

# Mikromehaničko modeliranje kompozita ojačanog vlaknima

---

**Zečević, Antonio**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:662775>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-26**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Antonio Zečević**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar, mag. ing.

Dr. sc. Boris Jalušić, mag. ing.

Student:

Antonio Zečević

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojim mentorima doc. dr. sc. Tomislavu Lesičaru i dr. sc. Borisu Jalušiću na svoj pruženoj pomoći, ukazanom povjerenju, vremenu i savjetima prilikom izrade ovog rada.

Također bi se htio zahvaliti asistentu Anti Jurčeviću, mag.ing. na izdvojenom vremenu, pomoći, ustupljenim materijalima i svim sugestijama koje su uvelike olakšali izradu ovog rada.

Isto tako, zahvalio bi se svojoj obitelji na svojoj potpori i podršci tijekom mog dosadašnjeg studiranja.

Na kraju, zahvaljujem se svojoj djevojci te svim prijateljima i kolegama koji su me pratili i bili podrška.

Antonio Zečević



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 23 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 23 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Antonio Zečević** JMBAG: **0035221766**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Mikromehaničko modeliranje kompozita ojačanog vlaknima**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Micromechanical modelling of fibre reinforced composite**

Opis zadatka:

Kompozitni materijali ojačani vlaknima postaju sve poželjniji za primjenu u modernim konstrukcijama. Njihova mehanička svojstva ovise o materijalnim fazama koje se javljaju u mikrostrukтури: vlakna i smolasta organska matrica. Odabir orijentacije vlakana, mehaničkih svojstava i udjela materijalnih faza omogućuje dobivanje optimalnih mehaničkih svojstava materijala na makrorazini. Smolasta matrica osigurava kompaktnost, dok vlakna povećavaju nosivost kompozita koji se više ne može tretirati kao izotropni već kao ortotropni ili anizotropni materijal. Zahvaljujući razvoju naprednih numeričkih metoda, kao što je metoda homogenizacije, moguće je odrediti utjecaj svake pojedine mikrostrukturne faze, njezinog volumenskog udjela i usmjerenosti na mehanička svojstva kompozita na makrorazini. U ovom završnom radu razmatra se kompozit s epoksidnom matricom i jednoliko usmjerenim ugljičnim vlaknima. Volumenski udjeli vlakana u kompozitu iznose 30, 35, 40 i 45 %. Potrebno je:

1. Proučiti potrebnu literaturu vezanu uz metodu konačnih elemenata, modeliranje kompozitnih materijala i homogenizaciju.
2. Odrediti geometriju i veličinu reprezentativnog volumenskog elementa (RVE-a) za sve zadane volumenske udjele ugljičnih vlakana.
3. Primjenom homogenizacije prvog reda odrediti uprosječena elastična svojstva kompozita za sve zadane volumenske udjele ugljičnih vlakana.
4. Provjeriti utjecaj gustoće diskretizacije RVE-a i duljine RVE-a u smjeru vlakana na uprosječene rezultate.

Prilikom dodjeljivanja materijalnih svojstava konstituenata kompozita, smolastu matricu smatrati izotropnim materijalom, a ugljična vlakna ortotropnim materijalom. U numeričkim simulacijama diskretizirati mikrostrukтуру kompozita heksaedarskim konačnim elementima. Za provedbu numeričkih simulacija primijeniti komercijalni programski paket Abaqus. U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2022.

Datum predaje rada:

1. rok: 20. 2. 2023.  
2. rok (izvanredni): 10. 7. 2023.  
3. rok: 18. 9. 2023.

Predviđeni datumi obrane:


1. rok: 27. 2. – 3. 3. 2023.  
2. rok (izvanredni): 14. 7. 2023.  
3. rok: 25. 9. – 29. 9. 2023.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar

Dr. sc. Boris Jalušić, mag. ing. mech.

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Vladimir Soldo



## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD.....	1
1.1. Heterogeni materijali.....	1
1.1.1. Deformacijsko ponašanje heterogenih materijala .....	2
1.2. Kompozitni materijali .....	3
1.2.1. Povijesni razvoj.....	3
1.2.2. Kompoziti.....	4
1.2.3. Kompozitni materijali ojačani vlaknima .....	5
1.3. Ugljična vlakna .....	6
1.4. Polimerne matrice .....	8
2. METODA KONAČNIH ELEMENATA .....	9
2.1. Uvod u metodu konačnih elemenata .....	9
2.2. Programski paket Abaqus .....	10
2.3. Osnovne jednadžbe metode konačnih elemenata.....	11
2.3.1. Jednadžbe ravnoteže .....	11
2.3.2. Kinematičke relacije .....	13
2.3.3. Konstitutivne jednadžbe.....	14
2.4. Osnovni prizmatični element .....	15
3. ODREĐIVANJE MATERIJALNIH SVOJSTAVA .....	18
3.1. Metoda homogenizacije .....	19
3.2. Reprezentativni volumenski element .....	22
4. NUMERIČKA ANALIZA .....	24
4.1. Mikrostruktura.....	24
4.2. Inicijalna analiza .....	25
4.3. Odabir reprezentativnog volumenskog elementa.....	31
4.3.1. Mikrostruktura RVE-a .....	32
4.3.2. Rubni uvjeti.....	33
4.3.3. Numeričke analize RVE-ova .....	35
4.4. Analitičke metode .....	38
4.4.1. Modul elastičnosti u smjeru vlakana.....	38
4.4.1.1. Izračun modul elastičnosti kompozita u smjeru vlakana .....	39
4.4.2. Modul elastičnosti u smjeru okomitom na vlakna .....	40
4.4.2.1. Izračun modula elastičnosti kompozita u smjeru okomitom na vlakna .....	41
4.4.3. Modul smičnosti.....	41
4.4.3.1. Izračun modula smičnosti kompozita .....	42
4.5. Numeričke analize različitih udjela vlakana .....	43

---

4.5.1.	45 % udjela vlakana .....	44
4.5.2.	40 % udjela vlakana .....	46
4.5.3.	35 % udjela vlakana .....	47
4.5.4.	30 % udjela vlakana .....	47
4.5.5.	Aproksimacija mehaničkih svojstava.....	48
4.5.5.1.	Predviđanje mehaničkih svojstava kompozita s 50 % udjela vlakana .....	51
4.5.5.2.	Numerička analiza 50 % udjela vlakana .....	52
5.	ZAKLJUČAK.....	54
	LITERATURA.....	55



**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Tri faze deformacije heterogenog materijala [3] .....	2
Slika 2.	Globalna distribucija kompozita [6] .....	4
Slika 3.	Nastanak kompozita ojačanog vlaknima [7] .....	5
Slika 4.	Raspored vlakana unutar matrice [8] .....	5
Slika 5.	Postupak proizvodnje ugljičnih vlakana iz PAN-a [10] .....	7
Slika 6.	Osnovni konačni elementi [14] .....	10
Slika 7.	Konačni elementi unutar Abaqus programskog paketa [15] .....	10
Slika 8.	Komponente tenzora naprezanja [13] .....	12
Slika 9.	Osnovni prizmatični element [13] .....	15
Slika 10.	C3D8R konačni element [15] .....	17
Slika 11.	Višerazinsko modeliranje [16] .....	19
Slika 12.	Koraci numeričke homogenizacije materijala [17] .....	21
Slika 13.	Princip homogenizacije [18] .....	21
Slika 14.	Odabir RVE-a [20] .....	23
Slika 15.	Ortotropan materijal [21] .....	24
Slika 16.	Mikrostruktura materijala [22] .....	25
Slika 17.	Model inicijalne analize .....	28
Slika 18.	Rubni uvjeti jednoosnog razvlačenja .....	28
Slika 19.	Rubni uvjeti čistog smika .....	29
Slika 20.	Naprezanje u smjeru osi $x$ za slučaj jednoosnog istezanja .....	30
Slika 21.	Deformacije u smjeru osi $x$ za slučaj jednoosnog istezanja .....	30
Slika 22.	RVE veličine: a) 25 $\mu\text{m}$ , b) 50 $\mu\text{m}$ , c) 75 $\mu\text{m}$ , d) 100 $\mu\text{m}$ .....	32
Slika 23.	Rubni uvjeti jednoosnog razvlačenja RVE-a .....	33
Slika 24.	Rubni uvjeti čistog smika RVE-a .....	34
Slika 25.	Raspodjela normalnih naprezanja RVE-a veličine 25 $\mu\text{m}$ za jednoosno istezanje: a) $\sigma_x$ , b) $\sigma_y$ , c) $\sigma_z$ .....	36
Slika 26.	Raspodjela posmičnih naprezanja RVE-a veličine 25 $\mu\text{m}$ za slučaj čistog smika: a) $\tau_{xy}$ , b) $\tau_{xz}$ , c) $\tau_{yz}$ .....	37
Slika 27.	Dijagram promjene modula elastičnosti u smjeru $x$ osi pri promjeni duljine vlakana .....	38
Slika 28.	Analitički model izračuna smičnog naprezanja .....	40
Slika 29.	RVE kompozita s udjelom vlakana: a) 45 %, b) 40 %, c) 35 %, d) 30 % .....	44
Slika 30.	Naprezanja strukture 45 % udjela vlakana: a) $\sigma_x$ , b) $\sigma_y$ , c) $\sigma_z$ , d) $\tau_{xy}$ , e) $\tau_{xz}$ , f) $\tau_{yz}$ .....	45
Slika 31.	Moduli elastičnosti u smjeru osi $x$ , $E_x$ .....	49
Slika 32.	Moduli elastičnosti u smjeru osi $y$ , $E_y$ .....	49
Slika 33.	Moduli elastičnosti u smjeru $z$ , $E_z$ .....	49
Slika 34.	Moduli smičnosti u $xy$ ravnini, $G_{xy}$ .....	50
Slika 35.	Moduli smičnosti u $xz$ ravnini, $G_{xz}$ .....	50
Slika 36.	Moduli smičnosti u $yz$ ravnini, $G_{yz}$ .....	50
Slika 37.	RVE s 50 % udjela vlakana .....	52

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Mehanička svojstva ugljičnih vlakana [22].....	26
Tablica 2. Mehanička svojstva epoksidne matrice [22] .....	26
Tablica 3. Numerički rezultati u smjeru osi $x$ .....	31
Tablica 4. Mehanička svojstva kompozita s 45 % udjela vlakana – numerička metoda.....	46
Tablica 5. Mehanička svojstva kompozita s 45 % udjela vlakana – analitička metoda.....	46
Tablica 6. Mehanička svojstva kompozita s 40 % udjela vlakana – numerička metoda.....	46
Tablica 7. Mehanička svojstva kompozita s 40 % udjela vlakana – analitička metoda.....	47
Tablica 8. Mehanička svojstva kompozita s 35 % udjela vlakana – numerička metoda.....	47
Tablica 9. Mehanička svojstva kompozita s 35 % udjela vlakana – analitička metoda.....	47
Tablica 10. Mehanička svojstva kompozita s 30 % udjela vlakana – numerička metoda.....	48
Tablica 11. Mehanička svojstva kompozita s 30 % udjela vlakana – analitička metoda.....	48
Tablica 12. Mehanička svojstva kompozita s 50 % udjela vlakana .....	52
Tablica 13. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata.....	53

**POPIS OZNAKA**

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
<b>D</b>	-	matrica elastičnosti
<b>D<sub>e</sub></b>	-	diferencijalni operator
<b>E</b>	MPa	Youngov modul elastičnosti
<b>G</b>	MPa	modul smičnosti
<b>K</b>	-	globalna matrica krutosti
<b>N</b>	-	matrica funkcija oblika
<b>q<sub>v</sub></b>	MPa	volumenska opterećenja
<b>q</b>	-	vektor volumenskih sila
<b>R</b>	-	globalni vektor čvornih sila
<b>u</b>	m	komponenta pomaka u x smjeru koordinatne osi
<b>u</b>	-	vektor pomaka
<b>w</b>	m	komponenta pomaka u z smjeru koordinatne osi
<b>x, y, z</b>	-	Kartezijeve koordinate
<b>v</b>	m	komponenta pomaka u y smjeru koordinatne osi
<b>V</b>	-	globalni vektor čvornih stupnjeva slobode
<b>V</b>	m <sup>3</sup>	volumen
<b>γ</b>	-	kutna deformacija
<b>ε</b>	-	deformacija
<b>ε</b>	-	tenzor deformacije
<b>ν</b>	-	Poissonov faktor
<b>σ</b>	MPa	normalno naprezanje
<b>σ</b>	-	tenzor naprezanja
<b>τ</b>	MPa	smično naprezanje

**SAŽETAK**

Kompozitni materijali su u posljednje vrijeme postali sve prisutniji u inženjerskoj primjeni što zbog svojih odličnih mehaničkih svojstava, male mase te jednostavnosti izrade. U današnje vrijeme kada se teži što učinkovitijoj izradi proizvoda i konstrukcija uz što veće iskorištenje materijala, kompoziti se nameću kao sve poželjniji za primjenu u modernim konstrukcijama. Njihova mehanička svojstva ovise o materijalnim fazama koje se javljaju u mikrostrukturi, matrici i vlaknima. Odabir orijentacije vlakana, mehaničkih svojstava i udjela materijalnih faza omogućuje dobivanje optimalnih mehaničkih svojstava materijala na makrorazini. Dok vlakna povećavaju čvrstoću i nosivosti kompozita, matrica ima zadatak osigurati kompaktnost kompozita. Na mikrorazini nijedan materijal nije homogen, već se sastoji od različitih faza od kojih svaka ima različita mehanička svojstva, pa tako i kompozit. Kompozit stoga više nije izotropan, već je ortotropan ili anizotropan materijal. U sklopu ovog završnog rada promatra se kompozit s epoksidnom matricom i usmjerenim ugljičnim vlaknima. Također, razmatraju se udjeli vlakana od 30, 35, 40 i 45 %.

Zahvaljujući razvoju naprednih numeričkih metoda, prije svega metode konačnih elemenata (MKE) koja predstavlja najviše korištenu numeričku metodu, moguće je odrediti utjecaj svake pojedine mikrostrukturne faze, njezinog volumenskog udjela i usmjerenosti na mehanička svojstva kompozita na makrorazini. Za kvalitetno opisivanje fizikalnog ponašanja nekog materijala, nužno je opisati i poznavati svojstva njegove mikrostrukture. Stoga se ovaj rad bavi mikromehaničkim modeliranjem kompozita ojačanog vlaknima primjenom metode homogenizacije.

U prvom poglavlju opisani su heterogeni materijali, kompoziti te materijali koji su sastavni dio kompozita kojima se bavi ovaj rad, a to su polimerna matrica i ugljična vlakna. Zatim je dan opis metode konačnih elemenata i način određivanja mehaničkih svojstava metodom homogenizacije. Potom su provedene numeričke analize u programskom paketu Abaqus te su analizirani dobiveni numerički rezultati. I na kraju, prema sukladno dobivenim rezultatima doneseni su zaključci.

Ključne riječi: kompozit, mikrostruktura, metoda konačnih elemenata, metoda homogenizacije, mikromehaničko modeliranje, reprezentativni volumenski element, Abaqus, numerička analiza

**SUMMARY**

Recently, composite materials have become increasingly popular in engineering applications due to their excellent mechanical properties, low mass and ease of manufacture. Nowadays, when the aim is to make products and structures as efficiently as possible with the greatest possible exploitation of materials, composites are becoming even more desirable for use in modern structures. Their mechanical properties depend on the material phases that occur in the microstructure, matrix and fibers. The selection of fiber orientation, mechanical properties and the proportion of material phases allows obtaining optimal mechanical properties of the material at the macro level. While the fibers increase the strength and load-bearing capacity of the composite, the matrix has the task of ensuring the compactness of the composite. At the micro level no material is homogeneous, but consists of different phases, each of which has different mechanical properties, including the composite. The composite is therefore no longer isotropic, but an orthotropic or anisotropic material. As part of this Bachelor thesis, a composite with an epoxy matrix and oriented carbon fibers has been observed. Furthermore, fiber proportions of 30, 35, 40 and 45 % have been considered.

Thanks to the development of advanced numerical methods, mostly finite element method (FEM), which represents the most used numerical method, it is possible to determine the influence of each individual microstructural phase, its volume fraction and orientation on the mechanical properties of the composite at the macro level. In order to qualitatively describe the physical behavior of a material, it is necessary to describe and know properties its microstructure. Thus, this paper will deal with the micromechanical modeling of fiber-reinforced composites using the homogenization method.

In the first chapter, heterogeneous materials, composites and materials that are an integral part of the composite that is utilized in this work are described, namely the polymer matrix and carbon fibers. Then a description of the finite element method and the method of determining the mechanical properties using the homogenization method is given. Numerical analyzes were then carried out in the Abaqus software package and the obtained numerical results were analyzed. And finally, according to the results, a conclusion is given.

---

Key words: composite, microstructure, FEM, homogenization method, micomechanical modeling, representative volume element, Abaqus, numerical analysis

## 1. UVOD

### 1.1. Heterogeni materijali

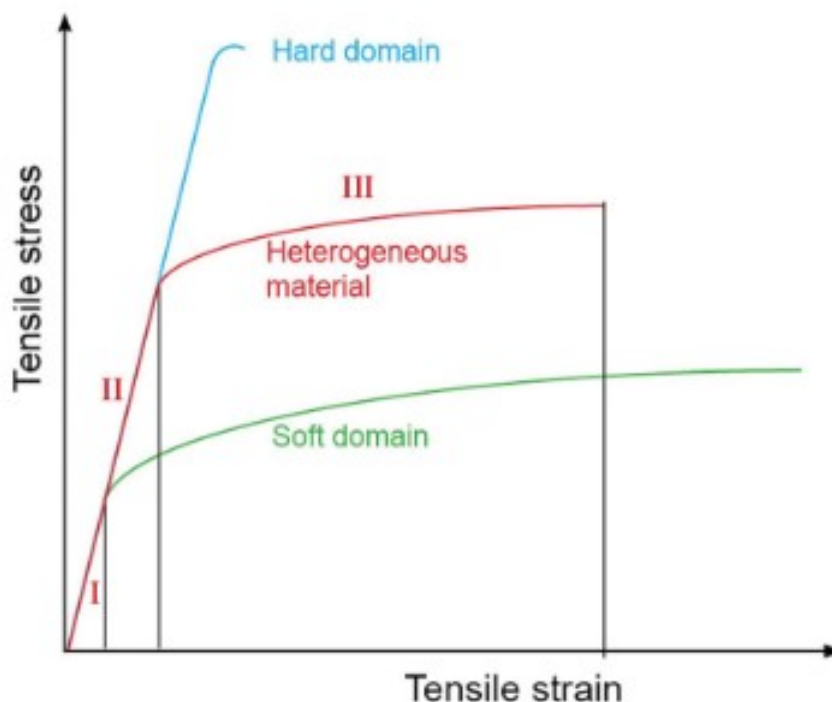
Od polovice prošlog stoljeća pa sve do danas broj različitih vrsta materijala eksponencijalno raste. S obzirom na konstantni napredak znanosti i tehnologije sve veću primjenu nalaze materijali s naprednim svojstvima uz prihvatljive proizvodne troškove, što je u današnje vrijeme vrlo bitan detalj u razvoju konstrukcija i strojnih dijelova. Danas nam je stoga poznato i više od 100000 različitih vrsta materijala koji se primjenjuju u svim područjima industrije [1]. Iako je broj osnovnih materijala malen, raznovrsnost materijala postiže se promjenom njihove strukture i sastava.

Osnovne vrste tehničkih materijala danas su: metali i legure, polimeri, keramika i staklo te kompoziti. Kemijski sastav i struktura svakog pojedinog materijala utječe kako na njegova mehanička svojstva tako i na ponašanje tijekom eksploatacije. Prilagođavanjem kemijskog sastava i strukture moguće je mijenjati svojstva svakog poznatog materijala. Najčešće razlikujemo homogene i heterogene materijale. Homogeni materijali su definirani kao materijali jedinstvenog sastava koji se u načelu ne mogu mehanički razdvojiti na različite materijale [2].

Materijali koji se danas najčešće upotrebljavaju i materijal koji se koristi u ovom radu je heterogeni materijal. Materijali su najčešće ili krhki ili duktilni, vrlo su rijetki materijali koji sadrže oba svojstva. Heterogeni materijali su novija vrsta materijala čiji se sastav prije svega sastoji od najmanje dva ili više različitih konstituenata. Odnosno, heterogeni materijali mogli bi se definirati kao materijali s izrazitom heterogenošću u čvrstoći između različitih područja unutar samog materijala. Ova heterogenost čvrstoće može biti uzrokovana heterogenošću mikrostrukture, kristalne strukture ili sastava [3]. Najznačajniji predstavnik heterogenih materijala su kompozitni materijali, koji će biti opisani u poglavlju 1.2.

### 1.1.1. Deformacijsko ponašanje heterogenih materijala

Tijekom vlačnog ispitivanja s povećanjem sile, a time i nastale deformacije, proces deformacije može se razdijeliti u tri faze kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Tri faze deformacije heterogenog materijala [3]

U fazi 1, oba konstituenta (čvrsti i duktilni) deformiraju se elastično, što je zapravo isto kao kod konvencionalnog homogenog materijala. Čvrsti konstituent bila bi matrica, a duktilni ojačala.

U drugoj fazi, u duktilnom materijalu dolazi do pojave dislokacijskog klizanja kako bi nastala plastična deformacija, dok će se čvršći materijal i dalje ponašati elastično zbog čega dolazi do mehaničke nekompatibilnosti. Duktilni materijali moraju se deformirati zajedno sa susjednim čvrstim materijalom i stoga se ne mogu slobodno plastično deformirati. Deformacija na granici materijala mora biti kontinuirana, iako duktilni materijal neće podnijeti veće deformacije jer će se plastično deformirati. Stoga će postojati gradijent plastične deformacije u duktilnom materijalu u blizini granice materijala. U idealnom slučaju, duktilni materijal potpuno je okružen matricom čvršćeg materijala tako da duktilni materijal ne može promijeniti svoj oblik sve dok se matrica čvršćeg materijala ne počne plastično deformirati. To može učiniti duktilni materijal skoro jednako čvrstim kao čvršći materijal što će pozitivno utjecati na granicu razvlačenja samog materijala.



U trećoj fazi, oba konstituenta se plastično deformiraju, ali duktilniji materijal podnosi mnogo veća naprezanja od čvrstog materijala, stvarajući tzv. particiju naprezanja. Kako susjedni materijali podnose različita naprezanja, očekuje se da gradijenti naprezanja postoje blizu granica materijala i u duktilnom i u čvrstom materijalu. Ovi gradijenti postat će veći s povećanjem raspodjele deformacija i posljedično će proizvesti otvrdnjavanje uslijed povratnog naprezanja [3].

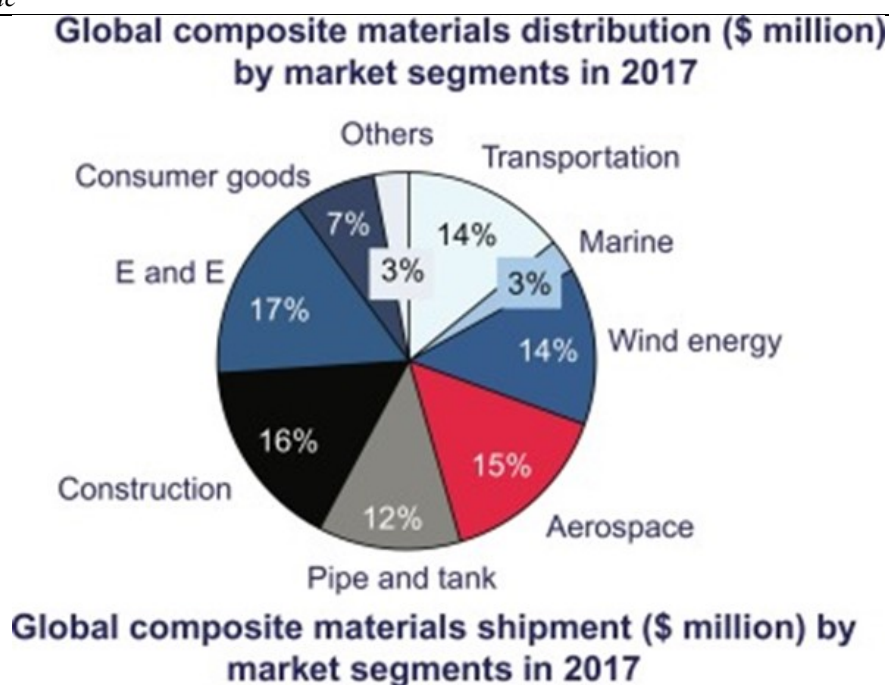
## **1.2. Kompozitni materijali**

### **1.2.1. Povijesni razvoj**

Kroz povijest su se primjenjivali različiti kompozitni materijali. Jedan od najstarijih primjera upotrebe kompozita dolazi iz Mezopotamije oko 3400. godine pr.n.e., kada su lijepljenjem drvenih traka i dasaka dobili prvu šperploču. U sljedećim tisućljećima brojni narodi i kulture koristili su kompozitne materijale spajajući prirodne materijale koji su im bili na raspolaganju [4].

Razvoj kompozita u modernom dobu započeo je početkom 20. stoljeća razvojem polimernih kompozita. Svojstva tako spojenih kompozita značajno premašuju svojstva do tada upotrebljivanih prirodnih smola. Godine 1935. kompanija Owens Corning predstavila je prvo stakleno vlakno. Staklena vlakna zajedno u kombinaciji s polimerom stvaraju izuzetno jaku strukturu koja je istovremeno vrlo lagana. Time je započeo razvoj industrijskih materijala temeljen na polimernim kompozitima ojačanim vlaknima.

Nagli razvoj i primjena kompozitnih materijala započela je 40-ih godina 20. stoljeća zbog naglog rasta industrije, vojnih potreba i otkrivanja novih materijala s izrazito dobrim mehaničkim svojstvima. 1970-ih godina industrija kompozita počela je sve više rasti zbog razvoja novih i boljih polimernih smola i ojačavala. Danas je primjena kompozita postala izuzetno važna u mnogim poljima ljudskog života kao što su zrakoplovna i automobilska industrija, medicina, građevinarstvo, svemirska industrija, ekstremni sportovi, konstrukcijski elementi... [5]



Slika 2. Globalna distribucija kompozita [6]

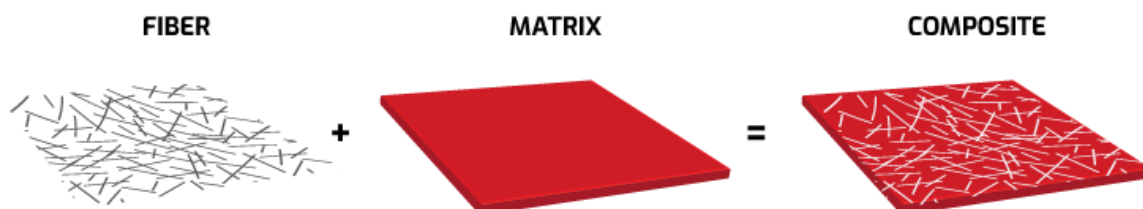
### 1.2.2. Kompoziti

Kompozitni materijali ili kompoziti su heterogeni materijali nastali umjetnim spajanjem dvaju ili više kemijski različitih materijala s jasno definiranom granicom između njih, s ciljem dobivanja takvih svojstava kakva ne posjeduje niti jedna komponenta sama za sebe. Za razliku od metalnih legura kod kompozita svaka komponenta zadržava vlastita svojstva. Kompozitni materijali se sastoje od dva osnovna konstituenta, a to su matrica i ojačalo.

Glavna zadaća matrice je da drži ojačala zajedno, mora osigurati dobro prijanjanje, štiti ih od vanjskih utjecaja, ima važnu funkciju u prijenosu opterećenja na ojačala i daje vanjsku formu kompozitu. Zadaća ojačala je da bude nosivi element kompozita te mora poboljšati mehanička svojstva odnosno mora osigurati dovoljno visoku čvrstoću, modul elastičnosti (krutost) te otpornost na trošenje. Materijal matrice može biti metal, polimer ili keramika.

Ojačala mogu biti raznih materijala te mogu biti u obliku vlakana ili čestice. Spajanjem raznovrsnih materijala u kompozit dobivamo novi materijal poboljšanih svojstava kao što su: veća čvrstoća i krutost, veća specifična krutost i čvrstoća, otpornost na abraziju, dobra kemijska postojanost, otpornost na visokim temperaturama. Kompozitni materijali kao i svi drugi materijali imaju svoje nedostatke. Kompoziti su krhki od konvencionalnih materijala i zbog

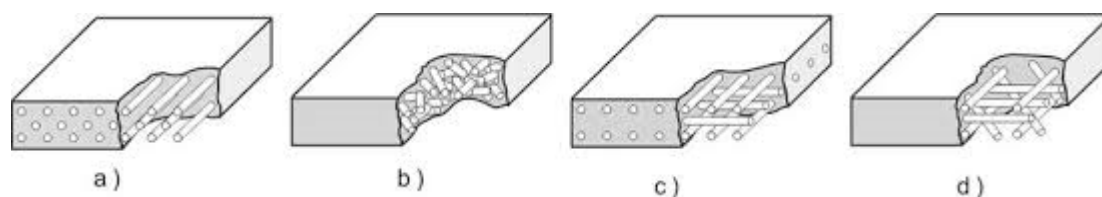
toga su podložniji oštećenju. Jedan od većih nedostataka kompozita je teško otkrivanje oštećenja i pukotina, odnosno oštećenja je gotovo nemoguće uočiti vizualno. Ukupna svojstva kompozita ovise o svojstvima matrice i ojačala te obliku, volumenu, veličini te raspodjeli konstituenata.



Slika 3. Nastanak kompozita ojačanog vlaknima [7]

### 1.2.3. Kompozitni materijali ojačani vlaknima

Vlakna su najčešće korištena ojačala i njihova je funkcija povećati čvrstoću i krutost kompozitnog materijala. Vlakna koja se koriste za ojačavanje kompozita prema dimenzijama dijelimo na viskere, vlakna i žice. Vlakna zbog svojih oblika i dimenzija imaju značajno manje kristalnih nesavršenosti u strukturi zbog čega imaju značajno bolja mehanička svojstva. Ako nesavršenost uzrokuje pukotinu ili lom vlakna, ono neće propagirati kroz cijelo tkanje zbog prisutnosti drugih vlakana. Svojstva kompozita ovise o prijenosu opterećenja s matrice na ojačalo, a prijenos direktno ovisi o veličini kontaktne površine između komponenti (što je vlakno manjeg promjera bolji je transfer opterećenja s matrice na ojačalo). Materijal u obliku vlakna lakše se deformira bez loma, što je izuzetno važno kod izrade tkanina. Vlakna mogu biti različito usmjerena unutar matrice.



Slika 4. Raspored vlakana unutar matrice [8]

Kao što je prikazano na slici 4., vlakna mogu biti raspoređena:

- kontinuirano u jednom smjeru (a),
- slučajno usmjerena diskontinuirana (b),
- ortogonalno raspoređena (c),
- višesmjerno usmjerena (d)

Kontinuirana vlakana se teže ugrađuju u matrice ali imaju najbolja svojstva, a diskontinuirana vlakna s velikim omjerom duljine i promjera se lakše ugrađuju u matrice te se dobiva materijal s visokom krutosti i čvrstoćom. S obzirom na materijal vlakna dijelimo na staklena, aramidna i ugljična.

### 1.3. Ugljična vlakna

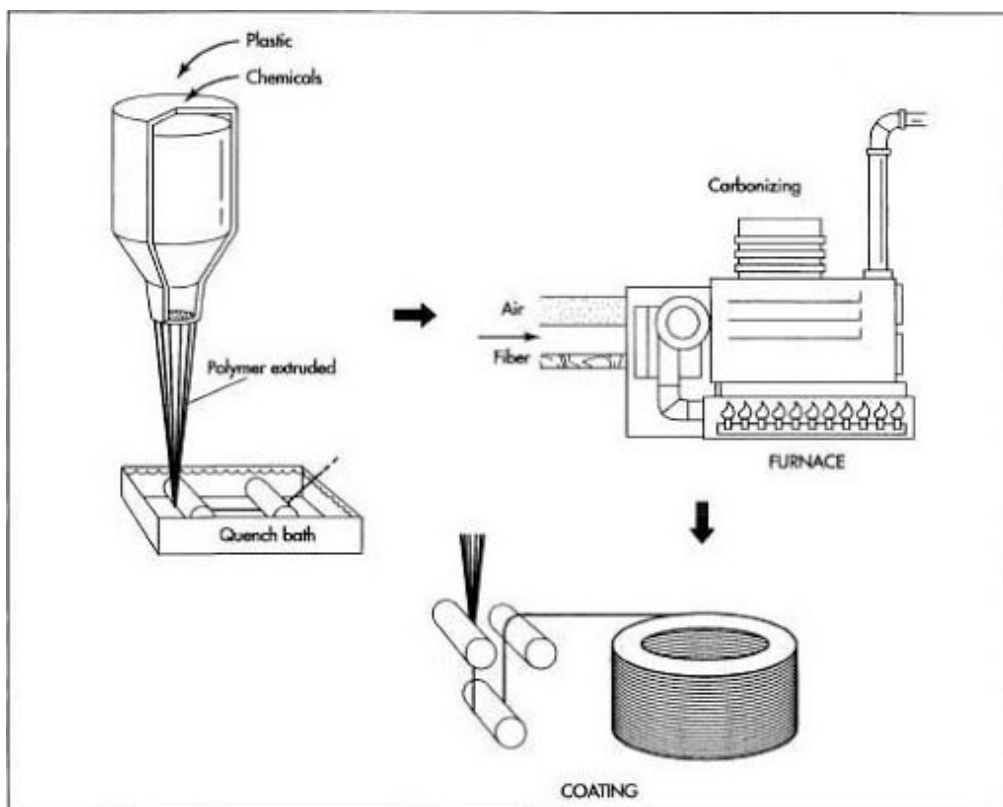
Ugljična vlakna se odlikuju visokom čvrstoćom i modulom elastičnosti. Svoju primjenu ugljična vlakna pronašla su prije svega u modernoj tehnologiji. Upotrebljavaju se za proizvodnju jakih i laganih, ali izrazito žilavih i toplinsko otpornih materijala na osnovi ugljika.

Po sastavu i strukturi ugljična vlakna su vrlo jednostavna i sastoje se od međusobno povezanih atoma ugljika u niti. Ugljična vlakna imaju najveću specifičnu čvrstoću i specifičnu krutost te nisku žilavost u usporedbi s konvencionalnim materijalima. Zadržavaju visoku čvrstoću i modul elastičnosti i pri povišenim temperaturama, ali problem je temperaturna oksidacija na visokoj temperaturi. Na sobnoj temperaturi ugljična vlakna su kemijski postojana. Moguće je postići širok raspon svojstava vlakana omogućujući dizajniranje kompozita sa specifičnim svojstvima.

Ugljična vlakna dijelimo s obzirom na module elastičnosti na:

- vlakna s niskim modulom,
- standardnim modulom,
- visokim modulom,
- ultra visokim modulom i
- visoko čvrsta vlakna koja imaju izrazito veliku vlačnu čvrstoću.

Sirovine koje se koriste za dobivanje ugljičnih vlakana su: sirovine na bazi PAN-a (poliakrilonitrila), celuloze (eng. Rayon) i različitih smola (eng. Pitch). Danas se najveći dio ugljičnih vlakana, čak 90%, proizvodi upravo iz PAN-a. Proces proizvodnje podijeljen je na dio mehaničkog oblikovanja i dio kemijskih reakcija. Proizvodnja započinje izduživanjem sirovine kako bi se formirao vlaknasti oblik te nakon toga slijedi karbonizacija tijekom koje se vlakno zagrijava na vrlo visoku temperaturu bez prisutnosti kisika, kako bi se omogućilo gorenje. Nakon karbonizacije strukturu vlakna čine usko povezani ugljikovi lanci. Trenutno vodeći proizvođači ugljičnih vlakana su: Solvay, Hexcel Corporation, Mitsubishi Rayon Co., SGL Group, TohoTenax [9].



Slika 5. Postupak proizvodnje ugljičnih vlakana iz PAN-a [10]

Raspon primjene ugljičnih vlakana je širok i nalazi se svuda oko nas. Nalazimo ih u avio industriji, svemirskoj industriji, autoindustriji, pomorskoj industriji, medicini, vlakovima, tekstilnoj, kemijskoj, nuklearnoj industriji, sportskoj opremi itd. Aramidna i staklena vlakna i dalje prevladavaju u uporabi, iako imaju lošija mehanička svojstva od ugljičnih vlakana. Razlog tomu je upravo složena i skupa proizvodnja ugljičnih vlakana što rezultira njihovom visokom cijenom u odnosu na ostala vlakna.

#### 1.4. Polimerne matrice

Polimerne matrice su strukturno puno kompleksnije od metalnih ili keramičkih matrica. S druge strane, jeftinije su i mogu se vrlo lako proizvesti. Najveći nedostatak im je što polimeri imaju manju čvrstoću i temperatura pri kojoj se mogu koristiti im je vrlo niska. Isto tako, dugotrajna izloženost ultraljubičastom svjetlu i neka otapala mogu uzrokovati degradaciju svojstava polimernog materijala. Matrice ovog tipa su zbog svojih kovalentnih veza vrlo loši vodiči topline i električne struje, s druge strane su generalno kemijski postojanije od metalnih matrica.

Strukturalno, polimeri su ogromni lanci molekula s kovalentnim vezama među atomima ugljika. Proces spajanja jednog lanca u više njih naziva se polimerizacija [11]. Proces polimerizacije općenito je kemijska reakcija u kojoj nisko molekulski spojevi, monomeri, međusobnim povezivanjem kovalentnim vezama tvore makromolekule, tj. molekule polimera [12]. Dvije su glavne vrste polimerizacije, a to su lančana i stupnjevita. Polimerne matrice mogu biti plastomeri (PA, PE, PP) te duromeri (poliesterske, epoksidne, vinil esterske smole). U primjeni se najčešće pronalaze duromerne matrice sa smolom.

## 2. METODA KONAČNIH ELEMENATA

### 2.1. Uvod u metodu konačnih elemenata

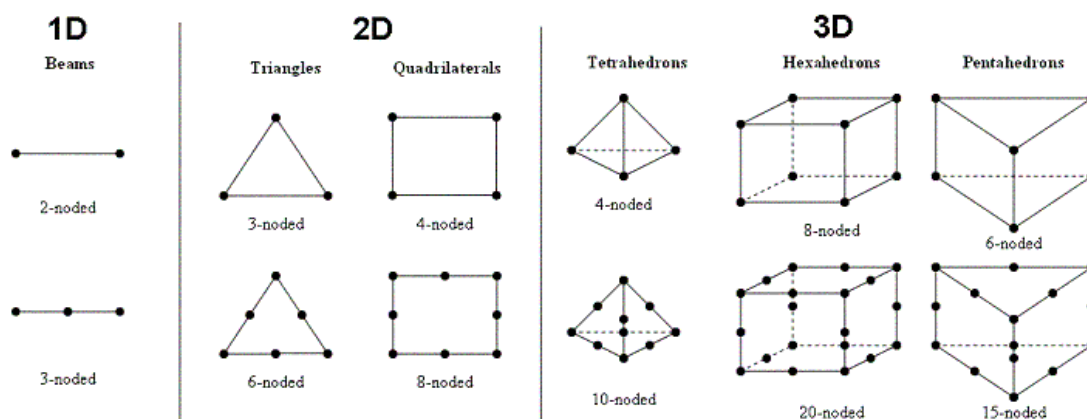
Klasične metode rješavanja problema kontinuiranih sustava temelje se na rješavanju diferencijalnih jednadžbi čije je točno analitičko rješenje moguće dobiti samo za jednostavnije proračunske modele. Promatranjem nekog općenitog složenijeg modela jako je teško dobiti rješenje koje će zadovoljiti diferencijalnu jednadžbu. Iz tog se razloga koriste numeričke metode koje se temelje na diskretizaciji kontinuiranog sustava gdje se diferencijalne jednadžbe zamjenjuju sustavom algebarskih jednadžbi, a jedna od tih metoda i ona koja se koristi u ovom radu je metoda konačnih elemenata (MKE).

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Drugim riječima, područje kontinuuma dijeli se na konačan broj potpodručja koja se nazivaju konačni elementi, odnosno razmatrani kontinuum postaje mreža konačnih elemenata. Konačni elementi međusobno su povezani u točkama koje se nazivaju čvorovi. Raspodjela zavisnih varijabli u svakom elementu, kao što su npr. polje pomaka, deformacije, naprezanja te ostalih veličina, opisuje se pomoću interpolacijskih funkcija. Te funkcije moraju zadovoljiti odgovarajuće uvjete da bi se diskretizirani model što više približio ponašanju kontinuiranog sustava. Ako se konačni elementi pravilno formuliraju, s povećanjem ukupnog broja elemenata, odnosno stupnjeva slobode, raste i točnost rješenja, tj. imamo konvergenciju rješenja.

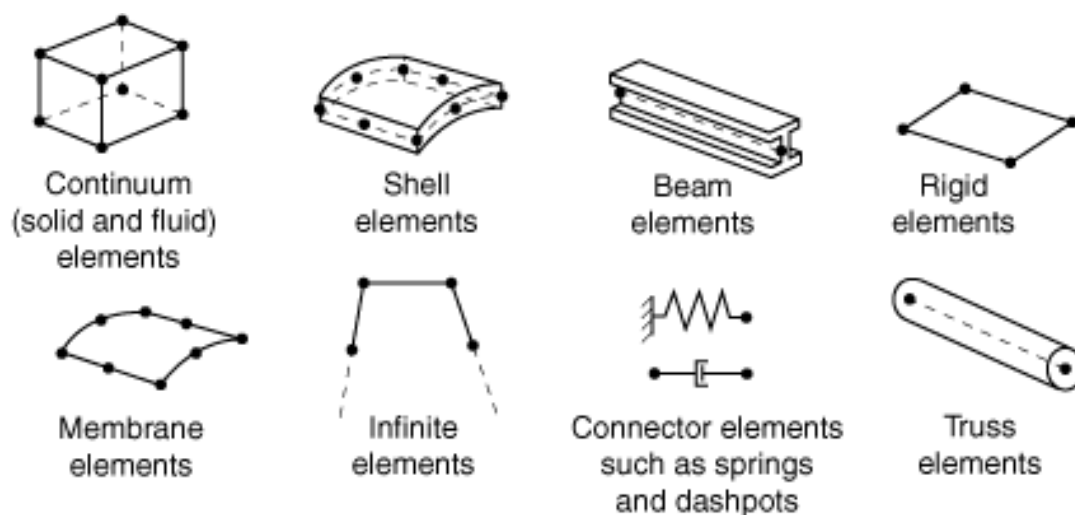
Prilikom rješavanja složenijih konstrukcija koje zahtijevaju diskretizaciju s velikim brojem elemenata potrebno je imati i sustav algebarskih jednadžbi s puno nepoznanica koje treba računati, što je bez korištenja računala vrlo teško postići. Zbog toga, za rješavanje problema primjenom metode konačnih elemenata potrebna je primjena računala, a to zahtijeva izradu odgovarajućih računalnih programa [13]. Jedan od računalnih programa koji se temelji upravo na metodi konačnih elemenata i u kojem je napravljen numerički dio ovog rada je Abaqus.

S obzirom na to da se radi o numeričkoj metodi, vrlo je bitno za istaknuti da su sva rješenja približna i da se samo uz pravilan odabir proračunskog modela i pravilne diskretizacije konačnih elemenata moguće dovoljno blizu približiti realnom i točnom rješenju.

Osnovni konačni elementi prikazani su na slici 6., a konačni elementi koji se mogu primjenjivati u programskom paketu Abaqus prikazani su na slici 7.



Slika 6. Osnovni konačni elementi [14]



Slika 7. Konačni elementi unutar Abaqus programskog paketa [15]

## 2.2. Programski paket Abaqus

U ovom radu za numeričku analizu korišten je programski paket Abaqus koji je komercijalni paket temeljen na metodi konačnih elemenata. Jedan je od najprisutnijih programskih paketa koji se koristi u industriji za numeričku analizu konstrukcija, od jednostavnih linearnih do složenih nelinearnih problema. Moguće je rješavati kako statičke, tako i dinamičke probleme, te pritom modelirati brojne materijale koji su danas u upotrebi.



Programski paket Abaqus sastoji se od sljedećih komponenti [15]:

- Abaqus/Standard – primjenjuje se za analizu linearnih i nelinearnih problema, kao što su statički i termički problemi,
- Abaqus/Explicit – primjenjuje se za rješavanje nelinearnih i tranzijentnih problema korištenjem eksplicitne metode vremenske integracije,
- Abaqus/CFD – primjenjuje se u rješavanju problema u području računalne dinamike fluida te spregnutih proračuna iz mehanike fluida, termičke i strukturne analize,
- Abaqus/Electromagnetic – primjenjuje se u rješavanju problema iz područja elektromagnetizma.

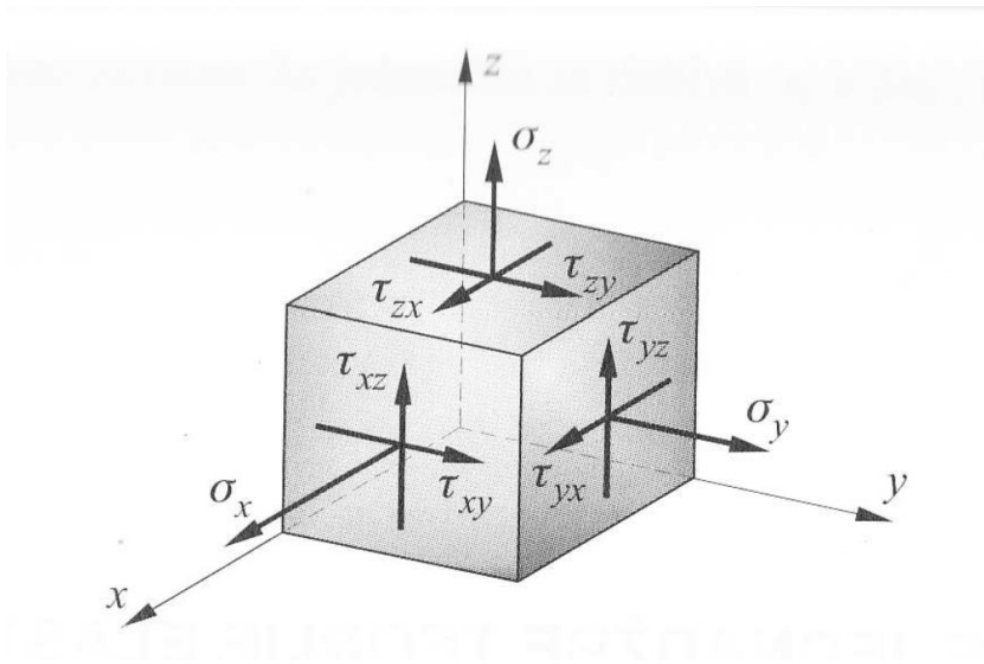
S obzirom na složenost podataka kojima se upravlja, program je podijeljen na: pretprocesiranje, procesiranje i naknadnu obradu, tj. postprocesiranje. U pretprocesiranju se izrađuje numerički model, procesiranje služi za rješavanje sustava jednačbi, dok se u postprocesiranju koriste grafički prikazi te se vrši obrada rezultata.

### **2.3. Osnovne jednačbe metode konačnih elemenata**

Za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela pomoću metode konačnih elemenata u elastičnom području, neophodne su osnovne relacije teorije elastičnosti. Relacije koje to obuhvaćaju su uvjeti ravnoteže, veze između deformacija i pomaka te konstitutivne jednačbe (Hookeov zakon). Pored tih osnovnih jednačbi, moraju biti zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti, zajedno s rubnim uvjetima sila i rubnim uvjetima pomaka [13].

#### **2.3.1. Jednačbe ravnoteže**

Stanje naprezanja u bilo kojoj točki kontinuuma potpuno je i jednoznačno opisano sa šest komponenata naprezanja, kao što je prikazano na slici 8.



Slika 8. Komponente tenzora naprezanja [13]

Iz uvjeta ravnoteže sila izvode se sljedeće jednadžbe:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_{vx} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_{vy} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + q_{vz} = 0. \quad (2.3)$$

Ako se komponente naprezanja i volumenskih sila prikažu u obliku vektora

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}], \quad (2.4)$$

$$\mathbf{q}^T = [q_{vx} \quad q_{vy} \quad q_{vz}]. \quad (2.5)$$

uvjeti ravnoteže mogu se napisati u obliku

$$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_y & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{vx} \\ q_{vy} \\ q_{vz} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

gdje  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  i  $\partial_z$  označavaju parcijalne derivacije po Kartezijevim koordinatama

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.7)$$

Uvođenjem diferencijalnog operatora

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_y & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

uvjeti ravnoteže mogu se zapisati na sljedeći način

$$\mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}. \quad (2.9)$$

### 2.3.2. Kinematičke relacije

Deformiranje kontinuuma opisano je pomacima koji se određuju komponentama  $u$ ,  $v$  i  $w$  u pravcu koordinatnih osi Kartezijeva koordinatnog sustava. Komponente tenzora deformacije određuju se deriviranjem komponenata pomaka

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.15)$$

Kinematičke relacije moguće je zapisati u matričnom obliku na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Ako se komponente tenzora deformacije i pomaka prikažu u obliku vektora

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}], \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}^T = [u \quad v \quad w], \quad (2.18)$$

Ako je

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

može se uspoređivanjem izraza (2.8) i (2.19) zaključiti kako je

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_e^T, \quad (2.20)$$

izraz (2.16) može se zapisati u obliku

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}. \quad (2.21)$$

### 2.3.3. Konstitutivne jednačbe

Veza između naprezanja i deformacije za linearno elastičan, homogen i izotropan materijal prikazana pomoću izraza koje čine Hookeov zakon

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)], \quad (2.22)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)], \quad (2.23)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)], \quad (2.24)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad (2.25)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad (2.26)$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \quad (2.27)$$

gdje su Youngov modul elastičnosti  $E$  i Poissonov koeficijent  $\nu$  dvije neovisne konstante materijala, a  $G$  je modul smicanja koji se može izračunati pomoću izraza

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.28)$$

Izrazi za Hookeov zakon mogu se zapisati matrično u obliku

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.29)$$

gdje je  $\mathbf{D}$  matrica elastičnosti. Njezini članovi različiti od nule ovise o konstantama elastičnosti materijala

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

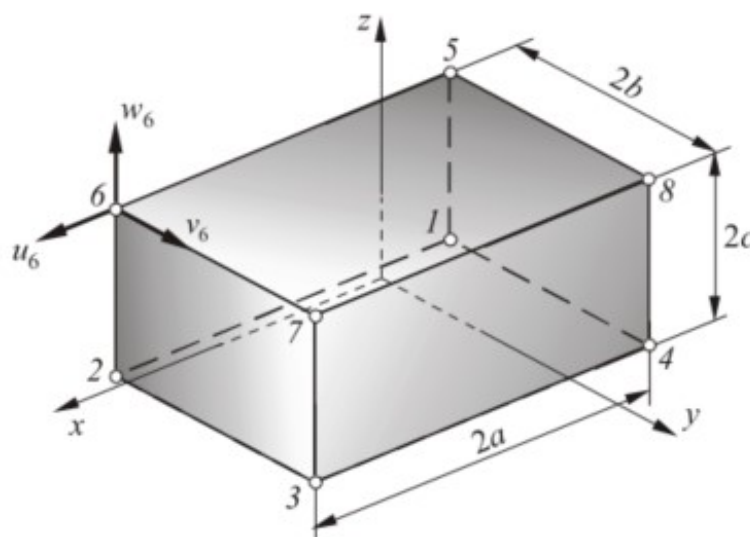
Globalna jednađba konačnih elemenata proračunskog modela za linearnu analizu glasi

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}, \quad (2.31)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  globalna matrica krutosti,  $\mathbf{V}$  je globalni vektor čvornih stupnjeva slobode, a  $\mathbf{R}$  globalni vektor čvornih sila.

#### 2.4. Osnovni prizmatični element

U numeričkoj analizi ovog rada korišteni su osnovni prizmatični (heksaedarski) elementi, pomoću kojih se vrlo dobro može opisati zadana struktura. Prizmatični elementi uz tetraedarske elemente najčešće su primjenjivani konačni elementi za trodimenzijsku analizu. Najčešće se primjenjuje prizmatični element u obliku paralelopipeda s osam čvorova s po tri stupnja slobode, slika 9. Jednako kao i za osnovni tetraedarski element, stupnjevi slobode su komponente pomaka u Kartezijevu koordinatnom sustavu [13].



Slika 9. Osnovni prizmatični element [13]

Raspodjela pomaka opisana je nepotpunim polinomom trećeg stupnja

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \quad (2.32)$$

$$v = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}xy + a_{14}yz + a_{15}zx + a_{16}xyz \quad (2.33)$$

$$w = a_{17} + a_{18}x + a_{19}y + a_{20}z + a_{21}xy + a_{22}yz + a_{23}zx + a_{24}xyz \quad (2.34)$$

Ovakva raspodjela pomaka omogućuje zadovoljavanje svih potrebnih kriterija za monotonu konvergenciju rješenja. Uvrštavanjem rubnih uvjeta za čvorove, pomoću izraza (2.32) – (2.34) izvodi se kvadratna matrica čiji je broj redaka jednak broju stupnjeva slobode elementa. Za određivanje funkcija oblika standardnim postupkom potrebno je odrediti njezinu inverznu matricu, što ukazuje na složenost postupka izračunavanja. Zbog toga se funkcije oblika jednostavnije izvode pomoću jednodimenzijskih Lagrangeovih polinoma na način koji je analogan određivanju funkcija oblika za dvodimenzijske pravokutne konačne elemente. Za razliku od dvodimenzijskih problema, ovdje su funkcije oblika jednake umnošku linearnih jednodimenzijskih polinoma u pravcu tri koordinatne osi [13].

Uvođenjem prirodnih koordinata  $\xi = \frac{x}{a}$ ,  $\eta = \frac{y}{b}$  i  $\zeta = \frac{z}{c}$ , funkcije oblika moguće je kraće zapisati

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i = 1...8, \quad (2.35)$$

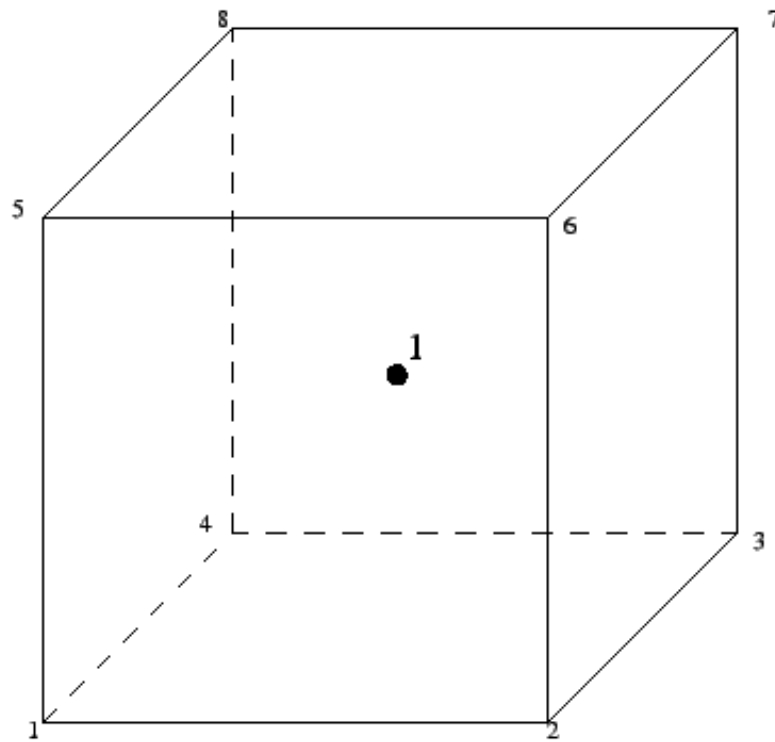
gdje su  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  koordinate čvorova. Ako je vektor stupnjeva slobode

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \dots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8] \quad (2.36)$$

matrica funkcija oblika jednaka je

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

U Abaqus programskom paketu za potrebe ove numeričke analize korišten je element s oznakom C3D8R odnosno riječ je o prizmatičnom konačnom elementu s reduciranom integracijom. Ovaj element sadrži osam čvorova i jednu točku integracije koja se nalazi u samom središtu elementa, kao što je prikazano na slici 10. Ovaj element koristi se jer smanjuje potrebno vrijeme analize za isti broj stupnjeva slobode u odnosu na element s potpunom integracijom.



Slika 10. C3D8R konačni element [15]

### 3. ODREĐIVANJE MATERIJALNIH SVOJSTAVA

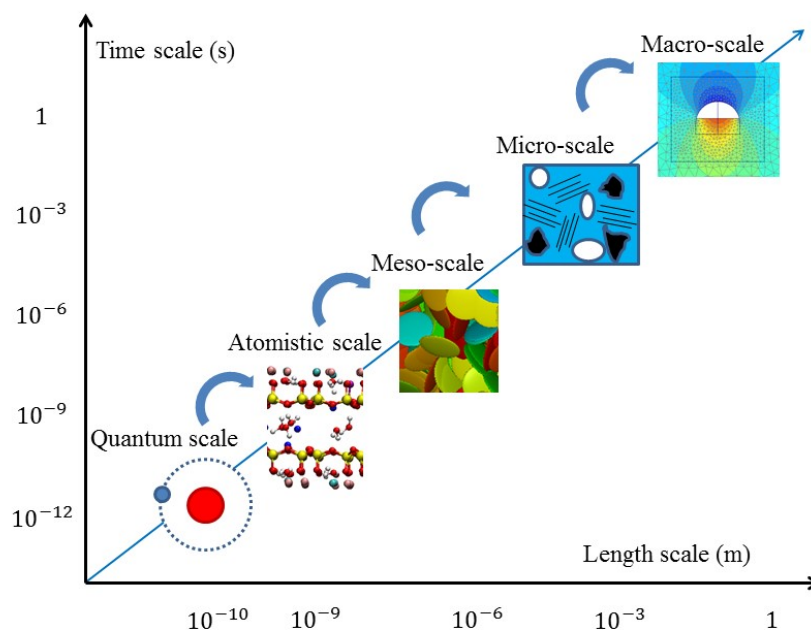
Potreba za materijalima s boljim mehaničkim svojstvima strateško je pitanje u inženjerstvu. Kompozitni materijali, tj. kombinacija najmanje dva različita materijala sa željenim svojstvima kao što su čvrstoća, otpornost i lakoća, razvijeni su i primijenjeni u mnogim područjima inženjerstva, a sada se koriste u mnogim područjima, uključujući automobilsku industriju, zrakoplove, dronove, biomedicinu itd. Određivanje mehaničkih svojstava materijala kao što su krutost ili čvrstoća u prošlosti je bilo moguće samo eksperimentalnim ispitivanjem. U tom kontekstu, odabir ili proizvodnja novih materijala s poboljšanim svojstvima bio je dug proces pokušaja-pogreške, koji je zahtijevao iskustvo i intuiciju o fizikalnim pojavama i utjecaju sastavnih dijelova. Razvoj modernih materijala s poboljšanim svojstvima doveo je samim time i do razvoja složenijih i detaljnijih metoda numeričkog modeliranja i analiziranja konstrukcija te analize ponašanja materijala. Zbog spoja napretka u mehaničkom modeliranju, računalnih mogućnosti, numeričkih/matematičkih metoda i razvoja novih proizvodnih procesa, sada je moguće s dobrom točnošću predvidjeti svojstva velikog broja proizvedenih materijala te proizvoditi materijale s kontroliranom mikrostrukturom. Tako je i cilj ovog rada, kao što je već spomenuto ranije, analizirati ponašanje kompozita ojačanog ugljičnim vlaknima, tj. odrediti njegova mehanička svojstva.

U zadnje vrijeme, posebna pažnja posvećuje se istraživanju mikrostrukture materijala i njezinog utjecaja na samo ponašanje materijala i njegova mehanička svojstva. Kako bi se što bolje predvidjelo ponašanje materijala u posljednje se vrijeme sve više primjenjuju višerazinske (*multiscale*) metode modeliranja materijala, slika 11. Višerazinske metode omogućuju analizu materijala ili konstrukcija od razine elektrona pa sve do makro razine, tj. kompaktnog materijala ili konstrukcije. Razine u ovim metodama međusobno su ovisne jedna o drugoj, jer rezultati dobiveni analizom jedne razine utječu i prenose se na drugu razinu na određeni način. Makro i mikrorazina najčešće su razmatrane razine ove metode.

Mikrorazina od posebnog je značaja jer njenom analizom dobivamo najbolje podatke o ponašanju materijala, tj. njegovim mehaničkim svojstvima. Analiza mikrorazine u obzir uzima utjecaj mikrostrukture materijala korištenjem homogeniziranih rezultata dobivenih analizom reprezentativnog volumenskog uzorka mikrostrukture, poznate geometrije i mehaničkih



svojstva konstituenata. Za ovaj rad primjenjivat će se metoda homogenizacije, a upravo će se baviti analizom mikrostrukture kompozita.



Slika 11. Višerazinsko modeliranje [16]

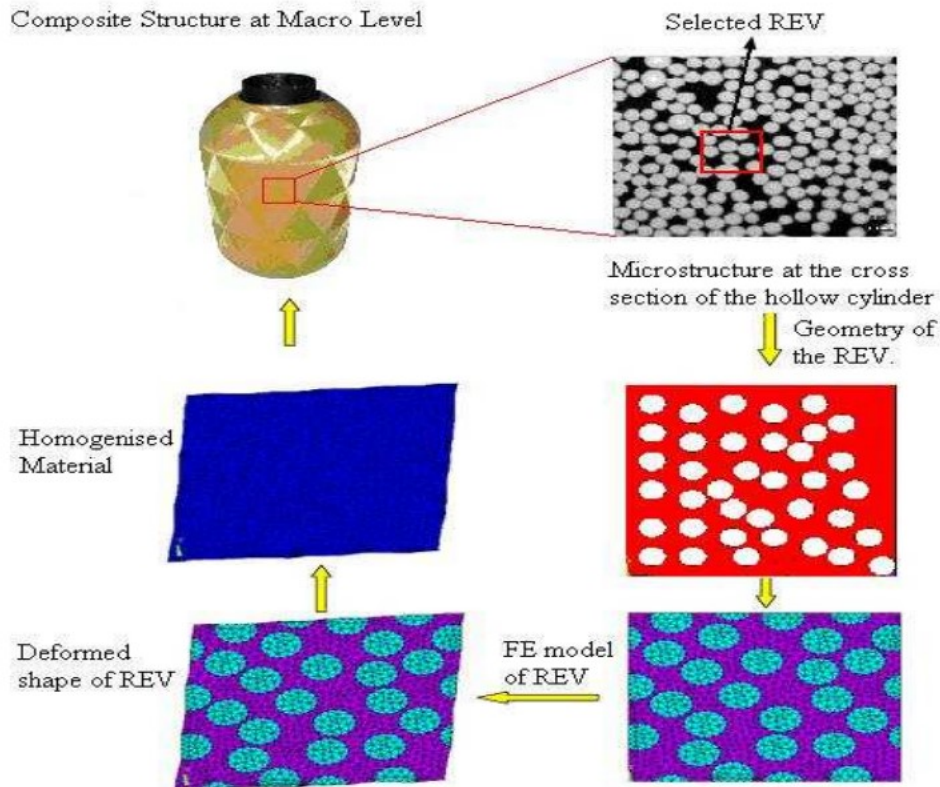
### 3.1. Metoda homogenizacije

Metoda homogenizacije primijenjena u ovom radu predstavlja metodu matematičkog osrednjavanja, kojoj je cilj opisati mehaničko ponašanje heterogenog materijala. Cilj računalne homogenizacije je odrediti konstitutivni model heterogenog materijala, čija se makroskopska ili stvarna svojstva, tj. definirana na razini inženjerskih primjena, mogu procijeniti pomoću računala. U tom okviru, računalna homogenizacija je metodologija koja određuje efektivna svojstva materijala na makroskopskoj razini.

Modeliranje i predviđanje elastično-plastičnog ponašanja materijala i mehanizam pojave lokalnih oštećenja u heterogenim materijalima općenito, a posebno u kompozitima vrlo je složen problem. Analitički i empirijski modeli pružaju donekle učinkovit način za predviđanje svojstva kompozita iz poznatih mehaničkih svojstava njegovih konstituenata, posebno za jednostavne konfiguracije faza. Čak i razvijeni analitički modeli homogenizacije kompozita ojačanih vlaknima, se često svode na tek konkretne slučajeve koji moraju zadovoljiti mnoge unaprijed određene uvjete [17].

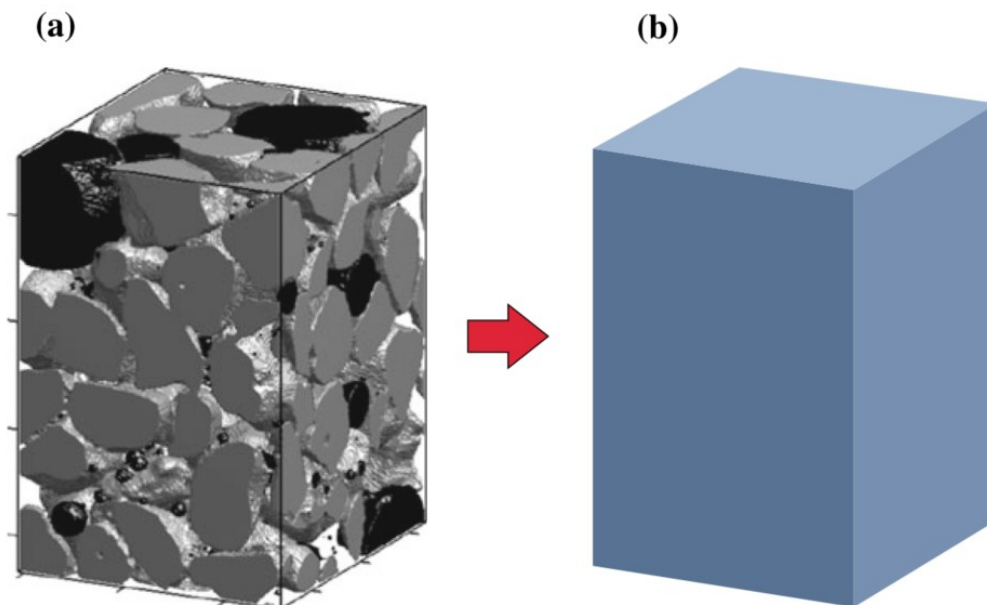
Homogenizacija je shema modeliranja temeljena na transformiranju heterogenog materijala u konstitutivno ekvivalentan homogeni materijala, pri čemu je ukupna energija pohranjena u oba sustava jednaka. Prednost ove metode je što ograničenja na određene materijalne modele i na male deformacije ne postoje jer nije potrebno raditi pretpostavke o konstitutivnim relacijama na makrorazini. Matematički model računalne homogenizacije temelji se na osrednjavanju tenzora makrodeformacije ili makrogradijenta deformiranja i virtualnog rada po volumenu reprezentativnog volumenskog elementa (RVE). Polje pomaka na mikrorazini sastoji se od dva dijela. Prvi je ovisan o makrodeformaciji, a drugi je neovisan o makrorazini i predstavlja mikrofluktacije, odnosno doprinos mikrorazine polju pomaka. Polje mikrofluktacije mora zadovoljiti dodatnu integralnu relaciju, čime se osigurava da mikrofluktacije nemaju utjecaj na makrovarijable, kako bi se zadovoljila jednakost volumenskog presjeka mikrodeformacije i makrodeformacije. Upravo jednakost volumenskog presjeka mikro i makro deformacije predstavlja osnovu za definiranje rubnih uvjeta koji se koriste na RVE-u, uz zadovoljavanje navedenog integralnog uvjeta mikrofluktacije. Krajnji rezultat provedene analize ovisit će upravo o primijenjenim rubnim uvjetima. Isto tako, vrlo je bitno istaknuti da je računalnom homogenizacijom moguće opisivati samo jednostavne slučajeve opterećenja, bez pojave velikih gradijenata.

Glavne prednosti su da, bilo putem eksperimentalnog snimanja ili iz idealizirane geometrije i informacija o ponašanju sastavnih dijelova, korisnik može procijeniti mehanička svojstva i modificirati numerički mikrostrukturni model kako bi ga optimizirao i naposljetku dobio što bolja mehanička svojstva. Druga prednost je što se izbjegava eksplicitno opisivanje svih heterogenosti u materijalu na strukturnoj razini, što jednostavno nije izvedivo s današnjim računalima. To može dovesti do drastične uštede vremena i troškova tijekom eksperimentalnog ispitivanja i proizvodnje [18].



Slika 12. Koraci numeričke homogenizacije materijala [17]

Slika 13. prikazuje princip homogenizacije, tj. a) prikazuje heterogeni materijal (npr. kompozit) gdje jasno vidimo dvije različite faze, dok b) prikazuje ekvivalentni homogenizirani model čija su svojstva jednaka svojstvima heterogenog materijala.



Slika 13. Princip homogenizacije [18]

Dok su analitički mikromehanički modeli uspješno pomogli predvidjeti svojstva heterogenih materijala za idealizirane mikrostrukture, računalne metode i računalni kapaciteti dopuštaju nam da se ide dalje od ograničavajućih pretpostavki i da se uzmu u obzir realne mikrostrukture, sa složenim pojavama kao što su elastoplastičnost, oštećenje, mikropukotine ili promjena faza [18].

Međutim, dok su metode prilično prisutne u istraživačkoj okolini, njihov prijenos u industriju nailazi na probleme. Jedan od razloga je to što još uvijek postoje poteškoće u pronalaženju rješenja kao što je predviđanje oštećenja, pojava mikropukotina, predviđanje zamora i uzimanje u obzir složenosti mikrostrukture sa svim njihovim nesavršenostima. Drugi čimbenik je da simulacije povezane sa složenim materijalnim mikrostrukturama još uvijek uključuju opsežne računalne resurse u smislu memorije i vremena, te se još ne mogu uključiti u brze razvojne procese.

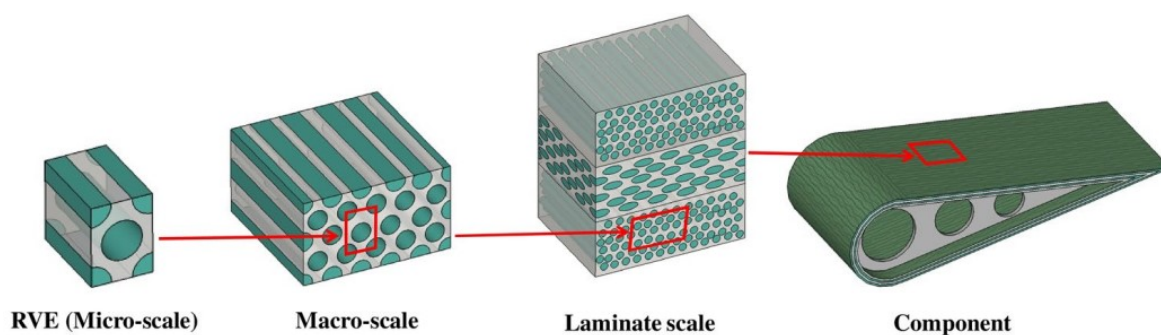
### **3.2. Reprezentativni volumenski element**

Kao što je spomenuto prije, pri analiziranju mikrostrukture materijala kako bi se odredila svojstva na makrorazini, često je potrebno pribjeći konceptima reprezentativnih volumenskih elemenata, na kojima se analize provode prije određivanja efektivnih svojstava materijala na makrorazini. Reprezentativni volumenski element (RVE) predstavlja najmanji volumen koji se može koristiti za opisivanje efektivnih svojstava kao što su mehanička, toplinska te elektromagnetska svojstva. RVE je minimalni volumen heterogenog materijala koji pruža sve geometrijske i metalografske informacije potrebne za dobivanje odgovarajućeg homogeniziranog ponašanja takvog materijala.

Prvi i najbitniji korak u analizi je odrediti minimalnu potrebnu veličinu RVE-a. Kod odabira veličine, treba uzeti u obzir uvjet da RVE mora biti statistički reprezentativan uzorak mikrostrukture, što je posebno prikladno za materijale koji imaju pravilniju mikrostrukturu. A s druge strane, RVE mora biti dovoljno velik kako bi obuhvatio sva potrebna makroskopska svojstva, a da pritom ne uvede neželjena svojstva. S obzirom na to da RVE predstavlja mikroskopski uzorak, njegove se dimenzije mjere u desecima mikrometara što se onda na makrorazini može smatrati matematički infinitezimalnim, pri čemu je cilj da mu veličina bude što je moguće manja kako bi vrijeme analize bilo što kraće.

Minimalna veličina RVE-a može varirati od materijala do materijala, od područja primjene, a ponekad i od jednog svojstva do drugog. Na primjer, nekim svojstvima, kao što je toplinski kapacitet ili modul elastičnosti u smjeru jednosmjernih kompozita ojačanih vlaknima dovoljan će biti praktički bilo koji volumenski udio RVE-a u ukupnom uzorku. Ostala svojstva, posebno ona koja se temelje na statističkoj homogenosti, kao što je modul elastičnosti poprečno na vlakna jednosmjernih kompozita ojačanih vlaknima, zahtijevaju veći volumenski udio ukupnog uzorka kako bi RVE bio reprezentativan.

Rodney Hill (1963.) je prvi predložio kriterij za odgovarajuću veličinu RVE-a. Odabrani volumenski element može se opteretiti na dva različita načina, ili preko jednolikih pomaka ili preko kontinuiranog opterećenja duž njegove granice. Ova dva načina dovesti će do različitih rezultata u smislu predviđenih svojstava. Kako se veličina volumena elementa povećava, razlika se smanjuje. Odabrani volumenski element će biti reprezentativan kada je razlika dovoljno mala. Postoje dvije različite mjere za odabir RVE-a. Prva je korištenje veličine za smanjivanje pogrešaka uvedenih netočnim rubnim uvjetima, dok apsolutne pogreške ostaju nepromijenjene, kao što je bio slučaju kod Hilla. Drugi slučaj je omogućiti dovoljno volumena za smještaj dijela volumena na koju utječu rubni uvjeti, dok se dalje u RVE-u izvan tog volumena apsolutne greške eliminiraju. Sve dok je dio volumena na koji ne utječu rubni uvjeti reprezentativan u svojim sastavnim volumenskim udjelima, bit će reprezentativan i u drugim fizičkim aspektima. Drugi pristup je očito povoljniji u svim pogledima [19].

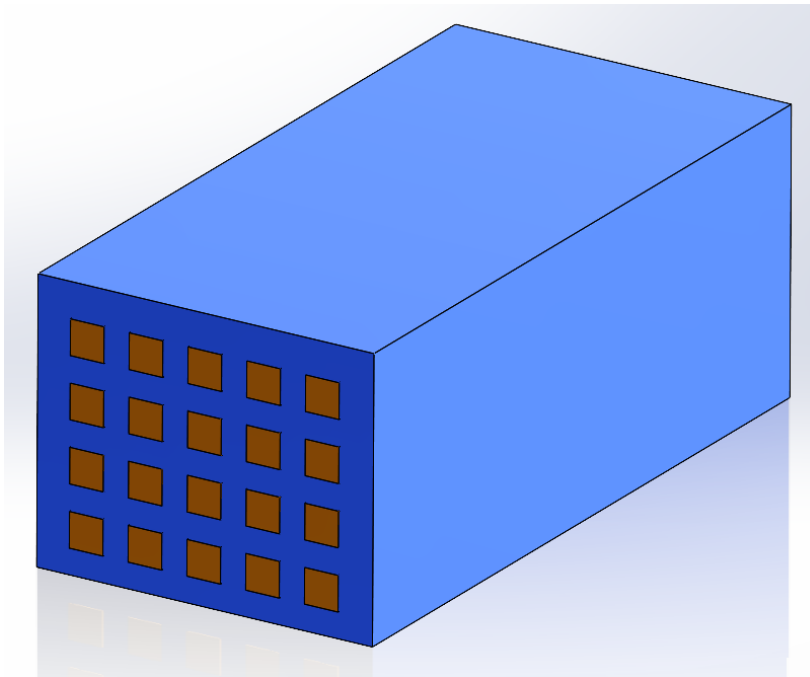


Slika 14. Odabir RVE-a [20]

## 4. NUMERIČKA ANALIZA

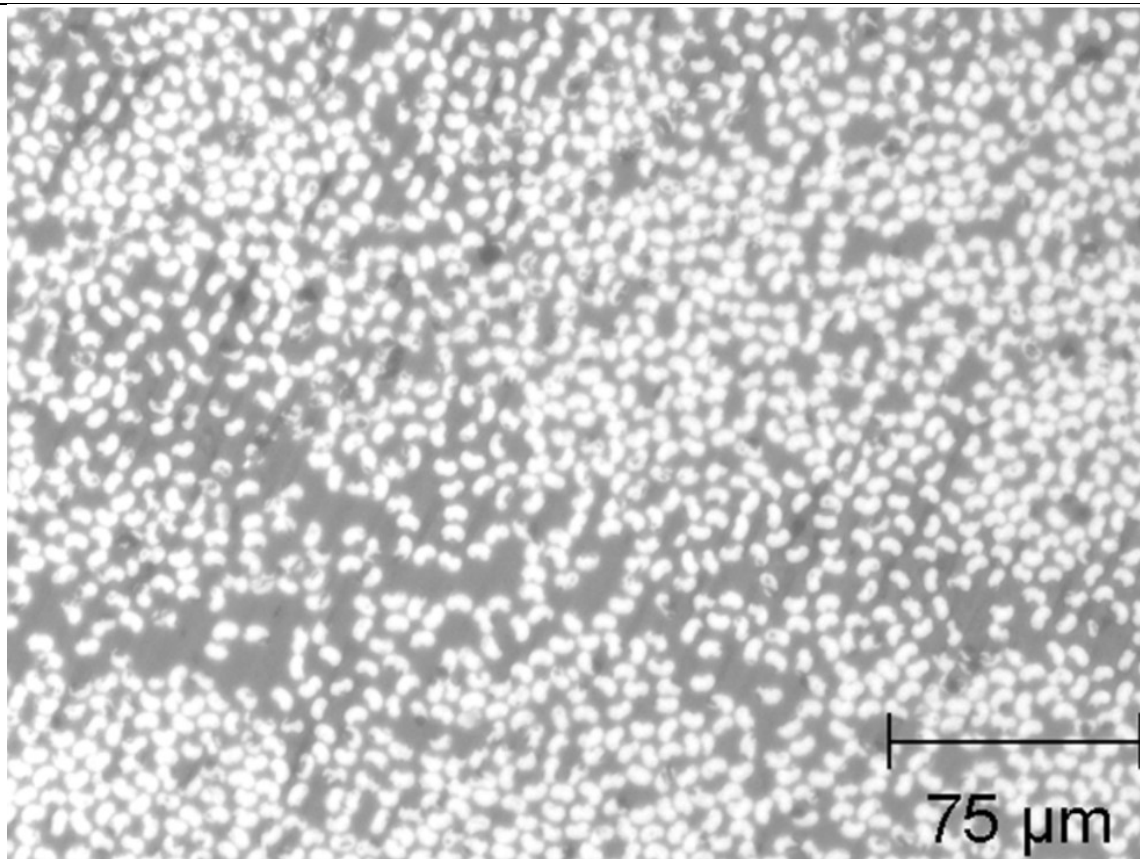
### 4.1. Mikrostruktura

Kao što je već više puta spomenuto, materijal koji će se promatrati je kompozit polimerne matrice, točnije epoksidne matrice ojačane ugljičnim vlaknima. S obzirom na to da će vlakna biti kontinuirano usmjerena u jednom smjeru, materijal će biti ortotropan, slika 15. Ortotropan materijal je onaj čija su mehanička i toplinska svojstva jedinstvena i neovisna u tri međusobno okomita smjera, tj. njegova su svojstva različita u svakom smjeru koordinatnog sustava. Primjeri ortotropnih materijala su drvo, mnogi kristali, valjani metali i sl.



Slika 15. Ortotropan materijal [21]

Na temelju mikroskopske analize uzorka materijala preuzete iz [22], dobivena je mikrostruktura prikazana na slici 16. kojom se bavi ovaj rad. U strukturi se jasno vidi razlika između matrice i ojačala. Epoksidna matrica je sive boje, dok su ojačala tj. ugljična vlakna bijele boje.



**Slika 16. Mikrostruktura materijala [22]**

Prvo je bilo potrebno odrediti prosječnu veličinu vlakana iz mikrostrukture kako bi model koji će se koristiti za numeričku analizu bio što je moguće vjerodostojniji. Za određivanje veličine vlakana korišten je program ImageJ u kojem je moguće zadavanjem skale od 75 mikrometara prikazane na slici 16. i korištenjem nekih od značajki programa točno odrediti površinu vlakana. Za poprečni presjek vlakana uzet je oblik elipse te je isto tako bilo potrebno odrediti odnos velike i male poluosi elipse. Iz uzroka je određena veličina trideset vlakana te je dobivena prosječna veličina poprečnog presjeka vlakna i isto tako prosječni omjer velike i male poluosi elipse. Dobivena prosječna površina poprečnog presjeka vlakna je  $31,488 \mu\text{m}^2$ , dok omjer velike i male poluosi iznosi 1,5931.

#### **4.2. Inicijalna analiza**

Prije određivanja RVE-a i određivanja mehaničkih svojstava materijala bilo je potrebno pokazati da su rezultati numeričke analize jednaki onima dobivenim analitičkim izrazima za ortotropan materijal. Za inicijalnu analizu odabrana su ugljična vlakna s obzirom na to da su ona ortotropna. Mehanička svojstva za vlakna dana su u tablici 1., a za matricu u tablici 2.

Tablica 1. Mehanička svojstva ugljičnih vlakana [22]

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
245	19,8	19,8	29,2	29,2	5,9	0,28	0,28	0,67

Tablica 2. Mehanička svojstva epoksidne matrice [22]

$E_m$ (GPa)	$\nu_m$
3,8	0,387

Za definiranje materijalnih svojstava u Abaqus-u, potrebno je odrediti matricu krutosti, tj. parametre ortotropnog materijala dane izrazom (4.1), prema [23].

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

pri čemu se veličine krutosti  $D_{ijkl}$  računaju pomoću sljedećih izraza:

$$D_{1111} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad (4.2)$$

$$D_{1122} = D_{2211} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad (4.3)$$

$$D_{1133} = D_{3311} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad (4.4)$$

$$D_{2222} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_3 E_1 \Delta}, \quad (4.5)$$

$$D_{2233} = D_{3322} = \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{E_3 E_1 \Delta}, \quad (4.6)$$

$$D_{3333} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad (4.7)$$

gdje je  $\nu_{ij}$  Poissonov koeficijent za različite materijalne osi,  $E_i$  modul elastičnosti,  $G_{ij}$  modul smičnosti, a  $\Delta$  je dan izrazom



$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1 E_2 E_3}. \quad (4.8)$$

Nadalje, za ortotropne materijale moraju vrijediti sljedeće jednakosti

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \quad (4.9)$$

Kako bi usporedili rezultate dobivene numeričkom analizom u Abaqus-u, potrebno je zadovoljiti sljedeću jednakost:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

pri čemu je

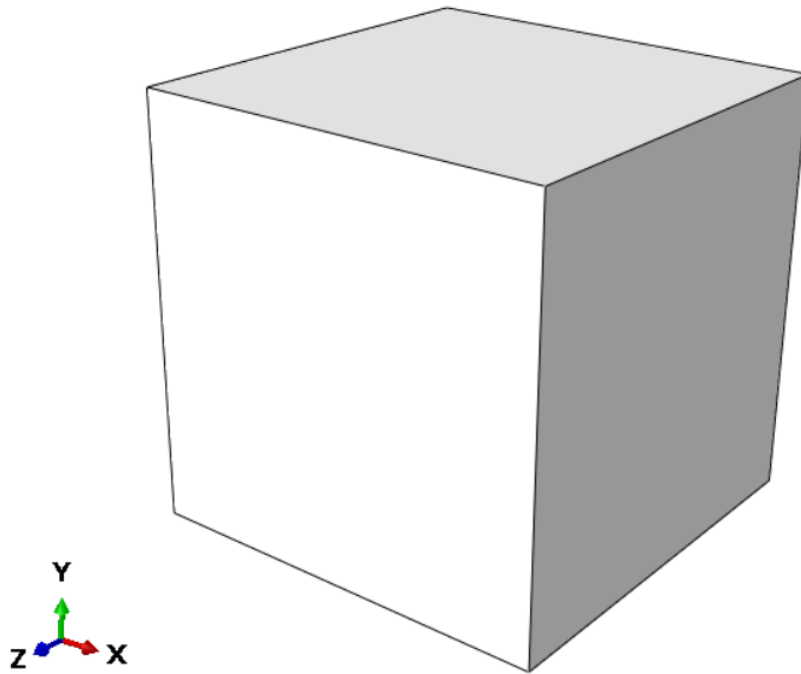
$$\sigma_{11} = \sigma_x, \quad \sigma_{22} = \sigma_y, \quad \sigma_{33} = \sigma_z, \quad (4.11)$$

te

$$\sigma_{12} = \tau_{xy}, \quad \sigma_{13} = \tau_{xz}, \quad \sigma_{23} = \tau_{yz}. \quad (4.12)$$

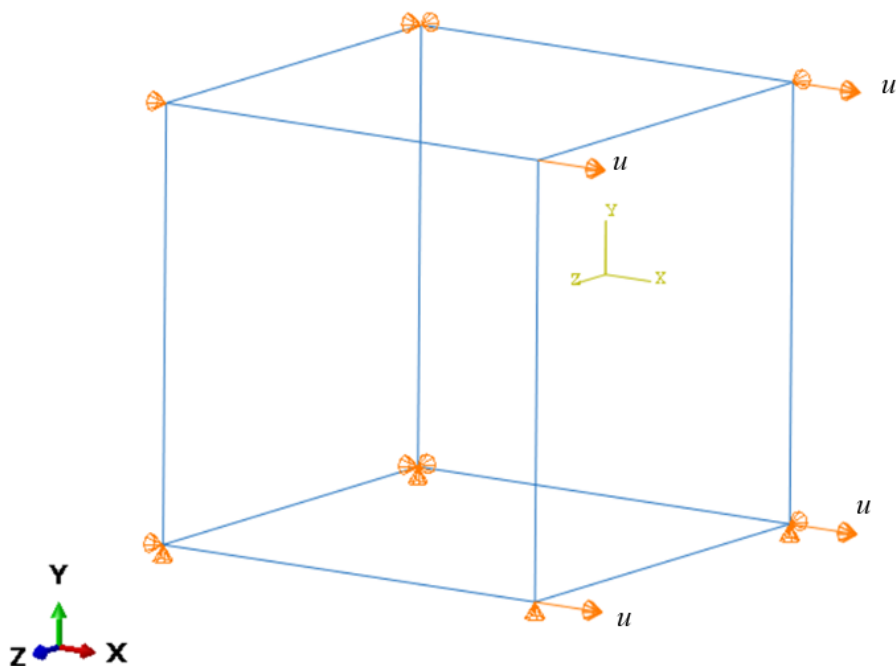
Izrazi (4.11) i (4.12) analogno vrijede i za deformacije.

Kao model napravljena je jedinična kocka te je model aproksimiran s jednim konačnim elementom, slika 17.



Slika 17. Model inicijalne analize

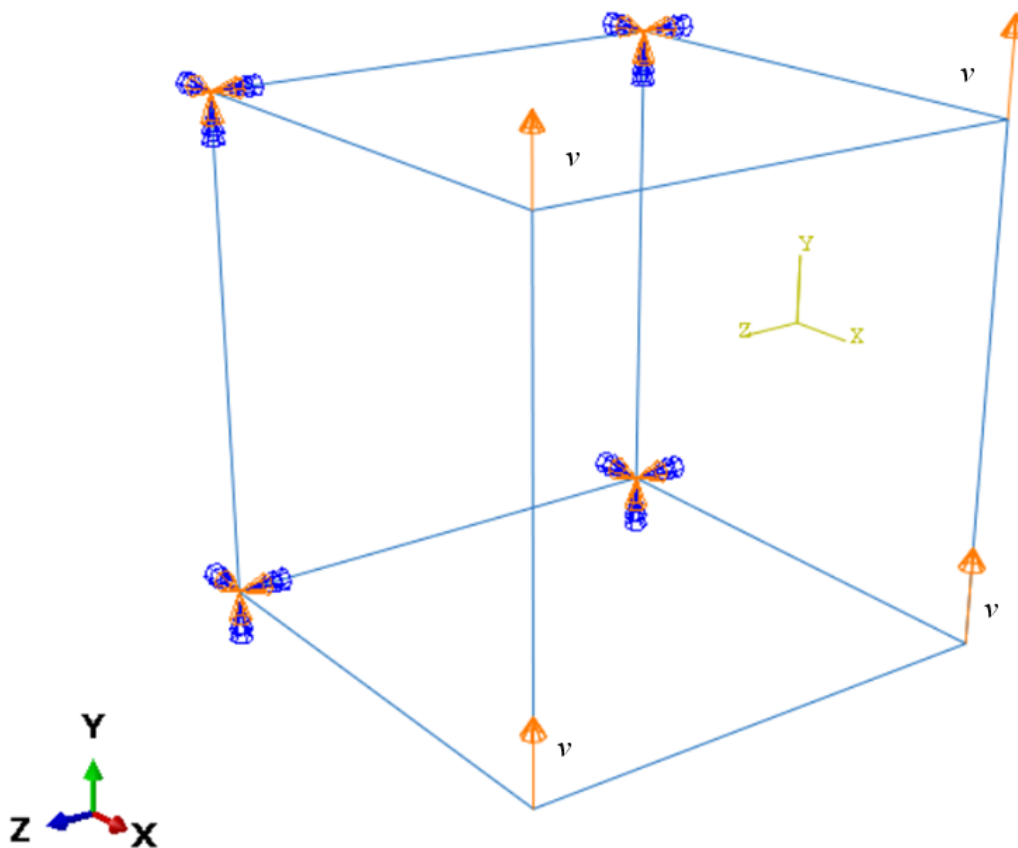
Rubni uvjeti za opterećenje u smjeru jedne od osi koordinatnog sustava sa zadanim pomacima prikazani su na slici 18.



Slika 18. Rubni uvjeti jednoosnog razvlačenja

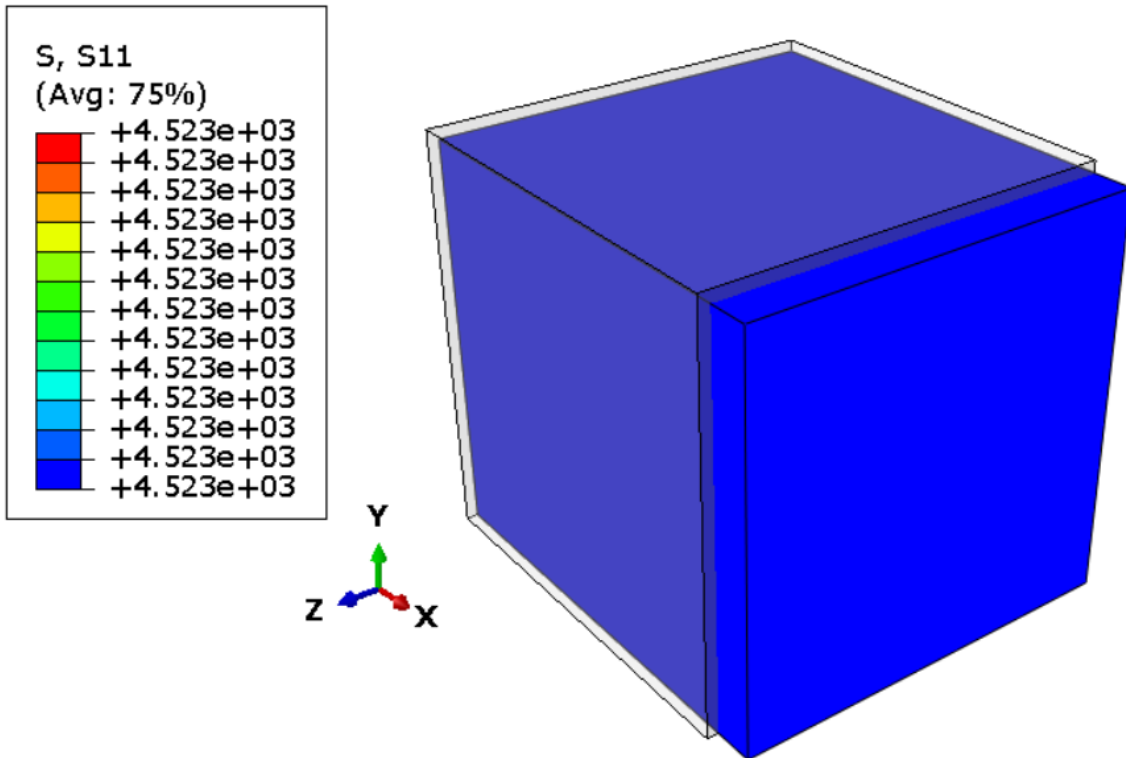
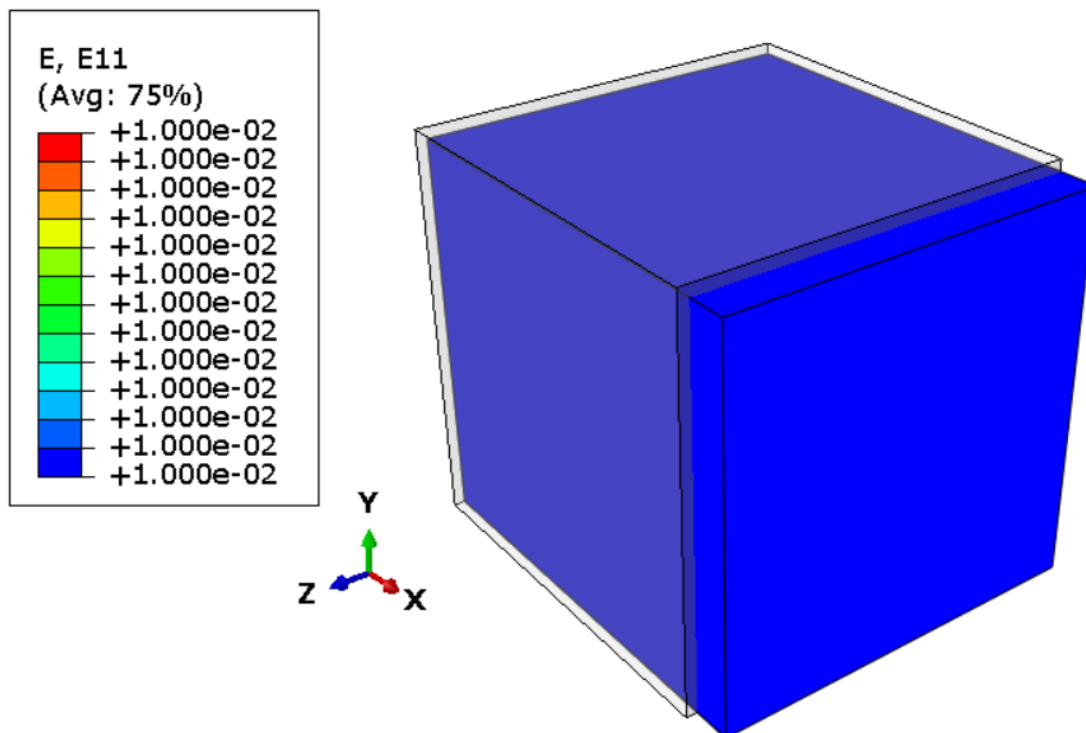
Kao što se može vidjeti sa slike 18., rubni uvjeti zadani su u čvorovima elementa, tj. u vrhove kocke. Pozitivnim plohama kocke omogućena je deformacija, dok je negativnim plohama

kočke onemogućena deformacija, tj. pomak. Ishodište koordinatnog sustava nalazi se u središtu kočke te se pozitivnim ploham smatraju one plohe koje se nalaze u pozitivnim smjerovima pojedinih koordinatnih osi Kartezijevog sustava, dok se negativnim ploham smatraju one koje se nalaze u negativnim smjerovima koordinatnih osi. Opterećenje nije zadano preko sile, već preko pomaka pozitivne plohe u smjeru osi  $x$ . Pomak je zadan kao 10 % duljine stranice kočke, što iznosi 0.01 mm.



Slika 19. Rubni uvjeti čistog smika

Kao što se može vidjeti sa slike 19. rubni uvjeti za slučaj smičnog opterećenja isto su zadani u čvorove elementa, tj. u vrhove kočke. Konkretno ovdje je slučaj o opterećenju koje uzrokuje kutnu deformaciju  $\gamma_{xy}$ . Čvorovima na negativnoj plohi kočke u smjeru  $x$  osi onemogućen je pomak u bilo kojem smjeru koordinatnog sustava, dok je pomak zadan u pozitivnom smjeru osi  $y$  čvorovima na pozitivnoj plohi kočke u smjeru  $x$  osi. Analogno vrijedi i za ostala smična opterećenja u ravninama  $xz$  te  $yz$ .

Slika 20. Naprezanje u smjeru osi  $x$  za slučaj jednoosnog istežanjaSlika 21. Deformacije u smjeru osi  $x$  za slučaj jednoosnog istežanja

Na slici 20. i 21. prikazani su deformirani i nedeformirani izgled modela. Kao što je vidljivo došlo je do produljenja kocke u smjeru osi  $x$ , dok su pomaci u smjeru  $y$  i  $z$  negativni, tj. u tim osima je došlo do skupljanja materijala. Isto tako, naprezanje u smjeru osi  $x$  je jedino različito od nule, što je upravo ono što se htjelo postići rubnim uvjetima kako bi bilo jednostavno iz izraza (4.10) izračunati deformaciju ili naprezanje te usporediti s rezultatom numeričke analize. S obzirom na to da je jedino  $\sigma_x \neq 0$ , a sva ostala naprezanja jednaki nuli, iz izraza (4.10) ostaje nam jednostavan izraz

$$\sigma_{11} = D_{1111}\varepsilon_{11} + D_{1122}\varepsilon_{22} + D_{1133}\varepsilon_{33} . \quad (4.13)$$

Kako su nam veličine  $D_{1111}$ ,  $D_{1122}$  te  $D_{1133}$  poznate, možemo vrlo lako izračunati naprezanje ili deformaciju ako znamo drugu veličinu.

Rezultati numeričke analize za opterećenje u smjeru osi  $x$  prikazani su u tablici 3.

**Tablica 3. Numerički rezultati u smjeru osi  $x$**

Abaqus			
$\sigma_x$ [MPa]	$\varepsilon_x$ [-]	$\varepsilon_x$ [-]	$\varepsilon_x$ [-]
4523	0,01	-0,0028	-0,0028

Ako uzmemo deformaciju dobivenu iz Abaqus-a i uz poznate veličine  $D_{1111} = 470379,106$  MPa,  $D_{1122} = 32254,567$  MPa i  $D_{1133} = 32254,567$  MPa možemo pomoću izraza (4.13) izračunati naprezanje:

$$\sigma_x = 470379,106 \cdot 0,01 - 2 \cdot 32254,567 \cdot 0,0028 = 4523,17 \text{ MPa}$$

Kao što vidimo rezultati se poklapaju što znači da je numerički model dobro postavljen.

Analogno je moguće napraviti i za preostala naprezanja, kako normalna tako i posmična naprezanja, pri čemu će kod posmičnog naprezanja izraz biti još jednostavniji

$$\sigma_{12} = G_{12}\varepsilon_{12} . \quad (4.14)$$

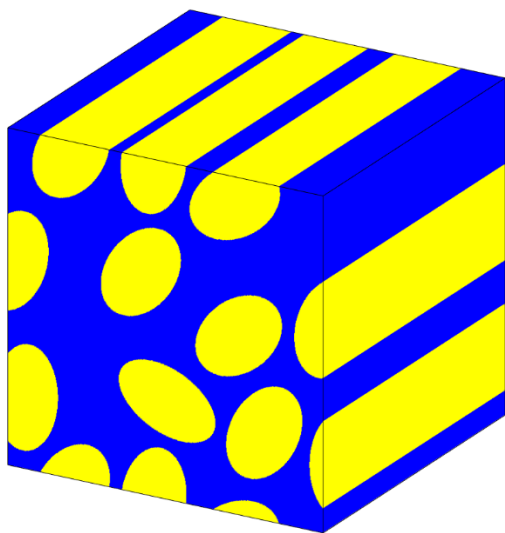
### 4.3. Odabir reprezentativnog volumenskog elementa

Kao što je već spomenuto prije, odabir optimalne veličine reprezentativnog volumenskog elementa vrlo je bitan. U ovom poglavlju napravljene su mikrostrukturne analize različitih veličina RVE-ova kako bi se odredila minimalna potrebna koja će vjerno prikazati stanje materijala na makrorazini.

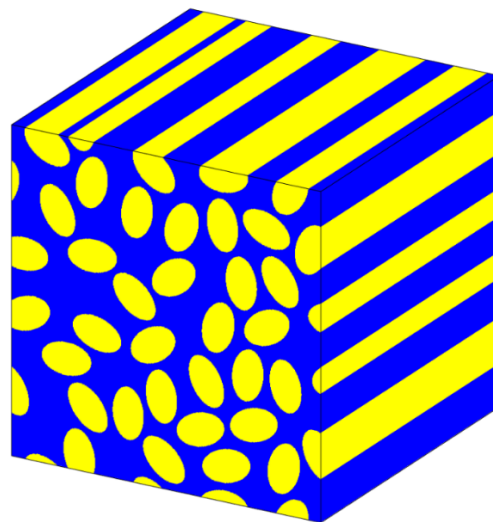
### 4.3.1. Mikrostruktura RVE-a

U programskom paketu MatLab je pomoću vrijednosti prosječne veličine vlakna i omjera velike i male poluosi elipse koje opisuju vlakno definirana mikrostruktura s 45% udjela vlakana. Kako je spomenuto prije, provjeravat će se mikrostrukture kompozita s 45, 40, 35 i 30 % udjela vlakana. Za početak su definirane strukture u obliku kocke stranica veličine 25  $\mu\text{m}$ , 50  $\mu\text{m}$ , 75  $\mu\text{m}$  te 100  $\mu\text{m}$ .

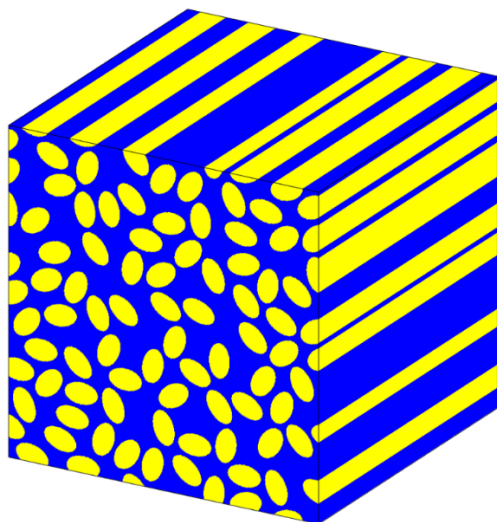
a)



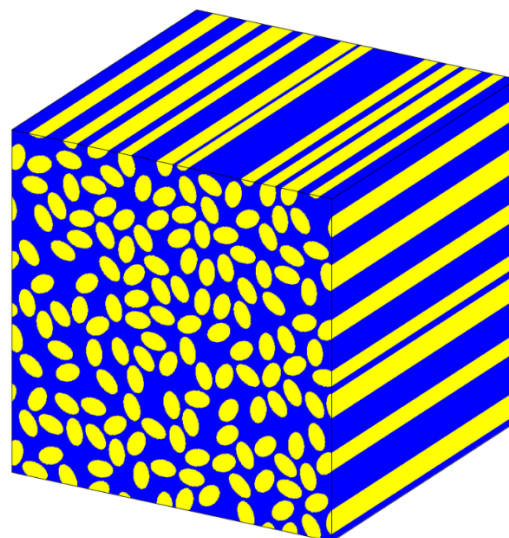
b)



c)



d)



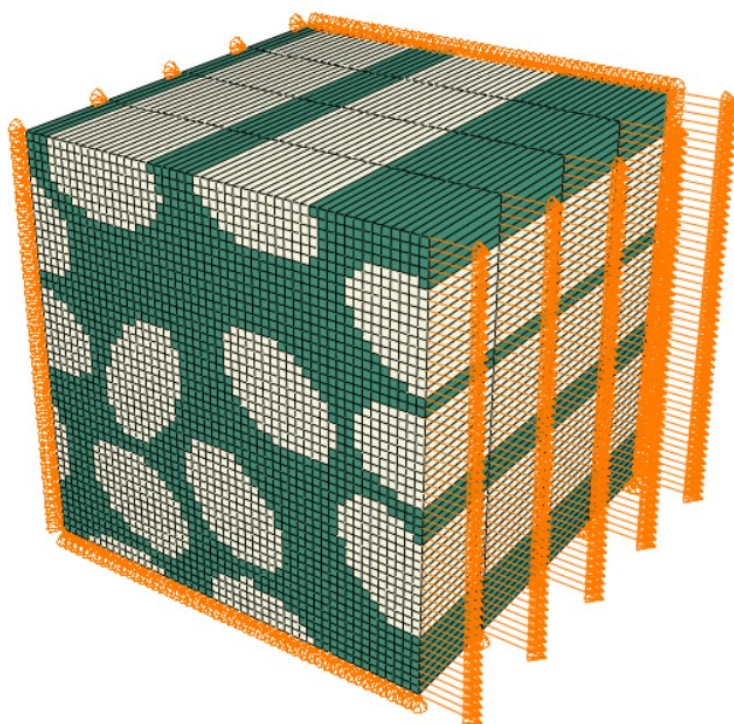
Slika 22. RVE veličine: a) 25  $\mu\text{m}$ , b) 50  $\mu\text{m}$ , c) 75  $\mu\text{m}$ , d) 100  $\mu\text{m}$

Nakon određivanja veličine RVE-a, dodatno je ispitano za koju duljinu vlakana nema utjecaja na homogenizirane rezultate. Na taj način moguće je dodatno smanjiti RVE i tako uštedjeti na

vremenu simuliranja. Tako je svaka veličina RVE-a dodatno smanjena u smjeru vlakana na polovicu i četvrtinu duljine. Pa su tako definirani RVE-ovi veličine  $25 \times 25 \times 12,5 \mu\text{m}$  za polovicu duljine i  $25 \times 25 \times 6,25 \mu\text{m}$  za četvrtinu duljine te analogno za sve ostale veličine RVE-ova.

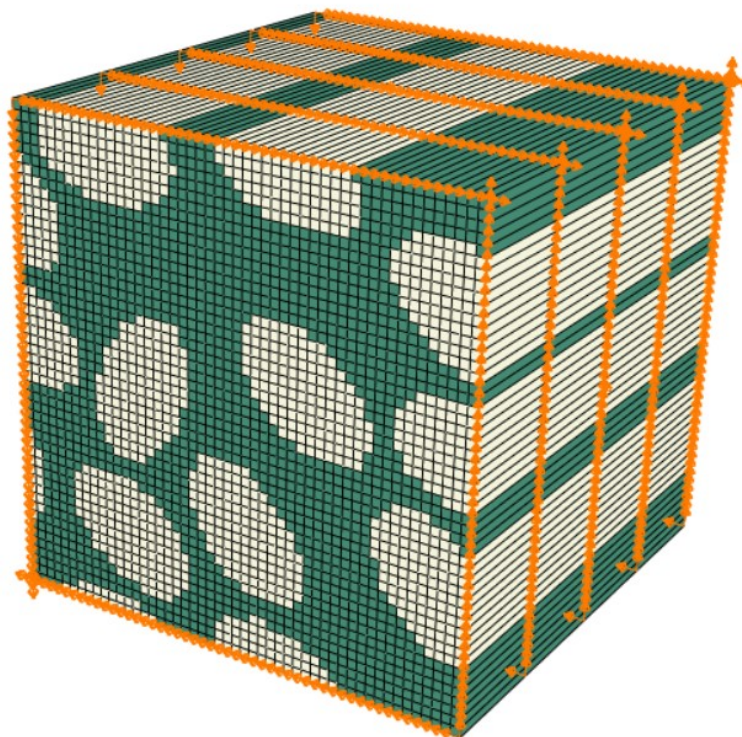
#### 4.3.2. Rubni uvjeti

Nakon što je definirana mikrostruktura te izabrane određene veličine RVE-a, potrebno je odrediti rubne uvjete. Isto kao i kod inicijalne analize i ovdje su rubni uvjeti zadani jednako. Rubni uvjeti su takvi da bi se izazvalo stanje čistog osnog naprezanja. Ako je ishodište koordinatnog sustava u sredini kocke, negativnim plohama RVE-a (onima koje se nalaze u negativnom smjeru osi koordinatnog sustava) onemogućeni su pomaci u smjeru osi, npr. negativnoj plohi  $y$  onemogućen je pomak u smjeru  $y$  osi. Pozitivnim plohama (onima u pozitivnom smjeru osi koordinatnog sustava) dozvoljen je pomak, kako bi se pri opterećenju model mogao skupljati u smjerovima u kojima nije opterećen. Pomak je isto kao i kod inicijalne analize zadan pozitivnoj plohi RVE-a u kojoj želimo izazvati opterećenje, tako je pozitivnoj  $x$  plohi zadan pomak od 10 % duljine brida kocke u pozitivnom smjeru osi  $x$  te analogno vrijedi za  $y$  i  $z$  osi koordinatnog sustava.



Slika 23. Rubni uvjeti jednoosnog razvlačenja RVE-a

Za slučaj čistog smičnog opterećenja rubni uvjeti malo su drugačiji nego u inicijalnoj analizi. Za slučaj npr. smičnog naprezanja u smjeru  $xy - \tau_{xy}$ , korištene su plohe modela samo u ta dva smjera tj. pozitivne i negativne  $x$  i  $y$  plohe. Pozitivnim plohama zadan je pomak u smjeru druge osi u iznosu od 10 % duljine brida. Tako je pozitivnoj  $x$  plohi zadan pozitivni pomak u  $y$  smjeru osi u iznosu od 10 % duljine brida, a pozitivnoj  $y$  plohi zadan je pozitivni pomak u  $x$  smjeru osi istog iznosa. Isto vrijedi i za negativne plohe, negativnoj  $x$  plohi zadan je negativni pomak u smjeru  $y$  osi, a negativnoj  $y$  plohi zadan je negativni pomak u smjeru  $x$  osi. Za dodatni rubni uvjet, koji je dodan zbog stabilnosti modela, upotrijebljen je čvor koji se nalazi na sredini pojedinih ploha kocke. Tako je pri smičnom naprezanju  $\tau_{xy}$  čvoru na pozitivnoj  $x$  plohi zadan pozitivni pomak u smjeru  $y$  osi iznosa 10 % duljine brida, a čvoru na pozitivnoj  $y$  plohi zadan pozitivni pomak u smjeru  $x$  osi istog iznosa. Za čvorove na negativnim plohama vrijedi isto samo što su pomaci u negativnim smjerovima osi. Još jedan dodatni rubni uvjet je što je svim središnjim čvorovima, kako na pozitivnim tako i na negativnim plohama, onemogućen vertikalni pomak tj. pomak u smjeru osi  $z$ . Svi rubni uvjeti analogno vrijede i za smična opterećenja u  $xz$  i  $yz$  ravnini.



Slika 24. Rubni uvjeti čistog smika RVE-a

Prema [24], rubni uvjeti periodičnih pomaka i antiperiodičnog površinskog opterećenja daju najveću točnost. Razlog tomu je previše kruto ponašanje RVE-a pri rubnim uvjetima linearnih



pomaka, dok je RVE previše podatljiv za rubne uvjete površinskog opterećenja. Pod periodičnost pomaka podrazumijeva se da su pomaci jednog brida analogni pomacima brida na suprotnoj strani RVE-a, gledano zrcaljeno.

Iako je struktura periodična, u ovom radu nisu korišteni rubni uvjeti periodičnosti iz dva razloga. Prvi razlog je što bi računanje mehaničkih svojstava bilo kompliciranije nego što je trenutno, jer bi množenjem matrica dobili tri jednadžbe sa 6 nepoznanica te bi trebali dodatne jednadžbe za rješavanje tog sustava. Drugi razlog su računalni resursi, jer bi primjena rubnih uvjeta periodičnosti zahtijevala puno više radne memorije računala te bi numerička analiza trajala puno duže. Primjenom rubnih uvjeta pomaka pomoću sljedećeg izraza određeni su moduli elastičnosti i smičnosti

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

#### 4.3.3. Numeričke analize RVE-ova

Nakon postavljanja modela i određenih rubnih uvjeta napravljene su numeričke analize RVE-ova iz poglavlja 4.3.2. za svaki slučaj opterećenja posebno. Kao što je spomenuto u poglavlju 2.4. za diskretizaciju korišteni su prizmatični konačni elementi. RVE struktura veličine 25  $\mu\text{m}$  diskretizirana je s 10000 konačnih elemenata, 50  $\mu\text{m}$  s 40000, 75  $\mu\text{m}$  s 90000, te 100  $\mu\text{m}$  sa 160000 konačnih elemenata. Na slici 25. prikazani su slučajevi aksijalnog opterećenja, a na slici 26. slučajevi smičnog opterećenja. Na slikama 25. i 26. je prikazan deformirani i nedeformirani model veličine 25  $\mu\text{m}$ .

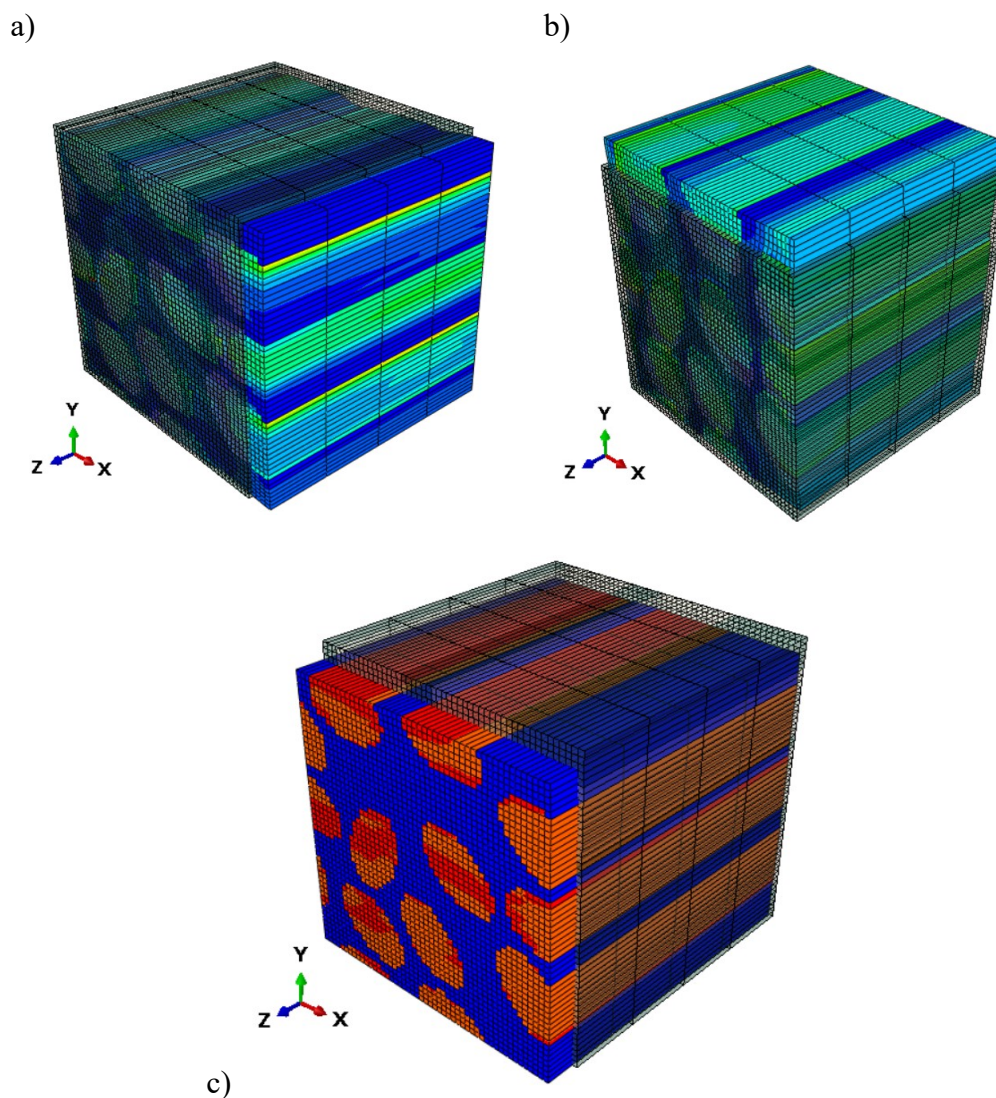
Homogenizirani rezultati su dobiveni korištenjem sljedećeg izraza za matematičko osrednjavanje:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{el}} \sigma_{ij}^{(i)} \cdot V^{(i)}}{V}, \quad (4.16)$$

odnosno u konkretnom slučaju će se računati kao:

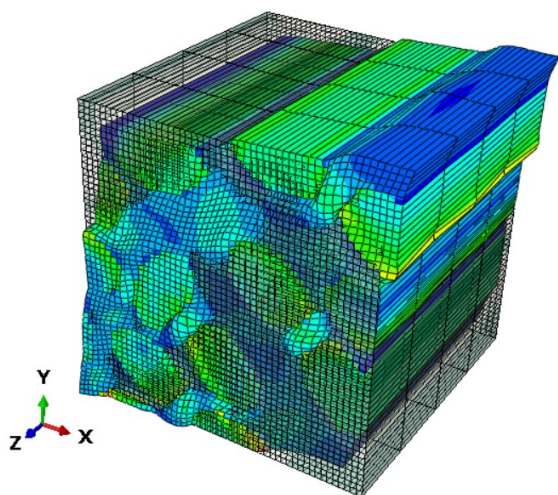
$$\overline{\sigma_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{el}} \sigma_{ij}^{(i)}}{n_{el}} \sigma_{ij}, \quad (4.17)$$

gdje  $\sigma_{ij}^{(i)}$  predstavlja naprezanje pojedinog konačnog elementa, a  $n_{el}$  broj konačnih elemenata strukture. Analogno se, uz korištenje tenzora deformacije  $\epsilon$ , može istim izrazom izračunati srednja deformacija strukture.

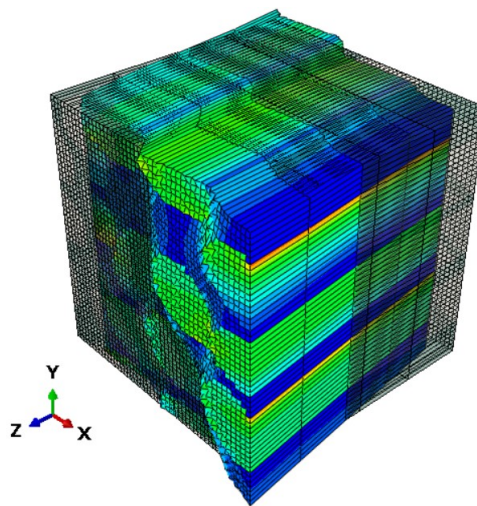


Slika 25. Raspodjela normalnih naprezanja RVE-a veličine 25  $\mu\text{m}$  za jednoosno istezanje:  
a)  $\sigma_x$ , b)  $\sigma_y$ , c)  $\sigma_z$

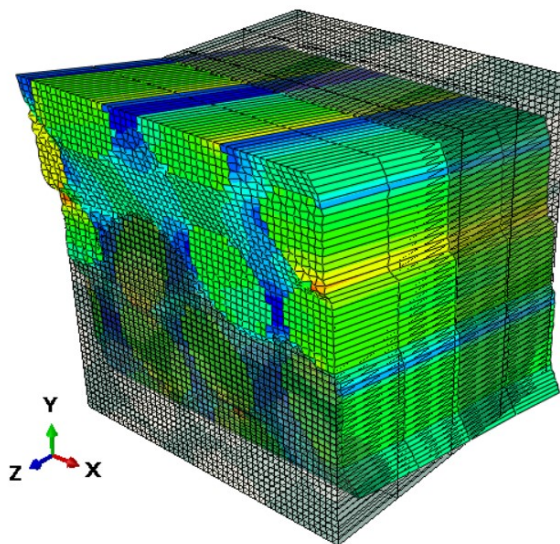
a)



b)



c)

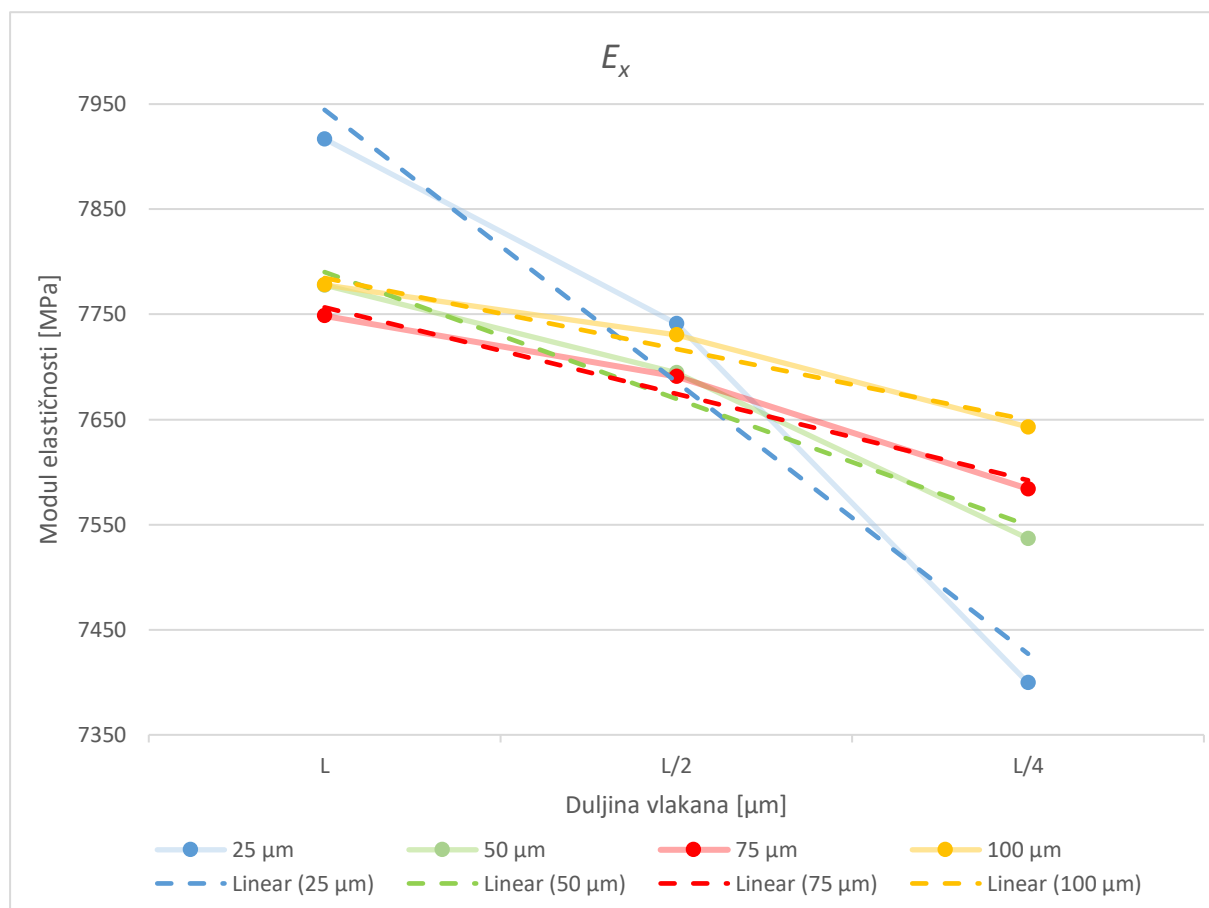


**Slika 26. Raspodjela posmičnih napreznja RVE-a veličine 25  $\mu\text{m}$  za slučaj čistog smika:  
a)  $\tau_{xy}$ , b)  $\tau_{xz}$ , c)  $\tau_{yz}$**

Nakon provedenih analiza za sve veličine RVE-a kako numeričkih modela osnovnih dimenzija, tako i modela manjih dimenzija u smjeru vlakana te analizom dobivenih rezultata utvrđeno je kako je RVE veličine 100  $\mu\text{m}$  optimalna veličina. Naime, rezultati RVE-ova dimenzija 25, 50 te 75  $\mu\text{m}$  pokazala su prevelika odstupanja rezultata prilikom smanjenja duljine vlakana sa pune duljine na četvrtinu duljine. Prihvaćeno je odstupanje do maksimalno 2 %. Najveća promjena prisutna je prilikom određivanja modula elastičnosti u smjer  $x$  osi što je i prikazano na slici 27., gdje su osim svojstava vidljive i linearnom funkcijom aproksimirane vrijednosti modula elastičnosti  $E_x$  (crtkana linija). Svi RVE-ovi su smanjivanjem duljine vlakana pokazali odstupanja rezultata analize veća od 2 %, osim modela veličine 100  $\mu\text{m}$  koji prilikom smanjenja

duljine vlakana ima odstupanja rezultata manja od 2 %, stoga je odabran kao reprezentativan.

S obzirom na to, za daljnje analize različitih udjela vlakana u strukturi koristit će se RVE veličine 100x100x25 μm.



Slika 27. Dijagram promjene modula elastičnosti u smjeru  $x$  osi pri promjeni duljine vlakana

#### 4.4. Analitičke metode

##### 4.4.1. Modul elastičnosti u smjeru vlakana

Prije nego što se provedu analize različitih udjela vlakana u strukturi, predviđena mehanička svojstva kompozita izračunat će se analitičkim izrazima prema [25]. Ako su oba materijala elastična, što je ovdje slučaj, naprezanja u smjeru vlakana jednaka su:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1, \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_1, \quad (4.18)$$

pri čemu je:

- $\sigma_f$  – naprezanje u vlaknima,
- $\sigma_m$  – naprezanje u matrici,
- $E_f$  – modul elastičnosti vlakana u smjeru pružanja,

- $E_m$  – modul elastičnosti matrice,
- $\varepsilon_1$  – deformacija kompozita u smjeru vlakana.

Prosječno naprezanje  $\sigma_1$  djeluje na površinu presjeka  $A$  RVE-a,  $\sigma_f$  djeluje na površinu presjeka vlakana  $A_f$ , a  $\sigma_m$  djeluje na površinu presjeka matrice  $A_m$ . Dakle, rezultatna sila na RVE kompozitnog materijala je

$$P = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m . \quad (4.18)$$

Supstitucijom jednadžbe (4.17) u jednadžbu (4.18) dobit ćemo izraz koji se koristi na makro razini:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 . \quad (4.19)$$

Očito je da je

$$E_1 = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A} . \quad (4.20)$$

Volumenski udjeli vlakana i matrice mogu se pisati kao

$$V_f = \frac{A_f}{A}, \quad V_m = \frac{A_m}{A}, \quad (4.21)$$

pa je stoga

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m , \quad (4.22)$$

što je poznato kao pravilo mješavina za modul elastičnosti kompozitnog materijala. Pravilo mješavina predstavlja jednostavnu linearnu varijaciju prividnog modula elastičnosti. Modul elastičnosti vlakana obično je mnogo veći od modula elastičnosti matrice. Stoga, pri uobičajenim praktičnim udjelima volumena vlakana, modul elastičnosti vlakana dominira modulom kompozita. Čak i velike promjene modula elastičnosti matrica imaju vrlo mali učinak na modul elastičnosti kompozita sve dok dio volumena vlakana nije blizu nule. Prema tome, modul elastičnosti smatramo svojstvom kojim dominiraju vlakna.

#### 4.4.1.1. Izračun modul elastičnosti kompozita u smjeru vlakana

Svi moduli elastičnosti u smjeru vlakana računati će se prema izrazu (4.22) te uz mehanička svojstva komponenti iz tablice 1. i tablice 2. Za 45 % udjela vlakana modul elastičnosti iznosi

$$E_1 = 245000 \cdot 0,45 + 3800 \cdot 0,45 = 112340 \text{ MPa} . \quad (4.23)$$

Za 40 % udjela vlakana modul elastičnosti iznosi

$$E_1 = 245000 \cdot 0,4 + 3800 \cdot 0,4 = 100280 \text{ MPa} . \quad (4.24)$$

Za 35 % udjela vlakana modul elastičnosti iznosi

$$E_1 = 245000 \cdot 0,35 + 3800 \cdot 0,35 = 88220 \text{ MPa} . \quad (4.25)$$

Za 30 % udjela vlakana modul elastičnosti iznosi

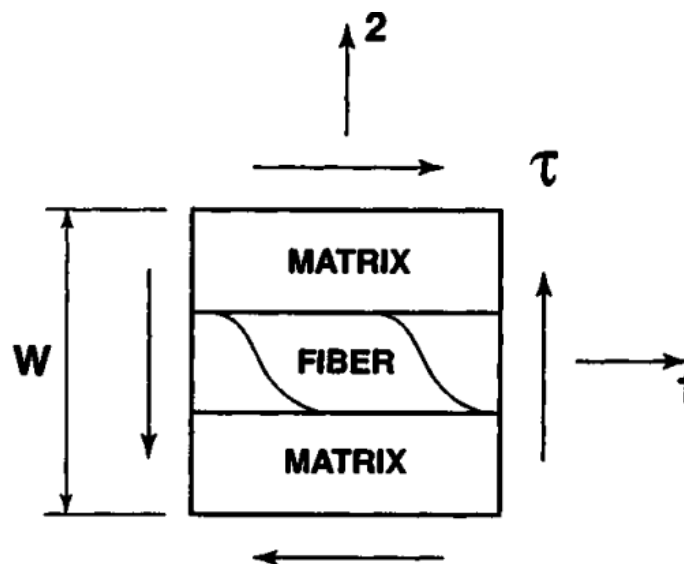
$$E_1 = 245000 \cdot 0,3 + 3800 \cdot 0,3 = 76160 \text{ MPa} . \quad (4.26)$$

#### 4.4.2. Modul elastičnosti u smjeru okomitom na vlakna

Pretpostavlja se da će prilikom opterećenja kompozita u smjeru okomitom na vlakna naprezanja u vlaknima i matrici biti jednako i iznositi  $\sigma_2$ . Deformacije u vlaknima i matrici će stoga biti:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} . \quad (4.27)$$

Poprečna dimenzija na kojoj, u prosjeku,  $\varepsilon_f$  djeluje je približno  $V_f W$ , dok  $\varepsilon_m$  djeluje na  $V_m W$ , pri čemu je  $W$  debljina strukture u smjeru okomitom na vlakna, kako je prikazano na slici 28.



Slika 28. Analitički model izračuna smičnog naprezanja

Stoga je ukupna poprečna deformacija jednaka

$$\Delta W = \varepsilon_2 W = V_f W \varepsilon_f + V_m W \varepsilon_m , \quad (4.28)$$

ili

$$\varepsilon_2 = V_f \varepsilon_f + V_m \varepsilon_m . \quad (4.29)$$

Supstitucijom jednadžbe (4.27) u gornju jednadžbu dobivamo

$$\varepsilon_2 = V_f \frac{\sigma_2}{E_f} + V_m \frac{\sigma_2}{E_m} . \quad (4.30)$$

Na makrorazini veza između naprezanja i deformacije je

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = E_2 \left( \frac{V_f \sigma_2}{E_f} + \frac{V_m \sigma_2}{E_m} \right) , \quad (4.31)$$

odnosno modul elastičnosti kompozita u smjeru okomitom na vlakna računa se kao

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m} . \quad (4.32)$$

#### 4.4.2.1. Izračun modula elastičnosti kompozita u smjeru okomitom na vlakna

Svi moduli elastičnosti u smjeru okomitom na vlakna računaju se prema izrazu (4.32) te uz mehanička svojstva komponenti iz tablice 1. i tablice 2. Za 45 % udjela vlakana modul elastičnosti iznosi

$$E_2 = \frac{19800 \cdot 3800}{0,55 \cdot 19800 + 0,45 \cdot 3800} = 5971,4 \text{ MPa} . \quad (4.33)$$

Za 40 % udjela vlakana modul elastičnosti iznosi

$$E_2 = \frac{19800 \cdot 3800}{0,6 \cdot 19800 + 0,4 \cdot 3800} = 5614,9 \text{ MPa} . \quad (4.34)$$

Za 35 % udjela vlakana modul elastičnosti iznosi

$$E_2 = \frac{19800 \cdot 3800}{0,65 \cdot 19800 + 0,35 \cdot 3800} = 5298,6 \text{ MPa} . \quad (4.35)$$

Za 30 % udjela vlakana modul elastičnosti iznosi

$$E_2 = \frac{19800 \cdot 3800}{0,7 \cdot 19800 + 0,3 \cdot 3800} = 5016 \text{ MPa} . \quad (4.36)$$

#### 4.4.3. Modul smičnosti

Modul smičnosti u ravnini npr.  $xy$ , određuje se u pristupu mehanike materijala uz pretpostavku da su smična naprezanja vlakna i matrice ista, dok posmične deformacije ne mogu biti iste. Stoga su posmične deformacije jednake

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f}, \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} . \quad (4.37)$$

Nelinearno ponašanje smičnih naprezanja i deformacija tipično za kompozitne materijale ojačane vlaknima se zanemaruje, tj. ponašanje se smatra linearnim.

Ukupna posmična deformacija kompozita može se računati kao

$$\gamma = V_m \gamma_m + V_f \gamma_f, \quad (4.38)$$

ili na makro razini poznatim izrazom

$$\gamma = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \quad (4.39)$$

pa se nakon uvrštavanja gornje jednadžbe i jednadžbe (4.37) u (4.38) te sređivanja dobiva se izraz za računanje smičnog modula (u ovom slučaju u  $xy$  ravnini):

$$G_{xy} = \frac{G_m G_f}{V_m G_f + V_f G_m}. \quad (4.40)$$

#### 4.4.3.1. Izračun modula smičnosti kompozita

Svi moduli smičnosti računaju se prema izrazu (4.40) te uz mehanička svojstva komponenti iz tablice 1. i tablice 2. Za 45 % udjela vlakana modul smičnosti iznosi

$$G_{xy} = G_{xz} = \frac{29200 \cdot 1369,9}{0,55 \cdot 29200 + 0,45 \cdot 1369,9} = 2398,6 \text{ MPa}. \quad (4.41)$$

$$G_{yz} = \frac{5900 \cdot 1369,9}{0,55 \cdot 5900 + 0,45 \cdot 1369,9} = 2093,1 \text{ MPa}. \quad (4.42)$$

Za 40 % udjela vlakana modul smičnosti iznosi

$$G_{xy} = G_{xz} = \frac{29200 \cdot 1369,9}{0,6 \cdot 29200 + 0,4 \cdot 1369,9} = 2213,9 \text{ MPa}. \quad (4.43)$$

$$G_{yz} = \frac{5900 \cdot 1369,9}{0,6 \cdot 5900 + 0,4 \cdot 1369,9} = 1977,1 \text{ MPa}. \quad (4.44)$$

Za 35 % udjela vlakana modul smičnosti iznosi

$$G_{xy} = G_{xz} = \frac{29200 \cdot 1369,9}{0,65 \cdot 29200 + 0,35 \cdot 1369,9} = 2055,6 \text{ MPa}. \quad (4.45)$$

$$G_{yz} = \frac{5900 \cdot 1369,9}{0,65 \cdot 5900 + 0,35 \cdot 1369,9} = 1873,3 \text{ MPa}. \quad (4.46)$$

Za 30 % udjela vlakana modul smičnosti iznosi

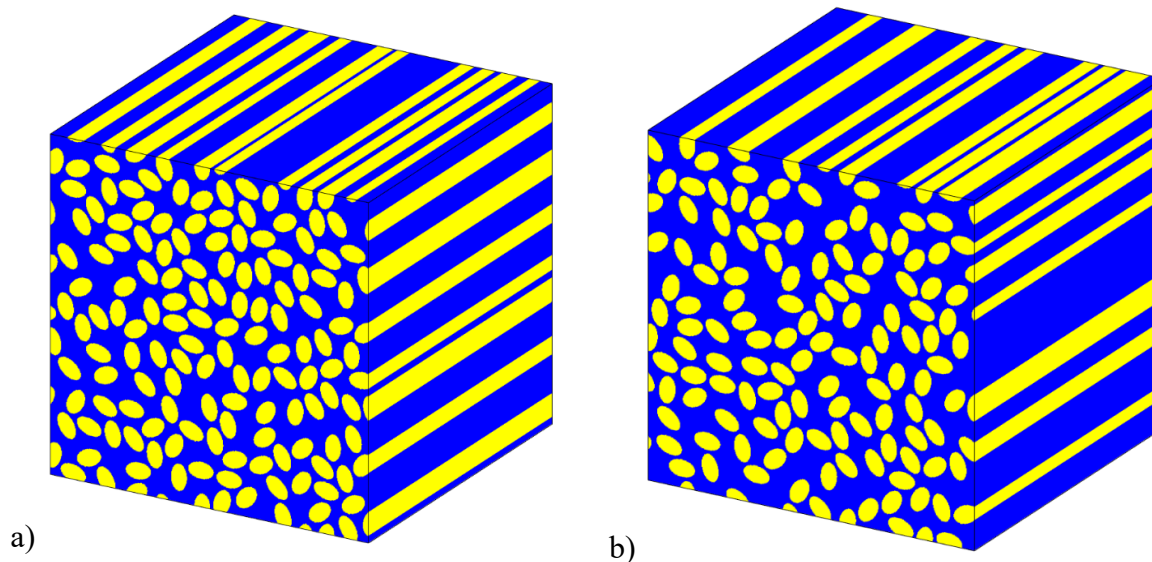


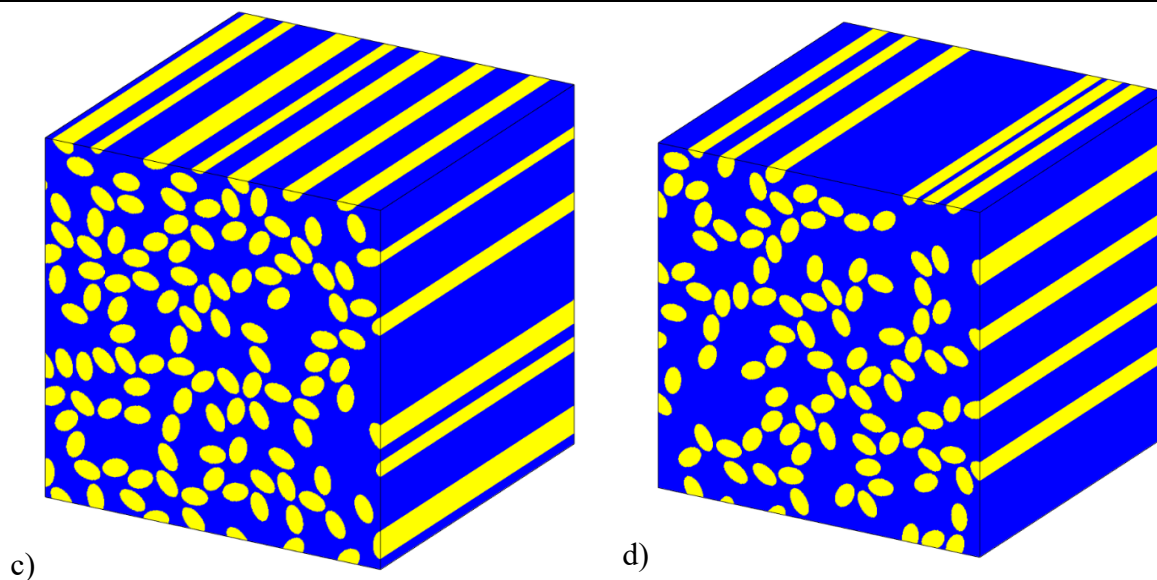
$$G_{xy} = G_{xz} = \frac{29200 \cdot 1369,9}{0,7 \cdot 29200 + 0,3 \cdot 1369,9} = 1918,4 \text{ MPa} . \quad (4.47)$$

$$G_{yz} = \frac{5900 \cdot 1369,9}{0,7 \cdot 5900 + 0,3 \cdot 1369,9} = 1779,8 \text{ MPa} . \quad (4.48)$$

#### 4.5. Numeričke analize različitih udjela vlakana

Ovo poglavlje bavi se numeričkim simulacijama RVE-a veličine 100x100x25  $\mu\text{m}$  s različitim udjelima vlakana od 45, 40, 35 i 30 %. Dobiveni rezultati su aproksimirani pomoću funkcija, pomoću kojih su određena mehanička svojstva materijala s udjelom vlakana 50 %. Ista materijalna svojstva su također određena i numeričkom analizom. Prilikom simulacija korišteni su isti rubni uvjeti opisani u poglavlju 4.3.2. te je RVE i dalje diskretiziran pomoću 160000 konačnih elemenata. Na slici 29. prikazane su RVE-ovi s različitim udjelom vlakana dobivene pomoću programskog paketa MatLab.

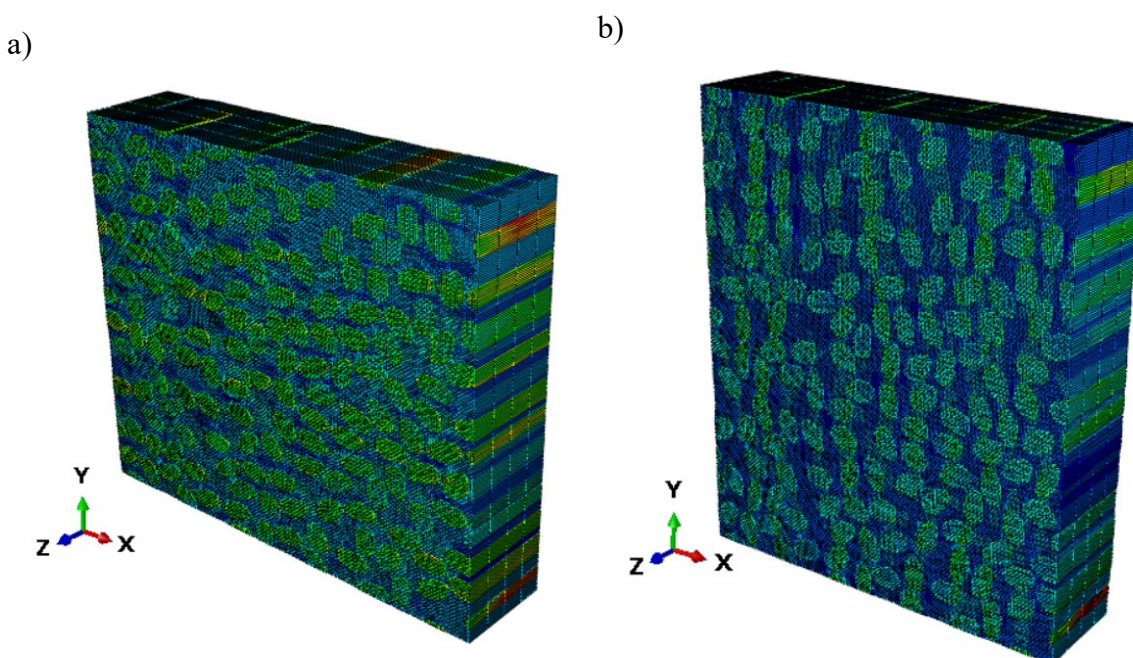


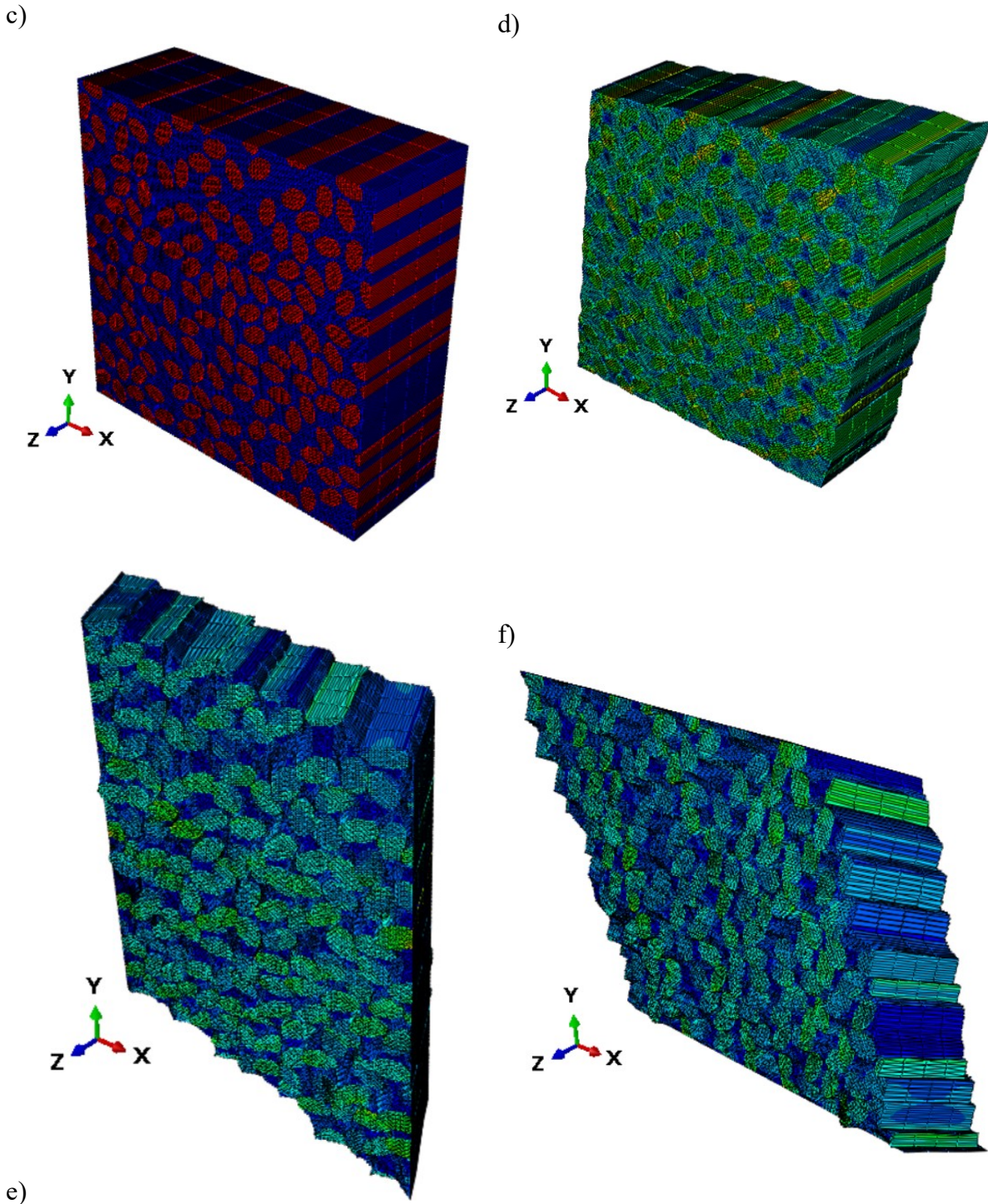


Slika 29. RVE kompozita s udjelom vlakana:  
a) 45 %, b) 40 %, c) 35 %, d) 30 %

#### 4.5.1. 45 % udjela vlakana

Na sljedećoj slici prikazani su deformirani numerički modeli nakon provedene analize u Abaqus-u.





Slika 30. Naprezanja strukture 45 % udjela vlakana:  
 a)  $\sigma_x$ , b)  $\sigma_y$ , c)  $\sigma_z$ , d)  $\tau_{xy}$ , e)  $\tau_{xz}$ , f)  $\tau_{yz}$

U tablici 4. prikazani su rezultati tj. moduli elastičnosti i smičnosti kompozita s 45 % udjela vlakana dobiveni numeričkom analizom RVE-a u Abaqus-u. U tablici 5. prikazani su moduli elastičnosti i smičnosti dobiveni analitičkom metodom.

**Tablica 4. Mehanička svojstva kompozita s 45 % udjela vlakana – numerička metoda**

45 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	7748,6	$G_{xy}$	2398,9
$E_y$	7693,7	$G_{xz}$	3714,6
$E_z$	112308,5	$G_{yz}$	3605,32

**Tablica 5. Mehanička svojstva kompozita s 45 % udjela vlakana – analitička metoda**

45 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	5971,4	$G_{xy}$	2398,6
$E_y$	5971,4	$G_{xz}$	2398,6
$E_z$	112340	$G_{yz}$	2093,1

#### 4.5.2. 40 % udjela vlakana

Deformirani modeli praktički su kao kod 45 % udjela vlakana, osim što je sada materijal više deformiran što će biti vidljivo i po manji modulima elastičnosti i smičnosti tj. mehanička svojstva kompozita će biti lošija.

U tablici 6. prikazani su rezultati tj. moduli elastičnosti i smičnosti kompozita s 40 % udjela vlakana dobiveni numeričkom analizom RVE-a u Abaqus-u. U tablici 7. prikazani su moduli elastičnosti i smičnosti dobiveni analitičkom metodom.

**Tablica 6. Mehanička svojstva kompozita s 40 % udjela vlakana – numerička metoda**

40 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	7208,6	$G_{xy}$	2398,9
$E_y$	7184,3	$G_{xz}$	3714,6
$E_z$	100103,5	$G_{yz}$	3605,32

**Tablica 7. Mehanička svojstva kompozita s 40 % udjela vlakana – analitička metoda**

40 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	5614,9	$G_{xy}$	2213,9
$E_y$	5614,9	$G_{xz}$	2213,9
$E_z$	100280	$G_{yz}$	1977,1

**4.5.3. 35 % udjela vlakana**

U tablici 8. prikazani su rezultati tj. moduli elastičnosti i smičnosti kompozita s 35 % udjela vlakana dobiveni numeričkom analizom RVE-a u Abaqus-u. U tablici 9. prikazani su moduli elastičnosti i smičnosti dobiveni analitičkom metodom.

**Tablica 8. Mehanička svojstva kompozita s 35 % udjela vlakana – numerička metoda**

35 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	6735,6	$G_{xy}$	2088,3
$E_y$	6698,7	$G_{xz}$	2963,4
$E_z$	88067,5	$G_{yz}$	2942,36

**Tablica 9. Mehanička svojstva kompozita s 35 % udjela vlakana – analitička metoda**

35 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	5298,6	$G_{xy}$	2055,6
$E_y$	5298,6	$G_{xz}$	2055,6
$E_z$	88220	$G_{yz}$	1873,3

**4.5.4. 30 % udjela vlakana**

U tablici 10. prikazani su rezultati tj. moduli elastičnosti i smičnosti kompozita s 30 % udjela vlakana dobiveni numeričkom analizom RVE-a u Abaqus-u. U tablici 11. prikazani su moduli elastičnosti i smičnosti dobiveni analitičkom metodom.

**Tablica 10. Mehanička svojstva kompozita s 30 % udjela vlakana – numerička metoda**

30 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	6205,2	$G_{xy}$	1962
$E_y$	6234,95	$G_{xz}$	2605,24
$E_z$	75921,8	$G_{yz}$	2648,56

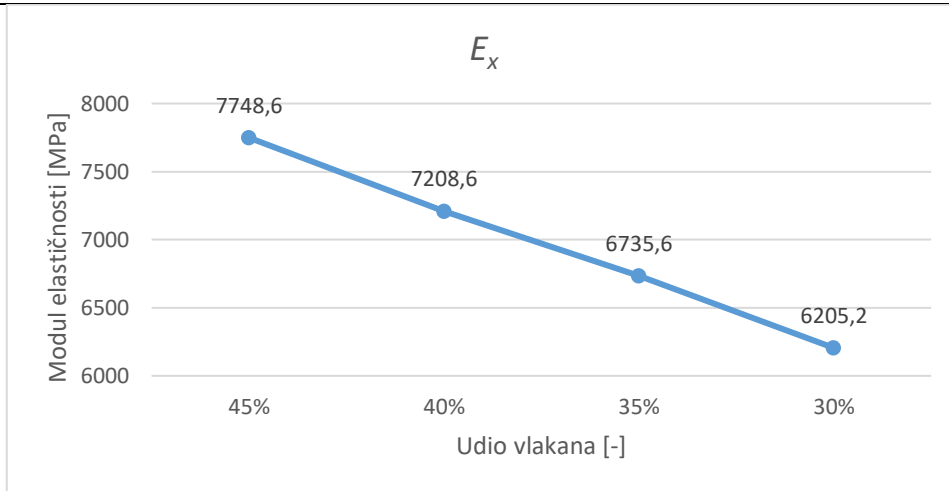
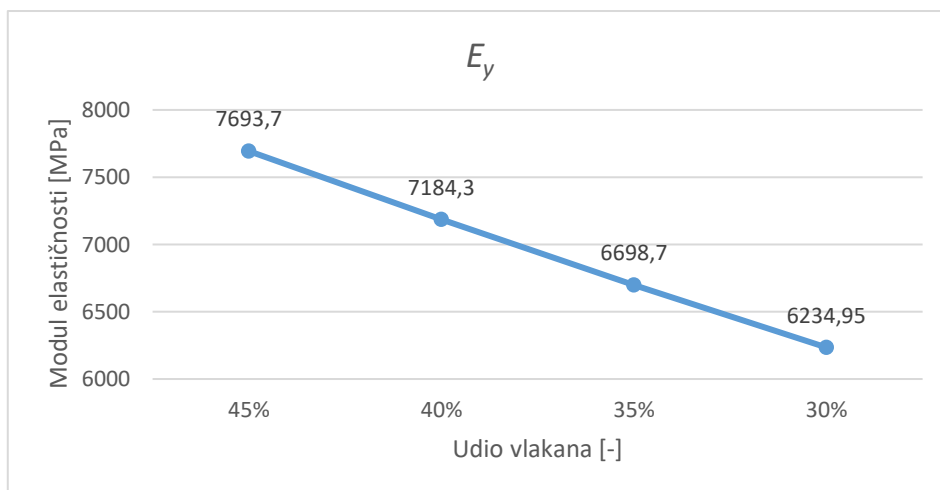
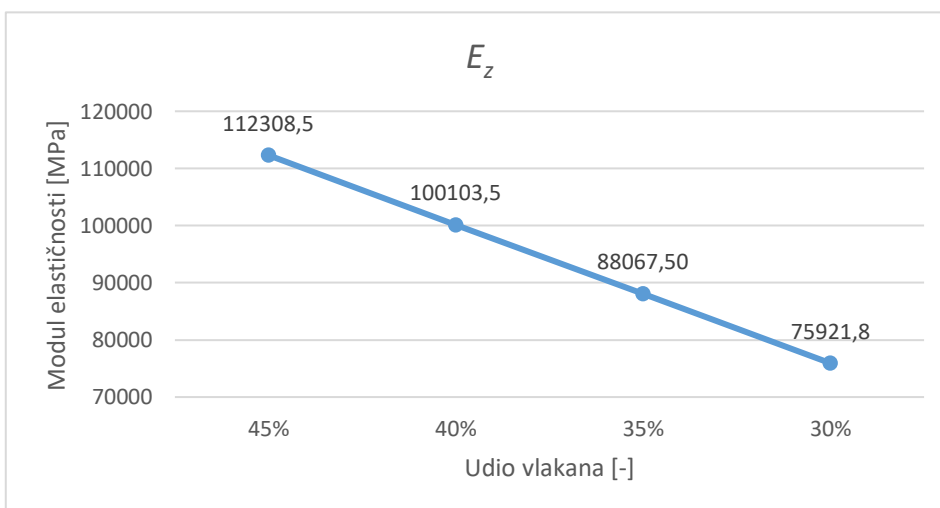
**Tablica 11. Mehanička svojstva kompozita s 30 % udjela vlakana – analitička metoda**

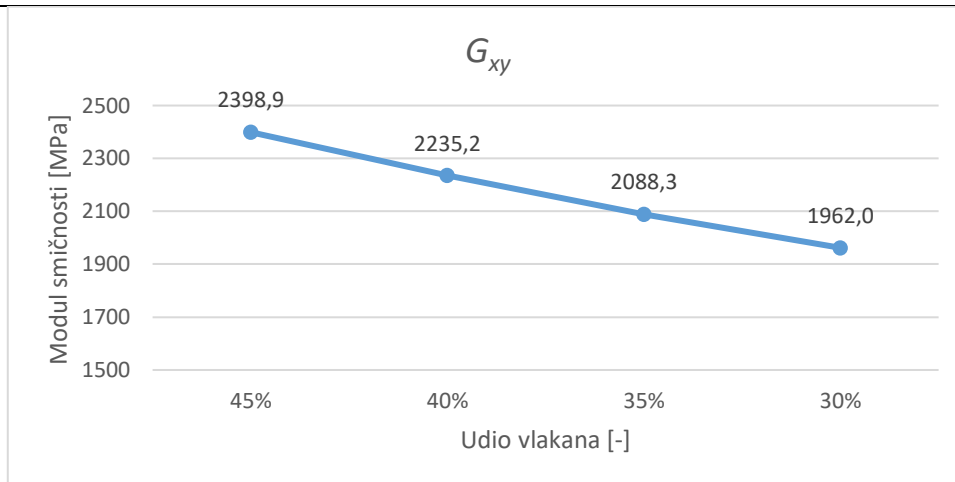
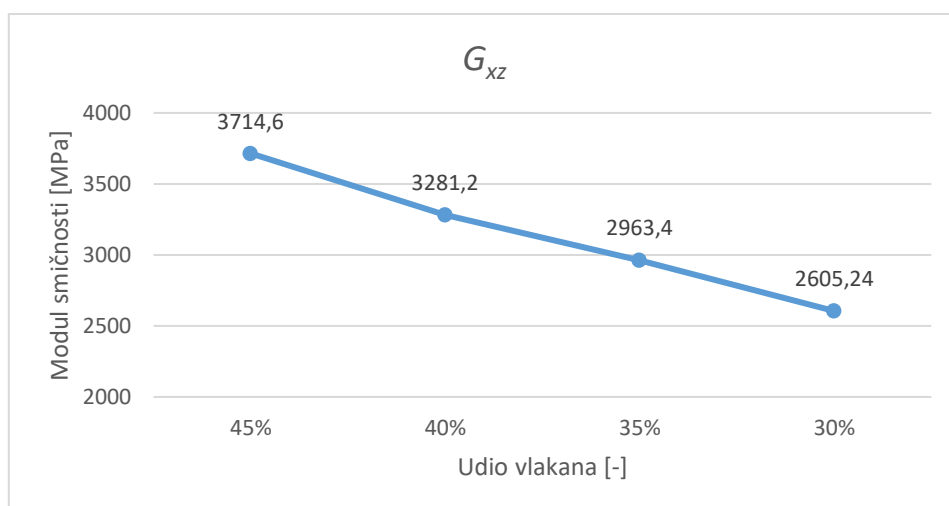
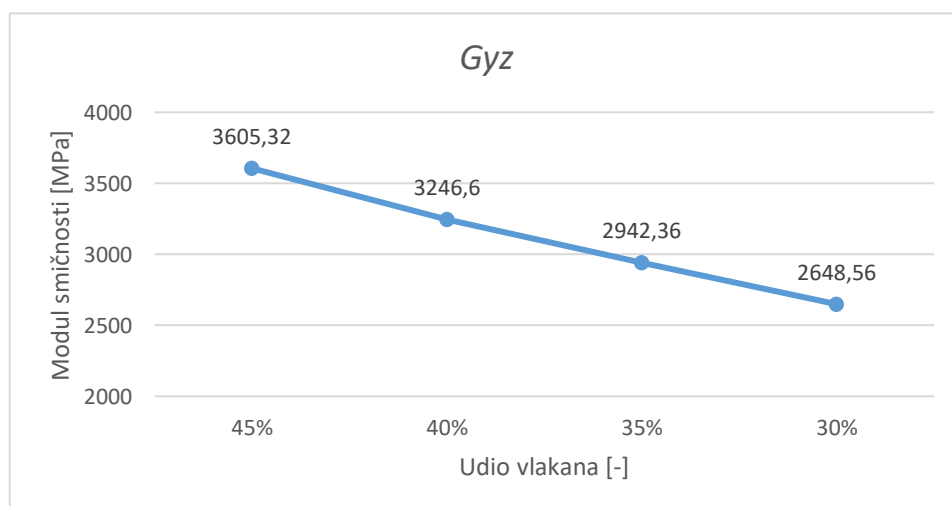
30 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	5016	$G_{xy}$	1918,4
$E_y$	5016	$G_{xz}$	1918,4
$E_z$	76160	$G_{yz}$	1779,8

Kao što je vidljivo rezultati dobiveni numeričkom i analitičkom metodom djelomično se poklapaju. Analitička metoda vrlo dobro predviđa modul elastičnosti kompozita u smjeru vlakana te modul smičnosti u  $xy$  ravnini, dok ostali rezultati odstupaju. Razlog tomu su pretpostavke koje se uvode prilikom izvođenja izraza za računanje mehaničkih svojstava, a prvenstveno je to pretpostavka da su deformacije jednake kako u matrici tako i u vlaknima, što ne može biti. Druga pretpostavka je da se ponašanje kompozita ojačanog vlaknima promatra kao linearno dok je ono zapravo nelinearno.

#### 4.5.5. Aproksimacija mehaničkih svojstava

Nakon dobivanja rezultata tj. modula elastičnosti i smičnosti u svim smjerovima za kompozit s različitim udjelima vlakana, moguće je dobivena svojstva matematički aproksimirati pomoću funkcije. Tako aproksimiranim svojstvima moguće je približno odrediti mehanička svojstva kompozita s proizvoljnim udjelom vlakana.

Slika 31. Moduli elastičnosti u smjeru osi  $x$ ,  $E_x$ Slika 32. Moduli elastičnosti u smjeru osi  $y$ ,  $E_y$ Slika 33. Moduli elastičnosti u smjeru  $z$ ,  $E_z$

Slika 34. Moduli smičnosti u  $xy$  ravnini,  $G_{xy}$ Slika 35. Moduli smičnosti u  $xz$  ravnini,  $G_{xz}$ Slika 36. Moduli smičnosti u  $yz$  ravnini,  $G_{yz}$



Kao što je moguće vidjeti iz dijagrama na slikama 31. - 36., moduli elastičnosti i smičnosti slijede otprilike formu pravca tj. moguće ih je aproksimirati pomoću linearne funkcije. Za dobivanje takve funkcije uzeta je početna i krajnja točka na dijagramu. Linearna funkcija mehaničkih svojstava ovisi o udjelu vlakana u kompozitu. Pomoću izraza za dobivanje jednadžbe pravca kroz dvije točke dobivene su sljedeće funkcije:

$$E_x(x) = 10289,33x + 3118,39, \quad (4.49)$$

$$E_y(x) = 9724,99x + 3317,45, \quad (4.50)$$

$$E_z(x) = 242577,99x + 3148,4, \quad (4.51)$$

$$G_{xy}(x) = 2912,66x + 1088,19, \quad (4.52)$$

$$G_{xz}(x) = 7395,73x + 386,52, \quad (4.53)$$

$$G_{yz}(x) = 6378,4x + 735,04. \quad (4.54)$$

#### 4.5.5.1. Predviđanje mehaničkih svojstava kompozita s 50 % udjela vlakana

Kao što je spomenuto, funkcije aproksimacije materijalnih svojstava (4.49) – (4.54), su primijenjene za predviđanje mehaničkih svojstava kompozita proizvoljnog udjela vlakana. Odabran je slučaj s 50 % udjelom vlakana u materijalu.

Uvrštavanjem vrijednosti 0,5 u izraz (4.49) slijedi vrijednost modula elastičnosti  $E_x$  za 50 % udjela vlakana:

$$E_x = 10289,33 \cdot 0,5 + 3118,39 = 8263,06 \text{ MPa} \quad (4.55)$$

Uvrštavanjem vrijednosti 0,5 u izraz (4.50) slijedi vrijednost modula elastičnosti  $E_y$  za 50 % udjela vlakana:

$$E_y = 9724,99 \cdot 0,5 + 3317,45 = 8179,95 \text{ MPa} \quad (4.56)$$

Uvrštavanjem vrijednosti 0,5 u izraz (4.51) slijedi vrijednost modula elastičnosti  $E_z$  za 50 % udjela vlakana:

$$E_z = 242577,99 \cdot 0,5 + 3148,4 = 124437,4 \text{ MPa} \quad (4.57)$$

Uvrštavanjem vrijednosti 0,5 u izraz (4.52) slijedi vrijednost modula smičnosti  $G_{xy}$  za 50 % udjela vlakana:

$$G_{xy} = 2912,66 \cdot 0,5 + 1088,19 = 2544,52 \text{ MPa} \quad (4.58)$$

Uvrštavanjem vrijednosti 0,5 u izraz (4.53) slijedi vrijednost modula smičnosti  $G_{xz}$  za 50 % udjela vlakana:

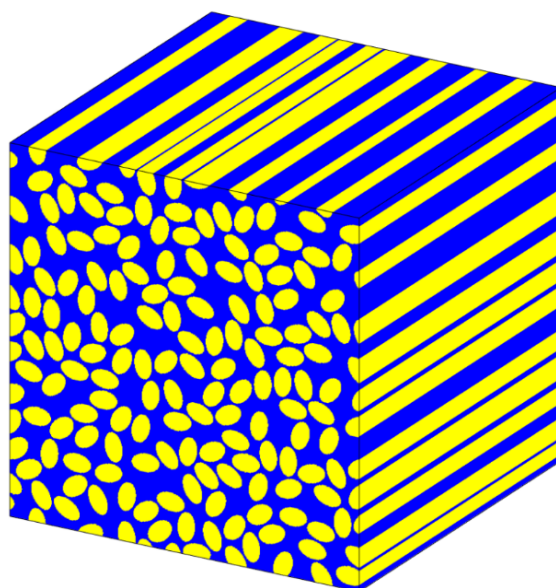
$$G_{xz} = 7395,73 \cdot 0,5 + 386,52 = 4084,39 \text{ MPa} \quad (4.59)$$

Uvrštavanjem vrijednosti 0,5 u izraz (4.54) slijedi vrijednost modula smičnosti  $G_{yz}$  za 50 % udjela vlakana:

$$G_{yz} = 6378,4 \cdot 0,5 + 735,04 = 3924,24 \text{ MPa} \quad (4.60)$$

#### 4.5.5.2. Numerička analiza 50 % udjela vlakana

Kao i za simulacije u poglavlju 4.5., i ovdje je korišten isti RVE veličine 100x100x25  $\mu\text{m}$  te su primijenjeni isti rubni uvjeti. Na slici 37. je prikazan RVE s 50 % udjela vlakana.



Slika 37. RVE s 50 % udjela vlakana

Nakon provedene analize dobiveni su sljedeća mehanička svojstva prikazana u tablici 12.

Tablica 12. Mehanička svojstva kompozita s 50 % udjela vlakana

50 % udio vlakana			
Moduli elastičnosti [MPa]		Moduli smičnosti [MPa]	
$E_x$	8286,9	$G_{xy}$	2567
$E_y$	8317,1	$G_{xz}$	4043,4
$E_z$	123094,75	$G_{yz}$	4103

U tablici 13. prikazana je usporedba vrijednosti mehaničkih svojstava dobivenih numeričkom analizom i onih dobivenih aproksimacijom iz poglavlja 4.5.5.

**Tablica 13. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata**

Mehanička svojstva	Rezultati dobiveni numeričkom analizom [MPa]	Rezultati dobiveni aproksimacijom svojstava [MPa]	Razlika [MPa]	Postotak
$E_x$	8286,9	8263,055	23,845	0,289%
$E_y$	8317,1	8179,945	137,155	1,677%
$E_z$	123094,8	124437,395	-1342,645	-1,079%
$G_{xy}$	2567	2544,52	22,48	0,883%
$G_{xz}$	4043,4	4084,385	-40,985	-1,003%
$G_{yz}$	4103,04	3924,24	178,8	4,556%

Kao što je vidljivo iz tablice rezultati se jako dobro poklapaju. Najveća razlika vidljiva je kod modula smičnosti  $G_{yz}$  koja iznosi 4,56 %. S obzirom na to da su ostali rezultati ispod 2 % može se reći da je moguće predvidjeti mehanička svojstva za linearno elastično ponašanje kompozita s proizvoljnim udjelom vlakana matematičkom aproksimacijom.

## 5. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu provedeno je mikromehaničko modeliranje kompozita ojačanog vlaknima. Na temelju snimljene mikrostrukture uzorka materijala, određena je geometrija RVE-a. Numeričkim analizama RVE-a različitih veličina, utvrđena je minimalna potrebna veličina RVE-a, koja daje statistički nepromjenjive homogenizirane rezultate, koji je potom korišten u daljnjim analizama. Pretpostavljeno je ortotropno konstitutivno ponašanje materijala. Prilikom određivanja minimalne potrebne veličine RVE-a, također je provjerena duljina vlakana kod koje ne dolazi do utjecaja na homogenizirane vrijednosti mehaničkih svojstava. Kako bi rezultati bilo što točniji, napravljena je statistička analiza mikrostrukture, odnosno razmatran je veći broj proizvoljno odabranih RVE-ova, uz zadovoljavanje udjela vlakana, a potom su dobiveni rezultati statistički obrađeni. Odabran je RVE veličine 100x100x25  $\mu\text{m}$ .

Cilj završnog rada je utvrditi mehanička svojstva kompozita s različitim udjelima vlakana. U programskom paketu Abaqus provedene su numeričke analize odabranog RVE-a s udjelom vlakana od 45, 40, 35 i 30 % uz pretpostavku linearno elastičnog ponašanja. Za određivanje svojstava svaki numerički model je prilikom analize opterećen u odgovarajućim smjerovima osi ili ravnina, kako bi se dobila svojstva materijala u zadanom smjeru opterećenja.

Obradom rezultata numeričkih analiza zaključeno je da vrijednosti mehaničkih svojstava ovise o udjelu vlakana u kompozitu. Porastom udjela vlakana u materijalu rastu svi moduli elastičnosti i smičnosti tj. materijal postaje krući. Na temelju dobivenih rezultata, mehanička svojstva su aproksimirana linearnim funkcijama, koje su potom iskorištene za predviđanje svojstava kompozita s proizvoljnim udjelom vlakana, konkretno za 50 %. Ista svojstva su potom određena i homogenizacijom mikrostrukture. Usporedbom dobivenih rezultata pokazano je da se vrijednosti linearnih mehaničkih svojstava dobivenih homogenizacijom poklapaju s analitičkim rezultatima što dovodi do zaključka da se metodom homogenizacije može točno opisati funkcijska ovisnost materijalnih svojstava za bilo koji proizvoljni udio vlakana.

**LITERATURA**

- [1] Jurčević, A.: Mikromehaničko modeliranje vlačnog testa nodularnog lijeva, diplomski rad, 2020.
- [2] CradleF to Cradle Products Innovation Institute: Guidance for Determining Homogeneous Materials in the Cradle to Cradle Certified™ Product Standard, 2016.
- [3] Xiaolei, W., Yuntian, Z.: Heterogeneous materials: a new class of materials with unprecedented mechanical properties, 2017.
- [4] <https://www.mar-bal.com/language/en/applications/history-of-composites/>
- [5] <https://www.thoughtco.com/history-of-composites-820404>
- [6] <https://ars.els-cdn.com/content/image/3-s2.0-B9780081009048000195-f17-01-9780081009048.jpg>
- [7] <https://romeorim.com/wp-content/uploads/2018/07/FiberMatrixComposite3.png>
- [8] Filetin, T., Kovačiček, F., Indof, J.: Svojstva i primjena materijala: čelici i željezni ljevovi, laki i obojeni metali, konstrukcijska keramika, polimerni materijali, kompozitni materijali i drvo.; 2. izdanje, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2013.
- [9] Morgan, P.: Carbon fibers and their composites, 2005.
- [10] <http://www.madehow.com/Volume-4/Carbon-Fiber.html>
- [11] Chawla, K.K.: Composites Materials Science and Engineering 4th edition, 2019.
- [12] Baker, A.: Composite Materials for Aircraft Structures 2nd edition, 2004.
- [13] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb 2004.
- [14] <http://3.bp.blogspot.com/-rUQMZ1BuVnI/TiLwGJIGGOI/AAAAAAAAASw/fkaV3Z1aQFo/s1600/FEMShapes.gif>
- [15] Abaqus Analysis User`s Manual
- [16] <https://ajw-group.mit.edu/multiscale-modeling-clays>
- [17] Srivastava, V.K., Gabbert, U., Berger, H., Singh, S.: Analysis of particles loaded fiber composites for the evaluation of effective material properties with the variation of shape and size, 2011.
- [18] Yvonnet, J.: Computational Homogenization of Heterogeneous Materials with Finite Elements, 2019.
- [19] Li, S., Sitnikova, E.: Representative Volume Elements and Unit Cells, Concepts, Theory, Applications and Implementation, 2020.
- [20] Omairey, S.L., Dunning, P.D., Sriramula, S.: Development of an ABAQUS plugin tool for periodic RVE homogenisation, 2018.

[21] [https://i.ytimg.com/vi/qWvn\\_Sd6Lrc/maxresdefault.jpg](https://i.ytimg.com/vi/qWvn_Sd6Lrc/maxresdefault.jpg)

[22] Liu, Z.: *Reduced-order Homogenization of Heterogeneous Material Systems: from Viscoelasticity to Nonlinear Elasto-plastic Softening Material*, 2017.

[23] Karšaj, I.: *Numeričko modeliranje procesa deformiranja uz pretpostavku velikih deformacija*, doktorski rad, 2006.

[24] Lesičar, T., Tonković, Z., Sorić, J.: *Mikromehaničko modeliranje proces deformiranja*, Četvrti susret Hrvatskog društva za mehaniku, Slavonski Brod 2011.

[25] Jones, R.M.: *Mechanics of composite materials*, 1999.