

# Određivanje parametara loma sinteriranog čelika metodom faznog polja

---

Rako, Jakov

Master's thesis / Diplomski rad

2023

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:270661>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-25**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

**Jakov Rako**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar, mag. ing.

Student:

Jakov Rako

Zagreb, 2023.

*Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.*

*Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Tomislavu Lesičaru na pomoći pri odabiru teme, te na svim savjetima i pomoći tijekom pisanja ovog diplomskog rada. Vašim entuzijazmom i znanjem potaknuli ste i mene da dam sve od sebe pri istraživanju i pisanju ovog rada, te ste ovo zadnje iskustvo u mom akademskom obrazovanju učinili vrijednim pamćenja.*

*Zahvaljujem se kolegi Tomislavu Polančecu na svim pruženim savjetima, osiguranoj literaturi i iznimnoj susretljivosti i ljubaznosti za vrijeme izrade ovog rada.*

*Hvala svim mojim prijateljima koji su moje studiranje učinili nezaboravnim iskustvom.*

*Posebno se zahvaljujem svojim roditeljima Mati i Marini, sestri Mariji i bratu Anti na žrtvi i odricanju tijekom svih ovih godina. Hvala vam na povjerenju, neizmjerne ljubavi, podršci koju ste mi pružali i svim temeljnim životnim vrijednostima koje ste u mene utkali.*

*Hvala dragom Bogu na svom blagoslovu koji mi je dao.*

Jakov Rako



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomatske ispite  
Povjerenstvo za diplomatske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 23 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Jakov Rako**

JMBAG: 0035199853

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Određivanje parametara loma sinteriranog čelika metodom faznog polja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Determination of the fracture parameters of sintered steel by phase field method**

Opis zadatka:

Metalurgija praha proteklih godina doživljava ubrzani rast, zbog svojih ključnih prednosti u odnosu na klasičnu metalurgiju, kao što su niži troškovi proizvodnje i manje onečišćenje okoliša. Metalurgijom praha se proizvodi i sinterirani čelik, kojem je zbog specifičnog načina proizvodnje konstitutivno ponašanje nelinearno. Uzroci nelinearnog ponašanja materijala su elastoplastične deformacije, koje se javljaju u mikrostrukturi materijala, ali i srastanje pora kao posljedica mikrostrukturnih lomova, koje u konačnici rezultira konačnim lomom materijala na makrorazini. Kako bi numeričke simulacije čim točnije opisivale konstitutivno ponašanje komponenti od sinteriranog čelika, potrebno je precizno odrediti parametre elastoplastičnog očvršćenja i mehanike loma. U ovom diplomskom radu razmatrat će se sinterirani čelik Astaloy Mo+0,2C gustoće  $6,5\text{g/cm}^3$ , za koji su u okviru istraživanja provedenih na Katedri za mehaniku i čvrstoću provedena statička i ciklička eksperimentalna ispitivanja, te su poznati parametri elastoplastičnog ponašanja materijala.

Potrebno je:

1. Proučiti potrebnu literaturu vezanu uz numeričko modeliranje elastoplastičnog ponašanja materijala i modeliranje oštećenja primjenom metode faznog polja.
2. Odrediti parametar lomne žilavosti materijala  $G_c$  pomoću rezultata statičkih eksperimentalnih ispitivanja.
3. Ispitati utjecaj gustoće diskretizacije i mikrostrukturnog parametra  $l$  na rezultate numeričkih simulacija i lomnog ponašanja sinteriranog čelika.

Odabrane parametre metode faznog polja potrebno je validirati numeričkim simulacijama eksperimentalnih ispitivanja uz pretpostavku malih deformacija. Za provedbu numeričkih simulacija primijeniti komercijalni programski paket Abaqus. U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

17. studenoga 2022.

19. siječnja 2023.

23.- 27. siječnja 2023.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

# SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. METALURGIJA PRAHA I SINTERIRANJE.....	1
1.1. Uvod u metalurgiju praha.....	1
1.1.1. Proizvodnja praha .....	3
1.1.2. Kompaktiranje praha.....	5
1.1.3. Sinteriranje .....	7
2. KONSTITUTIVNI MATERIJALNI MODEL.....	9
2.1. Stvarno i inženjersko naprezanje .....	9
2.2. Linearno elastični materijalni model.....	11
2.3. Elastoplastični materijalni model.....	12
2.4. Granica tečenja materijala.....	14
2.5. Zakoni očvršćenja .....	15
2.5.1. Izotropno očvršćenje .....	15
2.5.2. Kinematičko očvršćenje.....	16
3. MODELIRANJE OŠTEĆENJA METODOM FAZNOG POLJA .....	18
3.1. Mehanika loma.....	18
3.2. Parametar lomne žilavosti $G_c$ .....	19
3.3. Teorija faznog polja ( <i>phase-field modelling</i> ).....	19
3.3.1. Poopćeni model loma metodom faznog polja.....	19
4. NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA .....	24
4.1. Metoda konačnih elemenata.....	24
4.1.1. Osnovni pravokutni konačni element .....	24
4.2. Implementacija teorije faznog polja u MKE.....	27
4.2.1. Diskretizacija .....	27
4.2.2. Slaba forma .....	28
4.2.3. Razdvojeni ( <i>staggered</i> ) algoritam.....	29
4.3. Implementacija u ABAQUS .....	30
4.3.1. Sustav s tri sloja .....	31
5. PROVEDENA ANALIZA .....	34
5.1. Uvod.....	34
5.2. Geometrija, rubni uvjeti i diskretizacija epruvete .....	35
5.2.1. Geometrija epruvete.....	35
5.2.2. Rubni uvjeti i opterećenje .....	36
5.2.3. Diskretizacija epruvete.....	38
5.3. Input datoteka.....	40

5.4. Pokretanje simulacije .....	43
5.5. Rezultati .....	43
5.5.1. Numeričke simulacije primjenom AT-2 modela .....	45
5.5.2. Numeričke simulacije primjenom TH modela.....	47
5.5.3. Numeričke simulacije primjenom AT-2 modela i konačno odabranih materijalnih parametara .....	52
6. ZAKLJUČAK.....	55
LITERATURA.....	56

## POPIS SLIKA

Slika 1. Osnovni procesi metalurgije praha [1].....	2
Slika 2. Rezni alati [2].....	3
Slika 3. Automobilski dijelovi izrađeni od metalnog praha [3] .....	3
Slika 4. Mlin s kuglicama [4] .....	4
Slika 5. Oblik čestica praha i metode njihovog dobivanja [1] .....	5
Slika 6. Shematski prikaz postupka jednoosnoga kompaktiranja u kalupu [1].....	6
Slika 7. Čestice praha nakon punjenja kalupa i nakon kompaktiranja [1] .....	6
Slika 8. Ovisnost gustoće otpreska o tlaku prešanja [1].....	7
Slika 9. Faze zgušnjavanja prilikom sinteriranja u tekućoj fazi [1] .....	8
Slika 10. Dijagram naprezanje deformacija [6].....	9
Slika 11. Deformacija i poprečni presjeci epruvete [7].....	10
Slika 12. Elastična i plastična deformacija [8].....	13
Slika 13. Plohe tečenja po von Misessu (cilindar) i Tresci (pravilna šesterostrana prizma) [10] ..	14
Slika 14. Izotropno očvršćenje [11] .....	15
Slika 15. Kinematičko očvršćenje [11] .....	16
Slika 16. Prikaz pukotine i difuzivne zone oko pukotine upotrebom metode faznog pomaka u ovisnosti o parametru $l$ [19].....	20
Slika 17. Razlika između AT-2 i TH modela [19] .....	22
Slika 18. Osnovni pravokutni element [20] .....	24
Slika 19. Standardni <i>staggered</i> algoritam rješavanja [19] .....	29
Slika 20. Kontrola reziduala (RCTRL) <i>staggered</i> algoritam rješavanja [19] .....	30
Slika 21. Jedno iteracijski (SI) <i>staggered</i> algoritam rješavanja [19] .....	30
Slika 22. Tok RCTRL algoritma [19] .....	31
Slika 23. Implementacija sustava s 3 sloja elemenata u Abaqus-u [19] .....	32
Slika 24. Epruveta od sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće 6,5 g/cm <sup>3</sup> .....	34
Slika 25. Dimenzije epruvete .....	34
Slika 26. Geometrija epruvete.....	35
Slika 27. Opterećenje epruvete zadavanjem pomaka.....	36
Slika 28. Nezadovoljavajući rubni uvjeti .....	37
Slika 29. Rubni uvjeti.....	38
Slika 30. Mreža s 14218 konačnih elemenata .....	39
Slika 31. Mreža s 80626 konačnih elemenata .....	39
Slika 32. Mreža sa 17337 konačnih elemenata .....	40
Slika 33. Definiranje prvog sloja konačnih elemenata i pripadajućih čvorova.....	40
Slika 34. Definiranje drugog sloja konačnih elemenata s pripadnim čvorovima.....	41
Slika 35. Definiranje trećeg sloja konačnih elemenata s pripadnim čvorovima .....	41
Slika 36. Zadavanje parametara faznog polja .....	41
Slika 37. Određivanje materijalnih parametara.....	42
Slika 38. Definiranje rubnih uvjeta i koraka .....	42
Slika 39. Izlazni podatci .....	43
Slika 40. Pokretanje simulacije .....	43
Slika 41. Setovi čvorova za računanje pomaka i deformacije vrata epruvete.....	44



Slika 42. Dijagram naprezanje-deformacija početne simulacije .....	45
Slika 43. Dijagram naprezanje-deformacija druge simulacije .....	46
Slika 44. Dijagram naprezanje-deformacija simulacije samo s izotropnim očvršćenjem.....	46
Slika 45. Dijagram naprezanje-deformacija prve simulacije s primjenom TH modela .....	47
Slika 46. Dijagram naprezanje-deformacija simulacije sa smanjenim parametrom $Q_{\infty}$ .....	48
Slika 47. Rezultati numeričke simulacije koji vjerno repliciraju eksperimentalne rezultate .....	49
Slika 48. Izgled pukotine pri $U_2=0,546$ mm i $U_2=0,5493$ mm.....	49
Slika 49. Izgled pukotine.....	50
Slika 50. Dijagram naprezanje-deformacija simulacije s konačnim vrijednostima parametara faznog polja .....	50
Slika 51. Lom epruvete kod eksperimentalnog ispitivanja .....	51
Slika 52. Raspodjela parametra faznog polja prije pucanja epruvete za vrijednost $G_c=3,5$ N/mm	51
Slika 53. Utjecaj mikrostrukturnog parametra $l$ .....	52
Slika 54. Usporedba dijagrama naprezanje-deformacija primjenom AT-2 modela s TH modelom i eksperimentom .....	53
Slika 55. Dijagram naprezanje-deformacija primjenom AT-2 modela za $G_c=35$ N/mm .....	53

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\psi^b$		Ukupna energija deformiranja
$\psi^s$		Disipacijska energija loma
$\mathbf{D}_k$		Kinematički diferencijalni operator
$\mathbf{F}_{\text{ext}}^v, \mathbf{F}_{\text{ext}}^\phi, \mathbf{F}_{\text{int}}^v, \mathbf{F}_{\text{int}}^\phi$		Vektori unutarnjih i vanjskih sila
$\mathbf{K}^{vv}, \mathbf{K}^{\phi\phi}$		Matrice krutosti
$C_k$		Materijalni parametar kinematičkog očvršćenja
$\tilde{D}$		Funkcija stanja
$Q_\infty$	MPa	Maksimalni iznos promjene granice tečenja
$S_{ij}$	MPa	Devijatorski dio tenzora naprezanja
$W^{\text{ext}}$		Potencijalna vanjska energija
$W^{\text{int}}$		Potencijalna unutarnja energija
$\alpha_u$		Matrica funkcija u interpolacijskim polinomima
$\boldsymbol{\varepsilon}^e, \varepsilon_{ij}^e$	mm/mm	Tenzor elastične deformacije
$\boldsymbol{\varepsilon}^p, \varepsilon_{ij}^p$	mm/mm	Tenzor plastične deformacije
$\alpha_k$	MPa	Povratno naprezanje, eng. <i>backstress</i>
$\gamma_k$		Materijalni parametar kinematičkog očvršćenja
$\delta W^{\text{ext}}$		Varijacija potencijalne vanjske energije
$\delta W^{\text{int}}$		Varijacija potencijalne unutarnje energije
$\delta_{ij}$		Kroneckerov simbol
$\varepsilon_{ekv}^p$	mm/mm	Ekvivalentna plastična deformacija
$\varepsilon^e$	mm/mm	Elastična deformacija
$\varepsilon^p$	mm/mm	Plastična deformacija
$\varepsilon_t$	mm/mm	Prava deformacija
$\sigma_{ij}$	MPa	Tenzor naprezanja
$\sigma_{ij}^0$	MPa	Sferni dio tenzora naprezanja
$\sigma_t$	MPa	Stvarno napreznaje
$\sigma_y$	MPa	Granica tečenja
$\sigma_y^0$	MPa	Inicijalna granica tečenja pri nula ekv. pl. deformacija

$\bar{\psi}$		Varijabla akumulacije gustoće lokalne energije
$\psi_e$		Elastična energija deformiranja
$\psi_e^\pm$		Pozitivni i negativni dio elastične energije deformiranja
$\psi_p$		Plastična energija deformiranja
$\psi_c$		Specifična energija loma
$\sigma^*$	MPa	Nedegradirani tenzor naprezanja
$A$	mm <sup>2</sup>	Površina
$b$		Parametar izotropnog očvršćenja
$D_{ijkl}$		Tenzor elastičnosti
$E$	MPa	Youngov modul elastičnosti
$F$	N	Sila
$G$	MPa	Modul smicanja
$G_c$	N/mm	Parametar lomne žilavosti
$\mathcal{H}(t)$		Parametar povijesti deformiranja
$L$	mm	Duljina epruvete
$L_0$	mm	Početna duljina epruvete
$\Gamma$		Površina pukotine
$\lambda$	MPa	Prva Lameova konstanta
$\mu$	MPa	Druga Lameova konstanta
$\nu$		Poissonov faktor
$\sigma$	MPa	Inženjersko naprezanje
$\Phi$		Parametar faznog polja
$\Psi$		Funkcional unutarnje energije
$\Omega$		Volumen n-dimenzijskog tijela
$\mathbf{B}$		Matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima
$\mathbf{C}$		Matrica međusobne ovisnosti stupnjeva slobode i koeficijenata interpolacijskih polinoma
$\mathbf{D}$		Tenzor elastičnosti
$\mathbf{N}$		Matrica funkcija oblika
$\mathbf{R}, \mathbf{R}^v, \mathbf{R}^\phi$		Vektori rezultatnih sila
$\mathbf{a}$		Matrica koeficijenata u interpolacijskim polinomima

---

<b>b</b>		Vektor volumenskih sila
<b>k</b>		Matrica krutosti
<b>n</b>		Vektor normale
<b>t</b>		Vektor površinskih sila
<b>u</b>		Vektor pomaka
<b>v</b>		Vektor stupnjeva slobode
$g(\phi)$		Degradacijska funkcija
$l$	mm	Parametar duljinske skale
$p$	MPa	Tlak
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	mm/mm	Tenzor deformacije
$\gamma(\phi, \nabla\phi)$		Funkcija gustoće površine pukotine
$\varepsilon$	mm/mm	Deformacija
$\kappa$		Parametar očvršćenja
$\boldsymbol{\alpha}$	MPa	Tenzor povratnog naprezanja
$\boldsymbol{\sigma}$	MPa	Cauchyev tenzor naprezanja

## SAŽETAK

Proizvodi od sinteriranog čelika u današnjoj industriji polako postaju dio svakodnevnice. Zbog svojih dobrih svojstava poput manje mase, dobrog prigušenja, manje potrebe za naknadnom površinskom obradom, mogućnosti legiranja raznim elementima i raznim drugim prednostima postali su standardni u automobilskoj i zrakoplovnoj industriji. Proizvodi od sinteriranog čelika izrađuju se metodom metalurgije praha, koja metalni prah kompaktira u kalupe i tvori proizvode koji nakon sinteriranja imaju svojstva jednaka ili bolja od onih koja bi imali da su izrađeni nekom od klasičnih metoda proizvodnje.

Glavne prednosti metalurgije praha su mogućnost izrade proizvoda s izrazito velikom dimenzijskom preciznošću koje nije potrebno naknadno obrađivati, te niži troškovi proizvodnje. Također je bitno naglasiti da je utjecaj na okoliš kod metalurgije praha puno manji nego kod klasičnih metoda proizvodnje, prvobitno zbog toga što je manje otpada i škarta. Zbog specifičnog načina proizvodnje sinteriranih čelika njihovo konstitutivno ponašanje je nelinearno.

Kako je u inženjerskoj praksi degradacija materijalnih svojstava i lom materijala jedan od najvećih problema koji uzrokuju oštećenja proizvoda potrebno je pokušati predvidjeti ili spriječiti njihovo nastajanje. Stoga je u ovom radu primijenjena metoda faznog polja za rješavanje problema mehanike loma, pomoću koje je modelirano oštećenje. Numeričkim simulacijama u komercijalnom programskom paketu Abaqus određeni su parametri metode faznog polja za modeliranje konstitutivnog ponašanja sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće  $6,5 \text{ g/cm}^3$ . Numeričke simulacije uspoređene su s rezultatima statičkih eksperimentalnih ispitivanja provedenih na Katedri za mehaniku i čvrstoću na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu.

Dobiveni parametri faznog polja  $G_c$  i  $l$  na zadovoljavajući način opisuju lomno ponašanje sinteriranog čelika za slučaj statičkog opterećenja. U daljnjem radu bi navedene parametre trebalo provjeriti numeričkim simulacijama s cikličkim opterećenjem kako bi se provjerio i zamorni lom materijala.

Ključne riječi: sinterirani čelik, Astaloy Mo+0,2C, metoda konačnih elemenata, teorija faznog polja, numerička analiza mehanike loma, Abaqus

## SUMMARY

In today's industry sintered steel products are slowly becoming part of everyday life. Due to their good properties such as lower mass, good damping, less need for subsequent surface treatment, the possibility of alloying with various elements and various other advantages, they have become standard in the automotive and aerospace industries. Sintered steel products are made using the powder metallurgy method, which compacts the metal powder into molds and forms products that, after sintering, have properties equal to or better than those they would have if they were made by one of the classical production methods.

The main advantages of powder metallurgy are the possibility of manufacturing products with extremely high dimensional precision that do not need to be post-processed, and lower production costs. It is also important to emphasize that the impact on the environment with powder metallurgy is much smaller than with classical production methods, primarily because there is less waste and scrap. Due to the specific method of production of sintered steels, their constitutive behavior is non-linear.

As in engineering practice, the degradation of material properties and material failure is one of the biggest problems that cause product damage, it is necessary to try to predict or prevent their occurrence. Therefore, in this work, the phase-field method was applied to solve the problem of fracture mechanics, by means of which the damage was modeled. The parameters of the phase-field method for modeling the constitutive behavior of sintered Astaloy Mo+0.2C with a density of  $6.5 \text{ g/cm}^3$  were determined using numerical simulations in the commercial Abaqus software package. Numerical simulations were compared with the results of static experimental tests conducted at the Chair of Mechanics and Strength of Materials at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture in Zagreb.

The obtained phase-field parameters  $G_c$  and  $l$  adequately model the fracture behavior of sintered steel for the case of static loading. In further work, the mentioned parameters should be verified by numerical simulations with cyclic loading in order to verify the fatigue fracture of the material.

Key words: sintered steel, Astaloy Mo+0.2C, finite element method, phase-field theory, numerical analysis of fracture mechanics, Abaqus

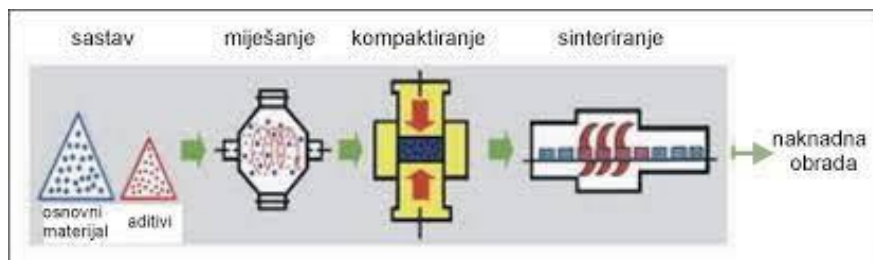
# 1. METALURGIJA PRAHA I SINTERIRANJE

## 1.1. Uvod u metalurgiju praha

Metalurgija praha je relativno nova tehnologija proizvodnje dijelova iz metalnog praha koja je izuzetno bitna u modernoj industriji jer se njome mogu izraditi dijelovi od visoko-čvrstih i tvrdih legura. Ono u čemu se ističe nad drugim tehnologijama je mogućnost proizvodnje proizvoda od metala s jako visokim talištem, te reznih alata visoke tvrdoće. Razlog zašto je to moguće je da kod metalurgije praha polazna točka proizvodnje nije taljenje materijala, nego se do proizvoda dolazi kompaktiranjem praha metala (legura) u kalupe, te njegovim toplinskim tretiranjem u pećima na temperaturama tek nešto nižim od temperature taljenja postupkom sinteriranja odnosno srašćivanja. Još jedna prednost metalurgije praha u odnosu na ostale tehnologije proizvodnje je i mogućnost dobivanja legura raznih metala koji ne moraju biti topivi jedan u drugom. Danas se također može, zahvaljujući metalurgiji praha, optimirati željena svojstva materijala i mikrostrukture te dobiti materijal optimalnih svojstava. Bitno je naglasiti da se metalurgija praha ne odnosi samo na proizvodnju metalnih proizvoda i materijala već i na nemetalne, te na proizvode koji zahtijevaju određenu razinu poroznosti. Primjenom metalurgije praha moguća je izrazito ekonomski isplativa proizvodnja dijelova u srednjim i velikim serijama [1].

Na slici 1 prikazane su četiri osnovne tehnološke faze prilikom proizvodnje dijelova primjenom metalurgije praha:

- potrebno je pripremiti mješavinu praha kojom će se postići željena materijalna svojstva.
- zatim se ta mješavina praha komprimira u kalup, te poprima željeni oblik.
- nakon komprimiranja naš proizvod ima odgovarajući oblik, ali i dalje nema odgovarajuća materijalna svojstva već je samo spreman za transport i rukovanje.
- proizvod se podvrgava sinteriranju, odnosno zagrijava se na temperaturu koja je malo niža od temperature tališta osnovnog metala u koji se nalazi u mješavini praha.



Slika 1. Osnovni procesi metalurgije praha [1]

Osnovne prednosti primjene tehnologije metalurgije praha su:

- mogućnost postizanja jednolike mikrostrukture,
- mogućnost postizanje visoke geometrijske i dimenzijske preciznosti gotovih proizvoda,
- mogućnost postizanja jako fine površinske obrade koju nije potrebno dodatno obrađivati,
- proizvodnja dijelova iz međusobno netopivih metala, iz smjese keramike i metala,
- mogućnost oblikovanja metala visoke tvrdoće,
- mogućnost definiranja željene poroznosti proizvoda,
- mogućnost razvijanja materijala željene mikrostrukture,
- manja količina otpada,
- štedi se energija, te su niži troškovi proizvodnje.

a nedostaci su:

- visoke cijene praha
- visoke cijene oprema i alat za početak proizvodnje,
- potrebna stroga kontrola svih faza proizvodnje,
- ograničen oblik i dimenzije proizvoda,
- isplativo jedino u serijskoj proizvodnji,
- moguća pojava poroznosti i oksidacije,
- otežano rukovanje prahovima [1].

Neki od primjera proizvoda koje vidamo u svakodnevnoj upotrebi, a da su izrađeni primjenom tehnologije metalurgije praha su spirala električne žarulje izrađena od volframa, rezni alati od tvrdih legura prikazani na slici 2, te je česta i primjena u automobilskoj industriji za proizvodnju dijelova relativno malih dimenzija u velikim serijama (klipnjače, zupčanici, lančanici itd.) koji su prikazani na slici 3.





Slika 2. Rezni alati [2]



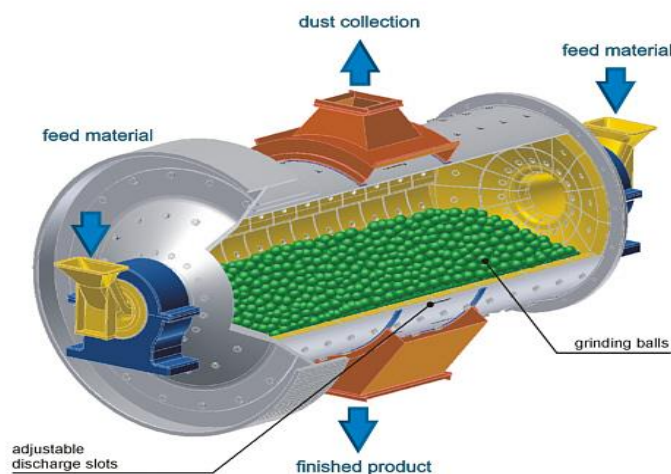
Slika 3. Automobilski dijelovi izradeni od metalnog praha [3]

### 1.1.1. Proizvodnja praha

Da bi proces proizvodnje tehnologijom metalurgije praha bio uspješan potreban je nadzor i klasifikacija samog praha. Prema samoj definiciji prah čine jako sitne čestice, veličine od 0,1 do 50 mikrometara, koje zajedno tvore puno veći volumen. Prije svega razlikuju se četiri tehnike za dobivanje praha i to mehanički, elektrolitički, kemijski i atomizacijski.

Proizvodnja praha mehaničkim postupkom podrazumijeva utjecaj vanjske sile na polazni materijal koji se na taj način usitnjava. Način djelovanja sile može biti udaranje, trenje, sječenje ili tlačenje. Mehaničkim postupcima moguća je proizvodnja praha od tvrdih i krhkih materijala (legura i keramika), materijala koji su reaktivni, te metala koji se viđaju u svakodnevnoj upotrebi (aluminij

i željezo). Jedna od najzastupljenijih mehaničkih tehnika proizvodnje praha je mljevenje. Na slici 4 prikazan je standardni model mlina s kuglicama koji se koristi za proizvodnju praškastog materijala. Mljevenje je mehanička tehnika proizvodnje praha promjenom veličine i oblika čestica. Mljevenjem je moguće i ravnomjerno raspodijeliti dva ili više različitih materijala u prahu, pri čemu mljevenje utječe i na promjenu fizikalnih i mehaničkih svojstava praha. Prilikom mljevenja, a i ostalih mehaničkih tehnika proizvodnje praha, izuzetno je bitno kontrolirati cijeli proces da ne bi došlo do kontaminacije praha [1].



Slika 4. Mlin s kuglicama [4]

Proizvodnja praha elektrolitičkom tehnikom svrstava se u fizikalne metode. Metalni prah se u procesu elektrolize taloži na katodi u obliku grudica ili pahuljica koje se dalje vrlo lako još više usitnjavaju. Prah dobiven ovim postupkom je izrazito čist i jako sitan.

U kemijske tehnike proizvodnje praha ubrajaju se redukcija oksida metala, hibrid-dehidrid postupak, postupak reakcijske sinteze, taloženje iz otopine soli metala i isparavanje – kondenzacija. Najbitnija od ovih tehnika je redukcija oksida metala. Da bi se provela redukcija oksida potrebna je odgovarajuća kemijska reakcija između sredstva za redukciju i oksidiranog metala. Redukcijska sredstva mogu biti u čvrstom (ugljen, natrij, kalcij, magnezij, aluminij itd.) ili plinovitom (vodik, ugljični monoksid, prirodni plin itd.) stanju. Ugljen se najčešće koristi kao redukcijsko sredstvo u Högenäsovu postupku [5] da bi dobili spužvasti prah željeza. Kao najčešće plinovito redukcijsko sredstvo koristi se vodik. Najveći utjecaj na čistoću i veličinu čestica praha ima čistoća i veličina

početnog metalnog oksida, ali i samo redukcijsko sredstvo, atmosfera i temperatura redukcije. Pri redukciji vodikom također je bitno voditi računa o potpunosti redukcije, te odvoditi nastalu vodenu paru. Ono što karakterizira redukciju s vodikom je mogućnost proizvodnje praha volframa i molibdena, koji se teško proizvode drugim metodama, te praha željeza, nikla, bakra, kobalta itd. [1].

Posljednja tehnika proizvodnje praha je atomizacija. Atomizacija je izrazito uspješna u proizvodnji prahova metala visoke čistoće direktno iz taline. Rastaljeni metal se raspršuje u kapljice koje se naknadno postupno hlade, te služe za proizvodnju praha aluminija, željeza, bronce, niskolegiranih čelika, nehrđajućih čelika, alatnih čelika, titana, superlegura, itd. Atomizacija rastaljenog metala može se provoditi vodom, plinom, centrifugalno ili u vakuumu [1].

Svim navedenim postupcima proizvodnje dobiva se prah čije čestice su različita oblika i različite veličine. Na slici 5 je prikazana kategorizacija različitih tipova čestica praha. Svaki tip čestica ima nadalje svojstva koja utječu na njegovu kompresibilnost, viskoznost, mogućnost sinteriranja itd... Sam oblik čestica praha ima bitan utjecaj na konačna svojstva samog materijala. Tako na primjer sferne čestice praha imaju nepovoljnije vrijednosti kompresibilnosti i sinteriranja u odnosu na štapičaste čestice [1].

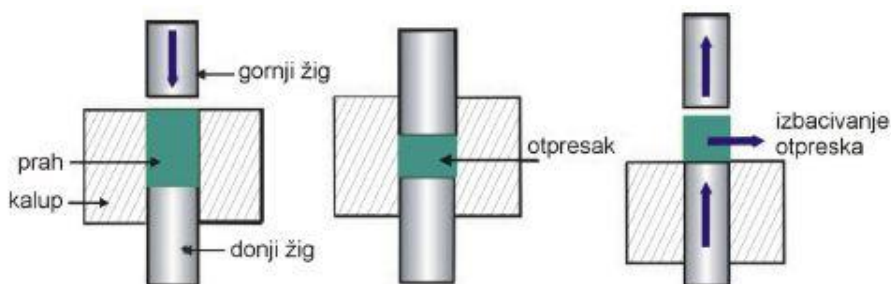


Slika 5. Oblik čestica praha i metode njihovog dobivanja [1]

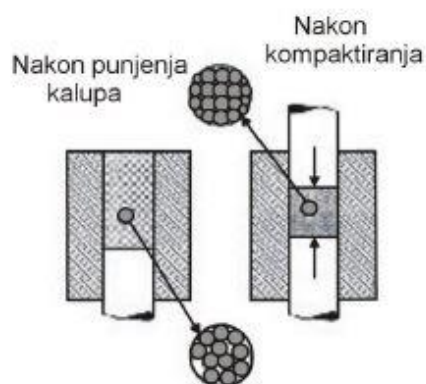
### 1.1.2. Kompaktiranje praha

Prije nego se pristupi kompaktiranju praha i stvaranju otpreska sam prah je potrebno dodatno pripremiti. Stoga se provode razne pripremne operacije poput miješanja, klasiranja, aglomeracije,

deaglomeracije, žarenja, pročišćavanja i podmazivanja praha. Sve ove pripremne radnje se provode radi dovođenja praha u idealno stanje za prešanje i kasnije sinteriranje. Samo konvencionalno kompaktiranje u biti je punjenje praha u kalup, prešanje praha primjenom vanjske sile, otpuštanje vanjske sile, te izbacivanje otpreska iz kalupa (Slika 6). Ono se provodi tako da na prah s jedne (jednostrano prešanje) ili s obje strane (dvostrano prešanje), djeluje vanjska sila (tlak) preko klipova (žigova) koji se sporo kreću. Sam raspored čestica nakon punjenja kalupa i nakon kompaktiranja prikazan je na slici 7. Kompaktiranjem se prah pretvara u potrebni oblik, svodi ga se na zadane konačne dimenzije otpreska, te na željenu razinu poroznosti uz dovoljno veliku čvrstoću komada da bi njime mogli nesmetano manipulirati. Jednostrano prešanje koristi se za jednostavne proizvode manjih dimenzija, dok se za proizvode s različitim debljinama koristi dvostrano prešanje čime se postiže ravnomjernija raspodjela gustoće u otpresku [1].



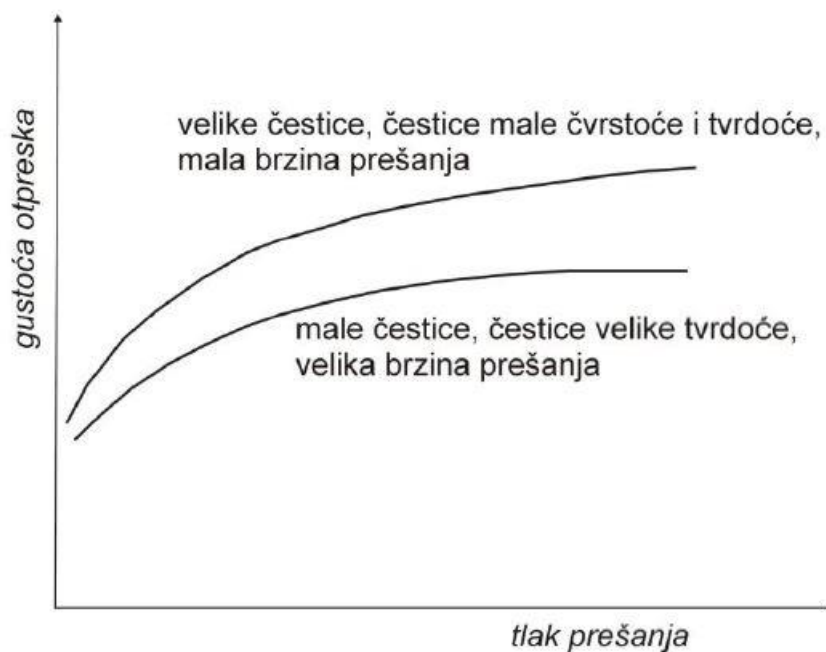
Slika 6. Shematski prikaz postupka jednoosnoga kompaktiranja u kalupu [1]



Slika 7. Čestice praha nakon punjenja kalupa i nakon kompaktiranja [1]

Da bi mogli detaljnije razumjeti proces kompaktiranja nužno je pratiti parametar ovisnosti gustoće otpreska o tlaku prešanja. Rastom tlaka prešanja povećava se i gustoća otpreska jer dolazi do veće interakcije među samim česticama praha. Prema tome, ukoliko se u proizvodnji koriste krupnije čestice prahova, dobivaju se i veće gustoće otpresaka nego pri korištenju manjih čestica prahova.

Karakteristične krivulje ovisnosti gustoće otpreska i tlaka prešanja u ovisnosti o veličini čestica, brzini prešanja, te tvrdoći i čvrstoći čestica prikazane su na slici 8. Još jedna bitna komponenta kvalitete otpreska je i njegova poroznost koja direktno ovisi o intenzitetu odvijanja procesa pakiranja, deformaciji i krah u čestica prilikom komprimiranja [1].



Slika 8. Ovisnost gustoće otpreska o tlaku prešanja [1]

### 1.1.3. Sinteriranje

Sinteriranje ili srašćivanje je postupak toplinske obrade praha, na temperaturi nižoj od temperature taljenja glavnog konstituenta mješavine praha, prilikom koje dolazi do međusobnog povezivanja čestica praha, te se poboljšavaju fizikalna svojstva otpreska, odnosno nastaje čvrsti proizvod. Prilikom sinteriranja dolazi do promjene mikrostrukture otpreska jer se mijenja veličina i raspodjela kontaktnih površina među česticama, a samim time i do promijenjene poroznosti otpreska. Fizikalne pojave bez kojih sinteriranje ne bi bilo moguće su adhezija i promjena oblika čestica. Adhezija omogućuje da se površine čestica praha međusobno zavare, dok je promjenom oblika omogućeno zgušavanje čestica praha i smanjivanje udjela pora. Neki od parametara koji utječu na sinteriranje i svojstva krajnjeg proizvoda su temperatura i vrijeme, zaštitna atmosfera, brzina zagrijavanja i hlađenja, geometrijska struktura čestica praha, sastav smjese praha i količina nečistoća. Razlikuju se sinteriranje u čvrstoj fazi i sinteriranje u prisutnosti tekuće faze [1].

Sinteriranje u čvrstoj fazi znači da je pri temperaturi sinteriranja metalni prah u potpunosti zgusnut u čvrstom stanju, dok su kod sinteriranja u prisutnosti tekuće faze temperature više od temperatura tališta nekog konstituenta u smjesi pa dolazi do pojave tekuće faze. Danas je sinteriranje u prisutnosti tekuće faze postupak koji se najviše koristi zbog svoje brzine odvijanja procesa difuzije (utjecaj tekuće faze) i zbog toga što dolazi do potpunog zgušnjavanja bez potrebe za upotrebom vanjskog tlaka. Na slici 9 prikazane su faze zgušnjavanja tijekom sinteriranja u tekućoj fazi čija je karakteristika i smanjenje ukupne površine i povećanje čvrstoće otpreska. Parametri koji najviše utječu na proces sinteriranja su temperatura, vrijeme i atmosfera u peći. Najveći utjecaj ima temperatura sinteriranja, ali je za kvalitetan konačni proizvod bitna kombinacija sva 3 parametra [1].



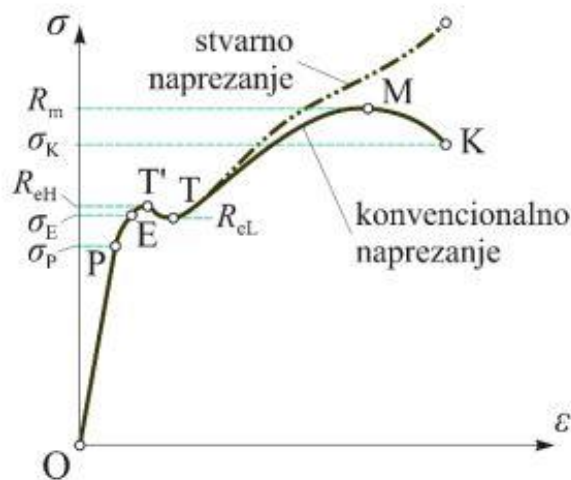
**Slika 9. Faze zgušnjavanja prilikom sinteriranja u tekućoj fazi [1]**

Sinterirani čelik koji će biti proučavan u ovom radu je Astaloy Mo+0,2C, gustoće  $6,5 \text{ g/cm}^3$ , dobiven iz smjese praha koja sadrži 1,5% molibdena te 0,2% do 0,6% ugljika. Molibden se dodaje kako bi se mogli koristiti veći tlakovi pri kompaktiranju, te radi bolje homogenizacije smjese. Ugljik se dodaje radi postizanja boljih svojstava tvrdoće. Ovakva smjesa dobiva se tehnikom atomiziranja vodom, koja je ujedno i najekonomičnija tehnika dobivanja metalnih prahova, te ju odlikuje vrlo visoka čistoća. Prah se kompaktira 30 minuta konvencionalnom i toplom tehnikom na temperaturi približno  $1120^\circ\text{C}$ . Sam dobiveni proizvod nakon kompaktiranja i sinteriranja odlikuje se jako dobrom kvalitetom površine, te zahtjeva minimalnu ili gotovo nikakvu naknadnu obradu površine.

## 2. KONSTITUTIVNI MATERIJALNI MODEL

### 2.1. Stvarno i inženjersko naprezanje

Pri analizi rezultata i računanju s dobivenim rezultatima važno je biti upoznat s razlikom između inženjerskog i stvarnog naprezanja. Tako je na slici 10 prikazan dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji, te karakteristične krivulje stvarnog naprezanja i inženjerskog (konvencionalno naprezanje) za niskouglični čelik s izraženom granicom tečenja. Stvarno i inženjersko naprezanje se razlikuju u površini poprečnog presjeka s kojom se dijeli sila. Površina poprečnog presjeka je kod inženjerskog naprezanja konstantna i jednaka početnoj  $A_0$ , dok se kod stvarnog naprezanja površina smanjuje s istezanjem epruvete i formiranjem vrata te se označava kao  $A$ . Ovakvi dijagrami dobivaju se razvlačenjem testne epruvete standardiziranih dimenzija na jednoosnoj kidalici, te na njima možemo prepoznati nekoliko karakterističnih točaka koje su bitne pri daljnjoj analizi rezultata.

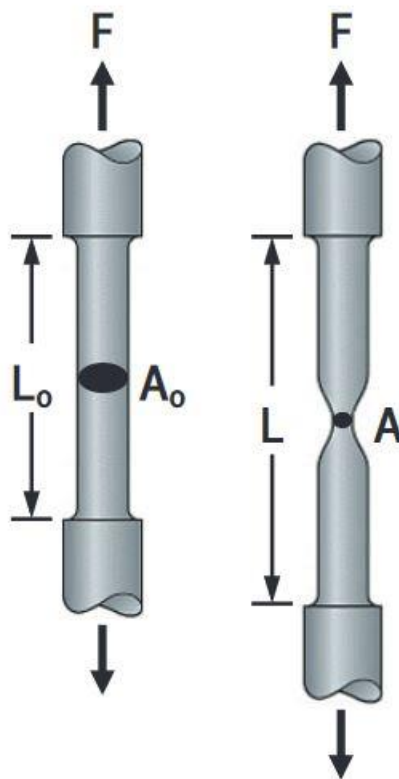


Slika 10. Dijagram naprezanje deformacija [6]

Od točke O do točke P (granica proporcionalnosti) nalazi se linearno-elastično područje na kojem vrijedi Hookeov zakon za jednoosno stanje naprezanja. Točka E predstavlja granicu elastičnosti, a to znači da će se svaka deformacija do te točke biti povratna. Nakon točke E dolazi do pojave plastične deformacije, te se u slučaju rasterećenja komad neće vratiti u prvobitno stanje. Nakon granice elastičnosti materijal se počinje ponašati plastično te naprezanje raste do točke T' (gornja granica razvlačenja). Potom vrijednost deformacije od točke T' do točke T (donja granica razvlačenja) raste bez povećanja naprezanja, odnosno uz pad vrijednosti naprezanja. Iznos

konvencionalnog naprezanja od točke T do točke M raste, a točka M je vlačna čvrstoća materijala te se u njoj nalazi najviši iznos inženjerskog naprezanja. To je ujedno i točka u kojoj dolazi do inicijacije oštećenja u materijalu. Točka K je točka pucanja.

Na slici 11 prikazano je deformiranje i stvaranje vrata epruvete.



Slika 11. Deformacija i poprečni presjeci epruvete [7]

Prema tome izrazi za stvarno naprezanje i deformaciju glase:

$$\sigma_t = \frac{F}{A}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L}, \quad (2)$$

dok izrazi za inženjersko naprezanje i deformaciju glase:



$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_t = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (4)$$

## 2.2. Linearno elastični materijalni model

Linearno elastično ponašanje materijala opisano je Hookeovim zakonom:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (5)$$

u kojem  $D_{ijkl}$  predstavlja tenzor elastičnosti (tenzor četvrtog reda), dok su naprezanje  $\sigma_{ij}$  i elastična deformacija  $\varepsilon_{kl}^e$  tenzori drugog reda. Tenzor elastičnosti materijala koji imaju jednaka svojstva bez obzira na smjer je simetričan (izotropni materijali), te se može prikazati pomoću dvije nezavisne konstante, i to modulom elastičnosti  $E$  i modulom smicanja  $G$  koje su međusobno povezane Poissonovim faktorom  $\nu$ . Njihova međusobna veza glasi:

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu). \quad (6)$$

Tenzor elastičnosti glasi:

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (7)$$

gdje su  $\lambda$  i  $\mu$  Laméove konstante, a  $\delta_{ij}$  Kroneckerov simbol. Prva Laméova konstanta je  $\lambda$  i glasi:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (8)$$

dok druga Laméova konstanta glasi:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (9)$$

Za Kroneckerov simbol vrijedi:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (10)$$

Tenzor naprezanja može se rastaviti na sferni i devijatorski dio:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + S_{ij}, \quad (11)$$

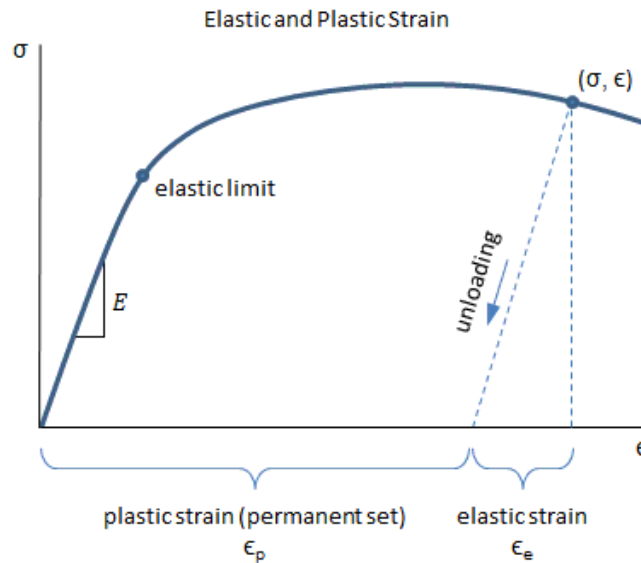
gdje je sferni dio tenzora:

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = p. \quad (12)$$

Sferni dio tenzora naprezanja utječe na promjenu volumena tijela, dok devijatorski dio mijenja oblik tijela, a volumen ostaje stalan.

### 2.3. Elastoplastični materijalni model

Kod elastoplastičnog ponašanja materijala dolazi do trajne deformacije materijala, odnosno plastične deformacije. Plastična deformacija je ireverzibilna, te će u slučaju rasterećenja materijala ona i dalje ostati postojana. Na slici 12 prikazan je jednoosni vlačni test i dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji, te su posebno naznačene elastična (elastic strain) i plastična deformacija (plastic strain). Na slici 12 također je prikazana i granica tečenja materijala (elastic limit) koju, za ovaj slučaj, nije jednoznačno odrediti. Naime, kod materijala kod kojih je prijelaz između elastičnog (linearnog) ponašanja materijala i plastičnog (nelinearnog) ponašanja materijala nejasan, granica tečenja se određuje na onom mjestu kada je plastična deformacija jednaka nekom dogovorenom postotku ukupne deformacije. Za čelike ta granica najčešće iznosi iznosi 0,2%.



Slika 12. Elastična i plastična deformacija [8]

Ukupna deformacija je sastavljena od elastične i plastične komponente deformacije:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (13)$$

pa prema tome izraz (5) postaje:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p), \quad (14)$$

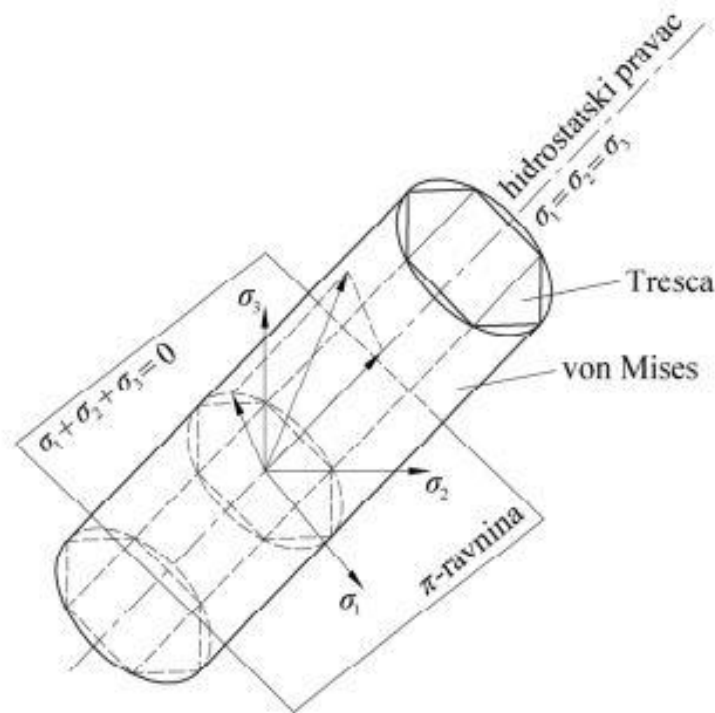
Plastična komponenta napreznja i deformacije javlja se tek kada napreznje prijeđe vrijednost granice tečenja materijala. Očvršćenje materijala, odnosno pojava plastične deformacije se opisuje funkcijom tečenja, koja ovisi o napreznju  $\sigma_{ij}$ , plastičnoj deformaciji  $\varepsilon_{ij}^p$  i parametru očvršćenja  $\kappa$ , te glasi:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = 0. \quad (15)$$

Ukoliko materijal nije ušao u plastično područje, odnosno i dalje se nalazi u elastičnom području onda vrijedi  $f < 0$ . Ukoliko je  $f = 0$ , materijal se nalazi na samoj plohi tečenja, te se nalazi na prijelazu iz elastičnog u plastično područje. Za slučaj kada je  $f > 0$  materijal se nalazi van plohe tečenja [9].

## 2.4. Granica tečenja materijala

Na slici 13 plohe tečenja prema Tresci i Von Misesu prikazane su u trodimenzionalnom prostoru naprezanja.



Slika 13. Plohe tečenja po von Misesu (cilindar) i Tresci (pravilna šesterostrana prizma) [10]

Hidrostatski pravac je pravac u kojem su sva tri glavna naprezanja jednaka  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Ravnina koja je okomita na taj pravac i prolazi ishodištem naziva se  $\pi$  ravnina, te ima jednadžbu:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (16)$$

$\pi$  ravnina i sve njoj paralelne ravnine su devijatorske ravnine. Ploha tečenja i  $\pi$  ravnina sijeku se u krivulji tečenja. Prema (Slika 13) također se vidi da se vektor stanja naprezanja rastavlja na sferni i devijatorski dio. Sferni je paralelan hidrostatskom pravcu, dok je devijarski okomit na njega. Prema ovakvom prikazu tečenje materijala nastupa za stanja naprezanja koja se nalaze izvan ploha tečenja pa bi da bi se zadovoljila funkcija tečenja potrebno uvesti pojam očvršćenja materijala.

## 2.5. Zakoni očvršćenja

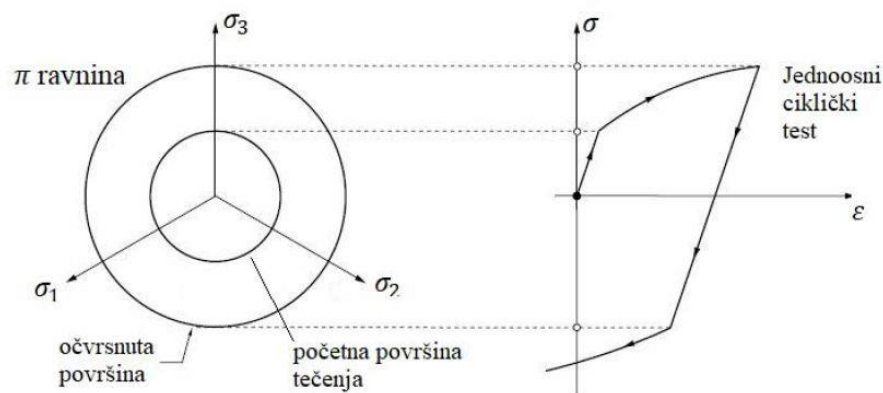
U ovom dijelu opisan je pojam očvršćenja materijala. U matematičkom smislu očvršćenje materijala označava promjenu središta plohe tečenja, promjenu veličine plohe tečenja ili oboje. Modeli plastičnog očvršćenja mogu se podijeliti na:

- izotropno očvršćenje,
- kinematičko očvršćenje,
- kombinirano očvršćenje [9].

Prva dva zakona očvršćenja bit će detaljnije objašnjena u daljnjem tekstu, dok je kombinirano očvršćenje samo kombinacija prva dva, te nisu potrebna dodatna pojašnjenja.

### 2.5.1. Izotropno očvršćenje

Model izotropnog očvršćenja polazi od pretpostavke da su svojstva materijala jednaka u svim smjerovima (izotropan materijal), te da se širenje krivulje tečenja odvija ekvivalentno u svim smjerovima na plohi tečenja (ploha tečenja ostaje istog oblika). Prema [11] izotropno očvršćenje odvija se tako da se povećanjem plastične deformacije povećava i granica tečenja. Za Von Misesovu funkciju tečenja to povećanje granice tečenja se manifestira na dijagramu izotropnog očvršćenja kao povećanje promjera von Missesovog cilindra (Slika 14).



Slika 14. Izotropno očvršćenje [11]

Nadalje granica tečenja kod izotropnog modela očvršćenja definira se kao:

$$\sigma_y = \sigma_y(\varepsilon^p). \quad (17)$$

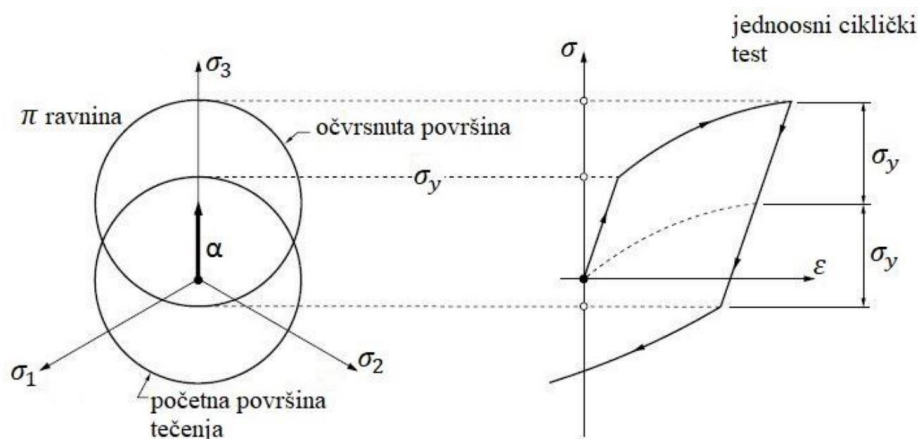
Za ovaj rad je bitan model plastičnog opterećenja koji se koristi u programskom paketu Abaqus, odnosno u korištenim rutinama, a on je baziran na [12], te glasi:

$$\sigma_y(\varepsilon_{ekv}^p) = \sigma_y^0 + Q_\infty \left(1 - e^{-b\varepsilon_{ekv}^p}\right), \quad (18)$$

gdje  $\sigma_y^0$  predstavlja inicijalnu granicu tečenja kada je ekvivalentna plastična deformacija jednaka nuli.  $Q_\infty$  i  $b$  su materijalni parametri koji se određuju pomoću eksperimentalnih ispitivanja.  $Q_\infty$  predstavlja maksimalni iznos promjene granice tečenja, dok parametar  $b$  označava promjenu  $Q_\infty$  ovisno o promjeni ekvivalentne plastične deformacije  $\varepsilon_{ekv}^p$  [9]. Vrijednosti za oba parametra koje se koriste dalje u ovom radu određene su i validirane u [13].

### 2.5.2. Kinematičko očvršćenje

Model kinematičkog očvršćenja razlikuje se od izotropnog modela po tome što kod njega nema promjene veličine plohe tečenja, već dolazi do translacije same plohe tečenja u prostoru glavnih napreznja. Ta translacija za posljedicu ima očvršćenje i rast granice tečenja u jednom smjeru opterećenja, ali recipročno i smanjenje u suprotnom smjeru. Taj efekt se naziva Bauschingerov efekt [11]. Na slici 15 prikazano je kinematičko očvršćenje na dijagramu ovisnosti napreznja i deformacije, te promjena granice tečenja u  $\pi$  ravnini.



Slika 15. Kinematičko očvršćenje [11]

Model kinematičkog očvršćenja opisuje gibanje središta elastične zone, te je izraženo preko tenzora povratnog napreznja (backstress tensor) koji se računa prema Chabocheovom nelinearnom modelu kinematičkog očvršćenja koji prema [14] glasi:

$$\alpha_k = \frac{C_k}{\gamma_k} (1 - e^{-\gamma_k \epsilon_{ekv}^p}), \quad (19)$$

gdje  $C_k$  označava inicijalni kinematički modul očvršćenja, a  $\gamma_k$  definira omjer opadanja kinematičkog očvršćenja s povećanjem ekvivalentne plastične deformacije [14] [9]. Navedeni parametri korišteni su u ovom radu, a preuzeti su iz [13].

## 3. MODELIRANJE OŠTEĆENJA METODOM FAZNOG POLJA

### 3.1. Mehanika loma

U današnje vrijeme modernih proračuna, analiza konstrukcija i strojnih komponenata izrazito je važna pouzdanost proizvedenih komponenti te otpornost na lom. Lom konstrukcijskih komponenti uzročnik je velikih materijalnih i financijskih gubitaka, probijanja rokova isporuke, nastanka havarija i prirodnih katastrofa ili u najtežem obliku gubitka ljudskih života. Stoga je mehanika loma, koja proučava razloge nastajanja pukotina, njihov razvoj i širenje, te u konačnici potpuni lom, jako bitna grana moderne znanosti.

Klasična mehanika loma bazirala se na određivanju koeficijenta intenzivnosti naprezanja, koji definiraju najveću dopuštenu duljinu pukotine koja može postojati u materijalu, a da ona ne uzrokuje lom [15]. Materijal bi se nerazornim metodama ispitivanja provjeravao na postojanje pukotina koje bi potencijalno mogle uzrokovati katastrofalni lom. Osnovna podjela mehanike loma je na dva dijela:

- linearno-elastična mehanika loma – Linear Elastic Fracture Mechanics LEFM,
- elasto-plastična mehanika loma – Post Yield Fracture Mechanics PYFM.

Do loma u linearno-elastičnoj mehanici loma dolazi dok još nema vidljive deformacije materijala, te dok još uvijek ne postoje plastične deformacije u materijalu. U svojoj osnovi linearno-elastična mehanika loma bavi se krhkim materijalima. Elasto-plastična mehanika loma bavi se materijalima u kojima prije loma dolazi do pojave plastičnosti u materijalu koja uzrokuje pojavu pukotina i konačno lom materijala. Kod linearno-elastične mehanike loma Griffithova energijska metoda je temelj na koji se naslanja i ovaj rad. Prema [16] pukotina se može inicirati ili propagirati samo ako njeno formiranje ili rast u čvrstom tijelu kao posljedicu ima konfiguraciju s nižom ukupnom energijom od konfiguracije u kojoj nema iniciranja ili propagacije pukotine.

U numeričkim metodama modeliranja oštećenja i loma razlikuju se diskretne i difuzne (tj. kontinuumske) metode. Kod diskretnih metoda pukotine se opisuju kao oštar geometrijski diskontinuitet u polju pomaka. Pri radu s konačnom mrežom elemenata pukotine propagiraju samo duž ruba elemenata. Ta karakteristika za posljedicu ima ovisnost o broju konačnih elemenata te je



smjer rasta pukotine ovisan o usmjerenosti konačnih elemenata. Kod kontinuumskih metoda uvodi se parametar oštećenja na razini integracijskih točaka konačnih elemenata.

### 3.2. Parametar lomne žilavosti $G_c$

Lomna žilavost predstavlja mjeru otpora materijala na širenje pukotine. Naime parametar lomne žilavosti  $G_c$  označava potrebnu energiju da bi se u materijalu stvorile nove površine tj. pukotine. Što je veći iznos  $G_c$ , to je materijal otporniji na inicijaciju i širenje pukotina, kao što je primjerice duktilni materijal poput bakra koji ima izrazito visok  $G_c$ . Suprotno tome niski iznos parametra lomne žilavosti označava lak nastanak i brzu propagaciju pukotine, a jedan od najekstremnijih primjera je staklo.

### 3.3. Teorija faznog polja (*phase-field modelling*)

Teorija faznog polja (*phase-field modelling*) matematički je model za opisivanje međufaznih problema. Za opisivanje prijelaza između dva stanja teorija faznog pomaka uvodi kontinuiranu varijablu čijim se glatkim prijelazom razlikuju faze unutar materijala. U mehanici loma koristi se za opisivanje oštećenja materijala gdje se jedna faza odnosi na cjeloviti materijal, a druga na pukotinu. Naime teorijom faznog polja uveden je dodatni skalarni phase-field parametar koji predstavlja razinu oštećenja materijala  $\Phi$ . Parametar  $\Phi$  poprima vrijednost 1 za slučaj pukotine, a vrijednost 0 za neoštećeni materijal. Teorija faznog polja ne temelji se na diskretnom opisu pukotine, već na kontinuumskom modelu pa je oštećenje raspoređeno preko određenog volumena. Na taj način je moguće pratiti inicijaciju, propagaciju i srastanje pukotina sve do loma. Modeliranje pukotina i loma teorijom faznog polja proizlazi iz Griffithove teorije loma prilagođene u problem minimizacije energije. Smjer rasta pukotine automatski se definira kao onaj koji vodi ka konfiguraciji s najnižom ukupnom energijom. U daljnjem tijeku procesa opterećivanja pukotine se mogu dalje granati ili spajati ukoliko to vodi ka daljnjem snižavanju ukupne energije. Nadalje će biti prikazane konstitutivne jednadžbe koje služe za modeliranje krhkog, duktilnog i zamornog loma [17], [18].

#### 3.3.1. Poopćeni model loma metodom faznog polja

Osnovna jednadžba teorije faznog polja za modeliranje loma je:

$$\Psi = \Psi^b + \Psi^s = \int_{\Omega/\Gamma} (\psi_e(\varepsilon^e) + \psi_p(\varepsilon^p)) d\Omega + \int_{\Gamma} G_c d\Gamma, \quad (20)$$

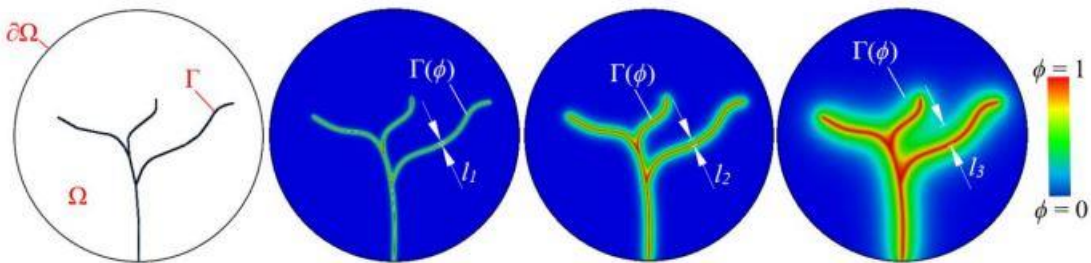
gdje  $\Psi^b$  predstavlja ukupnu energiju deformiranja akumuliranu u  $n$ -dimenzijskom tijelu  $\Omega$  s pukotinom  $\Gamma(t)$ , a  $\Psi^s$  označava disipacijsku energiju loma i odnosi se na pukotinu. Ukupna energija deformiranja je, kao i ukupna deformacija iz jednadžbe (13), sastavljena od dviju komponenti, elastične ( $\psi_e$ ) i plastične ( $\psi_p$ ) energije deformiranja. Nakon regularizacije pukotine preko cijelog volumena površina pukotine kao nepoznanica iščezava pa jednadžba (20) sada glasi:

$$\Psi(\varepsilon^e, \varepsilon^p, \phi, \bar{\psi}) = \int_{\Omega} \{g(\phi)[\psi_e^+(\varepsilon^e) + \psi_p(\varepsilon^p)] + \psi_e^-(\varepsilon^e)\} d\Omega + \psi_c \int_{\Omega} [2\phi + l^2 |\nabla\phi|^2] d\Omega. \quad (21)$$

U jednadžbi (21) je diskretna površina pukotine  $\Gamma(t)$  zamijenjena funkcijom gustoće površine pukotine  $\gamma(\phi, \nabla\phi)$  izraženom preko phase-field parametra. Gustoća površine pukotine definirana je kao:

$$\gamma(\phi, \nabla\phi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l} \phi^2 + l |\nabla\phi|^2 \right], \quad (22)$$

gdje je  $l$  parametar duljinske skale i preko njega je određena širina difuzivne zone oko pukotine. Primjer izgleda pukotine i difuzivne zone oko pukotine u ovisnosti o vrijednosti parametra duljinske skale  $l$  prikazan je na slici 16.



**Slika 16. Prikaz pukotine i difuzivne zone oko pukotine upotrebom metode faznog pomaka u ovisnosti o parametru  $l$  [19]**

Također je u jednadžbi (21) u prvi član dodana degradacijska funkcija  $g(\phi)$  kako bi umanjila ukupnu energiju deformiranja  $\Psi^b$  uslijed pojave i propagacije pukotine. Najčešće korištena degradacijska funkcija je kvadratnog oblika te je kao takva korištena i u ovom radu:

$$g(\phi) = (1 - \phi)^2. \quad (23)$$

Pošto do razvoja i propagacije pukotine može doći samo u vlačnom stanju naprezanja koje pospješuje inicijaciju i rast pukotine, a ne u tlačnom stanju naprezanja koje zatvara pukotine, u jednadžbi (21) je primijenjena i sferno-devijatorska dekompozicija elastične energije. Sferno-devijatorska dekompozicija:

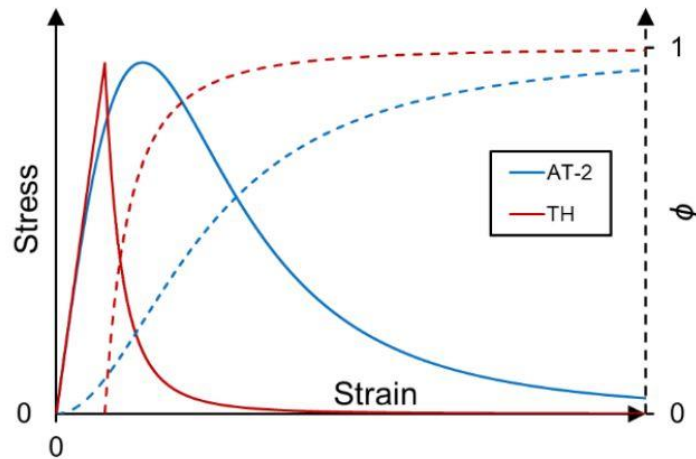
$$\psi_e^+ := \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{2\mu}{n} \right) \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_+^2 + \mu (\varepsilon_{\text{dev}} : \varepsilon_{\text{dev}}), \quad \psi_e^- := \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{2\mu}{n} \right) \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_-^2, \quad (24)$$

gdje  $\lambda$  i  $\mu$  označavaju Lameove materijalne konstante, a  $\langle \cdot \rangle$  Macaulayovu zagradu.

Regularizirani funkcional koji koristi jednadžbe (22) i (23) je takozvani “AT-2“ model prema autorima Ambrosio-Tortorelli. Ovaj model korišten je u jednom dijelu ovog rada, ali kao što će biti i prikazano, njegova mana je ta da razvoj parametra faznog polja  $\phi$  kreće od trenutka kada je nametnuto opterećenje na materijal.

$$\Psi(\varepsilon, \phi) = \int_{\Omega} \{g(\phi)[\psi_e^+(\varepsilon^e) + \psi_p(\varepsilon^p)] + \psi_e^-(\varepsilon^e)\} d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(\phi, \nabla\phi) d\Omega. \quad (25)$$

Drugi model koji će biti korišten kroz ovaj rad je threshold model ili “TH“ koji je jako sličan AT-1 modelu i već je prikazan na jednadžbi (21). Ono što karakterizira ovaj model je  $\psi_c$ , odnosno konstantna specifična energija loma koja sprječava nastanak oštećenja. Na slici 17 prikazana je dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji i parametra faznog polja o deformaciji za oba korištena modela.



Slika 17. Razlika između AT-2 i TH modela [19]

Nadalje, da bi se spriječilo zatvaranje pukotina ili smanjenje parametra oštećenja uvodi se i parametar povijesti deformiranja  $H(t)$  koji preko funkcije stanja  $\tilde{D}$  određuje da li će doći do nastanka i rasta pukotine. Osim toga, parametar povijesti deformiranja osigurava da parametar faznog polja  $\phi$  ne može opadati.

Inicijacija i propagacija oštećenja i loma u potpunosti su opisane jednadžbama:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0 \text{ u } \Omega, \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ na } \partial\Omega_{\bar{\mathbf{t}}}, \quad (27)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ na } \partial\Omega_{\bar{\mathbf{u}}}, \quad (28)$$

$$-l^2 \Delta \phi + [1 + \tilde{D}] \phi = \tilde{D} \text{ u } \Omega, \quad (29)$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega. \quad (30)$$

U jednadžbama (26)-(30) jake forme  $\bar{\mathbf{b}}$  i  $\bar{\mathbf{t}}$  su vanjske površinske i volumenske sile,  $\mathbf{u}$  je polje pomaka,  $\mathbf{n}$  je vektor normale, a  $\partial\Omega$  predstavlja površinu tijela. Model očvršćenja temeljen je na modelima prethodno opisanim u 2.5.1. i 2.5.2. Plastični model je opisan jednadžbama:

$$\psi^p(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \int_0^t (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\alpha}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*}, \quad (31)$$

$$F = \|\text{dev} [\boldsymbol{\sigma}^*] - \boldsymbol{\alpha}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y(\varepsilon_{\text{ekv}}^{\text{p}}) \leq 0, \quad \varepsilon_{\text{ekv}}^{\text{p}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}}, \quad (32)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_k = C_k \frac{1}{\sigma_y(\varepsilon_{\text{ekv}}^{\text{p}})} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\alpha}) \dot{\varepsilon}_{\text{ekv}}^{\text{p}} - \gamma_k \boldsymbol{\alpha}_i \dot{\varepsilon}_{\text{ekv}}^{\text{p}}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \sum_k \boldsymbol{\alpha}_k, \quad (33)$$

$$\sigma_y(\varepsilon_{\text{ekv}}^{\text{p}}) = \sigma_y^0 + Q_\infty (1 - \exp[-b \varepsilon_{\text{ekv}}^{\text{p}}]), \quad (34)$$

gdje  $\boldsymbol{\sigma}^*$  predstavlja nedegradirani tenzor naprezanja,  $\boldsymbol{\alpha}$  je tenzor povratnog naprezanja (eng. *backstress*), a svaka komponenta tenzora povratnog naprezanja  $\boldsymbol{\alpha}_k$  određena je preko materijalnih parametara  $C_k$  i  $\gamma_k$  [19].

## 4. NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA

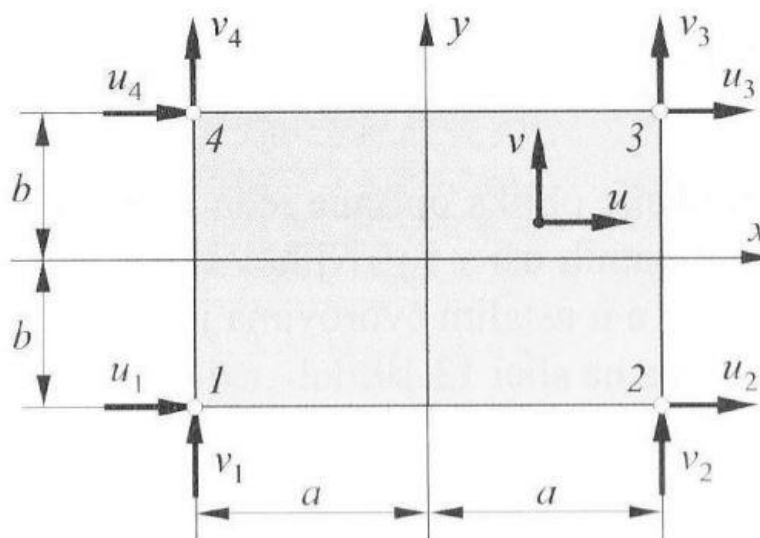
### 4.1. Metoda konačnih elemenata

Za rješavanje problema kontinuiranih sustava temeljenih na sustavima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi najčešće se koristi metoda konačnih elemenata. Metoda konačnih elemenata diskretizira kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja na konačan broj međusobno povezanih područja s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Ta područja nazivaju se konačni elementi i oni su po svojoj konturi međusobno povezani u točkama, odnosno čvorovima. Skup svih konačnih elemenata tvori mrežu konačnih elemenata. Za opisivanje polja pomaka, naprezanja, deformacija i ostalih veličina koriste se interpolacijske funkcije karakteristične za svaki tip konačnog elementa [20].

Da bi se teorija faznog polja mogla uspješno koristiti pri analizi konstrukcijskih elemenata, ona je implementirana u formulaciju metode konačnih elemenata, i to preko 2D četverokutnog konačnog elementa za analizu ravninskog stanja deformacija. Dodatni stupanj slobode  $\Phi$  za interpolaciju koristi iste funkcije oblika kao i polje pomaka  $\mathbf{u}$ .

#### 4.1.1. Osnovni pravokutni konačni element

Osnovni pravokutni konačni element sastoji se od četiri čvora u vrhovima i po dva stupnja slobode u svakom čvoru (Slika 18).



Slika 18. Osnovni pravokutni element [20]

Stupnjevi slobode osnovnog pravokutnog konačnog elementa su pomaci u smjeru koordinatnih osi  $x$  i  $y$ , a polje pomaka opisano je nepotpunim polinomima drugog stupnja:

$$\mathbf{v}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4], \quad (35)$$

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy, \\ v &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy, \end{aligned} \quad (36)$$

što u matričnom zapisu izgleda na sljedeći način:

$$\mathbf{u} = \alpha_u \mathbf{a}, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Rubni uvjeti definiraju se prema slici 18 te nakon njihovog uvrštavanja u (38) dobije se:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

odnosno:

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{a}. \quad (40)$$

Uvrštavanjem izraza (37) u (40) dobiva se veza između vektora stupnjeva slobode  $\mathbf{v}$  i polja pomaka  $\mathbf{u}$ .

$$\mathbf{u} = \alpha_u \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}, \quad (41)$$

gdje  $\alpha_u \mathbf{C}^{-1}$  definira matricu funkcije oblika  $\mathbf{N}$  koja glasi:

$$\mathbf{N} = \alpha_u \mathbf{C}^{-1}, \quad (42)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

$N_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) su funkcije oblika za pripadajuće čvorove. Jednadžbe funkcija oblika su jednodimenzijski linearni polinomi u pravcu lokalnog koordinatnog sustava te ovise o geometriji konačnog elementa. U čvoru na koji se odnose njihov iznos jednak je jedinici, a u ostalim čvorovima iznos im je jednak nuli.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ N_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ N_3 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ N_4 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \quad (44)$$

Deriviranjem funkcija oblika dobiva se matrica međusobne ovisnosti deformacija u elementu i pomaka u čvorovima  $\mathbf{B}$ . Deriviranje se provodi korištenjem kinematičkog diferencijalnog operatora  $\mathbf{D}_k$  koji za ravninsko stanje naprezanja i deformacija glasi:

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}, \quad (45)$$

pa se prema tome matrica  $\mathbf{B}$  definira kao:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (46)$$



Raspodjela deformacija po konačnom elementu definirana je kao:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (47)$$

te se sastoji od tri komponente deformacije:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]. \quad (48)$$

Prema tome matrica krutosti osnovnog pravokutnog konačnog elementa glasi:

$$\mathbf{k} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy. \quad (49)$$

Naprezanje se računa prema:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (50)$$

gdje matrica  $\mathbf{D}$  označava matricu elastičnosti za ravninsko stanje naprezanja za element korišten u ovom radu:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Kroz ovaj rad pri kreaciji mreže konačnih elemenata u programskom paketu Abaqus korišteni su pravokutni konačni elementi za opisivanje ravninskog stanja deformacija CPE4. Također su isti elementi korišteni i pri proračunu u rutinama, ali će to detaljnije biti objašnjeno kroz naredna poglavlja.

## 4.2. Implementacija teorije faznog polja u MKE

### 4.2.1. Diskretizacija

Za implementaciju predstavljenog modela faznog polja u metodu konačnih elemenata  $n$ -dimenzijsko tijelo  $\Omega$  diskretizira se konačnim elementima koji se sastoje od više stupnjeva slobode u obliku vektora pomaka  $\mathbf{v}_i^T = [u_i \quad v_i]$  i parametra faznog polja  $\phi_i$ . Indeks  $i$  označava broj čvora. Interpolacijske funkcije parametra faznog polja iste su kao i za polje pomaka:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_i^n \mathbf{N}_i^v \mathbf{v}_i, & \boldsymbol{\varepsilon} &= \sum_i^n \mathbf{B}_i^v \mathbf{v}_i, \\ \phi &= \sum_i^n N_i \phi_i, & \nabla \phi &= \sum_i^n \mathbf{B}_i^\phi \phi_i, \end{aligned} \quad (52)$$

gdje  $n$  predstavlja broj čvorova u elementu. Matrica funkcije oblika  $\mathbf{N}$  prikazana je u jednadžbama (43) i (44), a matrica  $\mathbf{B}$  u jednadžbi (46). Matrica  $\mathbf{B}$  parametra faznog polje glasi:

$$\mathbf{B}_i^\phi = \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix}. \quad (53)$$

#### 4.2.2. Slaba forma

Model konačnih elemenata za metodu faznog polja temelji se na jednadžbama slabe forme potencijala unutarnje energije koji glasi:

$$\delta\Psi = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \frac{dg(\phi)}{d\phi} (\psi_e^+ + \psi_p) + G_c \frac{\partial\gamma(\phi, \nabla\phi)}{\partial\phi} \right\} \delta\phi d\Omega = \delta W^{\text{int}}, \quad (54)$$

za općeniti model oštećenja faznog polja. Uvrštavanjem pripadajućih funkcija  $g(\phi)$  i  $\gamma(\phi, \nabla\phi)$  u jednadžbu (54) za pojedini model, te nakon primjene principa virtualnog rada  $\delta W^{\text{ext}} - \delta W^{\text{int}} = 0$  i diskretizacije dobiva se:

$$(\mathbf{F}_{\text{ext}}^v - \mathbf{F}_{\text{int}}^v) \delta\mathbf{v} + (\mathbf{F}_{\text{ext}}^\phi - \mathbf{F}_{\text{int}}^\phi) \delta\phi = 0, \quad (55)$$

gdje su vektori vanjskih sila definirani kao:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ext}}^v &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^v \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\bar{\tau}}} \mathbf{N}^v \mathbf{t} d\partial\Omega, \\ \mathbf{F}_{\text{ext}}^\phi &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Vektori unutarnjih sila definirani us kako slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{int}}^v &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^{vT} \boldsymbol{\sigma} d\Omega, \\ \mathbf{F}_{\text{int}}^\phi &= \int_{\Omega} \{ l^2 \mathbf{B}^{\phi T} \mathbf{B}^\phi \boldsymbol{\phi} + ([1 + \mathcal{H}] \mathbf{N}^\phi \boldsymbol{\phi} - \mathcal{H}) \mathbf{N}^\phi \} d\Omega, \end{aligned} \quad (57)$$

gdje  $\boldsymbol{\phi}$  označava vektor stupnjeva slobode parametara faznog polja  $\phi_i$ . Razlika između modela AT-2 i TH modela uključena je u parametar povijesti deformiranja  $\mathcal{H}$ .

Vektor rezultatnih sila se računa prema  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}$  pa on glasi:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^v &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^v \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^v \bar{\mathbf{t}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^{vT} \boldsymbol{\sigma} d\Omega, \\ \mathbf{R}^{\phi} &= - \int_{\Omega} \{l^2 \mathbf{B}^{\phi T} \mathbf{B}^{\phi} \phi + ([1 + \mathcal{H}] \mathbf{N}^{\phi} \phi - \mathcal{H}) \mathbf{N}^{\phi}\} d\Omega,\end{aligned}\tag{58}$$

a pripadajuća matrica krutosti glasi:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{vv} &= - \frac{\partial \mathbf{R}^v}{\partial \mathbf{v}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{vT} \mathbf{C} \mathbf{B}^v d\Omega, \\ \mathbf{K}^{\phi\phi} &= - \frac{\partial \mathbf{R}^{\phi}}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \int_{\Omega} \{l^2 \mathbf{B}^{\phi T} \mathbf{B}^{\phi} + [1 + \mathcal{H}] \mathbf{N}^{\phi} \mathbf{N}^{\phi}\} d\Omega.\end{aligned}\tag{59}$$

#### 4.2.3. Razdvojeni (*staggered*) algoritam

Model metode konačnih elemenata za rješavanje problema loma teorijom faznog polja može biti formuliran kao:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}_{n-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{vv} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{\phi\phi} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}^v \\ \mathbf{R}^{\phi} \end{bmatrix}.\tag{60}$$

Osnovna ideja algoritma je iterativno rješavanje rascjepkanog sustava u vremenu  $t_n$  i iteraciji  $kk$  tako da se rezultati jedne zavisne varijable dobiju koristeći rezultate dobivene u prethodnoj iteraciji  $kk-1$ . Zatim se dobiveno približno rješenje koristi za rješavanje sljedeće zavisne varijable u iteraciji  $kk$ . Algoritam rješavanja je detaljno pojašnjen u [19] i [21], a kroz ovaj rad je samo površno objašnjen. Na slici 19 prikazan je standardni *staggered* algoritam rješavanja.

```
while  $\phi_n^{kk} \not\approx \phi_n^{kk-1}$  and  $\mathbf{v}_n^{kk} \not\approx \mathbf{v}_n^{kk-1}$  :
    solve  $\phi_n^{kk}$  with  $\mathbf{v}_n^{kk-1}$ 
    solve  $\mathbf{v}_n^{kk}$  with  $\phi_n^{kk}$ 
```

Slika 19. Standardni *staggered* algoritam rješavanja [19]

Kriterij zaustavljanja temeljen na rezidualu (RCTRL) prikazan je na slici 20, a onaj temeljen na jednoj iteraciji (SI) prikazan je na slici 21.

```

enter iteration  $kk$  at time  $t_n$ 
(with  $\phi_n^{kk-1}$  and  $\mathbf{v}_n^{kk-1}$  from iteration  $kk-1$ ):
  solve  $\phi_n^{kk}$  with  $\mathbf{v}_n^{kk-1}$ 
  solve  $\mathbf{v}_n^{kk}$  with  $\phi_n^{kk}$ 
if  $\left\| \begin{matrix} \mathbf{R}^v(\phi_n^{kk}, \mathbf{v}_n^{kk}) \\ \mathbf{R}^\phi(\phi_n^{kk}, \mathbf{v}_n^{kk}) \end{matrix} \right\| \leq \text{tol}$  continue to  $t_{n+1}$ 

```

Slika 20. Kontrola reziduala (RCTRL) *staggered* algoritam rješavanja [19]

```

enter at time  $t_n$ 
(with  $\phi_{n-1}$  and  $\mathbf{v}_{n-1}$  known):
  solve  $\phi_n$  with  $\mathbf{v}_{n-1}$ 
  solve  $\mathbf{v}_n$  with  $\phi_n$ 
  continue to  $t_{n+1}$ 

```

Slika 21. Jedno iteracijski (SI) *staggered* algoritam rješavanja [19]

### 4.3. Implementacija u ABAQUS

Da bi se RCTRL metoda mogla implementirati u softverski paket Abaqus potrebno je koristiti mrežu konačnih elemenata s tri sloja. Slojevi su sastavljeni od pripadajućih Abaqus/standard konačnih elemenata preko pripadajućih UEL i UMAT korisničkih rutina.

Podjelom na parne i neparne iteracije RCTRL algoritmu rješavanja omogućeno je da se kroz jednu iteraciju računa jedan parametar, a drugi da se drži konstantnim. Dobiveno rješenje iz prethodne iteracije zadržava se do početka sljedeće iteracije ili, ukoliko je rješenje konvergiralo, do sljedećeg inkrementa. Numeracija je postavljena na način da su parne iteracije označavane s  $k-1$ , a neparne s  $k$ . Provjera reziduala se uvijek odvija u neparnim iteracijama ( $k$ ). Prema slici 20 prvo se računa novi parametar faznog polja, različit od onog u prethodnoj iteraciji, prema:

$$\phi_n^k = \phi_n^{k-1} + \Delta\phi_n^k = \phi_n^{k-1} + \mathbf{K}^{\phi\phi}(\mathbf{v}_n^{k-2}, \phi_n^{k-1})^{-1} \cdot \mathbf{R}^\phi(\mathbf{v}_n^{k-2}, \phi_n^{k-1}), \quad (61)$$

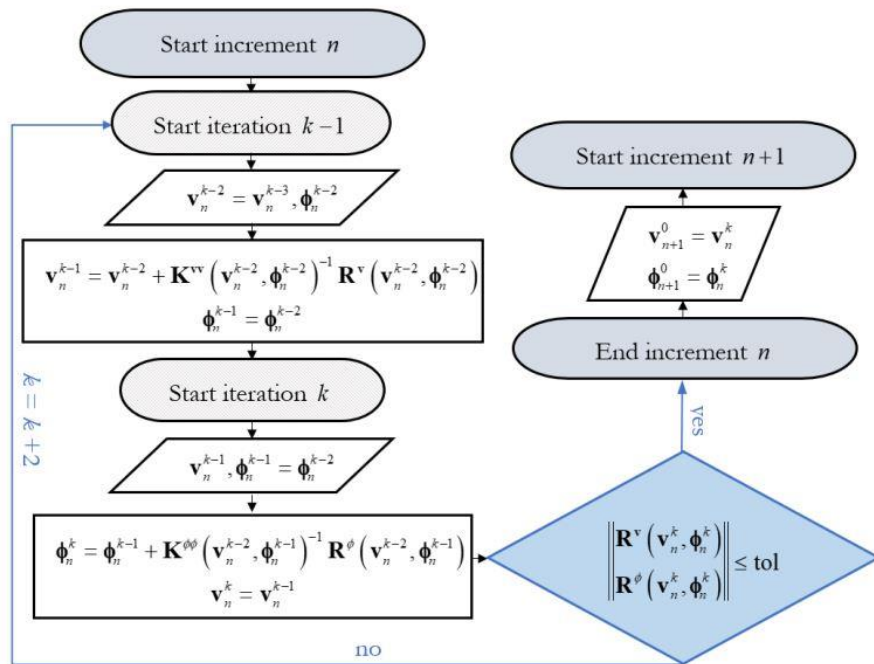
gdje je  $\boldsymbol{\phi}_n^{k-1} = \boldsymbol{\phi}_n^{k-2} + \Delta\boldsymbol{\phi}_n^{k-1} = \boldsymbol{\phi}_n^{k-2}$  jer je ostatak parametra faznog polja iz prethodne neparne iteracije postavljen na nulu. Zatim se računa polje pomaka dobiveno iz neparnih iteracija kako slijedi:

$$\mathbf{v}_n^{k+1} = \mathbf{v}_n^k + \Delta\mathbf{v}_n^{k+1} = \mathbf{v}_n^k + \mathbf{K}^{vv}(\mathbf{v}_n^k, \boldsymbol{\phi}_n^k)^{-1} \cdot \mathbf{R}^v(\mathbf{v}_n^k, \boldsymbol{\phi}_n^k), \quad (62)$$

gdje je  $\mathbf{v}_n^k = \mathbf{v}_n^{k-1}$ . Također se u neparnim iteracijama provjerava i kriterij konvergencije  $\|\mathbf{R}^{\text{total}}(\mathbf{v}_n^k, \boldsymbol{\phi}_n^k)\|$  koji se računa prema:

$$\|\mathbf{R}^{\text{total}}(\mathbf{v}_n^k, \boldsymbol{\phi}_n^k)\| = \|\mathbf{R}^v(\mathbf{v}_n^k, \boldsymbol{\phi}_n^k)\| + \|\mathbf{R}^\phi(\mathbf{v}_n^k, \boldsymbol{\phi}_n^k)\|. \quad (63)$$

Novi inkrement  $n+1$  počinje nakon što dođe do konvergencije rješenja svakog polja s posljednjim procijenjenim vrijednostima. Na slici 22 prikazan je tok RCTRL algoritma detaljnije opisanog u [19].

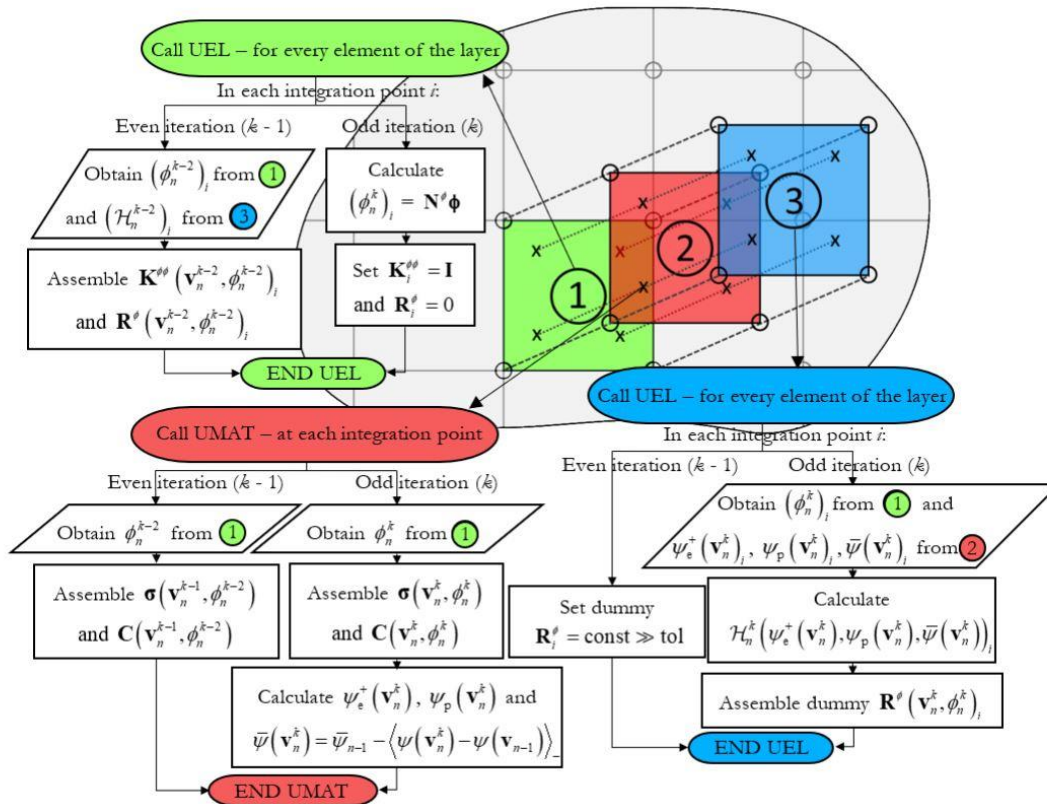


Slika 22. Tok RCTRL algoritma [19]

#### 4.3.1. Sustav s tri sloja

Da bi rješavanje svi ovih modela moglo biti moguće potrebno je bilo kreirati sustav mreže konačnih elemenata koji se sastoji od tri sloja. Slojevi su međusobno posloženi jedan iznad drugog te su

strukturirani na identičan način i zadržavaju jednaku čvornu strukturu. Proračuni u svakom od slojeva potpuno su odijeljeni jedan od drugog. Prvi sloj elemenata sačinjen je od konačnih elemenata koji se kreiraju preko UEL rutina. U prvom sloju se računa parametar faznog polja, a u neparnim iteracijama ( $k$ ) ne izračunavaju se rezidualni vektor  $\mathbf{R}^\phi$ , koji se postavlja na nulu, ni dijagonalna kvadratna matrica krutosti  $\mathbf{K}^{\phi\phi}$ . Drugi sloj sastavljen je od standardnih konačnih elemenata koji se koriste u Abaqus-u, odnosno od osnovnog pravokutnog elementa opisanog u 4.1.1., i to CPE4 elementa. U ovom sloju se izračunavaju vrijednosti polja pomaka. Budući da se radi o konačnom elementu iz Abaqus biblioteke elemenata, u njemu se računaju još brojne vrijednosti dostupne i u programskom paketu Abaqus te se preko njega vrši prikaz svih dobivenih rezultata. Izračun reziduala  $\mathbf{R}^v(\mathbf{v}_n^k, \boldsymbol{\phi}_n^k)$  odvija se u drugom sloju, dok se izračun  $\mathbf{R}^\phi(\mathbf{v}_n^{k-2}, \boldsymbol{\phi}_n^k)$  odvija u prvom sloju. Zbog toga se izračun reziduala  $\mathbf{R}^\phi(\mathbf{v}_n^k, \boldsymbol{\phi}_n^k)$  dodaje trećem sloju u neparnim iteracijama ( $k$ ) te je zbog mogućnosti provjere reziduala bitan dodatak trećeg sloja u algoritmu rješavanja. Na slici 23 prikazana je grafička reprezentacija algoritma rješavanja metode konačnih elemenata s tri sloja [19].



Slika 23. Implementacija sustava s 3 sloja elemenata u Abaqus-u [19]

Sve informacije potrebne za pokretanje analize nalaze se u dvije datoteke. Prva datoteka je tipa .for te sadrži programski kod napisan u FORTRAN-u s algoritmima vezanim uz UEL i UMAT rutine. Druga datoteka je tipa .inp te se u njoj nalazi sva geometrija, čvorne veze, rubni uvjeti, materijalni parametri i ostale postavke za provedbu analize [19].

## 5. PROVEDENA ANALIZA

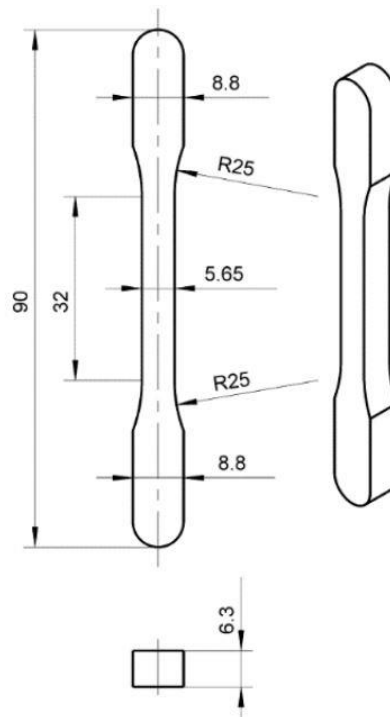
### 5.1. Uvod

Kroz sljedeća poglavlja objašnjena je sistematika provedbe računalnih simulacija u svrhu određivanja parametra lomne žilavosti materijala  $G_c$  te utjecaja gustoće diskretizacije i mikrostrukturnog parametra  $l$  na rezultate simulacija i lomnog ponašanja sinteriranog čelika. Računalne simulacije provedene su za već navedeni sinterirani čelik Astaloy Mo+0,2C gustoće  $6,5 \text{ g/cm}^3$ . Sve provedene simulacije su statičke, svi materijalni parametri preuzeti su iz [13], a svi rezultati uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima.



Slika 24. Epruveta od sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće  $6,5 \text{ g/cm}^3$

Geometrijske dimenzije epruvete su prikazane na slici 25.



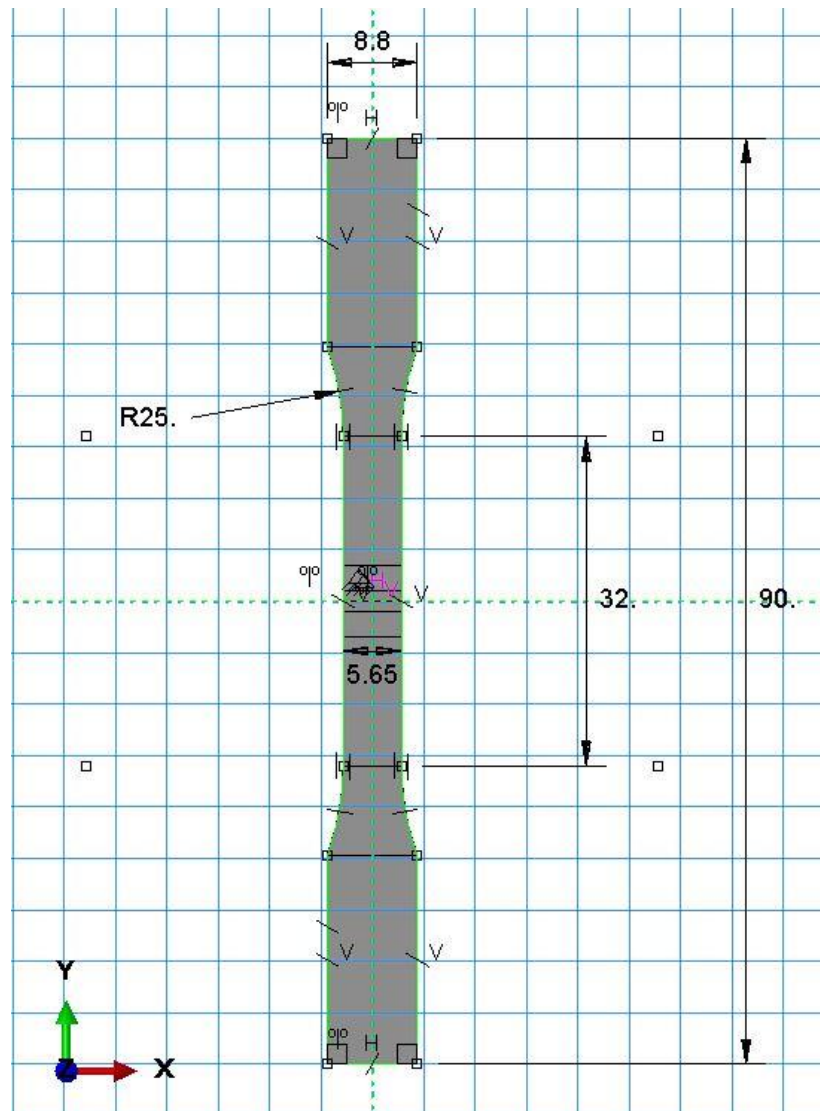
Slika 25. Dimenzije epruvete



## 5.2. Geometrija, rubni uvjeti i diskretizacija epruvete

### 5.2.1. Geometrija epruvete

U programskom paketu Abaqus geometrija epruvete je definirana prema slici 25 te je prikazana na slici 26. Prvo se u modulu *Part* odabire funkcija *Create Part*, zatim *2D Planar* te *Shell (Planar)*. Potom se definira geometrija epruvete (Slika 26).



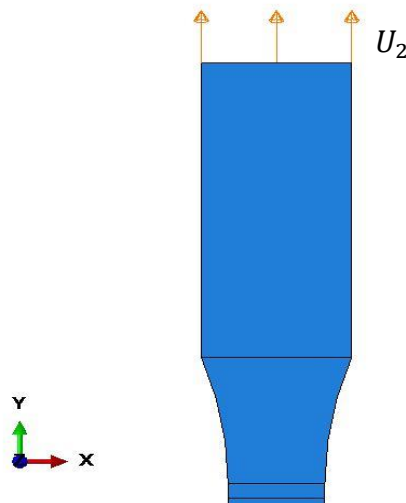
Slika 26. Geometrija epruvete

U nastavku su objašnjeni samo moduli koji su nam potrebni pri kasnijem kreiranju *input* datoteke preko koje će biti definirani ostali parametri simulacije i epruvete.

### 5.2.2. Rubni uvjeti i opterećenje

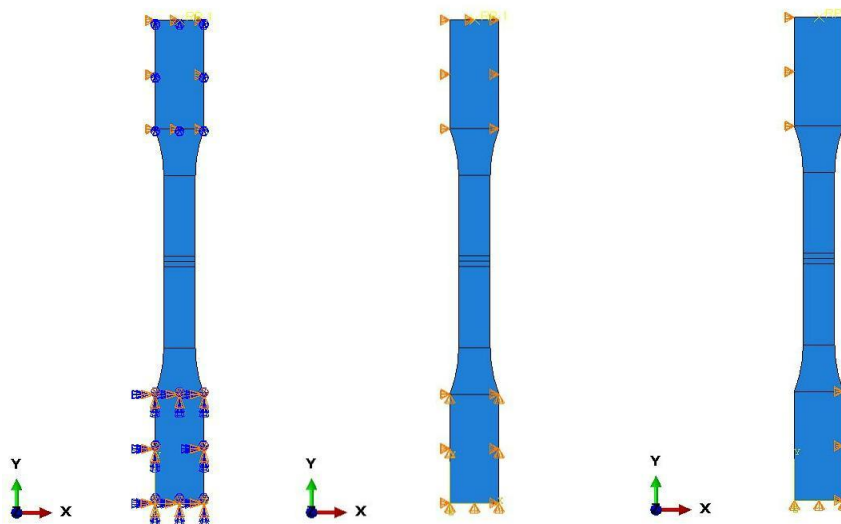
Sljedeći bitan modul u Abaqus-u je modul *Load*. U modulu *Load* se postavljaju rubni uvjeti i opterećenje epruvete. Kroz ovaj rad analizirano je više kombinacija rubnih uvjeta i opterećenja kako bi se došlo do konfiguracije koja najviše odgovara realnim uvjetima. Također je trebalo pronaći i rubne uvjete koji neće stvarati nepotrebne koncentracije naprezanja i probleme s konvergencijom algoritma te koji će omogućavati stabilno odvijanje numeričke simulacije.

U prvim provedenim simulacijama opterećenje je bilo zadano preko vanjske sile zadane po gornjem rubu epruvete, no tu se javljao problem s konvergencijom algoritma. Nakon toga opterećenje je zadano putem pomaka gornjeg ruba epruvete (Slika 27). Uzimajući u obzir eksperimentalne rezultate te kroz nekoliko testiranih magnituda opterećenja odabrana je odgovarajuća vrijednost nametnutog pomaka po gornjem rubu epruvete  $U_2 = 0,65$  mm.



Slika 27. Opterećenje epruvete zadavanjem pomaka

Što se tiče rubnih uvjeta na sljedećim slikama biti će prikazane neke od testiranih kombinacija koje su davale nezadovoljavajuće rezultate i izazivale probleme s konvergencijom.

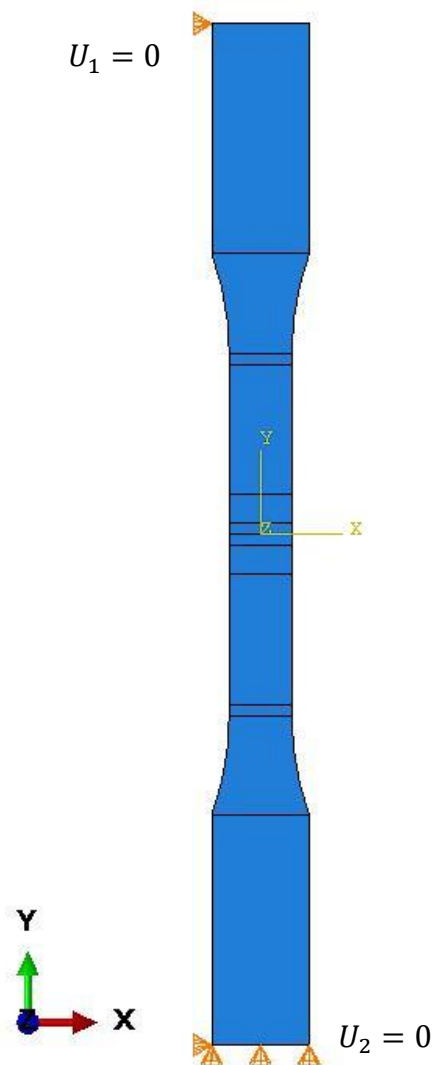


Slika 28. Nezadovoljavajući rubni uvjeti

Nadalje, na slici 29 su prikazani rubni uvjeti s kojima su provedene numeričke simulacije. Rubni uvjeti postavljeni su na sljedeći način:

- na donjem rubu epruvete ograničeni su pomaci u smjeru osi  $y$ ,
- na lijevoj strani epruvete na kutu epruvete je u dvije točke ograničen pomak u smjeru osi  $x$ .

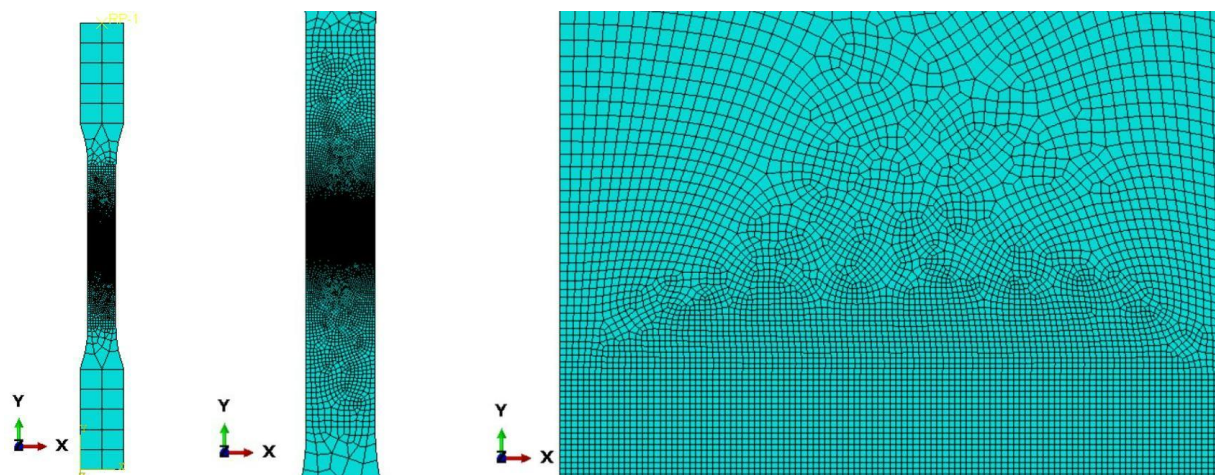
Ovako zadani rubni uvjeti vjerno repliciraju rubne uvjete koji se događaju prilikom razvlačenja epruvete na kidalici. Na kidalici se epruveta čeljustima za stezanje prihvati na svojim krajevima, odnosno zadebljanjima. Donji dio epruvete je nepomičan dok se gornji dio epruvete razvlači te se na taj način nameće opterećenje.



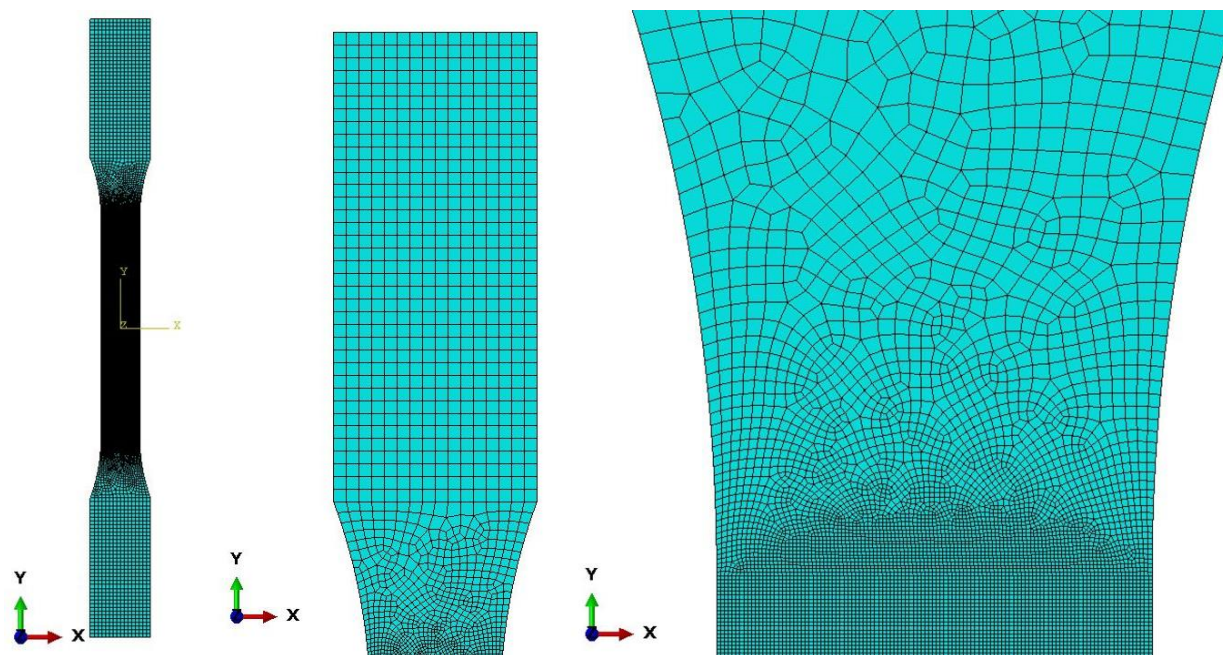
Slika 29. Rubni uvjeti

### 5.2.3. Diskretizacija epruvete

Prilikom izrade ovog rada proveden je znatan broj numeričkih simulacija s različitom diskretizacijom zadane epruvete. Neke od tih diskretizacija pokazale su se kao neprihvatljive za analizu zadanog problema usljed nestabilnosti same simulacije, dok su neke odbačene zbog dugog vremena računanja. Na slikama 30 i 31 prikazane su mreže s različitim brojem konačnih elemenata koje su odbačene iz navedenih razloga.

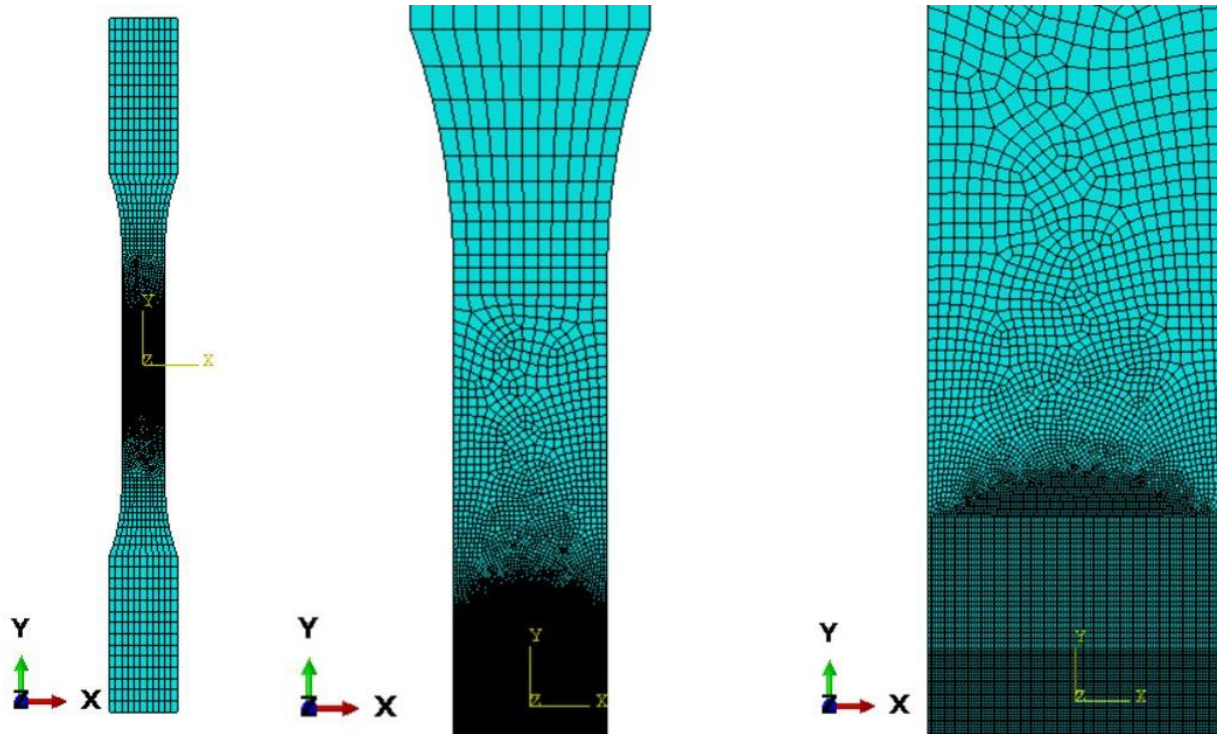


Slika 30. Mreža s 14218 konačnih elemenata



Slika 31. Mreža s 80626 konačnih elemenata

Na slici 32 prikazana je odabrana mreža sa 17337 konačnih elemenata s kojom su provedene numeričke analize. Na slici su također prikazani detalji navedene mreže.



Slika 32. Mreža sa 17337 konačnih elemenata

### 5.3. Input datoteka

U input datoteci se nalaze svi podaci potrebni za pokretanje simulacije. U njoj se nalaze koordinate čvorova, definiraju čvorovi koji čine pojedini konačni element (u ovom slučaju četiri). Pri analizi metodom faznog polja postupak definiranja mreže konačnih elemenata ponavlja se tri puta da bi se stvorila mreža konačnih elemenata s tri sloja. Prije definiranja svakog sloja određuje se tip konačnog elementa (Abaqus konačni element ili korisnički UEL), te njegove ostale karakteristike (Slika 33).

```

** UEL (U10) - the first layer of user phase-field elements
** 2D 4-node full integration linear element
** Properties - length scale parameter (xL) and Griffith's critical energy release rate (Gc)
**
*User element, nodes=4, type=U10, properties=2, coordinates=2, VARIABLES=4
4
*****
*Element, type=U10
1, 1, 27, 1119, 48
2, 27, 28, 1120, 1119

```

Slika 33. Definiranje prvog sloja konačnih elementa i pripadajućih čvorova

```

** UMAT (CPE4) - the 2nd layer of Abaqus standard displacement elements
**
** 2D 4-node full integration linear element for plane strain
** Properties - Young's modulus (EMOD) and Poisson's ratio (ENU)
**
*Element, TYPE=CPE4, elset=Displacement
17338, 1, 27, 1119, 48
17339, 27, 28, 1120, 1119

```

**Slika 34. Definiranje drugog sloja konačnih elemenata s pripadnim čvorovima**

```

** UEL (U3) - the third layer of user elements
** 2D 4-node full integration linear element with identity stiffness matrix and dummy DOFs
** Properties - length scale parameter (xL) and Griffith's critical energy release rate (Gc)
**
** Variables - History parameter of maximum deformation energy (1x4 integration points)
**
*User element, nodes=4, type=U3, properties=2, coordinates=2, VARIABLES=4
5
*****
*Element, type=U3
34675, 1, 27, 1119, 48
34676, 27, 28, 1120, 1119

```

**Slika 35. Definiranje trećeg sloja konačnih elemenata s pripadnim čvorovima**

Sa slika 33, 34 i 35 vidljiva je razlika u definiranju konačnih elemenata u prvom, drugom i trećem sloju mreže, gdje se u prvom sloju nalaze korisnički (UEL) elementi, u drugom sloju elementi iz Abaqus biblioteke elemenata (CPE4), a u trećem sloju opet korisnički (UEL) elementi. Također se može primijetiti da su prvi elementi u sva tri sloja mreže konačnih elemenata definirani istim čvorovima što znači da stoje direktno jedan iznad drugog.

Potom se definiraju setovi čvorova i elemenata preko kojih će biti nametnuti rubni uvjeti i opterećenje. Također se u input datoteci zadaju i parametri faznog polja prema slici 36.

```

**PHASE ELEMENT PROPERTIES
*Uel property, elset=Phase_Sinter
0.2, 3.5
**lc, gc

```

**Slika 36. Zadavanje parametara faznog polja**

Nakon toga određuju se materijalni parametri za drugi sloj standardnih Abaqus konačnih elemenata (Slika 37) pomoću korisničke rutine UMAT..

```

** Material properties for the 2nd element layer
** Elastic properties for Displacement UMAT
*Material, name=Displacement
*Depvar,delete=17
18,
*User Material, constants=9
98000., 0.28, 140., 35.9, 315.313, 14802.035, 253.162, 0.,
1.
**EMOD, ENU, Sy0, Qinf, b, C1, gamma1, C2, gamma2

```

Slika 37. Određivanje materijalnih parametara

Prema slici 37 prvi parametar je Youngov modul elastičnosti  $E$ , drugi je Poissonov faktor  $\nu$ , treći je granica tečenja  $\sigma_y^0$ , četvrti i peti su parametri izotropnog očvršćenja  $Q_\infty$  i  $b$  objašnjeni u 2.5.1., peti i šesti su parametri kinematičkog očvršćenja  $C_k$  i  $\gamma_k$  objašnjeni u 2.5.2.

Rubni uvjeti, korak (step) i opterećenje definirani su prema slici 38.

```

** BOUNDARY CONDITIONS
** Name: Donji_rub Type: Displacement/Rotation
*Boundary
set_donji_rub, 2, 2
** Name: dvije_tocke Type: Displacement/Rotation
*Boundary
set_dvije_tocke, 1, 1
*Boundary
Set-1, 5, 5
*****
** STEP: Static
**
*Step, name=Static, nlgeom=NO, inc=10000000, extrapolation=no
*Static
0.01, 1., 0.00000001, 0.01
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: pomak Type: Displacement/Rotation
*Boundary
Set-21, 2, 2, 0.65
**

```

Slika 38. Definiranje rubnih uvjeta i koraka

U koraku (step) se definira i nametnuto opterećenje preko zadanog pomaka kao u 5.2.2., te se definira vrijednost početnog, krajnjeg, minimalnog i maksimalnog inkrementa (Slika 38). Na slici 39 prikazani su podatci koji se računaju i ispisuju pri numeričkoj simulaciji. SDV1 predstavlja parametar faznog polja  $\Phi$  iz 3.3., a SDV2 ekvivalentnu plastičnu deformaciju  $\varepsilon_{ekv}^p$ .



```

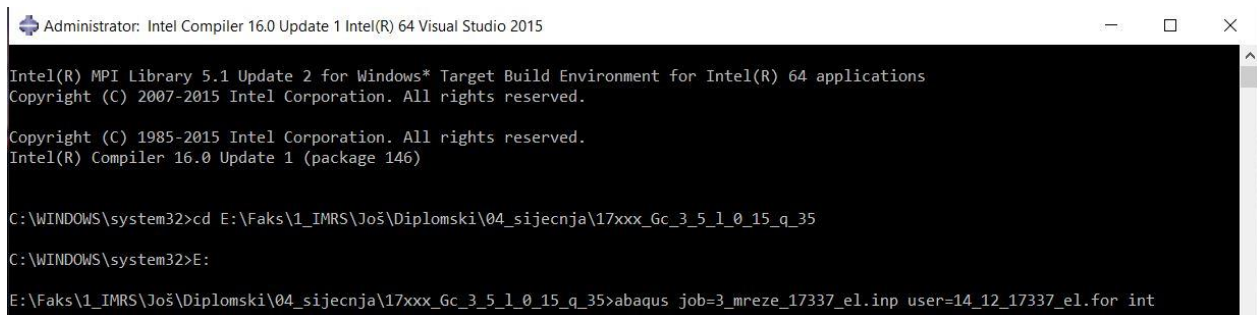
** OUTPUT **
**
**MONITOR, NODE=Monitor, DOF=4
*Restart, write, frequency=20
*Output, field, frequency=1
*element output, elset=BEAM.Displacement
S,E,SENER,PENER,SDV1,SDV2,SDV15,SDV16,SDV17
*Node Output
U
*Node Output
RF
*End Step

```

Slika 39. Izlazni podatci

## 5.4. Pokretanje simulacije

Numerička simulacija pokreće se putem Abaqus Command-a, koji je povezan s *Intel Fortran compilerom* [22]. Simulacija se pokreće prema slici 40.



```

Administrator: Intel Compiler 16.0 Update 1 Intel(R) 64 Visual Studio 2015
Intel(R) MPI Library 5.1 Update 2 for Windows* Target Build Environment for Intel(R) 64 applications
Copyright (C) 2007-2015 Intel Corporation. All rights reserved.

Copyright (C) 1985-2015 Intel Corporation. All rights reserved.
Intel(R) Compiler 16.0 Update 1 (package 146)

C:\WINDOWS\system32>cd E:\Faks\1_IMRS\Još\Diplomski\04_sijecnja\17xxx_Gc_3_5_1_0_15_q_35
C:\WINDOWS\system32>E:
E:\Faks\1_IMRS\Još\Diplomski\04_sijecnja\17xxx_Gc_3_5_1_0_15_q_35>abaqus job=3_mreze_17337_el.inp user=14_12_17337_el.for int

```

Slika 40. Pokretanje simulacije

Prvo se određuje lokacija u kojoj će se odvijati i spremati numerička simulacija. U toj mapi mora se nalaziti input (.inp) datoteka sa svim ulaznim podacima i .for datoteka odnosno kod napisan u programskom paketu FORTRAN. Korisničke rutine dostupne su javno na [21].

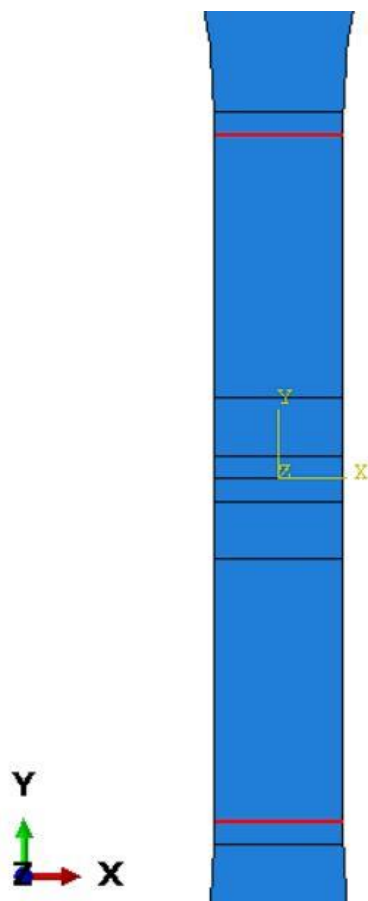
## 5.5. Rezultati

Kroz sljedeća poglavlja bit će prikazana sistematika određivanja parametara faznog polja  $G_c$  i  $l$ . Numeričke simulacije su prvo bile pokretane s materijalnim parametrima odrađenima u [13], a oni glase:

- $E = 98000$  MPa,
- $\sigma_y^0 = 165$  MPa – odnosi se na procijenjenu stvarnu granicu tečenja iz [13],

- $\nu = 0,28$ ,
- $Q_{\infty} = 50,9 \text{ MPa}$ ,
- $b = 315,513$ ,
- $C_k = 14802,035$ ,
- $\gamma_k = 253,162$ .

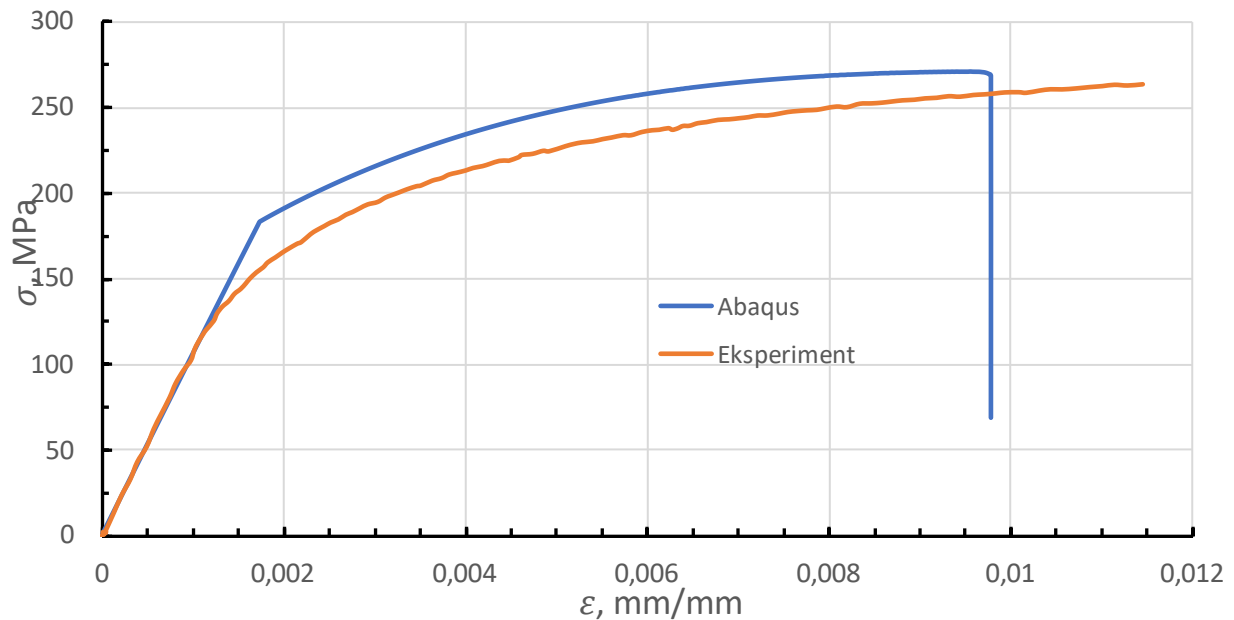
Rezultati svih numeričkih simulacija bit će prikazani preko dijagrama ovisnosti naprezanja o deformaciji. Naprezanje je određeno pomoću sile reakcije na opterećenom rubu, koja je podijeljena s površinom poprečnog presjeka vrata epruvete prema slici 25 i jednadžbi (3). Deformacija se računa prema jednadžbi (4) gdje je  $L_0=30 \text{ mm}$ , a  $L$  je dobiven iz numeričke simulacije pomoću određenih setova čvorova prema slici 41. Na ekvivalentan način je produljenje vrata epruvete praćeno i u eksperimentu i u radu [13].



Slika 41. Setovi čvorova za računanje pomaka i deformacije vrata epruvete

### 5.5.1. Numeričke simulacije primjenom AT-2 modela

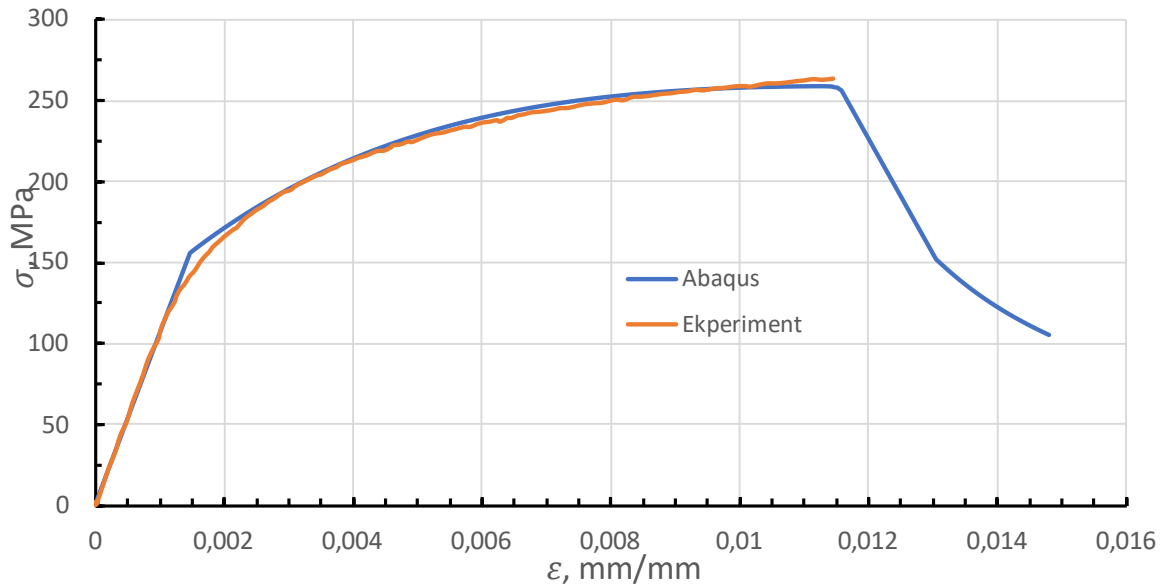
Jedan od početnih koraka je bio pronalazak početnih vrijednosti parametara faznog polja. Stoga su na slici 42 prikazani rezultati numeričke simulacije sa zadanim vrijednostima parametara faznog polja  $G_c = 7,5 \text{ N/mm}$ ,  $l = 0,1 \text{ mm}$  i AT-2 modelom. Početne vrijednosti parametara faznog polja određene su tako da  $l$  bude barem dva puta veći od veličine konačnih elemenata na mjestu na kojem se očekuje pukotina, a početna vrijednost parametra  $G_c$  je određena pomoću [18] i [19] tako da bude na prijelazu između krhkog i duktilnog ponašanja materijala.



Slika 42. Dijagram naprezanje-deformacija početne simulacije

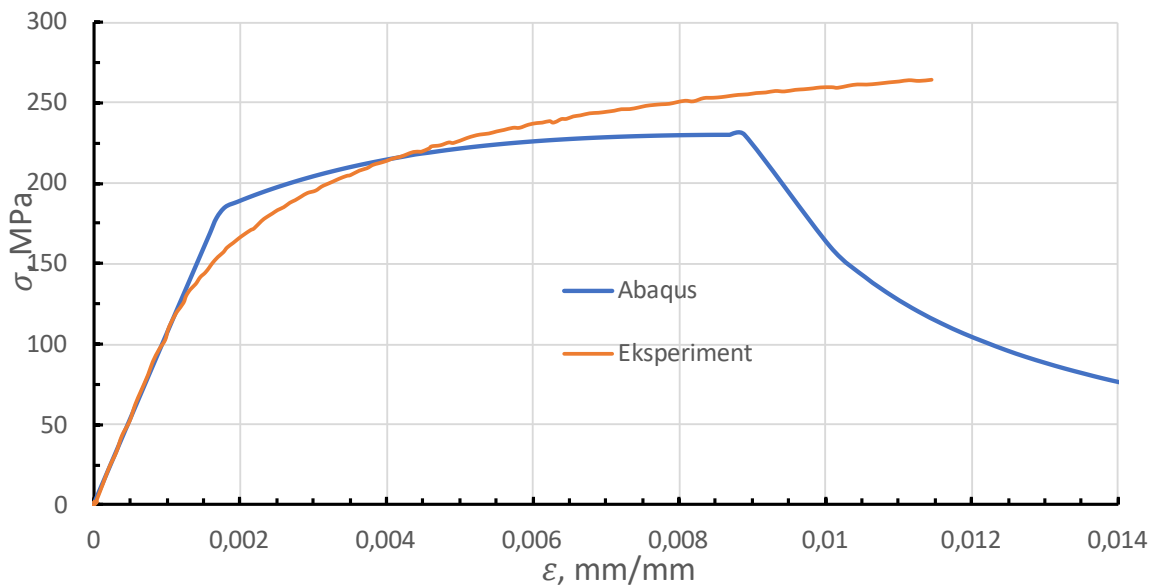
Sa slike 42 vidi se razlika između provedene numeričke simulacije i eksperimenta stoga se pristupilo traženju uzroka te razlike. Još je uočeno da je realna granica tečenja prema grafu na slici 42 oko 185 MPa iako je zadano da ona iznosi 165 MPa. Jedan od pokušaja rješavanja problema nepoklapanja rezultata je snižavanje vrijednosti granice tečenja materijala u odnosu na granicu tečenja iz [13]. Drugi način na koji se pokušalo smanjiti razliku u rezultatima je provodeći simulaciju sa samo izotropnim očvršćenjem.

Rezultati druge simulacije za određivanje početnih vrijednosti parametara prikazani su na slici 43, a iznosi parametara faznog polja su  $G_c = 12 \text{ N/mm}$  i  $l = 0,1 \text{ mm}$ , te je granica tečenja snižena na  $\sigma_y^0 = 140 \text{ MPa}$ .



Slika 43. Dijagram naprezanje-deformacija druge simulacije

Na slici 43 vidi se izvrsno poklapanje rezultata numeričke simulacije i provedenog eksperimenta, te se snižavanje granice tečenja može razmatrati kao valjana opcija za sljedeće analize. Također je sada iznos realne granice tečenja na razini oko 165 MPa. Na slici 44 prikazani su rezultati simulacije provedene samo s izotropnim očvršćenjem, a to se zadalo na način da su parametri kinematičkog očvršćenja postavljeni na  $C_k = 0$  i  $\gamma_k = 1$ , dok su svi ostali parametri ostali jednaki kao i u prethodnom primjeru.



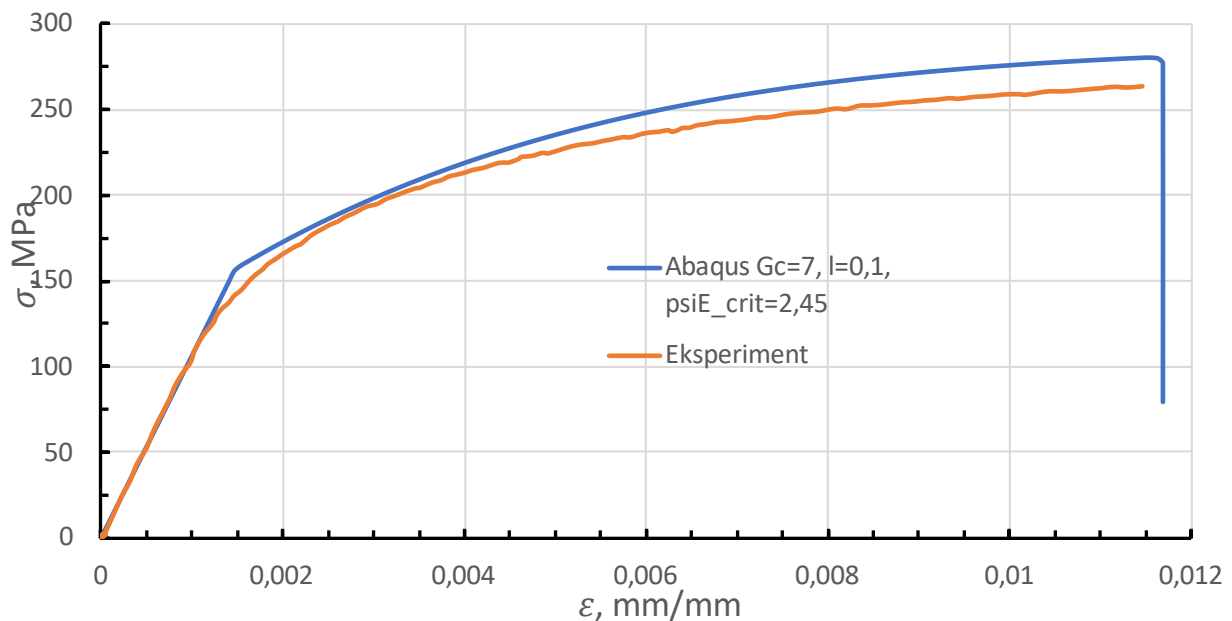
Slika 44. Dijagram naprezanje-deformacija simulacije samo s izotropnim očvršćenjem

Promatrajući rezultate sa slike 44 očigledno je da daljnje numeričke simulacije sa samo izotropnim očvršćenjem materijala nije potrebno razmatrati.

Osim AT-2 modela, u simulacijama je korišten i TH model, prema do pojave oštećenja dolazi kada ukupna energija tijela prijeđe razinu kritične energije koja je u FORTRAN kodu izražena kao  $\psi_{\text{Ecrit}} = k * \frac{G_c}{l}$  ( $k$  označava koeficijent). U nastavku rada promjenom kritične energije u TH modelu tražen je odgovarajući trenutak inicijacije pukotine koji će dati poklapanje rezultata numeričke simulacije i eksperimentalnog ispitivanja.

### 5.5.2. Numeričke simulacije primjenom TH modela

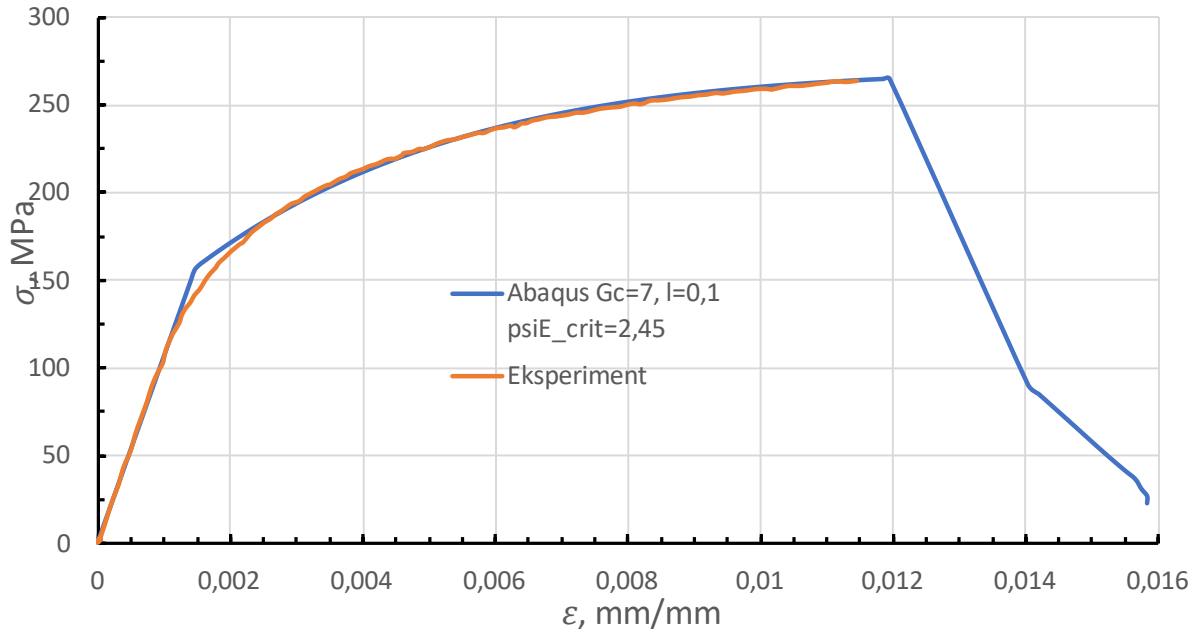
Na slici 45 prikazani su rezultati simulacija s TH modelom. Parametri faznog polja su  $G_c = 7 \text{ N/mm}$  i  $l = 0,1 \text{ mm}$ , dok je kritična energija  $\psi_{\text{Ecrit}} = 2,45 \text{ MPa}$ .



Slika 45. Dijagram naprezanje-deformacija prve simulacije s primjenom TH modela

Na temelju rezultata prikazanih na slici 45 vidljivo je da do pucanja epruvete u numeričkoj simulaciji u odnosu na eksperiment dolazi pri većoj deformaciji, što znači da je vrijednost ukupne kritične energije previsoka. Pošto rezultati simulacije s TH modelom pokazuju nepoklapanje rezultata elasto-plastičnog ponašanja s krivuljom naprezanje-deformacija iz eksperimenta, smanjen je parametar maksimalne promjene granice tečenja  $Q_{\infty}$ .

Na slici 46 prikazani su rezultati nakon što je iznos parametra maksimalne promjene granice tečenja  $Q_\infty$  snižen s 50,9 MPa na 35,9 MPa. Iznosi svih ostalih parametara ostali su jednaki kao i u prethodnoj simulaciji.

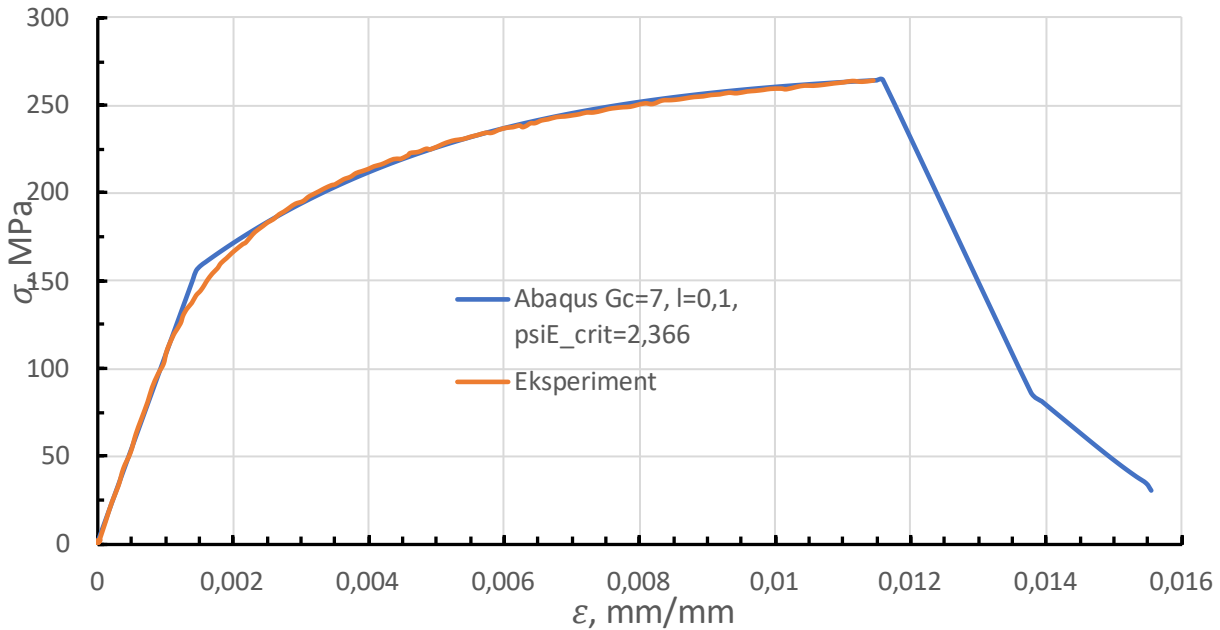


Slika 46. Dijagram naprezanje-deformacija simulacije sa smanjenim parametrom  $Q_\infty$

Iz rezultata sa slike 46 uočljivo je poklapanje krivulja ovisnosti naprezanja o deformaciji provedene numeričke simulacije i eksperimentalnih rezultata. Nadalje su sve simulacije pokretane s novim parametrima koji glase:

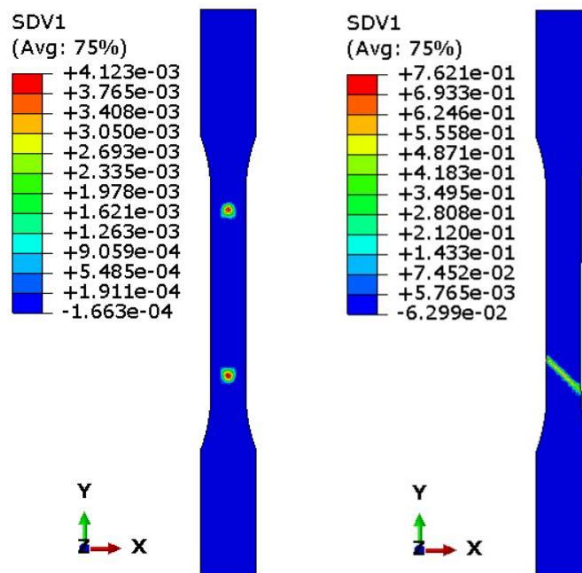
- $E = 98000$  MPa,
- $\sigma_y^0 = 140$  MPa,
- $\nu = 0,28$ ,
- $Q_\infty = 35,9$  MPa,
- $b = 315,513$ ,
- $C_k = 14802,035$ ,
- $\gamma_k = 253,162$ .

Na slici 47 prikazani su rezultati numeričke simulacije s parametrima faznog polja  $G_c = 7$  N/mm i  $l = 0,1$  mm, a kritična energija iznosi  $\psi_{\text{Ecrit}} = 2,366$  MPa. Iznos kritične energije je odabran na temelju površine koju tvori dijagram naprezanje-deformacija u eksperimentalnom ispitivanju.

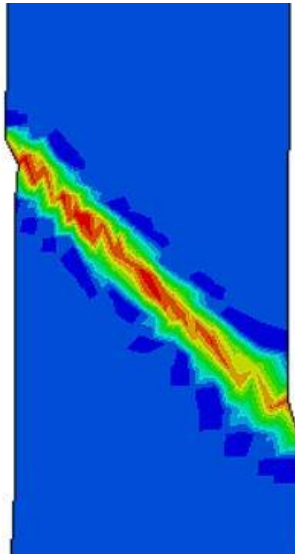


Slika 47. Rezultati numeričke simulacije koji vjerno repliciraju eksperimentalne rezultate

Ono što se može zaključiti iz prethodnog dijagrama je da do iniciranja pukotine dolazi kada ukupna energija deformiranja prijeđe iznos od 2,366 MPa. Sljedeći zaključak koji proizlazi iz prethodnog dijagrama je da je iznos parametra lomne žilavosti  $G_c = 7 \text{ N/mm}$  previsok zbog načina na koji se lom odvija te je on bliži duktilnom nego kvazi krhkom modelu loma. Na slikama 48 i 49 prikazan je izgled pukotine za provedenu numeričku simulaciju s navedenim parametrima.

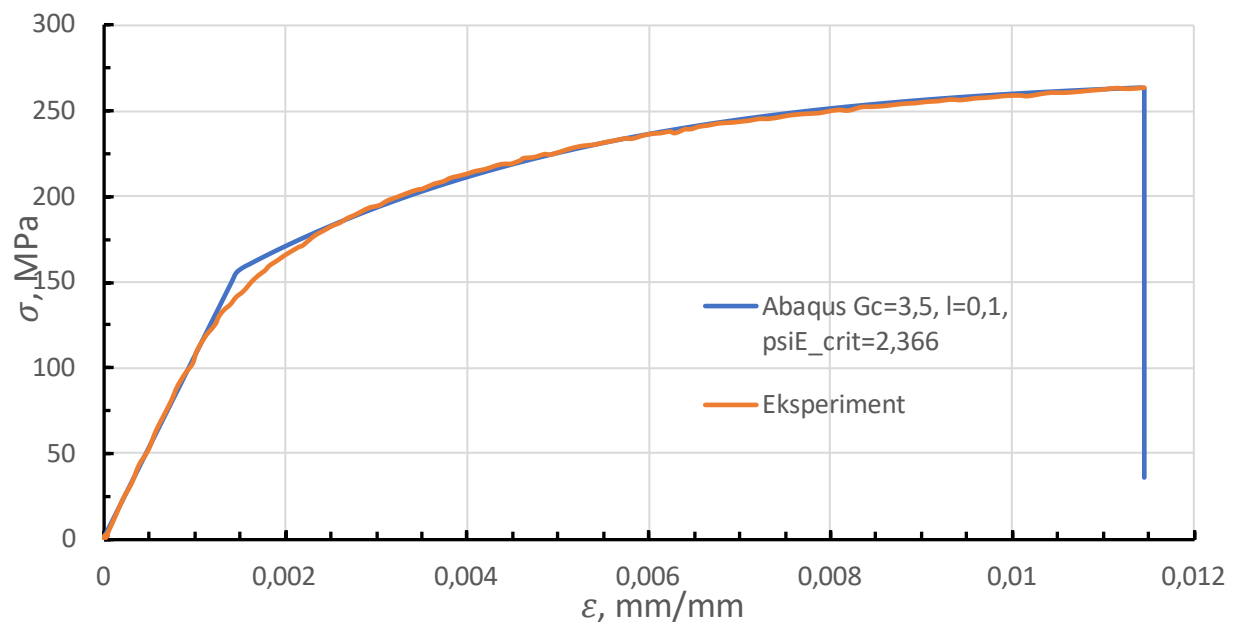


Slika 48. Izgled pukotine pri  $U_2=0,546 \text{ mm}$  i  $U_2=0,5493 \text{ mm}$



Slika 49. Izgled pukotine

U daljnjem radu tražio se parametar lomne žilavosti  $G_c$  takav da odgovara modelu kvazi krhkog loma. Kvazi krhki lom manifestira se krhkim odrezom epruvete, a u numeričkoj simulaciji to će biti vidljivo tako da će naprezanje naglo pasti. Nizom provedenih numeričkih simulacija određeni su parametri koji opisuju takvo lomno ponašanje materijala, te oni iznose  $G_c = 3,5 \text{ N/mm}$  i  $l = 0,1 \text{ mm}$ , a kritična energija i dalje iznosi  $\psi_{Ecrit} = 2,366 \text{ MPa}$ . Dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji za navedene parametre prikazan je na slici 50.



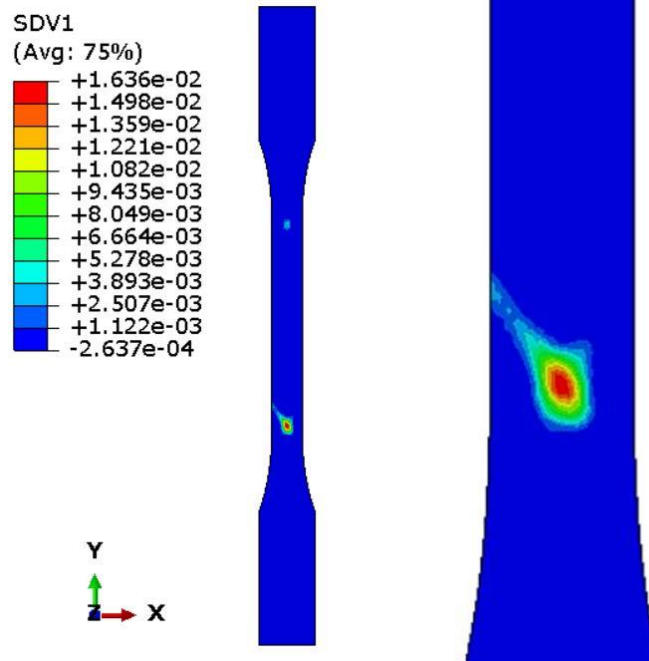
Slika 50. Dijagram naprezanje-deformacija simulacije s konačnim vrijednostima parametara faznog polja



Iz dijagrama sa slike 50 vidljivo je da provedena numerička simulacija, s parametrima faznog polja koji iznose  $G_c = 3,5 \text{ N/mm}$  i  $l = 0,1 \text{ mm}$ , vjerno replicira eksperimentalne rezultate i sam lom epruvete te se time zaključuje određivanje parametra lomne žilavosti  $G_c$ . Na slici 51 prikazan je lom epruvete kod eksperimentalnog ispitivanja, dok je na slici 52 prikazan izgled pukotine neposredno prije loma u numeričkoj simulaciji.

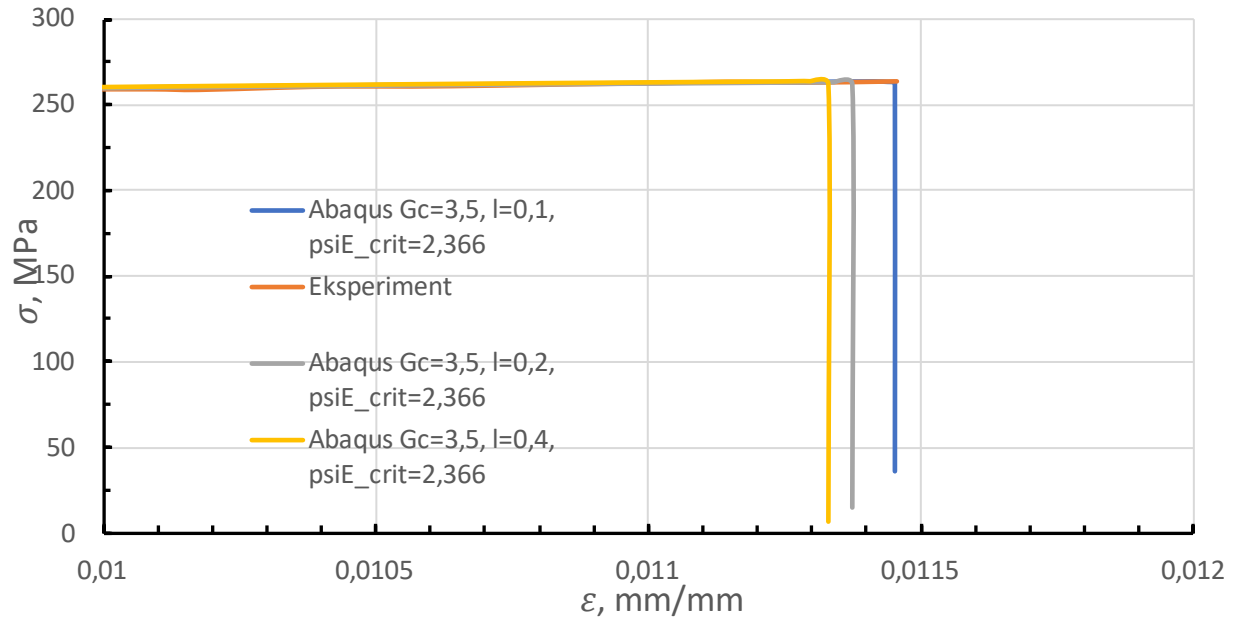


Slika 51. Lom epruvete kod eksperimentalnog ispitivanja



Slika 52. Raspodjela parametra faznog polja prije pucanja epruvete za vrijednost  $G_c=3,5 \text{ N/mm}$

Dalje je na slici 53 prikazan utjecaj mikrostrukturnog parametra  $l$  na rezultate numeričkih simulacija i na lomno ponašanje sinteriranog čelika.

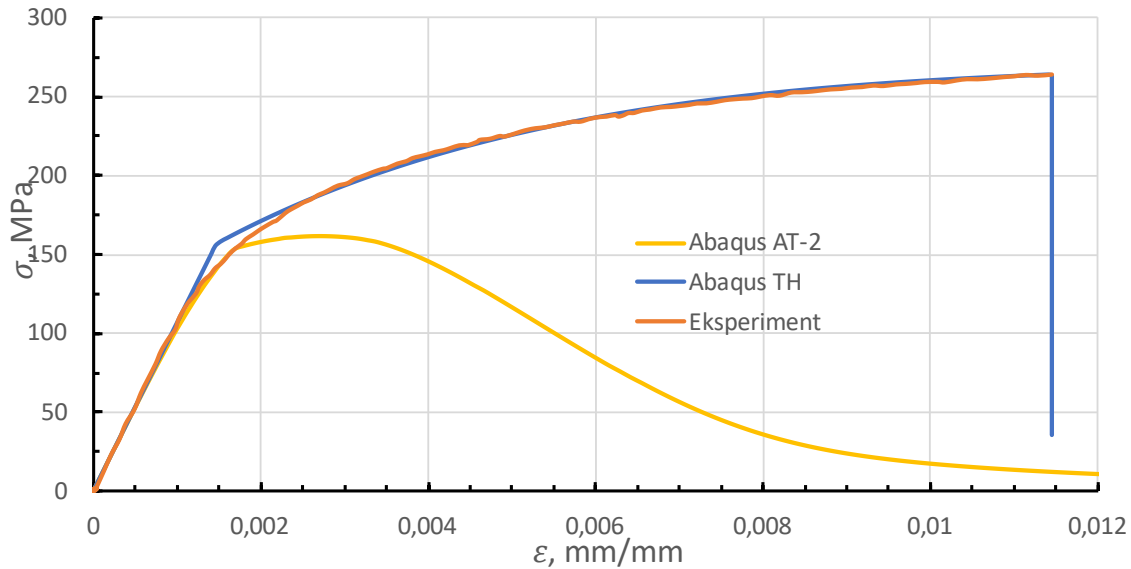


Slika 53. Utjecaj mikrostrukturnog parametra  $l$

Iz rezultata numeričkih simulacija i s dijagrama na slici 53 može se zaključiti da s porastom parametra  $l$  raste i širina pukotine, a time se smanjuje opterećenje potrebno za lom. Tako se s dijagrama može vidjeti prvo puca epruveta s vrijednošću parametra  $l$  u iznosu od 0,4 mm, a posljednja puca ona s najmanjom vrijednošću parametra  $l=0,1$  mm.

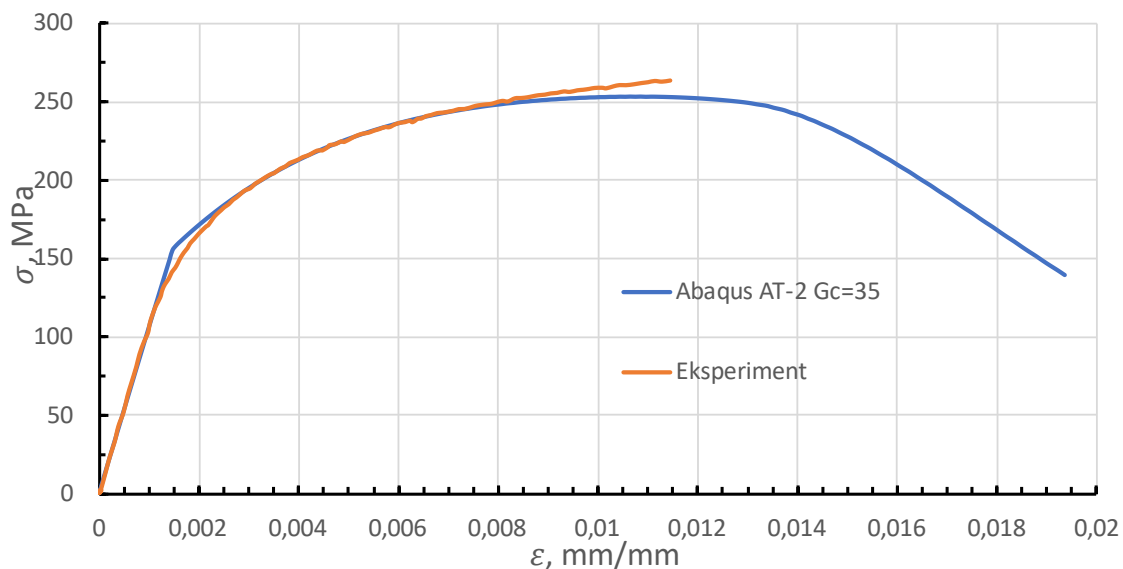
### 5.5.3. Numeričke simulacije primjenom AT-2 modela i konačno odabranih materijalnih parametara

S parametrima faznog polja dobivenim u 5.5.2. pristupilo se numeričkoj analizi s AT-2 modelom, te su rezultati takve simulacije u usporedbi s eksperimentalnim i TH rezultatima prikazani na slici 54.



**Slika 54. Usporedba dijagrama naprezanje-deformacija primjenom AT-2 modela s TH modelom i eksperimentom**

Kao što je i navedeno u 3.3. inicijacija oštećenja u AT-2 modelu kreće od samog početka numeričke simulacije pa je njime, kao što je i vidljivo sa dijagrama na slici 54, koristeći iste parametre faznog polja nemoguće dobiti reprezentativne rezultate. Za dobivanje boljeg poklapanja numeričkih rezultata s eksperimentom, povećan je parametar lomne žilavosti  $G_c$ . Najbliže što se uspjelo takvim pristupom bilo je za vrijednost  $G_c = 35$  N/mm, te su rezultati te numeričke simulacije prikazani na slici 55.



**Slika 55. Dijagram naprezanje-deformacija primjenom AT-2 modela za  $G_c=35$  N/mm**

Sa slike 55 vidljivo je kako korištenjem AT-2 modela nije moguće modeliranje kvazi-krhkog loma materijala.

## 6. ZAKLJUČAK

U ovom radu bilo je potrebno odrediti parametre faznog polja, odnosno parametra lomne žilavosti  $G_c$  i parametra duljinske skale  $l$ . Također je proučen utjecaj parametra duljinske skale  $l$  na rezultate numeričkih simulacija i na lomno ponašanje sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće  $6,5 \text{ g/cm}^3$ .

Prvo je prikazana ugradnja metode faznog polja u programski paket Abaqus pomoću kojeg su provedene numeričke simulacije. Na početku su validirani materijalni parametri izotropnog i kinematičkog očvršćenja kao i sama granica tečenja materijala. Nakon validacije svih materijalnih parametara pristupilo se određivanju parametara faznog polja.

Prilikom određivanja parametra lomne žilavosti  $G_c$ , vrijednost parametra duljinske skale  $l$  bila je konstantna. Na temelju rezultata simulacija uočeno je da AT-2 model ne daje dobro ponašanje materijala. Stoga je odabran TH model, kod kojeg je potrebno odrediti kritičnu energiju, koju kada tijelo prijeđe dolazi do iniciranja pukotine. Kritična energija je određena pomoću numeričkih simulacija te je dobiveno da on iznosi  $\psi_{\text{Ecrit}} = 2,366 \text{ MPa}$ .

U sljedećem koraku tražen je parametar lomne žilavosti  $G_c$ . U radu je pokazano da za vrijednost parametra lomne žilavosti  $G_c = 3,5 \text{ N/mm}$ , numerička simulacija daje dobro poklapanje rezultata u usporedbi sa statičkim eksperimentalnim ispitivanjima lomnog ponašanja sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C gustoće  $6,5 \text{ g/cm}^3$ .

Nakon toga, provjeren je utjecaj parametra duljinske skale  $l$  na lomno ponašanje sinteriranog čelika. Zaključeno je da rastom vrijednosti parametra duljinske skale  $l$ , uz istu kritičnu energiju, do pucanja epruvete dolazi ranije. Razlog tome je što parametar duljinske skale utječe na širinu pukotine.

Na kraju je još jednom provjeren AT-2 model s kalibriranim vrijednostima iz TH modela, te je zaključeno da nije prikladan za modeliranje kvazi-krhkog loma sinteriranog čelika.

## LITERATURA

- [1] L. Slokar, Metalurgija praha i sinter materijali, Sisak: Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, 2015.
- [2] [Mrežno]. Available: <https://www.pm-review.com/introduction-to-powder-metallurgy/why-powder-metallurgy/>. [Pokušaj pristupa 20. 12. 2022].
- [3] Iron and steel powders for sintered components, Sweden: Höganäs AB, 2017.
- [4] E. Allen, »Ball Mill- Highly Efficient Grinding And Milling Machine,« [Mrežno]. Available: <https://www.eversingletopic.com/ball-mill-highly-efficient-grinding-and-milling-machine/>. [Pokušaj pristupa 10 01 2023].
- [5] »Höganäs,« [Mrežno]. Available: <https://www.hoganas.com/en/powder-technologies/>. [Pokušaj pristupa 28 12 2022].
- [6] B. Plazibat, A. Matoković i V. Vetma, Nauka o čvrstoći, Split: Sveučilište u Splitu, 2019.
- [7] »Engineering Stress/Strain vs True Stress/Strain,« [Mrežno]. Available: <https://yasincapar.com/engineering-stress-strain-vs-true-stress-strain/>. [Pokušaj pristupa 27. 12. 2022].
- [8] »Mechanical Properties of Materials,« [Mrežno]. Available: <https://mechanicalc.com/reference/mechanical-properties-of-materials>. [Pokušaj pristupa 28. 12. 2022].
- [9] T. Lesičar, *Biljške s predavanja iz kolegija Nelinearna numerička analiza konstrukcija*, Zagreb, 2022.
- [10] B. Franin, Numeričko modeliranje zaostalih naprezanja pri zavarivanju, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [11] E. de Souza Neto, D. Perić i D. Owen, Computational methods for plasticity, Theory and applications, Swansea: Wiley, 2008.
- [12] J. Lemaitre i J. Chaboche, Mechanics of Solid Materials, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

- [13] A. Begić, Modeliranje konstitutivnog ponašanja sinteriranog čelika pri monotonom i cikličkom opterećenju, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2022.
- [14] M. Wojcik, »The application of Chaboche model in uniaxial,« *ResearchGate*, pp. 105-109, 04. 2019.
- [15] M. Husnjak, *Mehanika loma*, Zagreb: Školska knjiga, 1996.
- [16] A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 221(582-593), 1921.
- [17] K. Seleš, T. Lesičar, Z. Tonković i J. Sorić, »Numeričko modeliranje procesa kvazi-krhkog loma primjenom faznog modeliranja,« *8. susreti Hrvatskog društva za mehaniku*, pp. 1-6, 07. i 08. 07. 2017.
- [18] K. Seleš, Z. Tomić, Z. Tonković i J. Sorić, »Rješavanje problema krhkog, duktilnog i zamornog loma primjenom poopćenog modela faznih polja implementiranog u programski paket ABAQUS,« *10. susret Hrvatskog društva za mehaniku*, pp. 251-256, 01. i 02. 10. 2020.
- [19] K. Seleš, *Numerical phase-field modeling of damage in heterogeneous materials*, Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2020.
- [20] J. Sorić, *Metoda konačnih elemenata*, Zagreb: Golden marketing-Tehnička knjiga, 2004.
- [21] K. Seleš, »Mendeley Data,« [Mrežno]. Available: <https://data.mendeley.com/datasets/p77tsyrbx2/4>. [Pokušaj pristupa 29. 12. 2022].
- [22] *Microsoft Visual Studio Community 2015*, Microsoft Corporation, 2015.
- [23] *Intel(R) Parallel Studio XE 2016 Update 1 Cluster Edition for Windows*, Intel(R), 2016.