Utjecaj različitih pristupa procjeni standardnih nesigurnosti na ukupnu mjernu nesigurnost

Bošnjaković, Alen

Doctoral thesis / Disertacija

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:034020

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-14**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Alen Bošnjaković

UTJECAJ RAZLIČITIH PRISTUPA PROCJENI STANDARDNIH NESIGURNOSTI NA UKUPNU MJERNU NESIGURNOST

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2022.

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Alen Bošnjaković

DIFFERENT IMPACT APPROACHES FOR STANDARD UNCERTAINTY QUANTIFICATIONS ON OVERALL MEASUREMENT UNCERTAINTY

DOCTORAL DISSERTATION

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Alen Bošnjaković

UTJECAJ RAZLIČITIH PRISTUPA PROCJENI STANDARDNIH NESIGURNOSTI NA UKUPNU MJERNU NESIGURNOST

DOKTORSKI RAD

Mentorica:

Prof. dr. sc. Biserka Runje

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL ARCHITECTURE

Alen Bošnjaković

DIFFERENT IMPACT APPROACHES FOR STANDARD UNCERTAINTY QUANTIFICATIONS ON OVERALL MEASUREMENT UNCERTAINTY

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

Prof. Biserka Runje, PhD

Zagreb, 2022.

PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK:	
Ključne riječi:	mjerna nesigurnost, potpuni rezultat mjerenja, metode za procjenu mjerne nesigurnosti, ocjenjivanje sukladnosti, strojno učenje u mjeriteljstvu
Znanstveno strojarstvo:	STROJARSTVO
Institucija u kojoj je rad izrađen:	Fakultet strojarstva i brodogradnje
Mentorica rada:	prof. dr. sc. Biserka Runje
Broj stranica:	137
Broj slika:	55
Broj tablica:	29
Broj korištenih bibliografskih jedinica:	81
Datum obrane:	
Povjerenstvo:	prof. dr. sc. Dragutin Lisjak – predsjednik prof. dr. sc. Željko Alar – član doc. dr. sc. Branko Štrbac – član
Institucija na kojoj je rad pohranjen:	Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem mentorici profesorici Biserki Runje na poticajima, savjetima, iskrenosti i pruženoj podršci u svakom trenutku.

Najljepše zahvaljujem članovima Povjerenstva prof. dr. sc. Dragutinu Lisjaku, prof. dr. sc. Željku Alaru i doc. dr. sc. Branku Štrbcu na konstruktivnim savjetima kod izrade ove disertacije.

Iskreno se zahvaljujem Institutu za mjeriteljstvo Bosne i Hercegovine, na kojem trenutno radim, gdje sam stekao znanja koja sam primijenio kod izrade ove disertacije.

Želim se zahvaliti svojoj porodici koja je strpljivošću i razumijevanjem pomogla u mojim nastojanjima.

Veliko hvala mojoj supruzi Suniti.

SAŽETAK

Vodič za iskazivanje mjerne nesigurnosti je utemeljio opća pravila za iskazivanjem potpunog mjernog rezultata. Temeljem istaknute potrebe za iskazivanjem potpunog mjernog rezultata u svrhu ocjenjivanja sukladnosti, usporedbe mjernih rezultata, uspostavljanja sljedivosti, primjene mjeriteljskih principa u strojnom učenju, itd., u radu su primijenjene različite metode procjene mjerne nesigurnosti te je istražen utjecaj procjena standardnih nesigurnosti na ukupnu mjernu nesigurnost. Izračuni nesigurnosti su provedeni uporabom okvira nesigurnosti prema Vodiču za procjenu mjerne nesigurnosti – GUM metoda, primjenom Monte Carlo metode, primjenom adaptivnoga postupka Monte Carlo i Bayesove metode. U radu su u izračunu mjerne nesigurnosti, bez obzira na prirodu ulaznih veličina uključujući i model mjerenja, razdiobe ulaznih veličina specificirane potpuno objektivno bez nametanja bilo kakvih ograničenja na mjerni rezultat. Veza između ulaznih veličina i izlazne veličine je uspostavljena preko mjernog modela ili opservacijskog modela. Istraživanje različitih pristupa procjeni standardnih nesigurnosti na ukupnu mjernu nesigurnost je provedeno na različitim umjernim modelima. Priorne razdiobe za ulazne veličine (GUM metoda, MCS metoda, Bayesova metoda) su formirane na temelju dostupnih informacija, a priorne razdiobe za izlaznu veličinu (Bayesova metoda) su kreirane kao manje informativne ili neinformativne razdiobe. Ako postoji pouzdana informativna priorna razdioba nema valjanog razloga za odbacivanje takve razdiobe. Uporabom ove razdiobe dobiva se transparentan model što omogućuje lakši kritički osvrt na isti, njegovu provjeru i ažuriranje. Za izlaznu veličinu je specificiran 95 % simetrični i/ili 95 % najkraći interval pokrivanja koji se koriste za iskazivanje potpunog mjernog rezultata. Na osnovi provedenih istraživanja uspostavljeni su kriteriji za odabir metoda za izračun mjerne nesigurnosti. Nadalje, istražen je utjecaj standardne nesigurnosti na proces donošenja odluka sukladnosti uporabom Bayesove metode. Specifični rizik je izračunat iz posteriorne razdiobe, a globalni rizik iz zajedničke razdiobe. U cilju implementiranja mjeriteljskih principa u strojno učenje testirane su metode nadziranog strojnog učenja sa sljedivim podacima. Peterostruka unakrsna provjera je korištena u uporabi metoda nadziranog strojnog učenja. Za navedenu provjeru su izračunate matrice zabune. Kriterij točnosti je korišten za usporedbu dobivenih rezultata. Programski jezik Python i MATLAB su korišteni u radu u svrhu izračuna mjerne nesigurnosti, ocjenjivanja sukladnosti i primjene mjeriteljskih principa u strojnom učenju.

EXTENDED SUMMARY

The general rules for expressing the complete measurement result are based on the Guide to the Expression of Measurement Uncertainty in Measurement. In accordance with the highlighted need for expressing the complete measurement result, assessing conformance, comparing results, establishing traceability, applying metrological principles in machine learning, etc., and the various impact approaches for the standard uncertainty quantifications on the overall measurement uncertainty are researched.

INTRODUCTION

In this chapter, the necessity for research on the various impact approaches for the standard uncertainty quantifications on the overall measurement uncertainty for assessing conformance, comparing results, establishing traceability, and applying machine learning in metrology is presented. The doctoral thesis is motivated by participating in research projects and reviewing the literature from this field. In addition to this, the goal, hypothesis, methods, and research plan are represented, including the expected scientific contribution.

METHODS

In the methods chapter, the essential metrological terms, uncertainty quantification methods, and machine learning methods are introduced. By applying the Guide to the Expression of Measurement Uncertainty in Measurement – GUM method, Monte Carlo method, Monte Carlo adaptive method, and Bayesian method, the uncertainty quantification are done. The GUM method for quantifying uncertainty is conditioned by the Law of Propagation of Uncertainty. The output quantity is represented by the particular distribution for calculating the coverage interval. Furthermore, information Type A and Type B, needed for uncertainty quantification and expended measurement uncertainty, respectively, representing the knowledge regarding the input quantities. In addition to this, the Monte Carlo method for quantifying uncertainty is conditioned by generating samples randomly from the informative prior distributions. Based on the output quantity calculated values, its distribution is calculated. The required parameters which represent this distribution and coverage interval are calculated. Also, the Bayesian method for quantifying uncertainty is conditioned by combining the prior knowledge regarding the output

quantity with the data collected during the calibration process. The marginal distribution is calculated from the joint posterior distribution. The required parameters which represent this marginal distribution and coverage interval are calculated. In addition to this, the relation between the metrological principles in machine learning and machine learning principles in metrology are presented in this doctoral thesis. The key challenge in applying the machine methods in metrology is the basic metrological feature and trust in obtained results. To put in a nutshell, the machine learning supervised methods are tested with the traceable data.

RESULTS

In this doctoral thesis, quantifying measurement uncertainties, regardless of the origin, the input quantities, measurement models, probability density functions for the input quantities are specified as entirely objective without any further restrictions on the measurement results. By applying different measurement models, the various impact approaches for the standard uncertainty quantifications on the overall measurement uncertainty is researched. The prior distributions for the input quantities (GUM method, MCS method, Bayesian method) are based on the available information, and the prior distributions for the output quantities (Bayesian method) are formed as the less informative and non-informative distributions. If the informative prior distribution is available, there is no any valid reason for using these distributions. By using these distributions, it is getting a more transparent model, and providing easier feedback, updating, and checking the model. The relationship between input quantity and output quantity is established by using the measurement or observation models. The output quantity is specified by 95 % symmetric and/or 95 % shortest coverage intervals. These intervals are used for presenting the complete measurement result. Based on the research, the criteria for selecting the uncertainty quantification method are established. In addition to this, the standard uncertainty impact on the conformity assessment decisions is researched by applying the Bayesian method. The specific risk is calculated from the posterior distribution, and the global risk is calculated from the joint distribution. According to the conducting research, the standard uncertainty impact on the overall measurement uncertainty in the conformity assessment decision making process is presented. Moreover, the machine learning supervised methods are tested by using the traceable data in order to gain trust in the obtained results. The data for testing the machine learning methods are publicly available. The first used unsupervised method for classification data is the Support Vector Machine Method and the second unsupervised method for classification data is the Soft Max Regression Method. As for the data for the supervised machine learning methods, they are divided into two groups, 80 % makes training data and 20 % makes testing data. The five-fold cross validation matrices (accuracy) are used for result presenting and comparing methods. The program languages Python and MATLAB are used for calculating and presenting the final results.

CONCLUSION

In this chapter, the various impact approaches for the standard uncertainty quantifications on the overall measurement uncertainty are summarized. The criteria for selecting uncertainty quantifications methods are elaborated, and the guidelines for future research are provided.

KLJUČNE RIJEČI:

mjerna nesigurnost, metode procjene mjerne nesigurnosti, ocjenjivanje sukladnosti, strojno učenje u mjeriteljstvu

KEYWORDS:

measurement uncertainty, measurement uncertainty methods, conformity assessment, machine learning in metrology

SADRŽAJ

1 Uvod **18**

1.1 Motivacija 18

1.2 Cilj i hipoteze istraživanja 19

1.3 Metode i plan istraživanja 20

1.4 Znanstveni doprinos 21

2 Metode **22**

2.1 Iskazivanje potpunog rezultata mjerenja 22

2.2 Principi sljedivosti 23

2.3 GUM metoda 25

2.4 MCS metoda 32

2.5 Bayesova metoda 38

2.6 Strojno učenje u mjeriteljstvu 42

3 Rezultati **47**

3.1 Izračun nesigurnosti uporabom različitih metoda 47

3.1.1 Izračun nesigurnosti GUM metodom 48

3.1.2 Izračun nesigurnosti MCS metodom 50

3.1.3 Izračun nesigurnosti Bayesovom metodom 52

3.1.4 Kriteriji za odabir metoda 58

3.2 Utjecaj standardne nesigurnosti na donošenje odluka sukladnosti 62

3.2.1 Izračun rizika uporabom Bayesove metode 63

3.2.2 Specifikacija modela 66

3.2.3 Kriteriji za donošenje odluka sukladnosti 68

3.3 Izračun nesigurnosti s funkcijom umjeravanja 79

3.3.1 Izračun nesigurnosti parametara funkcije umjeravanja uporabom GUM metode 80

3.3.2 Izračun nesigurnosti parametara funkcije uporabom Bayesove metode 84

3.3.3 Kriteriji za odabir metoda 89

3.4 Primjena mjeriteljskih principa u strojnom učenju 92

3.4.1 Nadzirano strojno učenje – Metoda stroja potpornih vektora 96

3.4.2 Nadzirano strojno učenje – Višestruka logistička regresija 102

3.4.3 Kriteriji za odabir metoda 107

4 **Zaključak** **109**

A **Prilozi** **113**

A.1 Kriteriji za vrednovanje metoda nadziranog strojnog učenja 113

A.2 Baza podataka 115

A.3 Metoda potpornih vektora – Blok kod 1 116

A.4 Metoda potpornih vektora – Blok kod 2 118

A.5 Višestruka logistička regresija – Blok kod 1 120

A.6 Višestruka logistička regresija – Blok kod 2 122

Literatura **131**

Životopis **132**

Biography **133**

POPIS SLIKA

2.1 Piramida sljedivosti 23

2.2 Ilustrativni prikaz implementacije GUM metode [1, 9, 24] 28

2.3 Eksponencijalna razdioba 30

2.4 Normalna razdioba i studentova razdioba 31

2.5 Grafički prikaz modela za određivanje broja (π) 33

2.6 Generiranje slučajnih uzoraka iz uniformne razdiobe u opsegu [0, 1) 33

2.7 Prikaz generiranih točaka kruga (crvene točke) i kvadrata (plave točke) . . 34

2.8 Ilustrativni prikaz implementacije MCS metode [2, 24] 36

2.9 Prikaz rezultata za nelinearni model $Y = X^2$ (najkraći interval) [24] 37

2.10 Prikaz rezultata za nelinearni model $Y = X^2$ (simetrični interval) [24] . . . 37

2.11 Ilustrativni prikaz implementacije Bayesove metode [51] 39

2.12 Razlika između konvencionalnog programiranja i strojnog učenja [38] . . . 43

3.1 Funkcija gustoće vjerojatnosti za izlaznu veličinu dobivenu GUM metodom 49

3.2 Kumulativna funkcija razdioba i funkcija gustoće vjerojatnosti za izlaznu veličinu dobivenu MCS metodom 50

3.3 Prikaz priornih i posteriornih razdioba 53

3.4 Kumulativna funkcija razdioba i funkcija gustoće vjerojatnosti za izlaznu veličinu dobivenu Bayesovom metodom uporabom manje informativne priorne razdiobe 55

3.5 Prikaz putanja četiri lanca za opservacijski model 57

3.6 Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja 58

3.7 Rezultati za 95 % najkraći interval pokrivanja 59

3.8 Ocjenjivanje sukladnosti Na slici je prikazana točnost uređaja, tolerancijski interval $(T_L, T_U) = (A_L, A_U)$ (zelena linija), umjerne točke s 95 % intervalom pokrivanja (plava boja), kontrolna mjerenja s 95 % intervalom pokrivanja (crvena boja) i stvarne vrijednosti mjerenja (crne točke) 67

3.9 Ocjenjivanje sukladnosti za nominalnu vrijednost 110 kPa prema specifikaciji 68

3.10 Specifični potrošačev rizik, R_c^*, za izmjerenu vrijednost 109,9790 kPa 69

3.11 Specifični potrošačev rizik, R_c^*, za izmjerenu vrijednost 110,0010 kPa 69

3.12 Prikaz specifičnog potrošačevog rizika za 50 točaka 70

3.13 Specifični proizvođačev rizik, R_p^*, za izmjerenu vrijednost 109,9790 kPa . . 71
3.14 Specifični potrošačev rizik, R_p*, za izmjerenu vrijednost 110,0010 kPa . . . 71
3.15 Prikaz specifičnog proizvođačevog rizika za 50 točki 72
3.16 Prikaz globalnog potrošačevog i proizvođačevog rizika 73
3.17 Odnos rizika između proizvođača i potrošača (%) 75
3.18 Točke umjeravanja 80
3.19 Standardna regresijska analiza 82
3.20 Usporedni prikaz razdioba funkcije umjeravanja 85
3.21 Bayesova regresijska analiza 87
3.22 Prikaz putanja četiri lanca za funkciju umjeravanja 87
3.23 Usporedba rezultata za parametar β_0 89
3.24 Usporedba rezultata za parametar β_1 90
3.25 Kovarijanca parametara funkcije umjeravanja 90
3.26 Morfološke osobine EKG signala [77] 92
3.27 Prikaz normativnih točaka 93
3.28 12 kanalni ECG signala za klasu 0 94
3.29 12 kanalni ECG signala za klasu 1 94
3.30 12 kanalni ECG signala za klasu 2 95
3.31 12 kanalni ECG signala za klasu 3 95
3.32 Matrica zabune 4 x 4 za I vod 97
3.33 Matrica zabune 2 x 2 za I vod 98
3.34 Matrica zabune 4 x 4 za vod I 99
3.35 Matrica zabune 2 x 2 za vod I 100
3.36 Blok dijagram – SVM 101
3.37 Matrica zabune 4 x 4 za I vod 102
3.38 Matrica zabune 2 x 2 za I vod 103
3.39 Matrica zabune 4 x 4 za I vod 104
3.40 Matrica zabune 2 x 2 za I vod 105
3.41 Blok dijagram – SoftMax 106

A.1 Prikaz matrice zabune (binarna klasifikacija) 113
A.2 Metapodaci baze podataka [74] 115

POPIS TABLICA

2.1 Procjena broja π uporabom MCS metode 34

3.1 Ulazne veličine za model umjeravanja utega 48
3.2 Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja 49
3.3 Rezultati za 95 % najkraći interval pokrivanja 51
3.4 Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja 51
3.5 Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja 54
3.6 Rezultati za 95 % najkraći interval pokrivanja 56
3.7 Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja 56
3.8 Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja 58
3.9 Rezultati za 95 % najkraći interval pokrivanja 59
3.10 Utjecaj mjerne nesigurnosti na specifični rizik 76
3.11 Utjecaj mjerne nesigurnosti na globalni rizik 77
3.12 Podaci umjeravanja za senzor tlaka 79
3.13 Parametri funkcije umjeravanja 82
3.14 Iskazivanje ukupne nesigurnosti 83
3.15 Parametri funkcije umjeravanja 87
3.16 Usporedba rezultata 89
3.17 Klasifikacijski izvještaj za I vod 97
3.18 Rezultati točnosti za 12 EKG vodova 97
3.19 Matrica zabune 2 x 2 za vod I 98
3.20 Klasifikacijski izvještaj za vod I 99
3.21 Rezultati točnosti za 12 EKG vodova 99
3.22 Matrica zabune 2 x 2 za vod I 100
3.23 Klasifikacijski izvještaj za I vod 103
3.24 Rezultati točnosti za 12 EKG vodova 103
3.25 Matrica zabune 2 x 2 za I vod 104
3.26 Klasifikacijski izvještaj za I vod 105
3.27 Rezultati točnosti za 12 EKG vodova 105
3.28 Matrica zabune 2 x 2 za I vod 106

POPIS OZNAKA

β_0	Parametar funkcije umjeravanja (odsječak)	kPa
β_1	Parametar funkcije umjeravanja (nagib)	–
$\boldsymbol{\Theta}$	Ulazne veličine (Tip B informacije)	–
$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}\right) = 0$	Mjerni model	–
$\boldsymbol{u(x)}$	Standardne nesigurnosti ulaznih veličina	–
$\boldsymbol{X}$	Ulazne veličine	–
$\boldsymbol{x}$	Numeričke vrijednosti ulaznih veličina	–
$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{X}\right)$	Mjerna funkcija	–
$\boldsymbol{Y}$	Izlazne veličine	–
$\boldsymbol{y}$	Numeričke vrijednosti izlaznih veličina	–
$\boldsymbol{\xi}$	Promatrani podaci	–
δm	Odstupanje prividne mase utega W od nominalne nazivne mase	g
$\hat{\eta}$	Očekivana vrijednost parametra	–
$\lambda e^{-\lambda x}$	Eksponencijalna razdioba	–
$\mathbb{E}$	Očekivana vrijednost	–
$\mathbb{P}$	Vjerojatnost	–
$\mathbb{P}(A \mid B)$	Uvjetna vjerojatnost	
$\mathbb{V}$	Varijanca	–
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	Funkcija vjerodostojnosti	–
$\mathrm{cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)$	Standardna korelirana nesigurnost parametara	–
$\mathrm{cov}(X_i, X_j)$	Kovarijanca ulaznih veličina	–
$\mathrm{cov}(x_i, x_j)$	Numerička vrijednost kovarijance ulaznih veličina	–
F_2	Klasa točnosti	–
ν_{eff}	Broj stupnjeva slobode	–
π	Broj pi	–
ρ_{a}	Gustoća zraka	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$

ρ_{R}	Gustoća referentnog utega	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
ρ_{W}	Gustoća ispitnog utega	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
$\widehat{\delta m}$	Najbolja procjena izlazne veličine	mg
A_{C}	Površina kruga	–
A_{C}	Površina kvadrata	–
A_L	Donja granica prihvaćanja	kPa
A_U	Gornja granica prihvaćanja	kPa
c	Normalizirana konstanta	–
c_i	Koeficijent osjetljivosti	–
D	Opservacijski model (Tip A informacije)	–
$f(Y, \boldsymbol{X}) = 0$	Mjerni model	–
f_Y	Priorna kontinuirana razdioba	–
$f_{X\|Y}$	Promatrani model	–
$f_{X_i,X_j}(x_i, x_j)$	Zajednička razdioba koreliranih ulaznih veličina	–
$f_{X_i}(x_i)$	Razdioba i-te ulazne veličine	–
$f_{Y\|X}(\cdot \mid X = x)$	Bayesovo pravilo	–
$J(\theta)$	Objektna funkcija – SoftMax	–
$J(\theta, \theta_0)$	Objektna funkcija – SVM	–
k	Faktor pokrivanja	–
m_{nom}	Nominalna nazivna masa	g
$m_{\mathrm{R,c}}$	Prividna masa referentnog utega R	g
p_Y	Priorna razdioba (diskretna)	–
$p_{X\|Y}$	Promatrani model	–
$p_{Y\|X}(\cdot \mid X = x)$	Bayesovo pravilo	–
R_c	Globalni potrošačev rizik	%
R_c^*	Specifični potrošačev rizik	%
R_p	Globalni proizvođačev rizik	%

R_p^*	Specifični proizvođačev rizik	%
s	Standardna devijacija	–
S_n	Skup podataka	–
T_L	Donja granica intervala	kPa
T_U	Gornja granica intervala	kPa
U	Proširena nesigurnost	–
$u(\widehat{\beta}_0)$	Standardna nesigurnost parametra odsječka	–
$u(\widehat{\beta}_1)$	Standardna nesigurnost parametra nagiba	–
$u(\widehat{\delta m})$	Standardna nesigurnost izlazne veličine	mg
$u(x)$	Standardna nesigurnost ulazne veličine	–
$u(x_i, x_j)$	Standardna nesigurnost koreliranih veličina	–
$u(y)$	Standardna nesigurnost izlazne veličine	–
X	Ulazna veličina	–
x	Numerička vrijednost ulazne veličine	–
$x^{(i)}$	Ulazni podaci	–
$Y = f(\boldsymbol{X})$	Mjerna funkcija	–
Y	Izlazna veličina	–
y	Numerička vrijednost izlazne veličine	–
$y^{(i)}$	Izlazni podaci	–
$\delta m_{\mathrm{R,c}}$	Prividna masa utega (dodatak)	g
C	Interval parametra	–
R	Referentni uteg	g
W	Ispitni uteg	g

POPIS KRATICA

AVBlock	Atrioventricular (AV) block – Atrioventrikulski blok
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures – Međunarodni biro za utege i mjere
CGPM	Conference Generale des Poids et Mesures – Generalni komitet za utege i mjere
CMC	Calibration and Measurement Capabilities – Mjerne sposobnosti
EKG	Elektrokardiogram
EURAMET	European Association of National Metrology Institutes – Europski savez nacionalnih mjeriteljskih instituta
FFCV	Five-Fold Cross Validatione – Peterostruka unakrsna pr ovjera
GDA	Gradient Descent Algorithm – Algoritam postupnog opadanja
GUM	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement – Vodič za procjenu mjerne nesigurnosti
HLS	Hinge Loss Function – Funkcija gubitaka
IMBiH	Institute of Metrology of Bosnia and Herzegovina – Institut za mjeriteljstvo Bosne i Hercegovine
JCGM-WG1	JCGM Working Group on the Expression of Uncertainty in Measurement – JCGM Radna grupa za procjenu mjerne nesigurnosti
KCDB	Key Comparisons Database – Ključna baza podataka
LBBB	Left Bundle Branch Block – Blok lijeve grane snopa

LPU	Law of Propagation of Uncertainty – Zakon o propagaciji mjerne nesigurnosti
MATHMET	European Metrology Network for Mathematics and Statistics – Europska mjeriteljska mreža za statistiku i matematiku
MCMC	Monte Carlo Markov Chain – Monte Carlo Markovljev lanac
MCS	Monte Carlo Simulation – Monte Carlo simulacija
MRA	Mutual Recognition Arrangement – Sporazum o međusobnom priznavanju
NUTS	No-U-Turn Sampler
RBBB	Right Bundle Branch Block – Blok desne grane snopa
SC-P	Subcommittee for Pressure – Podgrupa za tlak
SoftMax	Multinomial Logistic Regression – Višestruka logistička regresija
SVM	Support-Vector Machine – Metoda potpornih vektora
TC-M	Technical Committee of Mass and Related Quantities – Tehnički komitet za masu i srodne veličine
WG-M4D	Working Group on Metrology for Digital Transformation – Radna grupa za digitalnu transformaciju u mjeriteljstvu

1. UVOD

Vodič za iskazivanje mjerne nesigurnosti (GUM) je utemeljio opća pravila za iskazivanje potpunog mjernog rezultata. Slijedom istaknute potrebe za iskazivanjem potpunog mjernog rezultata u svrhu ocjenjivanja sukladnosti, usporedbe mjernih rezultata, uspostavljanja sljedivosti, primjene mjeriteljskih principa u strojnom učenju, u radu su primijenjene različite metode procjene mjerne nesigurnosti te je istražen utjecaj procjena standardnih nesigurnosti na ukupnu mjernu nesigurnost. Metode strojnog učenja su metode temeljene na podacima i često puta su tzv. crne kutije (*engl. black-box*). Radi stjecanja povjerenja u rezultat strojnog učenja potrebno je implementirati temeljne mjeriteljske principe. Temeljni mjeriteljski principi u strojnom učenju su: sljedivost, umjeravanje i nesigurnost. Pored navedenoga osiguravanje povjerenja u rezultat strojnog učenja uključuje generalizaciju, robusnost i interpretabilnost rezultata strojnog učenja. Primjena strojnog učenja u mjeriteljstvu odnosno analizi podataka osigurava proširenje primjene mjeriteljstva na znanstvene discipline gdje su fizički modeli vrlo kompleksni ili nedostatni. Radi podržavanje digitalne transformacije u mjeriteljstvu (europski zeleni plan, zdravstvo, energija, itd.) koja je predvođena strojnim učenjem, mjeriteljstvo treba usvojiti strojno učenje u svoje okvire radi implementiranja zahtjeva digitalne transformacije u mjeriteljstvu. U svrhu implementiranja mjeriteljskih principa u strojno učenje u radu su primijenjene dvije metode nadziranog strojnog učenja. Primjena mjeriteljskih principa u strojnom učenju i strojnog učenja u mjeriteljstvu je obostrana.

1.1. Motivacija

Jedan od primarnih zadataka u mjeriteljstvu je ostvarivanje povjerenja u mjerni rezultat. Prihvaćenjem GUM vodiča omogućeno je ostvarivanje povjerenja u mjerni rezultat odnosno njegovo nedvojbeno iskazivanje. Za mjerni rezultat kažemo da je potpun ako mu je pridružena mjerna nesigurnost. Mjerna nesigurnost je definirana kao parametar koji opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjernoj veličini, a iskazivanju mjerne nesigurnosti prethodi postavljanje matematičkog modela koji najbolje opisuje mjernu veličinu [1]. Ukratko se može kazati da mjerna nesigurnost predstavlja kvalitetu mjernog rezultata. Iako je dan veliki značaj Vodiču za procjenu mjerne nesigurnosti – GUM metoda, iz razloga što daje konceptualni okvir koji omogućuje dosljedan izračun nesigurnosti iz slučajnih i sustavnih djelovanja, ubrzo se pokazalo da u određenim slučajevima neki uvjeti koje zahtijeva ova metoda nisu ispunjeni te njena primjena dovodi do neprihvatljivih rezultata. U slučajevima kada je funkcijski odnos između izlazne veličine i njezinih ulaznih veličina nelinearan, a razvoj te funkcije u Taylorov red uz zadržavanje samo prvih članova razvoja nije prihvatljivo približno određenje, razdioba izlazne veličine ne može se dobiti konvolucijom razdioba ulaznih veličina. Temeljem istaknute potrebe Zajednički odbor za vodiče u mjeriteljstvu (JCGM-WG1) je priredio sljedeće upute: Vodič za iskazivanje mjerne nesigurnosti (GUM) [1], Vodič za iskazivanje mjerne nesigurnosti – Propagacija distribucija uporabom Monte Carlo metoda (GUM-S1) [2] i Vodič za iskazivanje mjerne nesigurnosti – Proširenje na bilo koji broj veličina od interesa (GUM-S2) [3]. Zajednički odbor za vodiče u mjeriteljstvu je priredio ukupno šest vodiča [1–6] u svrhu iskazivanja mjernog rezultata. Potreba za revizijom trenutnih vodiča za izračun mjerne nesigurnosti je najbolje pokazana kroz on-line anketu. Više od 50 % ispitanika u anketi je izrazilo potrebu za dodatnom razradom metoda za izračun mjerne nesigurnosti. Provedena analiza inicira potrebu za univerzalnim konceptom procjene nesigurnosti i potvrđuje važnosti GUM koncepta širom svijeta [7–9]. Nadalje, mjeriteljstvo je pružilo podršku novim znanstvenim područjima koja se bave bitnim društvenim problemima, kao što je mjeriteljstvo za potrebe zdravstva. U novim znanstvenim područjima funkcijski odnosi ulaznih i izlaznih veličina su vrlo složeni i često puta nelinearni, a ulazne veličine i same ovise o drugim veličinama što dovodi do složenog funkcijskog odnosa koji se ne može uvijek eksplicitno iskazati [10–14]. U takvim slučajevima primjena GUM metoda može dovesti do neprihvatljivih rezultata stoga se zahtijevaju druge metode za izračun nesigurnosti. Potreba za uvođenjem i osiguravanjem temeljnih mjeriteljskih principa kod primjene strojnog učenja je naglašena u strategiji Europskog saveza nacionalnih mjeriteljskih instituta (EURAMET 2030) [15] pri čemu je fokus stavljen na mjeriteljstvo za potrebe zdravstva, mjeriteljstvo za potrebe digitalne transformacije, mjeriteljstvo za potrebe Europskog zelenog plana, te druge izazove za poboljšavanje kvalitete življenja. Dodatna motivacija za rad je temeljena na sudjelovanju u znanstveno-istraživačkim projektima i strategiji EURAMET 2030.

1.2. Cilj i hipoteze istraživanja

Cilj istraživanja:

Cilj istraživanja je osiguravanje harmoniziranog pristupa procjeni mjerne nesigurnosti prema međunarodnim smjernicama i pouzdanog donošenja odluka o sukladnosti rezultata sa specifikacijama.

Hipoteze istraživanja:

1. Moguće je postaviti kriterije za odabir metoda koje dobro opisuju uzrok varijabilnosti u procjeni standardnih nesigurnosti.
2. Moguće je razviti model za ocjenjivanje sukladnosti i pouzdano donošenje odluka koji uključuje znanje o mjernim nesigurnostima.

1.3. Metode i plan istraživanja

Temeljem istaknute potrebe za iskazivanjem potpunog mjernog rezultata u svrhu ocjenjivanja sukladnosti, usporedbe mjernih rezultata, uspostavljanja sljedivosti, primjene mjeriteljskih principa u strojnom učenju, itd., u radu su primijenjene različite metode procjene mjerne nesigurnosti,istražen utjecaj procjena standardnih nesigurnosti na ukupnu mjernu nesigurnost te vrednovanje rezultata strojnog učenja. Izračuni nesigurnosti su provedeni uporabom GUM metode, primjenom Monte Carlo metode, primjenom adaptivnoga postupka Monte Carlo i Bayesove metode. GUM metoda za izračun nesigurnosti uvjetuje primjenu zakona o propagaciji mjerne nesigurnosti i predočavanje izlazne veličine određenom razdiobom s ciljem izračunavanja intervala pokrivanja. Informacije za A vrstu i B vrstu sastavnica mjerne nesigurnosti koje se koriste u izračunu sastavljene odnosno proširene mjerne nesigurnosti predstavljaju stanje znanja vezanog za ulazne veličine. Monte Carlo metoda za izračun nesigurnosti implicira generiranje slučajnih uzoraka iz priornih informativnih razdioba. Na temelju izračunatih vrijednosti veličine od interesa tvori se njena razdioba za izračunavanje zahtijevanih parametara koji opisuju ovu razdiobu i interval pokrivanja. Bayesova metoda za izračun nesigurnosti kombinira priorno znanje za veličinu od interesa s podacima dobivenim tijekom postupka umjeravanja. Iz zajedničke posteriorne razdiobe se izračunava marginalna posteriorna razdioba za izračunavanje parametara koji opisuju razdiobu i intervale pokrivanja. U svrhu ostvarivanje povjerenja u rezultat nadziranog strojnog učenja u radu su vrednovani rezultati za dvije metode, metoda stroja potpornih vektora i višestruka logistička regresija. Rezultati nadziranog strojnog učenja su vrednovani na temelju sljedivih podataka. Kriterij točnost je korišten za vrednovanje rezultata strojnog učenje. Programski jezik Python i MATLAB su korišteni u radu u svrhu izračuna nesigurnosti, ocjenjivanja sukladnosti i vrednovanju rezultata strojnog učenja. Istraživanja u radu su povezana s znanstvenim projektima [16–18] realiziranim u Institutu za mjeriteljstvo Bosne i Hercegovine (IMBiH).

1.4. Znanstveni doprinos

U radu su provedeni izračuni nesigurnosti uporabom okvira nesigurnosti prema Vodiču za procjenu mjerne nesigurnosti - GUM metoda, primjenom Monte Carlo metode, primjenom adaptivnog postupka Monte Carlo metode i Bayesove metode. Istražen je utjecaj standardne nesigurnosti na proces donošenja odluka sukladnosti uporabom Bayesove metode. U cilju osiguravanja povjerenja u rezultat mjerenja u radu je provedena harmonizacija navedenih metoda te su uspostavljeni kriteriji za odabir metoda za izračun mjerne nesigurnosti čime su potvrđene postavljene hipoteze. Dodatno je istražena primjena strojnog učenja u mjeriteljstvu radi proširenja mjeriteljstva na znanstvene discipline gdje su fizički modeli vrlo kompleksni ili nedostatni odnosno za potrebe digitalne transformacije u mjeriteljstvu koja je predvođena strojnim učenjem.

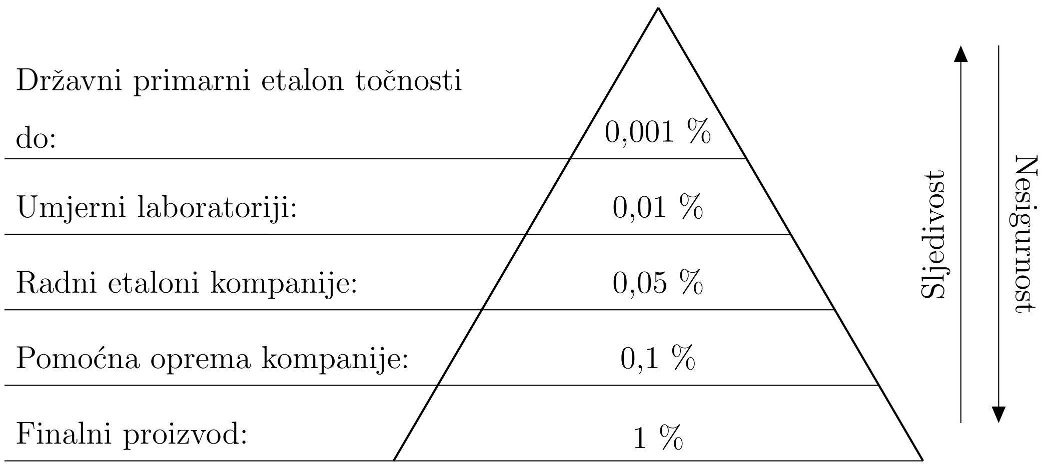
2. METODE

2.1. Iskazivanje potpunog rezultata mjerenja

Temeljem istaknute potrebe potpunog mjernog rezultata u radu su primijenjene različite metode za ostvarivanje navedenoga cilja. Mjerenje je proces eksperimentalnoga dobivanja jedne ili više vrijednosti veličine koje se mogu razumno pripisati mjernoj veličini ili veličini od interesa [19]. Svrha mjerenja je određivanje vrijednosti veličine od interesa (mjerni rezultat). Mjerni se rezultat općenito izražava jednom vrijednošću mjerene veličine i mjernom nesigurnošću [19]. Vrijednost mjerene veličine je često prosječna vrijednost ili procjena prosječne vrijednosti izmjerenih vrijednosti veličine dobivenih u uvjetima ponovljivosti i/ili obnovljivosti. Zbog utjecaja pogrešaka u mjernom sustavu prosječna vrijednost ili procjena prosječne vrijednosti izmjerenih vrijednosti ne pružaju sve informacije koje su vezane za mjerenu veličinu. Kako bi se dobila potpuna mjeriteljska informacija mjerni rezultat mora uključivati i iznos mjerne nesigurnosti. Mjerna nesigurnost opisuje rasipanje rezultata mjerenja pri čemu obuhvaća utjecaje sustavnih djelovanja (nesigurnost korekcije sustavnog odstupanja, nesigurnost etalona, nesigurnost mjernog modela) i slučajnih djelovanja u mjernom sustavu. Rasipanje rezultata se procjenjuje standardnim odstupanjima koja se nazivaju standardnim mjernim nesigurnostima. Mjerna nesigurnost se sastoji od mnogo sastavnica funkcijski povezanih u mjerni model. Mjerni model prikazuje matematički odnos izlazne i ulaznih veličina. Nedostatak znanja o utjecajnim veličinama, promjene rezultata u uvjetima ponovljivost ili obnovljivosti te nesigurnost pridružena samom matematičkom modelu doprinosi nesigurnosti mjernog rezultata. U radu su u izračunu mjerne nesigurnosti, bez obzira na prirodu ulaznih veličina uključujući i model mjerenja, razdiobe ulaznih veličina specificirane potpuno objektivno bez nametanja bilo kakvih ograničenja na mjerni rezultat. Veza između ulaznih veličina i izlazne veličine je uspostavljena preko mjernog modela ili opservacijskog modela. Za izlaznu veličinu je specificiran 95 % simetrični i/ili 95 % najkraći interval pokrivanja koji se u najvećoj mjeri koriste u mjeriteljskoj zajednici [20, 21]. Ne postoji valjani znanstveni razlog za odabir ovog intervala pokrivanja. Može se pretpostaviti da on proizlazi iz činjenice uporabe u statističkim izračunima. Jedan od razlog za korištenje 95 % intervala pokrivanja je svakako i utjecaj MRA sporazuma o međusobnom priznavanju državnih etalona i certifikata umjeravanja, koje izdaju nacionalni mjeriteljski instituti, u kojem su dane preporuke za korištenje 95 % intervala pokrivanja [22–24]. Temeljem istaknute potrebe za iskazivanjem potpunog mjernog rezultata, u svrhu ocjenjivanja sukladnosti, usporedbe mjernih rezultata, uspostavljanja sljedivosti, itd., u radu su primijenjene različite metode procjene mjerne nesigurnosti te je istražen utjecaj procjena standardnih nesigurnosti na ukupnu mjernu nesigurnost.

2.2. Principi sljedivosti

Intenzivnije povezivanje i otvaranje međunarodnih tržišta postavlja sve oštrije zahtjeve kako u pogledu kvalitete proizvoda tako i usluga. Bez uređenog mjeriteljskog sustava, uvedenog i provjerenog sustava osiguravanja kvalitete, bez dokazanih kompetencija umjernih laboratorija, iskazivanja potpunog mjernog rezultata nije moguće uspješno poslovati na međunarodnom tržištu. Stoga primarni cilj državnih mjeriteljskih instituta je uspostavljanje mjeriteljskog sustava s ciljem osiguravanja mjeriteljske sljedivosti prema drugim državnim mjeriteljskim institutima, regionalnim mjeriteljskim organizacijama i prema Međunarodnom uredu za utege i mjere (BIPM). Uspostavljanje mjeriteljske sljedivosti podrazumijeva sljedivost od državnih etalona prema priznatim međunarodnim etalonima do realizacije mjerne jedinice na najvišem nivou u laboratorijima Međunarodnog ureda za utege i mjere (BIPM) u okviru Metarske konvencije, ili do drugih primarnih etalona [25,26]. Na slici (2.1) prikazan je primjer sljedivosti rezultata mjerenja. U postocima je izražena proširena nesigurnost u odnosu na stvarnu realizaciju određene mjerne jedinice.



Slika 2.1: Piramida sljedivosti

Mjeriteljski sustav jedne države podrazumijeva državne etalone i državne laboratorije. Mjeriteljska sljedivost definira se kao osobina da se rezultat nekog mjerenja može dovesti

u vezu s odgovarajućim državnim ili međunarodnim etalonom preko neprekinutoga lanca uspoređivanja [19].
Kvaliteta kontrole nekog proizvoda u najvećoj mjeri ovisi o točnosti mjerenja koja se ne mogu postići bez redovnog umjeravanja mjerne opreme što zahtijeva iskazivanje potpunog rezultata mjerenja. Umjeravanje mjerne opreme je neophodno jer se mjerne karakteristike mjerne opreme mijenjaju tijekom vremena zbog utjecaja različitih vanjskih faktora, kao što su vlaga, temperatura, istrošenost, nestručno rukovanje i slično. Kako bi mjerenja bila pouzdana neophodno je uspostaviti sljedivost rezultata. Osiguravanje kvalitete mjernog sustava postiže se definiranim lancem sljedivosti rezultata mjerenja što zahtijeva uspostavljenu hijerarhiju umjeravanja. Bitan uvjet za priznavanje rezultata mjerenja je postojanje mogućnosti dokazivanja, odnosno mogućnosti dokumentiranja sljedivosti rezultata mjerenja. Praktična primjena teorije grešaka u obradi eksperimentalnih rezultata nije bila dovoljno ujednačena pa je uspoređivanje rezultata istovjetnih i srodnih mjerenja, prezentiranih od različitih institucija i pojedinaca, bilo teško izvodivo. Potrebu za ujednačavanjem izražavanja rezultata na međunarodnom nivou uočile su sve vodeće institucije iz područja mjeriteljstva.
U cilju rješavanja problema Međunarodni ured za utege i mjere (BIPM), koji je član organizacije Generalne konferencije za utege i mjere (CGPM), je donio dokument (GUM) u kojim su dane preporuke za izračun mjerne nesigurnosti kao i smjernice pomoću kojih treba postići ujednačavanje obrade mjernih rezultata i izražavanja mjerne nesigurnosti. Važnost točnih, pouzdanih, mjernih rezultata je od iznimnog značaja za industriju i društvo. Norma koja propisuje „Opće kriterije za ispitne i umjerene laboratorije" (EN ISO/IEC 17025) [27] traži istovjetan pristup procesu mjerenja zahtijevajući mjerne procedure, osiguravanje mjeriteljske sljedivosti, iskazivanje mjerne nesigurnosti, edukaciju osoblja, nepristrano osoblje i slično. Najvažniji zadatak svakog laboratorija je davanje iskaza o rezultatima mjerenja koji moraju biti jasni i nedvosmisleni kako bi korisnici iz njih mogli izvoditi pravilne zaključke.
Za provedbu umjeravanja potrebno je identificirati i kvantificirati sve utjecajne parametre te izračunati mjernu nesigurnost pridruženu rezultatu mjerenja. Rezultat svakog mjerenja sadrži određenu nesigurnost, što znači da se apsolutno točna vrijednost mjerene veličine ne može znati. Postupak umjeravanja se definira kao radnja kojom se pod određenim uvjetima u prvome koraku uspostavlja odnos između vrijednosti veličine s mjernim ne-

sigurnostima koje daju mjerni etaloni i odgovarajućih pokazivanja kojima su pridružene mjerne nesigurnosti, a u drugome koraku ti se podatci upotrebljavaju za uspostavljanje odnosa za dobivanje mjernog rezultata iz pokazivanja [19]. Stoga izračun nesigurnosti se ne može izostaviti u uspostavljanju lanca sljedivosti.
Princip etalonske baze temeljen je na priznavanju umjernih sposobnosti državnih etalona, odnosno, zasniva se upisivanjem (CMC) u ključnu bazu podataka (KCDB) pri Međunarodnom uredu za utege i mjere (BIPM) uz obavezno potpisivanje Sporazuma o međusobnom priznavanju (MRA) u sklopu konvencije o metru. Priznavanju umjernih sposobnosti prethode usporedbena mjerenja (interkomparacije) etalona. Interkomparacije, koje se provode na najvišim razinama, su ključne ili dodatne interkomparacije za čije provođenje su odgovorni Međunarodni ured za utege i mjere (BIPM) i regionalne mjeriteljske organizacije. Sve navedeno ne bi bilo moguće bez jednoobraznog pristupa izračuna mjerene nesigurnosti. Svrha mjeriteljske sljedivosti je uspostavljanje mjeriteljske hijerarhije. Elementi koji su neophodni da bi se pravilno uspostavila mjeriteljska sljedivost su: neprekinuti lanac usporedbe do državnog ili međunarodnog etalona, pisana procedura umjeravanja, mjerna nesigurnost, dokazane tehničke kompetencije laboratorija i sljedivost rezultata do SI jedinice. Uloga mjeriteljstva na međunarodnom nivou je uspostava harmoniziranog globalnog mjeriteljskog sustava koji se može uspostaviti na osnovi tri mjeriteljska principa: prihvaćanje zajedničkog sustava mjernih jedinica koji je direktno vezan za fundamentalne principe fizike, mjerenje kod svih korisnika treba se temeljiti na jednakim fizikalnim realizacijama jedinica i izračun mjerne nesigurnosti kod svih korisnika u lancu sljedivosti treba se temeljiti na uniformnom pristupu. U cilju uspostavljanja sljedivosti rezultata mjerenja u radu su predložene različite metode za izračun mjerne nesigurnosti.

2.3. GUM metoda

GUM metoda za izračun nesigurnosti uvjetuje primjenu zakona o propagaciji mjerne nesigurnosti i predočavanje izlazne veličine određenom razdiobom s ciljem izračunavanja intervala pokrivanja. Informacije za A vrstu i B vrstu sastavnica mjerne nesigurnosti koje se koriste u izračunu sastavljene odnosno proširene nesigurnosti predstavljaju stanje znanja vezanog za ulazne veličine. Izračun mjerne nesigurnosti A vrste je temeljen na frekventističkom pristupu (ponovljenim mjerenjima), a B vrste na Bayesovom pristupu (priornim razdiobama) [28–30]. Procjena najbolje vrijednosti izlazne veličine i standardne nesigurnosti pridružene najboljoj procjeni izlazne veličine, uključujući razdiobu i interval pokrivanja, na temelju ulaznih veličina koje tvore model, je primarna svrha GUM metode. Izračun nesigurnosti je prikazan kroz sljedeće korake [1, 24, 31–33]:

- Definiranje razdioba $f_{X_i}(x_i)$ ulaznih veličina $X_1, \ldots, X_N$, određivanje najbolje procjene vrijednosti ulaznih veličina $\boldsymbol{x} = (x_i, \ldots, x_N)$ i standardnih nesigurnosti koje su pridružene najboljoj procjeni ulaznih veličina $\boldsymbol{u(x)} = (u(x_i), \ldots, u(x_N))^\top$. Ako su ulazne veličine korelirane potrebno je koristiti zajedničku razdiobu $f_{X_i,X_j}(x_i, x_j)$. Postupak procjene sastavnice nesigurnosti A vrste je temeljen na ponovljenim mjerenjima. Na temelju ponovljenih mjerenja izračunava se najbolja procjena vrijednosti ulazne veličine i standardna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni ulazne veličine. Mjerna nesigurnost B vrste, najbolja procjena vrijednosti ulazne veličine i standardna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni izlazne veličine se izračunava iz priorne razdiobe izlazne veličine. Kreirane priorne razdiobe nakon izračuna najbolje procjene izlazne veličine i pridružene nesigurnosti najboljoj izlazne veličine se ne koriste u daljem izračunu nesigurnosti.

- Izračunavanje parcijalnih derivacija prvog reda. Zakon o propagaciji nesigurnosti sukladno GUM metodi se temelji na Taylorovom razvoju polinoma prvog stupanja za mjerni model. Kod nelinearnih modela ili kada je nelinearnost mjernog modela značajna potrebno je aproksimirati mjerni model polinomima većeg stupanja. Taylorov razvoj za beskonačni polinom je dan sljedećim izrazom:

  $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^N(x_0)}{N!}(x - x_0)^N. \qquad (2.1)$$

  Izračun za nelinearnu funkciju odnosno aproksimaciju za četvrti stupanj polinoma je izvedena u sljedećem dokumentu [34].

- Izračunavanje vrijednosti kovarijance između koreliranih ulaznih veličina modela $\mathrm{cov}(x_i, x_j)$ kao $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ za par ovisnih ulaznih veličina (X_i, X_j).

- Izračunavanje najbolje procjene vrijednosti izlazne veličine y za vrijednosti ulaznih veličina $\boldsymbol{x}$. Proces mjerenja predstavlja funkciju ulaznih veličina $\boldsymbol{X} = (X_i, \ldots, X_N)^\top$ i izlazne veličine Y u vidu funkcije $Y = f(\boldsymbol{X})$ ili $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{X})$. Navedena funkcija nije uvijek direktno primjenjiva, ona može imati formu općeg modela $f(Y, \boldsymbol{X}) = 0$ ili

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = 0$, ili uključivati više izlaznih veličina $\boldsymbol{Y} = (Y_i, \ldots, Y_m)$, ili uključivati kompleksne veličine.

- Izračunavanje koeficijenata osjetljivosti. Koeficijent osjetljivosti u općem smislu predstavlja mjeru koliko je osjetljiva izlazna veličina u odnosu na promjenu određene ulazne veličine. Svi načini izračuna koeficijenata osjetljivosti su prihvatljivi iz perspektive GUM metode, oni mogu biti numerički ili analitički. Općeniti izraz za izračunavanje koeficijenata osjetljivosti je dan izrazom:

$$c_i = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N} . \tag{2.2}$$

- Izračunavanje standardne nesigurnosti $u(y)$. Kod izračuna navedene nesigurnosti kod univarijantnih realnih mjernih modela ili funkcija, standardna nesigurnost se može zapisati na sljedeći način uz upotrebu kovarijantne matrice:

$$u^2(y) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{U_X} \boldsymbol{c} = [c_1, \ldots, c_N]^\top \begin{bmatrix} \mathrm{cov}(x_1, x_1) & \ldots & \mathrm{cov}(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_N, x_1) & \ldots & \mathrm{cov}(x_N, x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} . \tag{2.3}$$

Kada se razmatra univarijantna mjerna funkcija $Y = f(\boldsymbol{X})$ onda se radi o funkcijskom odnosu jedne izlazne veličine i više ulaznih veličina. Navedena mjerna funkcija nije uvijek primjenjiva, te stoga postoje multivarijantne funkcije (više izlaznih veličina), univarijantni modeli, multivarijantni modeli, kompleksne funkcije (univarijantne i multivarijantne), te kompleksni modeli (univarijantni i multivarijantni). Kako bi se izračunala nesigurnost neophodno je izraz (2.3) prilagoditi navedenim modelima odnosno funkcijama. Standardne nesigurnosti se zbrajaju matematički uporabom Zakona o propagaciji nesigurnosti (LPU):

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i, x_j), \tag{2.4}$$

gdje je $u(y)$ predstavlja vrijednost standardne nesigurnosti koja je pridružena najboljoj procjeni vrijednosti izlazne veličine, $u(x_i)$ predstavlja vrijednost standardne nesigurnosti koja je pridružena najboljoj procjeni ulazne veličine, c_i i c_j predstavljaju koeficijente osjetljivosti za dvije različite ulazne veličine i $u(x_i, x_j)$ predstavljaju kovarijantne standardne nesigurnosti između koreliranih ulaznih veličina.

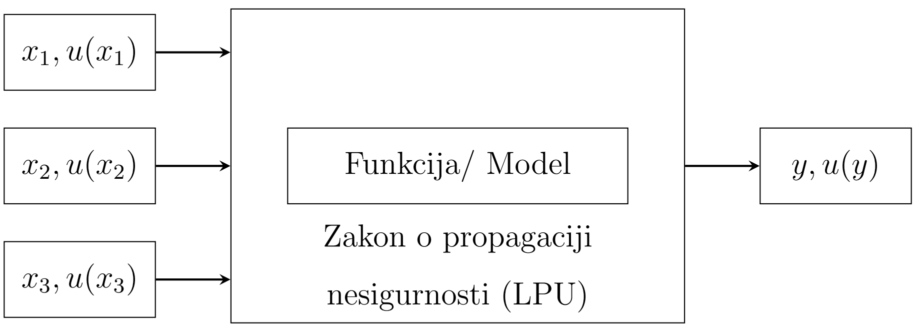
- Sljedeći korak u implementaciji metode je izračun efektivnih stupnjeva slobode pridruženih izlaznoj veličini sukladno Welch-Satterthwaite izrazu:

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{n} u_i^4(y)/\nu_i}. \tag{2.5}$$

  Stupnjevi slobode se određuju sukladno tipu nesigurnosti. Broj stupnjeva slobode pruža pouzdanost u procesu kvantificiranja nesigurnosti [35]. Nadalje GUM ne navodi kako se izračunavaju stupnjevi slobode kod zajedničkih razdioba.

- Izračunavanje proširene nesigurnosti mjerenja $U = ku(y)$ i $\mathbb{P} = 95\,\%$, faktor pokrivanja k i intervala pokrivanja $\mathbb{P}$. Ako je izračunati broj stupnjeva slobode veći ili jednak 30, pretpostavlja se da se izlazna veličina ponaša po normalnoj razdiobi $\frac{Y-y}{u(y)} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ako je broj stupnjeva slobode manji od 30 [20] može se pretpostaviti da se izlazna veličina ponaša po Studentovoj razdiobi $\frac{Y-y}{u(y)} \sim t_{\nu_{\mathrm{eff}}}$.

Ilustrativni prikaz implementacije GUM metode dan je na slici (2.2). Mjerna funkcija $f(\boldsymbol{X})$ je prikazana s tri ulazne veličine $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$ i izlaznom veličinom Y. Najbolja procjena ulaznih veličina je označena s x_i, standardne nesigurnosti pridružene najboljim procjenama ulaznih veličina s $u(x_i)$, najbolja procjena vrijednosti izlazne veličine s y, standardna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni izlazne veličine s $u(y)$ uz uporabu zakona o propagaciji mjerne nesigurnosti (LPU).



Slika 2.2: Ilustrativni prikaz implementacije GUM metode [1, 9, 24]

Procjena najbolje vrijednosti ulazne veličine i standardne nesigurnosti A vrste pridružene najboljoj procjeni ulazne veličine se temelje na frekventističkom pristupu odnosno ponovljenim mjerenjima, ali može biti temeljena i na priornim informacijama.

Nesigurnosti A vrste osigurava informaciju o odstupanju vrijednosti ponovljenih mjerenja (izmjerenih vrijednosti) od njihove srednje vrijednosti. Standardna devijacija uzorka s uslijed svoje nepristranosti se koristi za izračun nesigurnosti tip A i dana je izrazom (2.6):

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}, \tag{2.6}$$

gdje s predstavlja standardnu devijaciju odnosno ponovljena mjerenja, x_i predstavlja rezultat mjerenja, $\overline{x}$ predstavlja srednju vrijednost rezultata dana izrazom (2.7) i n predstavlja broj mjerenja. Najbolja procjena vrijednosti ponovljenih mjerenja je dana izrazom:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.7}$$

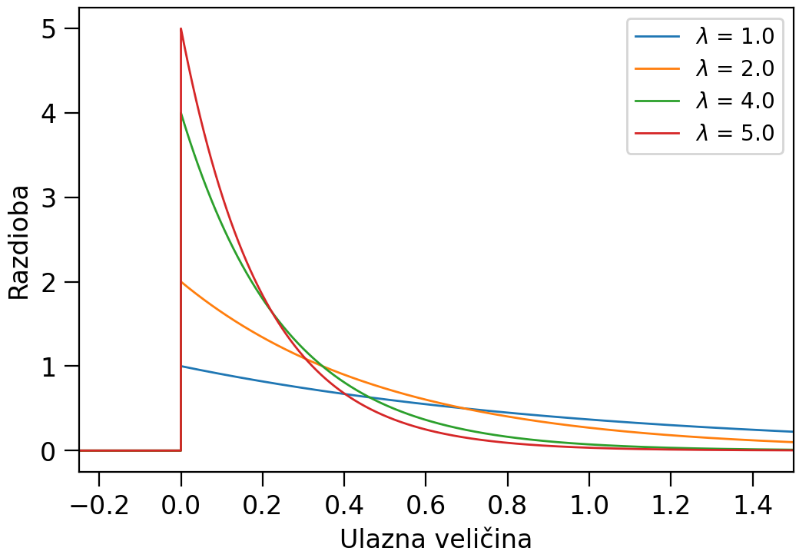
gdje $\overline{x}$ predstavlja najbolju procjenu ulazne veličine ponovljenih mjerenja za određeni uzorak. Kada broj mjerenja n teži beskonačnom broju mjerenja, standardna nesigurnost teži nuli, a srednja vrijednost teži stvarnoj vrijednosti mjerenja. Kako bi se kvantificirala nesigurnost ponovljenih mjerenja, potrebno je izračunati standardnu devijaciju s kojom je parametrizirana razdioba mogućih srednjih vrijednosti, što se može zapisati na sljedeći način, uz pretpostavku da je X kontinuirana slučajna varijabla $X_1, \ldots, X_n$ sa sljedećim parametrima $\mathcal{N} \sim (\mu_{\mathrm{x}}, s^2)$:

$$\mathbb{V}(\overline{X}) = \mathbb{V}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)\right) = \frac{s^2}{n}, \tag{2.8}$$

gdje $\overline{X}$ predstavlja srednju vrijednost slučajnih varijabli. Iz izraza (2.8) se može zapisati izraz za standardnu devijaciju aritmetičke sredine $s(\overline{X})$ odnosno za standardnu nesigurnost $u(\overline{x})$:

$$u(x) = \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{2.9}$$

gdje u predstavlja standardnu devijaciju odnosno standardnu nesigurnost koja se koristi kao parametar mjere za rasipanje ponovljenih mjerenja. Nakon određivanja mjerne nesigurnosti A vrste, sukladno GUM metodi neophodno je odrediti mjernu nesigurnost B vrste. Mjerna nesigurnost B vrste se temelji na priornim informacijama. Priorne informacije za određene veličine se temelje na povijesnim podacima, specifikacijama proizvođača ili provedenim eksperimentima. Navedene dostupne informacije ili priorne razdiobe se koriste za određivanje najbolje procjene vrijednosti ulazne veličina i standardne devijacije (nesigurnost) pridružene najboljoj procjeni ulazne veličine [1, 24, 31, 32]. Na slici (2.3) je prikazana eksponencijalna razdioba za različite vrijednosti parametra λ.



Slika 2.3: Eksponencijalna razdioba

Sukladno navedenom izvršena je najbolja procjena vrijednosti izlazne veličine i standardne nesigurnosti pridružene najboljoj procjeni ulazne veličine za eksponencijalnu razdiobu prikazanu na slici (2.3):

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Postoji određen broj razdioba koje su sastavni dio GUM metode kod izračuna tip B mjerne nesigurnosti kao što su: pravokutna razdioba, uniformna razdioba, eksponencijalna razdioba, itd. Najbolja procjena vrijednosti ulazne veličine za eksponencijalnu razdiobu je dana sljedećim izrazom:

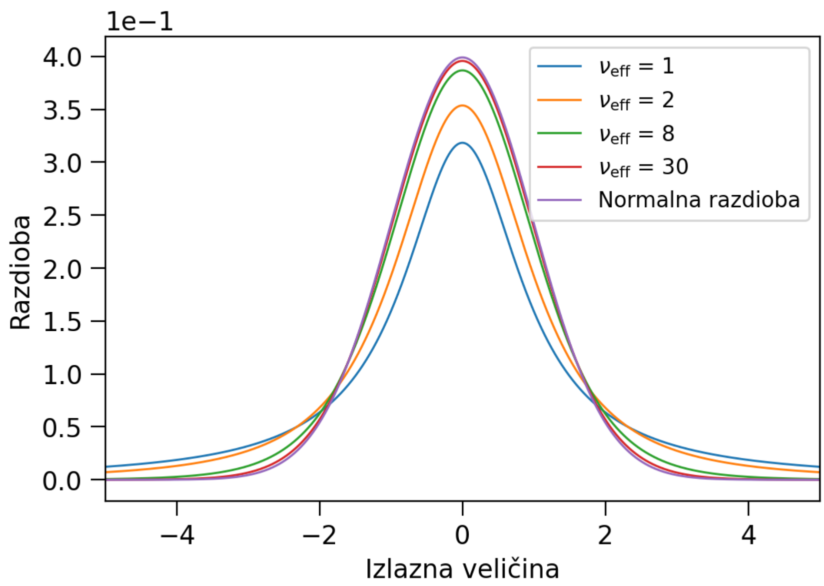
$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx = \mathbb{E}[X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}, \tag{2.11}$$

gdje $\mathbb{E}[X = x] = x$ predstavlja najbolju procjenu vrijednosti promatrane ulazne veličine. Izračun standardne nesigurnosti pridružene najboljoj procjeni ulazne veličine je dan izrazom:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{2.12}$$

gdje $\mathbb{V}(X) = u_X^2(x)$ predstavlja standardnu nesigurnost pridruženu najboljoj procjeni promatrane ulazne veličine.

U postupku izračuna nesigurnosti GUM metodom dovoljno je izračunati najbolje procjene vrijednosti ulaznih veličina i standardnih nesigurnosti pridruženih ulaznim veličinama s ciljem izračuna najbolje procjene vrijednosti izlazne veličine i standardne nesigurnosti pridružene najboljoj procjeni izlazne veličine, što metodu čini pogodnom za izračun nesigurnosti. Nesigurnosti A vrste je povezana s procjenom vrijednosti ponovljenih mjerenja (frekventistički pristup) iz koji se izračunava najbolja procjena izlazne veličine i standardna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni ulazne veličini. Nesigurnosti B vrste, najbolja procjena vrijednosti izlazne veličine i standardne nesigurnosti pridružene najboljoj procjeni ulazne veličine se izračunava iz priornih razdioba (bayesovski pristup). Nakon izračuna nesigurnosti A i B vrste potrebno je izračunati stupnjeve slobode, izračunati proširenu nesigurnost rezultata mjerenja, odrediti faktor pokrivanja i interval povjerenja. Ako je izračunati broj stupnjeva slobode veći ili jednak 30, pretpostavlja se da najbolja procjena vrijednosti izlazne veličine ima normalnu razdiobu ili t-razdiobu ako je broj stupnjeva slobode manji od 30, što je prikazano na slici (2.4).

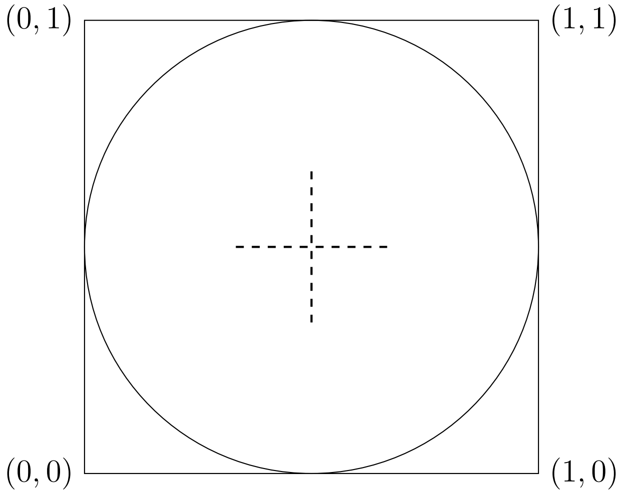


Slika 2.4: Normalna razdioba i studentova razdioba

Implementacija GUM metode zahtjeva linearnost mjerne funkcije, primjenu graničnog središnjeg teorema, te adekvatan izračun stupnjeva slobode. Nadalje, sve veličine se smatraju slučajnim varijablama [1, 24, 36].

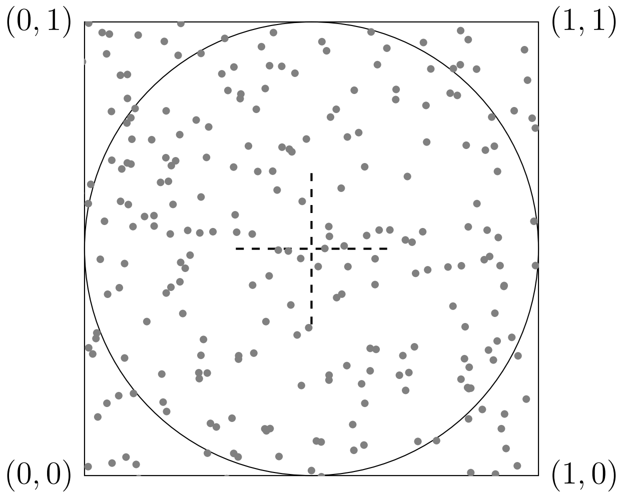
Monte Carlo metoda (*engl. Monte Carlo Simulation* – MCS) za izračun nesigurnosti implicira generiranje slučajnih uzoraka iz priornih informativnih razdioba (propagaciji razdioba). Na temelju izračunatih vrijednosti veličine od interesa tvori se njena razdioba za izračunavanje zahtijevanih parametara koji opisuju ovu razdiobu i interval pokrivanja. Na temelju navedenoga može se zaključiti da MCS metoda, koja se temelji na principu priornih razdioba za ulazne veličine, sadrži više informacija od prethodne metode koja se temelji na najboljoj procjeni vrijednosti ulaznih veličina i standardnih nesigurnosti pridruženih najboljoj procjeni ulaznih veličina. MCS metoda nije ograničena odabirom priornih razdioba za ulazne veličine. Priorne razdiobe mogu biti asimetrične, kao na primjer eksponencijalna razdioba na slici (2.3). Na temelju razdiobe izlazne veličine određuju se intervali pokrivenosti ovisno o obliku razdiobe izlazne veličine, najbolja procjena izlazne veličine i standardna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni izlazne veličine. MCS metoda je numerička metoda koja koristi veliki broj slučajno generiranih vrijednosti izlaznih veličina za formiranje razdiobe izlazne veličine i izračun parametara. Vrijednosti slučajno generiranih uzoraka se dobivaju iz razdioba ulaznih veličina koje tvore model mjerenja. Takve generirane vrijednosti, uz uporabu odgovarajućeg algoritma, se koriste za izračun vrijednosti izlazne veličine. Proces se ponavlja određeni broj puta, a izračunate vrijednosti izlazne veličine se koriste za formiranje aproksimirane razdiobe izlazne veličine [2, 24, 37] Na sljedećem primjeru prikazana je uporaba MCS metode. Općenito MCS metoda se koristi za rješavanje izazova koji se temelje na vjerojatnosti. Iako navedeni primjer nije direktno primjenjiv na području mjeriteljstva, on ima za cilj pokazati primjenjivosti MCS metode u postupku izračuna nesigurnosti. Postupak određivanja prirodnog broja π je proveden na sljedeći način: definiran je opseg mogućih vrijednosti, generirane su slučajne vrijednosti i sumirani rezultati [38, 39]. Rezultati su prikazani za različit broj simuliranih vrijednosti. Normalna razdioba je korištena za prikaz potpunog rezultata s 95 % simetričnim intervalom pokrivanja. Grčim slovom π označava se broj čija se numerička vrijednost može približno zapisati na 64 decimalna mjesta, i to: $\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,105\,820\,974\,944\,592\,3$. Grčko slovo π kao oznaka ovog broja je u uporabi od 1706. godine. Milijunta znamenka broja π je izračunata 1973. godine. Prema posljednjim dostupnim informacijama ovaj broj ima oko 206 milijardi znamenki [40].

Na slici (2.5) su dane informacije neophodne za određivanje broja π uz uporabu adaptivne MCS metode.



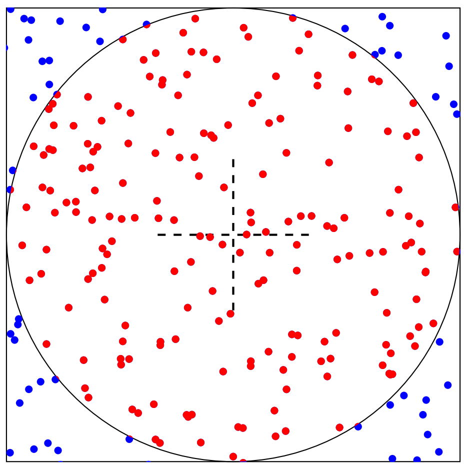
Slika 2.5: Grafički prikaz modela za određivanje broja (π)

Površina kruga je izračunata iz izraza $A_{\mathrm{C}} = \pi r^2 = \pi$ a površina kvadrata iz izraza: $A_{\mathrm{S}} = a^2 = 4$. Sljedeći korak je generiranje slučajnih uzoraka iz dvije uniformne razdiobe što je prikazano na slici (2.6).



Slika 2.6: Generiranje slučajnih uzoraka iz uniformne razdiobe u opsegu [0, 1)

Navedene razdiobe su definirane u opsegu [0, 1) s polu otvorenim intervalom s desne strane. S vjerojatnosti $\mathbb{P} = 1$ sve generirane točke se nalaze u kvadratu, te svaka generiran točka u kvadratu ima istu vjerojatnost da bude generirana. Za generirane točke određena je dužina od središta kruga (kvadrata) do točke od interesa. Za točke čija je udaljenost od središta kruga manja ili jednaka broju dva nalaze se unutar kruga (crvene točke), a točke čija je udaljenost od središta kruga veća od dva se nalaze izvan kruga odnosno unutar kvadrata (plave točke) što je prikazano na slici (2.7).



Slika 2.7: Prikaz generiranih točaka kruga (crvene točke) i kvadrata (plave točke)

Izračun broja π na osnovu generiranih točaka adaptivnom MCS metodom je dan izrazom:

$$\pi \approx A_{\mathrm{S}} \cdot \text{Broj točaka u krugu}/\text{Broj točaka u kvadratu} \tag{2.13}$$

U tablici (2.1) su prikazani rezultati za različit broj simuliranih vrijednosti i definirani kriterij preciznosti za standardnu devijaciju. Na ovaj način prikazana je važnost metode

Tablica 2.1: Procjena broja π uporabom MCS metode

Broj simulacija	Očekivana vrijednost	Standardna devijacija
1000	3,147 199 999 999 999 3	0,046 414
2000	3,141 939 999 999 997 7	0,037 093
⋮	⋮	⋮
16 000	3,143 032 500 000 000 3	0,013 999
32 000	3,140 132 500 000 000 4	0,008 106
⋮	⋮	⋮
256 000	3,141 413 281 249 999 7	0,003 237
512 000	3,141 971 796 875 000 5	0,002 283

koja ima široku primjenu u području statistike. Što je broj simulacija veći, to znači i točniji rezultat. MCS metoda za izračun nesigurnosti implicira generiranje slučajnih uzoraka iz priornih informativnih razdioba (propagaciji razdioba) uz uvjet da su priorno dostupne informacije za ulazne veličine. Izračun nesigurnosti je prikazan kroz sljedeće korake [2, 24, 37, 41–43]:

- Potrebno je odabrati primjeren broj simulacija. Kao što je prikazano u postupku određivanja broja π broj simulacija ima utjecaja na krajnji rezultat. Sukladno navedenom, postoje različite metode za odabir broja simulacija. Kroz praktičnu primjenu MCS metode u procesu određivanja aproksimirane razdiobe izlazne veličine, preporučeni broj simulacija je 10^6. Navedeni broj simulacija pruža dovoljno informacija vezanih za izlaznu veličinu u postupku procjene nesigurnosti. Način određivanja broja simulacija je detaljno opisan u poglavlju (3). Međutim, u nekim slučajevima se preporučuje uporaba adaptivne MCS metode odnosno određivanja broja simulacija. Kod određivanja broja π je korištena navedena metoda. Kod navedene metode potrebno je unaprijed odrediti toleranciju, te ukoliko su dobivene vrijednosti rezultata između dvije uzastopne iteracije ne prelaze zadanu toleranciju sve ukupni proces izračuna se smatra stabilnim.

- Potrebno je prepoznati sve ulazne veličine koje tvore mjerni model. Mjerni model je unaprijed definiran. Ulazne veličine je potrebno opisati odgovarajućim razdiobama. Na primjer, razdiobe se definiraju na sljedeći način uporabom parametara s kojima su opisane: normalna $\big(\mathbb{R}, \{\mathcal{N} \sim (\mu, \sigma^2)\}_{\mathbb{R}\times(0,\infty)}\big)$, uniformna $\big([0,\infty), \{\mathcal{U} \sim (0,b]\}_{b>0}\big)$, itd. Sljedeći korak u implementaciji MCS metode za izračun nesigurnosti je generiranje slučajnih uzoraka iz prethodno definiranih razdioba.

- Potrebno je generirati određeni broj uzoraka iz prethodno definiranih razdioba. Broj uzoraka se određuje na različite načine. Način određivanja broja uzorka je definiran u prvom koraku primjene MCS metode. Za svaku simulaciju izračunata je vrijednost izlazne veličine odnosno M vrijednosti izlazne veličine. Na primjer za N ulaznih veličina, i broj simulacija M, generirani slučajni uzorci iz razdioba X_i su: $(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \ldots, x_{N,1})$, $(x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, \ldots, x_{N,2})$, $\ldots$, $(x_{1,M}, x_{2,M}, x_{3,M}, \ldots, x_{N,M})$. Vrijednosti izlazne veličine su neophodne za formiranje aproksimativne razdiobe ove veličine.

- Izračunavanje vrijednosti izlazne veličine Y za N ulaznih veličina i broj simulacija M za mjerni model su: $y_1 = f(x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \ldots, x_{N,1})$, $y_2 = (x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, \ldots, x_{N,2})$, $\ldots$, $y_M = (x_{1,M}, x_{2,M}, x_{3,M}, \ldots, x_{N,M})$. Dobivene izlazne vrijednosti se koriste za formiranje aproksimativne razdiobe izlazne veličine.

- Najbolja procjena izlazne veličine i standardna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni izlazne veličine se izračunavaju iz vrijednosti izlazne veličine. Izračun najbolje procjene izlazne veličine y je dan sljedećim izrazom:

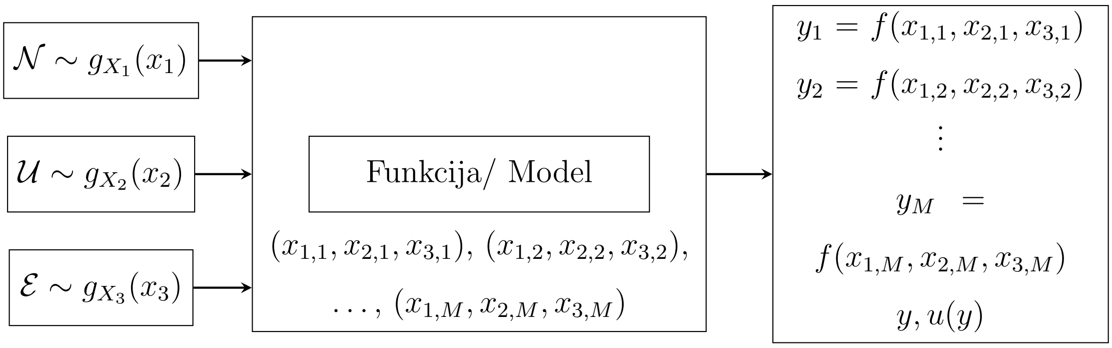
$$y = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} y_r, \tag{2.14}$$

i izračun standardne nesigurnosti $u(\hat{y})$ je dan sljedećim izrazom:

$$u(y) = (\frac{1}{M-1}\sum_{r=1}^{M}(y_r - y))^{1/2}. \tag{2.15}$$

Na osnovi dobivenih izlaznih vrijednosti $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_M$ formira se aproksimativna kumulativna funkcija razdiobe i funkcija gustoće vjerojatnosti. Navedene aproksimativne razdiobe sadrže dovoljno informacija vezanih za izlaznu veličinu. Kod određivanje oblika razdiobe izlazne veličine njena simetričnost se ne pretpostavlja. Oblik razdiobe se dobiva kreiranjem histograma na temelju kojeg se zaključuje način određivanja 95 % interval pokrivanja.

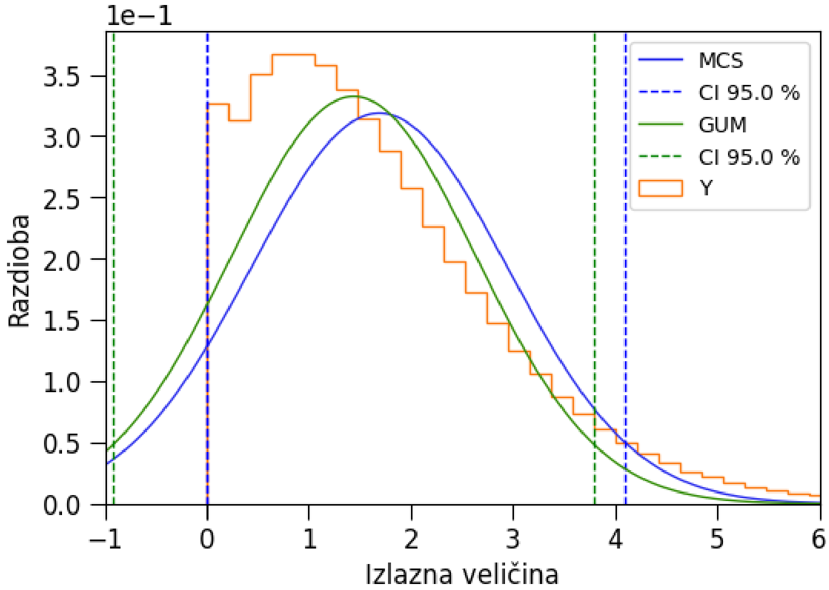
Kroz navedene korake je prikazana primjena MCS metode u postupku izračuna mjerne nesigurnosti. Na slici (2.8) je dan ilustrativni prikaz implementacije MCS metode za tri ulazne veličine koje su opisane različitim razdiobama.



Slika 2.8: Ilustrativni prikaz implementacije MCS metode [2, 24]

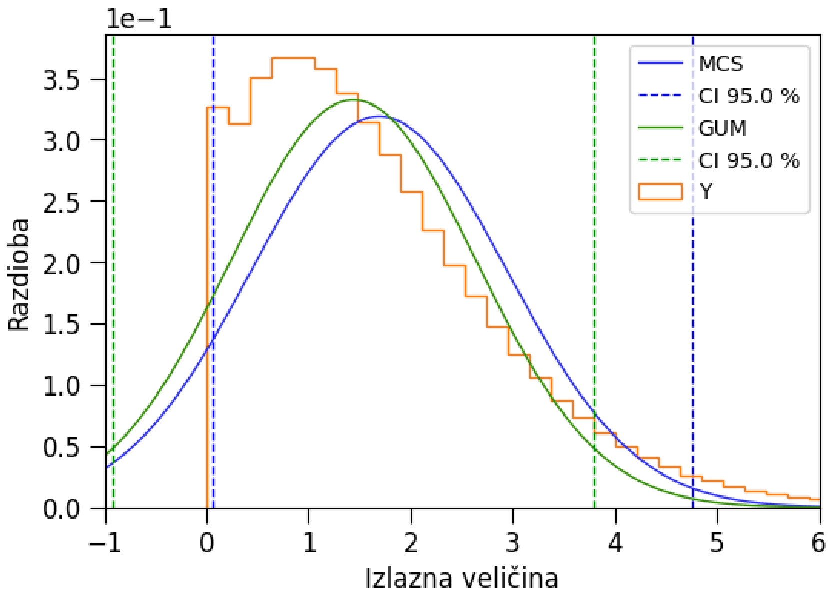
Prednosti MCS metode u postupku izračuna mjerne nesigurnosti mogu se navesti kako slijedi: mjerni model može biti linearan ili nelinearan, niti u jednom navedenom slučaju nije potrebno raditi određene aproksimacije modela i nije potrebno izračunavati koeficijente osjetljivosti, niti stupnjeve slobode. Ako se pretpostavi nelinearni mjerni model $Y = X^2$ te ulazna veličina X s razdiobom $\mathcal{N} \sim (1,2; 0,5)$ [24]. Rezultati na slikama su dobiveni uporabom MCS i GUM metode. Najkraći 95 % interval pokrivanja (MCS) i 95

% simetrični interval pokrivanja (GUM) za veličinu od interesa je prikazan na slici (2.9).



Slika 2.9: Prikaz rezultata za nelinearni model $Y = X^2$ (najkraći interval) [24]

Simetrični 95 % interval pokrivanja (MCS) i 95 % simetrični interval pokrivanja (GUM) za veličinu od interesa je prikazan na slici (2.10).



Slika 2.10: Prikaz rezultata za nelinearni model $Y = X^2$ (simetrični interval) [24]

Za najkraći interval pokrivanja dobiven MCS metodom dužina intervala pokrivanja je kraća u odnosu interval pokrivanja dobiven GUM metodom. Za simetrični interval pokrivanja dobiven MCS metodom dužina intervala pokrivanja je ista kao dužina intervala pokrivanja dobivena GUM metodom. Za navedeni nelinearni model MCS metoda je prikladnija jer izlazna veličina ne može poprimiti negativne vrijednosti. Implementacija MCS metode nije komplicirana, zahtjeva se poznavanje modela i razdioba veličina koje tvore model.

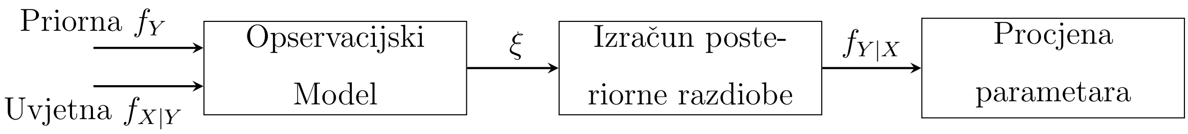
2.5. Bayesova metoda

Ako se usporede bayesovske metode s frekventističkim metodama onda kao glavna razlika između ovih metoda se ogleda u formiranju statističkog modela. Kod frekventističkog pristupa parametri u statističkom modelu se tretiraju kao fiksne vrijednosti dok se kod bayesovskog pristupa oni promatraju kao slučajne varijable.

U nastavku su ukratko opisani temeljni principi za navedene metode. Frekventistički pristup je temeljen na sljedećim principima [44]: vjerojatnost se odnosi na granične relativne frekvencije, vjerojatnosti su posljedica stvarnih podataka, parametri su fiksirani kao nepoznate konstante, informacije o vjerojatnosti parametra ne postoje jer parametri ne fluktuiraju i statističke procedure trebaju biti temeljene na frekventističkom pristupu, na primjer, 95 % interval pokrivanja treba obuhvaćati stvarnu vrijednost parametra s graničnom frekvencijom od najmanje 95 %. Bayesov pristup je temeljen na sljedećim principima [44]: vjerojatnost opisuje stupnjeve vjerovanja, a ne granične frekvencije (na osnovu navedenoga, izjave vjerojatnosti za različite događaje se formiraju, a ne samo za podatke koji su predmet slučajnih varijacija), vjerojatnosti za parametre od interesa se formiraju čak iako su fiksirani kao konstante vrijednosti i na temelju razdiobe se formiraju zaključci za parametre od interesa uključujući očekivanu vrijednost, standardnu devijaciju i interval pokrivanja.

Frekventistički pristup je više zastupljen u statistici iako bayesovski pristup je sve više prisutniji s razvojem računalne znanosti. Za razliku od frekventističkog pristupa, bayesovski pristup je sve prisutniji u područjima znanosti kao što su strojno učenje i podatkovno rudarenje. Bayesovski pristup je poznat kao probabilistički pristup jer su modeli formirani na temelju vjerojatnosti. Vjerojatnosti su točan matematički alat koji omogućuju kvantificiranje nesigurnosti modela. Primjena metoda je dugo vremena bila ograničena zbog nemogućnosti izračuna izraza koji se pojavljuju u primjeni ove metode. Razvojem računalne znanosti ovaj izazov je prevladan i metode su našle svoju primjenu u različitim područjima znanosti. Naime, pri ažuriranju posteriorne razdiobe često se pojavljuju integrali koji se ne mogu egzaktno riješiti. Razvojem Monte Carlo Markovljevih lanaca (*engl. Monte Carlo Markov Chain* – MCMC) navedeni izazov je uspješno riješen numeričkim putem. MCMC metode omogućuju simuliranje uzoraka iz posteriorne razdiobe bez eksplicitnog izračunavanja integrala. Hamiltonian Monte Carlo algoritam No-U-Turn Sampler (NUTS) je korišten za postupak izračuna posteriornih marginalnih razdioba [44–46]. NUTS metoda pokazuje izrazito dobre rezultate kada su ulazne veličine definirane kao kontinuirane razdiobe. Primjena Bayesove metode za izračun nesigurnosti je prikazana kroz sljedeće korake: [44, 47–50]:

- Određivanje priorne razdiobe $f_Y(\eta)$. Priorna razdioba izražava naše vjerovanje za parametar η prije procesa mjerenja. Priorne razdiobe se određuju na temelju različitih informacija, na primjer, poznavanje opsega, prethodnih mjerenja, prethodnih eksperimenta, itd.
- Formiranje statističkog modela $f_{X|Y}(\xi \,|\, \eta)$. Navedeni model opisuje naše vjerovanje vezano za ξ (indikacijska vrijednost) pod uvjetom da je $Y = \eta$ realizirano.
- Nakon promatranja podataka $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ koji su realizacija jednako distribuiranih slučajnih varijabli $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ažuriraju se naša vjerovanja, te kao posljedica ovog procesa formira se posteriorna razdioba $f_{Y|X}(\eta \,|\, \xi)$ što je prikazano na slici (2.11).



Slika 2.11: Ilustrativni prikaz implementacije Bayesove metode [51]

Radi lakšeg razumijevanja posljednjeg koraka u postupku analize pretpostavljene su kontinuirane razdiobe za parametar Y i promatrane vrijednosti X. Postoje četiri moguće kombinacije parametra Y i promatranih vrijednosti X [36, 51]:

- Y diskretna, X diskretna:

$$p_{Y|X}(\eta \,|\, \xi) = \frac{p_{X|Y}(\xi \,|\, \eta)\, p_Y(\eta)}{p_X(\xi)} = \frac{p_{X|Y}(\xi \,|\, \eta)\, p_Y(\eta)}{\sum p_{X|Y}(\xi \,|\, \eta)\, p_Y(\eta)}\,. \tag{2.16}$$

- Y diskretna, X kontinuirana:

$$p_{Y|X}(\eta \,|\, \xi) = \frac{f_{X|Y}(\xi \,|\, \eta)\, p_X(\eta)}{f_X(\xi)} = \frac{f_{X|Y}(\xi \,|\, \eta)\, p_Y(\eta)}{\sum f_{X|Y}(\xi \,|\, \eta)\, p_Y(\eta)}\,. \tag{2.17}$$

- Y kontinuirana, X diskretna:

$$f_{Y|X}(\eta\,|\,\xi) = \frac{p_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)\, f_Y(\eta)}{p_X(\xi)} = \frac{p_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)\, f_Y(\eta)}{\int p_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)\, f_Y(\eta)\, d\eta}\,. \tag{2.18}$$

- Y kontinuirana, X kontinuirana:

$$f_{Y|X}(\eta\,|\,\xi) = \frac{f_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)\, f_Y(\eta)}{f_X(\xi)} = \frac{f_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)\, f_Y(\eta)}{\int f_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)\, f_Y(\eta)\, d\eta}\,. \tag{2.19}$$

Navedeni izrazi su nastali kao kombinacija slučajnih varijabli parametra Y i promatranih vrijednosti X na temelju Bayesovog pravila:

$$\mathbb{P}(A_i\,|\,B) = \frac{\mathbb{P}(A_i,\,B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B\,|\,A)\,\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B\,|\,A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B\,|\,A_j)}. \tag{2.20}$$

Bayesovo teorem je jedan od temeljnih izraza u teoriji vjerojatnosti i tvori temelj bayesovske statistike. Parametar se promatra kao slučajna varijabla, što znači da je potrebno odabrati odgovarajuću razdiobu koja najbolje opisuje naše vjerovanje za parametar od interesa. Ovu razdiobu nazivamo priornom razdiobom. Postoji više načina odabira priornih razdioba. Prema [52] u radu su korištene manje informativne priorne razdiobe. Priorne razdiobe za parametre umjeravanja dolaze iz prethodnih promatranja veličine, specifikacija proizvođača, intervala točnosti, umjernica, itd.

Uvjetna vjerojatnost $f_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)$ za n (iid) opservacija $X_1, \ldots, X_n$ je dana sljedećim izrazom:

$$f_{X_1,\ldots,X_n\,|\,Y}(\xi_1, \ldots, \xi_n\,|\,\eta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i|Y}(\xi_i\,|\,\eta) = \mathcal{L}_X(\eta). \tag{2.21}$$

Radi kraćega zapisivanja slučajni vektor X se odnosi na $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, a ξ na $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Stoga izraz (2.19) se može zapisati u sljedećem obliku:

$$f_{Y|\,X}(\eta\,|\,\xi) = \frac{f_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)\, f_Y(\eta)}{\int f_Y(\eta)\, f_{X|Y}(\xi\,|\,\eta)\, d\eta} = \mathcal{L}_X(\eta)\, f_Y(\eta)/c \propto \mathcal{L}_X(\eta)\, f_Y(\eta)\,, \tag{2.22}$$

gdje $c = \int \mathcal{L}_X(\eta)\, f_Y(\eta)\, d\eta$ predstavlja normaliziranu konstantu koja je neovisna o parametru odnosno slučajnoj varijabli η. Sukladno izrazima od (2.19) do (2.22) posteriorna razdioba je proporcionalna funkciji vjerodostojnosti (2.21) i priornoj razdiobi:

$$f_{Y|X}(\eta\,|\,\xi) \propto \mathcal{L}_X(\eta)\, f_Y(\eta)\,. \tag{2.23}$$

Izraz (2.23) predstavlja izraz za izračun posteriorne razdiobe parametra od interesa. Očekivana vrijednost (procjena) parametra iz posteriorne razdiobe je dana sljedećim izrazom:

$$\hat{\eta} = \int \eta f_{Y|X}(\eta \,|\, \xi)\, d\eta = \frac{\int \eta \mathcal{L}_X(\eta)\, f_Y(\eta)}{\int \mathcal{L}_X(\eta)\, f_Y(\eta)\, d\eta}\,, \tag{2.24}$$

a standardna nesigurnost parametra od interesa je dana izrazom (2.25).

$$u(\hat{\eta}) = \left(\int (\eta - \widehat{\eta})^2 f_{Y|\,X}(\eta \,|\, x)\, d\eta \right)^{1/2}, \tag{2.25}$$

Posljednji korak je određivanje intervala pokrivanja za parametar od interesa. Potrebno je odrediti granice intervala $\int_{-\infty}^{a} f_{Y|\,X}(\eta \,|\, \xi) = \int_{b}^{\infty} f_{Y|X}(\eta \,|\, \xi) = \alpha/2$. Vjerojatnost za interval pokrivanja je dana izrazom (2.26):

$$\mathbb{P}(\eta \in C = (a, b) \,|\, \xi) = \int_a^b f_{Y|X}(\eta \,|\, \xi)\, d\eta = 1 - \alpha\,, \tag{2.26}$$

tako da interval C je $1-\alpha$ posteriorni interval parametra od interesa. Izrazi od (2.19) do (2.26) vrijede za kontinuirane razdiobe. Sukladno navedenom, promatrajući mjerenja u kojem ulazne veličine $\boldsymbol{X}$ modela mogu biti dane izrazom:

$$\boldsymbol{X} = (D,\ \boldsymbol{\Theta}^\top)^\top, \tag{2.27}$$

gdje D predstavlja veličinu indikacije (Tip A informacije) i $\boldsymbol{\Theta}$ predstavlja sve druge ulazne veličine (Tip B informacije). U kontekstu veličina Y, D i $\boldsymbol{\Theta}$ mjerni model je dan sljedećim izrazom:

$$D = \phi(Y,\ \boldsymbol{\Theta}). \tag{2.28}$$

Izraz (2.28) predstavlja opservacijski model. Navedeni model predstavlja veličinu indikacije za mjerni sustav u funkciji izlazne veličine i drugih ulaznih veličina. Također, opservacijski model je polazna osnova za formiranje mjerne funkcije kod GUM metode za izračun nesigurnosti. Posteriorna razdioba za veličine Y i $\boldsymbol{\Theta}$ je izračunata primjenom Bayesovog teorema (2.20) i opservacijskog modela (2.28):

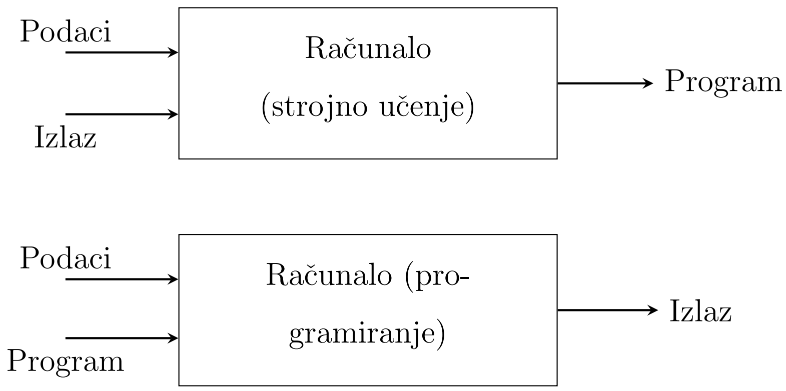
$$f_{Y,\boldsymbol{\Theta}|D}(\eta\,, \boldsymbol{\theta} \,|\, d) \propto \mathcal{L}_D(\phi(\eta\,, \boldsymbol{\theta}) \,|\, d)\, f_{Y,\boldsymbol{\Theta}}(\eta\,, \boldsymbol{\theta})\,, \tag{2.29}$$

gdje $f_{Y,\boldsymbol{\Theta}}(\eta\,, \boldsymbol{\theta})$ predstavlja priornu razdiobu za veličine Y i $\boldsymbol{\Theta}$, $\mathcal{L}_D(\phi(\eta\,, \boldsymbol{\theta}) \,|\, d)$ predstavlja

funkciju vjerodostojnosti za veličinu indikacije D za vrijednost indikacije d što predstavlja vjerojatnost dobivanja vrijednosti d pod uvjetom da je realizirana vrijednost $\phi(\eta\,,\boldsymbol{\theta})$ od D i $f_{Y,\boldsymbol{\Theta}|D}(\eta\,,\boldsymbol{\theta}\,|\,d)$ predstavlja posteriornu razdiobu za veličine Y i $\boldsymbol{\Theta}$ [24, 53].
Marginalna posteriorna razdioba za izlaznu veličinu Y se izračunava iz izraza (2.29). Najbolja procjena vrijednosti izlazne veličine i mjerna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni izlazne veličine se izračunava sukladno izrazima (2.24) i (2.25). Kroz navedene korake je opisana implementacija Bayesove metode za izračun nesigurnosti uzimajući u obzir informacije Tip A i Tip B. Priorne razdiobe koje tvore izraz (2.29) su veoma bitne pri izračunu nesigurnosti. One mogu biti informativne, neinformativne, manje informativne ili nepravilne. Uporaba neinformativnih razdioba je opravdana iz razloga najmanjeg utjecaja na izlaznu veličinu. Uporaba manjih informativnih razdioba je isto opravdana, na primjer kod postupka umjeravanja je opće poznato da izmjerene vrijednosti ne mogu biti negativne. Stoga ovu informaciju treba uzeti u razmatranje kod specificiranja priorne razdiobe izlazne veličine. Manje informativne priorne razdiobe se još zovu i regulirane priorne razdiobe. Uporaba informativnih priornih razdioba je opravdana ukoliko su iste bazirane na valjanim informacijama, na primjer znanstveni eksperimenti. Bayesov koncept nije kompliciran za razumjeti, ali njegova implementacija može biti zahtjevna, bilo da se radi o analitičkoj ili numeričkoj implementaciji metode [54]. Pri ažuriranju marginalne posteriorne razdiobe se pojavljuju integrali koji se ne mogu izračunati u zatvorenom obliku. Iz navedenoga razloga, marginalna posteriorna razdioba se izračunava numerički uporabom MCMC algoritama. Postoji nekoliko metoda za numeričko izračunavanje marginalnih posteriornih razdioba. Prema [45] metode se mogu klasificirati u dvije grupe, i to: Nemarkovljeve metode (mrežni izračun, kvadratna aproksimacija, itd.) i Markovljeve metode (Metropolis-Hastings, Hamiltonian Monte Carlo, itd.). Markovljeve metode su poznate kao MCMC metode. MCMC metode predstavljaju stohastičke metode. Ove metode omogućavaju dobivanje uzoraka iz stvarne posteriorne razdiobe pod uvjetom da je funkcija vjerodostojnosti i priorna razdioba pravilno specificirana [46, 55].

2.6. Strojno učenje u mjeriteljstvu

Primarna svrha strojnog učenja je pravilno donošenja odluka ili predviđanja na temelju dostupnih podataka. Strojno učenje se sastoji od seta algoritama koji uče obrasce ponašanja i pravila iz podataka pa metode strojnog učenja imaju sve veću primjenu i u znanstvenom mjeriteljstvu. Strojno učenje kao disciplina ima za cilj kreirati, razumjeti i primijeniti računalni program koji uči na temelju iskustava odnosno na osnovi podataka u svrhu modeliranja, predviđanja ili upravljanja nekim procesom. Strojno učenje je područje znanosti koje računalima daje mogućnost učenja bez direktnog programiranja (Arthur Samuel) [38]. Sukladno navedenom neophodno je napraviti razliku između konvencionalnog programiranja i strojnog učenja što je prikazano na slici (2.12) [38].



Slika 2.12: Razlika između konvencionalnog programiranja i strojnog učenja [38]

Kod konvencionalnog programiranja ulaz se sastoji od dva ulaza (podataka i programa) koji se prosljeđuju računalu kao ulaz na temelju kojih se kreira određeni izlaz uz uporabu računala. Kod strojnog učenja ulaz se sastoji od dva ulaza (podataka i izlaza) koji se prosljeđuju računalu na obradu, te na osnovi kojih se kreira program. Neophodno je navesti da je izlaz povezan s ulaznim podacima. Novom izlazu (programu) je moguće pridružiti nove podatke. Na temelju novih podataka dobiva se novi izlaz koji je povezan s novim ulaznim podacima. Paradigma strojnog učenja se ukratko može opisati na sljedeći način: promatrati proces od interesa i prikupljati podatke (tzv. trening podaci), provesti proces zaključivanja vezano za proces koji generira podatke i na temelju procesa zaključivanja predvidjeti podatke koji nisu dio procesa (tzv. testni podaci). Postoji veliki broj različitih algoritma strojnog učenja. Svi algoritmi imaju mogućnost da rade s velikim brojem podataka što ih čini poželjnim za uporabu. Popularnost strojnog učenja je posljedica razvoja računalne snage i algoritma. Strojno učenje se dijeli na nadzirano i nenadzirano strojno učenje. Kod nadziranog učenja općenito postoje ulazni podaci (trening podaci). Ovi podaci se koriste za učenje funkcije koja preslikava ulaze u izlaze na osnovi kojih se donose odluke sukladnosti. Nadzirano učenje se dijeli na metode klasifikacije i metode regresije. Ako su izlazni podaci diskretni odnosno ako mogu primiti konačan broj različitih vrijednosti radi se o klasifikacijskom problemu. Ako su izlazni podaci kontinuirani odnosno ako mogu primiti beskonačan broj različitih vrijednosti radi se o regresijskom problemu. Kod nadziranog strojnog učenja (klasifikacijski problem) vektor značajki dimenzije d je zapisan na sljedeći način $x = [x_1, \ldots, x_d]^\top \in \mathbb{R}^d$. Ako postoji n trening vektora dostupnih za strojno učenje te ako su trening vektori označeni s $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ i odgovarajućim pripadajućim varijablama $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, sve što metoda zna o problemu je skup trening podataka, zapisanih kao n parova $S_n = \{(x^{(i)}, y^{(i)}),\ i = 1, \ldots, n\}$, što predstavlja formailizaciju problema kod klasifikacijske metode. Navedeni set podataka (trening podaci) se obično označava kao S_n gdje n označava broj varijabli za problem od interesa. Regresijska metoda je temeljena na istim principima kao prethodna metoda osim što varijabla (izlazni podaci) $y^{(i)} \in \mathbb{R}$ može primiti bilo koju vrijednost. Krajnji cilj klasifikacijskih i regresijskih metoda je da za danu ulaznu vrijednost predvide izlaznu vrijednost. Nenadzirano strojno učenje za razliku od nadziranog ima za cilj pronaći određene obrasce ponašanja u određenom skupu podataka za koji nisu unaprijed definirane značajke. Nenadzirano učenje ne uključuje funkciju učenja od ulaza do izlaza temeljenu na skupu ulazno-izlaznih parova, te za dati skup podataka $S_n = \{(x^{(i)}),\ i = 1, \ldots, n\}$ pronalazi određeni obrazac ponašanja tog skupa podataka. Krajnji cilj nenadziranog učenja je otkrivanje korisne (važne) strukture trening podataka na način da prepozna grupe odnosno slične pokazatelje. Nenadzirano strojno učenje se dijeli na grupiranje i smanjenje dimenzionalnosti. Primjeri primjene grupiranja uključuju: grupiranje rezultata pretraživanja prema određenim temama, obrasce ponašanja kupaca, kompresiju podataka, itd. Metoda grupiranja za skup trening podataka $S_n = \{(x^{(i)}),\ i = 1, \ldots, n\}$ ima za cilj dijeljenje grupe tako da se slični pokazatelji nalaze u određenoj grupi. Postoji mnogo različitih načina grupiranja što je obično u ovisnosti od tražene sličnosti između podataka (pokazatelja) i utvrđenoga kriterija za grupiranje. Metoda smanjenja dimenzionalnosti uključuje transformaciju iz dimenzije višeg reda u dimenziju nižeg reda za skup trening podataka $S_n = \{(x^{(i)}),\ i = 1, \ldots, n\}$ s ciljem zadržavanja informacija iz dimenzije višeg reda. Navedena metoda predstavlja standardnu tehniku za vizualizaciju i razumijevanje podataka dimenzije višeg reda. Nadzirano strojno učenje je jedan od ključnih izazova u znanstvenom istraživanju obrade podataka i odabiru svojstava značajki koje imaju utjecaj na valjanost rezultata. Metode strojnog učenje imaju širok opseg primjene od problema koji se rješavaju polinomom prvog reda (linearni modeli), ulaz-izlaz, do grupiranja skupa podataka uporabom polinoma višeg reda (nelinearni modeli) gdje su neophodne odgovarajuće nelinearne transformacije za dobivanje rezultata. Metode strojnog učenja su različiti u smislu njihove složenosti i interoperabilnosti. Metode strojnog učenja su temeljeni na podacima, ali se promatraju kroz pojmove modela crne ili bijele kutije. Kod modela bijele kutije odnosi između varijabli od interesa su nedvojbeno definirani za razliku od modela crne kutije gdje ovi odnosi nisu jasno definirani. Na primjer metoda linearne regresije je model bijele kutije ili model crne kutije u slučaju neuronski mreža. Sve tehnike strojnog učenja imaju određene zajedničke korake, a to su: definiranje značajki koje opisuju problem (vektor značajki), definiranje vektora značajki radi usporedbe vektora, definiranje objektne funkcije (na primjer metoda najmanjih kvadrata kod linearne regresije). Nakon provedenih koraka primijenjuje se model za optimizaciju što omogućuje metodu da bude izučen, te evaluacijska metoda za potvrđivanje ispravnosti prethodnih koraka [53,56–63]. Povjerenje u rezultate mjerenja je definirano kroz tri mjeriteljska principa: mjerna nesigurnost, postupak umjeravanja i sljedivost rezultata [56]. U nastavku su dane definicije [19]: Mjerna nesigurnost je parametar pridružen rezultatu mjerenja koji opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno moglo pripisati mjernoj veličini; Sljedivost mjerenja se ostvaruje umjeravanjem ispitnog etalona s etalonom više klase točnosti odnosno prema definiciji sljedivost je osobina da se rezultat nekog mjerenja može dovesti u vezu s odgovarajućim državnim ili međunarodnim etalonom preko neprekinutoga lanca uspoređivanja; Umjeravanje predstavlja skup postupaka kojima se u određenim uvjetima uspostavlja odnos između vrijednosti veličina koje pokazuje neko mjerilo ili vrijednosti koju predstavlja neki referentni materijal i odgovarajućih vrijednosti ostvarenih etalonom. Metode strojnoga učenja su alati za analizu podataka i mogu se koristiti za dobivanje pouzdanih informacija iz mjerenja pod uvjetom da su osigurani temeljni principi povjerenja u mjerenje. Isto tako je važno imati povjerenje u metode strojnog učenje što je izazovan i težak zadatak iz više razloga. S obzirom na to da su metode strojnog učenja temeljeni na podacima vrlo lako postoji mogućnost da za jedan skup podataka metode funkcioniraju, a za drugi skup podataka ne. Nadalje, metode strojnog učenja su u principu crne kutije tako da nisu poznati odnosi između varijabli. Stoga je neophodno ostvariti povjerenje u rezultate (predviđanja) dobivene s metodama strojnog učenja. Povjerenje u rezultate se razmatra kroz sljedeće korake: razumijeti utjecaje trening podataka na dobivene rezultate (predviđanje), procijeniti koliko dobro metoda predstavlja određeni sustav, izračunati nesigurnost rezultata, odabrati značajke koje imaju utjecaja na rezultate, te analizirati mogućnost metode da generira rezultate za novi skup podataka za koji nije izučen. Mjeriteljska zajednica kroz različite znanstvene projekte implementira navedene principe u područje mjeriteljstva. Sve češće i znanstvene mjeriteljske konferencije organiziraju sekcije koje su posvećene primjeni strojnog učenja u području mjeriteljstva. Strojno učenje se primjenjuje u području mjeriteljstva za različite svrhe gdje fizički modeli nisu adekvatno definirani ili su vrlo kompleksni. Primjena strojnog učenja ne može biti u potpunosti implementirana u područje mjeriteljstva zbog ograničenja u pouzdanost (prihvatljivost) rezultata (predviđanja). Stoga je veoma bitno standardizirati primjenu mjeriteljskih principa u strojnom učenju. Principi pouzdanog strojnog učenja se istražuju kroz različite znanstveno projekte ali do sada nisu provedena sustavna istraživanja vezana za primjenu mjeriteljskih principa u strojnom učenju [56, 63, 64]. Strojno učenje se trenutno primjenjuje u nekoliko europskih mjeriteljskih projekata: Metrology of automated data analysis for cardiac arrhythmia management [18]; Metrology for the Factory of the Future [16]; Electrical Properties Tomography and Quantitative MR-based imaging of physical biomarkers [65]. Može se zaključiti da se sustavni mjeriteljski okvir za strojno učenje postepeno razvija.

3. REZULTATI

3.1. Izračun nesigurnosti uporabom različitih metoda

Izračun mjerne nesigurnosti proveden je primjenom GUM metode, MCS metode i Bayesove metode. Na osnovi ulazno-izlaznih parametara postavljenog modela i usporedbe rezultata dobivenih navedenim metodama istražen je kriterij za odabir metoda za izračun mjerne nesigurnosti. GUM metoda za izračun nesigurnosti implicira primjenu zakona o propagaciji mjerne nesigurnosti, predočavanje izlazne veličine i određivanje intervala pokrivanja. MCS metoda za izračun nesigurnosti implicira generiranje slučajnih uzoraka iz priornih razdioba. Postupak se ponavlja M puta. Na temelju izračunatih vrijednosti izlazne veličine tvori se razdioba izlazne veličine za izračunavanje parametara koji opisuju razdiobu i intervale pokrivanja. Bayesova metoda za izračun nesigurnosti kombinira priorno znanje za veličinu od interesa s podacima dobivenim tijekom postupka umjeravanja. Iz zajedničke posteriorne razdiobe se izračunava marginalna posteriorna razdioba za izračunavanje parametara koji opisuju razdiobu i intervale pokrivanja. Metode su primijenjene na modelu za umjeravanje utega W gustoće ρ_W prema referentnom utegu R gustoće ρ_R koji imaju istu nazivnu masu m_nom uporabom vage u zraku:

$$\delta m = (m_\mathrm{R,c} + \delta m_\mathrm{R,c})\left[1 + (\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{a0})\left(\frac{1}{\rho_\mathrm{W}} - \frac{1}{\rho_\mathrm{R}}\right)\right] - m_\mathrm{nom}, \tag{3.1}$$

gdje su: δm odstupanje prividne mase ispitnog utega W od nominalne nazivne mase utega, $m_\mathrm{R,c}$ prividna masa referentnog utega R, $\delta m_\mathrm{R,c}$ prividna masa utega (dodatak) gustoće ρ_R koji je dodan referentnom utegu R radi uravnoteženja s utegom W i ρ_a gustoća zraka u postupku umjeravanja. Prividna masa utega je masa utega koja je umjerena u zraku, a stvarna masa utega je masa utega koja je umjerena u vakuumu. Model umjeravanja utega (3.1) je preuzet iz Vodiča [2]. Ulazne veličine $m_\mathrm{R,c}$ i $\delta m_\mathrm{R,c}$ su opisane Gaussovom (normalnom) razdiobom, a ulazne veličine ρ_a, ρ_W i ρ_R su opisane uniformnom razdiobom. Za ulaznu veličinu ρ_a0 je usvojena vrijednost 1,2 $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ bez pridružene standardne nesigurnosti odnosno ulazna veličina se promatra kao konstantna vrijednost. Ulazne veličine s pridruženim razdiobama su dane u tablici (3.1). Na osnovu podataka iz tablice (3.1) provedena je usporedba rezultata mjernih nesigurnosti dobivenih primjenom različitih metoda. Podaci iz tablice (3.1) se odnose na umjeravanje utega nominalne mase 100 g klase točnosti $\mathrm{F_2}$. Na temelju ulaznih podataka izračunata je najbolja procjena izlazne veličine, Tablica 3.1: Ulazne veličine za model umjeravanja utega

Ulazne veličine	Razdiobe	Parametri			
		Očekivanje μ /mg	Standardna devijacija σ /mg	Očekivanje $(a+b)/2$ /kg m^{-3}	Interval $(b-a)/2$ /kg m^{-3}
$m_{\mathrm{R,c}}$	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	100000,000	0,053		
$\delta m_{\mathrm{R,c}}$	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	1,234	0,029		
ρ_{a}	$\mathcal{R}(a,b)$			1,20	0,10
ρ_{T}	$\mathcal{R}(a,b)$			8000	100
ρ_{R}	$\mathcal{R}(a,b)$			7960	50

pridružena standardna nesigurnost za izlaznu veličinu, 95 % simetrični interval pokrivanja za GUM metodu, MCS metodu i Bayesovu metodu te najkraći 95 % interval pokrivanja za MCS metodu i Bayesovu metodu. Za navedene metode provedena je usporedba rezultata za oba intervala pokrivanja te je predložen kriterij za odabir metode za izračun mjerne nesigurnosti na osnovi ulazno-izlaznih parametara metode. Također, provedena je usporedba primjena neinformativne i manje informativne priorne razdiobe za izlaznu veličinu.

3.1.1. Izračun nesigurnosti GUM metodom

Glavni izazov GUM metode je pronaći najbolju procjenu vrijednosti izlazne veličine i standardnu nesigurnost pridruženu veličini od interesa. Sukladno navedenom potrebno je odrediti očekivane vrijednosti za ulazne veličine i pridružene nesigurnosti za ulazne veličine iz priornih razdioba.

Referentnom utegu je pridružena normalna razdioba $\mathcal{N} \sim (\mu, \sigma^2)$. Očekivana vrijednost ulazne veličine $\widehat{m_{\mathrm{R,c}}}$ je jednaka očekivanoj vrijednosti normalne razdiobe $\mathbb{E}[X] = \mu$, a standardna nesigurnost $u(\widehat{m_{\mathrm{R,c}}})$ je jednaka standardnoj devijaciji normalne razdiobe $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$. Isti princip je primijenjen i za ulaznu veličinu $\delta m_{\mathrm{R,c}}$. Ulaznim veličinama ρ_{a}, ρ_{T} i ρ_{R} je pridružena uniformna razdioba $\mathcal{R}(a,b)$ s granicima intervala. Očekivana vrijednost izlazne veličine $\widehat{\rho_{\mathrm{a}}}$ je jednaka očekivanoj vrijednosti uniformne razdiobe $\mathbb{E}[X] = \int_a^b x/(b-a)\,dx = (a+b)/2$, a standardna nesigurnost $u(\widehat{\rho_{\mathrm{a}}})$ je jednaka vrijednosti standardne devijacije uniformne razdiobe $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = (b-a)/\sqrt{12}$. Varijanca je izračunata na sljedeći način: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \int_a^b x^2/(b-a) - \left(\int_a^b x/(b-a)\right)^2 = (b-a)^2/12$. Isti princip je primijenjen i za ostale ulazne veličine kojima je pridružena uniformna razdioba. Standardna nesigurnost je izračunata sukladno zakonu o propagaciji mjerne nesigurnosti (2.4). Na temelju stupnjeva slobode normalna razdioba je pridružena izlaznoj veličini δm, te je određen 95 % simetrični interval pokrivanja $\widehat{\delta m}_{(\mathrm{low})} = \widehat{\delta m}_{(0,025)}$ i $\widehat{\delta m}_{(\mathrm{high})} = \widehat{\delta m}_{(0,975)}$. Vjerojatnost da se izlazna veličina δm nalazi u intervalu između $\widehat{\delta m}_{(0,025)}$ i $\widehat{\delta m}_{(0,975)}$ se može zapisati na sljedeći način:

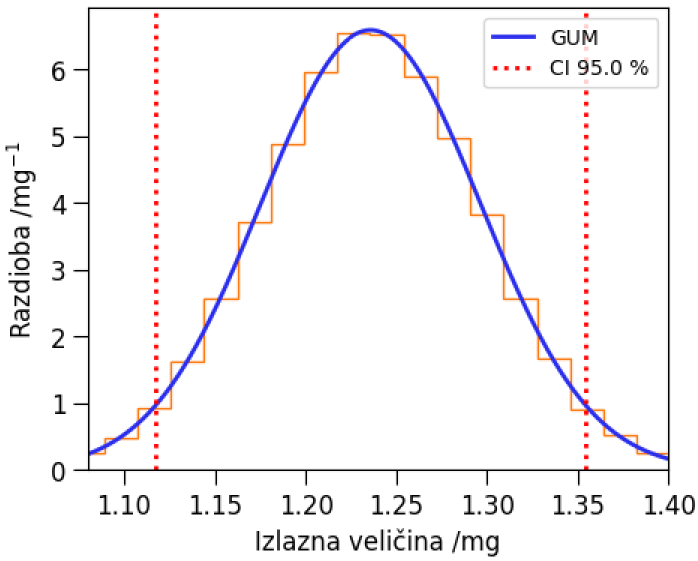
$$\mathbb{P}\left(\widehat{\delta m}_{(0,025)} \leq \delta m \leq \widehat{\delta m}_{(0,975)}\right) = 0,95. \tag{3.2}$$

Rezultati izračuna su prikazani u tablici (3.2) zajedno s vrijednostima $\widehat{\delta m}$, $u(\widehat{\delta m})$ i 95 % simetričnim intervalom pokrivanja. Interval pokrivanje je izračunat kao simetrični interval

Tablica 3.2: Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja

$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Interval pokrivanja 95% /mg
1,2359	0,0605	[1,1173 ; 1,3545]

pokrivanja za izlaznu veličinu što je prikazano na slici (3.1).

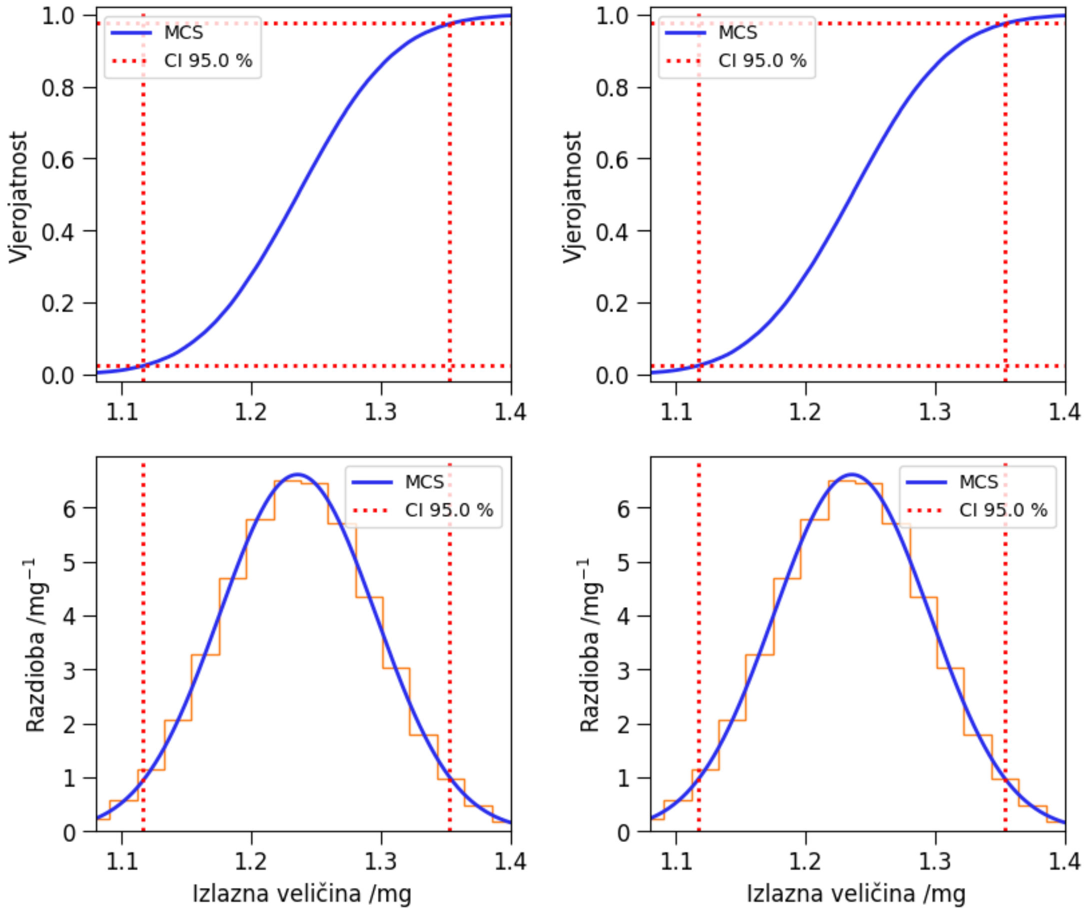


Slika 3.1: Funkcija gustoće vjerojatnosti za izlaznu veličinu dobivenu GUM metodom

Sukladno normi [27] većina certifikata o umjeravanju sadrži najbolju procjenu vrijednosti izlazne veličine i 95 % interval pokrivanja.

3.1.2. Izračun nesigurnosti MCS metodom

Kod izračuna mjerne nesigurnosti primjenom MCS metode primijenjena je direktna strategija za odabir broja simulacija. Odabrani broj simulacija je 5×10^4 veći od $1/(1 - \mathbb{P})$, gdje $\mathbb{P}$ predstavlja razinu povjerenja od 95 %. Primjena MCS metode zahtijeva slučajno uzorkovanje iz dvije normalne razdiobe i tri uniformne razdiobe (tablica 3.1). Na osnovi modela (3.1) i navedenih razdioba dobivene su vrijednosti izlaznih veličina. Razdioba izlazne veličine se dobiva sortiranjem vrijednosti izlaznih veličina u rastućem nizu. Interval pokrivanje je izračunat kao 95 % simetrični i 95 % najkraći interval pokrivanja za izlaznu veličinu sukladno MCS principima što je prikazano na slici (3.2).



(a) 95 % najkraći interval pokrivanja (b) 95 % simetrični interval pokrivanja

Slika 3.2: Kumulativna funkcija razdioba i funkcija gustoće vjerojatnosti za izlaznu veličinu dobivenu MCS metodom

Najkraći interval (3.2a) odnosno vjerojatnost da δm (izlazna veličina) poprima vrijednosti između $\widehat{\delta m}_{(q)}$ i $\widehat{\delta m}_{(q+0,95M)}$ je dan izrazom:

$$\mathbb{P}\left(\widehat{\delta m}_{(q)} \leq \delta m \leq \widehat{\delta m}_{(q+0,95M)}\right) \approx \frac{q+0,95M}{M} - \frac{q}{M} = 0,95. \tag{3.3}$$

Rezultati izračuna su prikazani u tablici (3.3) zajedno s vrijednostima $\widehat{\delta m}$, $u(\widehat{\delta m})$ i 95 % najkraćim intervalom pokrivanja.

Tablica 3.3: Rezultati za 95 % najkraći interval pokrivanja

$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Interval pokrivanja 95% /mg
1,2361	0,0604	[1,1163 ; 1,3532]

Simetrični interval pokrivanja (3.2b) odnosno vjerojatnost da δm (izlazna veličina) poprima vrijednosti između $\widehat{\delta m}_{(\text{low})} = \widehat{\delta m}_{(0,025M)}$ i $\widehat{\delta m}_{(\text{high})} = \widehat{\delta m}_{(0,975M)}$ je dan izrazom:

$$\mathbb{P}\left(\widehat{\delta m}_{(\text{low})} = \widehat{\delta m}_{(0,025M)} \leq \delta m \leq \widehat{\delta m}_{(\text{high})} = \widehat{\delta m}_{(0,975M)}\right) = 0,95. \tag{3.4}$$

Simetrični interval pokrivanja se koristi ukoliko postoji dovoljno dokaza da izlazna veličina može biti opisana normalnom razdiobom. Na temelju slike (3.2) se može zaključiti da izlazna veličina ima oblik normalne razdiobe tako da se simetrični interval pokrivanja može koristiti za usporedbu rezultata. Rezultati izračuna su prikazani u tablici (3.4) zajedno s vrijednostima $\widehat{\delta m}$, $u(\widehat{\delta m})$ i 95 % simetričnim intervalom pokrivanja.

Tablica 3.4: Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja

$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Interval pokrivanja 95% /mg
1,2361	0,0604	[1,1176 ; 1,3546]

Na temelju dobivenih izlaznih vrijednosti formirana je aproksimativna kumulativna funkcija razdiobe i funkcija gustoće vjerojatnosti kao što je prikazano na slici (3.2). Aproksimativna razdioba sadrži dovoljno informacija za određivanje parametara za veličinu od interesa. Kod određivanja oblika razdiobe izlazne veličine njena simetričnost se ne pretpostavlja. Oblik razdiobe se dobiva kreiranjem histograma na osnovi kojeg se zaključuje o načinu određivanja 95 % intervala pokrivanja kao što je prikazano na slici (3.2). U ovom primjeru interval pokrivanja je izračunat kao simetrični 95 % interval pokrivanja i najkraći 95 % interval pokrivanja. MCS metoda ima određene prednosti u postupku izračuna mjerne nesigurnosti u odnosu na GUM metodu što je opisano u nastavku rada.

3.1.3. Izračun nesigurnosti Bayesovom metodom

Bayesova metoda zahtijeva redefiniranje modela (3.1) u opservacijski model kako slijedi:

$$\delta m_{\mathrm{R,c}} = (\delta m + m_{\mathrm{nom}}) / \left[1 + (\rho_{\mathrm{a}} - \rho_{\mathrm{a0}})\,(1/\rho_{\mathrm{W}} - 1/\rho_{\mathrm{R}})\right] - m_{\mathrm{R,c}}, \tag{3.5}$$

gdje je veličina indikacije $D \equiv \delta m_{\mathrm{R,c}} = \phi(Y,\ \boldsymbol{\Theta})$ izražena pomoću izlazne veličine $Y \equiv \delta m$ i drugih ulaznih veličina $\boldsymbol{\Theta} \equiv (m_{\mathrm{R,c}}, \rho_{\mathrm{a}}, \rho_{\mathrm{W}}, \rho_{\mathrm{R}})^{\top}$. Vrijednosti indikacije $d_1, \ldots, d_n$ se uzorkuju iz normalne razdiobe koja ima nepoznatu očekivanu vrijednost D i standardnu nesigurnost S. Priorne razdiobe za ulazne veličine su formirane na osnovi tablice (3.1). Za uzlaznu veličinu su kreirane manje informativne priorne razdiobe i neinformativna razdioba. Za većinu problema iz područja umjeravanja postoje određena saznanja za veličine koje se promatraju npr: vrijednosti umjeravanja koje su ograničene na pozitivne vrijednosti, poznati opseg umjeravanja, poznata klasa točnosti, očekivana vrijednost izlazne veličine koja je blizu nule ili nekog drugog broja, itd., U postupku izračuna mjerne nesigurnost korištena je manje informativna i neinformativna priorna razdioba radi usporedbe rezultata te opravdanosti korištenja manje informativne razdiobe. Manje informativne priorne razdiobe se upotrebljavaju bez straha da se nameće određeno rješenje problema. Manje informativne priorne razdiobe drže posteriorne razdiobe u granicama očekivanoga izlaza. Ako postoji pouzdana informativna priorna razdioba nema valjanog razloga za odbacivanje takve razdiobe. Ako pak postoje dostupne određene informacije za kreiranje priornih razdioba iste trebaju biti upotrijebljene za izračun nesigurnosti. Na ovaj način se dobiva transparentan model što omogućuje lakši kritički osvrt na isti, njegovu provjeru i ažuriranje s ciljem unaprjeđenja istog. Kod izračuna nesigurnosti korištene su manje informativne priorne razdiobe koje su kreirane na temelju klase točnosti utega i neinformativna priorna razdioba za veličinu od interesa. Sukladno izrazima (2.3) i (3.5) model za izračun nesigurnosti je dan izrazom (3.6):

$$f_{Y,\,\boldsymbol{\Theta},S^2\,|\,D}(\eta,\ \boldsymbol{\theta},\ s^2\,|\,d_1,\ldots,d_n) \propto \mathcal{L}_D(d,\ s^2\,|\,d_1,\ldots,d_n)\, f_{Y,\,\boldsymbol{\Theta},S^2}(\eta,\ \boldsymbol{\theta},\ s^2)\,, \tag{3.6}$$

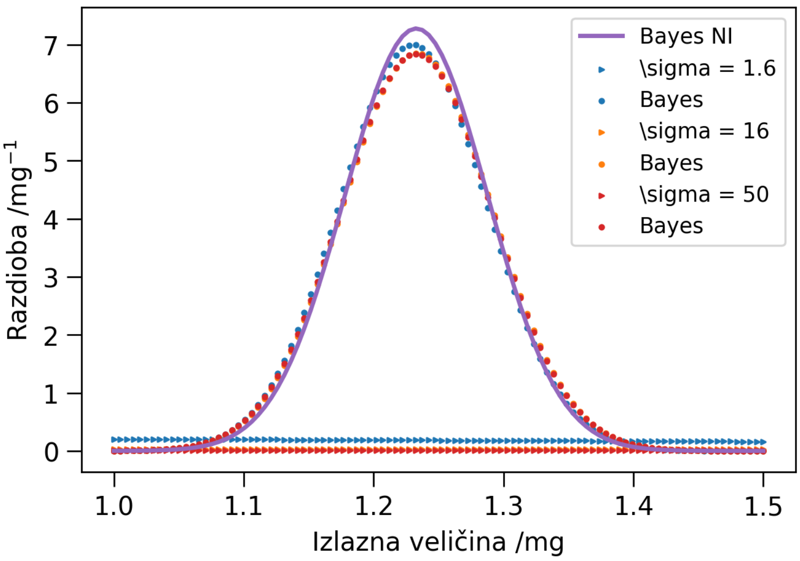
gdje $f_{Y,\boldsymbol{\Theta},S^2\,|\,D}(\eta,\,\boldsymbol{\theta},\,s^2\,|\,d_1,\ldots,d_n)$ predstavlja posteriornu razdiobu, $\mathcal{L}_D(d,\,s^2\,|\,d_1,\ldots,d_n)$ predstavlja funkciju vjerodostojnosti:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D(d,\,s^2\,|\,d_1,\ldots,d_n) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(d_i-d)^2}{2s^2}\right\}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(d_i-\phi(Y,\,\boldsymbol{\Theta})^2}{2s^2}\right\}, \qquad (3.7)\end{aligned}$$

i $f_{Y,\boldsymbol{\Theta},S^2}(\eta,\,\boldsymbol{\theta},\,s^2)$ je priorna razdioba parametara. Marginalna posteriorna razdioba izlazne veličine je dana izrazom (3.8):

$$f_{Y\,|\,D}(\eta|\,d_1,\ldots,d_n) \propto \iint \mathcal{L}_D(d,\,s^2\,|\,d_1,\ldots,d_n) f_{Y,\boldsymbol{\Theta},S^2}(\eta,\,\boldsymbol{\theta},\,s^2)\,d(\boldsymbol{\theta},s^2)\,. \qquad (3.8)$$

Razdioba izlazne veličine δm se dobiva sortiranjem vrijednosti izlaznih veličina u rastućem nizu. Interval pokrivanja je izračunat kao 95 % simetrični i 95 % najkraći interval pokrivanja za izlaznu veličinu sukladno Bayesovom principu. Na slici (3.3) je prikazana marginalna posteriorna razdioba za izlaznu veličinu od interesa za različite priorne manje informativne razdiobe, te neinformativnu priornu razdiobu izlazne veličine.



Slika 3.3: Prikaz priornih i posteriornih razdioba

Rezultati izračuna očekivane vrijednosti, pridružene standardne nesigurnosti i 95 % simetričnog intervala pokrivanja su dani u tablici (3.5).

Rezultati dobiveni uporabom manje informativne i neiformativne priorne razdiobe po-

Tablica 3.5: Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja

Metoda	Priorna razdioba	$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Interval pokrivanja 95% /mg
Bayes	$\mathcal{N} \sim (0;\ 1{,}6^2)$	1,2301	0,0570	[1,1183 ; 1,3419]
Bayes	$\mathcal{N} \sim (0;\ 16^2)$	1,2333	0,0582	[1,1191 ; 1,3474]
Bayes	$\mathcal{N} \sim (0;\ 50^2)$	1,2351	0,0583	[1,1185 ; 1,3470]
Bayes NI	-	1,2328	0,0548	[1,1254 ; 1,3403]

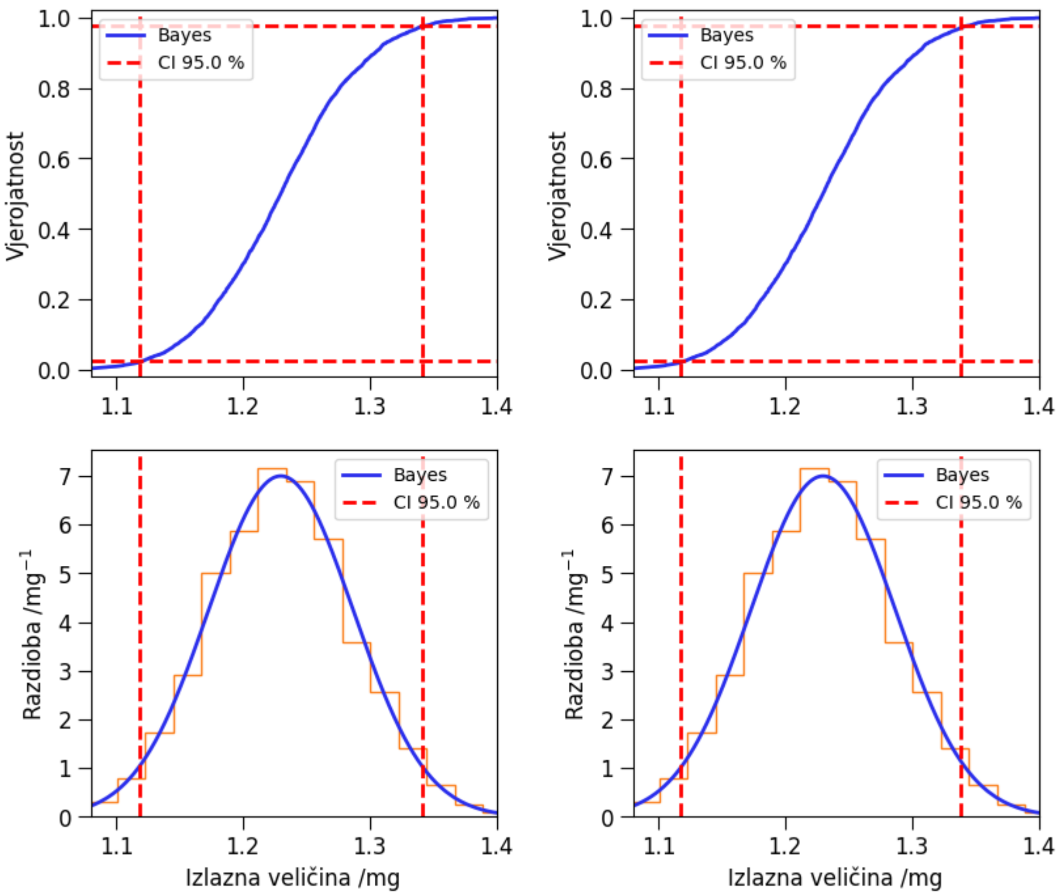
kazuju dobro slaganje rezultata. Razlika između vrijednosti izlazne veličine je manje od jedan posto. Razlika između granica intervala pokrivanja je također manja od jedan posto. Usporedba je provedena u odnosu na neiformativnu posteriornu marginalnu razdiobu. Iz dobivenih rezultata se može zaključiti da se manje informativne razdiobe mogu koristiti za izračun nesigurnosti.

Uzimajući u obzir da se postupak umjeravanja odnosi na klasu točnosti utega F_2, maksimalno dozvoljena pogreška za ovu klasu utega iznosi 1,6 mg [66]. Tijekom umjeravanja (u idealnim uvjetima) razlika u masi između referentnog i ispitnog utega treba biti minimalna odnosno nula. Sukladno navedenom formirana je manje informativna normalna priorna razdioba za izračun nesigurnosti. Blok kod za izračun parametara posteriorne marginalne razdiobe dan je u nastavku:

```
from pymc3 import *  # paket PyMC3
y=np.array([1.205092,1.202,1.248,1.251429,1.245862]) # mjerenja
if __name__ == '__main__':
with Model() as model:
    rho_a0=1.2e6 # ulazne veličine
    m_nom=1e5
    mr_c=Normal('mr_c',mu=1e5,sigma=0.053) # priorne razdiobe
    rho_a=Uniform('rho_a',lower=1.160e6,upper=1.180e6)
    rho_w=Uniform('rho_w',lower=7.9e9,upper=8.1e9)
    rho_r=Uniform('rho_r',lower=7.955e9,upper=7.965e9)
    eta=Normal('eta',0,sigma=1.6) # Manje inforativana razdioba
    sigma = HalfNormal("sigma",sigma=1)
    # Funkcija za izračun indikacija
    d=Deterministic('d',dm_rc(eta,mr_c,rho_a,rho_a0,rho_w,rho_r,m_nom))
```

```
# Funkcija vjerodostojnosti
likelihood = Normal('Y_obs',mu=d,sigma=sigma,observed=y)
# Uzorkovanje
data=sample(draws=50005,tune=2000,chains=4,cores=4,init='adapt_diag')
# Izračun aproksimiranih posteriornih razdioba (MCMC)
plot_trace(data,var_names=[],compact=False)
# Funkcija za izračun intervala i nesigurnosti
shoInt(data['eta'][10000:50000:10],p=0.95) # simetrični interval
simInt(data['eta'][10000:50000:10],p=0.95) # najkraći interval
```

Interval pokrivanje je izračunat kao simetrični i najkraći interval pokrivanja za izlaznu veličinu sukladno MCMC principima što je prikazano na slici (3.4). Najkraći 95 % interval (3.4a) je određen prema izrazu (3.3).



(a) 95 % najkraći interval pokrivanja (b) 95 % simetrični interval pokrivanja

Slika 3.4: Kumulativna funkcija razdioba i funkcija gustoće vjerojatnosti za izlaznu veličinu dobivenu Bayesovom metodom uporabom manje informativne priorne razdiobe

Izračunate vrijednosti izlaznih veličina su dobivene iz marginalne posterirone razdiobe uz pomoć modela (3.5). Rezultati izračuna su prikazani u tablici (3.6) zajedno s vrijednostima $\widehat{\delta m}$, $u(\widehat{\delta m})$ i 95 % najkraćim intervalom pokrivanja.

Tablica 3.6: Rezultati za 95 % najkraći interval pokrivanja

$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Interval pokrivanja 95% /mg
1,2301	0,0570	[1,1174 ; 1,3382]

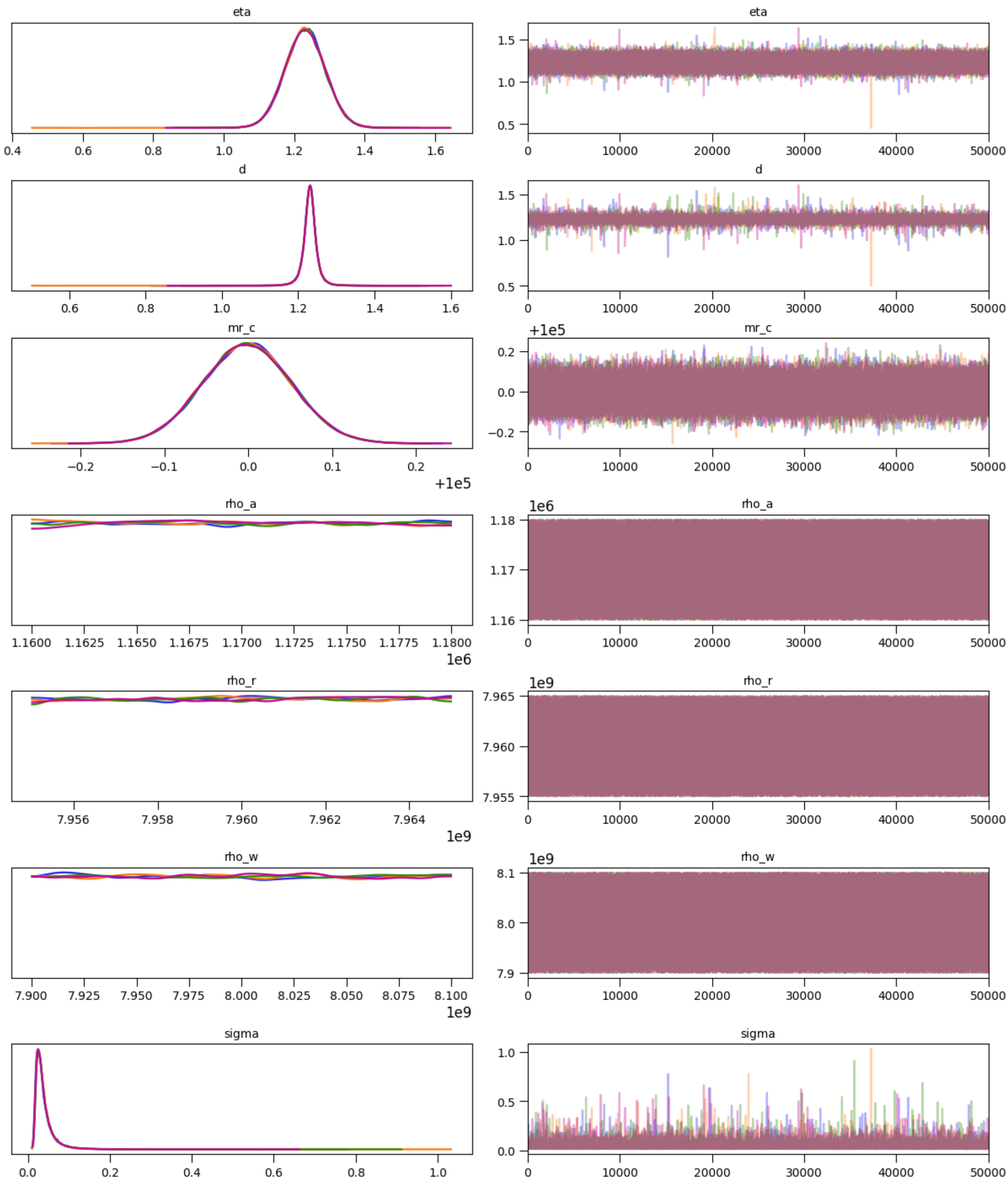
Simetrični 95 % interval pokrivanja (3.4b) je određen prema izrazu (3.4). Simetrični interval pokrivanja se koristi ako postoji dovoljno dokaza da izlazna veličina može biti okarakterizirana normalnom razdiobom. Na osnovi slike (3.4) se može zaključiti da izlazna veličina ima oblik normalne razdiobe tako da se simetrični interval pokrivanja može koristiti za usporedbu rezultata. Rezultati izračuna su prikazani u tablici (3.7) zajedno s vrijednostima $\widehat{\delta m}$, $u(\widehat{\delta m})$ i 95 % simetričnim intervalom pokrivanja.

Tablica 3.7: Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja

$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Interval pokrivanja 95% /mg
1,2301	0,0570	[1,1183 ; 1,3382]

Na temelju dobivenih izlaznih vrijednosti formirana je aproksimativna kumulativna funkcija razdiobe i funkcija gustoće vjerojatnosti kao što je prikazano na slici (3.4). Aproksimativna razdioba sadrži dovoljno informacija vezanih za veličinu od interesa. Kod određivanja oblika razdiobe izlazne veličine njena simetričnost se ne pretpostavlja. Oblik razdiobe se dobiva kreiranjem histograma na osnovi kojeg se zaključuje način određivanja 95 % interval pokrivanja kao što je prikazano na slici (3.4). U postupku izračuna mjerne nesigurnosti ovom metodom priorne informacije imaju utjecaja na izračun nesigurnosti. Značajno umanjena nesigurnost je posljedica poznavanja informativnih priornih razdioba. Selekcija priorne razdiobe za izlaznu veličinu od interesa predstavlja izazov u izračunu mjerne nesigurnosti ovom metodom. Sukladno navedenom istražena je osjetljivost modela uporabom različitih priornih razdiobi što je prikazano na slici (3.3) te je odabrana manje informativna razdioba za izračun nesigurnosti i usporedbu rezultata.

Na slici (3.5) su na lijevoj strani prikazane posteriorne razdiobe ulaznih veličina, a na desnoj strani su uporabom MCMC metode prikazane putanje lanaca.

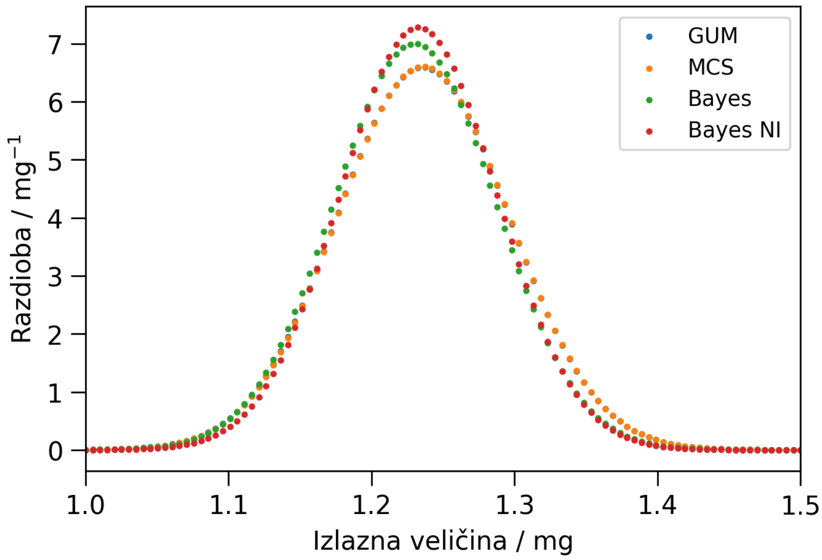


Slika 3.5: Prikaz putanja četiri lanca za opservacijski model

Ukupno je generirano 200 000 uzoraka za sve ulazne veličine na osnovi čega su formirane njihove posteriorne razdiobe iz kojih su izračunati parametri veličina modela (3.5). Može se zaključiti da vrijednosti ulaznih veličina za opservacijski model (3.5) fluktuiraju oko svojih očekivanih vrijednosti i da nema značajnih odstupanja između lanaca, te da je postignuta dobra konvergencija rezultata izračuna. Iz dobivenih posteriornih razdioba se izračunavaju parametri od interesa za iskazivanje potpunog rezultata mjerenja. Iz slike (3.5) dobiva se uvid u izračun rezultata dobivenih MCMC metodom za sve veličine (parametre) za svaki lanac i svaku iteraciju.

3.1.4. Kriteriji za odabir metoda

Usporedba rezultata dobivenih različitim metodama za izračun nesigurnosti prikazana je na slici(3.6).



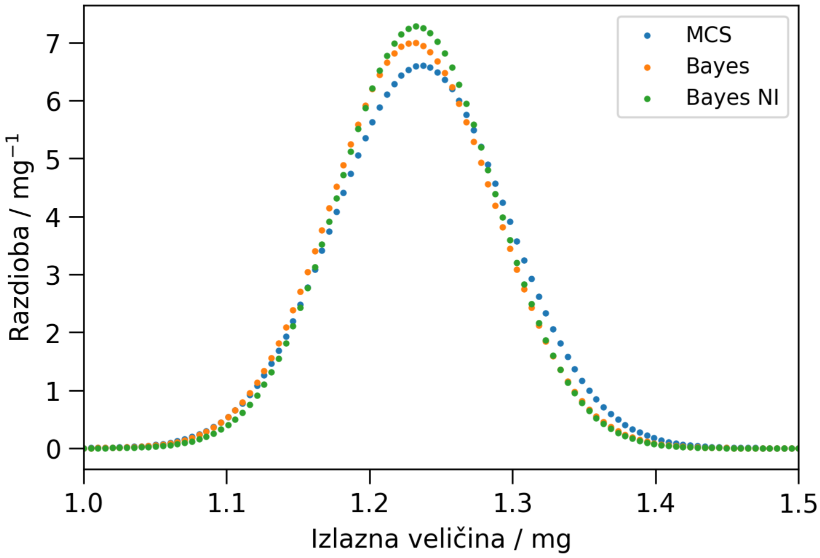
Slika 3.6: Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja

Rezultati izračuna su prikazani u tablici (3.8) zajedno s vrijednostima $\widehat{\delta m}$, $u(\widehat{\delta m})$ i 95 % simetričnim intervalom pokrivanja.

Tablica 3.8: Rezultati za 95 % simetrični interval pokrivanja

Metoda	$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Interval pokrivanja 95% /mg
GUM	1,2359	0,0605	[1,1173 ; 1,3545]
MCS	1,2361	0,0604	[1,1176 ; 1,3546]
Bayes	1,2301	0,0570	[1,1183 ; 1,3419]
Bayes NI	1,2328	0,0548	[1,1254 ; 1,3403]

Izračunata je razlika između 95 % simetričnih intervala pokrivanja i očekivanih vrijednosti za sve metode na temelju rezultata iz tablice (3.8) u odnosu na MCS metodu. Razlika između 95 % simetričnih intervala pokrivanja je manja od jedan posto za sve metode. Razlika vrijednosti između očekivanih vrijednosti izlazne veličine je manja od jedan posto za sve metode. Primjenom manje informativnih priornih razdioba i analizom njihovog utjecaja na posteriornu marginalnu razdiobu izlazne veličine dokazano je da su rezultati izračuna nesigurnosti dobiveni Bayesovom metodom (nestandardna metoda za izračun nesigurnosti) usporedivi s druge dvije standardne metode za izračun nesigurnosti te da se manje informativne priorne razdiobe mogu koristiti za izračune posteriorne razdiobe izlazne veličine. Na slici (3.7) je prikazana usporedba rezultata izračuna nesigurnosti dobivenih različitim metodama za izračun mjerne nesigurnosti.



Slika 3.7: Rezultati za 95 % najkraći interval pokrivanja

Rezultati izračuna očekivane vrijednosti, pridružene standardne nesigurnosti i 95 % najkraći interval pokrivanja su dani u tablici (3.9).

Tablica 3.9: Rezultati za 95 % najkraći interval pokrivanja

Metoda	$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Interval pokrivanja 95% /mg
MCS	1,2361	0,0604	[1,1163 ; 1,3532]
Bayes	1,2301	0,0570	[1,1174 ; 1,3382]
Bayes NI	1,2328	0,0548	[1,1254 ; 1,3403]

Izračunata je razlika između 95 % najkraćih intervala pokrivanja i očekivanih vrijednosti za sve metode na temelju rezultata iz tablice (3.9) u odnosu na MCS metodu. Razlika između 95 % najkraćih intervala pokrivanja je manja od jedan posto za sve metode. Razlika vrijednosti između očekivanih vrijednosti izlazne veličine je manja od jedan posto za sve metode. Rezultati dobiveni s manje informativnim priornim razdiobama pokazuju bolje slaganje s druge dvije metode za izračun nesigurnosti nego rezultati dobiveni uporabom neinformativne razdiobe što opravdava uporabu ovih priornih razdioba za izračun nesigurnosti uporabom Bayesove metode.

Usporedba metoda je kreirana na temelju ulaznih parametra metoda, značajki metoda i izlaznih parametara metoda:

- GUM metoda (ulazni parametri): mjerni model, očekivane vrijednosti za ulazne veličine, standardne nesigurnosti za ulazne veličine, kovarijance između međusobno ovisnih veličina kao zajedničke standardne nesigurnosti, koeficijenti osjetljivosti, stupnjevi slobode i simetrični interval pokrivanja.
- GUM metoda (izlazni parametri): najbolja procjena izlazne veličine i pridružena nesigurnost, proširena mjerna nesigurnost i interval pokrivanja.
- MCS metoda (ulazni parametri): mjerni model (linearan ili nelinearan), ulazne veličine te opisivanje istih odgovarajućim razdiobama ili zajedničkim razdiobama ukoliko su ulazne veličine zavisne, broj simulacija, intervali pokrivanja.
- MCS metoda (izlazni parametri): aproksimirana razdioba izlazne veličine, najbolja procjena izlazne veličine i pridružena nesigurnost i interval pokrivanja.
- Bayesova metoda (ulazni parametri): opservacijski model (linearan ili nelinearan), ulazne veličine te opisivanje istih odgovarajućim priornim razdiobama ili zajedničkim priornim razdiobama ako su ulazne veličine zavisne, određivanje broja simulacija (uzorka) i intervali pokrivanja.
- Bayesova metoda (izlazni parametri): aproksimirana razdioba izlazne veličine, najbolja procjena izlazne veličine i pridružena nesigurnost i intervali pokrivanja.

Kriteriji za odabir metoda za izračun nesigurnosti su dane u nastavku. Kriteriji za odabir GUM metode:

- linearni mjerni model (izračunavanje parcijalnih derivacija prvog reda)
- nelinearni mjerni modeli (izračunavanje parcijalnih derivacija višeg reda)
- Gaussove razdiobe dominantne za sastavnicu Tip A i Tip B mjerne nesigurnosti

- o izlazna veličina predstavljena simetričnim intervalom pokrivanja
- preporuka: primjena metode za jednostavnije linearne modele.

Kriteriji za odabir MCS metode:

- svi kriteriji navedeni za GUM metodu su primjenjivi i za MCS metodu
- složeni linearni i nelinearni mjerni modeli (bez izračunavanja parcijalnih derivacija)
- ne-Gaussove razdiobe dominantne za sastavnicu Tip A i Tip B mjerne nesigurnosti
- izlazna veličina predstavljena najkraćim intervalom pokrivanja
- preporuka: primjena metode za složene linearne i nelinearne modele.

Kriteriji za odabir Bayesove metode:

- svi kriteriji navedeni za MCS metodu su primjenjivi i za Bayesovu metodu
- sastavnica Tip A mjerne nesigurnosti se može predstaviti informativnom, manje informativnom ili neinformativnom razdiobom
- uporaba Monte Carlo Markovljevih lanaca
- preporuka: primjena metode za složene linearne i nelinearne modele.

Dani modeli u radu za procjenu mjerne nesigurnosti i postavljeni kriteriji se mogu široko primijeniti i prilagoditi različitim uvjetima u laboratorijima.

Postupak ocjenjivanja sukladnosti je bilo koja aktivnost koja je poduzeta radi utvrđivanja da li proizvod, proces, sustav, osoba ili organizacija ispunjavaju zahtjeve određenih normi ili ispunjavaju unaprijed definirane zahtjeve [6]. U većini proizvodnih procesa postupak ocjenjivanja sukladnosti proizvoda (točnost proizvedenog elementa) s unaprijed definiranom specifikacijom je obavezna. U postupku ocjenjivanja sukladnosti proizvoda neophodno je usporediti izmjerenu vrijednost s unaprijed definiranom specifikacijom proizvoda radi potvrđivanja njegove sukladnosti. Kvantitativni aspekt specifikacije predstavlja tolerancijski interval s donjom granicom i/ili gornjom granicom intervala. Tolerancijski interval u postupku ocjenjivanja sukladnosti je propisan od strane proizvođača te ukazuje na traženu točnost proizvoda. Ako se stvarna vrijednost nalazi unutar tolerancijskog intervala onda kažemo da je proizvod sukladan sa specifikacijom odnosno nesukladan ako se stvarna vrijednost nalazi izvan tolerancijskog intervala. Međutim, nesigurnost pridružena mjernom rezultatu može dovesti do pogrešnih odluka da nesukladan proizvod bude prihvaćen ili da sukladan proizvod bude odbačen. U radu je dan postupak izračuna specifičnog i globalnoga rizika za ocjenjivanje sukladnosti mjerila tlaka visoke točnosti. Specifični rizik se definira kao vjerojatnost pogrešne odluke za određeni proizvod, a globalni rizik se definira kao vjerojatnost pogrešne odluke na temelju kontrolnih mjerenja.
U praksi ocjenjivanje sukladnosti proizvoda podrazumijeva ispitivanje koje rezultira mjerenjem ili setom mjerenja, razmatrajući jednu ili više veličina proizvoda od interesa, koje se uspoređuju s definiranim zahtjevima. Ocjenjivanje sukladnosti se sastoji iz tri dijela: mjerenje veličine od interesa, usporedba rezultata mjerenja sa specificiranim zahtjevima, te prihvaćanje ili odbijanje proizvoda ili ponovno mjerenje. Pri tome, u postupku ocjenjivanja sukladnosti, važnu ulogu ima mjerna nesigurnost rezultata. Za mjerni rezultat kažemo da je potpun ako sadrži izmjerenu vrijednost i pridruženu mjernu nesigurnost. Mjerna nesigurnost predstavlja kvalitetu mjernog rezultata. Samo rezultat s mjernom nesigurnosti se može koristi u svrhu usporedbe rezultata sa specifikacijama. Uzimajući u obzir da postupak ocjenjivanja sukladnosti zahtijeva uspoređivanje između mjernog rezultata i tolerancijskog intervala razmatranje mjerne nesigurnosti u praksi ocjenjivanja sukladnosti proizvoda je nedvojbena [6, 28, 67–71]. Kroz analizu mjerila tlaka visoke točnosti razmatrana su dva slučaja pogrešnih odluka, i to: rizik prihvaćanja nesukladnog mjerila, takozvanog rizika potrošača i rizik odbijanja sukladnog mjerila, takozvanog rizika

proizvođača. Obje vrste rizika se izračunavaju primjenom Bayesovog okvira ali zahtijevaju izračun različitih objekata vjerojatnosti. Posteriorna razdioba dobivena primjenom Bayesove metode se koristi za izračun specifičnog rizika dok se zajednička razdioba koristi za izračun globalnog rizika.

3.2.1. Izračun rizika uporabom Bayesove metode

Znanje o mjernoj veličini od interesa, u postupku izračuna rizika, je opisano slučajnom varijablom i izražava se pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti. Sukladno Bayesovoj metodi takva razdioba kombinira priorno znanje o mjernoj veličini od interesa (priorna razdioba) i informacije prikupljene tokom mjerenja. Primjenom Bayesove metode se izračunava posteriorna razdioba:

$$f_{Y|Y_m}(\eta \mid \eta_m) = \mathcal{L}_{Y_m}(\eta) f_Y(\eta)/c \propto \mathcal{L}_{Y_m}(\eta) f_Y(\eta), \tag{3.9}$$

gdje je: c normalizirana konstanta, $f_Y(\eta)$ priorna razdioba, $\mathcal{L}_{Y_m}(\eta)$ funkcija vjerodostojnosti i $f_{Y|Y_m}(\eta \mid \eta_m)$ posteriorna razdioba.

Postupak izračuna rizika odnosno odlučivanja za mjerilo tlaka visoke točnosti je proveden na osnovi mjerenja veličine od interesa (tlak). Primijenjeno je binarno odlučivanje što znači da proizvod (mjerilo) mora biti prihvaćen (proglašen kao sukladan) ili odbijen (proglašen kao nesukladan). Ne postoje vrijednosti za veličinu od interesa koje bi dovele do ne donošenja odluka odnosno ne postoji takozvani interval sumnje u procesu odlučivanja. Dva specifična rizika, vezano za postupak odlučivanja o prihvaćanju ili odbijanju proizvoda, mogu se definirati kao [68]:

- Specifični potrošačev rizik, $R_c^* = 1 - p_c$, predstavlja vjerojatnost prihvaćanja nesukladnog proizvoda.
- Specifični proizvođačev rizik, $R_p^* = p_c$, predstavlja vjerojatnost odbijanja sukladnog proizvoda.

Kod specifičnog proizvođačevog rizika veličina od interesa η_m (izmjerena vrijednost) se nalazi izvan intervala prihvaćanja dok se kod specifičnog potrošačevog rizika vrijednost nalazi unutra intervala prihvaćanja. Izraz za izračun specifičnog rizika se može zapisati kako slijedi:

$$p_c = \int_{T_L}^{T_U} f_{Y|Y_m}(\eta \mid \eta_n)\, d\eta_m = Y(T_U|\eta_m) - Y(T_L|\eta_m), \tag{3.10}$$

gdje je : T_L donja granica tolerancijskog intervala i T_U gornja granica tolerancijskog intervala.

U slučaju kada je tolerancijski interval zadan donjom ili gornjom graničnom vrijednošću sukladnost, odnosno vjerojatnost se računa kao $p_c = Y(T_L|\eta_m)$ kada se izmjerena vrijednost uspoređuje s gornjom granicom tolerancijskog intervala te $p_c = 1 - Y(T_U|\eta_m)$ kada se izmjerena vrijednost uspoređuje sa donjom granicom tolerancijskog intervala. Radi izračunavanja specifičnih rizika potrebno je izračunati posteriornu razdiobu $f_{Y|Y_m}(\eta_m \,|\, \eta)$ primjenom Bayesove metode opisane izrazima (3.11), (3.12) i (3.13) [36, 51]:

$$f_{Y|Y_m}(\eta \,|\, \eta_m) \propto \mathcal{L}_{Y_m}(\eta) f_Y(\eta) \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} Y \sim \mathcal{N}(\eta_0,\, u_0^2), \quad Y_m \sim \mathcal{N}(\eta,\, u_m^2) \\ \mathcal{L}_{Y_m}(\eta) = \frac{1}{u_m^2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(\eta_m - \eta)^2}{2u_m^2} \right\}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} f_{Y|Y_m}(\eta \,|\, \eta_m) &= \frac{1}{f_{Y_m}(\eta_m)} \left\{ \frac{1}{u_0\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(\eta - \eta_0)^2}{2u_0^2} \right\} \frac{1}{u_m^2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(\eta_m - \eta)^2}{2u_m^2} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{f_{Y_m}(\eta_m)} \left\{ \frac{1}{\sigma_0 u_m^2 2\pi} \exp\left\{ -\frac{(\eta - \eta_0)^2}{2u_0^2} - \frac{(\eta_m - \eta)^2}{2u_m^2} \right\} \right\} \\ &= c \cdot \exp\left\{ -\frac{(\eta - \eta_0)^2}{2u_0^2} - \frac{(\eta_m - \eta)^2}{2u_m^2} \right\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Iz izraza (3.13) se može zaključiti da posteriorna razdioba ima oblik normalne razdiobe, te se može zapisati kako slijedi:

$$f_{Y|Y_m}(\eta \,|\, \eta_m) = c \cdot \exp\left\{ -f(\eta) \right\}; \quad f(\eta) = \frac{(\eta - \eta_0)^2}{2u_0^2} + \frac{(\eta - \eta_m)^2}{2u_m^2}. \tag{3.14}$$

Posteriorna razdioba $f_{Y|Y_m}(\eta|\eta_m)$ je definirana očekivanom vrijednošću i standardnom nesigurnosti (3.15):

$$\widehat{\eta} = \mathbb{E}[Y|Y_m = \eta_m] = \frac{\frac{\eta_0}{u_0^2} + \frac{\eta_m}{u_m^2}}{\frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_m^2}}; \quad u(\widehat{\eta}) = \mathbb{V}(Y|Y_m) = \eta_m])^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_m^2}}}. \tag{3.15}$$

Iz dobivene posteriorne razdiobe se može zaključiti da ima oblik normalne razdiobe na temelju izraza (3.13) i (3.14) što omogućuje izračun rizika prema izrazu (3.10). Također, treba uzeti u obzir da kod izračuna specifičnog potrošačevog rizika izmjerena vrijednost η_m poprima vrijednosti unutar intervala prihvaćanja, a u slučaju izračuna specifičnog proizvođačevog rizika izmjerena vrijednost poprima vrijednosti izvan intervala prihvaćanja. Rizici za mjerilo tlaka visoke točnosti izračunati su prema izrazu (3.10).

Globalni potrošačev rizik se definira kao vjerojatnost da nesukladan proizvod bude prihvaćen na osnovi kontrolnih mjerenja, a globalni proizvođačev rizik se definira kako vjerojatnost da sukladni proizvod bude odbačen na osnovi tih mjerenja. Navedeni izračun rizika je od iznimne važnosti za proizvodne procese radi postizanja kompromisa između rizika odbacivanja sukladnih proizvoda i rizika visoke kvalitete tih proizvoda. Izračun globalnog rizika uključuje granice tolerancijskog intervala propisane za mjernu veličinu od interesa te granice intervala prihvaćanja za izmjerenu vrijednost. Globalni potrošačev rizik se izračunava iz zajedničke razdiobe:

$$R_c = \iint f_{Y,Y_m}(\eta, \eta_m)\, d(\eta, \eta_m), \tag{3.16}$$

$$R_c = \int_{-\infty}^{T_L} \int_{A_L}^{A_U} f_Y(\eta) f_{Y_m|Y}(\eta_m \mid \eta)\, d\eta_m\, d\eta + \int_{T_U}^{+\infty} \int_{A_L}^{A_U} f_Y(\eta) f_{Y_m|Y}(\eta_m \mid \eta)\, d\eta_m\, d\eta, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} R_c = \int_{-\infty}^{T_L} f_Y(\eta) \left(\int_{A_L}^{A_U} f_{Y_m|Y}(\eta_m \mid \eta)\, d\eta_m \right) d\eta \\ + \int_{T_U}^{+\infty} f_Y(\eta) \left(\int_{A_L}^{A_U} f_{Y_m|Y}(\eta_m \mid \eta)\, d\eta_m \right) d\eta, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$R_c = \int_{-\infty}^{T_L} f_Y(\eta)\, \left(Y_m(A_U \mid \eta) - Y_m(A_L \mid \eta)\right) d\eta + \int_{T_U}^{+\infty} f_Y(\eta)\, \left(Y_m(A_U \mid \eta) - Y_m(A_L \mid \eta)\right) d\eta. \tag{3.19}$$

Kod globalnog potrošačevog rizika rezultati ispitivanja se nalaze unutar intervala prihvaćanja, a stvarna vrijednost se nalazi izvan tolerancijskog intervala. Za bilo koji proizvod izabran slučajnim uzorkovanjem iz proizvodnoga procesa vjerojatnost da će biti pogrešno prihvaćen je dana izrazom (3.19). Navedeni izraz je korišten za izračun globalnog potrošačevog rizika kod mjerila tlaka visoke točnosti. Globalni proizvođačev rizik se izračunava iz zajedničke razdiobe na sljedeći način:

$$R_p = \iint f_{Y,Y_m}(\eta, \eta_m)\, d(\eta, \eta_m), \tag{3.20}$$

$$R_p = \int_{T_L}^{T_U} \int_{-\infty}^{A_L} f_Y(\eta) f_{Y_m|Y}(\eta_m \mid \eta)\, d\eta_m\, d\eta + \int_{T_L}^{T_U} \int_{A_U}^{+\infty} f_Y(\eta) f_{Y_m|Y}(\eta_m \mid \eta)\, d\eta_m\, d\eta, \quad (3.21)$$

$$R_p = \int_{T_L}^{T_U} f_Y(\eta) \left(\int_{-\infty}^{A_L} f_{Y_m|Y}(\eta_m \mid \eta)\, d\eta_m \right) d\eta + \int_{T_L}^{T_U} f_Y(\eta) \left(\int_{A_U}^{+\infty} f_{Y_m|Y}(\eta_m \mid \eta)\, d\eta_m \right) d\eta, \quad (3.22)$$

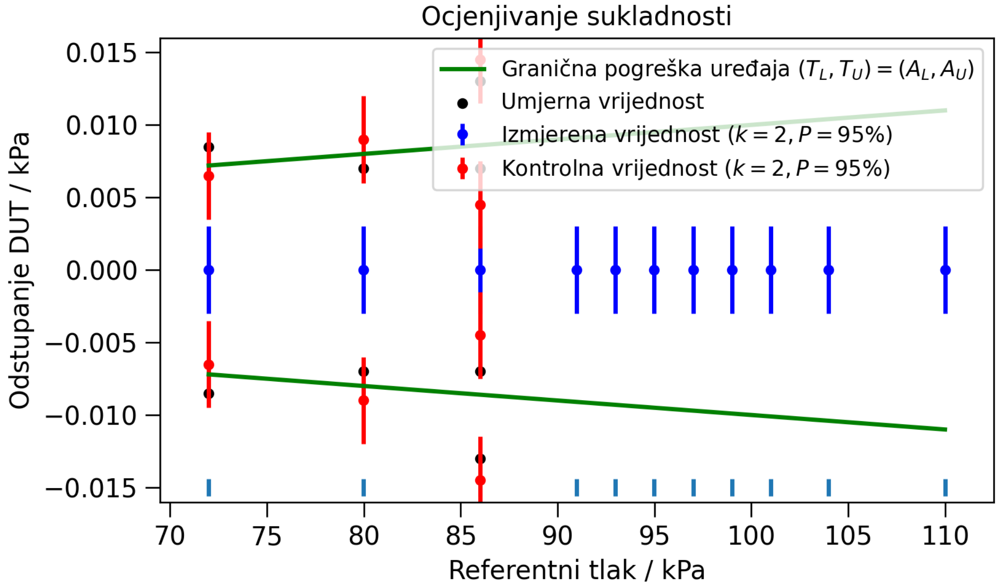
$$R_p = \int_{T_L}^{T_U} f_Y(\eta)\ (Y_m(A_L \mid \eta) - Y_m(-\infty \mid \eta))\, d\eta + \int_{T_L}^{T_U} f_Y(\eta)\ (Y_m(+\infty \mid \eta) - Y_m(A_U \mid \eta))\, d\eta, \quad (3.23)$$

$$R_p = \int_{T_L}^{T_U} f_Y(\eta)\ (Y_m(A_L \mid \eta))\, d\eta + \int_{T_L}^{T_U} f_Y(\eta)\ (1 - Y_m(A_U \mid \eta))\, d\eta. \quad (3.24)$$

Kod globalnog proizvođačevog rizika rezultati ispitivanja se nalaze izvan intervala prihvaćanja, a stvarna vrijednost se nalazi unutar tolerancijskog intervala. Za bilo koji proizvod izabran slučajnim uzorkovanjem iz proizvodnoga procesa vjerojatnost da će biti pogrešno odbačen je dan izrazom (3.24). Navedeni izraz je korišten za izračuna globalnog proizvođačevog rizika kod mjerila tlaka visoke točnosti.

3.2.2. Specifikacija modela

Proces postupka ocjenjivanja sukladnosti te izračun specifičnog i globalnog rizika je proveden za mjerilo tlaka visoke točnosti. Specifikacija sukladnosti mjerila je preuzeta od proizvođača, kao i proširena mjerna nesigurnost. Proširena mjerna nesigurnost iznosi 0,010 % s intervalom pokrivanja od 95 %. Postupak ispitivanja mjerila je proveden s referentnim etalonom (tlačna vaga) čiji su rezultati mjerenja sljedivi prema jedinici tlaka s proširenom mjernom nesigurnosti, $U = 3,20^{-5}p + 2,5$ Pa (k = 2, P = 95 %). Postupak ispitivanja je izveden u 11 točaka u mjernom opsegu mjerila. Točke ispitivanja na slici (3.8) su prikazane plavom bojom. Može se zaključiti da uređaj zadovoljava propisanu specifikaciju odnosno da je uređaj sukladan s vjerojatnošću većom od 95 %. Međutim, u postupku ispitivanja dolazi do odstupanja izmjerene vrijednosti od referentne vrijednosti te mogu nastupiti slučajevi označeni crvenom bojom na slici (3.8). Za neke od slučaja (točke ispitivanja) vrlo lako se može zaključiti da li zadovoljavaju specifikaciju ili ne odnosno da li je donesena ispravna odluka o prihvaćanju ili odbijanju proizvoda.

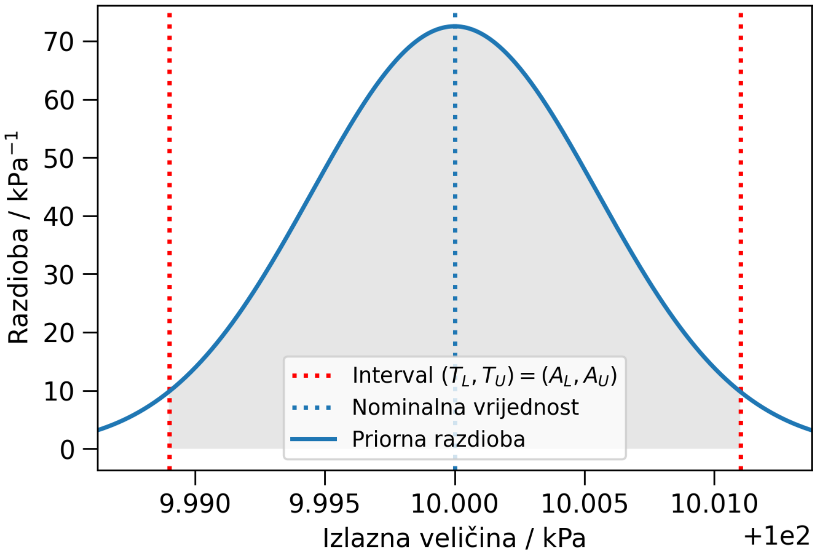


Slika 3.8: Ocjenjivanje sukladnosti Na slici je prikazana točnost uređaja, tolerancijski interval $(T_L, T_U) = (A_L, A_U)$ (zelena linija), umjerne točke s 95 % intervalom pokrivanja (plava boja), kontrolna mjerenja s 95 % intervalom pokrivanja (crvena boja) i stvarne vrijednosti mjerenja (crne točke)

Što se tiče graničnih slučajeva, postoje dva slučaja (i) izmjerena vrijednost unutar specifikacije, a stvarna vrijednost izvan specifikacije i (ii) izmjerena vrijednost izvan specifikacije, a stvarna vrijednost unutar specifikacije. Oba navedena slučaja mogu dovesti do pogrešne odluke u procesu donošenja odluke o sukladnosti. Radi se o slučaju podijeljenoga rizika zbog načina odabira intervala odnosno $(T_L, T_U) = (A_L, A_U)$. Sukladno navedenom izračunat je specifični rizik mjerila za nominalnu vrijednost 110 kPa. Blok kod za izračun je dan u nastavku:

```
def makeRisk(fileNaziv): # Izračun specifičnog rizika
    refTlak,dutTlak=getData(fileName) # pozivanje podataka
    TU=refTlak[10]+tocnost*refTlak[10]
    TL=refTlak[10]-tocnost*refTlak[10]
    pc=stats.norm.cdf([TL,TU],eta,u_0) # izračun rizika
makeRisk('PodaciTlak.txt') # pozivanje funkcije
```

Na slici (3.9) prikazan je izračun sukladnosti u nominalnoj točki 110 kPa. Za izračun je korištena priorna razdioba. Priorna razdioba i tolerancijski interval su specificirani na osnovi specifikacije proizvođača [72].

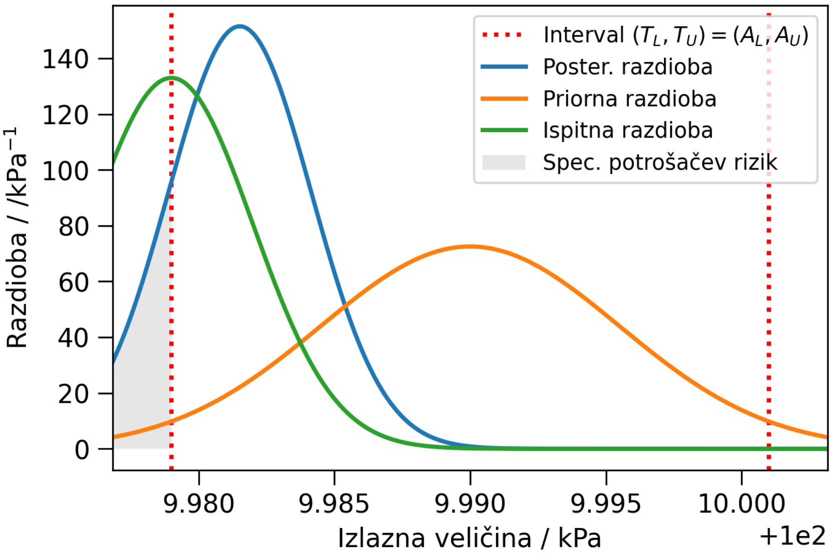


Slika 3.9: Ocjenjivanje sukladnosti za nominalnu vrijednost 110 kPa prema specifikaciji

Vjerojatnost da je mjerilo sukladno sa specifikacijom u nominalnoj točki 110 kPa je $p_c = 95\%$ što dovodi do zaključka da od 100 proizvedenih mjerila 95 je sukladno sa specifikacijom, a pet mjerila je nesukladno. Na isti način izračunava se sukladnost i u drugim nominalnim točkama. Sljedeći korak u procesu sukladnosti je izračun specifičnog i globalnog rizika. Navedeni rizici su izračunati za nominalnu točku 110 kPa primjenom Bayesove metode. Pored navedenoga razmatrana su dva slučaja pogrešnih odluka za različite mjerne nesigurnosti. Sukladno navedenom prikazani su dobiveni rezultati, te je analiziran utjecaj mjerne nesigurnosti u procesu ocjenjivanja sukladnosti mjerila odnosno njen utjecaj na rizik prihvaćanja nesukladnog mjerila i rizik odbijanja sukladnog mjerila. Mjerna nesigurnost predstavlja kvalitetu mjernog rezultata i stoga samo rezultat s mjernom nesigurnosti se može koristiti u svrhu ocjenjivanja sukladnosti mjerila sa specifikacijama. Bayesova analiza je sve prisutnija u području mjeriteljstva, ne samo kod izračuna navedenih rizika odnosno ocjenjivanja sukladnosti mjerila već i kod izračuna nesigurnosti.

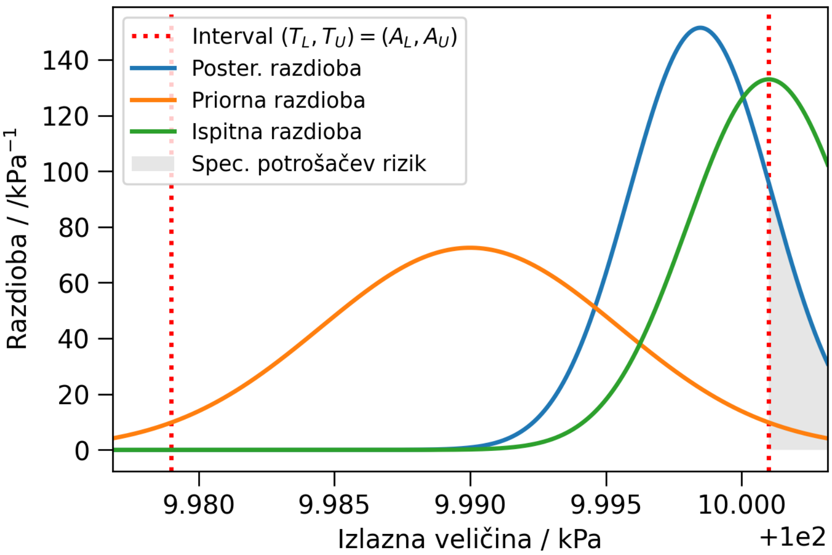
3.2.3. Kriteriji za donošenje odluka sukladnosti

Postupak izračuna rizika je proveden na osnovi mjerenja veličine od interesa te je primijenjeno binarno odlučivanje, što znači da je mjerilo prihvaćeno kao sukladno ili odbačeno kao nesukladno. Kod izračuna specifičnog potrošačevog rizika izmjerena vrijednost η_m je vrijednosti unutar tolerancijskog intervala, a u slučaju izračuna specifičnog proizvođačevog rizika izmjerena vrijednost poprima vrijednosti izvan intervala. Specifični rizici za mjerilo tlaka visoke točnosti su izračunati prema izrazu (3.10), a posteriorna razdioba prema izrazu (3.11). Prikaz specifičnog potrošačevog rizika R_c^*, za izmjerene vrijednosti 109,9790 kPa (donja granična vrijednost intervala) i 109,9984 kPa (gornja granična vrijednost intervala) su dane slikama (3.11) i (3.12).



Slika 3.10: Specifični potrošačev rizik, R_c^*, za izmjerenu vrijednost 109,9790 kPa

Specifični potrošačev rizik za izmjerenu vrijednost iznosi 17 % što predstavlja najveći rizik u smislu prihvaćanja nesukladnog mjerila.

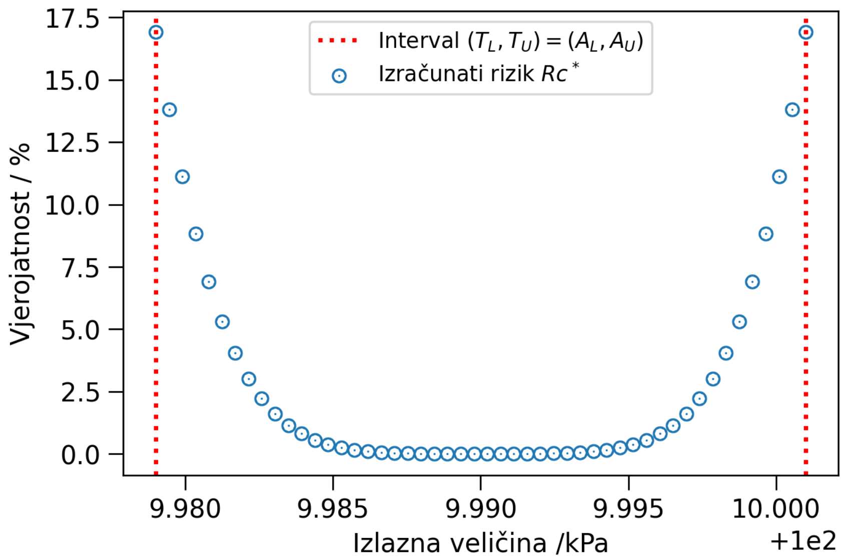


Slika 3.11: Specifični potrošačev rizik, R_c^*, za izmjerenu vrijednost 110,0010 kPa

Specifični potrošačev rizik za drugu izmjerenu vrijednost iznosi isto 17 % što predstavlja najveći rizik u smislu prihvaćanja nesukladnog mjerila. Blok naredbi za izračun rizika je dan ispod:

```
def makeRisk(fileNaziv): # Izračun potrošačevog rizika
    refTlak,dutTlak=getData(fileNaziv) # pozivanje podataka
    TU=refTlak[10]+tocnost*refTlak[10]
    TL=refTlak[10]-tocnost*refTlak[10]
    pc=stats.norm.cdf([TL,TU],eta_h,u_h) # izračun rizika
    Rc=pc[0]*100 # slika 3.10
    Rc=(1-pc[0])*100 # slika 3.11
    print('R_c* =',round(R_c,0))
makeRisk('PodaciTlak.txt') # pozivanje funkcije
```

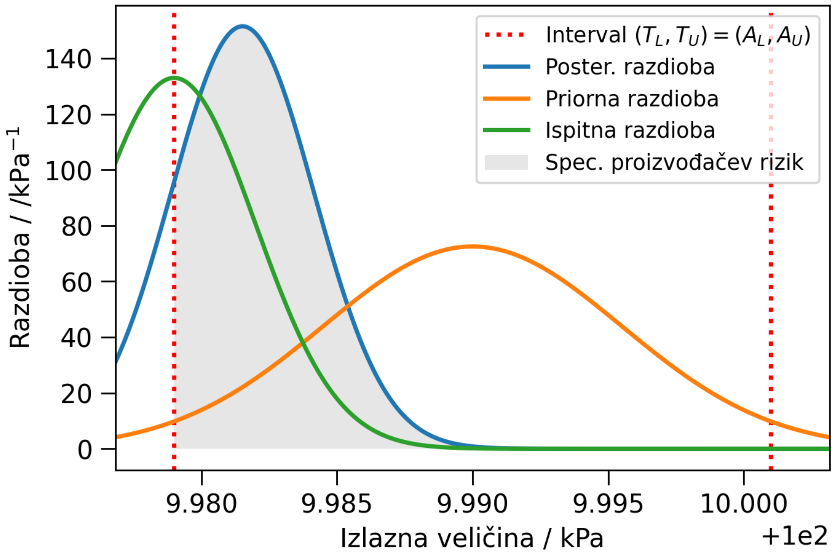
Na slici (3.12) je prikazan potrošačev rizik za 50 točaka. Izmjerene vrijednosti (50 točaka) se nalaze u tolerancijskom intervalu, a stvarna vrijednost izvan intervala.



Slika 3.12: Prikaz specifičnog potrošačevog rizika za 50 točaka

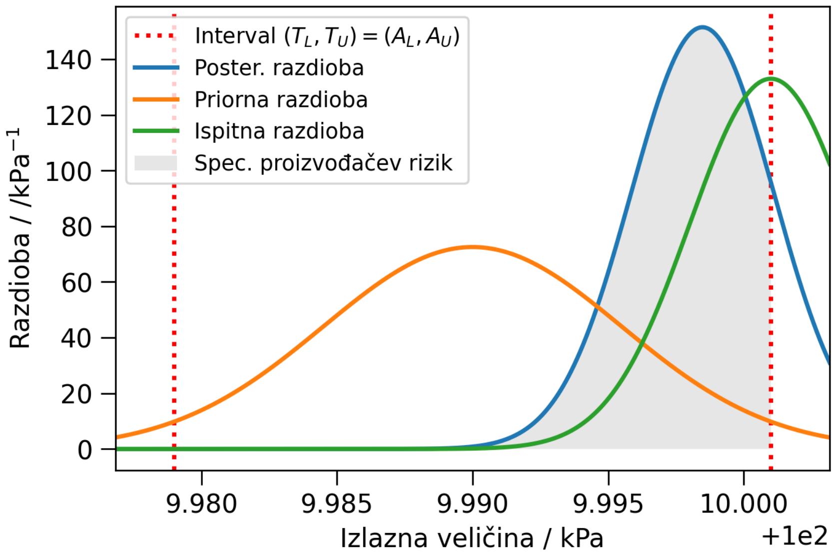
Sa slike (3.12) se može jasno zaključiti da potrošačev rizik raste kako se približava granicama intervala. Na samim granicama potrošačev rizik iznosi 17 % odnosno vjerojatnost da je nesukladan proizvod prihvaćen je 17 %, a u središnjici intervala ovaj rizik iznosi 0 % što odgovara prethodnom izračunu.

Prikaz specifičnog proizvođačevog rizika R_p^*, za izmjerene vrijednosti 109,9790 kPa (donja granična vrijednost intervala) i 109,9984 kPa (gornja granična vrijednost intervala) su dani na slikama (3.14) i (3.15).



Slika 3.13: Specifični proizvođačev rizik, R_p^*, za izmjerenu vrijednost 109,9790 kPa

Specifični proizvođačev rizik za izmjerenu vrijednost 110,0010 (granica donjeg intervala) kPa iznosi 83 % što predstavlja najveći rizik u smislu odbijanja sukladnog mjerila.

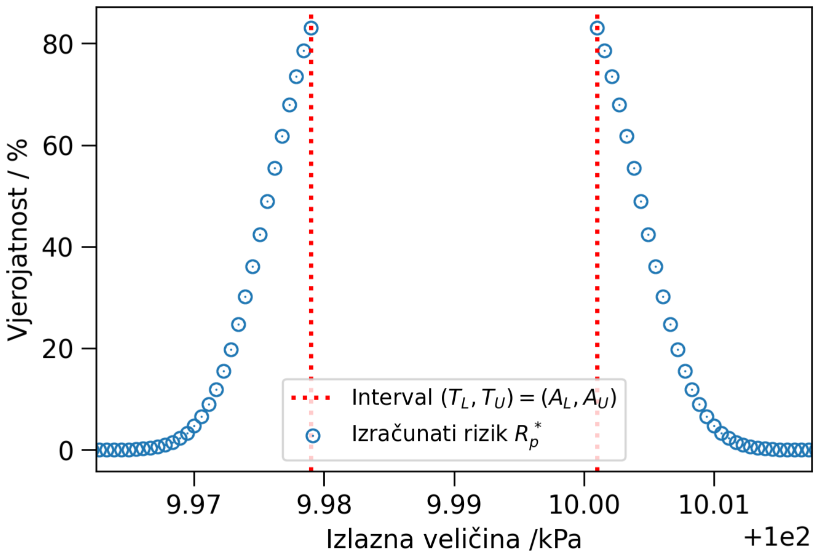


Slika 3.14: Specifični potrošačev rizik, R_p*, za izmjerenu vrijednost 110,0010 kPa

Specifični proizvođačev rizik za izmjerenu vrijednost 110,0010 (granica gornjeg intervala) kPa iznosi 83 % što predstavlja najveći rizik u smislu odbijanja sukladnog mjerila. U nastavku je dan blok naredbi za izračun specifičnog potrošačevog rizika:

```
def makeRisk(fileNaziv): # Izračun proizvođačevog rizika
    refTlak,dutTlak=getData(fileNaziv) # pozivanje podataka
    TU=refTlak[10]+tocnost*refTlak[10]
    TL=refTlak[10]-tocnost*refTlak[10]
    pc=stats.norm.cdf([TL,TU],eta_h,u_h) # izračun rizika
    Rc=(pc[1]-pc[1])*100 # slika 3.13 i slika 3.14
    print('R_c* =',round(R_c, 0))
makeRisk('PodaciTlak.txt') # pozivanje funkcije
```

Na slici 3.15 prikazan je specifični proizvođačev rizik za izmjerenu vrijednost u 50 točaka koje se nalaze izvan tolerancijskog intervala.

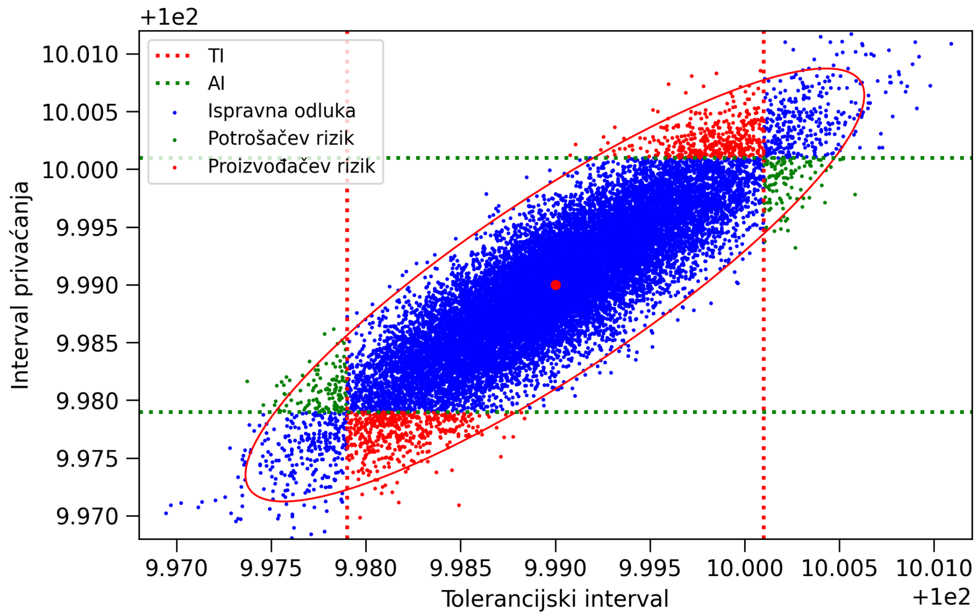


Slika 3.15: Prikaz specifičnog proizvođačevog rizika za 50 točki

Može se nedvojbeno zaključiti da proizvođačev rizik opada kako se udaljava od granica specificiranih intervala. Na samim granicama intervala proizvođačev rizik iznosi 83 % odnosno vjerojatnost da je sukladan proizvod odbačen je 83 %.

U sljedećem koraku je izračunat globalni potrošačev i globalni proizvođačev rizik. Globalni potrošačev rizik se definira kao vjerojatnost da nesukladan proizvod bude prihvaćen na osnovi kontrolnih mjerenja, a globalni proizvođačev rizik se definira kao vjerojatnost da sukladni proizvod bude odbačen na osnovi tih mjerenja. Navedeni rizici su izračunati iz zajedničke razdiobe prema izrazima (3.19 i 3.20).

Izračun globalnog rizika uključuje granice tolerancijskog intervala propisane za mjernu veličinu od interesa, te granice intervala prihvaćanja za izmjerenu vrijednost. Na slici (3.16) dan je prikaz globalnog potrošačevog i proizvođačevog rizika za mjerilo.



Slika 3.16: Prikaz globalnog potrošačevog i proizvođačevog rizika

Za provedenu analizu za mjerilo tlaka visoke točnosti globalni potrošačev rizik iznosi 1 %, a globalni proizvođačev rizik iznosi 5 %. U nastavku je dan blok naredbi za izračun globalnog rizika:

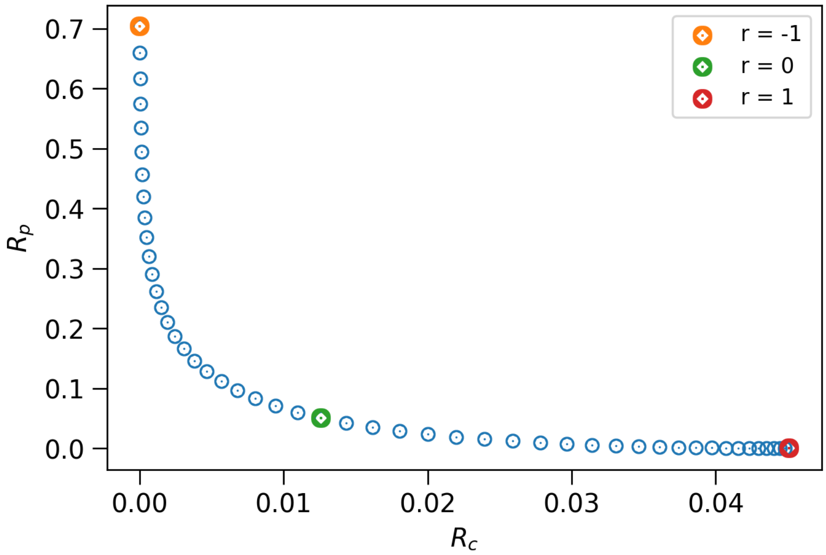
```
def makeRisk(fileNaziv): # Izračun globalnog rizika
    refTlak,dutTlak=getData(fileNaziv) # pozivanje podataka
    step=0.0001
    Rp=[] # proizvođačev rizik
    for i in range(len(r1)):
        p=(stats.norm.pdf(eta_m[i],eta,u)*(stats.norm.cdf(AL,
        eta_m[i],u_m)+1-stats.norm.cdf(AU,eta_m[i],u_m)))*step
        Rp.append(p)
    print('Rp=',np.round(np.sum(Rp),2)*100)
    Rc=[] # potrošačev rizik
    for i in range(len(r2)):
        p1=(stats.norm.pdf(eta_mL[i],eta,u)*(stats.norm.cdf(AU,
```

```
        eta_mL[i],u_m)-stats.norm.cdf(AL,eta_mL[i],u_m)))*step
        p2=(stats.norm.pdf(eta_mU[i],eta,u)*(stats.norm.cdf(AU,
        eta_mU[i],u_m)-stats.norm.cdf(AL,eta_mU[i]u_m)))*step
        Rc.append(p1+p2)
    print('Rc =',np.round(np.sum(Rc),2)*100)
    return Rp,Rc
makeRisk('PodaciTlak.txt') # pozivanje funkcije
```

Prema specifikaciji proizvođača, ako se promatra 100 mjerila, 95 mjerila je proglašeno kao sukladno, pet mjerila kao nesukladno sa specifikacijom. Globalni proizvođačev rizik iznosi 5 % što znači da od 95 sukladnih mjerila, 90 mjerila je proglašeno kao sukladno i pet mjerila su pogrešno odbačena kao nesukladna. Globalni potrošačev rizik je 1 % što znači da od pet nesukladnih mjerila, četiri mjerila su proglašena kao nesukladna, i jedno mjerilo je pogrešno prihvaćeno. Nadalje, to znači da je prihvaćeno 91 mjerilo kao sukladna s vjerojatnosti od 99 % (90/91). Ovo je konačni cilj ispitivanja, smanjiti odnos nesukladnih mjerila u ovom konkretnom slučaju s 5 % na 1 %. Ukupno devet mjerila je proglašeno nesukladnim odnosno 44 % (4/9) njih zadovoljava specifikaciju. Nažalost ovo je cijena koju proizvođač treba platiti zbog smanjenja rizika prihvaćanja nesukladnih mjerila. Iako je navedeni primjer proveden za mjerilo tlaka, isti se može prilagoditi na bilo koji proizvod, mjerilo ili proces za izračun traženih rizika. Odbacivanja sukladnih proizvoda ili prihvaćanja nesukladnih proizvoda nema koristi niti proizvođač niti korisnik takvih proizvoda. Stoga je važno da proizvođač na vrijeme analizira rizike vezane za svoj proizvod odnosno prije njegovog stavljanja na tržište. Ukoliko je potrebno analizirati takav proizvod nakon njegovog stavljanja na tržište onda takva ispitivanja treba provesti u laboratorijima s dokazanim kompetencijama uzimajući u obzir njihovu mjeriteljsku sposobnost.

Tolerancijski interval i interval prihvaćanja mogu biti identični, $(T_L, T_U) = (A_L, A_U)$, ili različiti, $(T_L, T_U) \neq (A_L, A_U)$. Ukoliko su dva navedena intervala jednaka onda govorimo o podijeljenom riziku. Također, moguće je uspostaviti i zone prihvaćanja. Zone prihvaćanja mogu biti unutar tolerancijskog intervala ili izvan upotrebom višekratnika u intervalu $(-1 \leq r \leq 1)$. Kada je višekratnik $r = 0$ onda se radi o pravilu podijeljenoga rizika ili jednostavnog pravila prihvaćanja. Ukoliko je zona prihvaćanja unutar intervala, $(0 < r \leq$

1), onda se smanjuje rizik ili vjerojatnost od pogrešno prihvaćenih proizvoda odnosno štiti se potrošač od rizika. Ukoliko je zona prihvaćanja izvan intervala, $(-1 \leq r < 0)$, onda se smanjuje rizik ili vjerojatnost od pogrešno odbijanja sukladnih proizvoda odnosno štiti se proizvođač od rizika. Ovakva zona prihvaćanja se obično koristi kada netko želi dokazati da su limiti prekoračeni prije poduzimanje negativnih sankcija za prekoračenje dozvoljenih limita. Rizik se ne može svesti na nulu, ali se zato može minimalizirati odnosno može se naći sklad između proizvođačevog i potrošačevog rizika postavljanjem adekvatnih zona prihvaćanja kao što je to prikazano na slici (3.17).



Slika 3.17: Odnos rizika između proizvođača i potrošača (%)

Iz provedene analize se može zaključiti da postupak ocjenjivanja sukladnosti nije jednostavan zadatak iz razloga jer niti jedan mjerni sustav nije savršen. Smanjivanjem jednog rizika, povećava se drugi rizik. Iz navedenoga razloga neophodno je odluku donijeti na osnovi rezultata mjerenja, ali i na osnovi ekonomske opravdanosti. Rizik je stanje u kojemu odluka ima više od jednog mogućeg ishoda pri čemu se vjerojatnost svakoga mogućeg ishoda može ocijeniti iz ranijeg iskustva ili iz studija tržišta. Stanje koje za ishod nekog procesa nudi više od jednog mogućeg ishoda jeste stanje neizvjesnosti. Sukladno navedenom rizik se definira kao učinak neizvjesnosti na ciljeve, pri čemu učinak može biti pozitivan ili negativan. Pojava rizika je povezana sa stanjem nepotpunog razumijevanja određenog problema koji se može pojaviti uslijed nedostatka informacija ili nepoznavanja ulaznih varijabli za izračun rizika. Sukladno navedenom rizik se sastoji od tri osnovna elementa: percepcije o tome može li se neki štetan događaj stvarno dogoditi, vjerojatnosti da se taj događaj dogodi, te posljedice koju taj događaj može stvoriti. Upravljanje rizicima je proces kojim se identificiraju, analiziraju i procjenjuju rizici te definiraju načini kako na rizik odgovoriti. Upravljanje rizicima ne nastoji eliminirati rizike, već stvoriti okruženje u kojem se mogu donijeti pravilne poslovne odluke uzimajući u obzir identificirani rizik i njegove posljedice koje može izazvati, kao što je to učinjeno za mjerilo tlaka visoke točnosti. U procesu ocjenjivanja sukladnosti, mjerna nesigurnost je jedan od ključnih čimbenika koji se treba uzeti u obzir pri definiranju kriterija prihvaćanja [6, 68, 73]. Prihvaćanje ili odbijanje predmeta u postupku ocjenjivanja sukladnosti kada se izmjerena vrijednost promatranog parametra nalazi u blizini granice tolerancijskog intervala može rezultirati donošenjem pogrešne odluke i dovesti do neželjenih posljedica. Važno i široko primjenjivo pravilo odluke je pravilo jednostavnog prihvaćanja ili podijeljenoga rizika koje je primijenjeno na mjerilu tlaka visoke točnosti. Kod takvog pravila, proizvođač i potrošač prihvaćaju ili odbijaju predmet kao sukladan ili nesukladan. Kao što samo ime sugerira podijeljeni rizik kaže da korištenjem ovog pravila odluke, proizvođač i potrošač dijele posljedice pogrešno donesenih odluka. U praksi, da bi se vjerojatnost donošenja pogrešnih odluka zadržala u prihvatljivim granicama, neophodan je konsenzus između proizvođača i potrošača te je neophodno u izračun uzeti podatak o mjernoj nesigurnosti rezultata mjerenja. U tablici (3.10) je prikazan utjecaj mjerne nesigurnosti na izračun specifičnog rizika za kontrolnu točku 110,0010 kPa.

Tablica 3.10: Utjecaj mjerne nesigurnosti na specifični rizik

Izmjerena vrijednost η_m /kPa	Standardna nesigurnost u_m /kPa	Rizik potrošača R_c^* /%	Rizik proizvođača R_p^* /%
110,0010	0,0024	21	79
110,0010	0,0030	17	83
110,0010	0,0039	12	88

Iz tablice se može zaključiti da manja vrijednost standardne nesigurnosti dovodi do veće vjerojatnosti da je prihvaćeni proizvod nesukladan odnosno do manje vjerojatnosti da je odbijeni proizvod sukladan. Stoga veća vrijednost standardne nesigurnosti dovodi do manje vjerojatnosti da je prihvaćeni proizvod nesukladan, ali do veće vjerojatnosti da je odbijeni proizvod sukladan. Manja vrijednost standardne nesigurnosti ide u korist proizvođača iz razloga manje vjerojatnosti da je odbijeni proizvod sukladan. Veća vrijednost standardne nesigurnosti ide u korist potrošača iz razloga manje vjerojatnosti da je prihvaćeni proizvod nesukladan. Iz navedenoga se može zaključiti da nesigurnost igra važnu ulogu u izračunu specifičnog rizika potrošača i proizvođača i stoga se mora uzeti u obzir pri izračunu navedenoga rizika. U tablici (3.11) je prikazan utjecaj mjerne nesigurnosti na izračun globalnog rizika za različite standardne nesigurnosti.

Tablica 3.11: Utjecaj mjerne nesigurnosti na globalni rizik

Standardna nesigurnost u_m /kPa	Rizik potrošača R_c /%	Rizik proizvođača R_p /%
0,0024	1	3
0,0030	1	5
0,0039	2	7

Ako se prema specifikaciji proizvođača promatra 100 mjerila na način da 95 mjerila je proglašeno sukladno i pet mjerila kao nesukladno, onda prema tabeli (3.11) za najmanju vrijednost standardne nesigurnosti globalni proizvođačev rizik iznosi 3 %, što znači da od 95 sukladnih mjerila, 92 mjerila su proglašena kao sukladna i tri mjerila su pogrešno odbačena kao nesukladna. Globalni potrošačev rizik prema tabeli (3.11) je 1 %, što znači da od pet nesukladnih mjerila, četiri mjerila su proglašena kao nesukladna, i jedno mjerilo je pogrešno prihvaćeno. Ovo znači da su prihvaćena 93 mjerila kao sukladna s vjerojatnosti od 99 %. Prema tabeli (3.11) za najveću vrijednost standardne nesigurnosti globalni proizvođačev rizik iznosi 7 % što znači da od 95 sukladnih mjerila, 88 mjerila su proglašena kao sukladna i sedam mjerila su pogrešno odbačena kao nesukladna. Prema tabeli (3.11) globalni potrošačev rizik je 2 %, što znači da od pet nesukladnih mjerila, tri mjerila su proglašena kao nesukladna, i dva mjerila su pogrešno prihvaćena. Ovo znači da je prihvaćeno 90 mjerila kao sukladna s vjerojatnosti od 97 %. Iz provedenoga istraživanja se može zaključiti važnost mjerne nesigurnosti uzimajući u obzir broj prihvaćenih mjerila i vjerojatnost s kojom su mjerila proglašena kao sukladna. Manja vrijednost standardne nesigurnosti ide u korist potrošača u smislu zaštite od nesukladnih mjerila, ali u korist proizvođača u smislu pogrešnog odbacivanja sukladnih mjerila kod izračuna globalnog rizika. Veća vrijednost standardne nesigurnosti ide na štetu proizvođača u smislu pogrešnog odbacivanja sukladnih mjerila, ali i na štetu potrošača u smislu uporabe nesukladnih mjerila kod izračuna globalnog rizika. Iz analize globalnog rizika vidljiv je utjecaj mjerne nesigurnosti na procjenu sukladnosti mjerila. Može se zaključiti da se vjerojatnost donošenja pogrešnih odluka povećava s povećanjem mjerne nesigurnosti. Postupak izračuna rizika u procesu ocjenjivanja sukladnosti za mjerilo tlaka može biti primijenjen za bilo koji postupak ocjenjivanja sukladnosti proizvoda sa specifikacijama.

Umjeravanje je sastavni dio svake mjerne procedure koji ponekada uključuje usklađivanje umjernih podataka određenom (adekvatnom) funkcijom umjeravanja koja najbolje opisuje vezu između varijabli. Stoga je istražena linearna zavisnost između senzora tlaka koji je predmet umjeravanja (zavisno promjenjiva varijabla) i referentnog sustava tlaka (nezavisna promjenjiva varijabla) s ciljem određivanja funkcije umjeravanja i izračuna nesigurnosti. Izračun nesigurnosti s funkcijom umjeravanja je proveden na sljedeći način:

- Izračunata najbolja procjene izlazne veličine i standardna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni izlazne veličine.
- Izračunata najbolja procjena parametara funkcije umjeravanja i standardnih nesigurnosti pridruženih najboljoj procjeni parametra funkcije umjeravanja.
- Izračunata najbolja procjena ulazne veličine i standardne nesigurnosti pridružene najboljoj procjeni ulazne veličine.
- Izračunata najbolja procjena izlazne veličine i standardna nesigurnost pridružena najboljoj procjeni izlazne veličine s funkcijom umjeravanja sukladno GUM metodi.

Sukladno navedenom proveden je izračun najbolje procjene izlazne veličine i pridružene su nesigurnosti najboljoj procjeni izlazne veličine prema GUM metodi. U tablici 3.12 su prikazani rezultati umjeravanja, gdje je x_i i-ta referentna vrijednost točke umjeravanja, y_i i-ta najbolja procjena vrijednosti izlazne veličine za referentnu vrijednost x_i i $u(y_i)$ i-ta standardna nesigurnost.

Tablica 3.12: Podaci umjeravanja za senzor tlaka

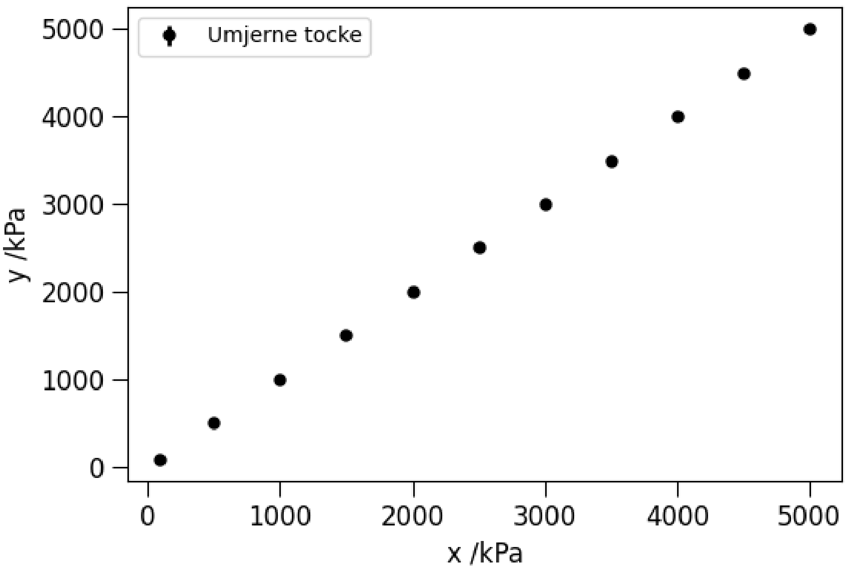
Točke	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i /kPa	95,2	500,0	1000,0	1500,0	2000,0	2499,9	2999,9	3499,9	3399,9	4499,9	4999,9
y_i /kPa	95,0	501,5	1002,5	1503,3	2003,4	2503,3	3003,9	3502,6	4002,0	4501,7	5001,39
$u(y_i)$ /kPa	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6

Provedena je prilagodba podataka umjeravanja linearnom funkcijom umjeravanja nakon izračuna najbolje procjene izlazne veličine i pridružene nesigurnosti najboljoj procjeni izlazne veličine s ciljem izračuna najbolje procjene vrijednosti parametra i pridruženih nesigurnosti najboljoj procjeni parametra s kojim je opisana funkcija umjeravanja. Linearna funkcija umjeravanja za prilagodbu umjernih podataka je dana sljedećim izrazom:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X, \tag{3.25}$$

gdje je X nezavisna promjenjiva varijabla, a Y zavisno promjenjiva varijabla. Parametri β_1 (nagib) i β_0 (odsječak) su parametri funkcije umjeravanja od interesa.

Linearna funkcija umjeravanja za dobivene podatke najbolje opisuje vezu između senzora tlaka koji je predmet umjeravanja i referentnog sustava tlaka. Najbolja procjena parametara funkcije umjeravanja i standardnih nesigurnosti pridruženih najboljoj procjeni parametara funkcije umjeravanja su izračunati uporabom GUM metode i Bayesove metode. Na slici (3.18) su prikazane točke umjeravanja za senzor tlaka koji je predmet umjeravanja. Najbolja procjena izlazne veličine i pridružena nesigurnost najboljoj procjeni ulazne veličine te referentna vrijednost tlaka umjeravanja su dani u tablici (3.12).



Slika 3.18: Točke umjeravanja

Primarna svrha u postupku izračuna nesigurnosti je odrediti linearnu zavisnost između senzora tlaka koji je predmet umjeravanja i referentnog sustava tlaka radi izračuna mjerne nesigurnosti koji uzima u obzir nesigurnost koja proizlazi od funkcije umjeravanja.

3.3.1. Izračun nesigurnosti parametara funkcije umjeravanja uporabom GUM metode

Prvi korak kod izračuna najbolje procjene izlazne veličine i pridružene nesigurnosti najboljoj procjeni ulazne veličine je izračun najbolje procjene vrijednosti parametara funkcije.

Kod izračuna najbolje procjene vrijednosti parametara funkcije umjeravanja je korištena standardna regresijska analiza. Najbolja procjena parametara funkcije umjeravanja je dana izrazima (3.26) i (3.27):

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}, \tag{3.26}$$

$$\widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1 \overline{X} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i\right). \tag{3.27}$$

Uz pomoć mjernog modela (3.26) i (3.27) određene su standardne nesigurnosti za parametre funkcije umjeravanja sukladno GUM principima.

Standardna nesigurnost $u(\widehat{\beta}_1)$ pridružena najboljoj procjeni parametra funkcije umjeravanja $\widehat{\beta}_1$ je dana izrazom (3.28):

$$u(\widehat{\beta}_1) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial \beta_1}{\partial Y_i}\right|_{Y_i=y_i}\right)^2 u^2(y_i)\right)^{1/2} = \left(\frac{u^2(y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right)^{1/2}. \tag{3.28}$$

Standardna nesigurnost $u(\widehat{\beta}_0)$ pridružena najboljoj procjeni parametra funkcije umjeravanja $\widehat{\beta}_0$ je dana izrazom (3.29):

$$u(\widehat{\beta}_0) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial \beta_0}{\partial Y_i}\right|_{Y_i=y_i}\right)^2 u^2(y_i)\right)^{1/2} = u^2(y_i)\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right)^{1/2}. \tag{3.29}$$

Standardna nesigurnost koja proizlazi zbog ovisnosti parametra funkcija umjeravanja je dana izrazom (3.30):

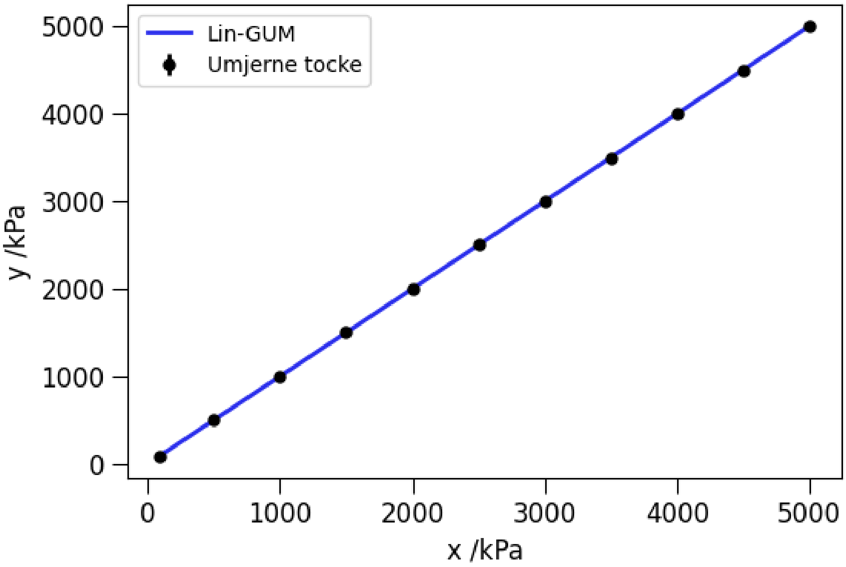
$$\mathrm{cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) = \mathrm{cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_0) = -\overline{x}\, u^2(\widehat{\beta}_1). \tag{3.30}$$

Standardne nesigurnosti parametara funkcije umjeravanja nakon izračuna su zapisane u matrici dimenzija 2x2 koja se naziva kovarijantna matrica:

$$U = \begin{bmatrix} u^2(\widehat{\beta}_0) & \mathrm{cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) \\ \mathrm{cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_0) & u^2(\widehat{\beta}_1) \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Uporabom gore navedenih izraza izračunate su najbolje procjene parametara funkcije umjeravanja i standardne nesigurnosti pridružene najboljoj procjeni parametara funkcije umjeravanja.

Na slici (3.19) je prikazana funkcija umjeravanja izračunata standardnom regresijskom analizom.



Slika 3.19: Standardna regresijska analiza

U tablici (3.13) su prikazani rezultati najbolje procjene parametra linearne funkcije umjeravanja i njihovih pridruženih nesigurnosti.

Tablica 3.13: Parametri funkcije umjeravanja

Metoda	$\widehat{\beta}_1$	$u(\widehat{\beta}_1)$	$\widehat{\beta}_0$	$u(\widehat{\beta}_0)$	$u(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)$
Lin-GUM	1,000 13	0,000 51	2,0	1,5	-0,000 64

Nakon izračuna standardnih nesigurnosti pridruženih najboljoj procjeni parametara funkcije umjeravanja izračunata je standardna nesigurnost pridružena ulaznoj veličini. Mjerna funkcija za navedeni slučaj je dana izrazom (3.32):

$$x = \frac{y}{\widehat{\beta}_1} - \widehat{\beta}_0. \tag{3.32}$$

Izlazna veličina y je dana normalnom razdiobom. Parametri navedene razdiobe su dani u tablici (3.12). Svi ostali podaci za izračun standardne nesigurnosti pridružene ulaznoj veličini su dani u tablici (3.13). Standardna nesigurnosti pridružena ulaznoj veličini je dana izrazom (3.33):

$$u(x) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \widehat{\beta}_0} \right)^2 u^2(\widehat{\beta}_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \widehat{\beta}_1} \right)^2 u^2(\widehat{\beta}_1) + \right.$$
$$\left. + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \widehat{\beta}_0} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \widehat{\beta}_1} \right) u(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 u^2(y) \right)^{1/2}. \tag{3.33}$$

Posljednji korak u izračunu nesigurnosti koja uključuje znanje o standardnim nesigurnostima funkcije umjeravanja je izračun standardne nesigurnosti pridružene izlaznoj veličini. Mjerna funkcija za navedeni slučaj je dana izrazom (3.34):

$$y = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x. \tag{3.34}$$

Standardna nesigurnost pridružena izlaznoj veličini koja uključuje znanje o nesigurnosti funkcije umjeravanja je dana izrazom(3.35):

$$u(y) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \widehat{\beta}_0} \right)^2 u^2(\widehat{\beta}_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \widehat{\beta}_1} \right)^2 u^2(\widehat{\beta}_1) + \right.$$
$$\left. + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \widehat{\beta}_0} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \widehat{\beta}_1} \right) u(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 u^2(x) \right)^{1/2}. \tag{3.35}$$

Sukladno navedenom izračunata je standardna nesigurnost za vrijednost ulazne veličine 2250,0 kPa, 2750,0 kPa i 3250,0 kPa radi usporedbe rezultata pridružene nesigurnosti. Rezultati izračuna standardne nesigurnosti za ulaznu i izlaznu veličinu su dani u tablici (3.14).

Tablica 3.14: Iskazivanje ukupne nesigurnosti

i	x /kPa	$u(x)$ /kPa	y /kPa	$u(y)$ /kPa
1	2250,0	2,7	2252,3	2,8
2	2750,0	2,7	2752,3	2,8
3	3250,0	2,7	3250,3	2,8

Rezultati dani u tablici (3.14) dovode do zaključka da nesigurnost funkcije umjeravanja ima utjecaja na iskazivanje potpunog mjernog rezultata. Ako se standardne nesigurnosti za izlazne veličine iz tablice (3.14) usporede sa standardnim nesigurnostima za izlazne veličine iz tablice (3.12) dolazi se do zaključka da se iste razlikuju za oko 7 % i da nesigurnost koja dolazi od funkcije umjeravanja ima utjecaja na iskazivanje potpunog rezultata te da ista treba biti uzeta u obzir kod iskazivanja potpunog rezultata mjerenja. Također, može se zaključiti da ako znanje o najboljoj procjeni izlazne veličine nije dovoljno veliko u tom slučaju doprinosi koji proizlaze od parametara funkcije umjeravanja na krajnji rezultat će biti veći. U nastavku je dan blok naredbi za izračun standardnih nesigurnosti pridruženih najboljoj procjeni parametara funkcije umjeravanja i najbolje procjene parametara funkcije umjeravanja:

```
def LinGum(fileName):
    xVals,yVals,uVals=getData(fileName) # pozivanje funkcije
    N=len(xVals) # broj mjerenja
    Sxx=np.sum((xVals-np.mean(xVals))**2)
    Sxy=np.sum((xVals-np.mean(xVals))*(yVals - np.mean(yVals)))
    b1=Sxy/Sxx # parametar beta_1
    b0=np.mean(yVals)-b1*np.mean(xVals) # parametar beta_0
    ub1=np.sqrt(uVals**2/Sxx) # nesigurnost u(b1)
    ub0=np.sqrt(uVals**2*(1/N+np.mean(xVals)**2/(Sxx))) # nesig. u(b0)
    ub1b0=-np.mean(xVals)*ub1**2 # nesigurnost u(b1,b0)
    print('Lin-GUM:')
    return b1,b0,xVals,yVals,uVals
LinGum('PodaciTlak.txt') # pozivanje funkcije
```

Nakon što je dokazano da funkcija umjeravanja utječe na krajnji rezultat mjerenja u nastavku su primijenjene i druge metode izračuna standardnih nesigurnosti parametara funkcije umjeravanja.

3.3.2. Izračun nesigurnosti parametara funkcije uporabom Bayesove metode

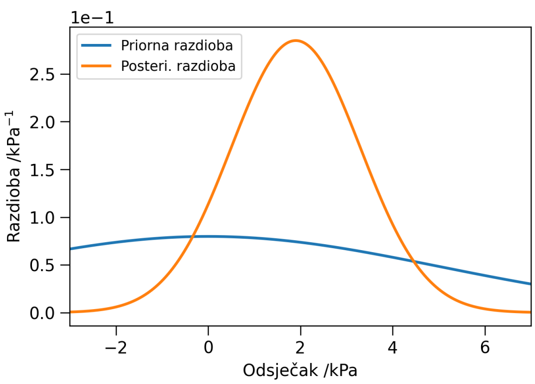
Funkcija umjeravanja (3.25) je redefinirana prema zahtjevima Bayesove metode u svrhu izračuna najbolje procjene parametara funkcije umjeravanja i pridruženih nesigurnosti najboljoj procjeni parametara:

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2). \tag{3.36}$$

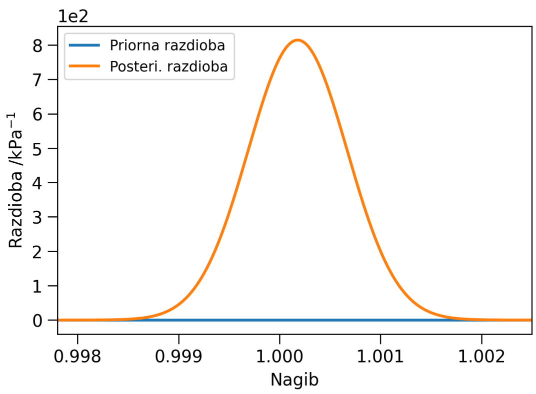
Izlazna veličina Y je opisana normalnom razdiobom s očekivanom vrijednošću $\mu = \beta_0 + \beta_1 X$ i standardnom devijacijom (nesigurnosti) $\sigma = u(y)$. Priorne razdiobe za parametre funkcije umjeravanja β_0 i β_1:dane su izrazom (3.37)

$$\begin{aligned} \beta_0 &\sim \mathcal{N}(\mu_{\beta_0}, \sigma^2_{\beta_0}) \\ \beta_1 &\sim \mathcal{N}(\mu_{\beta_1}, \sigma^2_{\beta_1}) \end{aligned} \tag{3.37}$$

Manje informativne priorne razdiobe za parametre funkcije umjeravanja su definirane s normalnom razdiobom. Informacije za parametar β_0 nisu dostupne te se ne može formirati tzv. informativna priorna razdioba. U ovom slučaju se koriste manje informativne priorne razdiobe ili neiformativne priorne razdiobe. Informacije za parametar β_1 su dostupne, na primjer informacija da je parametar β_1 pozitivan te se može formirati manje informativna priorna razdioba. Manje informativne priorne razdiobe za parametre funkcije umjeravanja garantiraju zanemariv utjecaj razdioba na marginalnu posteriornu razdiobu parametara. Na slici (3.20) dan je prikaz priorne manje informativne razdiobe i marginalne posteriorne razdiobe za parametre funkcije umjeravanja.



(a) Usporedni prikaz razdioba ($\widehat{\beta}_0$)



(b) Usporedni prikaz razdioba ($\widehat{\beta}_1$)

Slika 3.20: Usporedni prikaz razdioba funkcije umjeravanja

Bayesova metoda kombinira priornu informaciju vezanu za parametre funkcije umjeravanja s informacijom koja je sadržana u podacima umjeravanja. Posljedica navedenoga kombiniranja je dobivanje zajedničke razdiobe za parametre krivulje umjeravanja iz kojih se izračunava najbolja procjena parametara funkcije umjeravanja i pridružena standardna nesigurnost najboljoj procjeni ovih parametara. Za izračun najbolje procjene parametra funkcije umjeravanja i pridružene nesigurnosti najboljoj procjeni parametara korištene su manje informativne priorne razdiobe. Ove priorne razdiobe se koristiti bez straha nametanja rješenja problema. Sukladno izrazima (3.25) i (3.36) model za izračun parametara od interesa je dan sljedećim izrazom:

$$f_{B_0,\,B_1,\,\boldsymbol{S^2}\,|\,Y}(\beta_0,\,\beta_1,\,\boldsymbol{\sigma^2}\,|\,y) \propto \mathcal{L}_Y(y,\,s^2\,|\,y_1,\ldots,y_n)\,f_{B_0,\,B_1,\,\boldsymbol{S^2}}(\beta_0,\,\beta_1,\,\boldsymbol{\sigma^2}), \tag{3.38}$$

gdje $f_{B_0,\,B_1,\,\boldsymbol{S^2}\,|\,Y}(\beta_0,\,\beta_1,\,\boldsymbol{\sigma^2}\,|\,y)$ predstavlja posteriornu razdiobu, $\mathcal{L}_Y(y,\,s^2\,|\,y_1,\ldots,y_n)$ predstavlja funkciju vjerodostojnosti:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y(y,\,s^2\,|\,y_1,\ldots,y_n) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(y_i-y)^2}{2s^2}\right\}\\ = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(y_i-\eta)^2}{2s^2}\right\},\end{aligned} \tag{3.39}$$

i $f_{B_0,\,B_1,\,\boldsymbol{S^2}}(\beta_0,\,\beta_1,\,\boldsymbol{\sigma^2})$ predstavlja priornu razdioba parametara od interesa. Marginalna posteriorna razdioba za parametar funkcije umjeravanja β_0 se izračunava iz izraza (3.40):

$$f_{B_0\,|\,Y}(\beta_0\,|\,y_1,\ldots,y_n) \propto \iint \mathcal{L}_Y(y,\,s^2\,|\,y_1,\ldots,y_n) f_{B_0,\,B_1,\,\boldsymbol{S^2}}(\beta_0,\,\beta_1,\,\boldsymbol{\sigma^2})\,d(\beta_1,\boldsymbol{\sigma^2})\,. \tag{3.40}$$

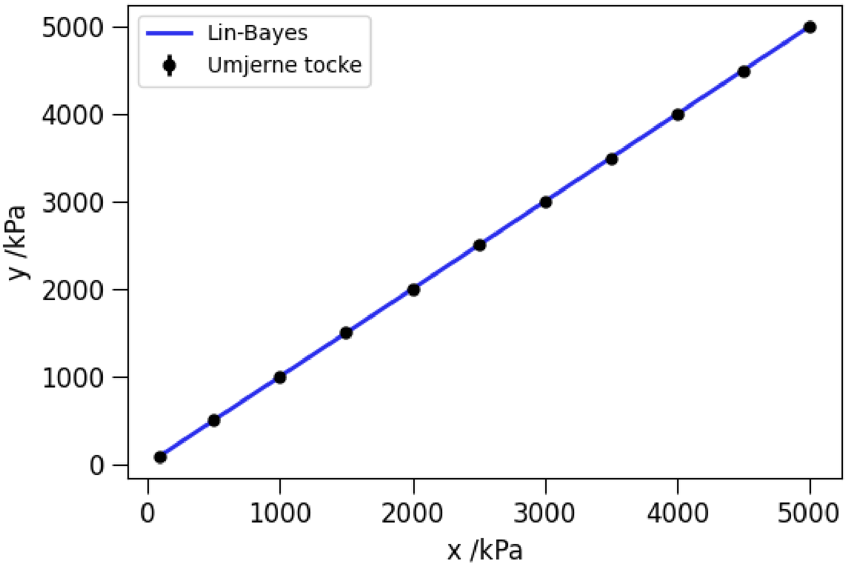
Marginalna posteriorna razdioba za parametar funkcije umjeravanja β_1 se izračunava iz izraza (3.41):

$$f_{B_1\,|\,Y}(\beta_1\,|\,y_1,\ldots,y_n) \propto \iint \mathcal{L}_Y(y,\,s^2\,|\,y_1,\ldots,y_n) f_{B_0,\,B_1,\,\boldsymbol{S^2}}(\beta_0,\,\beta_0,\,\boldsymbol{\sigma^2})\,d(\beta_1,\boldsymbol{\sigma^2})\,. \tag{3.41}$$

Na temelju izraza (3.40) i (3.41) izračunata je najbolja procjena parametara funkcije umjeravanja $\widehat{\beta}_0$ i $\widehat{\beta}_1$ te pridružene standardne nesigurnosti $u(\widehat{\beta}_0)$ i $u(\widehat{\beta}_1)$. Simetrični 95 % interval pokrivanja za parametre funkcije umjeravanja je dan sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned}&[\widehat{\beta}_0 - 1{,}96u(\widehat{\beta}_0),\ \widehat{\beta}_0 + 1{,}96u(\widehat{\beta}_0)],\\ &[\widehat{\beta}_1 - 1{,}96u(\widehat{\beta}_1),\ \widehat{\beta}_1 + 1{,}96u(\widehat{\beta}_1)].\end{aligned} \tag{3.42}$$

Uporabom gore navedenih izraza izračunate su najbolje procjene parametara funkcije umjeravanja i standardne nesigurnosti pridružene najboljoj procjeni parametara funkcije umjeravanja. Na slici (3.21) je prikazana funkcija umjeravanja izračunata Bayesovom metodom.



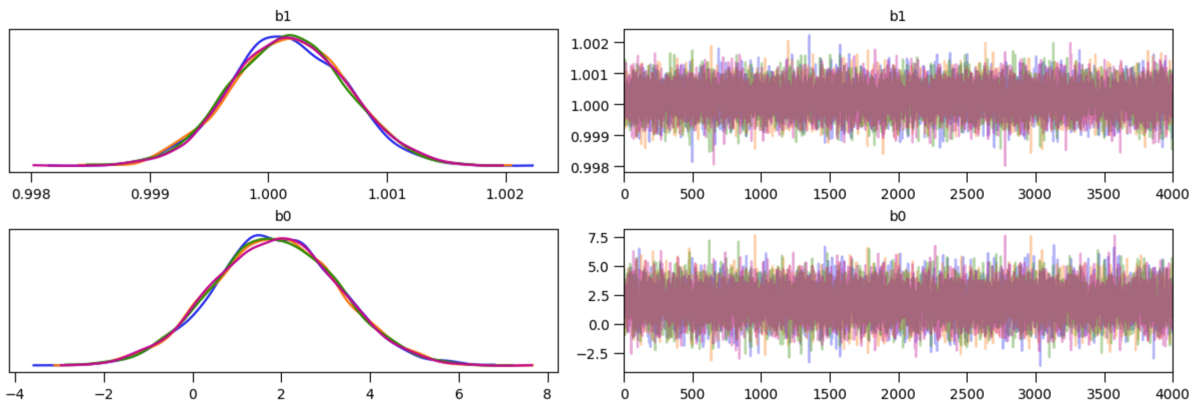
Slika 3.21: Bayesova regresijska analiza

U tablici (3.15) su prikazani rezultati najbolje procjene parametra linearne funkcije umjeravanja i njihovih pridruženih nesigurnosti. Na slici (3.22) su na lijevoj strani prikazane

Tablica 3.15: Parametri funkcije umjeravanja

Metoda	$\widehat{\beta}_1$	$u(\widehat{\beta}_1)$	$\widehat{\beta}_0$	$u(\widehat{\beta}_0)$	$u(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)$
Lin-Bayes	1,000 12	0,000 49	1,9	1,4	-0,000 68

posteriorne razdiobe za parametre funkcije, a na desnoj strani su prikazane putanje lanaca za veličine, uporaba MCMC metode.



Slika 3.22: Prikaz putanja četiri lanca za funkciju umjeravanja

Ukupno je generirano 200 000 uzoraka za sve ulazne veličine na osnovi čega su formirane njihove posteriorne razdiobe iz kojih su izračunati parametri funkcije umjeravanja. Može se zaključiti da vrijednosti ulaznih veličina za funkciju umjeravanja fluktuiraju oko svojih očekivanih vrijednosti i da nema značajnih odstupanja između lanaca, te da je postignuta dobra konvergencija rezultata izračuna. Iz dobivenih posteriornih razdioba se izračunavaju parametri od interesa za iskazivanje potpunog rezultata mjerenja. Kroz kreiranje slike (3.22) dobiva se uvid u izračun rezultata dobivenih MCMC metodom za sve veličine (parametre) za svaki lanac i svaku iteraciju. U nastavku je dan blok naredbi za izračun standardnih nesigurnosti pridruženih najboljoj procjeni parametara funkcije umjeravanja i najbolje procjene parametara funkcije umjeravanja:

```
Lin-Bayes('PodaciTlak.txt') # pozivanje funkcije
if __name__ == '__main__':
with Model() as model: # specificiranje modela
    # priorne razdiobe
    slope=Normal('b1',0,sigma=5)
    intercept=Normal('b0',0,sigma=5)
    # funkcija vjerodostojnosti
    mu=Deterministic('mu',intercept+slope*xVals)
    likelihood=Normal('yVals',mu=mu,sigma=uVals,observed=yVals)
    # uzorkovanje
    data=sample(draws=50005,tune=2000,chains=4,cores=4,init='adapt_diag')
    # pozivanje funkcije
    plotData('PodaciTlaka.txt',np.mean(data['b1'][10000:50010:10]),
                    np.mean(data['b0'][10000:50010:10]),
                    np.std(data['b1'][10000:50010:10]),
                    np.std(data['b0'][10000:50010:10]),'Lin-Bayes')
    # posterorne razdiobe
    plot_trace(data,var_names=['b1','b0'],compact=False)
    plot_pair(data,var_names=['b1','b0'],kind='scatter')
    # izračun parametara
    df=summary(data[10000:50010:10],var_names=[],hdi_prob=0.95)
```

Uporabom Bayesove metode za izračun parametara krivulje umjeravanja je dokazano da postoji nesigurnost u parametrima, te se dolazi do zaključka da parametri funkcije umjeravanja trebaju biti izračunati i da znanje o parametrima treba biti uključeno u iskazivanje potpunog rezultata mjerenja.

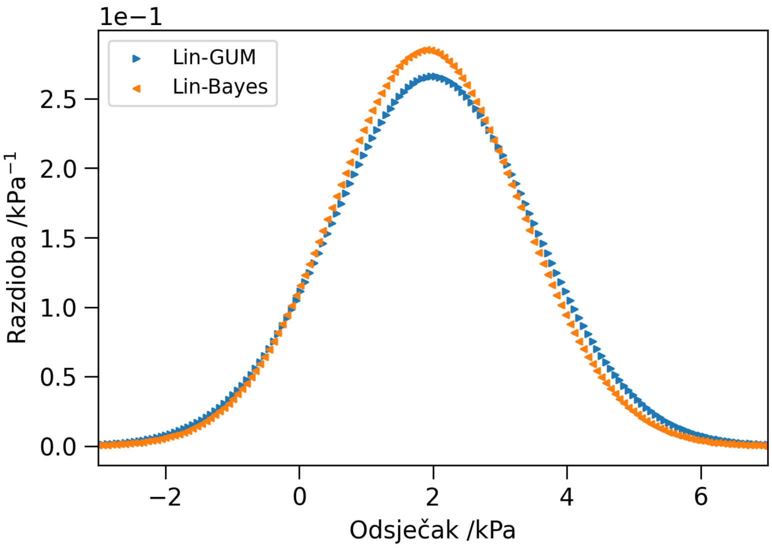
3.3.3. Kriteriji za odabir metoda

Izvršena je usporedba rezultata za parametre funkcije umjeravanja. Rezultati su dobiveni uporabom standardne regresijske analize sukladno GUM metodi i Bayesovom metodom. U tablici (3.16) su dane najbolje procjene vrijednosti parametara funkcije umjeravanja s pridruženim mjernim nesigurnostima.

Tablica 3.16: Usporedba rezultata

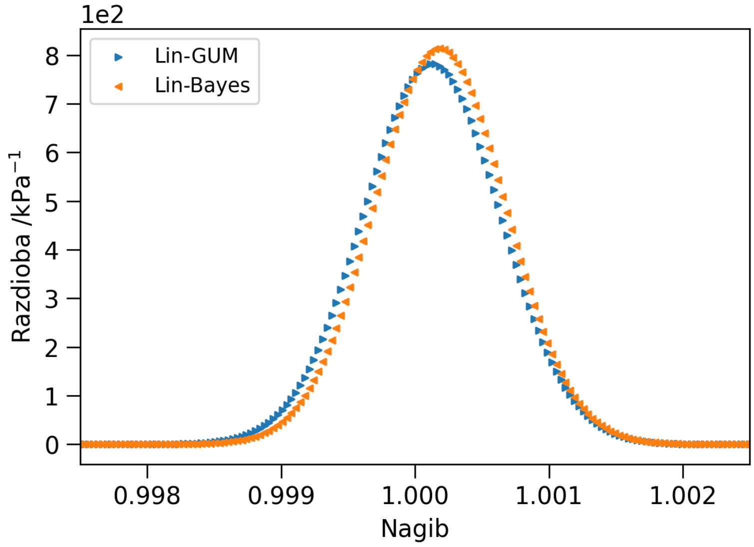
Metoda	$\widehat{\beta}_1$	$u(\widehat{\beta}_1)$	$\widehat{\beta}_0$	$u(\widehat{\beta}_0)$	$u(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)$
Lin-GUM	1,000 13	0,000 51	2,0	1,5	-0,000 64
Lin-Bayes	1,000 12	0,000 49	1,9	1,4	-0,000 68

Interval pokrivanja za obje metode je dobiven kao 95 % simetrični interval pokrivanja. Na slici (3.23) je dan prikaz posteriornih marginalnih razdioba za parametar funkcije umjeravanja β_0.



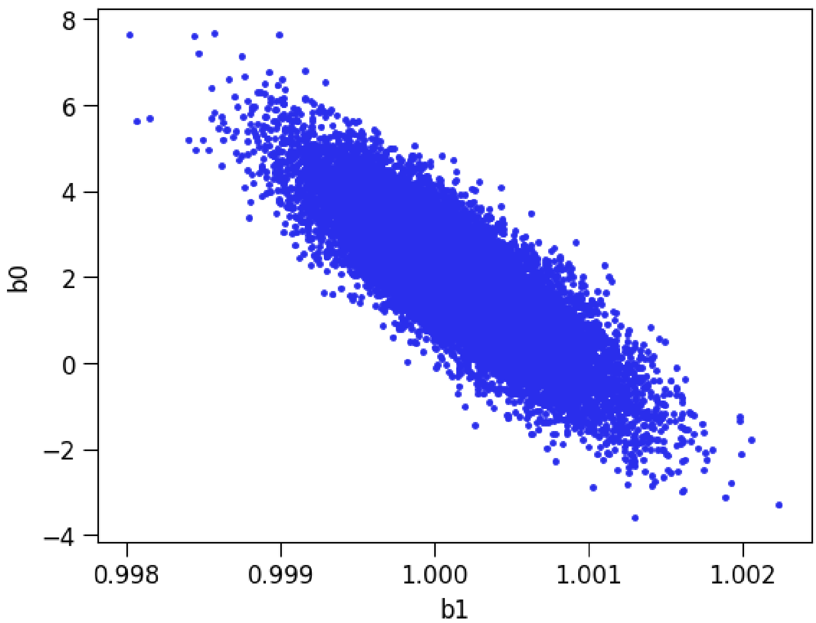
Slika 3.23: Usporedba rezultata za parametar β_0

Parametar funkcije umjeravanja β_0 je opisan normalnom razdiobom. Parametri normalne razdiobe, očekivana vrijednost (najbolja procjena) i standardna devijacija (nesigurnost) su dani u tablici (3.16). Na slici (3.24) je dan prikaz posteriornih marginalnih razdioba za parametar funkcije umjeravanja β_1.



Slika 3.24: Usporedba rezultata za parametar β_1

Parametar funkcije umjeravanja β_1 je opisan normalnom razdiobom. Parametri normalne razdiobe, očekivana vrijednost (najbolja procjena) i standardna devijacija (nesigurnost) su dani u tablici (3.16). Na slici (3.25) dan je prikaz kovarijance za parametre funkcije umjeravanja.

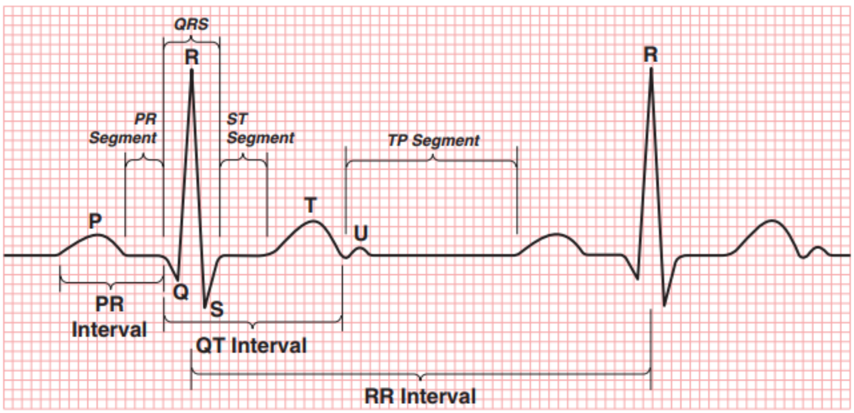


Slika 3.25: Kovarijanca parametara funkcije umjeravanja

Iz dobivenih rezultata se može zaključiti da ne postoje značajnija odstupanja između parametara funkcije umjeravanja i pridruženih standardnih nesigurnosti parametrima. Razlika rezultata za najbolju procjenu parametara funkcije $\widehat{\beta}_0$ iznosi 5 %. Razlika rezultata za pridruženu standardnu nesigurnost najboljoj procjeni parametara funkcije $\widehat{\beta}_0$ iznosi približno 7 %. Razlika rezultata za najbolju procjenu parametara funkcije $\widehat{\beta}_1$ iznosi manje od 0,1 %. Razlika rezultata za pridruženu standardnu nesigurnost najboljoj procjeni parametara funkcije $\widehat{\beta}_1$ iznosi približno 4 %. Iz provedenoga istraživanja se može zaključiti da ako su parametri funkcije opisani razdiobama te ako se ove razdiobe koriste u izračunu nesigurnosti, dobiva se točnija procjena parametara funkcije umjeravanja i standardnih nesigurnosti što predstavlja imperativ u postupku izračuna nesigurnosti Prikazani model je generički i primjenjivi na druge modele za potrebe izračuna parametara funkcije umjeravanja.

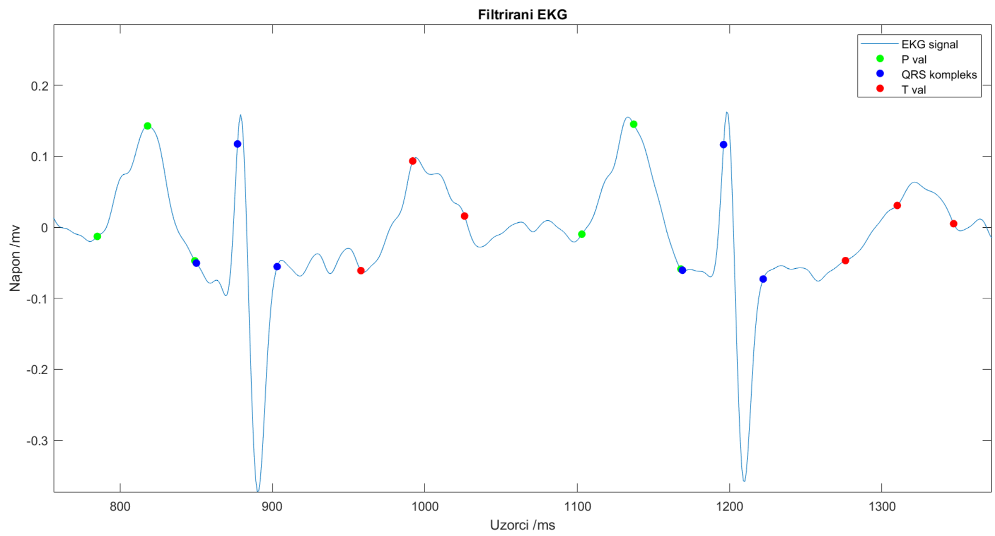
Baza podataka [74] je korištena za analizu EKG signala s ciljem primjene mjeriteljskih principa u strojnom učenju. Baza podataka je javno dostupna kao baza podataka na stranici PhysioNet [75], zajedno s objavljenim radom na temu strukture dostupnih podataka u časopisu Nature Scientific Data [74]. Baza podataka je razvijena kroz znanstveno-istraživački projekt [18]. Baza podatka, u trenutku objavljivanja, predstavlja najveću besplatnu kliničku bazu podataka za 12-kanalni EKG. Navedena baza se sastoji od 21 837 zapisa te sadrži širok opseg dijagnostičkih klasa. Baza podataka u kombinaciji s meta podacima o demografskim podacima, dijagnostičkim klasama, predloženim datotekama za podjelu podataka za uporabu strojnog učenja, itd. predstavlja ovu bazu kao vrlo vrijedan izvor podataka za istraživanje i analizu EKG signala.

Analize EKG signala su provedene s aspekta određivanja normativnih točaka na EKG signalu. Valovi na EKG signalu te intervali između valova imaju određeno vrijeme trajanja, opseg prihvatljivih amplituda i tipsku morfologiju. Svako odstupanje od normalnog signala je potencijalno patološko te stoga ima klinički značaj. Normativne točke su određene uz uporabu ECGdeli softvera [76]. Nakon određivanja normativnih točaka izračunate su značajke vektora za strojno učenje: P interval, PQ interval, QRS interval, QT interval, T interval, RR interval, P amplituda, Q amplituda, R amplituda, S amplituda, T amplituda, ST interval. Za određivanje značajki vektora korišten je 500 Hz standardni 12-kanalni EKG signal (12 vodova). Na slici (3.26) su prikazane morfološke osobine EKG signala.



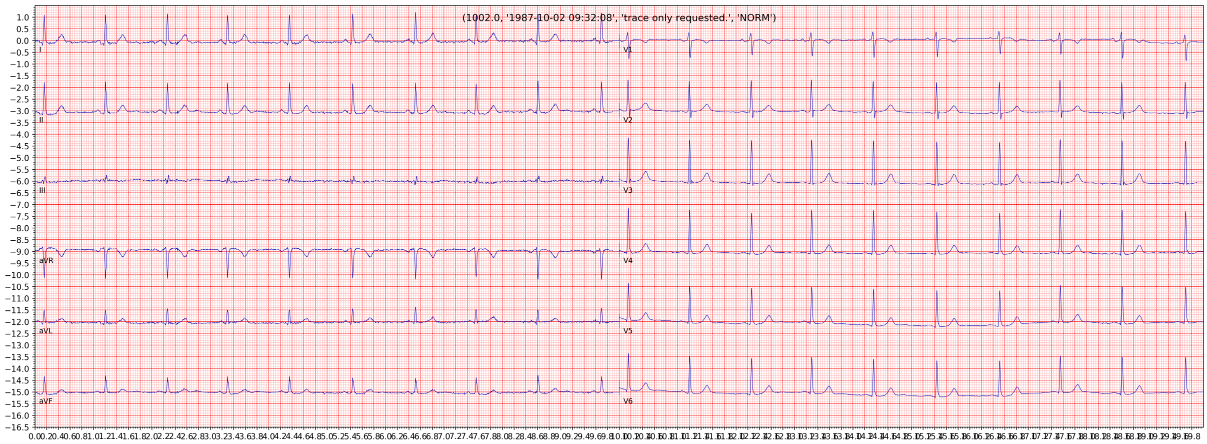
Slika 3.26: Morfološke osobine EKG signala [77]

Navedeni EKG intervali i amplitude predstavljaju značajke za analizu stanja bolesti srca od strane kliničkog osoblja. Navedene značajke su uzete kao značajke vektora za strojno učenje tako da informacija stanja bolesti srca iz grubog EKG signala nije izostavljena ili oštećena. Kliničko osoblje kvantificira ključne značajke signala koji mogu predstavljati srednju vrijednost značajki u signalu ili njihove pojedinačne vrijednosti. U radu su primijenjene tehnike strojnog učenja na EKG signal i značajke EKG signala s ciljem predviđanja stanja bolesti srca pacijenata. Na slici (3.27) su prikazane normativne točke izračunate uz uporabu ECGdeli softvera [76].



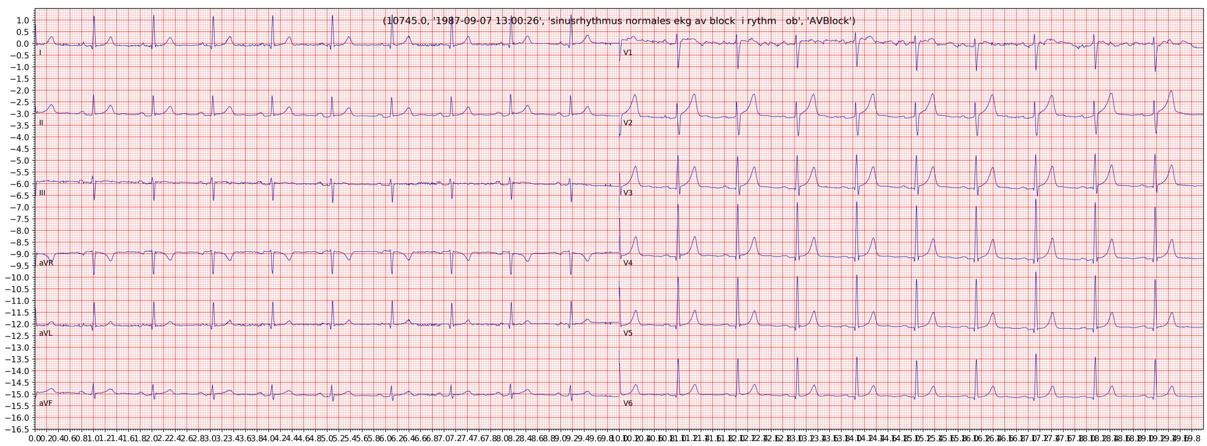
Slika 3.27: Prikaz normativnih točaka

P val kod zdravih odraslih osoba je kraći od 120 ms. Njegova vršna amplituda kod normalnog sinusnog zapisa je manja od 0,25 mV u vodovima ekstremiteta. QRS kompleks predstavlja vrijeme potrebno za depolarizaciju muskulature komora. Mjeri se od početka QRS kompleksa do njegovog kraja. QRS kompleks kod zdravih odraslih osoba je manji od 100 ms 110 ms kada se mjerenja izvode s računalom. T val je određen veličinom QRS kompleksa. Normalan T val ima asimetrični oblik odnosno njegov vrh je bliži kraju vala nego na početku [77]. Ukupno devet normativnih točaka je izračunato, i to [78]: P-val početak (P_o), P-val vršna amplituda (P), P-val pomak (P_e), QRS-val početak (QRS_o), QRS-val vršna amplituda (QRS), QRS-val pomak (QRS_e) i T-val početak (T_o), T-val vršna amplituda (T), T-val pomak (T_e). Izračunate su značajke vektora za strojno učenje, nakon određivanja navedenih normativnih točaka [78]: P interval ($P_e - P_o$), PQ interval ($QRS_o - P_e$), QRS interval ($QRS_e - QRS_o$), QT interval ($T_e - QRS_o$), T interval ($T_e - T_o$), RR interval (otkucaj srca), P amplituda (vršna amplituda), Q amplituda (vršna amplituda), R amplituda (vršna amplituda), S amplituda (vršna amplituda), T amplituda (vršna amplituda), ST interval ($t = QRS_e..T_o$). Na temelju normativnih točaka izračunati su intervali i amplitude koje predstavljaju značajke vektora za strojno nadzirano učenje. Više detalja o kardiološkoj patologiji je dano u knjizi [77]. Iz baze podataka [74] je izdvojen izbalansirani set podataka koji sadrži EKG signale za četiri različite dijagnoze bolesti srca (klase) u svrhu nadzornog strojnog učenja. Na slici (3.28) je prikazan 12 kanalni ECG (12 vodova) za dijagnosticiranu klasu 0.



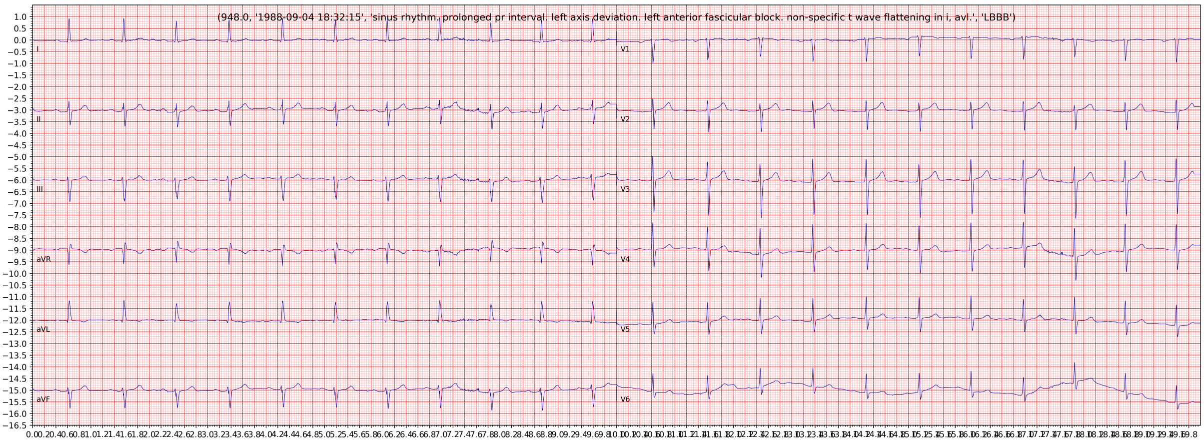
Slika 3.28: 12 kanalni ECG signala za klasu 0

Klasa 0 predstavlja uredan dijagnostički nalaz srca (*engl. Normal ECG*). Na slici (3.29) je prikazan 12 kanalni ECG (12 vodova) za dijagnosticiranu klasu 1 (*engl. Atrioventricular (AV) block* – AVBlock).



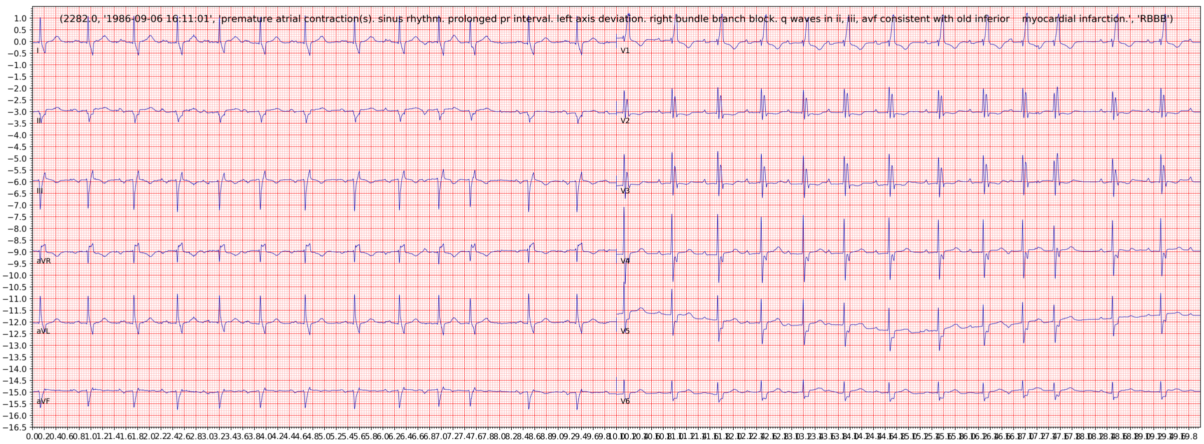
Slika 3.29: 12 kanalni ECG signala za klasu 1

Klasa 1 je djelomičan ili potpuni prekid provođenja impulsa iz atrija u ventrikule. Najvažnija karakteristika kod klase 1 je PR interval koji je veći od 200 ms. Klasa 1 je asimptomatska i ne zahtijeva tretiranje ali se prati ako postoji neki drugi srčani simptom koji zahtijeva tretiranje. Na slici (3.30) je prikazan 12 kanalni ECG (12 vodova) za dijagnosticiranu klasu 2 (*engl. Left Bundle Branch Block* – LBBB).



Slika 3.30: 12 kanalni ECG signala za klasu 2

Klasa 2 predstavlja dijagnostički nalaz koji ukazuje na zakašnjelu aktivaciju lijevog ventrikula što uzrokuje da se lijevi ventrikul kontrahira kasnije u odnosu na desi. Najvažnije karakteristike kod klase 2 je QRS kompleks koji je veći od 120 ms. Na slici (3.31) je prikazan 12 kanalni ECG (12 vodova) za dijagnosticiranu klasu 3 (*engl. Right Bundle Branch Block* – RBBB).



Slika 3.31: 12 kanalni ECG signala za klasu 3

Klasa 3 predstavlja dijagnostički nalaz koji ukazuje na zakašnjelu aktivaciju desnog ventrikula što uzrokuje da se desni ventrikul kontrahira kasnije u odnosu na lijevi. Najvažnije karakteristike klase 3 je QRS kompleks koji je veći od 120 ms. Navedene klase su odabrane na temelju istraživanja koja su provedena u sljedećem znanstvenom radu [79] i projektu [18]. Podaci za istraživanje su ekstraktirani iz baze podataka [75] uz uporabu programskog jezika Python [74].

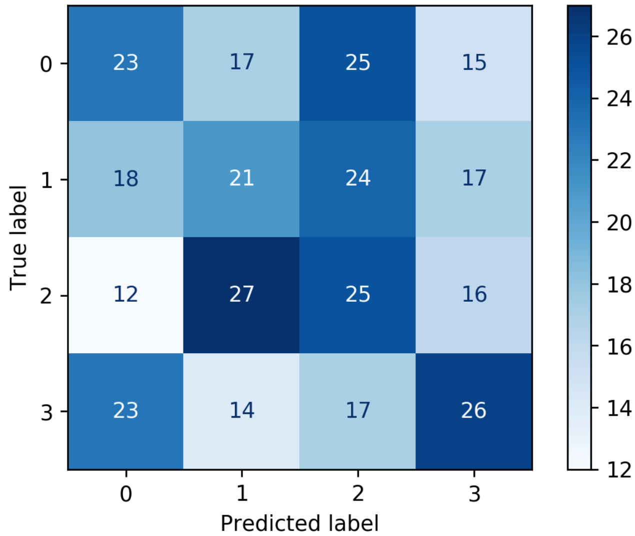
3.4.1. Nadzirano strojno učenje – Metoda stroja potpornih vektora

Kroz uporabu metoda za nadzirano strojno učenje izračunate su najbolje performanse za klasifikaciju EKG signala za dijagnostičku klasu 0, dijagnostičku klasu 1, dijagnostičku klasu 2 i dijagnostičku klasu 3. Za izdvojeni izbalansirani set podataka iz baze podataka [74] i navedene klase korištena je peterostruka unakrsna provjera (*engl. Five-Fold Cross Validation* – FFCV) u primjeni metoda nadziranog strojnog učenja s ciljem eliminacije varijabilnosti podatka i potvrđivanja rezultata klasifikacije. Prva primijenjena metoda nadziranog strojnog učenja za klasifikaciju EKG signala je metoda stroja potpornih vektora (*engl. Support-Vector Machine* – SVM). Metoda ima dvije temeljne karakteristike i to: (1) minimiziranje srednje funkcije gubitaka (*engl. Hinge Loss Function* – HLS) na trening podacima i (2) povećavanje udaljenosti između graničnih margina smanjenjem vrijednosti regularizacijskog člana $\|\theta\|$. Međutim ove dvije aktivnosti ili dva cilja metode su oprečna i trebaju biti izbalansirani s ciljem pronalaženje njihovih optimalnih vrijednosti [59]. Stoga je neophodno navedene aktivnosti optimizirati u kombinaciji:

$$J(\theta, \theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} \mathrm{Loss}_h(y^{(i)}(\theta \cdot x^{(i)} + \theta_0)) + \frac{\lambda}{2} \|\theta\|^2, \tag{3.43}$$

gdje $1/n \sum_i^n \mathrm{Loss}_h(y^{(i)}(\theta \cdot x^{(i)} + \theta_0))$ predstavlja funkciju gubitaka, $\|\theta\|^2/2$ predstavlja regularizacijski član i λ predstavlja regularizacijski parametar. Optimalni parametari (θ, θ_0) se pronalaze minimiziranjem objektne funkcije (3.43).

Podaci za nadzirano strojno učenje su podijeljeni tako da 80 % podataka predstavlja podatke za treniranje, a 20 % podatke za testiranje. Uzimajući u obzir da se radi o izbalansiranom setu podataka za usporedbu rezultata je korišten kriterij točnosti. Kada se razmatra neizbalansirani set podatka, F1 mjera se preporuča kao kriterij za usporedbu rezultata. U ovom slučaju F1 mjera se smatra više pouzdanom od kriterija točnosti. Za peterostruku unakrsnu provjeru su izračunate 4 x 4 matrice zabune. Točnost se definira kao omjer ispravno klasificiranih primjera i ukupnog broja primjera i predstavlja funkciju gubitka. Nedostatak kriterija točnosti se javlja kod neizbalansiranih setova podataka. Ako je udio neke klase (negativne klase) značajno veći u odnosu na drugu klasu (pozitivna klasa) svaki primjer koji klasifikator klasificira kao negativan imat će visoku razinu točnosti iako se možda radi o neadekvatnom modelu strojnog učenja. Na slici (3.32) je dan prikaz 4 x 4 matrice zabune za nefiltrirani EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru.



Slika 3.32: Matrica zabune 4 x 4 za I vod

U tablici (3.17) je dan prikaz vrednovanja modela za nefiltrirani EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru. Uzimajući u obzir da se radi o balansiranom setu podataka, kriterij točnosti je primijenjen za usporedbu rezultata. U tablici (3.18) je dan prikaz vrednovanja modela za nefiltrirani 12 EKG signal. Na slici (3.33) je dan prikaz 2 x

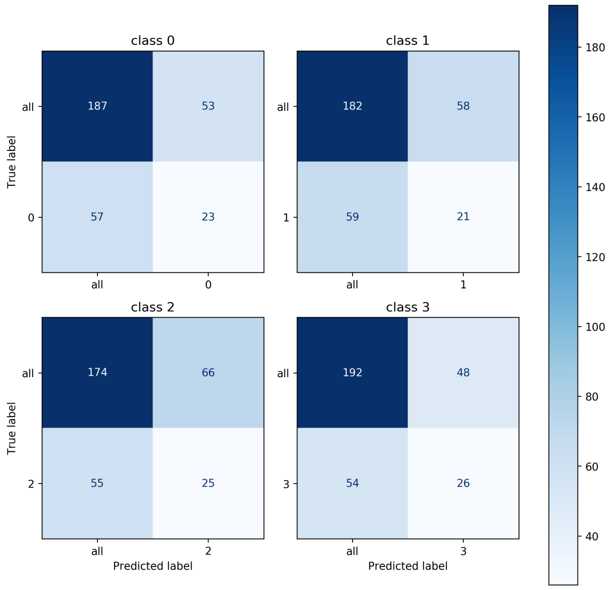
Tablica 3.17: Klasifikacijski izvještaj za I vod

Klasa	Preciznost	Odziv	F1 mjera
Klasa 0	0,30	0,29	0,29
Klasa 1	0,27	0,26	0,24
Klasa 2	0,27	0,31	0,29
Klasa 3	0,35	0,33	0,34
Točnost			0,30

Tablica 3.18: Rezultati točnosti za 12 EKG vodova

Vodovi	I	II	III	aVR	aVL	aVF	V1	V2	V3	V4	V5	V6
Točnost	0,30	0,31	0,32	0,30	0,30	0,30	0,33	0,34	0,38	0,35	0,32	0,31

2 matrice zabune za nefiltrirani EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru zasebnih klasa u odnosu na preostale klase.



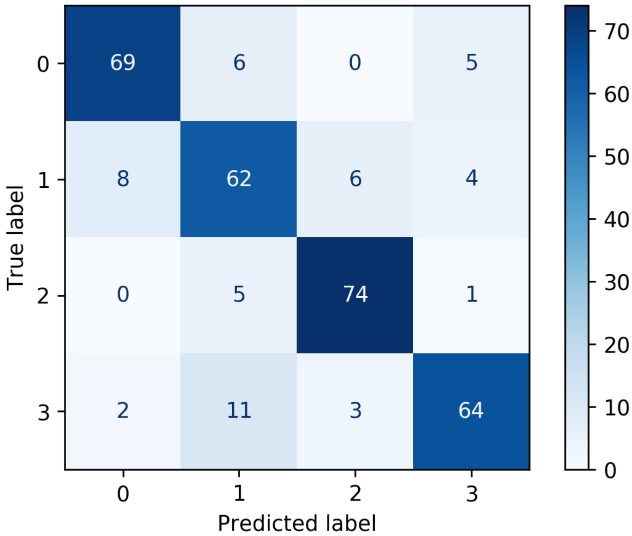
Slika 3.33: Matrica zabune 2 x 2 za I vod

U tablici (3.19) je dan prikaz vrednovanja modela za nefiltrirani EKG signal za najveću točnost peterostruke unakrsne provjere. U prilogu (A.3) je dan kod za korištenje SVM

Tablica 3.19: Matrica zabune 2 x 2 za vod I

Klasa	Preciznost	Odziv	F1 mjera	Klasa	Preciznost	Odziv	F1
Klas 0	0,33	0,30	0,32	Klasa 1	0,21	0,19	0,20
Sve klase	0,77	0,80	0,79	Sve klase	0,74	0,77	0,76
Točnost			0,68	Točnost			0,62
Klasa 2	0,21	0,23	0,22	Klasa 3	0,39	0,30	0,34
Sve klase	0,74	0,72	0,73	Sve klase	0,78	0,84	0,81
Točnost			0,59	Točnost			0,71

metode i vrednovanja modela u programskom jeziku Python [62]. Temeljem dobivenih rezultata se može zaključiti da SVM metoda za korišteni set podataka (nefiltrirani EKG signal) nije adekvatna. Potrebno redefinirati podatke tako da se sačuva informacija koju sadrži EKG signal za određenu dijagnostičku klasu. Za sve EKG signale izračunate su normirane točke i na temelju tih točaka izračunati su određeni intervali. Na osnovi značajki kreirani su vektori značajki koji sadrže informacije vezane za EKG signale. Vektori značajki i način njihovog kreiranja su prethodno opisani. Podaci za nadzirano strojno učenje su podijeljeni tako da 80 % podataka predstavlja podatke za treniranje, a 20 % podatke za testiranje. Uzimajući u obzir da se radi o izbalansiranom setu podataka, kriterij točnosti je primijenjen za usporedbu rezultata. Na slici (3.34) je dan prikaz 4 x 4 matrice zabune za uređeni EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru.



Slika 3.34: Matrica zabune 4 x 4 za vod I

U tablici (3.20) je dan prikaz vrednovanja modela za uređeni EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru. Uzimajući u obzir da se radi o balansiranom setu po-

Tablica 3.20: Klasifikacijski izvještaj za vod I

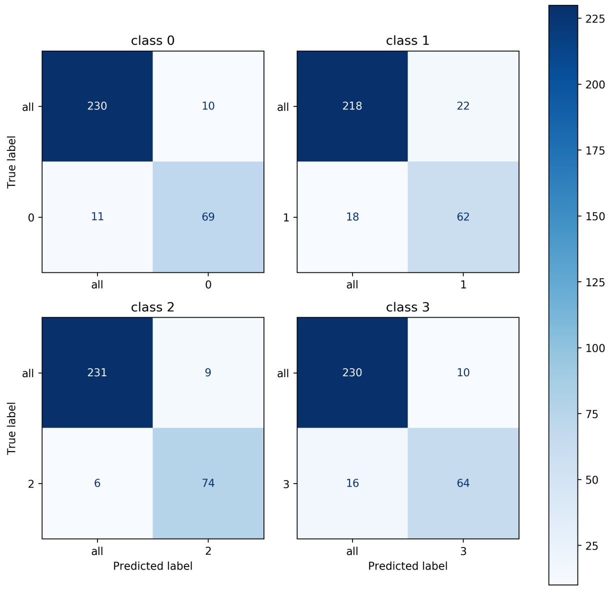
Klasa	Preciznost	Odziv	F1 mjera
Klase 0	0,87	0,86	0,87
Klasa 1	0,74	0,78	0,76
Klasa 2	0,89	0,93	0,91
Klasa 3	0,86	0,80	0,83
Točnost			0,84

dataka, kriterij točnosti je primijenjen za usporedbu rezultata. U tablici (3.21) je dan prikaz vrednovanja modela za uređeni 12 EKG signal. Na slici (3.35) je dan prikaz 2 x

Tablica 3.21: Rezultati točnosti za 12 EKG vodova

Vodovi	I	II	III	aVR	aVL	aVF	V1	V2	V3	V4	V5	V6
Točnost	0,84	0,70	0,72	0,82	0,76	0,67	0,92	0,82	0,77	0,70	0,72	0,79

2 matrice zabune za uređeni EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru zasebnih klasa u odnosu na preostale klase.



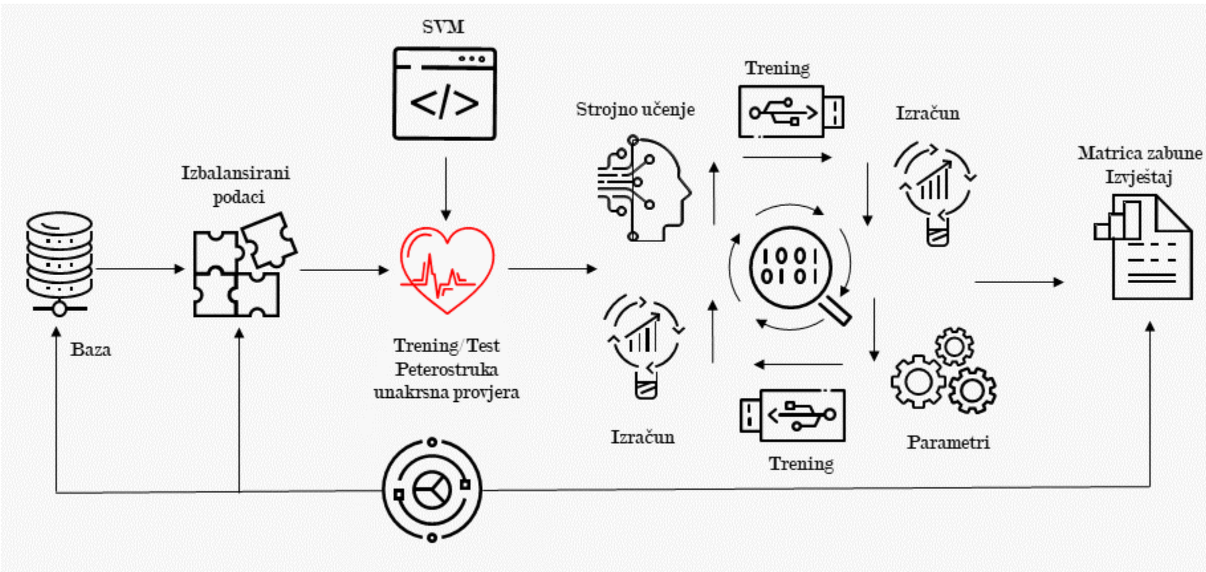
Slika 3.35: Matrica zabune 2 x 2 za vod I

U tablici (3.22) je dan prikaz vrednovanja modela za uređeni EKG signal za najveću točnost peterostruke unakrsne provjere. U prilogu (A.4) je dan kod za korištenje SVM me-

Tablica 3.22: Matrica zabune 2 x 2 za vod I

Klasa	Preciznost	Odziv	F1 mjera	Klasa	Preciznost	Odziv	F1
Klasa 0	0,77	0,68	0,72	Klasa 1	0,67	0,59	0,63
Sve klase	0,90	0,93	0,91	Sve klase	0,87	0,90	0,89
Točnost			0,87	Točnost			0,82
Klasa 2	0,95	0,93	0,94	Klasa 3	0,89	0,71	0,79
Sve klase	0,98	0,98	0,98	Sve klase	0,91	0,97	0,94
Točnost			0,97	Točnost			0,91

tode i vrednovanja modela u programskom jeziku Python [62]. Rezultati točnosti za vod I (nefiltrirani EKG signal) su prikazani na slici (3.32) i u tablici (3.17). Rezultati točnosti za sve vodove su prikazani u tablici (3.18). Iz dobivenih rezultata se može zaključiti da korištena metoda klasifikacije za korišteni set podataka nije adekvatna. Najbolja ostvarena točnost za peterostruku unakrsnu provjeru je 30 % što predstavlja veoma nisku točnost klasifikacije korištenih klasa. Ako se promatraju klase na način zasebnih klasa u odnosu na preostale klase onda je točnost znatno bolja i iznosi 71 % za vod I. Rezultati su prikazani na slici (3.33) i tablici (3.19). Ostvarena točnost je prividna točnost jer se radi o neizbalansiranom setu podataka. Rezultati točnosti za vod I (uređeni EKG signal) su prikazani na slici (3.34) i u tablici (3.20). Rezultati točnosti za sve vodove su prikazani u tablici (3.21). Iz dobivenih rezultata se može zaključiti da je primijenjena metoda klasifikacije za korišteni set podataka adekvatna. Najbolja točnost za peterostruku unakrsnu provjeru je 84 % što predstavlja vrlo visoku točnost klasifikacije korištenih klasa. Ako se promatraju klase na način zasebnih klasa u odnosu na preostale klase onda je točnost znatno bolja i iznosi 97 % za vod I. Rezultati su prikazani na slici (3.35) i u tablici (3.22). Kao i u prethodnom slučaju ostvarena točnost je prividna točnost jer se radi o neizbalansiranom setu podataka. Za oba navedena slučaja bolje je koristiti F1 mjeru za analizu rezultata. Na slici (3.36) je dan dijagram blok za prikupljanje i obradu podataka strojnim nadziranim učenjem za metodu SVM.



Slika 3.36: Blok dijagram – SVM

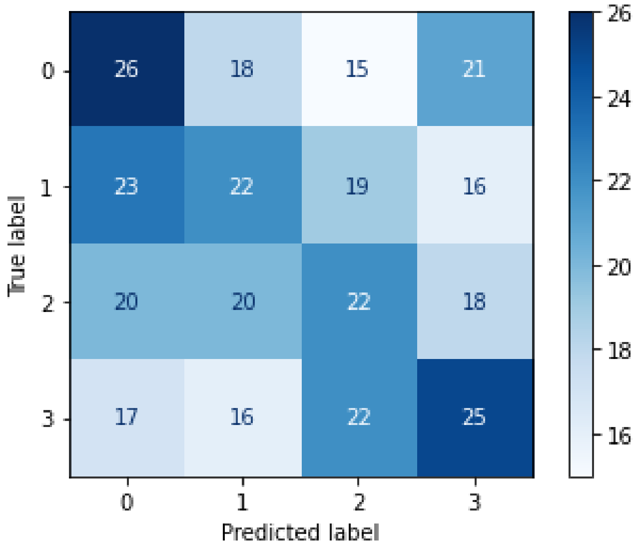
Uređeni EKG signal sadrži informaciju koja je neophodna za adekvatnu klasifikaciju dijagnostičkih stanja. Može se zaključiti da informacija koja je sadržana u grubom EKG signalu nije umanjena zbog dobivenih rezultata. Uređeni EKG signal ima i prednost u smislu vremena potrebnog za izračun u odnosu na nefiltrirani EKG signal jer sadrži manji broj podataka za obradu. Vektor značajki za nefiltrirani EKG signal ima dimenzije $[1600 \times 5000 \times 12]$, a vektor značajki za uređeni (interval) signal ima dimenzije $[1600 \times 12]$. Jedna od bitnih značajki strojnog učenja je sortiranje podatka, obrada podatka i čuvanje informacija s ciljem adekvatnog predviđanja ili s aspekta mjeriteljstva sukladnosti.

3.4.2. Nadzirano strojno učenje – Višestruka logistička regresija

Druga primijenjena metoda nadziranog strojnog učenja za klasifikaciju EKG signala je višestruka logistička regresija (*engl. Multinomial Logistic Regression* – SoftMax). Na temelju algoritma za standardnu logističku regresiju razvijen je algoritam za višestruku logističku regresiju [59]. Objektna funkcija za višestruku logističku regresiju je dana izrazom (3.44):

$$J(\theta) = -\frac{1}{n}\Big[\sum_{i}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}[[(y^{(i)} == j]]\log\frac{e^{\theta_j \cdot x^i/\tau}}{\sum_{l=0}^{k-1} e^{\theta_l \cdot x^i/\tau}}\Big] + \frac{\lambda}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{d-1}\theta_{ji}^2, \tag{3.44}$$

gdje $-\frac{1}{n}\Big[\sum_{i}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}[[(y^{(i)} == j]]\log\frac{e^{\theta_j \cdot x^i/\tau}}{\sum_{l=0}^{k-1} e^{\theta_l \cdot x^i/\tau}}\Big]$ predstavlja funkciju gubitaka, θ_{ji}^2 predstavlja regularizacijski član i λ predstavlja regularizacijski parametar. Optimalni parametar (θ) se nalazi minimiziranjem objektne funkcije (3.44). Minimiziranje objektne funkcije je provedeno uz pomoć algoritma (*engl. Gradient Descent Algorithm* – GDA). Podaci za nadzirano strojno učenje su podijeljeni tako da 80 % podataka predstavlja podatke za treniranje, a 20 % podatke za testiranje. Kao i za prethodni izračun točnost je kriterij za usporedbu rezultata. Za sve peterostruke unakrsne provjere su izračunate matrice zabune. Na slici (3.37) je dan prikaz 4 x 4 matrice zabune za nefiltrirani EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru.



Slika 3.37: Matrica zabune 4 x 4 za I vod

U tablici (3.23) je dan prikaz vrednovanja modela za nefiltrirani EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru. Uzimajući u obzir da se radi o balansiranom setu poda-

Tablica 3.23: Klasifikacijski izvještaj za I vod

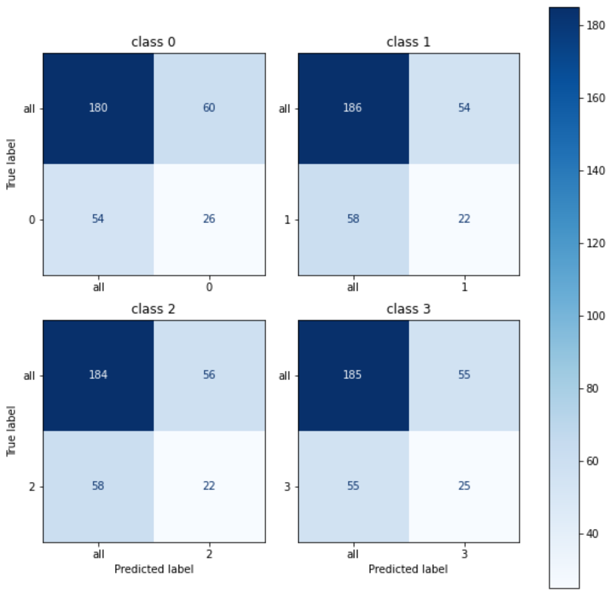
Klasa	Preciznost	Odziv	F1 mjera
Klasa 0	0,30	0,33	0,31
Klasa 1	0,29	0,28	0,28
Klasa 2	0,28	0,28	0,28
Klasa 3	0,31	0,31	0,31
Točnost			0,30

taka, točnost je kriterij za usporedbu rezultata. U tablici (3.24) je dan prikaz vrednovanja modela za nefiltrirani 12 EKG signal. Na slici (3.38) je dan prikaz 2 x 2 matrice zabune

Tablica 3.24: Rezultati točnosti za 12 EKG vodova

Vodovi	I	II	III	aVR	aVL	aVF	V1	V2	V3	V4	V5	V6
Točnost	0,30	0,27	0,32	0,31	0,28	0,30	0,31	0,33	0,36	0,31	0,30	0,28

za nefiltrirani EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru zasebnih klasa u odnosu na preostale klase.



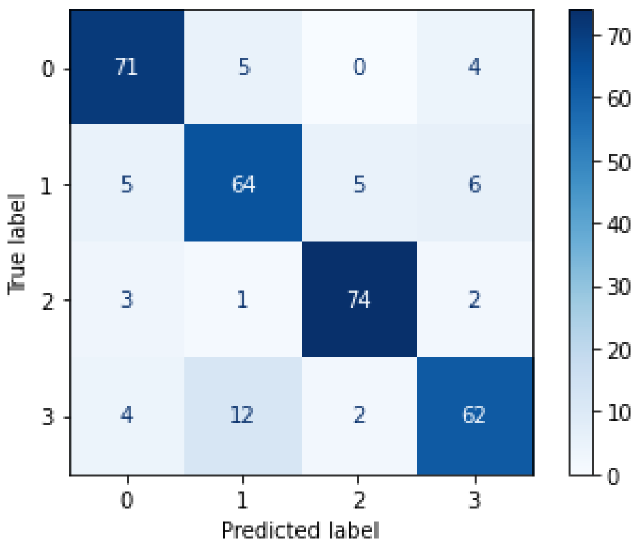
Slika 3.38: Matrica zabune 2 x 2 za I vod

U tablici (3.25) je dan prikaz vrednovanja modela za nefiltrirani EKG signal za najveću točnost peterostruke unakrsne provjere. U prilogu (A.5) je dan kod za korištenje višestruke

Tablica 3.25: Matrica zabune 2 x 2 za I vod

Klasa	Preciznost	Odziv	F1 mjera	Klasa	Preciznost	Odziv	F1
Klas 0	0,20	0,23	0,21	Klasa 1	0,35	0,29	0,32
Sve klase	0,73	0,70	0,71	Sve klase	0,78	0,82	0,80
Točnost			0,58	Točnost			0,69
Klasa 2	0,25	0,31	0,28	Klasa 3	0,26	0,24	0,25
Sve klase	0,75	0,69	0,72	Sve klase	0,75	0,77	0,76
Točnost			0,60	Točnost			0,77

logističke metode i vrednovanje modela u programskom jeziku Python [62]. Na osnovi dobivenih rezultata se može zaključiti da višestruka logistička metoda za korišteni set podataka nije adekvatna. Potrebno je redefinirati podatke tako da se sačuva informacija koju sadrži EKG signal za određenu dijagnostičku klasu. Za sve EKG signale izračunate su normirane točke te na temelju tih točaka su izračunati i normalizirani određeni intervali. Na osnovi značajki kreirani su vektori značajki koji sadrže informacije vezane za EKG signale. Vektori značajki i način njihovog kreiranja su prethodno opisani. Podaci za nadzirano strojno učenje su podijeljeni tako da 80 % podataka predstavlja podatke za treniranje, a 20 % podatke za testiranje. Na slici (3.39) je dan prikaz 4 x 4 matrice zabune za uređeni EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru.



Slika 3.39: Matrica zabune 4 x 4 za I vod

U tablici (3.26) je dan prikaz vrednovanja modela za uređeni EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru. Uzimajući u obzir da se radi o balansiranom setu po-

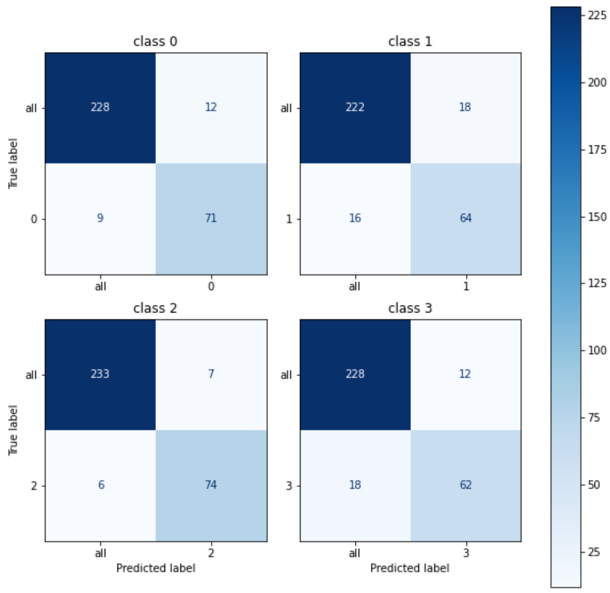
Tablica 3.26: Klasifikacijski izvještaj za I vod

Klasa	Preciznost	Odziv	F1 mjera
Klasa 0	0,86	0,89	0,87
Klasa 1	0,78	0,80	0,79
Klasa 2	0,91	0,93	0,92
Klasa 3	0,84	0,78	0,81
Točnost			0,85

dataka, kriterij točnosti je primijenjen za usporedbu rezultata. U tablici (3.27) je dan prikaz vrednovanja modela za nefiltrirani 12 EKG signal. Na slici (3.40) je dan prikaz 2 x 2 matrice zabune za nefiltrirani EKG signal za najtočniju peterostruku unakrsnu provjeru zasebnih klasa u odnosu na preostale klase.

Tablica 3.27: Rezultati točnosti za 12 EKG vodova

Vodovi	I	II	III	aVR	aVL	aVF	V1	V2	V3	V4	V5	V6
Točnost	0,85	0,71	0,70	0,84	0,76	0,70	0,94	0,83	0,77	0,70	0,73	0,78



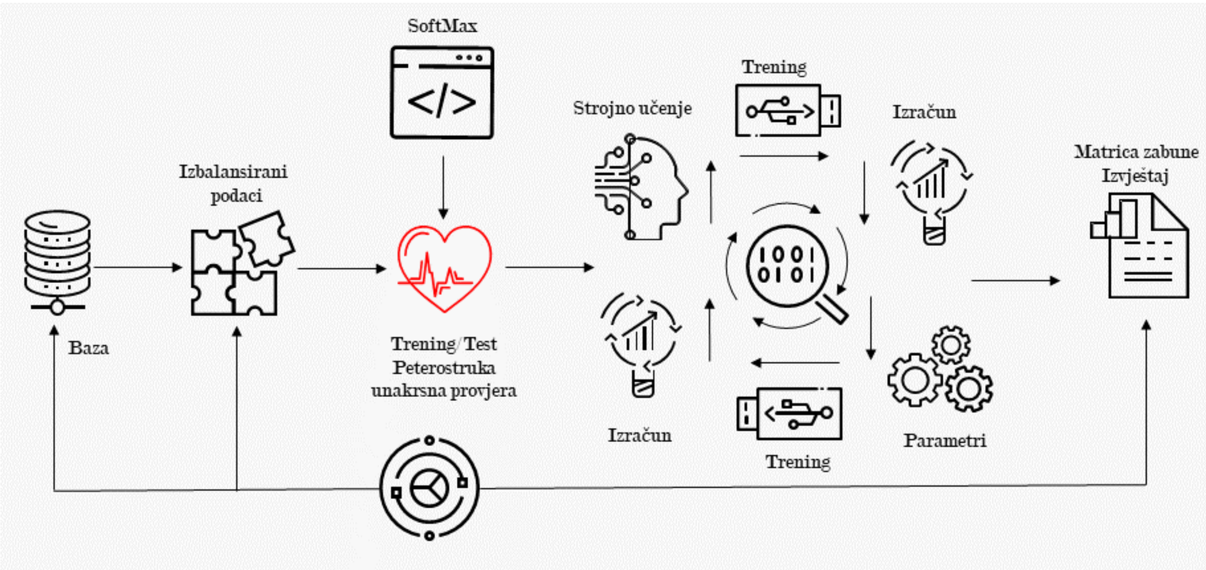
Slika 3.40: Matrica zabune 2 x 2 za I vod

U tablici (3.28) je dan prikaz vrednovanja modela za nefiltrirani EKG signal za najveću točnost peterostruke unakrsne provjere. U prilogu (A.6) je dan kod za korištenje višestruke logističke metode i vrednovanje modela u programskom jeziku Python [62]. Rezultati točnosti za vod I (nefiltrirani EKG signal) su prikazani na slici (3.37) i u tablici (3.23).

Tablica 3.28: Matrica zabune 2 x 2 za I vod

Klasa	Preciznost	Odziv	F1 mjera	Klasa	Preciznost	Odziv	F1
Klas 0	0,81	0,76	0,79	Klasa 1	0,79	0,56	0,66
Sve klase	0,92	0,94	0,93	Sve klase	0,87	0,95	0,91
Točnost			0,90	Točnost			0,85
Klasa 2	0,89	0,85	0,87	Klasa 3	0,73	0,71	0,71
Sve klase	0,95	0,97	0,96	Sve klase	0,90	0,91	0,91
Točnost			0,94	Točnost			0,86

Rezultati točnosti za sve vodove su prikazani u tablici (3.24). Iz dobivenih rezultata se može zaključiti da primijenjena metoda klasifikacije za korišteni set podataka nije adekvatna. Najbolja točnost za peterostruku unakrsnu provjeru je 30 % što predstavlja veoma nisku točnost klasifikacije korištenih klasa. Ako se promatraju klase na način zasebnih klasa u odnosu na preostale klase onda je točnost znatno bolja i iznosi 77 % za vod I. Rezultati su prikazani na slici (3.38) i u tablici (3.25). Ostvarena točnost je prividna točnost jer se radi o neizbalansiranom setu podataka. Rezultati točnosti za vod I (uređeni EKG signal) su prikazani na slici (3.39) i u tablici (3.26). Rezultati točnosti za sve vodove su prikazani u tablici (3.27). Na slici (3.41) je dan dijagram blok za prikupljanje i obradu podataka strojnim nadziranim učenjem za metodu SoftMax



Slika 3.41: Blok dijagram – SoftMax

Iz dobivenih rezultata se može zaključiti da je primijenjena metoda klasifikacije za korišteni set podataka adekvatna. Ostvarena točnost za peterostruku unakrsnu provjeru je 85 %

što predstavlja veoma visoku točnost klasifikacije korištenih klasa. Ako se promatraju klase na način zasebnih klasa u odnosu na preostale klase, prikazane na slici (3.40) i u tablici (3.28), onda je točnost znatno bolja i iznosi 94 % za promatrani vod.

3.4.3. Kriteriji za odabir metoda

U radu je korištena metoda stroja potpornih vektora (SVM) i metoda višestruke logističke regresije (SoftMax) za obradu preuzetih podataka. Baza podatka [74] se sastoji od metapodataka i koda za preuzimanje zapisa za potrebe vrednovanja rezultata strojnog učenja. U svrhu istraživanja iz baze je preuzeto je 1600 zapisa za četiri klase. Svaka odabrana klasa je sastavljena od 400 zapisa. Na ovaj način je kreiran izbalansirani set podataka za istraživanje s ciljem vrednovanja rezultata nadziranog strojnog učenja. Peterostrukom unakrsnom provjerom izvršena je eliminacija varijabilnosti podatka i potvrđivanje rezultata klasifikacije. Raspodjela podataka je korištena u omjeru 80:20 na temelju metapodataka (A.2) baze podataka. Testnim podacima su pridruženi folderi od 1 do 8, a trening podacima folderi od 9 do 10. U radu su istraženi rezultati strojnog učenja za različite kombinacije podataka uključujući preporučenu kombinaciju podataka. Prva kombinacija, testni podaci od 3 do 10, trening podaci od 1 do 2. Druga kombinacija, testni podaci od 1 do 2 i 5 do 10, trening podaci od 3 do 4. Treća kombinacija, testni podaci od 1 do 2 i 5 do 10, trening podaci od 5 do 6. Četvrta kombinacija, testni podaci od 1 do 6 i 9 do 10, trening podaci od 7 do 8. Peta kombinacija, testni podaci od 1 do 8, trening podaci od 9 do 10. Rezultat sa najvećom točnosti za I vod su prikazani u radu. Rezultati za obje metode (nefiltrirani signal) su dani u tablici (3.18) i (3.24). Kao što je opisano, navedene metode strojnog nadziranog učenja nisu adekvatne za klasifikaciju podataka zbog prirode podataka. Za proučavanje nefiltriranog signala se trebaju koristiti metode dubokog učenje s ciljem dobivanja informacija od interesa. Ostvarena točnost za sve vodove je ujednačena ali nedovoljna za ocjenjivanje sukladnosti s definiranim specifikacijama. Rezultati za obje metode (uređeni signal) su dani u tablici (3.21) i (3.27). Na temelju kriterija točnosti izvršena je procjena točnosti rezultata (klasifikacije) nadziranog strojnog učenja. Za izbalansirani set podatka kod metoda strojnog učenja preporuča se kriteriji točnosti za rezultat klasifikacije (A.1). Ostvarena točnost za sve vodove je ujednačena i može biti korištena za ocjenjivanje sukladnosti s definiranim specifikacijama. Za pojedine vodove točnost iznosi više od 80 %. Dobiveni rezultati za obje korištene metoda su slični.

Najveća točnost za obje metode je dobivena za vod V1. Proveden je t test i utvrđeno je da nema statističke značajne razlike između rezultata primijenjenih metoda nadziranog strojnog učenja ($\mathbb{P}$=0,744) uz alfa rizik od 5 %. Metode nadziranog strojnog učenja su pokazale manju točnost za grubi EKG signal u usporedbi s uređenim EKG signalom. Iz navedenog se može zaključiti da rezultati nadziranog strojnog učenja su osjetljivi na ulazne podatke. Točnost klasifikacije klasa za uređeni EKG signal u odnosu na grubi EKG signal je značajno veća (više od 55 %) što dovodi do zaključka da povjerenje u rezultat nadziranog strojnog učenja ovisi o pripremi podataka. Način razumijevanja EKG signala (uređeni signal) je veoma važan za nadzirano strojno učenje. Dobro razumijevanje signala (izračun normativnih točaka) dovodi do točnije klasifikacije tako da je zadržana informacija iz nefiltriranog signala. Kvantificiranje nesigurnosti za nadzirano strojno učenje je relativno novo znanstveno područje. Postoje znanstveno-istraživački projekti [16, 18, 65] koji se započeli znanstveno-istraživanje na temu kvantificiranja nesigurnosti u strojnom učenju odnosno implementiranju mjeriteljskih principa u strojno učenje. Potrebna su daljnja istraživanja na navedenu temu s ciljem primjene unificiranoga pristupa u izračunu nesigurnosti kod metoda strojnog učenja.

4. ZAKLJUČAK

U radu je istražen utjecaj različitih pristupa procjeni standardnih nesigurnosti na ukupnu mjernu nesigurnost u području suvremenog mjeriteljstva, istražena je uloga mjerne nesigurnosti u procjeni sukladnosti sa specifikacijama te primjena mjeriteljskih principa u strojnom učenju. Izračuni nesigurnosti su provedeni uporabom okvira nesigurnosti prema Vodiču za procjenu mjerne nesigurnosti – GUM metoda, primjenom Monte Carlo metode, primjenom adaptivnoga postupka Monte Carlo i Bayesove metode. U izračunu mjerne nesigurnosti, bez obzira na prirodu ulaznih veličina uključujući i model mjerenja, razdiobe ulaznih veličina su specificirane potpuno objektivno bez nametanja bilo kakvih ograničenja na mjerni rezultat. Veza između ulaznih veličina i izlazne veličine je uspostavljena mjernim modelom ili opservacijskim modelom. Istraživanje različitih pristupa procjeni standardnih nesigurnosti na ukupnu mjernu nesigurnost je provedeno za različite postupke umjeravanja.

GUM metoda za izračun nesigurnosti uvjetuje primjenu zakona o propagaciji mjerne nesigurnosti i prikaz izlazne veličine određenom razdiobom s ciljem izračunavanja intervala pokrivanja. GUM metoda u odnosu na druge dvije metode koristi priorne razdiobe ili ponovljena mjerenja za definiranje ulaznih veličina. Najbolja procjena izlazne veličine i pridružena standardna nesigurnost najboljoj procjeni izlazne veličine se izračunava iz unaprijed definirane razdiobe. Nakon izračuna navedenih parametara, pridružena razdioba se ne koristi u daljem izračunu nesigurnosti. Ovakav pristup je u suprotnosti s druge dvije metode za izračun nesigurnosti. U slučaju nelinearnog funkcijskog odnosa između izlazne veličine i njezinih ulaznih veličina i razvoja te funkcije u Taylorov red uz zadržavanje samo prvih članova razvoja, GUM metoda ne daje prihvatljivo približno određenje. U takvim slučajevima zahtijevaju se druge analitičke ili numeričke metode.

Monte Carlo metoda za izračun nesigurnosti implicira generiranje slučajnih uzoraka iz priornih informativnih razdioba. Na temelju izračunatih vrijednosti veličine od interesa tvori se njena razdioba za izračunavanje zahtijevanih parametara koji opisuju ovu razdiobu i interval pokrivanja. Bayesova metoda za izračun nesigurnosti kombinira priorno znanje za veličinu od interesa s podacima dobivenim tijekom postupka umjeravanja. Iz zajedničke posteriorne razdiobe se izračunava marginalna posteriorna razdioba za izračunavanje parametara koji opisuju razdiobu i intervale pokrivanja. U postavljenim modelima priorne razdiobe za ulazne veličine (GUM metoda, MCS metoda, Bayesova metoda) su formirane na temelju dostupnih informacija, a priorne razdiobe za izlaznu veličinu (Bayesova metoda) su kreirane kao manje informativne ili neinformativne razdiobe. Za izlaznu veličinu je specificiran 95 % simetrični i/ili 95 % najkraći interval pokrivanja koji se koriste za iskazivanje potpunog mjernog rezultata. Može se zaključiti da MCS metoda i Bayesova metoda sadrže više informacija za ulaznu veličinu od GUM metode zbog principa na kojem su utemeljene. Poznavanje informativne, manje informativne ili neinformativne priorne razdiobe izlazne veličine kod izračuna nesigurnosti sukladno Bayesovoj metodi ima za posljedicu manju pridruženu standardnu nesigurnost najboljoj procjeni izlazne veličine. Standardna nesigurnost izračunata Bayesovom metodom za izračun nesigurnosti uporabom manje informativne razdiobe je manja za 6 % u usporedbi s druge dvije metode za izračun nesigurnosti. Standardna nesigurnost izračunata Bayesovom metodom uporabom neinformativne razdiobe je manja za 9 % u usporedbi s druge dvije metode za izračun nesigurnosti. Bayesovom metodom za izračun nesigurnosti je dobiven kraći 95 % simetrični i 95 % najkraći interval pokrivanja u kojem se nalazi stvarna vrijednost veličine od interesa. U radu su dani kriterij za odabir metoda koji su kreirani na osnovi ulaznih parametra, značajki metoda i izlaznih parametara. Dani modeli u radu za procjenu mjerne nesigurnosti i postavljeni kriteriji se mogu široko primijeniti i prilagoditi različitim uvjetima u laboratorijima. U ovom području daljnja istraživanja treba usmjeriti na razvijanje metoda koje će u modelu dopuštati prisustvo korelacija i sustavnih pogrešaka te primijeniti realne ne – Gaussove razdiobe kod procjene izlazne veličine.

U radu je istražen i utjecaj mjerne nesigurnosti na procjenu sukladnosti proizvoda sa specifikacijama te je proveden izračun specifičnog i globalnog rizika. Posteriorna razdioba dobivena primjenom Bayesove metode se koristila za izračun specifičnog rizika dok se zajednička razdioba koristila za izračun globalnog rizika. Istraživanja su pokazala da standardna nesigurnost značajno utječe na procjenu specifičnog i globalnog rizika potrošača i proizvođača. Manja vrijednost standardne nesigurnosti kod specifičnog rizika ide u korist proizvođača iz razloga manje vjerojatnosti da je odbijeni proizvod sukladan. Veća vrijednost standardne nesigurnosti kod specifičnog rizika ide u korist potrošača iz razloga manje vjerojatnosti da je prihvaćeni proizvod nesukladan. Kod globalnog rizika s povećanjem standardne nesigurnosti povećava se rizik potrošača i rizik proizvođača. Iz analize rizika potrošača i proizvođača te globalnog rizika proizlazi da vrijednost standardne nesigurnosti rezultata mjerenja predmeta od interesa i standardna nesigurnost uvjetovana primjenom mjerne metode značajno utječu na donošenje odluka u smislu pogrešnog odbacivanja sukladnih proizvoda i u smislu uporabe nesukladnih proizvoda.

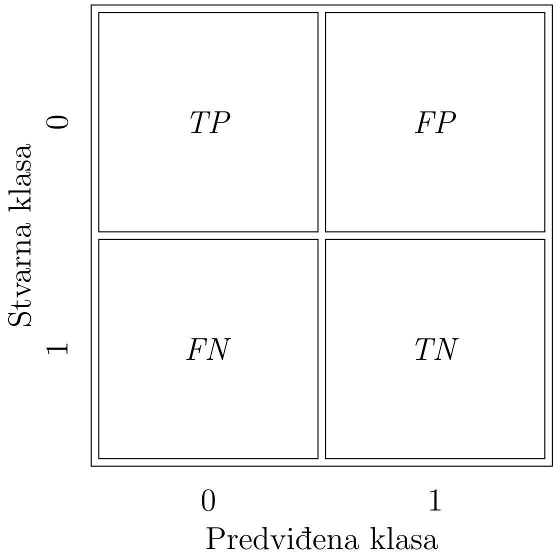
U cilju razvoja unificiranoga pristupa izračunu mjerne nesigurnosti, odnosno implementiranju mjeriteljskih principa u strojno učenje i principa strojnog učenja u mjeriteljstvo u radu su primijenjene dvije metode nadziranog strojnog učenja, metoda stroja potpornih vektora i višestruka logistička regresija. Metode su vrednovane sa sljedivim podacima. Metode nadziranog strojnog učenja su pokazale manju točnost za grubi EKG signal u usporedbi s uređenim EKG signalom. Iz navedenoga se može zaključiti da rezultati nadziranog strojnog učenja su osjetljivi na ulazne podatke. Točnost klasifikacije klasa za uređeni signal u odnosu na grubi signal je značajno veća (više od 55 %) što dovodi do zaključka da povjerenje u rezultat nadziranog strojnog učenja ovisi o podacima. Kvaliteta podataka za strojno učenje je osiguran kroz primjenu mjeriteljskih principa i pripremu podataka na način da se sačuvaju informacije iz primarnoga seta podataka odnosno informacije od interesa za točnu klasifikaciju. Proveden je t test i utvrđeno je da nema statističke značajne razlike između rezultata primijenjenih metoda nadziranog strojnog učenja ($\mathbb{P} =$ 0,744) uz alfa rizik od 5 %. Kriterij točnosti je korišten za usporedbu dobivenih rezultata. Za izbalansirani set podatka za vrednovanje rezultata strojnog učenja se preporuča kriteriji točnosti. Istražena je konzistentnost modela nadziranog strojnog učenja na temelju peterostruke unakrsne provjere. Povjerenje u rezultate metoda strojnog učenja je dodatno istraženo kroz njihove rezultate s aspekta fizičkog konteksta podataka. Na temelju istraživanja zaključeno je da se u izračunu nesigurnosti kod strojnog učenja treba uzeti u obzir prisustvo pogrešaka kod trening podataka i pogrešaka kod novih prethodno nekorištenih podataka. Postavljenim modelima dan je značajan doprinos u implementaciji mjeriteljskih principa u strojno učenje i implementaciji principa strojnog učenja u mjeriteljstvu. Može se zaključiti da razvijeni modeli osiguravaju harmonizirani pristup procjeni mjerne nesigurnosti prema međunarodnim smjernicama, osiguravaju povjerenje u dobivene rezultate i daju dobar smjer primjeni metoda strojnog učenja u cilju implementacije mjeriteljskih principa u strojno učenje i principa strojnog učenja u mjeriteljstvo.

Kvantificiranje nesigurnosti za nadzirano strojno učenje je relativno novo znanstveno područje. Potrebna su daljnja istraživanja na navedenu temu s ciljem primjene unificiranoga pristupa u izračunu nesigurnosti kod metoda strojnog učenja. Prijedlozi za daljnja istraživanja s ciljem osiguravanja povjerenja u metode strojnog učenja tj. povjerenja u rezultate strojnog učenja, uključuju istraživanja na temu mjeriteljskih principa u strojnom učenju, prikupljanja, obrade i sortiranja podataka te istraživanja na temu propagacije mjerne nesigurnosti kroz modele strojnog učenja. Potreba za uvođenjem i osiguravanjem temeljnih mjeriteljskih principa kod primjene strojnog učenja je naglašena i u strategiji Europskog saveza nacionalnih mjeriteljskih instituta (EURAMET 2030) pri čemu je fokus stavljen na mjeriteljstvo za potrebe zdravstva, mjeriteljstvo za potrebe digitalne transformacije, mjeriteljstvo za potrebe Europskog zelenog plana, te druge izazove za poboljšavanje kvalitete življenja.

A. PRILOZI

A.1. Kriteriji za vrednovanje metoda nadziranog strojnog učenja

Točnost rezultata nadziranog strojnog učenja (klasifikacija) se ocjenjuju uporabom matrice zabune. Matrica zabuna predstavlja mjeru za vrednovanje performansi metoda strojnog učenja. Matricu zabune čine kategorije prikazane slici (A.1).



Slika A.1: Prikaz matrice zabune (binarna klasifikacija)

Skraćenice *TP, TN, FP* i *FN*, prikazane na slici (A.1), imaju sljedeće značenje u izračunu performansi metoda strojnog učenja [80, 81]:

- *TP* – (*engl. true positive*) predstavlja broj pozitivnih primjeraka koji su ispravno klasificirani kao pozitivni,
- *TN* – (*engl. true negative*) predstavlja broj negativnih primjeraka koji su ispravno klasificirani kao negativni,
- *FP* – (*engl. false positive*) predstavlja broj negativnih primjeraka koji su pogrešno klasificirani kao pozitivni,
- *FN* – (*engl. false negative*) predstavlja broj pozitivnih primjeraka koji su pogrešno klasificirani kao negativni.

Evaluacijski kriteriji za vrednovanje performansi modela strojnog učenja nakon kreiranje matrice zabune su [80, 81]:

- Točnost (*engl. Accuracy*): predstavlja sveukupnu točnost metode, točnost predstavlja količnik ispravno klasificiranih primjeraka i ukupnog broja primjeraka, točnost se izračunava izrazom:

$$Točnost = \frac{(TP + TN)}{(TP + TN + FP + FN)}. \tag{A.1}$$

Naspram toga, klasifikacijska pogreška je pogreška metode strojnog učenja sukladno predviđanju, klasifikacijska pogreška se izračunava izrazom:

$$Klasifikacija\ pogreška = \frac{(FP + FN)}{(TP + TN + FP + FN)}. \tag{A.2}$$

Kriterij točnost se koristi za ocjenjivanje performansi metoda strojnog učenja (rezultata) ako se razmatra izbalansirani set podatka

- Preciznost (*engl. Precision*): predstavlja količnik pravilno klasificiranih pozitivnih primjeraka i zbira ispravno klasificiranih pozitivnih primjeraka te pogrešno klasificiranih negativnih primjeraka, preciznost se izračunava sljedećim izrazom:

$$Preciznost = \frac{TP}{(TP + FP)}. \tag{A.3}$$

- Odziv (*engl. Recall*): predstavlja količnik ispravno klasificiranih pozitivnih primjeraka i zbira pravilno klasificiranih pozitivnih primjeraka te pogrešno klasificiranih pozitivnih primjeraka, odziv se izračunava izrazom:

$$Odziv = \frac{TP}{(TP + FN)}. \tag{A.4}$$

Preciznost i osjetljivost su kriteriji koji imaju inverzan odnos. Ovi kriteriji nisu osjetljivi na promjene u distribuciji podataka.

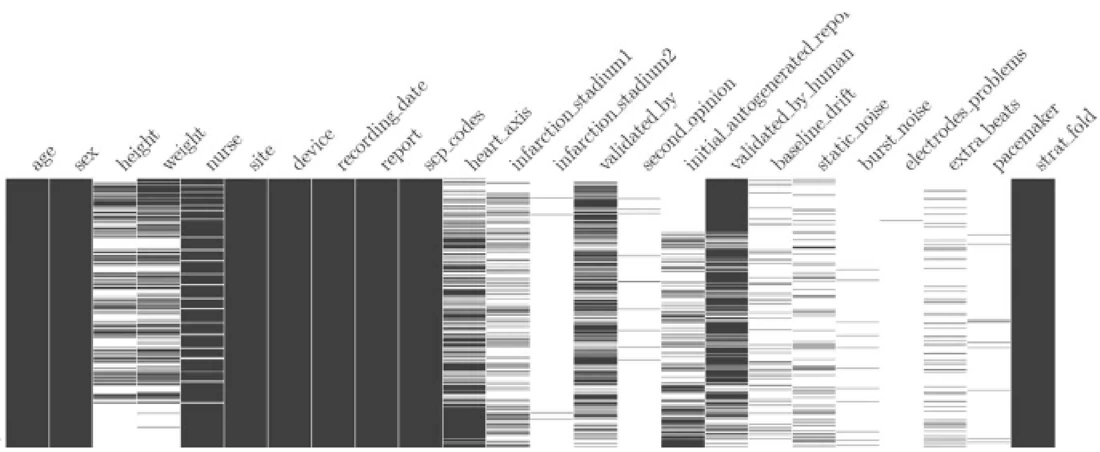
- F1 mjera (*engl. F1 score*): kombinira preciznost i odziv, F1 mjera je definirana kao harmonijska sredina preciznosti i odziva, F1 mjera se izračunava sljedećim izrazom:

$$F1 = \frac{2TP}{(2TP + FN + FP)}. \tag{A.5}$$

F1 mjera se koristi za ocjenjivanje performansi metoda strojnog učenja (rezultata) ako se razmatra neizbalansirani set podatka.

Opisani kriteriji su korišteni za vrednovanje metoda nadziranog strojnog učenja u radu.

Baza podataka je javno dostupna kao baza podataka na stranici PhysioNet [75], zajedno s objavljenim radom na temu strukture dostupnih podataka u časopisu Nature Scientific Data [74]. Baza podataka je razvijena kroz znanstveno-istraživački projekt [18]. Baza podatka, u trenutku objavljivanja, predstavlja najveću besplatnu kliničku bazu podataka za 12-kanalni EKG. Baza podataka [74] je znanstvena baza podataka što znači da su podaci na sistematičan način prikupljani, obrađivani i sortirani. Metapodaci za zapise su dostupni u csv. (*engl. comma separated values*) formatu. Metapodaci su zapisani u 28 kolona. Ovi podaci pružaju dodatne informacije vezane za EKG signal (godina rođena pacijenta, težina pacijenta, uređaj, spol pacijenta, medicinsko osoblje, itd.). Ukupan broj zapisa je 21 837 od 18 885 pacijenata. Na slici A.2 su predstavljeni metapodaci koji su sastavni dio bilo kojeg zapisa koji čini ovu bazu podatka. Metapodaci uključuju spol



Slika A.2: Metapodaci baze podataka [74]

pacijenta (52 % osoba muško spola i 48 % osoba ženskog spola), visina pacijenata (zabilježena vrijednost visine za 32 % zapisa), težina pacijenata (zabilježena vrijednost visine za 43 % zapisa), starosna dob pacijenata u trenutku kreiranja zapisa (vrijednost središnjih podatka godina je 62 godine), raspon godina pacijenata je u opsegu od 0 godina do 95 godina, oznake medicinskog osoblja koje je kreiralo zapise (12 osoba), mjesto kreiranja zapisa (51 lokacija), korišteni uređaj, datum kreiranja zapisa, stanje bolesti srca, za uporabu metoda strojnog učenja preporučeni su folderi za testne podatke i trening podatke, pet glavnih klasa bolesti srca, itd. Baza podatka je validirana od strane kardiologa (preko 77 %), a ostatak podataka je validiran uz uporabu EKG algoritama. Baza podatka sadrži metapodatke i kod za preuzimanje zapisa za potrebe istraživanja.

A.3. Metoda potpornih vektora – Blok kod 1

```
path="..." # pozivanje podataka
labels={'Normal':0, 'AVBlock':1, 'LBBB':2, 'RBBB':3} # klase
lead='lead' # promatrani lead
for val in range(1,6): # peterostruka provjera
    test_folds=np.mod((2*val,2*val+1),10)+1
    training_folds=np.setdiff1d(range(1,11),test_folds)
    X_train=[]
    y_train=[]
    X_test= []
    y_test= []
    # kreiranje trening podataka
    for key in labels.keys():
        for fold in training_folds:
            filenames=(glob(path+key+'\\'+'Fold'+str(fold)+'\\*.csv'))
            for file in filenames:
                df=(pd.read_csv(file,header=None).to_numpy())
                X_train.append(df)
                y_train.append(labels[key])
    # kreiranje test podataka
    for key in labels.keys():
        for fold in test_folds:
            filenames=(glob(path+key+'\\'+'Fold'+str(fold)+'\\*.csv'))
            for file in filenames:
                df=(pd.read_csv(file,header=None).to_numpy())
                X_test.append(df)
                y_test.append(labels[key])
    # trening podaci
    X_train=np.concatenate([X_train],axis=1)
    y_train=np.concatenate([y_train],axis=0)
    # testni podaci
```

```
    X_test=np.concatenate([X_test],axis=1)
    y_test=np.concatenate([y_test],axis=0)
nameMatrix = open('confusionMatrixSignal'+lead,'a')
def svm(X_train,X_test,y_train,y_test): # strojno učenje
    clf=LinearSVC(C=0.1,random_state=0,max_iter=1000,dual=False)
    clf.fit(X_train,y_train)
    y_pred=clf.predict(X_test)
    matrix=confusion_matrix(y_test,y_pred,labels=clf.classes_)
    disp=ConfusionMatrixDisplay(confusion_matrix=matrix,display_labels)
    disp.plot(values_format='.4g',cmap=plt.cm.Blues)
    plt.show()
    matrix=multilabel_confusion_matrix(y_test,y_pred)
    figure,axes=plt.subplots(2,2,figsize=(10,10))
    axes=axes.ravel()
    for i in range(4):
        disp=ConfusionMatrixDisplay(matrix[i],display_labels=['all',i])
        disp.plot(ax=axes[i],values_format='.4g',cmap=plt.cm.Blues)
        disp.ax_.set_title(f'class {i}')
        if i==0 or i==1:
            disp.ax_.set_xlabel('')
        if i==1 or i==3:
            disp.ax_.set_ylabel('')
        disp.im_.colorbar.remove()
        plt.subplots_adjust(wspace=0.15,hspace=-0.15)
    figure.colorbar(disp.im_,ax=axes)
    plt.show()
    matrix=classification_report(y_test,y_pred)
    nameMatrix.write(str(folds)+' '+lead+'\n'+matrix+'\n')
svm(X_train[:,:,:],X_test[:,:,:],y_train,y_test)
nameMatrix.close()
```

A.4. Metoda potpornih vektora – Blok kod 2

```
path="..." # pozivanje podataka
labels={'Normal':0, 'AVBlock':1, 'LBBB':2, 'RBBB':3} # klase
lead='lead' # promatrani lead
for val in range(1,6):# peterostruka provjera
    test_folds=np.remainder((2*val,2*val+1),10)+1
    training_folds=np.setdiff1d(range(1,11),test_folds)
    X_train=[]
    y_train=[]
    X_test= []
    y_test= []
    for key in labels.keys():# kreiranje trening podataka
        for fold in training_folds:
            filenames=(path+key+'\\'+'feature_table_fold'+str(fold)+'_'
            +lead+'.csv')
            df=pd.read_csv(filenames,header=0).to_numpy()
            X_train.append(df)
            y_train.append(np.repeat(labels[key],40))
    for key in labels.keys(): # kreiranje testnih podataka
        for fold in test_folds:
            filenames=(path+key+'\\'+'feature_table_fold'+str(fold)+'_'
            +lead+'.csv')
            df=pd.read_csv(filenames,header=0).to_numpy()
            X_test.append(df)
            y_test.append(np.repeat(labels[key],40))
    X_train =np.concatenate([X_train],axis=1) # trening podaci
    y_train=np.concatenate([y_train],axis=0)
    X_test=np.concatenate([X_test],axis=0) # testni podaci
    y_test=np.concatenate([y_test],axis=0)
    X_train= np.reshape(X_train,(1280,12),order='C') # trening podaci
    y_train= np.reshape(y_train,(1280,),order='C')
```

```
    X_test= np.reshape(X_test,(320,12),order='C') # testni podaci
    y_test= np.reshape(y_test,(320,),order='C')
nameMatrix = open('confusionMatrixInterval'+lead,'a')
def svm(X_train,X_test,y_train,y_test): # strojno učenje
    clf=LinearSVC(C=1,random_state=0,max_iter=1000,dual=False)
    clf.fit(X_train,y_train)
    y_pred=clf.predict(X_test)
    matrix=confusion_matrix(y_test,y_pred,labels=clf.classes_)
    disp=ConfusionMatrixDisplay(confusion_matrix=matrix,display_labels)
    disp.plot(values_format='.4g',cmap=plt.cm.Blues)
    plt.show()
    matrix=multilabel_confusion_matrix(y_test,y_pred)
    figure,axes=plt.subplots(2,2,figsize=(10,10))
    axes=axes.ravel()
    for i in range(4):
        disp=ConfusionMatrixDisplay(matrix[i],display_labels=['all',i])
        disp.plot(ax=axes[i],values_format='.4g',cmap=plt.cm.Blues)
        disp.ax_.set_title(f'class {i}')
        if i==0 or i==1:
            disp.ax_.set_xlabel('')
        if i==1 or i==3:
            disp.ax_.set_ylabel('')
        disp.im_.colorbar.remove()
        plt.subplots_adjust(wspace=0.15,hspace=-0.15)
    figure.colorbar(disp.im_,ax=axes)
    plt.show()
    matrix=classification_report(y_test,y_pred)
    print(matrix)
    nameMatrix.write(str(folds)+' '+lead+'\n'+matrix+'\n')
svm(X_train,X_test,y_train,y_test)
nameMatrix.close()
```

A.5. Višestruka logistička regresija – Blok kod 1

```
path="..." # pozivanje podataka
labels={'Normal':0, 'AVBlock':1, 'LBBB':2, 'RBBB':3} # klase
lead='lead' # promatrani lead
for val in range(1,6):# peterostruka provjera
    test_folds=np.mod((2*val,2*val+1),10)+1
    training_folds=np.setdiff1d(range(1,11),test_folds)
    X_train=[]
    y_train=[]
    X_test= []
    y_test= []
    for key in labels.keys(): # kreiranje trening podataka
        for fold in training_folds:
            filenames=(glob(path+key+'\\'+'Fold'+str(fold)+'\\*.csv'))
            for file in filenames:
                total+=1
                df=(pd.read_csv(file,header=None).to_numpy())
                X_train.append(df)
                y_train.append(labels[key])
    for key in labels.keys(): # kreiranje testnih podataka
        for fold in test_folds:
            filenames=(glob(path+key+'\\'+'Fold'+str(fold)+'\\*.csv'))
            for file in filenames:
                total+=1
                df=(pd.read_csv(file,header=None).to_numpy())
                X_test.append(df)
                y_test.append(labels[key])
    X_train=np.concatenate([X_train],axis=1) # trening podaci
    y_train=np.concatenate([y_train],axis=0)
    X_test=np.concatenate([X_test],axis=1) # testni podaci
    y_test=np.concatenate([y_test],axis=0)
```

```
nameMatrix = open('confusionMatrixInterval'+lead,'a')
def softmax(X_train,X_test,y_train,y_test,parameter): # strojno učenje
    theta,cost_fun=softmax_regression(X_train,y_train,
    parameter,alpha=0.1,factor=0.1,k=10,iterations=100)
    plot_cost_fun(cost_fun)
    test_accuracy=compute_test_accuracy(X_test,y_test,theta,parameter)
    matrix=confusion_matrix(y_test,get_classification())
    disp=ConfusionMatrixDisplay(confusion_matrix=matrix,display_labels)
    disp.plot(values_format='.4g',cmap=plt.cm.Blues)
    plt.show()
    matrix=multilabel_confusion_matrix(y_test,get_classification())
    figure,axes=plt.subplots(2,2,figsize=(10,10))
    axes=axes.ravel()
    for i in range(4):
        disp=ConfusionMatrixDisplay(matrix[i],display_labels=['all',i])
        disp.plot(ax=axes[i],values_format='.4g',cmap=plt.cm.Blues)
        disp.ax_.set_title(f'class {i}')
        if i==0 or i==1:
            disp.ax_.set_xlabel('')
        if i==1 or i==3:
            disp.ax_.set_ylabel('')
        disp.im_.colorbar.remove()
        plt.subplots_adjust(wspace=0.15,hspace=-0.15)
    figure.colorbar(disp.im_,ax=axes)
    plt.show()
    matrix=classification_report(y_test,get_classification())
    print(matrix)
    nameMatrix.write(str(folds)+' '+lead+'\n'+matrix+'\n')
    return test_accuracy
softmax(X_train[:,:,:],X_test[:,:,:],y_train,y_test,parameter=1)
nameMatrix.close()
```

A.6. Višestruka logistička regresija – Blok kod 2

```
path="..." # pozivanje podataka
labels={'Normal':0, 'AVBlock':1, 'LBBB':2, 'RBBB':3} # klase
lead='lead' # promatrani lead
for val in range(1,6):# peterostruka provjera
    test_folds=np.remainder((2*val,2*val+1),10)+1
    training_folds=np.setdiff1d(range(1,11),test_folds)
    X_train=[]
    y_train=[]
    X_test= []
    y_test= []
    for key in labels.keys(): # kreiranje trening podataka
        for fold in training_folds:
            filenames=(path+key+'\\'+'feature_table_fold'+str(fold)+'_'
            +lead+'.csv')
            df=pd.read_csv(filenames,header=0).to_numpy()
            X_train.append(df)
            y_train.append(np.repeat(labels[key],40))
    for key in labels.keys():# kreiranje testnih podataka
        for fold in test_folds:
            filenames=(path+key+'\\'+'feature_table_fold'+str(fold)+'_'
            +lead+'.csv')
            df=pd.read_csv(filenames,header=0).to_numpy()
            X_test.append(df)
            y_test.append(np.repeat(labels[key],40))
    X_train =np.concatenate([X_train],axis=1) # trening podaci
    y_train=np.concatenate([y_train],axis=0)
    X_test=np.concatenate([X_test],axis=0) # testni podaci
    y_test=np.concatenate([y_test],axis=0)
    X_train= np.reshape(X_train,(1280,12),order='C') # trening podaci
    y_train= np.reshape(y_train,(1280,),order='C')
```

```
    X_test= np.reshape(X_test,(320,12),order='C') # testni podaci
    y_test= np.reshape(y_test,(320,),order='C')
nameMatrix = open('confusionMatrixInterval'+lead+'.txt','a')
def softmax(X_train,X_test,y_train,y_test,parameter): # strojno učenje
    sc=StandardScaler()
    X_train=sc.fit_transform(X_train)
    X_test = sc.fit_transform(X_test)
    theta,cost_fun=softmax_regression(X_train,y_train,
    parameter,alpha=0.1,factor=0.1,k=10,iterations=100)
    plot_cost_fun(cost_fun)
    test_accuracy=compute_test_accuracy(X_test,y_test,theta,parameter)
    matrix=confusion_matrix(y_test,get_classification())
    disp=ConfusionMatrixDisplay(confusion_matrix=matrix,display_labels)
    disp.plot(values_format='.4g',cmap=plt.cm.Blues)
    plt.show()
    matrix=multilabel_confusion_matrix(y_test,get_classification())
    figure,axes=plt.subplots(2,2,figsize=(10,10))
    axes=axes.ravel()
    for i in range(4):
        disp=ConfusionMatrixDisplay(matrix[i],display_labels=['all',i])
        disp.plot(ax=axes[i],values_format='.4g',cmap=plt.cm.Blues)
        disp.ax_.set_title(f'class {i}')
        if i==0 or i==1:
            disp.ax_.set_xlabel('')
        if i==1 or i==3:
            disp.ax_.set_ylabel('')
        disp.im_.colorbar.remove()
        plt.subplots_adjust(wspace=0.15,hspace=-0.15)
    figure.colorbar(disp.im_,ax=axes)
    plt.show()
    matrix=classification_report(y_test,get_classification())
    print(matrix)
```

```
    nameMatrix.write(str(folds)+' '+lead+'\n'+matrix+'\n')
    return test_accuracy
softmax(X_train,X_test,y_train,y_test,parameter=0.2)
nameMatrix.close()
```

LITERATURA

[1] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, et al. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections. BIPM; 2008.

[2] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, et al. Supplement 1 to the "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM 101:2008. BIPM; 2008.

[3] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, et al. Supplement 2 to the "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" – Extension to any number of output quantities, JCGM 102:2011. BIPM; 2011.

[4] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, et al. Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Models with any number of output quantities, JCGM 102:2011. BIPM; 2011.

[5] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, et al. Evaluation of measurement data – An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" and related documents, JCGM 104:2009. BIPM; 2009.

[6] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, et al. Evaluation of measurement data – The role of measurement uncertainty in conformity assessment, JCGM 106:2012. BIPM; 2012.

[7] Kool W. JCGM Survey (GUM) – Collated responses. Paris (FR): Bureau international des poids et mesures (BIPM); 2012. JCGM Technical Report.

[8] Bich W. Report on the GUM Online Survey. Paris (FR): Bureau international des poids et mesures (BIPM); 2012. JCGM Technical Report.

[9] Bich W, Cox M, Michotte C. Towards a new GUM–an update. Metrologia. 2016;53(5):S149. Available from: `http://stacks.iop.org/0026-1394/53/i=5/a=S149`.

[10] Eichstädt S, Wilkens V, Dienstfrey A, Hale P, Hughes B, Jarvis C. On challenges in the uncertainty evaluation for time-dependent measurements. Metrologia. 2016;53(4):S125. doi.10.1088/0026-1394/53/4/S125.

[11] Forbes A. Traceable Measurements using Sensor Networks. Trans Mach Learn Data Min. 2015;53(2):77-100.

[12] De los Reyes JC, Schönlieb CB, Valkonen T. The structure of optimal parameters for image restoration problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications.

2016;434(1):464-500. doi.10.1016/j.jmaa.2015.09.023.

[13] Smith M, Fahrmeir L. Spatial Bayesian variable selection with application to functional magnetic resonance imaging. Journal of the American Statistical Association. 2007;102:464-500. doi.10.1198/016214506000001031.

[14] Klauenberg K, Martens S, Bošnjaković A, Cox MG, van der Veen AMH, Elster C. The GUM perspective on straight-line errors-in-variables regression. Measurement. 2022;58:0263-2241. Available from: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224121012355.

[15] European Association of National Metrology Institutes – EURAMET. EURAMET – 2030 Strategy. 2.0. EURAMET; 2021.

[16] Final Publishable Summary: Metrology for the Factory of the Future (17IND12) [Internet]. EURAMET; 2018 [cited svib. 2021]. Available from: https://www.euramet.org/.

[17] Publishable Summary:Advancing measurement uncertainty – Comprehensive examples for key international standards (17NRM05) [Internet]. EURAMET; 2018 [cited svib. 2021]. Available from: https://www.euramet.org/.

[18] Publishable Summary: Metrology of automated data analysis for cardiac arrhythmia management (18HLT07) [Internet]. EURAMET; 2018 [cited svib. 2021]. Available from: https://www.euramet.org/.

[19] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, et al. International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms. BIPM; 2012.

[20] Wasserman L. All of Statistics. New York (USA): Springer; 2004.

[21] Casella G, Berger RL. Statistical Inference. 2nd ed. Pacific (USA): Wadsworth and Brooks; 1990.

[22] Elster C. Calculation of uncertainty in the presence of prior knowledge. Metrologia. 2007;44(2):111-6. doi.10.1088/0026-1394/44/2/002.

[23] Elster C, Link A, Woger W. Proposal for linking the results of CIPM and RMO key comparisons. Metrologia. 2003;40(4):189. Available from: http://stacks.iop.org/0026-1394/40/i=4/a=308.

[24] Cox M, Harris P. Software Support for Metrology Best Practice Guide No. 6. Uncertainty evaluation. Teddington (UK): National Physical Laboratory (NPL); 2010. Report MS 6.

[25] Bošnjaković A. Procjena Mjerene Nesigurnosti pri kalibraciji frekventno stabilizovanih He-Ne lasera [Magistarski rad]. Sarajevo: Mašinski fakultet Sarajevo; 2014.

[26] Runje B. Istraživanje mjernih nesigurnosti u postupcima umjeravanja etalona duljine [Doktorski rad]. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2002.

[27] ISO/IEC 17025 General requirements for the competence of testing and calibration laboratories. Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization; 2017.

[28] Bich W, Cox MG, Dybkaer R, Elster C, Estler WT, Hibbert B, et al. Revision of the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Metrologia. 2012;49(6):702-5. doi.10.1088/0026-1394/49/6/702.

[29] Cox M, Shirono K. Informative Bayesian Type A uncertainty evaluation, especially applicable to a small number of observations. Metrologia. 2017;54(5):642-52. doi.10.1088/1681-7575/aa787f.

[30] Van der Veen AMH. Bayesian methods for Type A evaluation of standard uncertainty. Metrologia. 2018;55(5):670-84. doi.10.1088/1681-7575/aad103.

[31] Cox M, Van der Veen AMH. Reporting measurement results. In: Van der Veen AMH, Cox M, editors. Good practice in evaluating measurement uncertainty. Teddington (UK); 2021. p. 45-55.

[32] Cox M, Van der Veen AMH. Understanding and treating correlated quantities in measurement uncertainty evaluation. In: Van der Veen AMH, Cox M, editors. Good practice in evaluating measurement uncertainty. Teddington (UK); 2021. p. 29-45.

[33] Runje B, Horvatic A, Alar V, Medic S, Bošnjaković A. Examples of measurement uncertainty evaluations in accordance with the revised GUM. Journal of Physics: Conference Series. 2016;772:012008. doi.10.1088/1742-6596/772/1/012008.

[34] Mičić Hot J, Jakšetić J. Beskonačni polinomi. Matematika 2: FSB; (Zadnji put pristupljeno: 2022). Available from: `https://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/ZS/mat1/predavanje1-Micic-Hot.pdf`.

[35] Hall BD, Willink R. Does Welch-Satterthwaite make a good uncertainty estimate? Metrologia. 2001;38(1):9-15. doi.10.1088/0026-1394/38/1/2.

[36] Bertsekas DP, Tsitsiklis JN. Introduction to Probability. 2nd ed. Cambridge (USA): MIT Press; 2020.

[37] Van der Veen AMH, Cox M. Using the Monte Carlo method. In: Van der Veen AMH,

Cox M, editors. Good practice in evaluating measurement uncertainty. Teddington (UK); 2021. p. 7-21.

[38] Grimson E, Guttag J, Ana B. Monte Carlo Simulation. 6.02X: Introduction to Computer Science and Programming Using Python: MIT; (Zadnji put pristupljeno: 2021). Available from: https://www.edx.org.

[39] Guttag J. Introduction to Computation and Programming Using Python: With Application to Computational Modeling and Understanding Data. 3rd ed. Cambridge (USA): MIT Press; 2021.

[40] Ćosić K. Priča o broju pi i 3,14 [Internet]. meanIT; ožu. 2020 - [cited svib. 2022]. Available from: https://www.meanit.hr/blog/clanak/prica-o-broju-pi-i-314/.

[41] Cox M, Harris P, Siebert BRL. Evaluation of measurement uncertainty based on the propagation of distributions using Monte Carlo simulation. Measurement Techniques. 2003;46:824-33. doi.10.1023/B:METE.0000008439.82231.ad.

[42] Eichstädt S, Link A, Harris P, Elster C. Efficient implementation of a Monte Carlo method for uncertainty evaluation in dynamic measurements. Metrologia. 2012;49(3):401-10. doi.10.1088/0026-1394/49/3/401.

[43] Harris P, Matthews C, Cox M, Forbes A. Summarizing the output of a Monte Carlo method for uncertainty evaluation. Metrologia. 2014;51(3):243-52. doi.10.1088/0026-1394/49/3/401.

[44] Wasserman L. Bayesian Inference. In: Casella G, Fienberg S, Olkin I, editors. All of Statistics. New York (USA): Springer; 2004. p. 175-93.

[45] Osvaldo M. Inference Engines. In: Nikalje S, editor. Bayesian Analysis with Python: Introduction to statistical modeling and probabilistic programming using PyMC3 and ArviZ. 2nd ed. Birmingham (UK): Packt; 2018. p. 288-323.

[46] Salvatier J, Wiecki TV, Fonnesbeck C. Probabilistic programming in Python using PyMC3. PeerJ Computer Science. 2016;2:e55. Available from: https://peerj.com/articles/cs-55.pdf.

[47] Lira I, Grientschnig D. Bayesian assessment of uncertainty in metrology: a tutorial. Metrologia. 2010;47(3):R1-R14. doi.10.1088/0026-1394/47/3/r01.

[48] Possolo A. Five examples of assessment and expression of measurement uncertainty. Applied Stochastic Models in Business and Industry. 2013;29(1):1-18. doi.https://doi.org/10.1002/asmb.1947.

[49] Willink R. Principles of probability and statistics for metrology. Metrologia. 2006;43(4):S211-9. doi.10.1088/0026-1394/43/4/s07.

[50] O'Hagan A, Forster J. Bayesian Analysis with Python: Introduction to statistical modeling and probabilistic programming using PyMC3 and ArviZ. 2nd ed. London (UK): Hodder Education Publishers; 2004.

[51] Bertsekas DP, Tsitsiklis JN. Bayesian Inference. 6.431x: Probability - The Science of Uncertainty and Data: MIT; (Zadnji put pristupljeno: 2021). Available from: `https://www.edx.org`.

[52] Osvaldo M. Thinking Probabilistically. In: Nikalje S, editor. Bayesian Analysis with Python: Introduction to statistical modeling and probabilistic programming using PyMC3 and ArviZ. 2nd ed. Birmingham (UK): Packt; 2018. p. 288-323.

[53] Wasserman L. Classification. In: Casella G, Fienberg S, Olkin I, editors. All of Statistics. New York (USA): Springer; 2004. p. 349-81.

[54] Demeyer S, Fischer N, Elster C. Guidance on Bayesian uncertainty evaluation for a class of GUM measurement models. Metrologia. 2020;58:014001. Available from: `https://doi.org/10.1088/1681-7575/abb065`.

[55] Osvaldo M. Bayesian Analysis with Python: Introduction to statistical modeling and probabilistic programming using PyMC3 and ArviZ. 2nd ed. Birmingham (UK): Packt; 2018.

[56] Thompson A, Jagan K, Sundar A, Khatry R, Donlevy J, Thomas S, et al. Uncertainty evaluation for machine learning. Teddington (UK): National Physical Laboratory (NPL); 2010. Report MS 34.

[57] Vanchurin V. Toward a theory of machine learning. Machine Learning: Science and Technology. 2021;21(3):035012. Available from: `https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2632-2153/abe6d7/pdf`.

[58] Hoffmann L, Fortmeier I, Elster C. Uncertainty quantification by ensemble learning for computational optical form measurements. Machine Learning: Science and Technology. 2021;21(3):035030. Available from: `https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2632-2153/ac0495/pdf`.

[59] Barzilay R, Jaakkola T, Chu K. Introduction. 6.86x: Machine Learning with Python: from Linear Models to Deep Learning: MIT; (Zadnji put pristupljeno: 2021). Available from: `https://www.edx.org`.

[60] Goodfellow I, Bengio Y, Courville A. Machine Learning Basics. In: Deep Learning. 2nd ed. Cambridge (USA): MIT Press; 2016. p. 96-161. Available from: http://www.deeplearningbook.org.

[61] Barzilay R, Jaakkola T, Chu K. Linear regression. 6.86x: Machine Learning with Python: from Linear Models to Deep Learning: MIT; (Zadnji put pristupljeno: 2021). Available from: https://www.edx.org.

[62] Pedregosa F, Varoquaux G, Gramfort A, Michel V, Thirion B, Grisel O, et al. Scikit-learn: Machine Learning in Python. Journal of Machine Learning Research. 2011;12:2825-30.

[63] Jagan K. Introduction to Machine Learning for Metrology. Machine Learning for Metrology: Data Science Department (NPL); (Zadnji put pristupljeno: svib. 2022). Available from: https://elearning.npl.co.uk/.

[64] Goodfellow I, Bengio Y, Courville A. Deep Learning. Cambridge (USA): MIT Press; 2016. Available from: http://www.deeplearningbook.org.

[65] Publishable Summary: Quantitative MR-based imaging of physical biomarkers (18HLT05) [Internet]. EURAMET; 2018 [cited svib. 2021]. Available from: https://www.euramet.org/.

[66] OIML. R111-1. Weights of classes E_1, E_2, F_1, F_2, M_1, M_{1-2}, M_2, M_{2-3} and M_3. Part 1: Metrological and technical requirements. International Organisation of Legal Metrology – OIML; 2004 (E).

[67] Pendrill L. Using measurement uncertainty in decision-making and conformity assessment. Metrologia. 2014;51(4):S206-18. Available from: https://doi.org/10.1088/0026-1394/51/4/s206.

[68] Allard A, Fischer N, Smith I, Harris P, Pendrill L. Risk calculations for conformity assessment in practice. Paris (FR): EDP Sciences; 2019. p. 16001. Available from: https://doi.org/10.1051/metrology/201916001.

[69] Forbes AB. Measurement uncertainty and optimized conformance assessment. Measurement. 2006;39(9):808-14. Available from: https://doi.org/10.1016/j.measurement.2006.04.007.

[70] Hinrichs W. The impact of measurement uncertainty on the producer's and user's risks, on classification and conformity assessment: an example based on tests on some construction products. Measurement. 2006;15(5):289-96. Available from: https:

//doi.org/10.1007/s00769-009-0619-3.

[71] Lira I. A Bayesian approach to the consumer's and producer's risks in measurement. Metrologia. 1999;36(5):397-402. Available from: https://doi.org/10.1088/0026-1394/36/5/1.

[72] RPM4 – Reference Pressure Monitor [Internet]; 2022 [cited svib. 2022]. Available from: https://us.flukecal.com/products/pressure-calibration/pressure-monitors/rpm4-reference-pressure-monitor?quicktabs_product_details=2.

[73] ISO 31000 – Risk management. Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization; 2018.

[74] Wagner P, Strodthoff N, Bousseljot RD, Kreiseler D, Lunze FI, Samek W, et al. PTB-XL, a large publicly available electrocardiography dataset. Scientific data. 2020;7(1):1-15. Available from: https://doi.org/10.1038/s41597-020-0495-6.

[75] Wagner P, Strodthoff N, Bousseljot RD, Samek W, Schaeffter T. PTB-XL, a large publicly available electrocardiography dataset (version 1.0.2). PhysioNet. 2022. Available from: https://doi.org/10.13026/zx4k-te85.

[76] Pilia N, Nagel C, Lenis G, Becker S, Dössel O, Loewe A. ECGdeli- An open source ECG delineation toolbox for MATLAB. SoftwareX. 2021;13:100639. Available from: https://doi.org/10.1016/j.softx.2020.100639.

[77] Goldberger AL, Goldberger ZD, Shvilkin A. Clinical electrocardiography: A simplified approach. 9th ed. Philadelphia(USA): Elsevier; 2018.

[78] Nagel C, Pilia N, Loewe A, Dössel O. Quantification of Interpatient 12-lead ECG Variabilities within a Healthy Cohort. Current Directions in Biomedical Engineering. 2020;6(3):493-6. doi.doi:10.1515/cdbme-2020-3127.

[79] Aston PJ, Mehari T, Bošnjaković A, Harris PM, Sundar A, Williams SE, et al. Cardiologists vs. algorithms. Computing in Cardiology. 2022.

[80] Tošić M. Modeli za potporu pri odlučivanju o raspoloživosti zrakoplova temeljen dubinske analize podataka [Doktorski rad]. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2017.

[81] Bekkar M, Djemaa HK, Alitouche TA. Evaluation measures for models assessment over imbalanced data sets. Journal of Information Engineering and Applications. 2013;Vol.3, No.10.

ŽIVOTOPIS

Alen Bošnjaković rođen je 1981. godine u Vlasenici, Bosna i Hercegovina. Nakon završetka Srednje Mašinske Tehničke škole u Sarajevu 1999. godine upisuje Mašinski fakultet u Sarajevu, Univerzitet u Sarajevu, smjer Proizvodna tehnika i kibernetika. Nakon završetka Fakulteta započinje svoju karijeru diplomiranoga inženjera u realnom sektoru. Magistarski studij upisao je 2008. godine na Mašinskom fakultetu u Sarajevu, Univerzitet Sarajevo, smjer Savremene proizvodne tehnike. Upoznaje se s temeljnim znanjima iz područja mjeriteljstva tijekom studija, a od 2011. godine postaje zaposlenik Instituta za mjeriteljstvo Bosne i Herecegovine. Doktorski studij Strojarstvo, brodogradnja, zrakoplovstvo, metalurgija je upisao 2014. godine na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu, smjer Znanstveno mjeriteljstvo u strojarstvu. Predstavlja Institut za mjeriteljstvo Bosne i Hercegovine u različitim tijelima Europskog saveza nacionalnih mjeriteljskih instituta (EURAMET): član je Radne grupe za istraživanje i razvoj, član Evropske mjeriteljske mreže za matematiku i statistiku (MATHMET), član Tehničkog komiteta za masu i srodne veličine (TC-M) – podgrupa za tlak (SC-P) i član Radne grupe za digitalnu transformaciju u mjeriteljstvu (WG-M4D). Učestvuje u različitim znanstveno-istraživačkim projektima koji se bave suvremenim znanstvenim temama kao što su: izračun mjerne nesigurnosti, primjena mjeriteljskih principa u strojnom učenju i principa strojnog učenja u mjeriteljstvu, te digitalne transformacije u mjeriteljstvu. Autor je i koautor više znanstvenih radova, te je izlagao na više znanstvenih konferencija. Aktivno se služi engleskim jezikom u govoru i pisanju. Nosilac je crnog pojasa prvi nivo za borilačke vještine Aikijutsu i Jujutsu i član Aikido Jujutsu kluba Shindokan iz Sarajeva.

BIOGRAPHY

Alen Bošnjaković was born in 1981 in Vlasenica, Bosnia and Herzegovina. After graduating the High Mechanical Technical School in 1999 in Sarajevo, he enrolled to the Faculty of Mechanical Engineering Sarajevo, University Sarajevo, Department: Production Technique and Cybernetics. After finishing the university, he started building his career in the real sector. In 2008, he started the master study at the Faculty of Mechanical Engineering Sarajevo, University Sarajevo, Department: Contemporary Production Techniques. During his study, he gained essential knowledge about metrology and became the Institute of Metrology of Bosnia and Herzegovina's employee in 2011. Furthermore, in 2014, he started the doctoral study at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, Department: Scientific Metrology in Mechanical Engineering. Additionally, he represents the Institute of Metrology Bosnia and Herzegovina in different working groups within European Association of National Metrology Institutes (EURAMET), as follows: EMPIR Committee WG, Technical Committee for Mass and Related Quantities (TC-M) – Subcommittee for Pressure (SC-P), Working Group on Metrology for Digital Transformation. Metrology (WG-M4D) and European Metrology Network for Mathematics and Statistics (MATHMET). So far, he has participated in different scientific research projects regarding contemporary scientific topics such as: quantifying measurement uncertainty, applying metrology principles in machine learning and machine learning principles in metrology, and digital transformation in metrology. Furthermore, he is an author and co-author of a few scientific papers and participated in a few scientific conferences. He has proficiency in the English Language at the C1 level. In addition to this, he has the first level of black belt in the martial arts Aikijutsu and Jujutsu, and he is a member of the Jujutsu Club Shindokan Sarajevo.