 . *FE-Safe* radi sa Dirlikovim *PDF-om* i na na kraju uz prethodno unesene podatke o materijalu izračunava vrijeme potrebno do loma.

9. Rezultati

Budući da je opruga k_2 predstavljena kao kocka može se smatrati kao štap dimenzija kvadratnog poprečnog presjeka 1mm x 1mm i duljine 1mm. Površina poprečnog presjeka je tada 1 mm^2, a krutost opruge je tada izračunato 1N/mm prema izrazu (8.1), uz uzimanje modula elastičnosti kao 1 MPa.

Ulazni podaci su tada:

m_1=0.001 t, m_2=0.0001 t, k_1=1 N/mm, k_2=1 N/mm, F_{01}=100 N, F_{02}=0 N, ζ=0.05, m=10, S_{fa}=10000.

U Tablici 1. dani su rezultati numeričke i analitičke metode te je prikazana relativna greška između istih. Relativna greška izračunava se prema izrazu:

$$\textbf{Relativna greška}=\frac{\textbf{Numeričko rješenje-Analitičko rješenje}}{\textbf{Analitičko rješenje}}\cdot 100\%\,. \qquad (9.1)$$

Tablica 1. Usporedba veličina dobivenih analitičkim i numeričkim putem

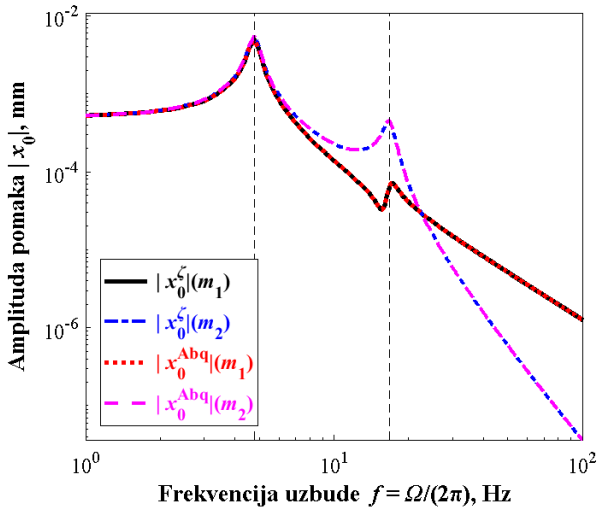
	Analitička metoda	Numerička metoda	Relativna greška
f_{n1}	4,7772	4,7772	0%
f_{n2}	16,767	16,7673	0,00179%
m_0	32420,3502	32420,3	0,000155%
m_1	449402,1981	449401	0,000267%
m_2	7209254,1725	7209190	0,000890%
m_4	258974226,8268	258890000	0,032523%
RMS	180,0565	180,056	0,000278%
$E[0]$	14,912	14,912	0%

$E[P]$	18,9526	18,9502	0,012663%
α_2	0,78681	0,786901	0,011566%
T_f	541,3356	541,72	0,070196%

Vidi se izrazito veliko poklapanje svih potrebnih veličina za proračun zamora za obije metode (poklapanje veće od 99%) kao i konačni rezultat što je broj ciklusa odnosno vrijeme do loma.

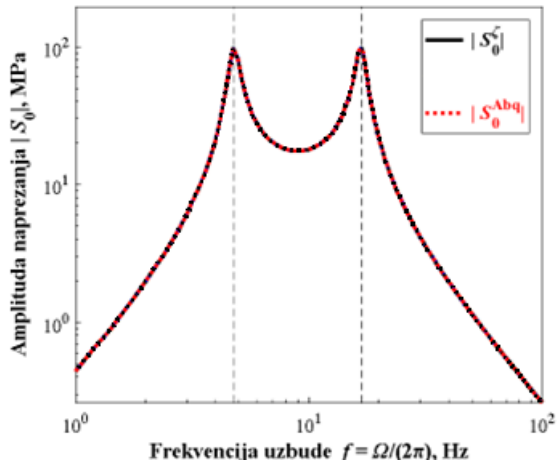
Slika 33. prikazuje graf ovisnosti amplituda pomaka x_0 o frekvenciji uzbude.

Plava linija i crna linija prikazuju vrijednosti amplituda pomaka mase m_1 i m_2 dobivene analitičkim putem dok crvena i roza linija prikazuju vrijednosti amplituda pomaka masa m_1 i m_2 dobivene numeričkim putem. Vertikalne linije prikazuju rezonantne frekvencije. Dodatno, vidljivo je i poklapanje rezultata analitičke i numeričke metode.



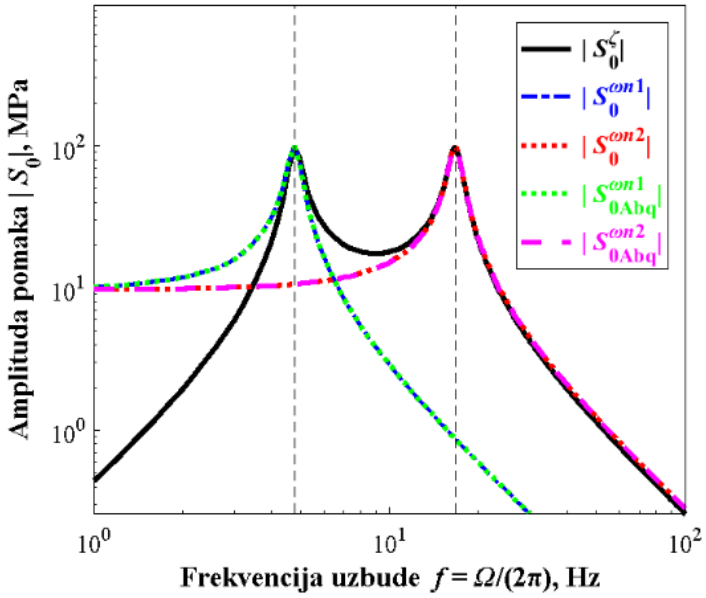
Slika 33. Ovisnosti amplitude pomaka o frekvenciji uzbude

Slika 34. prikazuje ovisnost amplitude naprezanja o frekvenciji uzbude, crna linija prikazuje rezultate dobivene analitičkom metodom dok crvena linija prikazuje rezultate dobivene numeričkim putem. Vertikalne iscrtkane linije prikazuju vrijednosti rezonantnih frekvencija. Za obije metode rezultati se u potpunosti poklapaju.



Slika 34. Ovisnosti amplituda naprezanja o frekvenciji uzbude

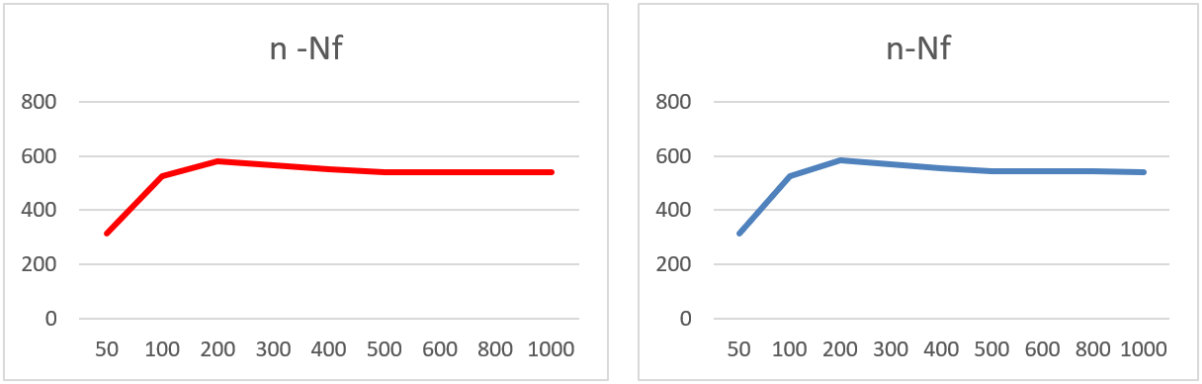
Slika 35. prikazuje ponašanje sustava kada se potpuno zanemari prva odnosno druga rezonantna frekvencija. Zelena i plava linija predstavljaju odziv sustava u neposrednoj blizini samo prve rezonantne frekvencije izračunate analitički i numerički.. Roza i crvena linija predstavljaju odziv sustava u neposrednoj blizini samo druge rezonantne frekvencije izračunate analitički i numerički. Crna krivulja prikazuje amplitude pomaka pri djelovanju obije rezonantne frekvencije.



Slika 35. Ovisnost amplitude pomaka za svaku rezonantnu frekvenciju posebno

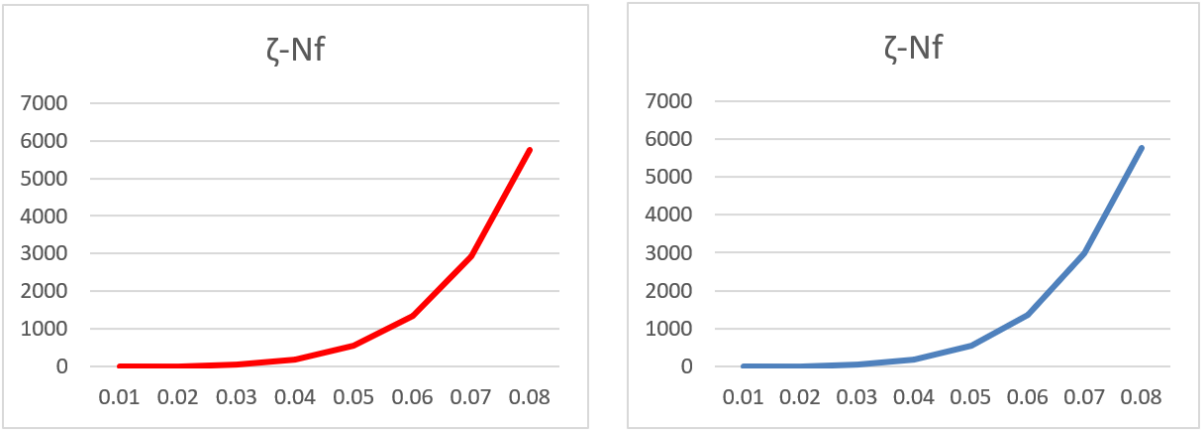
Slika 36. prikazuje ovisnost broja dijelova na koji se dijeli frekvencijski pojas o broju ciklusa do pojave loma. Lijevi graf pokazuje rezultate dobivene analitičkom metodom dok desna prikazuje rezultate dobivne numeričkom metodom. Na obije slike može se primijetiti u

da povećavanjem broja dijelova broj ciklusa do pojave loma raste sve do vrijednosti n= 500, nakon koje vrijednost N_f konvergiraju. Grafovi su identični što potvrđuje točnost rezultata obaju metoda.



Slika 36. Graf ovisnosti broja dijelova n frekvencijske domene o broju ciklusa do loma

Mijenjanjem parametra prigušenja ζ broj ciklusa do loma se mijenja kao što i prikazuje Slika 37.. Dijagram lijevo predstavlja rezultate dobivene analitičkim putem dok graf desno rezultate dobivene numeričkim putem. Grafovi su identični što dodatno potvrđuje točnost numeričke i analitičke metode.



Slika 37. Dijagram ovisnosti prigušenja o broju ciklusa do loma

10. Zaključak

U okviru ovog rada opisan je fenomen pojave zamornog loma te dan detaljan pregled metode brojanja ciklusa za ponavljajuću povijest naprezanja koja se još zove pojednostavljena *Rainflow* metoda.

Pored toga dan je osnovni opis tipova signala s naglaskom na stohastičke signale i njihovu pretvorbu iz vremenske domene u frekvencijsku i prikaz u dijagramima spektralne gustoće snage. Opisane su osnovne statističke veličine potrebe za rad sa stohastičkim signalima u kontekstu proračuna zamora. Uz to dan je matematički opis Dirlikove spektralne metode.

Nadalje matemtički je opisana modalna analiza koja je korištena u numeričkoj i u analitičkoj metodi, te dan uvod za bolje razumijevanje navedene metode.

Razvijena je analitička metoda u programskom paketu MATLab i ista je prikazana u obliku dijagrama toka uz opis. Uz to je razvijena i numerička metoda u programskim paketima *Abaqus* i FE-*Safe* uz koju je također izrađen pripadni dijagram toka uz dodatna detaljna pojašnjenja o postavljanju numeričkog modela u *Abaqusu.*

Na kraju rada može se zaključiti iz dobivenih rezultata da razvijene metode daju smislene i fizikalne rezultate. Obije metode daju rezultate čija je uzajamna greška manja od 1%. Ova metoda prikazana je za dva stupnja slobode gibanja, međutim može se koristiti za složenije modele s mnogo više stupnjeva slobode.

Literatura

[1] *Stephens, R. I., Fatemi, A., Stephens, R. R., Fuchs, H. O.*, **Metal Fatigue in Engineering, Second Edition**, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[2] Kutleša, E., **Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora metodom toka kiše, Završni rad,** FSB, Zagreb, 2021.

[3] Večerić, S**., Procjena zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni za bimodalni spektar naprezanja, Završni rad,** FSB,Zagreb, 2021.

[4] Matijević, M., **Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora iz stohastičke povijesti naprezanja u vremenskoj i frekvencijskoj domeni, Završni rad,** FSB Zagreb,2021.

[5] *Čakmak, D.*, **Rainflow metoda, Seminarski rad iz kolegija Mehanika oštećenja i mehanika loma**, FSB, Zagreb, 2014

[6] *Kranjčević, N.*, **Elementi Strojeva, Poglavlja iz kolegija Elementi konstrukcija I, IA i IB**, FSB, Zagreb, 2012.

[7] *ASTM Standards*, **E1049 – 85, Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis**, 2011.

[8] Bishop, N.W.M., Sherratt, F., **Finite Element Based Fatigue Calculations**, NAFEMS Ltd, Farnham, 2000.

[9] Bishop, N.W.M., **The use of frequency domain parameters to predict structural fatigue**, Ph.D. Thesis, University of Warwick, Coventry, England, 1988.

[10] *Slavič, J., Mršnik, M., Česnik, M., Javh, J., Boltežar, M*., **Vibration Fatigue by Spectral Methods**, 1st Edition, From Structural Dynamics to Fatigue Damage – Theory and Experiments, Elsevier, 2020

[11] *Brandt, A.*, **Noise and vibration analysis,** University of Southern Denmark, 2011.

[12] *Dassault Systemes,* FE-Safe 6.5 documentation Volume2

[13] *Dassault Systemes,* FE-Safe 6.5 documentation Volume3

[14] Čakmak,D., **Ideal inerter-based vibration system parametric study**,**Seminarski rad**,FSB Zagreb,2018

[15] Čakmak, D.**, Optimizacija dinamičkoga ponašanja naprednih aktivnih konstrukcija, Doktorski rad,** FSB Zagreb,2020.

[16] Giovanni de Morais, **Essential random vibration fatigue for structural dynamic applications**, **Prezentacija**, 3Dexperience, 2015

[17] Budimir,I.,**Matrični diferencijalni račun, Diplomski rad,** PMF, Split, 2016.