

Model toplinskog spremnika pri zagrijavanju vode u vertikalnom cijevnom izmjenjivaču topline

Šimunić, Marko

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:191096>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-29**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Marko Šimunić

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Dr. sc. Nenad Ferdelji, dipl. ing.

Student:

Marko Šimunić

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svim profesorima i asistentima koji su se potrudili prenijeti znanje, i svim prijateljima i obitelji za podršku kroz ovaj cijeli proces.

Marko Šimunić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

| | |
|-------------------------------------|--------|
| Sveučilište u Zagrebu | |
| Fakultet strojarstva i brodogradnje | |
| Datum | Prilog |
| Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1 | |
| Ur.broj: 15 - 1703 - 22 - | |

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Marko Šimunić** JMBAG: **0035217254**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Model toplinskog spremnika pri zagrijavanju vode u vertikalnom cijevnom izmjenjivaču topline**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Heat storage model in vertical duct water heat exchanger**

Opis zadatka:

Često korištena idealizacija u tehničkim primjenama je pojam toplinskog spremnika kao tijela beskonačnog toplinskog kapaciteta što osigurava konstantnost njegove temperature pri prijenosu topline. Ako se ne radi o faznim promjenama, takvi toplinski spremnici su u pravilu fluidi kao što su atmosferski zrak, morska voda ili riječni tokovi kod kojih mogućnost miješanja osigurava primjenjivost navedene pretpostavke. Međutim, ako toplinski spremnik nema mogućnost miješanja, kao posljedica difuzijskog karaktera konduktivnog mehanizma prijenosa topline, uočava se promjena temperature toplinskog spremnika usprkos njegovom velikom toplinskom kapacitetu, kao što je to primjer tla kod bušotinskih izmjenjivača topline.

U radu je potrebno diskretizacijom dvodimenzionalne diferencijalne jednačbe provođenja topline simulirati toplinske pojave u toplinskom spremniku pri čemu se kao rashladni medij koristi voda koja struji kroz cijevni izmjenjivač (materijal St. 316L) prstenastog poprečnog presjeka. Kroz unutarnju cijev izmjenjivača, vanjskog promjera d i debljine stijenke 6 mm, utiskuje se voda ulazne temperature 20 °C, a kroz prstenasti prostor, omeđen vanjskom cijevi $\varnothing 120 \times 6$ mm, struji voda izmjenjujući toplinu s toplinskim spremnikom čija je temperatura na ulazu jednaka temperaturi vode, a vertikalni gradijent iznosi 0,05 °C/m, odnosno 0,1 °C/m.

Za odabrana konstantna svojstva toplinskog spremnika, potrebno je:

- 1) odabrati shemu i parametre diskretizacije obzirom na brzinu i točnost simulacije,
- 2) odabrati maseni protok vode i vanjski promjer unutarnje cijevi d obzirom na potrebnu snagu pumpe,
- 3) analizirati utjecaj visine na izlaznu temperaturu vode za odabrane parametre pod 2),
- 4) za odabrane parametre pod 2) prikazati vremensku i prostornu promjenu temperature toplinskog spremnika.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

30. 11. 2021.

1. rok: 24. 2. 2022.
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.
3. rok: 22. 9. 2022.

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Izv. prof. dr. sc. Nenad Ferdelji

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

SADRŽAJ

| | |
|---|-----|
| SADRŽAJ..... | I |
| POPIS SLIKA..... | II |
| POPIS TABLICA..... | III |
| POPIS OZNAKA..... | IV |
| SAŽETAK..... | V |
| SUMMARY..... | VI |
| 1. Uvod..... | 1 |
| 2. Model Izmjenjivača..... | 3 |
| 3. Matematički model..... | 4 |
| 3.1. Provođenje topline u krutini..... | 4 |
| 3.2. Modeliranje prijenosa topline pri strujanju kapljevine kroz cijev..... | 5 |
| 4. Metoda konačnih razlika..... | 7 |
| 4.1. Diskretizacija jednadžbi..... | 7 |
| 4.1.1. Aproksimacija derivacije razlikom unaprijed..... | 8 |
| 4.1.2. Aproksimacija derivacije razlikom unatrag..... | 8 |
| 4.1.3. Aproksimacija derivacije središnjom razlikom..... | 9 |
| 4.2. Prostorna diskretizacija..... | 10 |
| 4.3. Vremenska diskretizacija..... | 11 |
| 4.3.1. Vremenska diskretizacija razlikom unaprijed..... | 12 |
| 4.3.2. Vremenska aproksimacija razlikom unatrag..... | 12 |
| 4.3.3. Vremenska diskretizacija središnjom razlikom..... | 13 |
| 4.3.4. Cranck-Nicolsonova metoda..... | 14 |
| 5. Primjena metode konačnih razlika..... | 15 |
| 5.1. Postavljanje jednadžbi za krutine..... | 15 |
| 5.2. Postavljanje jednadžbe za vodu..... | 16 |
| 5.3. Rubni uvjeti..... | 17 |
| 6. Rješavanje jednadžbi..... | 23 |
| 7. Odabir masenog protoka i vanjskog promjera unutarnje cijevi..... | 25 |
| 8. Rezultati..... | 29 |
| 8.1. Strujanje B..... | 31 |
| 8.2. Utjecaj vrste tla..... | 32 |
| 8.3. Gubitak toplinskog toka zbog smanjenja temperature tla..... | 34 |
| 8.4. Utjecaj toplinske provodnosti vanjske cijevi..... | 38 |
| 8.5. Utjecaj toplinske provodnosti unutarnje cijevi..... | 40 |
| 8.6. Utjecaj dubine..... | 41 |
| 8.7. Utjecaj temperaturnog gradijenta..... | 43 |

| <i>Ime Prezime</i> | <i>Završni rad</i> |
|---------------------------|--------------------|
| 8.8. Validacija koda..... | 45 |
| 9. ZAKLJUČAK..... | 46 |
| LITERATURA..... | 47 |

POPIS SLIKA

| | | |
|-----------|---|----|
| Slika 1. | Prikaz cijevnog izmjenjivača..... | 2 |
| Slika 2. | Isječak domene sa strujanjem B..... | 3 |
| Slika 3. | Isječak domene sa strujanjem A..... | 3 |
| Slika 4. | Model prijenosa topline kroz krutinu u cilindričnim koordinatama..... | 4 |
| Slika 5. | Prostorna diskretizacija metode konačnih razlika..... | 11 |
| Slika 6. | Kontrolni volumen vode u cijevi..... | 16 |
| Slika 7. | Volumeni kod stijenke cijevi..... | 20 |
| Slika 8. | Numeracija..... | 24 |
| Slika 9. | Ovisnost koeficijenta prijelaza topline o promjeru D | 26 |
| Slika 10. | Ovisnost snage o masenom protoku..... | 28 |
| Slika 11. | Ovisnost snage o vanjskom promjeru unutarnje cijevi..... | 28 |
| Slika 12. | Početni uvjeti..... | 30 |
| Slika 13. | Temperaturna raspodjela strujanja A nakon 2, 5 i 10 h..... | 30 |
| Slika 14. | Temperaturna raspodjela strujanja B nakon 2, 5 i 10 h..... | 31 |
| Slika 15. | Temperaturne raspodjele tla nakon 10 h..... | 33 |
| Slika 16. | Postotak povećanja dobivene energije strujanja B naprema strujanju A..... | 34 |
| Slika 17. | Promjena izlazne temperature tla u vremenu..... | 35 |
| Slika 18. | Temperaturna raspodjela tla nakon 50 h..... | 36 |
| Slika 19. | Izlazna temperatura šljunkaste zemlje kroz 600 h..... | 37 |
| Slika 20. | Temperaturna raspodjela šljunkaste zemlje nakon 50, 200 i 600 sati..... | 38 |
| Slika 21. | Ovisnost dobivene energije o toplinskoj provodnosti vanjske cijev..... | 39 |
| Slika 22. | Ovisnost dobivene energije o toplinskoj provodnosti unutarnje cijevi..... | 41 |
| Slika 23. | Omjer dobivene i utrošene energije za različite dubine..... | 42 |
| Slika 24. | Ovisnost dobivene energije o dubini..... | 43 |
| Slika 25. | Ovisnost dobivene energije o temperaturnom gradijentu..... | 44 |

POPIS TABLICA

| | |
|--|----|
| Tablica 1. Termalna svojstva materijala..... | 29 |
| Tablica 2. Prostorna diskretizacija..... | 29 |
| Tablica 3. Toplinska svojstva tla..... | 32 |
| Tablica 4. Rezultati simulacija strujanja A za razna tla..... | 32 |
| Tablica 5. Rezultati simulacija strujanja B za razna tla..... | 32 |
| Tablica 6. rezultati simulacija sa strujanjem A od 50 sati za razna tla..... | 34 |
| Tablica 7. rezultati simulacija sa strujanjem B od 50 sati za razna tla..... | 35 |
| Tablica 8. Rezultati simulacija strujanja A za različite temperaturne provodnosti vanjske cijevi..... | 38 |
| Tablica 9. Rezultati simulacija strujanja B za različite temperaturne provodnosti vanjske cijevi..... | 39 |
| Tablica 10. Rezultati simulacija strujanja A za različite temperaturne provodnosti vanjske cijevi..... | 40 |
| Tablica 11. Rezultati simulacija strujanja B za različite temperaturne provodnosti vanjske cijevi..... | 40 |
| Tablica 12. Rezultati simulacija strujanja A na različitim dubinama..... | 41 |
| Tablica 13. Rezultati simulacija strujanja B na različitim dubinama..... | 42 |
| Tablica 14. Rezultati simulacija strujanja A za različite temperaturne gradijente..... | 43 |
| Tablica 15. Rezultati simulacija strujanja B za različite temperaturne gradijente..... | 44 |

POPIS OZNAKA

| Oznaka | Jedinica | Opis |
|-----------------|--------------|--|
| A | m^2 | Površina |
| \underline{A} | | Matrica koeficijenata |
| a | m^2/s | Temperaturna provodnost, odnosno toplinska difuzivnost |
| a | | Vrijednost oko koje se razvija Taylorov red |
| b | | Poznati član jednadžbe |
| \underline{b} | | Vektor poznatih vrijednosti jednadžbe |
| c_p | $J/(kg\ K)$ | Specifični toplinski kapacitet |
| D | m | Vanjski promjer unutarnje cijevi |
| D_v | m | Vanjski promjer vanjske cijevi |
| D_h | m | Hidraulički promjer cijevi |
| f | | Faktor trenja |
| g | m/s^2 | Gravitacijsko ubrzanje |
| ΔH | J | Razlika ulazne i izlazne entalpije |
| H | J | Entalpija |
| \dot{H} | W | Protok entalpije |
| Δh_f | m | Visina gubitaka |
| L | m | Duljina cijevi |
| Nu | | Nusseltov broj |
| q_m | kg/s | Maseni protok |
| q | $J/(m^2\ s)$ | Gustoća toplinskog toka |
| Re | | Reynoldsov broj |
| Δr | m | Prostorni pomak u r smjeru |
| T | $^{\circ}C$ | Temperatura |
| T_s | $^{\circ}C$ | Temperatura stijenke |
| \underline{T} | $^{\circ}C$ | Vektor temperatura |
| T | m | Debljina stijenke |
| Δt | s | Vremenski korak |
| U | J | Unutarnja energija |
| V | m^3 | Volumen |
| v | m/s | Brzina |
| v_{max} | m/s | Maksimalna brzina |
| Δx | | Pomak varijable x |
| Δz | m | Prostorni pomak u z smjeru |

| | | |
|-----------|----------------------|-------------------------------|
| α | W/(m ² K) | Koeficijent prijelaza topline |
| Φ | W | Toplinski tok |
| λ | W/(m K) | Toplinska provodnost |
| μ | kg/(m s) | Dinamička viskoznost |
| ρ | kg/m ³ | Gustoća |

SAŽETAK

Cilj ovog rada je analizirati nestacionarni prijenos topline u vertikalnim izmjenjivaču topline. Pomoću računalnih simulacija analizirat će se utjecaju raznih parametara na dobivenu termalnu energiju i izlaznu temperaturu izmjenjivača. Napravit će se matematički model ovog sustava, koji će se zatim riješiti pomoću metode konačnih razlika u programskom jeziku Python.

Ključne riječi: vertikalni izmjenjivač topline, metoda konačnih razlika.

SUMMARY

This paper aims to analyze dynamic heat transfer in a vertical heat exchanger. The effect of several parameters on the heat exchanger's gained thermal energy and output temperature will be tested with computer simulations. A mathematical model will be made, which will then be solved with the finite difference method using the programming language Python.

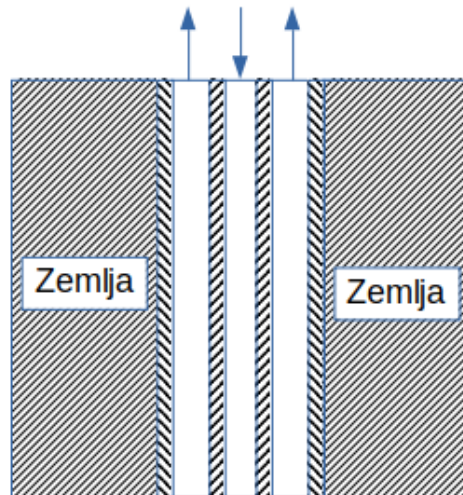
Keywords: vertical heat exchanger, finite difference method

1 Uvod

U unutrašnjosti zemlje postoji velika količina toplinske energije. Na većini dijelova svijeta blizu površine zemlje temperatura se povećava za $25 - 30 \text{ }^\circ\text{C} / \text{km}$. Na nekim mjestima je ipak ovaj temperaturni gradijent puno veći a jedan od načina iskorištavanja te toplinske energije je kao toplinski spremnik za izmjenjivače topline. Problem kod analiziranja ovakvih izmjenjivača je to što je jednačbe koje opisuju nestacionarni prijenos topline jako kompleksno rješavati analitički. Međutim, te jednačbe se mogu riješiti numerički. Diferencijalne jednačbe koje opisuju fizikalni proces mogu se pretvoriti u velik broj algebarskih jednačbi koje se mogu riješiti pomoću računala. U ovom radu će se analizirati jedan vertikalni izmjenjivač topline s izvedbom cijev u cijevi metodom konačnih razlika.

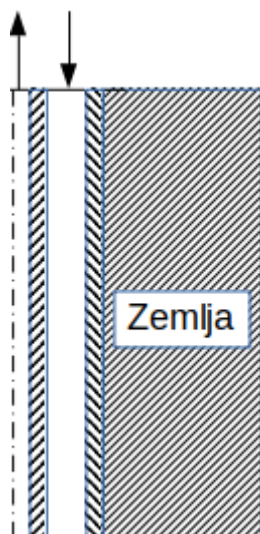
2 Model izmjenjivača

Za zadani izmjenjivač voda ulazi u unutarnju cijev a izlazi kroz prstenasti prostor između cijevi.

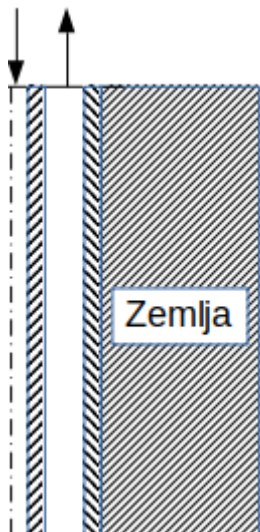


Slika 1. Prikaz cijevnog izmjenjivača

Ovakvi izmjenjivači topline se obično koriste za hlađenje tekućine pomoću hladnog tla. Pošto će se u ovom radu analizirati grijanje tekućine pomoću tople zemlje, napraviti će se i usporediti i slučaj u kojem voda ulazi kroz prstenasti prostor između cijevi a izlazi kroz unutarnju cijev, koji je pogodniji za grijanje tekućine. Slučaj u kojem tekućina ulazi kroz unutarnju cijev će se zvati „Strujanje A”, a slučaj u kojem voda ulazi kroz prstenasti prostor između cijevi će se zvati „Strujanje B”. Ovaj problem prijenosa topline je osnosimetričan, zbog čega se može koristiti samo isječak geometrije. Ovaj isječak sa strujanjem A prikazan je na slici 3, a sa strujanjem B na slici 2.



Slika 2. Isječak domene sa strujanjem B



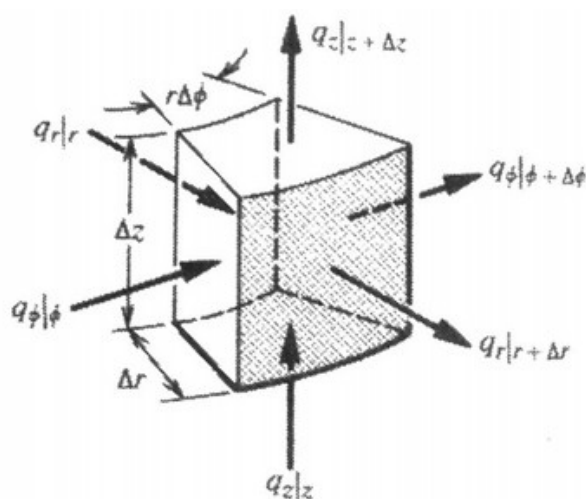
Slika 3. Isječak domene sa strujanjem A

3 Matematički model

Diferencijalna jednačina provođenja topline je bilanca energije za određeni infinitezimalno mali volumen. Brzina promjene unutarnje energije nekog volumena je jednaka sumi toplinskih tokova i snaga koje prolaze kroz granice volumena. Zbog osnosimetričnosti problema moguće je zanemariti promjenu temperature po promjeni kuta.

3.1 Provođenje topline u krutini

Za ovaj slučaj provođenja topline kroz krutinu volumen se modelira kao zatvoreni sustav bez izmjene rada i bez toplinskih izvora ili ponora tako da postoje samo toplinski tokovi kondukcijom kroz granice volumena.



Slika 4. Model prijenosa topline kroz krutinu u cilindričnim koordinatama

Za homogenu i izotropnu krutinu temperaturno neovisnih fizikalnih svojstava može se napisati sljedeća jednačina u cilindričnim koordinatama.

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda \left(\frac{\partial T}{r \partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) + \lambda \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \Phi^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

U kojoj je λ toplinska provodnost materijala, ρ gustoća a c_p specifični toplinski kapacitet. Gornja jednadžba može se napisati u drugačijem obliku.

$$a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \Phi^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

U ovoj jednadžbi veličina a predstavlja temperaturnu provodnost, odnosno toplinsku difuzivnost i izražava se u m^2/s .

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (3.3)$$

Pošto je ovaj problem osnosimetričan, derivacija po kutu jednaka je nuli. Tako da se jednadžba 2.2 može napisati u ovisnosti samo o r i z .

$$a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.4)$$

3.2 Modeliranje prijenosa topline pri strujanju kapljevine kroz cijev

Na tekućinu u cijevi se mora gledati kao otvoreni sustav, u koji će ulaziti toplinski tok kroz granice volumena koje diraju cijevi, ali će mu se mijenjati energija i zbog toga što tekućina ulazi i izlazi iz njega. Pošto se na ovaj sustav ne djeluje s nikakvim radom, i nema toplinskih izvora ili ponora, vrijedi sljedeća jednadžba.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{H}_{ulaz} - \dot{H}_{izlaz} + \Phi_{uk} \quad (3.5)$$

Toplinski tok u jednadžbi može se modelirati rubnim uvjetom treće vrste.

$$\Phi_{uk} = \alpha A (T_s - T) \quad (3.6)$$

Unutarnja energija i protok entalpije mogu se izraziti kao funkcije temperature.

$$U = \rho V \cdot c_p \cdot T \quad (3.7)$$

$$\dot{H} = q_m c_p T \quad (3.8)$$

Ako se jednačbe 3.7, 3.8 i 3.6 uvrste u jednačbu 3.5 i ako su gustoća i toplinski kapacitet konstantni u vremenu dobiva se jednačba 3.9.

$$\rho V c_p \frac{\partial T}{\partial t} = q_m c_p (T_{ulaz} - T_{izlaz}) + \alpha A (T_s - T) \quad (3.9)$$

U kojoj α predstavlja sveukupni koeficijent prijelaza topline i može se izračunati iz Nusseltovog broja.

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{D_h} \quad (3.10)$$

U kojoj je D_h hidraulički promjer cijevi.

4 Metoda konačnih razlika

Jednadžba 3.4 se rješava numerički tako da se prostorno i vremenski diskretizira domena na koju se tada primjenjuju osnovni konzervativni zakoni. Tako se može algebarski računati promjenu temperature u prostori i vremenu. Iako se s većinom metoda može riješiti većina problema, ipak su određene metode bolje prilagođene za određene probleme. Problemi čvrstoće obično se rješavaju metodom konačnih elemenata, za probleme toka fluida je potrebna metoda koja dobro prikazuje diskontinuitete pa se obično koristi metoda konačnih volumena, a metoda konačnih razlika je često primjenjivana za razne probleme zbog svoje jednostavnosti i široke primjenjivosti.

4.1 Diskretizacija jednadžbi

Neka proizvoljna funkcija se može aproksimirati Taylorovim redom.

$$y(x) = y(a) + \frac{\partial y}{\partial x}(a)(x-a) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(a)(x-a)^2 + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(a)(x-a)^3 + \dots \quad (4.1)$$

ili

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n y}{\partial x^n}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (4.2)$$

gdje je a točka oko koje se razvija red. Pošto će se jednadžba 4.1 koristiti za procjenu greške načina diskretizacije, praktičnije ju je zapisati preko odstupanja od a .

$$y(a+\Delta x) = y(a) + \frac{\partial y}{\partial x}(a)(\Delta x) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(a)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(a)(\Delta x)^3 + \dots \quad (4.3)$$

Pošto je 4.3 beskonačno duga jednačba, trebat će zanemariti neke članove što će uvesti neku grešku. Pošto je svaki sljedeći član u jednačbi Δx puta manji od prethodnog, ako se uzme Δx apsolutne vrijednosti znatno manje od 1 svaki sljedeći član će biti znatno manji od prethodnog pa je greška proporcionalna s $(\Delta x)^n$ gdje je n najmanja potencija koju smo zanemarili. Ova činjenicu se koristi za procjenu greške metode diskretizacije jednačbe.

4.1.1 Aproksimacija derivacije razlikom unaprijed

Kod derivacije unaprijed računa se Taylorov red za točku ispred one oko koje razvijamo red. Iz jednačbe 4.3 može se izraziti prva derivacija funkcije.

$$\frac{\partial y}{\partial x}(a) (\Delta x) = y(a + \Delta x) - y(a) - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(a) \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(a) \frac{(\Delta x)^3}{3!} - \dots \quad (4.4)$$

Ako se zanemare svi članovi nakon $y(a)$ i ako se cijela jednačba podjeli s (Δx) dobiva se aproksimacija za prvu derivaciju u točki a .

$$\frac{\partial y}{\partial x}(a) = \frac{y(a + \Delta x) - y(a)}{\Delta x} \quad (4.5)$$

Nakon što se jednačba 4.4 podjeli s Δx najveći zanemareni član u postupku a s njime i greška aproksimacije će biti proporcionalan s Δx .

4.1.2 Aproksimacija derivacije razlikom unatrag

Kod derivacije unatrag je odstupanje $-\Delta x$ tako da jednačba 4.3 postaje

$$y(a - \Delta x) = y(a) + \frac{\partial y}{\partial x}(a) (-\Delta x) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(a) \frac{(-\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(a) \frac{(-\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (4.6)$$

Ako se iz nje izrazi prva derivacija u točki a i zanemare sve derivacije višeg reda dobiva se sljedeći izraz.

$$\frac{\partial y}{\partial x}(a) = \frac{y(a) - y(a - \Delta x)}{\Delta x} \quad (4.7)$$

Gdje je opet najveći zanemareni član, a s njim i greška, proporcionalan s Δx .

4.1.3 Aproximacija derivacije središnjom razlikom

Ako se oduzmu Taylorovi redovi za članove ispred i iza točke a

$$\begin{aligned} y(a + \Delta x) &= y(a) + \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(a)}{1!}(\Delta x) + \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(a)}{3!}(\Delta x)^3 + \dots \\ -[y(a - \Delta x)] &= -\left[y(a) + \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(a)}{1!}(-\Delta x) + \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(a)}{2!}(-\Delta x)^2 + \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(a)}{3!}(-\Delta x)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

svi članovi koji imaju parne potencije će se pokratiti. Tako da će se dobit sljedeći izraz.

$$y(a + \Delta x) - y(a - \Delta x) = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(a)}{1!} 2(\Delta x) + \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(a)}{3!} 2(\Delta x)^3 + \dots \quad (4.8)$$

Ako se iz ove jednadžbe izluči derivacija prvog reda i zanemare sve ostale dobiva se sljedeća jednadžba.

$$\frac{\partial y}{\partial x}(a) = \frac{y(a + \Delta x) - y(a - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (4.9)$$

Pošto se u ovom slučaju druga derivacija pokratila, najveći član koji se mora zanemariti je proporcionalan s $(\Delta x)^2$ tako da će i greška ove metode biti proporcionalna s $(\Delta x)^2$. Ovo je znatno manja greška naprema prijašnjim aproksimacijama pogotovo za fine diskretizacije, tako da će se za diskretizaciju jednadžbe 3.4 koristiti jednadžba 4.9. Ako se zbroje Taylorovi redovi za točku ispred i iza točke razvijanja reda sve derivacije neparnog reda će se pokratiti i ostat će izraz.

$$y(a+\Delta x)+y(a-\Delta x)=2y(a)+\frac{\partial^2 y(a)}{2!}2(\Delta x)^2+\frac{\partial^4 y(a)}{4!}2(\Delta x)^4+\dots \quad (4.10)$$

Iz ovog izraza se može izlučiti druga derivacija i zanemariti sve ostale.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(a)=\frac{y(a+\Delta x)+y(a-\Delta x)-2y(a)}{(\Delta x)^2} \quad (4.11)$$

Iz ovoga je dobiven i izraz za drugu derivaciju gdje je u postupku najveći zanemareni član proporcionalan s $(\Delta x)^3$ tako da je i greška proporcionalna s $(\Delta x)^3$. Za diskretizaciju jednadžbe 3.4 će se koristiti jednadžba 4.11.

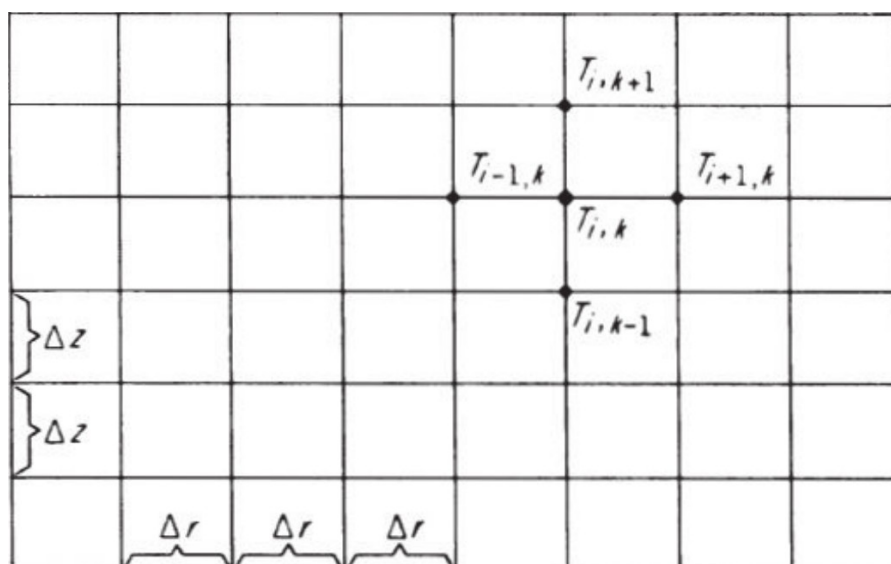
4.2 Prostorna diskretizacija

Metoda konačnih razlika dijeli prostor na točke čije udaljenosti predstavljaju infinitezimalne promjene prostora. Svaka točka predstavlja jednu vrijednost funkcije u prostoru. Notacija koja se koristi za predstavljane temperature u prostoru je $T_{i,k}$ gdje indeks i predstavlja poziciju u r smjeru a indeks k u z smjeru. Oznaka $T_{i+1, k+1}$ predstavlja točku koja je pomaknuta za jedno mjesto u pozitivnom smjeru r osi i za jedno mjesto u pozitivnom smjeru z osi. Primjer diskretizacije cijevi metodom konačnih razlika za dvije dimenzije r i z je prikazan na slici 5. Kako se u ovom problemu prijenosa topline mogu zanemariti promjene fizikalnih veličina u smjeru koordinate fi , ova raspodjela točaka će zapravo izgledati isto kao da je napravljena za dvodimenzijski slučaj u kartezijevim koordinatama. Na slici svako presjecište linija

predstavlja jednu točku a označena je neka točka $T_{i,k}$ zajedno s njenim susjednim točkama. Jednadžba 3.4 može se diskretizirati u ovom prostoru pomoću jednadžbi 4.9 i 4.11 i dobiva se jednadžba 4.12.

$$a \left(\frac{T_{i,k+1} + T_{i,k-1} - 2T_{i,k}}{\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,k} - T_{i-1,k}}{r 2 \Delta r} + \frac{T_{i+1,k} + T_{i-1,k} - 2T_{i,k}}{\Delta r^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.12)$$

Vremenski član je ostao kao derivacija a na njega će se obratiti pozornost u sljedećem poglavlju. Vidi se da je u jednadžbi 4.12 lijeva strana postala potpuno algebarska. Kada se jednadžba potpuno diskretizira cijela postaje potpuno algebarska i postavlja se za svaku točku u prostoru.



Slika 5. Prostorna diskretizacija metode konačnih razlika

4.3 Vremenska diskretizacija

Problem je zavisan samo o dvije prostorne dimenzije ali ovisi i o vremenskoj dimenziji. Analizirat će se samo aproksimacije prve derivacije. Kao primjer za ideje vremenske diskretizacije koristit će se jedno dimenzijska jednadžba provođenja topline kroz krutinu 3.4.

$$a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.4)$$

4.3.1 Vremenska diskretizacija razlikom unaprijed

Ako se primjeni jednačba 4.5 na vremensku derivacije jednačbe 3.4 dobiva se jednačba 4.13.

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = a \left(\frac{T_{i,k+1}^n + T_{i,k-1}^n - 2T_{i,k}^n}{\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n}{r2\Delta r} + \frac{T_{i+1,k}^n + T_{i-1,k}^n - 2T_{i,k}^n}{\Delta r^2} \right) \quad (4.13)$$

Pojavljuje se novi indeks n koji označuje u kojem je točka vremenskom trenutku, temperatura T_i^{n+1} predstavlja temperaturu T_i^n nakon što je prošao vremenski period Δt . U jednačbi 4.13 temperature novog vremenskog trenutka T_i^{n+1} ovise samo o temperaturama iz prijašnjeg trenutka. Ovakve metode se zovu eksplicitne metode. Ovo omogućava jednostavno računanje stanja novih vremenskih trenutaka od početnog do željenog trenutka. Vrijednosti se mogu staviti u matricu, i mogu se jako brzo izračunati za novi vremenski trenutak pomoću računala. Još jedna prednost ovakve diskretizacije je to što ne zauzima puno memorije. Ako sustav ima m nepoznanica, matrica će imati m članova što je obično znatno manje od drugih metoda. Ipak, veliki nedostatak ove metode je njezina stabilnost. Uvjet stabilnosti prikazan je jednačbom 4.14.

$$2 \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1 \quad (4.14)$$

Ako se odabere prevelik vremenski korak Δt , sustav će biti nestabilan. Nažalost gornja granica ovog vremenskog koraka je proporcionalna s $(\Delta x)^2$ što znači da će Δt za mnoge probleme, pogotovo za one koji zahtijevaju jako finu diskretizaciju morati biti ekstremno mali, što znatno povećava vrijeme računanja. Zbog ovog ograničenja je ovaj način vremenske diskretizacije neprimjenjiv za mnoge probleme ali još uvijek može biti koristan za mnoge zbog svoje jednostavnosti i memorijske uštede.

4.3.2 Vremenska diskretizacija razlikom unatrag

Ako se vremenska derivacija u jednačbi 3.4 aproksimira jednačbom 4.7 dobiva se jednačba 4.15

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = a \left(\frac{T_{i,k+1}^{n+1} + T_{i,k-1}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,k}^{n+1} - T_{i-1,k}^{n+1}}{r2\Delta r} + \frac{T_{i+1,k}^{n+1} + T_{i-1,k}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1}}{\Delta r^2} \right) \quad (4.15)$$

Ova jednadžba je zapravo potpuno istog oblika kao i jednadžba 4.13 samo što temperature na desnoj strani imaju indeks $n+1$ umjesto n . Glavna prednost ove metode je to što je bezuvjetno stabilna, što znači da se može koristiti bilo koji vremenski korak Δt i rješenje neće divergirati. Glavni problem ove metode je to što neka određena temperatura u budućem trenutku nije neovisna o drugim temperaturama u budućem trenutku. Ovo znači da se ne može eksplicitno računati buduće stanje. Jednadžbu se treba postaviti za svaku točku u prostoru nakon čega se dobiva sustav od m jednadžbi s m nepoznanica. Ovakve metode se zovu implicitne metode. Problem kod rješavanja ovakvih problema je to što se ovi sustavi rješavaju matricno pomoću računala, što znači da se mora napraviti matrica veličine $m \times m$. Znači da će računalo morati imati bar m puta više memorije nego za eksplicitne metode. Za kompleksne sustave koji bi morali koristiti tisuće ili milijune točaka ovo bi bio neprihvatljiv uvjet. Međutim, pošto je većina članova u tim velikim matricama 0, mogu se spremati samo članovi koji nisu 0. Ovakve matrice se zovu rijetke matrice i s njima potrošnja memorije za implicitne metode postaje prihvatljiva.

4.3.3 Vremenska diskretizacija središnjom razlikom

Za rješavanje jednadžbe 3.4 može se koristiti jednadžba 4.9 kao aproksimacija derivacije prvog reda

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = a \left(\frac{T_{i,k+1}^n + T_{i,k-1}^n - 2T_{i,k}^n}{\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n}{r2\Delta r} + \frac{T_{i+1,k}^n + T_{i-1,k}^n - 2T_{i,k}^n}{\Delta r^2} \right) \quad (4.16)$$

Jednadžba je eksplicitna tako da ima isti problem stabilnosti kao i jednadžba 4.13, ali nema prednost uštede memorije zbog toga što u jednadžbi postoji član T_k^{n-1} što znači da se moraju pamtit sve vrijednosti i iz prijašnjeg trenutka. Glavna prednost ove metode je to što ima smanjenu grešku naprema prijašnjim metodama.

4.3.4 Cranck-Nicolsonova metoda

Cranck i Nicolson su predložili implicitnu metodu za diskretizaciju prve vremenske derivacije. Metoda uzima prosječnu vrijednost desnih strana diskretizacija razlikom unaprijed i razlikom unazad.

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} a \left(\frac{T_{i,k+1}^n + T_{i,k-1}^n - 2T_{i,k}^n}{\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n}{r 2 \Delta r} + \frac{T_{i+1,k}^n + T_{i-1,k}^n - 2T_{i,k}^n}{\Delta r^2} \right. \\ \left. \frac{T_{i,k+1}^{n+1} + T_{i,k-1}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1}}{\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,k}^{n+1} - T_{i-1,k}^{n+1}}{r 2 \Delta r} + \frac{T_{i+1,k}^{n+1} + T_{i-1,k}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1}}{\Delta r^2} \right) \quad (4.17)$$

Pošto je ova metoda implicitna, nema probleme stabilnosti, a greška ove metode istog je reda veličine kao i kod diskretizacije središnjom razlikom. Iz ovih razloga će se vremenske derivacije jednadžba 3.4 i 3.9 diskretizirati ovom metodom

5 Primjena metode konačnih razlika

Za rješavanje ovog problema, potrebno je primijeniti do sada prikazane jednadžbe na geometriju prikazanu na slici 2. U problemu postoje različiti materijali, pa će se jednadžbe morati primijeniti posebno za svaki od njih, a dodatno će se morati modelirati kakav utjecaj određeni elementi imaju jedan na drugoga.

5.1 Postavljane jednadžbi za krutine

U Jednadžbi 3.4 se derivacija prvog reda diskretizira jednadžbom 4.9 a derivacija drugog reda jednadžbom 4.11. Vremenski član jednadžbe se diskretizira Cranck-Nicolsonovom metodom nakon čega se dobiva jednadžba 5.1.

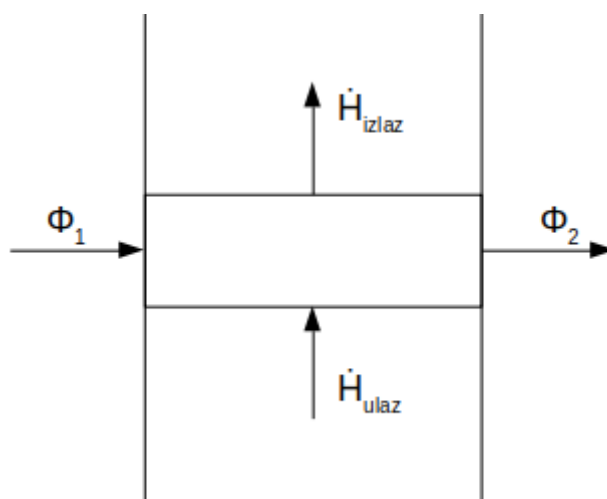
$$\begin{aligned} \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n}{\Delta t} = & a \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i,k+1}^n + T_{i,k-1}^n - 2T_{i,k}^n}{2\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n}{r\Delta r} + \frac{T_{i+1,k}^n + T_{i-1,k}^n - 2T_{i,k}^n}{\Delta r^2} \right) \\ & + a \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i,k+1}^{n+1} + T_{i,k-1}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1}}{2\Delta z^2} + \frac{T_{i+1,k}^{n+1} - T_{i-1,k}^{n+1}}{r\Delta r} + \frac{T_{i+1,k}^{n+1} + T_{i-1,k}^{n+1} - 2T_{i,k}^{n+1}}{\Delta r^2} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Pošto jednadžba 5.1 u sebi sadrži temperaturnu provodnost a koja je ovisna o materijalu, mora se postaviti posebno za zemlju i svaku cijev, a veze između materijala se moraju definirati rubnim uvjetima. Pošto su svi članovi u trenutnom vremenskom trenutku poznati, mogu se odvojiti na desnu stranu jednadžbe, dok se na lijevoj strani mogu izdvojiti svi članovi u novom vremenskom trenutku koji su nepoznanice ove jednadžbe. Tako izdvojeni članovi će dati jednadžbu u obliku jednadžbe 5.2.

$$C \cdot T_{i,k}^{n+1} + D \cdot T_{i+1,k}^{n+1} + E \cdot T_{i-1,k}^{n+1} + F \cdot T_{i,k+1}^{n+1} + F \cdot T_{i,k-1}^{n+1} = b \quad (5.2)$$

5.2 Postavljanje jednadžbe za vodu

Tok vode će se rješavati kvazistacionarno, za svaki vremenski trenutak prvo će se voda pomaknuti u prostoru pa će se zatim prenijeti toplinski tok preko stijenke cijevi. Jedan nepomični volumen u kojem se događa izmjena topline je prikazan na slici 6.



Slika 6. kontrolni volumen vode u cijevi

Ako se jednadžba 3.9 postavi za volumen na slici 6, dobije se jednadžba 5.3.

$$\rho V c_p \frac{\partial T}{\partial t} = q_m c_p (T_{ulaz} - T_{izlaz}) + \alpha A_1 (T_{s1} - T) - \alpha A_2 (T - T_{s2}) \quad (5.3)$$

U kojoj je ulazna temperatura T_{ulaz} jednaka temperaturi volumena koji se nalazi za jedan pomaknut u smjeru suprotnom od smjera brzine. Za tok prema gore se kao T_{ulaz} uzima temperatura volumena ispod trenutnog, a za tok prema dolje obrnuto. Izlazna temperatura T_{izlaz} jednaka je temperaturi volumena za kojeg je postavljena jednadžba. Ovako definirane temperature uvodne novi uvjet stabilnosti. Ako je vremenski korak veći od onoga pri kojem bi sva trenutna entalpija u volumenu izašla iz njega, a sva entalpija iz prijašnjeg volumena ušla u njega, morale bi se postaviti neke druge temperature za T_{ulaz} i T_{izlaz} . Da bi se ovo izbjeglo treba se koristiti vremenski korak prikazan u jednadžbi 5.4. Ovaj uvjet se zove Courant–Friedrichs–Lewy ili CFL uvjet stabilnosti.

$$\frac{v_{max} \Delta t}{\Delta z} = 1 \quad (5.4)$$

Nakon diskretiziranja Crank-Nicolsonovom metodom za vodu koja teče prema gore dobiva se jednačba 5.4.

$$\begin{aligned} \rho V c_p \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n}{\Delta t} = & \frac{1}{2} \left(q_m c_p (T_{i,k-1}^n - T_{i,k}^n) + \alpha A_1 (T_{i-1,k}^n - T_{i,k}^n) - \alpha A_2 (T_{i,k}^n - T_{i+1,k}^n) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(q_m c_p (T_{i,k-1}^n - T_{i,k}^n) + \alpha A_1 (T_{i-1,k}^n - T_{i,k}^n) - \alpha A_2 (T_{i,k}^n - T_{i+1,k}^n) \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.3 Rubni uvjeti

Kada se određuje volumen koji se diskretizira, zapravo se uzima neki isječak svijeta u kojemu se događaju neki procesi koje treba analizirati. Ako stvari izvan isječka utječu na rezultate promatranog ponašanja, onda bi i one trebale biti uzete u obzir. Bilo bi idealno kada bi ukupni volumen obuhvatio sve pojave koje utječu na prijenos topline u izmjenjivaču, ali često se isplati zanemariti neke pojave koje nemaju velik utjecaj ali dovode dodatne komplikacije u model. Voda ulazi kroz cijev i ide u spremnik pod zemljom, zatim izlazi iz spremnika i izlazi kroz prstenasti prostor između cijevi. U ovom modelu, spremnik će biti zanemaren, a voda će ići direktno iz unutarnje cijevi u prstenasti prostor. Na svim granicama volumena potrebno je modelirati kakav utjecaj okoliš ima preko granica na volumen.

Rubni uvjet na rubu domene

Na ovoj granici je odlučeno koliko će se zemlje obuhvatiti s ukupnim volumenom. Potrebno je obuhvatiti dovoljno zemlje da najudaljeniji dio nema nikakav utjecaj na rezultat simulacije. Zbog toga se može staviti rubni uvjet da je temperaturni gradijent jednak nuli.

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (5.5)$$

Pošto na rubu domene ne postoji točka s desne strane neće se moći koristiti aproksimacija središnjom razlikom ni aproksimacija razlikom unaprijed. Tako da će se za diskretizaciju jednačbe 5.5 koristiti aproksimacija razlikom unatrag.

$$\frac{T_{i,k}^n - T_{i-1}^n}{\Delta r} = 0 \quad (5.6)$$

$$T_{i,k}^n - T_{i-1,k}^n = 0 \quad (5.7)$$

Rubni uvjet na gornjoj granici

Teško je procijeniti točan utjecaj okoliša na gornju granicu volumena, ali pošto ta granica ionako nebi trebala imati velik utjecaj na rezultate isto se postavlja rubni uvjet da je gradijent temperature jednak nuli, samo ovaj put u z smjeru.

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (5.8)$$

Isto kao i za maksimalni promjer zemlje i ovdje će se koristiti aproksimacija razlikom unatrag, tako da se dobiva jednadžba istog oblika kao i 5.6.

$$\frac{T_{i,k}^n - T_{i,k-1}^n}{\Delta z} = 0 \quad (5.9)$$

odnosno

$$T_{i,k}^n - T_{i,k-1}^n = 0 \quad (5.10)$$

Na mjestu gdje voda ulazi u volumen postavljen je rubni uvjet konstantne temperature od 20 °C.

$$T_{i,k}^n = 20 \quad (5.11)$$

Na mjestu gdje voda izlazi iz volumena nije potrebno postavljati rubni uvjet, pošto se sve točke koje imaju utjecaj na izlaznu temperaturu vode nalaze unutar volumena. Za ovu točku se koristi jednadžba 5.9.

Rubni uvjet na donjoj granici

Donja granica volumena bi trebala biti dovoljno nisko da se obuhvati i spremnik u koji ulazi voda i dio zemlje koji ima utjecaj na njega. Ovaj dio se nije modelirao zbog toga što se u

ovom radu želi pokazati utjecaj provođenja topline kroz cijevi izmjenjivača i zbog toga što bi se dodatno zakomplicirao problem. Na ovoj granici se isto koristi rubni uvjet da je gradijent temperature jednak nuli tako da će se opet koristiti jednačba 5.8. U ovom slučaju ne postoji točka ispod točke u kojoj se diskretizira jednačba pa se koristi aproksimacija razlikom unaprijed.

$$\frac{T_{i,k+1}^n - T_{i,k}^n}{\Delta z} = 0 \quad (5.12)$$

odnosno

$$T_{i,k+1}^n - T_{i,k}^n = 0 \quad (5.13)$$

Rubni uvjet na mjestu gdje voda ulazi u prstenasti prostor između cijevi je povezan direktno s točkom gdje voda izlazi iz unutarnje cijevi preko jednačbe 5.3.

$$\begin{aligned} \rho V c_p \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n}{\Delta t} = & \frac{1}{2} \left(q_m c_p (T_{uc}^n - T_{i,k}^n) + \alpha A_1 (T_{i-1,k}^n - T_{i,k}^n) - \alpha A_2 (T_{i,k}^n - T_{i+1,k}^n) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(q_m c_p (T_{uc}^{n+1} - T_{i,k}^{n+1}) + \alpha A_1 (T_{i-1,k}^{n+1} - T_{i,k}^{n+1}) - \alpha A_2 (T_{i,k}^{n+1} - T_{i+1,k}^{n+1}) \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

U ovoj jednačbi T_{uc} predstavlja temperaturu na izlazu unutarnje cijevi.

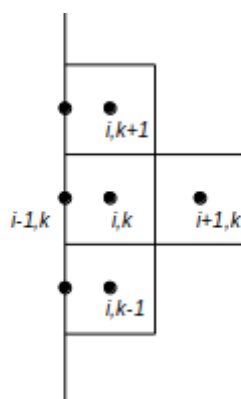
Rubni uvjet na lijevoj granici

Na lijevoj granici je središte ukupnog volumena prikazanog na slici 2 oko kojeg je osnosimetričan. Pošto je će se za vodu koristiti samo jedna točka u radialnom smjeru ovdje će se koristiti jednačba 5.3, samo što neće biti toplinskog toka Φ_1 .

$$\begin{aligned} \rho V c_p \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n}{\Delta t} = & \frac{1}{2} \left(q_m c_p (T_{i,k-1}^n - T_{i,k}^n) - \alpha A_2 (T_{i,k}^n - T_{i+1,k}^n) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(q_m c_p (T_{i,k-1}^{n+1} - T_{i,k}^{n+1}) - \alpha A_2 (T_{i,k}^{n+1} - T_{i+1,k}^{n+1}) \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Rubni uvjet između unutarnje vode i unutarnje cijevi

Na točke u prostoru se može gledati kao da svaka zauzima neki svoj volumen. Takav prikaz za neke točke pored stijenke cijevi je prikazan na slici 7.



Slika 7. Volumeni kod stijenke cijevi

Jedna točka je stavljena i na stijenku cijevi zbog tog što će biti potrebna za izračun toplinskog toka kroz cijev. Ta točka predstavlja temperaturu stijenke ali ne predstavlja volumen u prostoru. Iz tog razloga je Δr do stijenke je duplo manji od običnog. Za jedan takav volumen na rubu cijevi vrijedi da je suma svih energetskih tokova koji djeluju na granice volumena jednaka promjeni unutarnje energije volumena. Na ovaj isti način je i izvedena početna jednadžba za provođenje topline kroz krutinu tako da se prikaz gustoća toplinskih tokova može vidjeti na slici 4.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Phi_{\text{dolje}} - \Phi_{\text{gore}} + \Phi_{\text{lijevo}} - \Phi_{\text{desno}} \quad (5.16)$$

Gdje se Φ može izraziti preko gustoće toplinskog toka q .

$$\Phi = q \cdot A \quad (5.17)$$

Gustoća toplinskog toka se može zapisati preko Fourierovog zakona.

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (5.18)$$

Gdje n predstavlja smjer u kojem se računa toplinski tok. Ako se jednadžbe 5.18, 5.17 i 3.7 uvrste u jednadžbu 5.16 dobiva se jednadžba očuvanja energije za neki volumen.

$$\rho c_p V \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda A_{gore} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{gore} - \lambda A_{dolje} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{dolje} - \lambda A_{lijevo} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{lijevo} + \lambda A_{desno} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{desno} \quad (5.19)$$

Vremenska derivacija se će se diskretizirati Cranck-Nicolsonovom metodom, derivacije na gornjoj, donjoj i desnoj granici pomoću središnjih razlika, a derivacija lijevo pomoću razlike unaprijed. Nakon diskretizacije i dijeljenja jednadžbe s ρc_p dobiva se jednadžba 5.20.

$$V \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} a \left(A_{gore} \frac{T_{i,k+1}^n - T_{i,k}^n}{\Delta z} - A_{dolje} \frac{T_{i,k}^n - T_{i,k-1}^n}{\Delta z} - A_{lijevo} \frac{T_{i,k}^n - T_{i-1,k}^n}{\frac{\Delta r}{2}} + A_{desno} \frac{T_{i+1,k}^n - T_{i,k}^n}{\Delta r} \right) + \frac{1}{2} a \left(A_{gore} \frac{T_{i,k+1}^{n+1} - T_{i,k}^{n+1}}{\Delta z} - A_{dolje} \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k-1}^{n+1}}{\Delta z} - A_{lijevo} \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i-1,k}^{n+1}}{\frac{\Delta r}{2}} + A_{desno} \frac{T_{i+1,k}^{n+1} - T_{i,k}^{n+1}}{\Delta r} \right) \quad (5.20)$$

Rubni uvjet za točku koja je postavljena na stijenku cijevi je da gustoća toplinskog toka koju prima volumen cijevi mora biti jednaka gustoći toplinskog toka koju mu predaje volumen vode.

$$\alpha(T_{i-1,k}^n - T_{i,k}^n) = -\lambda \frac{T_{i,k}^n - T_{i-1,k}^n}{\Delta t} \quad (5.21)$$

Rubni uvjet između unutarnje cijevi i vode u prstenastom prostoru

Ovaj rubni uvjet je sličan rubnom uvjetu na dodiru unutarnje vode i cijevi, samo je u ovom slučaju volumen cijevi lijevo od volumena vode. Za modeliranje ovog rubnog uvjeta koristi se jednadžba 5.19.

$$\begin{aligned}
V \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k}^n}{\Delta t} = & \frac{1}{2} a \left(A_{gore} \frac{T_{i,k+1}^n - T_{i,k}^n}{\Delta z} - A_{dolje} \frac{T_{i,k}^n - T_{i,k-1}^n}{\Delta z} - A_{lijevo} \frac{T_{i,k}^n - T_{i-1,k}^n}{\Delta r} + A_{desno} \frac{T_{i+1,k}^n - T_{i,k}^n}{\frac{\Delta r}{2}} \right) \\
& + \frac{1}{2} a \left(A_{gore} \frac{T_{i,k+1}^{n+1} - T_{i,k}^{n+1}}{\Delta z} - A_{dolje} \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i,k-1}^{n+1}}{\Delta z} - A_{lijevo} \frac{T_{i,k}^{n+1} - T_{i-1,k}^{n+1}}{\Delta r} + A_{desno} \frac{T_{i+1,k}^{n+1} - T_{i,k}^{n+1}}{\frac{\Delta r}{2}} \right)
\end{aligned}
\tag{5.22}$$

Na stijenci cijevi temperatura mora biti takva da su toplinski tokovi kroz stijenkku jednaki.

$$\alpha(T_{i+1,k}^n - T_{i,k}^n) = -\lambda \frac{T_{i,k}^n - T_{i-1,k}^n}{\Delta t}
\tag{5.23}$$

Rubni uvjet između vanjske cijevi i vode u prstenastom prostoru

Ovaj rubni uvjet je potpuno isti kao i rubni uvjet između unutarnje cijevi i unutarnje vode, tako da će se za volumen u cijevi koristiti jednadžba 5.20, a za temperaturu stijenske jednadžba 5.21.

Rubni uvjet između vanjske cijevi i zemlje

Za volumen vanjske cijevi će se koristiti jednadžba 5.22, a za volumen zemlje jednadžba 5.22. Za točku na cijevi će se koristiti sljedeći rubni uvjet.

$$-\lambda_c \frac{T_{i,k}^n - T_{i-1,k}^n}{\Delta t} = -\lambda_z \frac{T_{i+1,k}^n - T_{i,k}^n}{\Delta t}
\tag{5.24}$$

U jednadžbi 5.24 indeks c označuje cijev, a indeks z zemlju.

6 Rješavanje jednadžbi

Sve diskretizirane jednadžbe i rubne uvjete osim rubnog uvjeta 5.14 moguće je zapisati u obliku jednadžbe 5.2.

$$C \cdot T_{i,k}^{n+1} + D \cdot T_{i+1,k}^{n+1} + E \cdot T_{i-1,k}^{n+1} + F \cdot T_{i,k+1}^{n+1} + F \cdot T_{i,k-1}^{n+1} = b \quad (5.2)$$

Jednadžba 5.14 će se morati zapisati s dodatnim članom koji predstavlja izlaznu temperaturu unutarnje cijevi.

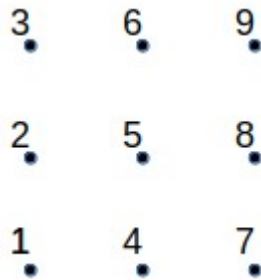
$$C \cdot T_{i,k}^{n+1} + D \cdot T_{i+1,k}^{n+1} + E \cdot T_{i-1,k}^{n+1} + F \cdot T_{i,k-1}^{n+1} + G \cdot T_{uc}^{n+1} = b \quad (6.1)$$

Potrebno je postaviti jednadžbe za sve točke prostorne diskretizacije. Ako u diskretizaciji ima sveukupno m točaka, dobiva se sustav s m jednadžbi i m nepoznanica. Sve jednadžbe bit će zapisane zajedno u matičnom obliku prikazanom u jednadžbi 6.2.

$$\underline{\underline{A}} \underline{T} = \underline{b} \quad (6.2)$$

Gdje se koristi notacija da jednom podcrtane oznake predstavljaju vektore, a dva puta podcrtane oznake matrice. \underline{T} je vektor nepoznanica, odnosno vektor temperatura u novom vremenskom trenutku, \underline{b} je vektor svih članova s desne strane svake jednadžbe, a matrica $\underline{\underline{A}}$ je matrica koeficijenata. Ovisno o tome kojim redoslijedom se stavljaju temperature u vektor temperatura, dobiva se različita matrica $\underline{\underline{A}}$. Pošto ta matrica ima $m \times m$ članova poželjno je naći neki bolji način spremanja podataka od samo stavljanja $m \times m$ brojeva u memoriju računala. U jednadžbama 5.2 i 6.1, vidi se da u svakoj jednadžbi postoji maksimalno pet nepoznanica. Što znači da u svakom retku matrice postoji maksimalno pet članova koji nisu 0. Tako da je velika većina članova u matrici $\underline{\underline{A}}$ jednaka 0. Ako se u memoriju računala zapišu samo oni članovi koji nisu 0 znatno će se uštediti na potrošenoj memoriji. U matematici rijetkih matrica je poznato da će se sustav lakše riješiti ako je su je udaljenost između članova

matrice koji nisu 0 i glavne dijagonale što manja. Ako se ta udaljenost zbroji s lijeve i desne strane dobiva se širina pojasa matrice. Iz ovog razloga je redosljed kojim se temperature stavljaju u vektor bitan. Ovo biranje redosljeda kojim se stavljaju elementi u vektor se zove numeracija. Odabrana numeracija ovog problema je prikazana na slici 8 na primjeru 3 x 3 diskretizacije.



Slika 8. Numeracija

Ova numeracija je odabrana zbog jednostavnosti i zbog efikasnosti za pravilno raspoređene diskretizacije prostora. Ako se za ovako numerirane točke u prostoru pogleda matrica \underline{A} , može se primijetiti da su skoro svi članovi koji nisu 0 smješteni u 5 dijagonala.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} C & F & & & D & & & & \\ F & C & F & & & & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & D \\ E & & & F & C & F & & & \\ & \ddots & & & F & C & F & & \\ & & E & & & F & C & & \end{pmatrix}$$

U jednadžbi 6.1 se javlja dodatan član koji nije na nijednoj od ovih dijagonala, on će znatno povećati širinu pojasa matrice i povećati vrijeme računanja. Ovaj sustav jednadžbi bi se mogao riješiti direktno metodom poput Gaussove eliminacije, ali brži način je riješiti ga iterativnim postupkom. Odabrana metoda je bicgstab a matrica je prekondicionirana s inverzom dijagonale.

7 Odabir masenog protoka i vanjskog promjera unutarnje cijevi

Hladna voda ulazi u izmjenjivač kroz unutarnju cijev, izlazi iz unutarnje cijevi i ulazi u prstenasti prostor između cijevi gdje se grije preko zemlje. Nakon grijanja voda nastavlja kroz cijev gdje dio topline predaje natrag u unutarnju cijev, dio hladnoj zemlji blizu površine a dio izlazi van iz cijevi. Dio topline koji se gubi zbog hladne zemlje bi se mogao potpuno ukloniti da voda ulazi u izmjenjivač kroz prstenasti prostor a izlazi kroz unutarnju cijev. Dio topline koji odlazi natrag u unutarnju cijev se možda ne čini kao gubitak, ali ako se voda u unutarnjoj cijevi zagrije i tako zagrijana uđe u prstenasti prostor između cijevi, razlika temperature između vode u prstenastom prostoru i tople zemlje će se smanjiti s čime će se smanjiti i prijenos topline. Iz ovog razloga je poželjno što više smanjiti prijenos topline kroz unutarnju cijev. Ovo se može postići smanjenjem koeficijenta prijenosa topline u unutarnjoj cijevi. Zbog toga što se sva toplina dobiva iz zemlje, poželjno je što više povećati prijenos topline kroz vanjsku cijev. Bilo bi idealno kada bi se moglo postići turbulentno strujanje u vanjskoj cijevi i laminarno u unutarnjoj, ali pošto je zadani promjer vanjske cijevi 120 mm, a debljina stijenke 6 mm, snaga pumpe za postizanje turbulentnog strujanja bi trebala biti neprihvatljivo velika tako da će se analizirati samo laminarno strujanje. Nusseltov broj za laminarno izobraženo strujanje s konstantnom temperaturom cijevi je konstanta.

$$Nu=3.658 \quad (7.1)$$

Ovo znači da koeficijent prijelaza topline opisan jednačbom 3.10 ovisi samo o hidrauličkom promjeru cijevi i toplinskoj provodnosti.

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{D_h} \quad (3.10)$$

Hidraulički promjer unutarnje cijevi označit će se s oznakom D_{hu} . On je jednak unutarnjem promjeru unutarnje cijevi. Ovaj promjer će se zapisati preko vanjskog promjera unutarnje cijevi za kojeg će se koristiti oznaka D . Debljina stijenke će se označavati oznakom T .

$$D_{hu} = D - 2 \cdot T \quad (7.2)$$

Hidraulički promjer prstenastog prostora između cijevi može se izračunati iz jednadžbe 7.3

$$D_{hv} = \frac{4A}{P} \quad (7.3)$$

U ovoj jednadžbi A predstavlja površinu presjeka a P mokri opseg, koji je jednak zbroju opsega vanjskog promjera unutarnje cijevi i unutarnjeg promjera vanjske cijevi.

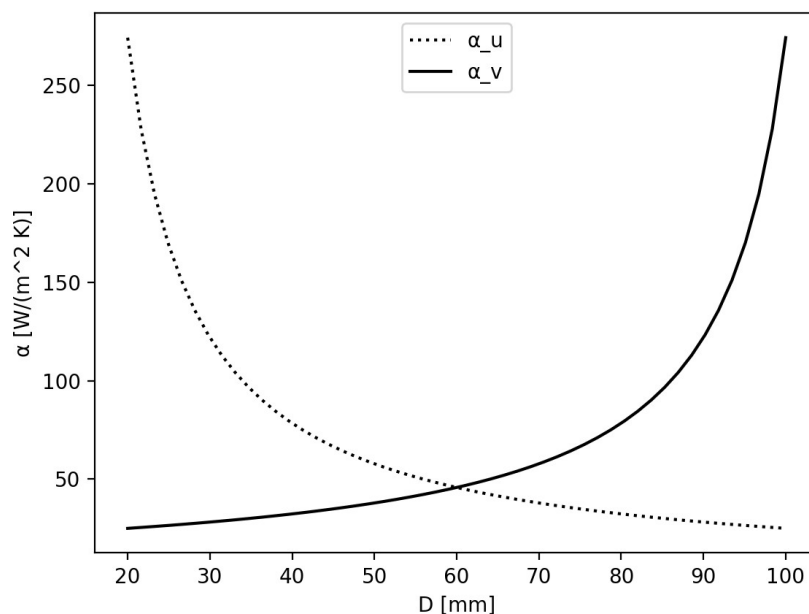
$$D_{hv} = \frac{((D_v - 2T)^2 - D^2) \cdot \pi}{(D_v - 2T + D) \cdot \pi} = D_v - 2T - D \quad (7.4)$$

Nakon uvrštavanja jednadžbi 7.2 i 7.4 u 3.10, dobivaju se izrazi za koeficijente prijelaza topline u unutarnjoj i vanjskoj cijevi.

$$\alpha_u = \frac{Nu \cdot \lambda}{D - 2T} \quad (7.5)$$

$$\alpha_v = \frac{Nu \cdot \lambda}{D_v - 2T - D} \quad (7.6)$$

Toplinska provodnost λ se mijenja s temperaturom, ali za analiziranje funkcija 7.5 i 7.6 u ovisnosti o promjeru je uzeta konstantna vrijednost od 0.6. Grafički prikaz ovih funkcija može se vidjeti na slici 9.



Slika 9. Ovisnost koeficijenta prijelaza topline o promjeru D

Iz slike 9 se zaključuje da je poželjno što više povećati unutarnji promjer cijevi kako bi se povećao koeficijent prijelaza topline vanjske vode i smanjio koeficijent prijelaza topline unutarnje. Voda se pumpa iz spremnika kroz cijevi. Postavlja se Bernoullijeva jednadžba od spremnika do izlaza iz cijevi. Razlike tlakova i visina su zanemarive.

$$P = \frac{q_m v_v^2}{2} + \Delta h_{fu} q_m g + \Delta h_{fv} q_m g \quad (7.7)$$

U jednadžbi 7.7 Δh_{fu} predstavlja visinu ukupnih gubitaka u unutarnjoj cijevi, Δh_{fv} u prstenastom prostoru. Brzina v_v je brzina u prstenastom prostoru. Visine gubitaka mogu se izračunati iz jednadžbe 7.8

$$\Delta h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (7.8)$$

U ovoj jednadžbi L predstavlja duljinu cijevi, a f faktor trenja i pri laminarnom strujanju vrijedi jednadžba 7.9.

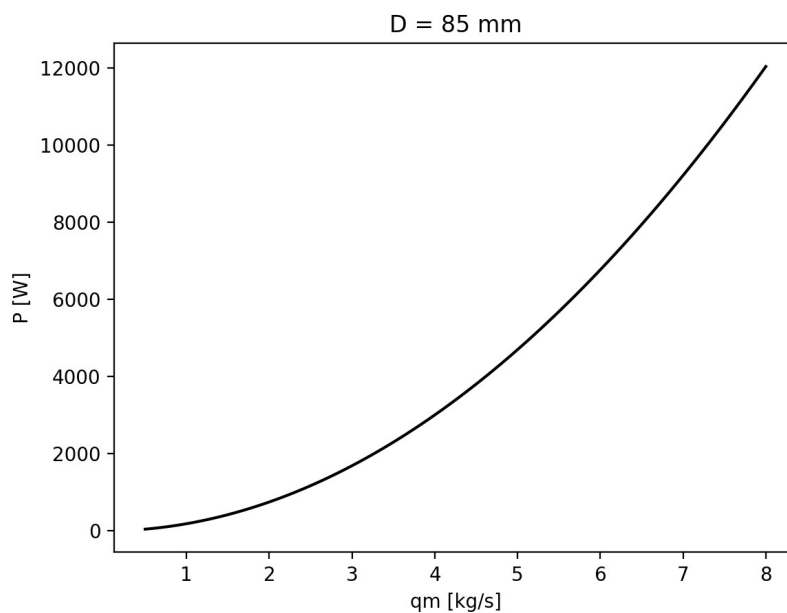
$$f = \frac{64}{Re} \quad (7.9)$$

Brzina v i Reynoldsov broj mogu se izraziti preko protoka.

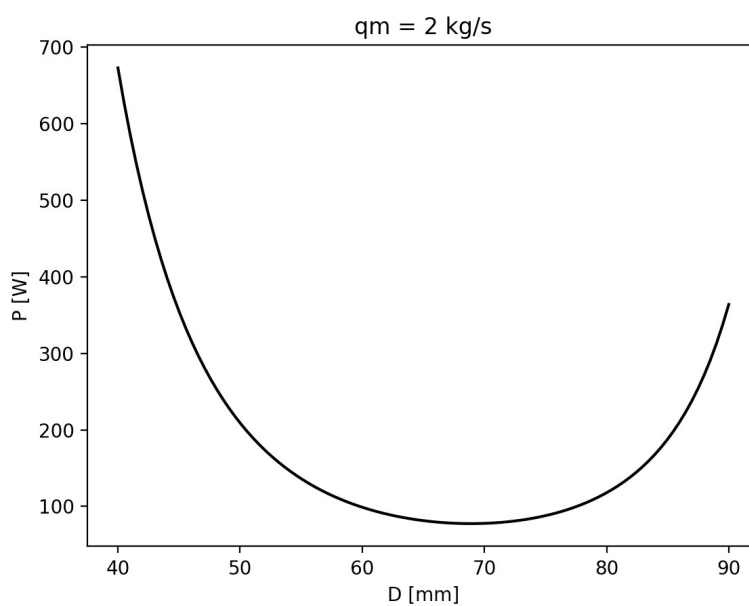
$$v = \frac{4q_m}{A\rho} \quad (7.10)$$

$$Re = \frac{4q_m D_h}{A\rho\mu} \quad (7.11)$$

Za potrebe analiziranja jednadžbe 7.7 zadati će se konstantne vrijednosti $\mu = 10^{-4}$, $\rho = 1000$ i $L = 100$ m. Nakon što se jednadžbe 7.11, 7.10, 7.9 i 7.8 uvrste u jednadžbu 7.7 mogu se napraviti grafovi ovisnosti snage o masenom protoku i vanjskom promjeru unutarnje cijevi.



Slika 10. Ovisnost snage o masenom protoku



Slika 11. Ovisnost snage o vanjskom promjeru unutarnje cijevi

Iz slika 11, 10 i 9 odabire se vanjski promjer unutarnje cijevi $D = 85$ mm i maseni protok $q_m = 3$ kg/s. S ovako odabranim vrijednostima postižu se brzine od 0.7168 i 0.8605 m/s za unutarnju odnosno vanjsku cijev. Potrebna snaga za svakih 100 metara dubine je 1.2037 kW.

8 Rezultati

Cilj simulacije je ispitati količinu toplinske energije koja se dobije s različitim parametrima modela. Referentni slučaj će biti simulacija strujanja A u kojoj su obje cijevi napravljene od materijala St. 316L, oko cijevi se nalazi šljunkasta zemlja, temperaturni gradijent zemlje je 0,1 °C/m, dubina na kojoj se nalaze cijevi je 300 m, a promjer zemlje je 1 m. Termalna svojstva ovih materijala prikazana su u tablici 1.

Tablica 1. Termalna svojstva materijala

| Materijal | Toplinska provodnost λ [W/(m K)] | Gustoća ρ [kg/m ³] | Specifični toplinski kapacitet c [J/(kg K)] |
|-------------------|---|--|--|
| St. 316L | 15 | 8000 | 500 |
| Šljunkasta zemlja | 1,047 | 1500 | 1842 |

Odabrana prostorna diskretizacija prikazana je u tablici 2.

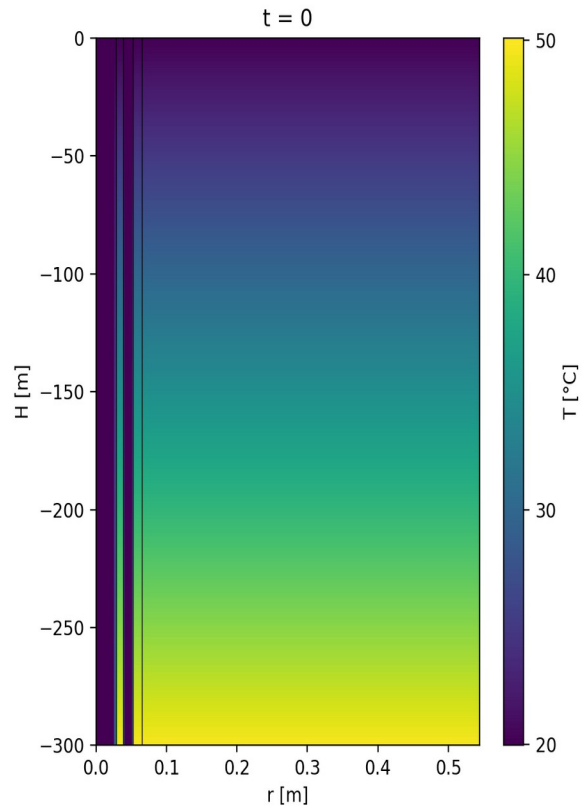
Tablica 2. Prostorna diskretizacija

| | Unutarnja voda | Unutarnja cijev | Vanjska voda | Vanjska cijev | Zemlja |
|-------------------------------------|----------------|-----------------|--------------|---------------|--------|
| Broj točaka u radijalnom smjeru r | 1 | 6 | 1 | 6 | 50 |
| Broj točaka u aksijalnom smjeru z | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |

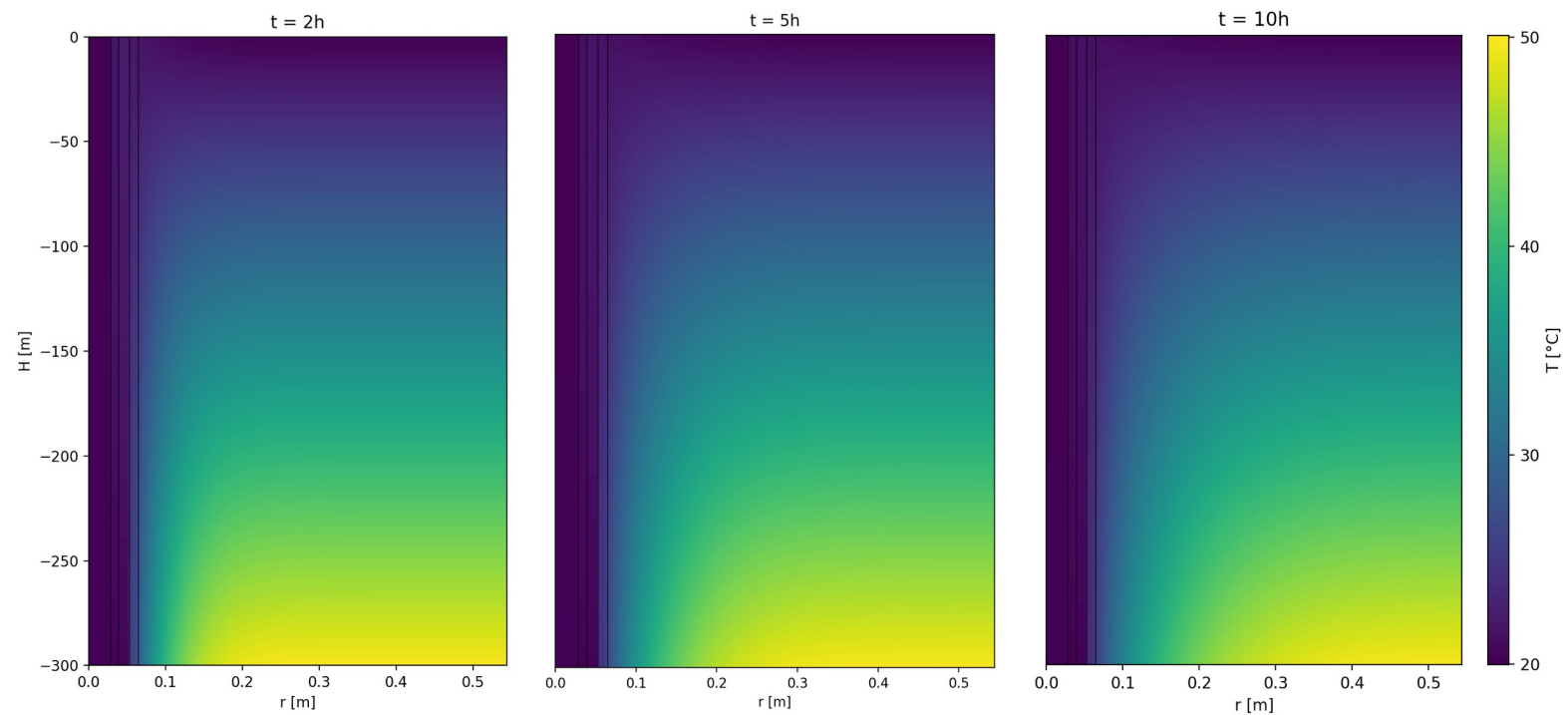
U početnom trenutku cijevi i zemlja imaju temperaturni gradijent u aksijalnom smjeru od 0,1 °C/m. Temperatura površine zemlje i temperatura cijevi iznosi 20 °C. Početni uvjeti prikazani su na slici 12. Vremenski korak odabran je prema CFL uvjetu.

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{v_{max}} = 3.148 \text{ s}$$

Simulacija se računa u vremenskom periodu od 10 sati. Dobivene temperaturne raspodjele za strujanje A nakon 2, 5, i 10 h prikazane su na slici 13.



Slika 12. Početni uvjeti



Slika 13. Temperaturna raspodjela strujanja A nakon 2, 5 i 10 h

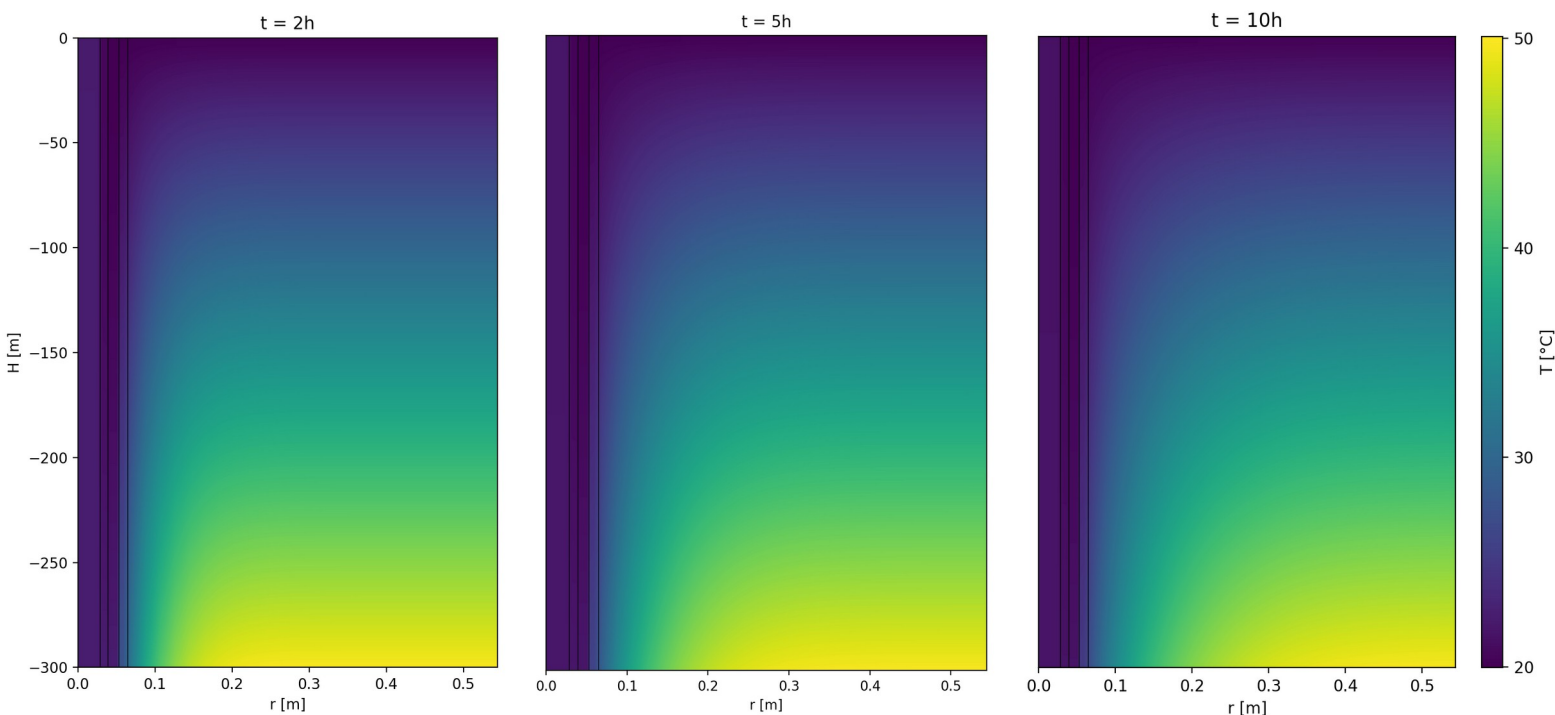
Iz slika se vidi efekt gubljenja topline u zemlji koji uzrokuje smanjenje toplinskog toka u izmjenjivaču. Ukupna dobivena toplinska energija mjeri se razlikom ulazne i izlazne entalpije. Pošto se za volumen iz kojeg energija izlazi iz domene koristi Cranck Nicolsonova metoda diskretizacije, ukupna energija koja izlazi iz domene će se računati na sličan način.

$$\Delta H = \frac{1}{2} (q_m c_p (T_{izlaz}^n - T_{ulaz}^n) + q_m c_p (T_{izlaz}^{n+1} - T_{ulaz}^{n+1})) \Delta t \quad (8.1)$$

Ukupna dobivena entalpija za ovo strujanje nakon 10 sati je 839,63 MJ, a konačna izlazna temperatura vode 21,34 °C.

8.1 Strujanje B

Kod smjera strujanja u strujanju B zagrijana voda koja istječe kroz cijev znatno je izoliranija od hladne zemlje čime se smanjuju toplinski gubitci. Ukupna dobivena toplinska energija nakon 10 sati rada iznosi 869,37 MJ, a krajnja izlazna temperatura je 21,377 °C. Za ovo strujanje dobiveno je malo poboljšanje dobivene energije naprema strujanju A od 29,74 MJ, što je 3,42%. Razlog zašto je ovo poboljšanje toliko malo je to što se voda u cijevi ionako ne zagrijava na visoke temperature, pa nema ni velikih gubitaka toplinskog toka prema hladnoj zemlji koja je samo 1,34 °C hladnija od vode. Na slici 14 se vidi da su temperaturne raspodjele ovih izmjenjivača praktički iste.



Slika 14. Temperaturna raspodjela strujanja B nakon 2, 5 i 10 h

8.2 Utjecaj vrste tla

U glavnom primjeru izmjenjivač je postavljen u šljunkastu zemlju, koja je dobar izolator. U svrhu poboljšanja prijenosa topline, ispitat će se i neke druge vrste tla. Vrste tla prikazane su u tablici 3.

Tablica 3. Toplinska svojstva tla

| Vrsta tla | Toplinska provodnost λ [W/(m K)] | Gustoća ρ [kg/m ³] | Specifični toplinski kapacitet c [J/(kg K)] |
|----------------|--|-------------------------------------|---|
| Pijesak | 1,13 | 1500 | 1710 |
| Glina | 1,2 | 1700 | 1800 |
| Pješčana glina | 1,3 | 1847 | 1200 |
| Pješčani mulj | 2,1 | 1960 | 1200 |

Provedene su simulacije u simulacijskom vremenu od 10 sati. Rezultati simulacija prikazani su u tablicama 4 i 5.

Tablica 4. Rezultati simulacija strujanja A za razna tla

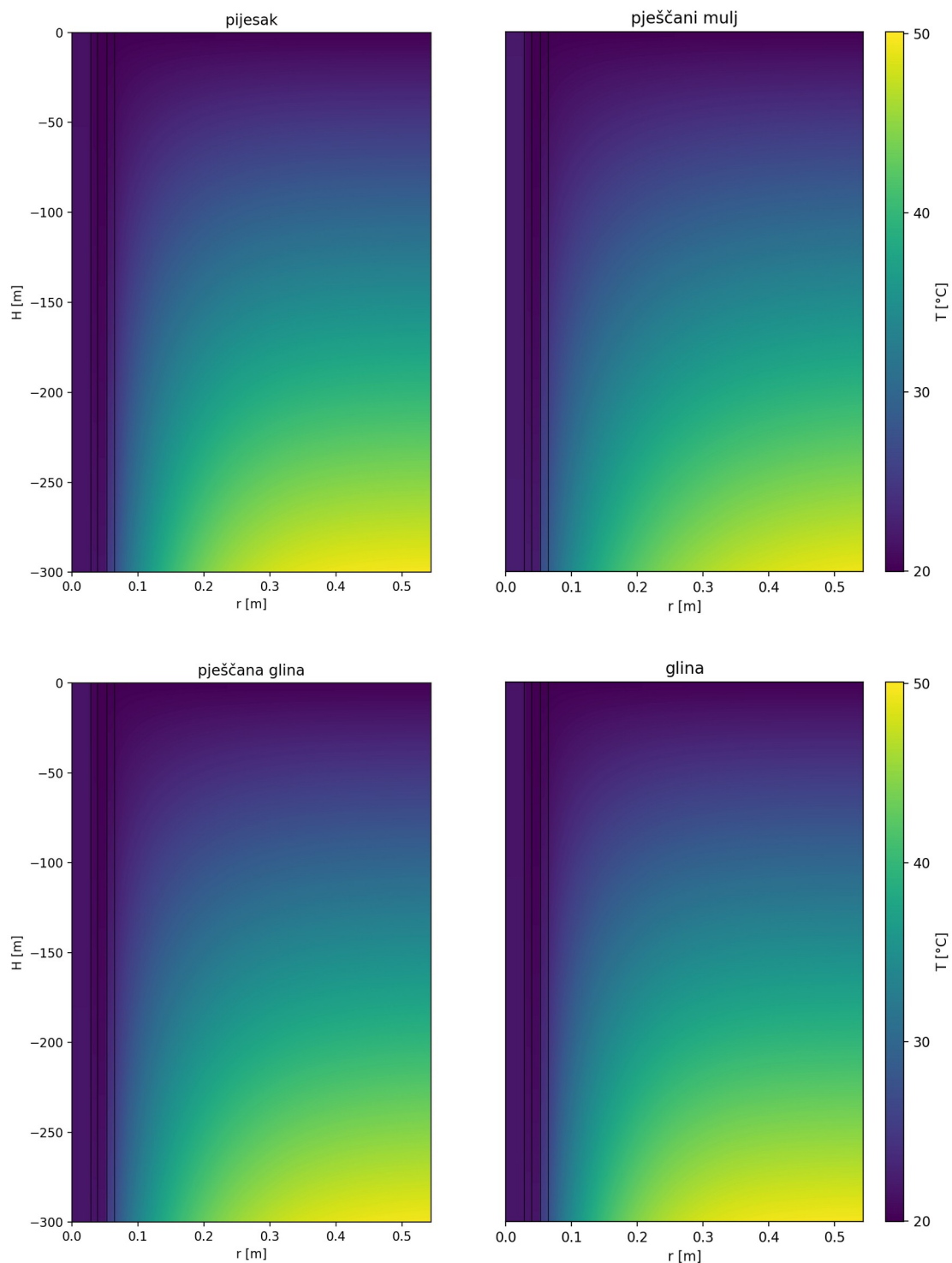
| | Pijesak | Glina | Pješčana glina | Pješčani mulj |
|----------------------------------|---------|--------|----------------|---------------|
| Dobivena energija [MJ] | 856,43 | 915,96 | 887,7 | 1122,3 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 21,38 | 21,49 | 21,457 | 21,955 |

Tablica 5. Rezultati simulacija strujanja B za razna tla

| | Pijesak | Glina | Pješčana glina | Pješčani mulj |
|----------------------------------|---------|--------|----------------|---------------|
| Dobivena energija [MJ] | 888,113 | 953,03 | 922,26 | 1183,07 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 21,42 | 21,53 | 21,5 | 22,05 |

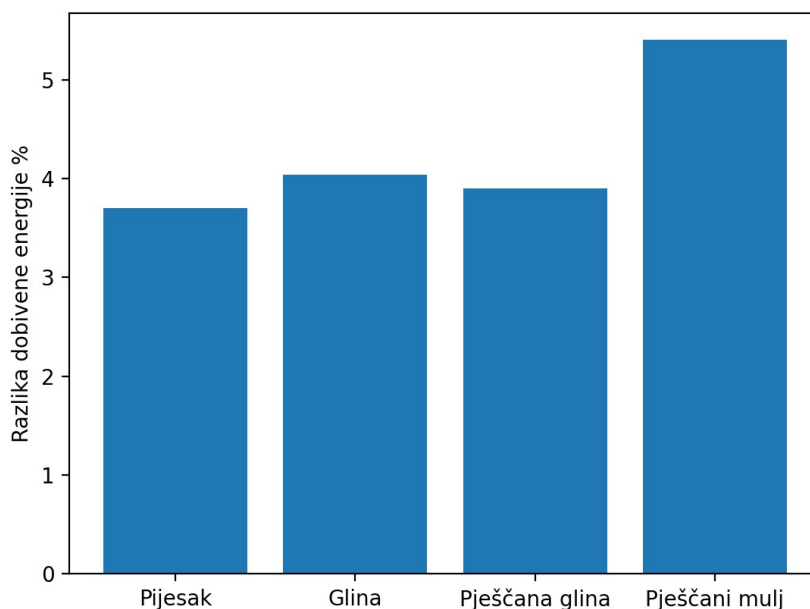
Iz tablica se vidi da sve vrste tla kratkoročno daju bolje rezultate nego šljunkasta zemlja. Ovo je vjerojatno zbog toga što sva prikazana tla imaju veću toplinsku provodnost. Izmjenjivač u tlu s najvećom toplinskom provodnosti, pješčanom mulju, je primio daleko najviše topline. Zanimljivo je da je pješčana glina predala manje toplinske energije nego glina iako ima veću

toplinsku provodnost. Ovdje se vidi utjecaj smanjenja toplinskog toka zbog promjene temperature tla. Glina ima znatno veći toplinski kapacitet od pješćane gline pa je duže držala višu temperaturu blizu cijevi. Temperaturne raspodjele ovih tla nakon 10 sati prikazane su na slici 15. Pošto su raspodjele tla za strujanje A i strujanje B slične, prikazane su samo raspodjele za strujanje B.



Slika 15. Temperaturne raspodjele tla nakon 10 h

Ako se usporede dobivene energije za strujanje A i B, može se vidjeti da se njihova razlika povećava kod tla koja predaju više topline. Kod pijeska je dobiveno 3,7% više energije sa strujanjem B, a kod pješčanog mulja 5,4%.



Slika 16. Postotak povećanja dobivene energije strujanja B naprema strujanju A

8.3 Gubitak toplinskog toka zbog smanjenja temperature tla

Pitanje je kakav će točno utjecaj imati činjenica da se temperatura tla smanjuje u vremenu. U prijašnjem poglavlju pokazani su kratkoročni utjecaji vrste tla na prijenos topline, gdje je zbog njegove visoke toplinske provodnosti pješčani mulj davao znatno bolje rezultate. Pošto glina, pijesak i šljunkasta zemlja imaju znatno veći toplinski kapacitet, pitanje je koje je tlo dugoročno najbolje rješenje. Izrađene su simulacije u periodu od 50 sati za svako tlo. Konačne izlazne temperature i ukupni dobiveni toplinski tok prikazani su u tablicama 6 i 7.

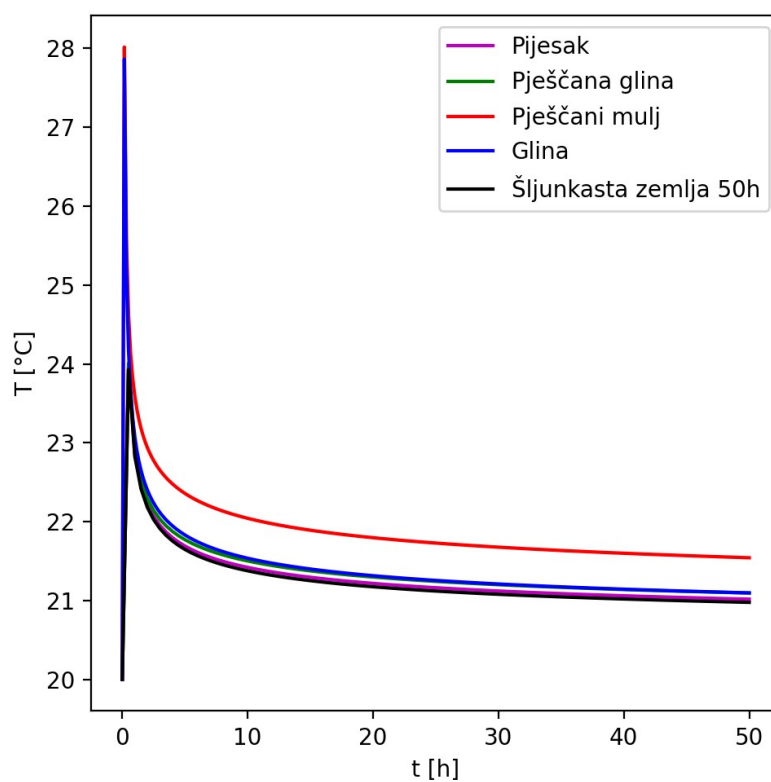
Tablica 6. rezultati simulacija sa strujanjem A od 50 sati za razna tla

| | Pijesak | Glina | Pješčana glina | Pješčani mulj | Zemlja |
|----------------------------------|---------|---------|----------------|---------------|---------|
| Dobivena energija [MJ] | 2884,95 | 3100,35 | 3053,1 | 4100 | 2796,42 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 21 | 32,072 | 21,07 | 21.5 | 20,958 |

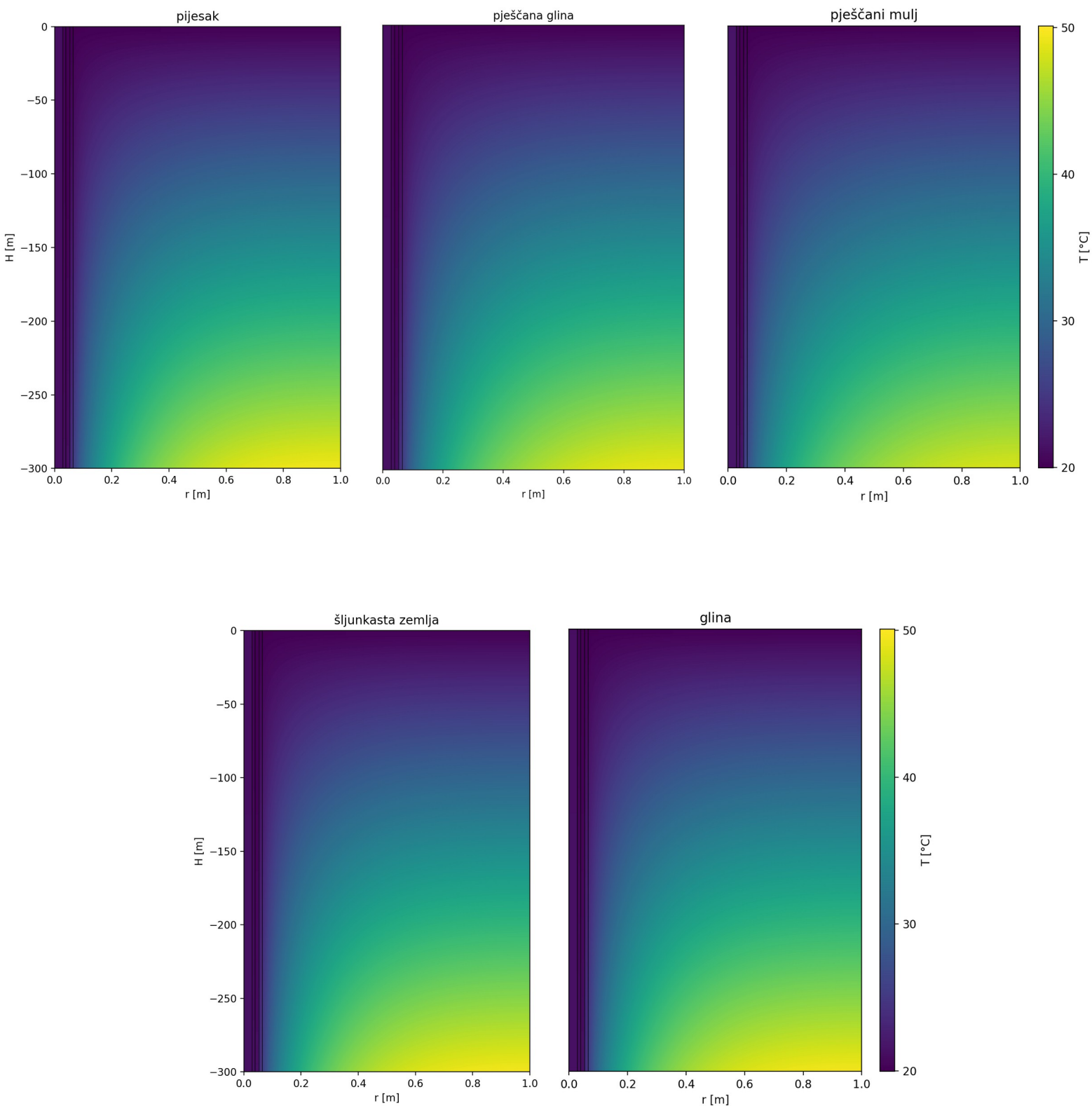
Tablica 7. rezultati simulacija sa strujanjem B od 50 sati za razna tla

| | Pijesak | Glina | Pješčana glina | Pješčani mulj | Zemlja |
|----------------------------------|---------|----------|----------------|---------------|---------|
| Dobivena energija [MJ] | 2963,63 | 3193,067 | 3142,3 | 4271,725 | 2869,85 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 21,02 | 21,096 | 21,095 | 21,54 | 20,9767 |

Iz tablica se vidi da tla daju otprilike jednake rezultate jedni naprema drugima kao i za strujanja od 10 sati. Graf promjene izlaznih temperatura tla u strujanju B prikazan je na slici 17. Temperature u početnom trenutku skaču zbog velike količine toplinske energije koje im predaju cijevi i zemlja, ali nakon nekog vremena preuzmu svu toplinu iz cijevi i temperatura im naglo pada. Nakon otprilike 10 sati, temperatura se prestaje znatno mijenjati u vremenu. Temperatura tla se smanjuje, zbog čega se predaje manje topline vodi u cijevima i izlazna temperatura vode smanjuje se blagim nagibom u vremenu. Tla s većim toplinskim kapacitetom će imati više toplinske energije u njima pa će se sporije trošiti,

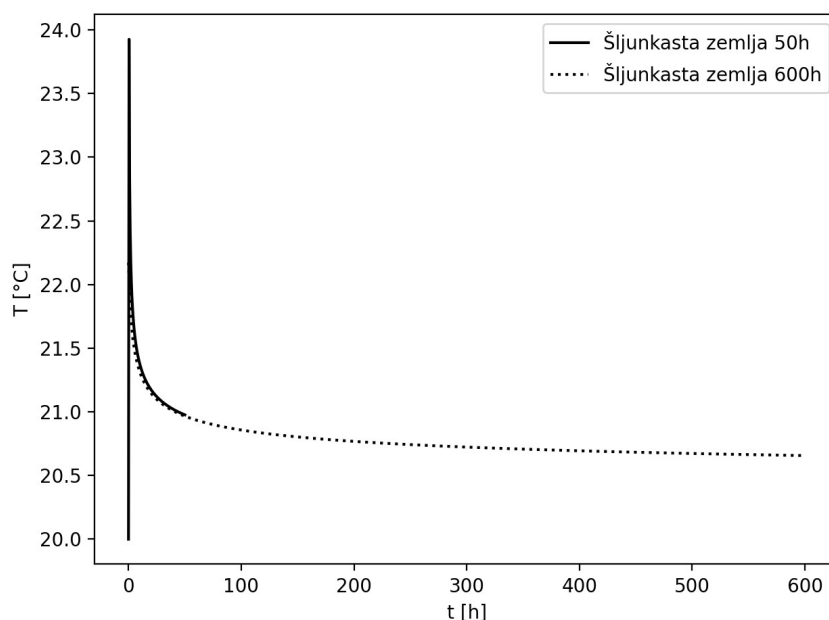


Slika 17. Promjena izlazne temperature tla u vremenu

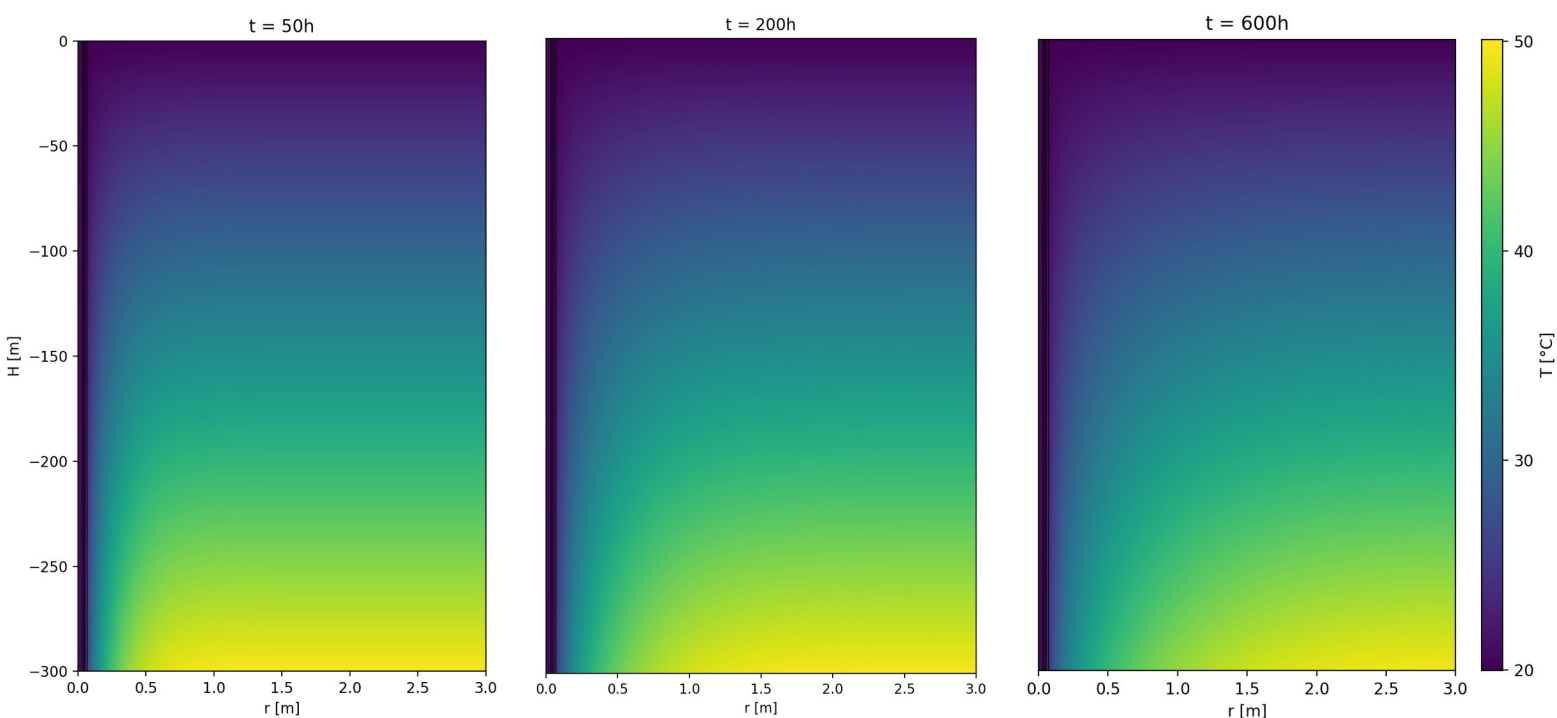


Slika 18. Temperaturna raspodjela tla nakon 50 h

Temperaturna raspodjela za tla nakon 50 sati prikazana je na slici 18. Vidi se da je zbog velikog prijenosa topline a relativno malog toplinskog kapaciteta pješčanom mulju znatno više pala temperatura nego ostalima. Pitanje je da li je 50 sati dovoljno za procjenu dugoročnog ponašanja tla. Iz ovog razloga je provedena dodatna simulacija šljunkaste zemlje sa strujanjem B od 600 sati gdje je radijus zemlje povećan na 3 metra a diskretizacija zemlje u radijalnom smjeru na 100 točaka. Graf promjene njezine izlazne temperature prikazan je na slici 19. Ukupna dobivena energija za ovaj slučaj je 21214,9 MJ, a krajnja izlazna temperatura iznosi 20,657 °C. Ako se uzme u obzir da je nakon 50 sati izlazna temperatura vode bila samo 0,9769 °C viša od ulazne temperature, a nakon 600 sati se ta razlika smanjila na 0,657 °C, vidi se da je ovaj pad temperature značajan. Iz ovog razloga se ipak zaključuje da su simulacije od 50 sati grube procjene dugoročnog ponašanja izmjenjivača.



Slika 19. Izlazna temperatura šljunkaste zemlje kroz 600 h



Slika 20. Temperaturna raspodjela šljunkaste zemlje nakon 50, 200 i 600 sati

8.4 Utjecaj toplinske provodnosti vanjske cijevi

Pošto je vanjska cijev direktno u kontaktu s toplom zemljom, u cilju povećanja toplinskog toka, poželjno je što više povećati toplinsku provodnost cijevi. Analizirane su toplinske provodnosti između 0,1 i 20 W/m/K sa simulacijama u trajanju od 10 h. Rezultati su prikazani u tablicama 8 i 9.

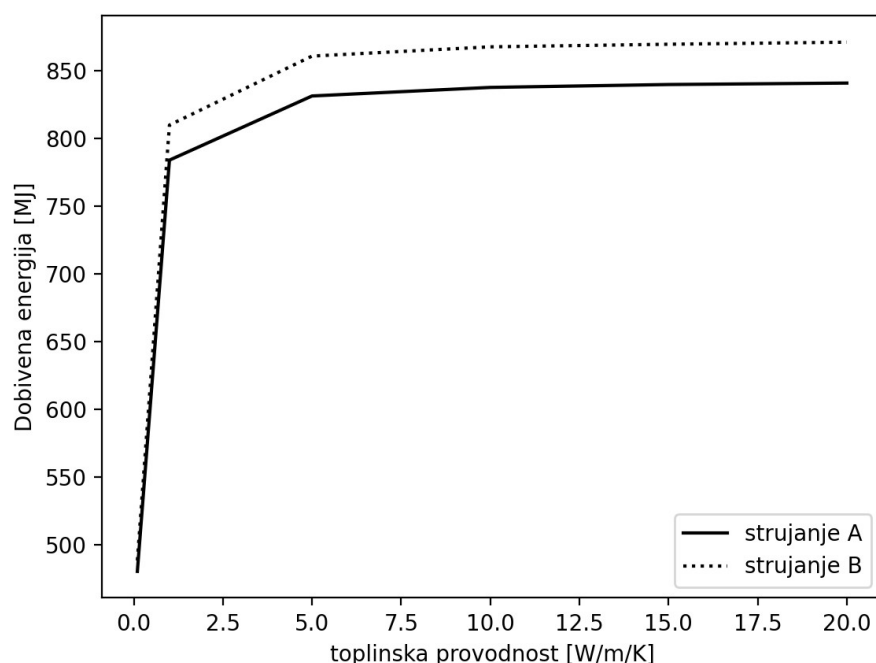
Tablica 8. Rezultati simulacija strujanja A za različite temperaturne provodnosti vanjske cijevi

| | 0,1 W/(m K) | 1 W/(m K) | 5 W/(m K) | 10 W/(m K) | 15 W/(m K) | 20 W/(m K) |
|----------------------------------|-------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| Dobivena energija [MJ] | 480,32 | 783,83 | 831,18 | 837,5 | 839,63 | 840,7 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 20,85 | 21,276 | 21,33 | 21,338 | 21,34 | 21,34 |

Tablica 9. Rezultati simulacija strujanja B za različite temperaturne provodnosti vanjske cijevi

| | 0,1 W/(m K) | 1 W/(m K) | 5 W/(m K) | 10 W/(m K) | 15 W/(m K) | 20 W/(m K) |
|----------------------------------|-------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| Dobivena energija [MJ] | 488,4 | 809,686 | 860,62 | 867,44 | 869,37 | 870,88 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 20,88 | 21,31 | 21,367 | 21,375 | 21,377 | 21,378 |

Graf dobivene energije naprema toplinskoj provodnosti vanjske cijevi prikazan je na slici 21. Iz grafa se vidi da nakon određene vrijednosti povećavanje toplinske provodnosti cijevi ne povećava dobivenu energiju izmjenjivača. Ovo se događa zbog toga što mala toplinska provodnost zemlje ograničava toplinski tok na neku maksimalnu vrijednost, a utjecaj toplinske provodnosti cijevi postaje zanemariv. Pri malim vrijednostima utjecaj toplinske provodnosti cijevi postaje dominantan, i njezina promjena značajno mijenja toplinski tok, što se vidi na početku grafa.

**Slika 21 Ovisnost dobivene energije o toplinskoj provodnosti vanjske cijev**

8.5 Utjecaj toplinske provodnosti unutarnje cijevi

Pošto provođenje topline kroz unutarnju cijev natrag u unutarnju vodu uzrokuje smanjenjem temperaturne razlike hladne vode i zemlje, smanjit će se i toplinski tok. Da bi se ovo spriječilo, unutarnja cijev može se izolirati. Ispitan je utjecaj toplinske provodnosti cijevi za vrijeme trajanja simulacije od 10 sati. Rezultati su prikazani u tablicama 10 i 11.

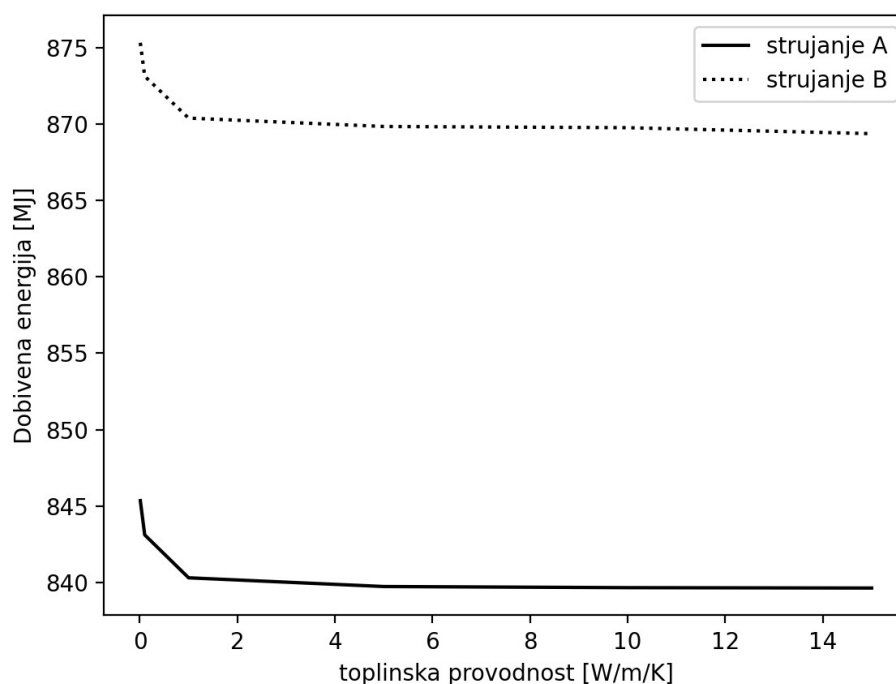
Tablica 10. Rezultati simulacija strujanja A za različite temperaturne provodnosti unutarnje cijevi

| | 0,01 W/(m K) | 0,1 W/(m K) | 1 W/(m K) | 5 W/(m K) | 10 W/(m K) | 15 W/(m K) |
|----------------------------------|--------------|-------------|-----------|-----------|------------|------------|
| Dobivena energija [MJ] | 845,35 | 843,11 | 840,3 | 839,73 | 839,655 | 839,63 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 21,345 | 21,343 | 21,34 | 21,34 | 21,34 | 21,34 |

Tablica 11. Rezultati simulacija strujanja B za različite temperaturne provodnosti vanjske cijevi

| | 0,01 W/(m K) | 0,1 W/(m K) | 1 W/(m K) | 5 W/(m K) | 10 W/(m K) | 15 W/(m K) |
|----------------------------------|--------------|-------------|-----------|-----------|------------|------------|
| Dobivena energija [MJ] | 875,32 | 873,13 | 870,387 | 869,84 | 869,76 | 869,37 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 21,382 | 21,38 | 21,378 | 21,377 | 21,377 | 21,377 |

Pošto je debljina cijevi samo 6 mm, toplinska provodnost cijevi nema velik utjecaj za vrijednosti veće od 1 W/(m K). Na manjim vrijednostima se ipak vidi neki utjecaj, gdje je ukupna dobivena energija kod toplinske provodnosti u iznosu od 0,01 povećana za 0,68% za oba tipa strujanja. Ovaj utjecaj bi vjerojatno bio veći za znatno veće razlike temperatura u vodama, ali zaključuje se da je ovo generalno zanemariv gubitak.



Slika 22. Ovisnost dobivene energije o toplinskoj provodnosti unutarnje cijevi

8.6 Utjecaj dubine

Pitanje je koliko je isplativije kopati dublje naprema povećanim troškovima snage pumpe i početnim investicijskim troškovima. Provedeno je 5 dodatnih simulacija na dubinama od 50 – 350 m u trajanju od 10 h. Rezultati su dani u tablicama 12 i 13.

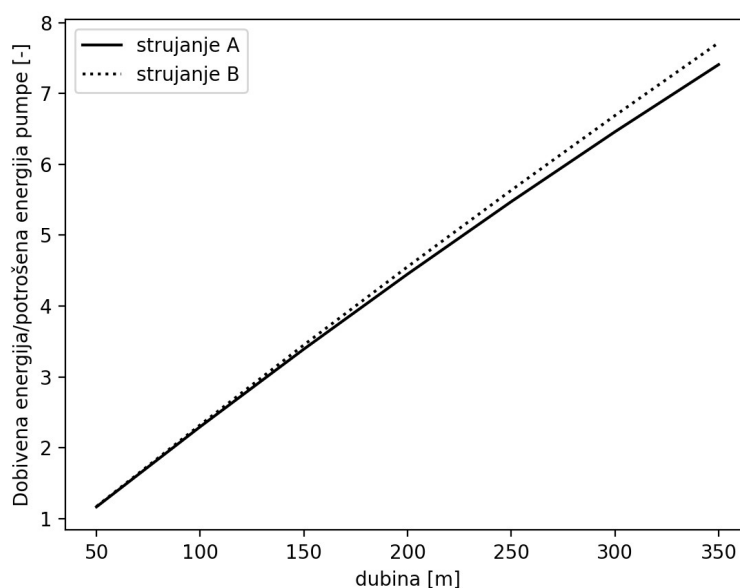
Tablica 12. Rezultati simulacija strujanja A na različitim dubinama

| | 50 m | 100 m | 150 m | 200 m | 250 m | 300 m | 350 m |
|----------------------------------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|---------|
| Dobivena energija [MJ] | 25,265 | 99,53 | 220,477 | 385,73 | 592,93 | 839,63 | 1123,39 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 20,039 | 20,154 | 20,344 | 20,607 | 20,94 | 21,34 | 21,807 |

Tablica 13. Rezultati simulacija strujanja B na različitim dubinama

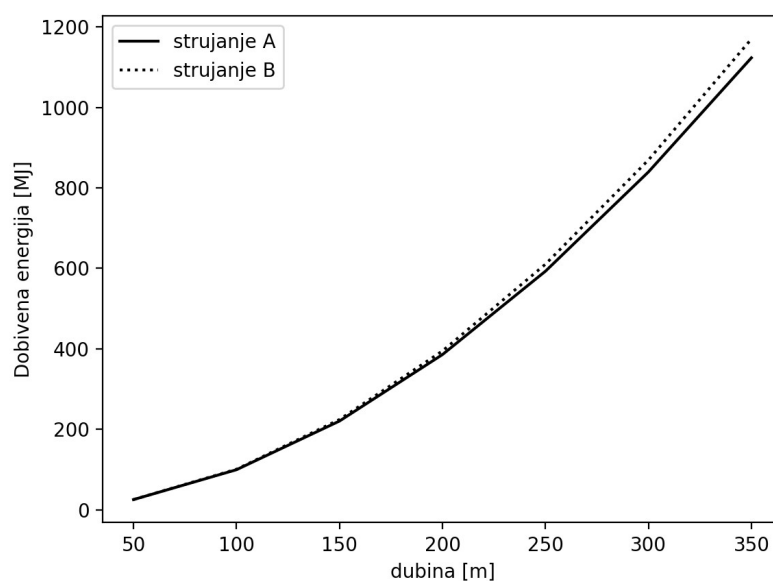
| | 50 m | 100 m | 150 m | 200 m | 250 m | 300 m | 350 m |
|----------------------------------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|---------|
| Dobivena energija [MJ] | 25,4 | 100,66 | 224,3 | 394,72 | 610,33 | 869,37 | 1170,16 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 20,04 | 20,156 | 20,35 | 20,62 | 20,96 | 21,377 | 21,865 |

Iz tablica se vidi da se za duplo veću dubinu izmjenjivača dobiva više nego duplo toplinske energije. Pošto utrošena snaga pumpe linearno ovisi o dubini, zaključuje se da je isplativije kopati dublje ako početni troškovi to dozvoljavaju. Graf omjera dobivene toplinske energije i potrošene energije pumpe u 10 sati rada za različite dubine prikazan je na slici 23.



Slika 23. Omjer dobivene i utrošene energije za različite dubine

Iz slike se vidi da omjer potrošene i dobivene energije raste skoro linearno s povećanjem dubine, što implicira da je dobivena energija ovisna o kvadratu dubine. Vidi se da kod strujanja A krivulja pada malo brže nego kod strujanja B. Ovo je opet zbog toga što pri malim dubinama ne dolazi do visokih temperatura, pa nema ni značajnih gubitaka prijenosa topline prema zemlji. Ovisnost ukupne dobivene energije o dubini može se vidjeti na slici 24.



Slika 24. Ovisnost dobivene energije o dubini

8.7 Utjecaj temperaturnog gradijenta

Postavlja se pitanje kakvu će ovisnost imati ukupna dobivena toplinska energija naprema temperaturnom gradijentu zemlje. Analizirani su temperaturni gradijenti između 0.05 i 0.3 °C/m sa simulacijama u trajanju od 10 h, a rezultati su prikazani u tablicama 14 i 15

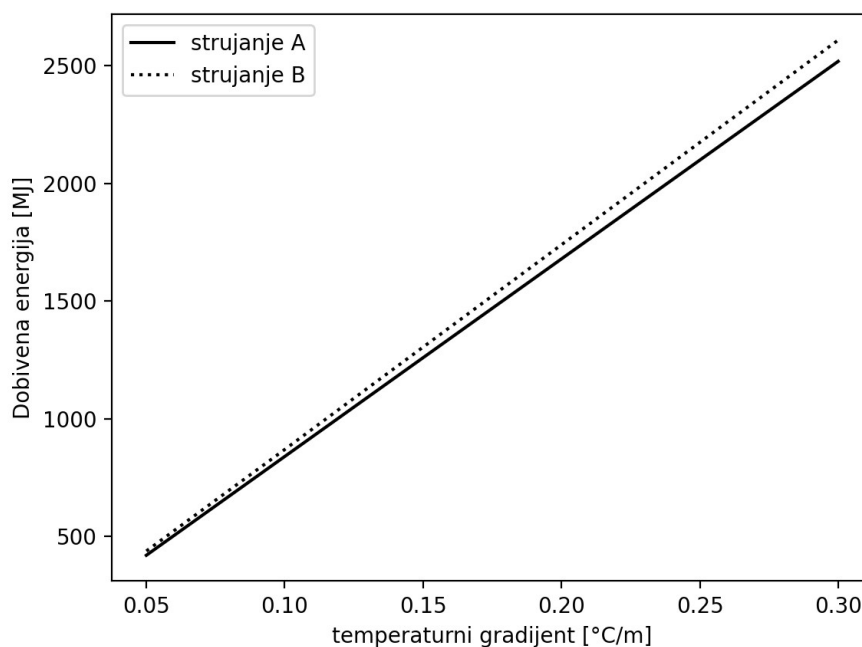
Tablica 14. Rezultati simulacija strujanja A za različite temperaturne gradijente

| | 0,05 °C/m | 0,1 °C/m | 0,15 °C/m | 0,2 °C/m | 0,25 °C/m | 0,3 °C/m |
|----------------------------------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|
| Dobivena energija [MJ] | 419,81 | 839,63 | 1259,44 | 1679,255 | 2099,07 | 2518,883 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 20,67 | 21,34 | 22,01 | 22,68 | 23,35 | 24 |

Tablica 15. Rezultati simulacija strujanja B za različite temperaturne gradijente

| | 0,05 °C/m | 0,1 °C/m | 0,15 °C/m | 0,2 °C/m | 0,25 °C/m | 0,3 °C/m |
|----------------------------------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|
| Dobivena energija [MJ] | 437,87 | 869,37 | 1304,5 | 1739,47 | 2174,33 | 2609,2 |
| Krajnja izlazna temperatura [°C] | 20,689 | 21,377 | 22,066 | 22,754 | 23,44 | 24,13 |

Graf ovisnosti dobivene energije naprema temperaturnom gradijentu na dubini od 300 metara prikazana je na slici 25.



Slika 25. Ovisnost dobivene energije o temperaturnom gradijentu

Iz slike se jasno vidi da je ukupna dobivena energija obrnutog strujanja proporcionalna s temperaturnim gradijentom zemlje. Kod strujanja A se pojavljuje krivulja, čije su vrijednosti slične kao kod strujanja B samo umanjene za toplinske gubitke koje taj izmjenjivač donosi.

8.8 Validacija koda

Sustav jednadžbi matematičkog modela rješavao se u programskom jeziku Python. Kod ovakvih problema, teško je procijeniti je li sve točno uneseno u program. Ako je većina modela unesena točno, mogu se dobivati logični rezultati s potpuno krivim vrijednostima. Da bi se osiguralo od ovoga, koristi se prvi glavni stavak. Ukupna promjena energije u sustavu mora biti jednaka sumi energetskih tokova koji prolaze kroz granice sustava. Pošto je na svim granicama ovog modela osim na ulazu i izlazu vode postavljen rubni uvjet da nema toplinskog toka, ova jednadžba će glasiti

$$U_{uk}^{n+1} - U_{uk}^n + \Delta H = 0 \quad (8.2)$$

U ovoj jednadžbi U_{uk}^n predstavlja ukupnu unutarnju energiju cijele domene u trenutnom vremenskom trenutku, a U_{uk}^n u sljedećem. Razlika entalpija ΔH računa se iz izraza 8.1.

$$U_{uk}^{n+1} - U_{uk}^n + \frac{1}{2} (q_m c_p (T_{izlaz}^n - T_{ulaz}^n) + q_m c_p (T_{izlaz}^{n+1} - T_{ulaz}^{n+1})) \Delta t = 0 \quad (8.3)$$

Pošto se sustav jednadžbi računa iterativno, tako da se ne dolazi do savršeno točnog rješenja, uvijek će postojati neko odstupanje od ove jednadžbe. U početnom trenutku simulacije, zbog zadanih početnih uvjeta, gdje naprimjer temperature točaka na rubovima domene nisu postavljene jednakim točkama do njih tako da ipak postoji mali toplinski tok, dolazi do odstupanja od jednadžbe 8.2 za 0,3 MJ. Nakon toga, ovo odstupanje pada na neku jako malu vrijednost koja varira kroz simulaciju. Na provedenoj simulaciji od 600 sati, ako se zanemari početna greška, ukupna akumulirana greška je 0,0043 MJ. Ova greška je zanemariva naprema prenesenih 21214,09 MJ.

9 Zaključak

Kad bi računala imala znatno veću procesorsku moć i memoriju, numeričke metode poput metode konačnih razlika bile bi idealne za analiziranje svih procesa u prirodi koji se znaju matematički opisati. Pošto to nije slučaj, potrebna diskretizacija za mnoge modele često ograničava točnost rezultata. Odabrana diskretizacija za ovaj problem morala je biti poprilično gruba. Razmak između točaka u z smjeru je bio 3 m, što je vjerojatno uvelo znatnu grešku. Vremenska diskretizacija morala je biti mala zbog uvjeta stabilnosti, zbog čega je bila potrebna znatna količina računalnog vremena kako bi se vidjele određene promjene u procesu. Ipak, metoda konačnih razlika je vjerojatno bila jedan od najboljih načina analiziranja ovakvog problema. Jednom kad se postavi model, može se jednostavno analizirati utjecaj raznih parametara na bitne veličine u sustavu. U radu je pokazano da se dobivena toplinska energija povećava s kvadratom dubine. Pošto potrebna snaga pumpe raste linearno s dubinom, ovo pokazuje da je isplativije kopati dublje dok to investicijski troškovi dopuštaju. Pokazano je da temperaturna provodnost unutarnje cijevi ne igra veliku ulogu u izmjeni topline, ako je provodnost prevelika stvaraju se neki toplinski gubitci, ali su mali naprema ukupnom toplinskom toku. Temperaturna provodnost vanjske cijevi jedino ima utjecaj ako je toliko mala da stvara dominantan toplinski otpor u izmjenjivaču. Povećavanjem temperaturnog gradijenta zemlje vidi se da se dobivena toplinska energija povećava linearno. Uspoređeni su i rezultati za razna tla gdje se vidi da tlo igra značajnu ulogu u procesu. Ispitana je dugoročna izmjena topline do 600 sati rada, na kojoj se vidi da zbog smanjenja temperature zemlje značajno pada toplinski tok s vremenom. Za sve slučajeve, ispitana su dva strujanja. Pokazano je da izmjenjivač u kojem voda ulazi kroz prstenasti prostor između cijevi ima u svim slučajevima bolji prijenos topline nego onaj u kojem voda ulazi kroz unutarnju cijev. Ovo poboljšanje se povećava s povećanim prijenosom topline. Makar neki od ovih parametara nemaju značajan utjecaj, pametnim odabirom svih parametara dolazi do vrlo značajne akumulacije dobivene energije.

LITERATURA

- 1 Galović, A.: Termodinamika II, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, FSB, Zagreb, 2014.
- 2 Ozisk, M.: Numerical solution of heat-conduction problems
- 3 Salhein, K.: Control of Heat Transfer in a Vertical Ground Heat Exchanger for a Geothermal Heat Pump System