

# Decentralizirano upravljanje skupom povezanih inverznih njihala sa zamašnjacima

---

Šunjić, Luka

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:793363>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-05-12**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE  
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

Završni rad

***Decentralizirano upravljanje skupom  
povezanih inverznih njihala sa  
zamašnjacima***

Mentor: *Prof. dr. sc. Andrej Jokić*

Ime i prezime: *Luka Šunjić*  
Matični broj: 0035211773

Zagreb, 2021/2022

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Andreju Jokiću na dostupnosti, pristupačnosti, savjetima i pomoći prilikom izrade ovog završnog rada.

Zahvaljujem se svojoj obitelji, prijateljima i djevojci na podršci i strpljenju tijekom studiranja. Također se zahvaljujem svim kolegama s faksa koji su mi na bilo koji način pomogli tijekom studiranja.

Luka Šunjić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Luka Šunjić**

JMBAG: **0035211773**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Decentralizirano upravljanje skupom povezanih inverznih njihala sa zamašnjacima**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Decentralized control of a set of interconnected inverted pendulums with flywheels**

Opis zadatka:

Inverzna njihala često su korištena kao laboratorijski sustavi za testiranje efikasnosti upravljačkih algoritama. Radi se o relativno jednostavnim mehaničkim sustavima koje pak karakterizira prilično kompleksna, nestabilna i nelinearna dinamika. U ovom radu razmatrat će se inverzna njihala kod kojih se kao aktuator za stabilizaciju i upravljanje koristi zamašnjak koji je, zajedno s elektromotorom za njegovo pokretanje, postavljen na jedan kraj njihala dok je na drugom kraju njihalo preko ležaja spojeno s podlogom. Razmatrat će se skup ovakvih njihala koja su međusobno povezana oprugama čineći kompleksan dinamički sustav. Osnovni cilj rada je izvesti sintezu skupa decentraliziranih regulatora koji stabiliziraju njihala uzimajući u obzir njihove međusobne interakcije. Pod pojmom decentraliziranih regulatora misli se na to da je svako njihalo upravljano jednim lokalnim regulatorom koje ima pristup mjerenjima fizikalnih veličana samo s tog njihala te može koristiti aktuator samo tog njihala.

U ovom radu potrebno je ostvariti sljedeće:

- Izvesti i predstaviti matematički model dinamike povezanih inverznih njihala.
- Nelinearan model skupa povezanih njihala linearizirati oko željene ravnotežne točke i predstaviti model prikladan za sintezu linearnih regulatora.
- Sintetizirati prikladan centralizirani regulator koji stabilizira promatrani (linearizirani) model i koji ostvaruje zadovoljavajuće smanjenje utjecaja poremećajnih sila/momenata na pomake njihala.
- Koristeći strukturiranu (aditivnu) kvadratnu Ljapunovljevu funkciju za cijeli skup njihala, sintetizirati decentralizirane regulatora za stabilizaciju sustava.
- U simulacijama usporediti ponašanje decentralizirano upravljanog sustava s centralizirano upravljanim. Analizirati robusnost centralizirano i decentralizirano upravljanog sustava s obzirom na promjene u vezama između njihala.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

30. 11. 2021.

1. rok: 24. 2. 2022.  
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
3. rok: 22. 9. 2022.

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Andrej Jokić

Prof. dr. sc. Branko Bauer

# Sadržaj

<b>Popis slika</b>	<b>I</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>II</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>III</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Matematički model sustava</b>	<b>2</b>
2.1 Euler-Lagrangeova metoda . . . . .	3
2.2 Produljenje opruge . . . . .	4
2.3 Kinetička energija . . . . .	7
2.4 Potencijalna energija . . . . .	8
2.5 Dinamički model sustava . . . . .	8
2.6 Linearizacija sustava . . . . .	16
2.7 Prostor stanja . . . . .	17
2.8 Parametri sustava . . . . .	21
2.9 Provjera stabilnosti pomoću polova sustava . . . . .	23
<b>3 Regulacija sustava</b>	<b>24</b>
3.1 Linear Quadratic Regulator (LQR) . . . . .	24
3.1.1 Upravlјivost (eng. <i>Controllability</i> ) . . . . .	25
3.1.2 Osmotrivost (eng. <i>Observability</i> ) . . . . .	26
3.1.3 Simulacija sustava . . . . .	26
3.1.4 Stabilnost zatvorenog linearnog sustava sa LQR-om . . . . .	31
3.2 Ljapunovljeva funkcija . . . . .	32
<b>4 Usporedba centraliziranog i decentraliziranog upravljanja</b>	<b>42</b>
4.1 Analiza robusnosti centralizirano i decentrilizirano upravljanoг su- stava . . . . .	46
<b>5 Zaključak</b>	<b>51</b>
<b>Literatura</b>	<b>52</b>
<b>Prilog</b>	<b>53</b>

## Popis slika

1	Grafički prikaz sustava skupa inverznih njihala povezanih oprugama . . . . .	2
2	Grafički prikaz inverznih njihala povezanih nerastegnutim oprugama . . . . .	4
3	Grafički prikaz inverznih njihala povezanih rastegnutim oprugama . . . . .	4
4	Prikaz polova sustava . . . . .	23
5	Sustav u zatvorenom krugu . . . . .	24
6	Shema zatvorenog linearnog sustava sa LQR-om . . . . .	24
7	Prikaza bloka prostora stanja sa označenim poljem za početne uvjete . . . . .	28
8	Prikaz linearnog modela u zatvorenom krugu s LQR-om u <i>Simulink</i> -u . . . . .	29
9	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 1 u LQR regulaciji . . . . .	29
10	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 2 u LQR regulaciji . . . . .	30
11	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 3 u LQR regulaciji . . . . .	30
12	Prikaz polova linearnog zatvorenog sustava sa LQR-om . . . . .	31
13	Shema zatvorenog kruga . . . . .	33
14	<i>Yalmip</i> kod za centralizirano upravljanje u programskom paketu <i>MATLAB</i> . . .	36
15	<i>Yalmip</i> kod za decentralizirano upravljanje u programskog paketa <i>MATLAB</i> . .	37
16	Dobivena greška nakon pokušaja rješavanja optimizacijskog problema pomoću <i>Yalmip</i> -a . . . . .	38
17	Prikaz linearnog modela u zatvorenom krugu upravljanog Ljapunovljevim kontrolerom . . . . .	39
18	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 1 u decentraliziranoj Ljapunovljevoj regulaciji	40
19	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 2 u decentraliziranoj Ljapunovljevoj regulaciji	40
20	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 3 u decentraliziranoj Ljapunovljevoj regulaciji	41
21	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 1 u LQR regulaciji za $c = 0,1 \text{ N/m}$ . . . .	42
22	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 2 u LQR regulaciji za $c = 0,1 \text{ N/m}$ . . . .	42
23	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 3 u LQR regulaciji za $c = 0,1 \text{ N/m}$ . . . .	43
24	Usporedba kutova zakreta Njihala 1 za $c = 0,1 \text{ N/m}$ . . . . .	43
25	Usporedba kutova zakreta Njihala 2 za $c = 0,1 \text{ N/m}$ . . . . .	44
26	Usporedba kutova zakreta Njihala 3 za $c = 0,1 \text{ N/m}$ . . . . .	44
27	Usporedba kutova zakreta Njihala 1 za $c = 5 \text{ N/m}$ . . . . .	46
28	Usporedba kutova zakreta Njihala 2 za $c = 5 \text{ N/m}$ . . . . .	47
29	Usporedba kutova zakreta Njihala 3 za $c = 5 \text{ N/m}$ . . . . .	47
30	Usporedba kutova zakreta Njihala 1 za $c = 15 \text{ N/m}$ . . . . .	48
31	Usporedba kutova zakreta Njihala 2 za $c = 15 \text{ N/m}$ . . . . .	48
32	Usporedba kutova zakreta Njihala 3 za $c = 15 \text{ N/m}$ . . . . .	49
33	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 1 u LQR regulaciji za $c = 40 \text{ N/m}$ . . . .	49
34	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 2 u LQR regulaciji za $c = 40 \text{ N/m}$ . . . .	50
35	Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 3 u LQR regulaciji za $c = 40 \text{ N/m}$ . . . .	50

**Popis tablica**

1	Tablica parametara . . . . .	21
2	Tablica početnih uvjeta . . . . .	28

## Popis oznaka

<b>A</b>	– matrica koeficijenata ulaza
<b>B</b>	– matrica ulaza sustava
<b>B<sub>r</sub></b>	– matrica reguliranih ulaza
<b>C</b>	– vektor Coriolisovih i centrifugalnih djelovanja
<b>C</b>	– matrica izlaza sustava
<i>c</i>	– konstanta krutosti opruge
<b>D</b>	– matrica prijenosa sustava
<b>G</b>	– vektor gravitacijskih djelovanja
<b>H</b>	– matrica inercija
<i>i</i>	– struja elektromotra
<i>J</i>	– problem optimalnog upravljanja
<i>J<sub>N</sub></i>	– moment inercije njihala
<i>J<sub>Z</sub></i>	– moment inercije zamašnjaka
<b>K</b>	– matrica kontrolera
<i>K</i>	– ukupna kinetička energija
<i>K<sub>a</sub></i>	– pojačanje elektromotora
<i>K<sub>N</sub></i>	– kinetička energija njihala
<i>K<sub>Z</sub></i>	– kinetička energija zamašnjaka
<b>L</b>	– supstitucijska matrica
<i>L</i>	– Lagrangian
<i>L<sub>H</sub></i>	– udaljenost hvatišta opruge od okretišta njihala
<i>L<sub>i</sub></i>	– induktivitet i-tog njihala
<i>L<sub>N</sub></i>	– udaljenost centra mase njihala
<i>L<sub>O</sub></i>	– udaljenost okretišta njihala
<i>L<sub>Z</sub></i>	– udaljenost centra mase zamašnjaka
<i>M</i>	– konstanta elektromotora
<i>m</i>	– broj ulaznih varijabli
<i>m<sub>N</sub></i>	– masa njihala
<i>m<sub>Z</sub></i>	– masa zamašnjaka
<i>n</i>	– broj varijabli stanja (red sustava)
<b>P</b>	– matrica optimizacije funkcije
<i>p</i>	– broj izlaznih varijabli
<i>p</i>	– polovi sustava
<i>P</i>	– ukupna potencijalna energija
<i>P<sub>N</sub></i>	– potencijalna energija njihala
<i>P<sub>O</sub></i>	– potencijalna energija opruge
<i>P<sub>Z</sub></i>	– potencijalna energija zamašnjaka
<b>Q</b>	– matrica težina stanja linearnog kvadratično regulatora



$\mathbf{q}$	– vektor upravljačkih koordinata
$q_i$	– i-ta upravljana koordinata
$\dot{q}_i$	– brzina i-te upravljane koordinate
$\mathbf{R}$	– matrica težina ulaza linearnog kvadratičnog regulatora
$R$	– otpor armature
$T_i$	– ukupni moment u i-toj upravljanoj koordinati
$u$	– napon elektromotora
$u(t)$	– vektor ulaza
$v(x)$	– Ljapunvoljeva funkcija
$x(t)$	– vektor stanja sustava
$\dot{x}(t)$	– derivacija vektora stanja $x$
$\mathbf{Y}$	– supstitucijska matrica
$y(t)$	– vektor izlaza sustava
$\theta$	– kut zakreta njihala
$\dot{\theta}$	– brzina kut zakreta njihala
$\ddot{\theta}$	– ubrzanje kuta zakreta njihala
$\tau$	– moment zamašnjaka
$\tau_\theta$	– poremaćaji koji djeluju na sustav
$\varphi$	– kut zakreta zamašnjaka
$\dot{\varphi}$	– brzina kut zakreta zamašnjaka
$\ddot{\varphi}$	– ubrzanje kuta zakreta zamašnjaka

# 1. Uvod

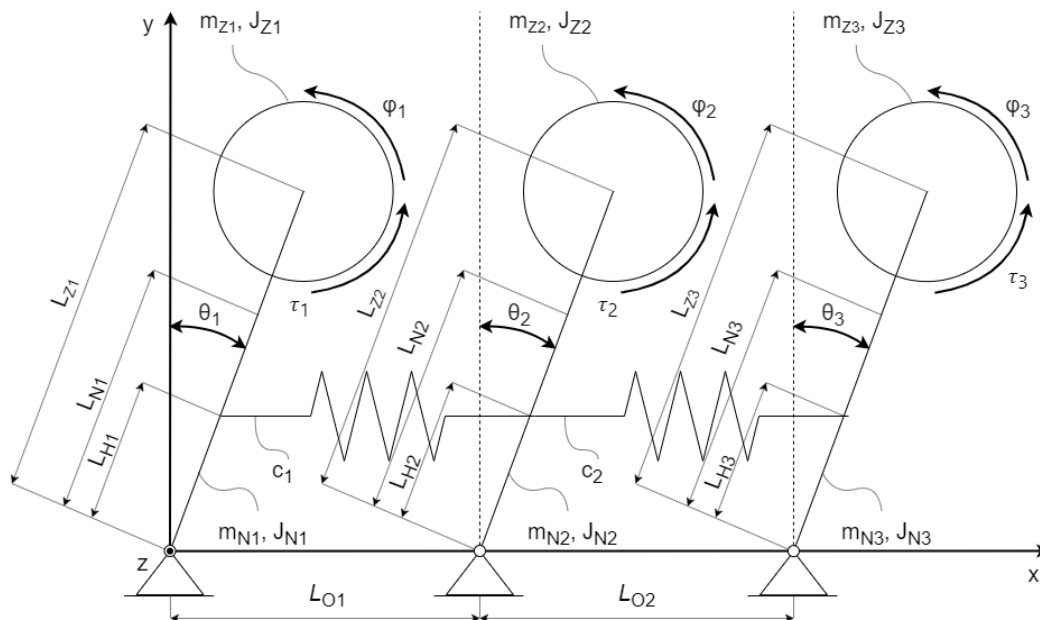
U ovom radu analizirat će se upravljanje jednog dosta zanimljivog modela, koji može poslužiti kao prikaz mnogobrojnih procesa regulacije. Oko nas postoji neizmjereno puno kompleksnih sustavi koje je potrebno regulirati. Radi se o sustavima čije su komponente raspodjeljene tako da su jedna od drugo podosta udaljene. Primjer ovoga bi bio nekakav sustav dalekovoda. Kako bi se takav sustav regulirao? Bi li se regulirao na način da se napon na svakom vodu mjeri, šalje u nekakvu bazu iz koje nekakav veliki regulator upravlja svim naponima? Ovakav pristup regulacije bio bio praktički nemoguć. Stoga će se pomoću modela koji će se detaljno pojasniti u ovom radu, prikazati kako bi se jedan takav sustav mogao regulirati.

Započet će se grafičkim prikazom modela sustava. Na grafičkom prikazu će se označiti sve potrebno mjere, čija će uloga biti pojašnjenje dalje u radu. Slijedi pojašnjenje produljenja opruga i kako se dolazi do konačnog izraza za produljenje opruga. Opruge služe kao dodatna nestabilnost sustava koja komplicira regulaciju. Ta nestabilnost ili ograničenje kasnije će imati vitalnu ulogu kod regulacije. Zatim slijedi pojašnjenje Euler-Lagrangeove metode kojom će se matematički prikazati model. Za izračun matematičkog modela potrebno je izračunati ukupne kinetičke i potencijalne energije sustava. Dobiveni model bit će nelinearan koji će se zatim morati linearizirati kako bi se mogao programskim alatima obraditi. Dobivene linearizirane jednadžbe zatim će se prikazati u posebnom obliku: prostor stanja. Kad se dobije sustav u obliku stanja, vrlo lako će se provjeriti je li sustav stabilan. Očekivano je da će, s obzirom da je nereguliran, sustav biti nestabilan. Za regulaciju će se koristiti LQR, tip regulatora koji je idealan za modele poput ovoga. Regulacija ovim regulatorom bit će centralizirana i služiti će kasnije u radu za usporedbu pristupa regulaciji. Kako bi se dobila decentralizirana regulacija, koristit će se Ljapunovljeva funkcija pomoću koje će se dobiti zasebni kontroleri za svako njihalo. Za kraj će se usporediti odzivi ovih sustava i objasniti će se opažanja. Odnosno, pojasniti će se kako ova dva tipa regulacije utječu na odzive.

Sve navedeno bit će popraćeno jednadžbama, slikama, tablicama i izvorima. Treba naglasiti kako će kod programskog paketa *MATLAB* koji je korišten pri rješavanju kompleksnijih izračuna biti predočen u prilogu. Uz to treba napomenuti da (u virtualnoj verziji) klikom na citat izraza, slike ili literature, file će automatski prebaciti na citat istih, što olakšava čitanje i praćenje rada.

## 2. Matematički model sustava

Za početak će se grafički prikazati model sustava sa svim oznakama potrebnim za proračun modela:



Slika 1: Grafički prikaz sustava skupa inverznih njihala povezanih oprugama

Gdje je:

- $\varphi$  - kuta zakreta zamašnjaka
- $\tau$  - moment zamašnjaka koji daje elektromotor
- $\theta$  - kut zakreta njihala
- $c$  - konstanta krutosti opruge
- $L_H$  - udaljenost hvatišta opruge sa inverznim njihovima
- $m_N$  - masa njihala
- $J_N$  - moment inercije njihala
- $L_N$  - udaljenost centra mase njihala
- $L_O$  - udaljenost između okretišta njihala
- $m_Z$  - masa zamašnjaka
- $J_Z$  - moment inercije zamašnjaka
- $L_Z$  - udaljenost centra mase zamašnjaka

Ideja zamašnjaka je da će oni svojim kutnim ubrzanjima (uzrokovanih od strane elektromotra) stvarati moment koji će njihala 'tjerati' u stabilan položaj, odnosno položaj u kojima kutovi zakreta  $\theta$  iznose nula.

## 2.1. Euler-Lagrangeova metoda

Dinamički model sustava je skup diferencijalnih jednačbi koje aproksimiraju ponašanje modela sustava. Za dobivanje diferencijalnih jednačbi koristit će se Euler-Lagrangeova metoda. Opći zapis Lagrangiana glasi:

$$L = K - P \quad (2.1)$$

Gdje je:

- $L$  - Lagrangian
- $K$  - ukupna kinetička energija sustava
- $P$  - ukupna potencijalna energija sustava

Opći zapis Euler-Lagrangeove jednačbe glasi:

$$T_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.2)$$

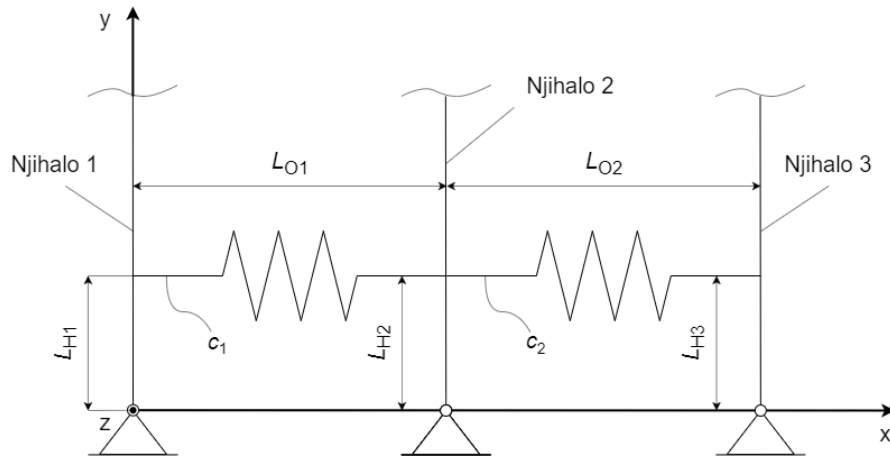
Gdje je:

- $q_i$  -  $i$ -ta upravljana koordinata
- $\dot{q}_i$  - brzina  $i$ -te upravljane koordinate
- $T_i$  - ukupni moment u  $i$ -toj upravljanoj koordinati

Kako bi se izračunao Lagrangian, potrebno je izračunati ukupnu kinetičku i potencijalnu energiju sustava. Veliki utjecaj na njihala imat će opruge, točnije potencijalna energija kojom će djelovati na sustav. U sljedećem dijelu će se detaljno pojasniti kako će se izračunati produljenja opruga pa tako i njihova potencijalna energija.

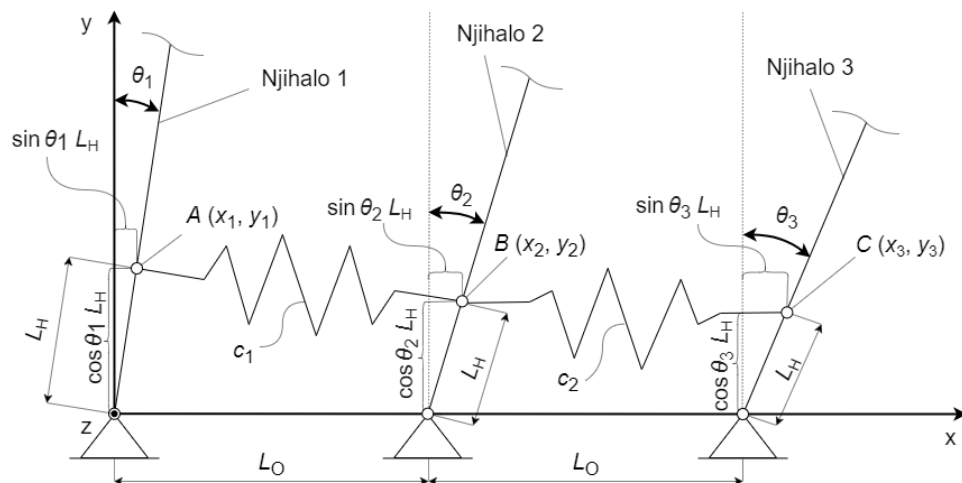
## 2.2. Produljenje opruge

Kako bi se izrazio utjecaj opruga prvo će se morati grafički prikazati situacija u kojoj su opruge u nerastegnutom stanju:



Slika 2: Grafički prikaz inverznih njihala povezanih nerastegnutim oprugama

Na slici se vidi kako prva opruga ima duljinu jednakoj udaljenosti između prva dva njihala;  $L_{O1}$ , dok druga opruga ima duljinu jednakoj udaljenosti između drugo i trećeg inverznog njihala;  $L_{O2}$ . Zbog pojednostavljanja postaviti će uvjet jednakosti udaljenosti između njihala i jednakost udaljenosti hvatišta opruga:  $L_{O1} = L_{O2} = L_O$  i  $L_{H1} = L_{H2} = L_{H3} = L_H$ . Ovom jednakosti se također postavlja da su opruge jednakke duljine u nerastegnutom stanju. Može se također zaključiti da su opruge nerastegnute ako je  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ . Sada je potrebno prikazati slučaj u kojem su opruge rastegnute:



Slika 3: Grafički prikaz inverznih njihala povezanih rastegnutim oprugama

Kako bi se došlo do iznosa produljenja opruge  $x$ , potrebno je izračunati duljinu rastegnute opruge. Za izračun duljine rastegnute opruge koristit će se formula za udaljenost dviju točaka:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.3)$$

Prvo će se izračunati duljina  $|AB|$ , odnosno duljina prve rastegnute opruge. U formulu (2.3) se uvrstavaju koordinate točaka  $A$  i  $B$ :

$$|AB| = \sqrt{[\sin \theta_1 L_H - (L_O + \sin \theta_2 L_H)]^2 + (\cos \theta_1 L_H - \cos \theta_2 L_H)^2} \quad (2.4)$$

Nakon sređivanja, dobije se izraz:

$$|AB| = \sqrt{L_O^2 + 2L_O L_H (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + 2L_H^2 (1 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2)} \quad (2.5)$$

Produljenje prve opruge  $x_1$  razlika je između duljine produljene opruge  $|AB|$  i opruge u nerastegnutom stanju  $L_O$ :

$$x_1 = \sqrt{L_O^2 + 2L_O L_H (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + 2L_H^2 (1 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2)} - L_O \quad (2.6)$$

Zbog jednostavnijeg računanja, ovaj izraz će se odmah linearizirati. Linearizacijom će se dobiti linearna ovisnost produljenja  $x_1$  o kutovima zakreta njihala  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Formula za linearizaciju glasi:

$$x_1 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \right)_{\theta_1=\theta_2=0} \cdot \theta_1 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \right)_{\theta_1=\theta_2=0} \cdot \theta_2 \quad (2.7)$$

Nakon deriviranja i sređivanja, dobit će se linearna jednadžba za produljenje prve opruge  $x_1$ :

$$x_1 = L_H (\theta_2 - \theta_1) \quad (2.8)$$

Sada je potrebno napraviti isto za drugu oprugu. Računa se duljina  $|BC|$ :

$$|BC| = \sqrt{\left[(L_O + \sin \theta_2 L_H) - (2L_O + \sin \theta_3 L_H)\right]^2 + (\cos \theta_2 L_H - \cos \theta_3 L_H)^2} \quad (2.9)$$

Nakon sređivanja, dobije se izraz:

$$|BC| = \sqrt{L_O^2 + 2L_O L_H (\sin \theta_3 - \sin \theta_2) + 2L_H^2 (1 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_2 \cos \theta_3)} \quad (2.10)$$

Zatim se računa produljenje druge opruge  $x_2$  na isti način kao za prvu oprugu:

$$x_2 = \sqrt{L_O^2 + 2L_O L_H (\sin \theta_3 - \sin \theta_2) + 2L_H^2 (1 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_2 \cos \theta_3)} - L_O \quad (2.11)$$

Slijedi linearizacije izraza (2.11):

$$x_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta_2}\right)_{\theta_2=\theta_3=0} \cdot \theta_2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \theta_3}\right)_{\theta_2=\theta_3=0} \cdot \theta_3 \quad (2.12)$$

Nakon deriviranja i sređivanja, dobit će se linearna jednadžba za produljenje opruge  $x_2$ :

$$x_2 = L_H (\theta_3 - \theta_2) \quad (2.13)$$

Dobiveni izrazi za produljenja opruga (2.8) i (2.13) koristit će se za izračun potencijalne energije. Iako se radi o pojednostavljenju, ovi izrazi su dovoljno dobar prikaz produljenja opruga i neće previše utjecati na konačan izvod matematičkog modela.

### 2.3. Kinetička energija

Kinetička energija njihala proizlazi iz rotacije oko zgloba. Zadana je izrazom:

$$K_N = \frac{1}{2} J_{N_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_{N_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_{N_3} \dot{\theta}_3^2 \quad (2.14)$$

Gdje je:

- $\dot{\theta}$  - kutna brzina

Kinetička energija zamašnjaka proizlazi iz rotacija oko vlastite osi. Opisuje ju izraz:

$$\begin{aligned} K_Z = & \frac{1}{2} J_{Z_1} (\dot{\theta}_1 + \dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_1} L_{N_1}^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{Z_2} (\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_2)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_2} L_{N_2}^2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{Z_3} (\dot{\theta}_3 + \dot{\phi}_3)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_3} L_{N_3}^2 \dot{\theta}_3^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ukupna kinetička energija onda iznosi:

$$\begin{aligned} K = K_N + K_Z = & \frac{1}{2} J_{N_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_{N_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_{N_3} \dot{\theta}_3^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{Z_1} (\dot{\theta}_1 + \dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_1} L_{N_1}^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{Z_2} (\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_2)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_2} L_{N_2}^2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{Z_3} (\dot{\theta}_3 + \dot{\phi}_3)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_3} L_{N_3}^2 \dot{\theta}_3^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$



## 2.4. Potencijalna energija

Potencijalna energija njihala zadana je izrazom:

$$P_N = m_{N_1} g L_{N_1} \cos \theta_1 + m_{N_2} g L_{N_2} \cos \theta_2 + m_{N_3} g L_{N_3} \cos \theta_3 \quad (2.17)$$

Potencijalna energija zamašnjaka zadana je izrazom:

$$P_Z = m_{Z_1} g L_{Z_1} \cos \theta_1 + m_{Z_2} g L_{Z_2} \cos \theta_2 + m_{Z_3} g L_{Z_3} \cos \theta_3 \quad (2.18)$$

Potencijalna energija opruge zadana je izrazom:

$$P_O = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 \quad (2.19)$$

Zbog pojednostavljenja će se uzeti da su konstante obiju opruga jednake;  $c_1 = c_2 = c$ . Nakon uvrštavanja produljenja opruga  $x_1$  i  $x_2$  i zbrajanja, ukupna potencijalna energija iznosi:

$$\begin{aligned} P = P_N + P_Z + P_O = & m_{N_1} g L_{N_1} \cos \theta_1 + m_{N_2} g L_{N_2} \cos \theta_2 + m_{N_3} g L_{N_3} \cos \theta_2 \\ & + m_{Z_1} g L_{Z_1} \cos \theta_1 + m_{Z_2} g L_{Z_2} \cos \theta_2 + m_{Z_3} g L_{Z_3} \cos \theta_3 \\ & + \frac{1}{2} c L_H^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} c L_H^2 (\theta_3 - \theta_2)^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.5. Dinamički model sustava

Izrazi za ukupnu kinetičku energiju (2.16) i ukupnu potencijalnu energiju (2.20) uvrštavaju se u izraz za Lagrangian (2.1), čime se dobiva izraz:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} J_{N_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_{N_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_{N_3} \dot{\theta}_3^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{Z_1} (\dot{\theta}_1 + \dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_1} L_{N_1}^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{Z_2} (\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_2)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_2} L_{N_2}^2 \dot{\theta}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{Z_3} (\dot{\theta}_3 + \dot{\phi}_3)^2 + \frac{1}{2} m_{Z_3} L_{N_3}^2 \dot{\theta}_3^2 \\ & - m_{N_1} g L_{N_1} \cos \theta_1 - m_{N_2} g L_{N_2} \cos \theta_2 - m_{N_3} g L_{N_3} \cos \theta_3 \\ & - m_{Z_1} g L_{Z_1} \cos \theta_1 - m_{Z_2} g L_{Z_2} \cos \theta_2 - m_{Z_3} g L_{Z_3} \cos \theta_3 \\ & - \frac{1}{2} c L_H^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} c L_H^2 (\theta_3 - \theta_2)^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Potrebno je definirati vektor upravljačkih koordinata  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Gdje je:

- $q_1 = \theta_1$
- $q_2 = \varphi_1$
- $q_3 = \theta_2$
- $q_4 = \varphi_2$
- $q_5 = \theta_3$
- $q_6 = \varphi_3$

Slijedi definiranje vektora upravljačkih momenata  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Gdje je:

- $T_1 = \tau_{\theta_1}$
- $T_2 = \tau_1$
- $T_3 = \tau_{\theta_2}$
- $T_4 = \tau_2$
- $T_5 = \tau_{\theta_3}$
- $T_6 = \tau_3$

$\tau_\theta$  predstavlja vanjske poremećaje koji djeluju na sustav.

Slijedi definiranje Euler-Lagrangeovih jednadžbi sustava pomoću izraza (2.2):

$$\tau_{\theta_1} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad (2.24)$$

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} \quad (2.25)$$

$$\tau_{\theta_2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad (2.26)$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} \quad (2.27)$$

$$\tau_{\theta_3} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \quad (2.28)$$

$$\tau_3 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_3} \quad (2.29)$$

U jednadžbe se uvrštava izraz za Lagrangian (2.21). Deriviranjem i sređivanjem jednadžbi dobiva se šest jednadžbi drugog reda. Jednadžbe čine nelinearni sustav diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta_1} = & (J_{N_1} + J_{Z_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2) \ddot{\theta}_1 + J_{Z_1} \ddot{\phi}_1 \\ & - (m_{N_1} g L_{N_1} + m_{Z_1} g L_{Z_1}) \sin \theta_1 + c L_H^2 \theta_1 - c L_H^2 \theta_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\tau_1 = J_{Z_1} \ddot{\theta}_1 + J_{Z_1} \ddot{\phi}_1 \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta_2} = & (J_{N_2} + J_{Z_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2) \ddot{\theta}_2 + J_{Z_2} \ddot{\phi}_2 \\ & - (m_{N_2} g L_{N_2} + m_{Z_2} g L_{Z_2}) \sin \theta_2 - c L_H^2 \theta_1 + 2 c L_H^2 \theta_2 - c L_H^2 \theta_3 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\tau_2 = J_{Z_2} \ddot{\theta}_2 + J_{Z_2} \ddot{\phi}_2 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta_3} = & (J_{N_3} + J_{Z_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2) \ddot{\theta}_3 + J_{Z_3} \ddot{\phi}_3 \\ & - (m_{N_3} g L_{N_3} + m_{Z_3} g L_{Z_3}) \sin \theta_3 - c L_H^2 \theta_2 + c L_H^2 \theta_3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\tau_3 = J_{Z_3} \ddot{\theta}_3 + J_{Z_3} \ddot{\phi}_3 \quad (2.35)$$

Za potpuno definiranje matematičkog modela sustava, potrebna je diferencijalna jednačina koja opisuje rad elektromotora. Jednačina će se raspisati za prvi motor te će se zatim primijeniti na drugi i treći:

$$-K_a u_1 = L_1 \dot{i}_1 + R_1 i_1 + M_1 \dot{\phi}_1 \quad (2.36)$$

Gdje je:

- $i$  - struja elektromotora
- $u$  - napon elektromotora
- $L$  - induktivitet zavojnice
- $R$  - otpor armature
- $M$  - konstanta elektromotora
- $K_a$  - pojačanje elektromotora

Moment prvog elektromotora proporcionalno je ovisan o struji  $i_1$  i konstanti motora  $M_1$ . Nakon uvrtavanja  $\tau_1 = M_1 i_1$  u jednačinu (2.31), dobiva se izraz:

$$M_1 i_1 = J_{Z_1} \ddot{\theta}_1 + J_{Z_1} \ddot{\phi}_1 \quad (2.37)$$

Dinamika vezana za induktivitet znatno je brža od dinamike mehaničkog dijela sustava, stoga se induktivitet u ovom slučaju može zanemariti. Za daljnje rješavanje, potrebno je jednačinu (2.36) prenamijeniti na način da se dobije izraz za struju  $i_1$ .

$$i_1 = -\frac{K_a}{R_1} u_1 - \frac{M_1}{R_1} \dot{\phi}_1 \quad (2.38)$$

Izraz (2.38) se zatim uvrtava u izraz (2.37) čime se dobiva modificirani oblik druge diferencijalne jednačine:

$$-\frac{K_a M_1}{R_1} u_1 = J_{Z_1} \ddot{\theta}_1 + \frac{M_1^2}{R_1} \dot{\phi}_1 + J_{Z_1} \ddot{\phi}_1 \quad (2.39)$$

Isti postupak se napravi za drugi i treći motor. Jednadžbe (2.31),(2.33) i (2.35) onda poprimaju oblik:

$$-\frac{K_{a1}M_1}{R_1}u_1 = J_{Z_1}\ddot{\theta}_1 + \frac{M_1^2}{R_1}\dot{\phi}_1 + J_{Z_1}\ddot{\phi}_1 \quad (2.40)$$

$$-\frac{K_{a2}M_2}{R_2}u_2 = J_{Z_2}\ddot{\theta}_2 + \frac{M_2^2}{R_2}\dot{\phi}_2 + J_{Z_2}\ddot{\phi}_2 \quad (2.41)$$

$$-\frac{K_{a3}M_3}{R_3}u_3 = J_{Z_3}\ddot{\theta}_3 + \frac{M_3^2}{R_3}\dot{\phi}_3 + J_{Z_3}\ddot{\phi}_3 \quad (2.42)$$

Sustav diferencijalnih jednadžbi prikazat će se na sljedeći način:

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.43)$$

Gdje je:

- $\mathbf{G}$  - vektor gravitacijskog djelovanja
- $\mathbf{H}$  - matrica inercija
- $\mathbf{C}$  - vektor Coriolisovih i centrifugalnih djelovanja

Komponente dinamičke jednadžbe imaju vrijednost:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_{\theta_1} \\ -\frac{K_{a1}M_1}{R_1}u_1 \\ \tau_{\theta_2} \\ -\frac{K_{a2}M_2}{R_2}u_2 \\ \tau_{\theta_3} \\ -\frac{K_{a3}M_3}{R_3}u_3 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -(m_{N_1} g L_{N_1} + m_{Z_1} g L_{Z_1}) \sin \theta_1 + c L_H^2 \theta_1 - c L_H^2 \theta_2 \\ 0 \\ -(m_{N_2} g L_{N_2} + m_{Z_2} g L_{Z_2}) \sin \theta_2 - c L_H^2 \theta_1 + c L_H^2 \theta_2 - c L_H^2 \theta_3 \\ 0 \\ -(m_{N_3} g L_{N_3} + m_{Z_3} g L_{Z_3}) \sin \theta_3 - c L_H^2 \theta_2 + c L_H^2 \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} J_{N_1} + J_{Z_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 & J_{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{Z_1} & J_{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{N_2} + J_{Z_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 & J_{Z_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{Z_2} & J_{Z_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{N_3} + J_{Z_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 & J_{Z_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{Z_3} & J_{Z_3} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_1^2}{R_1} \dot{\phi}_1 \\ 0 \\ \frac{M_2^2}{R_2} \dot{\phi}_2 \\ 0 \\ \frac{M_3^2}{R_3} \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Uvrštavanjem izraza (2.44), (2.45), (2.46) i (2.47) u izraz (2.43) dobiva se zapis:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \tau_{\theta_1} \\ -\frac{K_{a1} M_1}{R_1} u_1 \\ \tau_{\theta_2} \\ -\frac{K_{a2} M_2}{R_2} u_2 \\ \tau_{\theta_3} \\ -\frac{K_{a3} M_3}{R_3} u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_{N_1} g L_{N_1} + m_{Z_1} g L_{Z_1}) \sin \theta_1 + c L_H^2 \theta_1 - c L_H^2 \theta_2 \\ 0 \\ -(m_{N_2} g L_{N_2} + m_{Z_2} g L_{Z_2}) \sin \theta_2 - c L_H^2 \theta_1 + 2 c L_H^2 \theta_2 - c L_H^2 \theta_3 \\ 0 \\ -(m_{N_3} g L_{N_3} + m_{Z_3} g L_{Z_3}) \sin \theta_3 - c L_H^2 \theta_2 + c L_H^2 \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} J_{N_1} + J_{Z_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 & J_{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{Z_1} & J_{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{N_2} + J_{Z_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 & J_{Z_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{Z_2} & J_{Z_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{N_3} + J_{Z_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 & J_{Z_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{Z_3} & J_{Z_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\phi}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_1^2}{R_1} \dot{\phi}_1 \\ 0 \\ \frac{M_2^2}{R_2} \dot{\phi}_2 \\ 0 \\ \frac{M_3^2}{R_3} \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \\
& \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Zapis jednadžbi je sada pojednostavljen i matričnom se transformacijom lako može dobiti izraz za vektor  $\ddot{\mathbf{q}}$ :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\phi}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{T} - \mathbf{G} - \mathbf{C}) \quad (2.49)$$

Konačni izrazi za  $\ddot{\mathbf{q}}$  tada su jednaki:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 = & \frac{m_{N_1} g L_{N_1} + m_{N_1} g L_{Z_1}}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \sin \theta_1 - \frac{c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \theta_1 + \frac{c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \theta_2 \\ & + \frac{M_1^2}{R_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} \phi_1 + \frac{1}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \tau_{\theta_1} + \frac{K_{a_1} M_1}{R_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} u_1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 = & -\frac{m_{N_1} g L_{N_1} + m_{N_1} g L_{Z_1}}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \sin \theta_1 + \frac{c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \theta_1 - \frac{c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \theta_2 \\ & - \frac{M_1^2 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 + J_{Z_1})}{R_1 J_{Z_1} (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} \phi_1 - \frac{1}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \tau_{\theta_1} - \frac{K_{a_1} M_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 + J_{Z_1})}{R_1 J_{Z_1} (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} u_1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 = & \frac{m_{N_2} g L_{N_2} + m_{N_2} g L_{Z_2}}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \sin \theta_2 + \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_1 - \frac{2 c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_2 + \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_3 \\ & + \frac{M_2^2}{R_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} \phi_2 + \frac{1}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \tau_{\theta_2} + \frac{K_{a_2} M_2}{R_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} u_2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_2 = & -\frac{m_{N_2} g L_{N_2} + m_{N_2} g L_{Z_2}}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \sin \theta_2 - \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_1 + \frac{2 c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_2 - \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_3 \\ & - \frac{M_2^2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 + J_{Z_2})}{R_2 J_{Z_2} (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} \phi_2 - \frac{1}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \tau_{\theta_2} - \frac{K_{a_2} M_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 + J_{Z_2})}{R_2 J_{Z_2} (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} u_2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_3 = & \frac{m_{N_3} g L_{N_3} + m_{N_3} g L_{Z_3}}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \sin \theta_3 + \frac{c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \theta_2 - \frac{c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \theta_3 \\ & + \frac{M_3^2}{R_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} \phi_3 + \frac{1}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \tau_{\theta_3} + \frac{K_{a_3} M_3}{R_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} u_3 \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_3 = & -\frac{m_{N_3} g L_{N_3} + m_{N_3} g L_{Z_3}}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \sin \theta_3 - \frac{c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \theta_2 + \frac{c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \theta_3 \\ & - \frac{M_3^2 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 + J_{Z_3})}{R_3 J_{Z_3} (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} \phi_3 - \frac{1}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \tau_{\theta_3} - \frac{K_{a_3} M_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 + J_{Z_3})}{R_3 J_{Z_3} (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} u_3 \end{aligned} \quad (2.55)$$



## 2.6. Linearizacija sustava

Dobiveni sustav je nelinearan. Za potrebe reuglacije sustav će se prilagoditi odnosno linearizirati. Time će se omogućiti korištenje linearnog PID regulatora. Poznato je da za male kutove vrijedi:  $\sin \theta \approx \theta$ . Ta pretpostavka koristit će se ovdje, čime jednačba poprima oblik:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_{N_1} g L_{N_1} + m_{N_1} g L_{Z_1} - c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \theta_1 + \frac{c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \theta_2 + \frac{M_1^2}{R_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} \dot{\phi}_1 + \frac{1}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \tau_{\theta_1} + \frac{K_{a_1} M_1}{R_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} u_1 \quad (2.56)$$

$$\ddot{\phi}_1 = -\frac{m_{N_1} g L_{N_1} + m_{N_1} g L_{Z_1} - c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \theta_1 - \frac{c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \theta_2 - \frac{M_1^2 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 + J_{Z_1})}{R_1 J_{Z_1} (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} \dot{\phi}_1 - \frac{1}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} \tau_{\theta_1} - \frac{K_{a_1} M_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 + J_{Z_1})}{R_1 J_{Z_1} (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} u_1 \quad (2.57)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{m_{N_2} g L_{N_2} + m_{N_2} g L_{Z_2} - 2 c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_2 + \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_1 + \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_3 + \frac{M_2^2}{R_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} \dot{\phi}_2 + \frac{1}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \tau_{\theta_2} + \frac{K_{a_2} M_2}{R_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} u_2 \quad (2.58)$$

$$\ddot{\phi}_2 = -\frac{m_{N_2} g L_{N_2} + m_{N_2} g L_{Z_2} - 2 c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_2 - \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_1 - \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \theta_3 - \frac{M_2^2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 + J_{Z_2})}{R_2 J_{Z_2} (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} \dot{\phi}_2 - \frac{1}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} \tau_{\theta_2} - \frac{K_{a_2} M_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 + J_{Z_2})}{R_2 J_{Z_2} (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} u_2 \quad (2.59)$$

$$\ddot{\theta}_3 = \frac{m_{N_3} g L_{N_3} + m_{N_3} g L_{Z_3} - c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \theta_3 + \frac{c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \theta_2 + \frac{M_3^2}{R_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} \dot{\phi}_3 + \frac{1}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \tau_{\theta_3} + \frac{K_{a_3} M_3}{R_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} u_3 \quad (2.60)$$

$$\ddot{\phi}_3 = -\frac{m_{N_3} g L_{N_3} + m_{N_3} g L_{Z_3} - c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \theta_3 - \frac{c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \theta_2 - \frac{M_3^2 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 + J_{Z_3})}{R_3 J_{Z_3} (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} \dot{\phi}_3 - \frac{1}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} \tau_{\theta_3} - \frac{K_{a_3} M_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 + J_{Z_3})}{R_3 J_{Z_3} (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} u_3 \quad (2.61)$$

## 2.7. Prostor stanja

Prostor stanja je matematički model fizikalnog sustava. Sustavi se uvijek prikazuju pomoću dvije jednačbe; jednačba stanja i jednačbe izlaza. Opći prikaz dinamičkog sustava u prostoru stanja je:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (2.62)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (2.63)$$

Gdje je:

- $x(t)$  - vektor stanja sustava
- $u(t)$  - vektor ulaza
- $\dot{x}(t)$  - derivacija vektora stanja  $x$
- $y(t)$  - vektor izlaza sustava
- $\mathbf{A} = \dim(n \times n)$  - matrica koeficijenata ulaza
- $\mathbf{B} = \dim(n \times m)$  - matrica ulaza sustava
- $\mathbf{C} = \dim(p \times n)$  - matrica izlaza sustava
- $\mathbf{D} = \dim(p \times m)$  - matrica prijenosa sustava
- $n$  - broj varijabli stanja (red sustava)
- $m$  - broj ulaznih varijabli
- $p$  - broj izlaznih varijabli

S obzirom da je sustav opisan sa šest jednačbi, može se zaključiti da će vektor varijabli stanja imati devet komponenti odnosno  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  i  $\phi$  za svaki od tri zamašnjaka.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Gdje je:

- $x_1 = \theta_1$
- $x_2 = \dot{\theta}_1$
- $x_3 = \ddot{\theta}_1$
- $x_4 = \theta_2$
- $x_5 = \dot{\theta}_2$
- $x_6 = \ddot{\theta}_2$
- $x_7 = \theta_3$
- $x_8 = \dot{\theta}_3$
- $x_9 = \ddot{\theta}_3$

Vektor ulaza jednak je:

$$u(t) = \begin{bmatrix} \tau_{\theta_1} \\ u_1 \\ \tau_{\theta_2} \\ u_2 \\ \tau_{\theta_3} \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Uvrste li se jednačbe (2.64) i (2.65) u jednačbu (2.62), dobije se izraz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \tau_{\theta_1} \\ u_1 \\ \tau_{\theta_2} \\ u_2 \\ \tau_{\theta_3} \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Gdje su matrice  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{m_{N_1} g L_{N_1} + m_{N_3} g L_{Z_1} - c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_{N_1} g L_{N_1} + m_{N_1} g L_{Z_1} - c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} & 0 & \frac{M_1^2}{R_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} & \frac{c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M_1^2 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 + J_{Z_1})}{R_1 J_{Z_1} (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} & -\frac{c L_H^2}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} & 0 & 0 & \frac{m_{N_2} g L_{N_2} + m_{N_3} g L_{Z_2} - 2 c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} & 0 & \frac{M_2^2}{R_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} & \frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} & 0 & 0 \\ -\frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} & 0 & 0 & \frac{m_{N_2} g L_{N_2} + m_{N_3} g L_{Z_2} - 2 c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} & 0 & -\frac{M_2^2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 + J_{Z_2})}{R_2 J_{Z_2} (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} & -\frac{c L_H^2}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} & 0 & 0 & \frac{m_{N_3} g L_{N_3} + m_{N_3} g L_{Z_3} - c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} & 0 & \frac{M_3^2}{R_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} & 0 & 0 & -\frac{m_{N_3} g L_{N_3} + m_{N_3} g L_{Z_3} - c L_H^2}{J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2} & 0 & -\frac{M_3^2 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 + J_{Z_3})}{R_3 J_{Z_3} (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2} & \frac{K_{q_1} M_1}{R_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)} & \frac{R_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)}{K_{q_1} M_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 + J_{Z_1})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_1 J_{Z_1} (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2)}{K_{q_1} M_1 (J_{N_1} + m_{Z_1} L_{N_1}^2 + J_{Z_1})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} & \frac{K_{q_2} M_2}{R_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)} & \frac{R_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)}{K_{q_2} M_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 + J_{Z_2})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2} & -\frac{K_{q_2} M_2 (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2)}{R_2 J_{Z_2} (J_{N_2} + m_{Z_2} L_{N_2}^2 + J_{Z_2})} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{q_3} M_3}{R_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)} & \frac{R_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)}{K_{q_3} M_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 + J_{Z_3})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{q_3} M_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)}{R_3 J_{Z_3} (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 + J_{Z_3})} & -\frac{K_{q_3} M_3 (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2)}{R_3 J_{Z_3} (J_{N_3} + m_{Z_3} L_{N_3}^2 + J_{Z_3})} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (2.64) i (2.65) u jednadžbu (2.63), dobije se izraz:

$$y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} \tau_{\theta_1} \\ u_1 \\ \tau_{\theta_2} \\ u_2 \\ \tau_{\theta_3} \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Gdje su matrice  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Matrica  $\mathbf{C}$  ukazuje kako će sustav imati devet izlaza. Od tih devet ulaza, promatrat će se samo izlazi kutova zakreta  $\theta$ . Ostale veličine se neće razmatrati kao potencijalni izlazi, no naknadno će poslužiti pri regulaciji pomoću regulatora LQR.

## 2.8. Parametri sustava

Kako bi se uspjela napraviti simulacija sustava, potrebno je uvrstiti konstante parametre. Zbog vjernijeg prikaza ponašanja sustava uvršteni parametri moraju biti realistični. Parametri za prvo njihalo bit će preuzeti iz izrađenog CAD modela laboratorijskog postava [1], dok će se za drugo njihalo koristiti parametri za 10% veći, a za treće njihalo će se koristiti parametri za 10% manji. Parametri elektromotora će se preuzeti s interneta [2], dok će se parametri  $L_H$ ,  $L_O$  i  $c$  samostalno zadati. Tablicom će se prikazati svi parametri:

Tablica 1: Tablica parametara

Parametri	Njihalo 1	Njihalo 2	Njihalo 3
$c$	$0,1 \cdot 10^3 \text{ N/m}$		
$g$	$9,81 \text{ m/s}^2$		
$m_N$	0,366 kg	0,4026 kg	0,3294 kg
$m_Z$	0,096 kg	0,1056 kg	0,0864 kg
$J_N$	$1,83 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	$2,013 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$	$1,647 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
$J_Z$	$6,567 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$	$7,2237 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$	$5,9103 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
$L_H$	0,075 m		
$L_O$	0,080 m		
$L_N$	$123,42 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$135,762 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$111,078 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$L_Z$	$124,45 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$136,895 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$112,005 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$M$	$49 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/A}$	$24,1 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/A}$	$92,8 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/A}$
$R$	13,8 $\Omega$	3,51 $\Omega$	53,1 $\Omega$
$K_a$	1,2	1,5	1,6

Nakon uvrtavanja parametara, matrice **A** i **B** poprimaju vrijednosti:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5,244 & 0 & 0,0528 & 175,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5,244 & 0 & -0,3178 & -175,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 145,9 & 0 & 0 & -120,5 & 0 & 0,0418 & 145,9 & 0 & 0 \\ -145,9 & 0 & 0 & 120,5 & 0 & -0,2709 & -145,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 212,9 & 0 & 0 & -45,60 & 0 & 0,0598 \\ 0 & 0 & 0 & -212,9 & 0 & 0 & 45,60 & 0 & -0,3342 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 303,7372 & 1,2942 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -303,7372 & -7,7825 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 252,5669 & 2,6012 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -252,5669 & -16,8587 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 368,5914 & 1,0307 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -368,5914 & -5,7618 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Dok matrice **C** i **D** ostaju iste:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

## 2.9. Provjera stabilnosti pomoću polova sustava

Sustavi se prema svojoj stabilnosti dijele na stabilne, nestabilne i uvjetno stabilne sustave (sustavi na granici stabilnosti). Za linearni sustav uvjet stabilnosti je da su realni dijelovi korijena (polova) negativni. U slučaju da barem jedan pol ima pozitivan realni dio, sustav je nestabilan. Ako je realni dio pola jednak nuli onda je sustav na granici stabilnosti.

S obzirom da je sustav opisan s devet diferencijalnih jednadžbi, polovi sustava izračunat će se pomoću programskog paketa *MATLAB*. Dobivaju se polovi:

$$p_1 = -0,0240 + 28,3575i$$

$$p_2 = -0,0240 - 28,3575i$$

$$p_3 = 13,0072$$

$$p_4 = -13,0575$$

$$p_5 = -0,0280 + 4,9144i$$

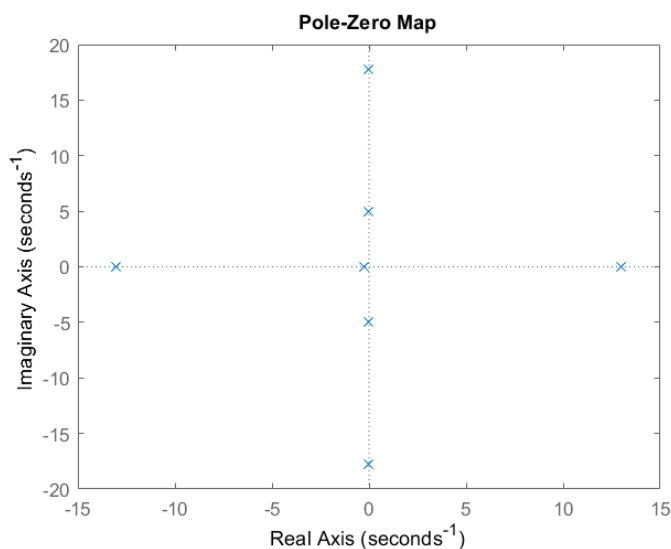
$$p_6 = -0,0280 - 4,9144i$$

$$p_7 = -0,2650$$

$$p_8 = -0,2745$$

$$p_9 = -0,2291$$

S obzirom da pol  $p_3$  ima pozitivan realan dio, zaključuje se da je sustav nestabilan. Polovi će se prikazati u Gaussovoj ravnini:



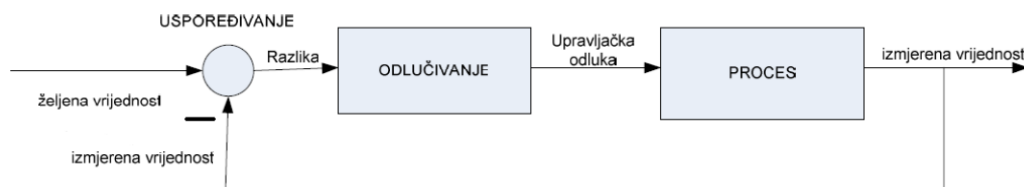
Slika 4: Prikaz polova sustava

Posve je očekivano da će otvoren sustav bez ikakvog regulatora biti nestabilan. Kako bi se sustav stabilizirao bit će potrebna regulacija. U ovom slučaju, regulacija sustava obaviti će se dobivanjem Ljapunovljeve funkcije.



### 3. Regulacija sustava

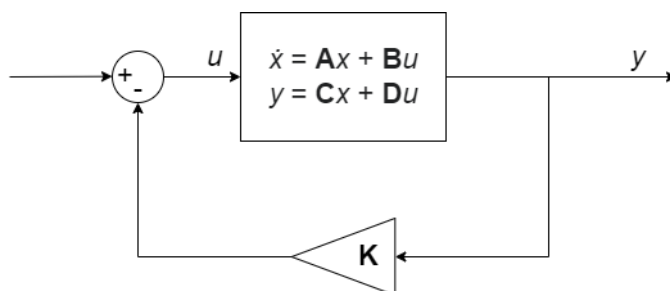
Stabilnost sustava u prijašnjem dijelu odrađena je na sustavu otvorenog kruga. Sada će se sustavu dodati povratna veza, kojom će se napraviti sustav zatvorenog kruga. Povratna veza funkcionira na način da kontinuirano uspoređuje dobiveni izlaz sustava sa željenom vrijednošću. Na taj način će se ulaz u sustav korigirati sve dok se sustav ne stabilizira. Princip sustava u zatvorenom krugu tj. sustava sa regulacijskom petljom prikazan je ispod:



Slika 5: Sustav u zatvorenom krugu

#### 3.1. Linear Quadratic Regulator (LQR)

Pokazalo se da je za slučajeve vremenski invarijantnih sustava najbolje koristiti linearni kvadratični regulator (LQR). Sustav sa LQR-om u zatvorenoj petlji ima matricu kontrolera  $\mathbf{K}$ :



Slika 6: Shema zatvorenog linearnog sustava sa LQR-om

Regulacija pomoću LQR-a će u ovom slučaju biti centralizirana. To znači da će sustav biti reguliran jednim centralnim regulatorom koji će regulirati svaki podsustav, odnosno u ovom slučaju svako njihalo. Broj redova unutar matrice  $\mathbf{K}$  ovisi o broju ulaza koji će se regulirati, dok broj stupaca ovisi o broju izlaza. Ovim se regulatorom nastoji smanjiti energiju u povratnoj vezi i time potrebna pojačanja. Postavke linearnog kvadratičnog regulatora dobivaju se rješavanjem problema optimalnog upravljanja [3]:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succeq 0, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \succeq 0 \quad (3.1)$$

Gdje je:

- **Q** - matrica težina stanja linearnog kvadratičnog regulatora
- **R** - matrica težina ulaza linearnog kvadratičnog regulatora

Znak  $\succeq$  znači da će svojstvene vrijednosti (eng. eigenvalues) biti jednake nula ili veće od nula. Matrice **Q** i **R** će se iterativno odrediti. Faktor **Q** utjecat će na preciznost sustava; što su vrijednosti u ovoj matrici veće, greške regulacije bit će manje. Faktor **R** utjecat će na energiju u povratnoj vezi; što su vrijednosti u ovoj matrici manje, energija u povratnoj vezi bit će manja. Matrica **Q** ima oblik simetrične kvadratne matrice, čije su dimenzije  $n \times n$ . Matrica **R** je također simetrična sa dimenzijama  $m \times m$  [6]. Vrijednost matrice **K** dobit će se pomoću izraza:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \quad (3.2)$$

Gdje je matrica **S** rješenje je algebarske Riccatijeve jednačbe [5]:

$$0 = \mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} + \mathbf{Q} \quad (3.3)$$

Prije nego što se izračunaju ove matrice, potrebno je provjeriti dva bitna svojstva koja će ukazati na to je li sustav upravljiv ovim regulatorom.

### 3.1.1 Upravlјivost (eng. *Controllability*)

Ovo svojstvo ukazuje je li moguće dovesti stanje sustava u bilo koje moguće stanje (ograničeno sustavom) u nekom konačnom vremenu. Kako bi sustav bio upravljiv, red matrica upravljivosti mora biti zadovoljen. Matrica upravljivosti je definirana izrazom:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.4)$$

Gdje  $n$  odgovara broju varijabli stanja, kojih u ovom sustavu ima 9. U programskom paketu *MATLAB* koristit će se naredba `ctrb()` koja će generirati matricu upravljivosti, dok će se red matrice dobiti naredbom `rank()`. Svojstvo će biti zadovoljeno ako naredba rezultira redom jednakim broju varijabli stanja  $n$ . Pokretanjem naredbi dobiva se broj 9, što znači da je sustav upravljiv [7].

### 3.1.2 Osmotrivost (eng. *Observability*)

Svojstvo osmotrivosti određuje je li moguće na temelju mjerenih izlaza sustava pretpostaviti stanje sustava. Sustav je osmotriv, ako je zadovoljena matrica osmotrivosti:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Kao i za prijašnje svojstvo, u programskom paketu *MATLAB* koristit će se naredba `obsv()` koja će generirati matricu osmotrivosti, dok će se red matrice dobiti naredbom `rank()`. Kao i za prijašnje svojstvo, dobije li se naredbom `red` u vrijednosti 9, svojstvo će biti zadovoljeno. Pokretanjem koda dobiva se broj 9, što znači da je sustav osmotriv [7].

### 3.1.3 Simulacija sustava

Za izvedbu regulacija potrebno je odrediti vrijednosti unutar matrica **Q** i **R**. Napisano pravilo je da se za početne vrijednosti ovih matrica uzme [6]:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Primjetit će se kako matrica **R** ima dimenzije  $3 \times 3$ , iako sustav ima šest ulaza. Razlog ovomu je što se u sustavu mogu regulirati samo tri ulaza, a to su naponi triju elektromotora  $u$ . Bitno je naglasiti da se unutar matrica mogu mijenjati samo vrijednosti na dijagonali, dok ostale vrijednosti ostaju nula. Za ove vrijednosti matrica iznad, dobit će se zadovoljavajuća matrica kontrolera **K** koje će se uvrstiti u sustav i regulirati ga, no proces stabiliziranja sustava bit će oštar čime dolazi do naglih izmjena odziva, odnosno neće se dobiti zadovoljavajući stabilizirajući odziv. Vrijednosti će se mijenjati sve dok se ne dobije željeni odziv. Iterativnim postupkom se dođe do vrijednosti:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Ove matrice bit će uvrštene u *MATLAB*-ovu naredbu  $\text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{Bc}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$ , gdje je  $\mathbf{Bc}$  korigirana matrica čije su dimenzije  $9 \times 3$ . Ranije je spomenuto da se mogu regulirati samo ulazi napona elektromotora  $u$ . Ovo znači da će se stupci vezani uz poremećaje izostaviti u procesu regulacije. Pokretanjem naredbe dobit će se matrica kontrolera  $\mathbf{K}_{\text{LQR}}$ :

$$\mathbf{K}_{\text{LQR}} = \begin{bmatrix} 1866 & 136,2 & -10,6 & 1671 & 156,1 & 23,6 & 124,6 & 107,8 & 18,2 \\ 1581 & 147,6 & 23,5 & 2466 & 178,2 & -5,2 & 1277 & 121 & 20,5 \\ 1315 & 114,9 & 18,3 & 1442 & 134,7 & 20,4 & 1415 & 98,3 & -15,8 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

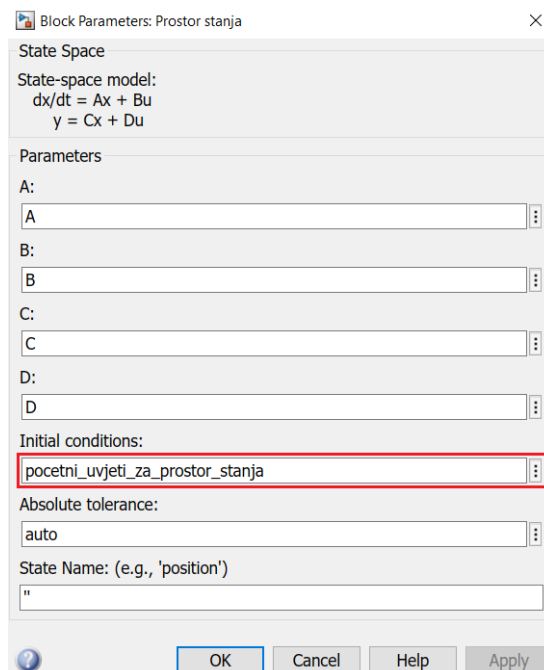
Svaki red matrice  $\mathbf{K}_{\text{LQR}}$  odgovara pojačanju za jedan od tri ulaza  $u$ . Prvi red regulirat će ulaz  $u_1$ , drugi red ulaz  $u_2$ , a treći red ulaz  $u_3$ . Dobivena matrica kontrolera podijelit će se na tri matrice koje će se koristiti za pojedini ulaz:

$$\mathbf{K}_{\text{LQR}_1} = [1866 \quad 136,2 \quad -10,6 \quad 1671 \quad 156,1 \quad 23,6 \quad 124,6 \quad 107,8 \quad 18,2] \quad (3.11)$$

$$\mathbf{K}_{\text{LQR}_2} = [1581 \quad 147,6 \quad 23,5 \quad 2466 \quad 178,2 \quad -5,2 \quad 1277 \quad 121 \quad 20,5] \quad (3.12)$$

$$\mathbf{K}_{\text{LQR}_3} = [1315 \quad 114,9 \quad 18,3 \quad 1442 \quad 134,7 \quad 20,4 \quad 1415 \quad 98,3 \quad -15,8] \quad (3.13)$$

Simulacija regulacije ovog sustava prikazat će se u programskom paketu *Simulink*. Prije nego što se prikaže simulacija, potrebno je zadati nekakve početne uvjete. Prikazat će se svojsva bloka za prostor stanja u *Simulink*-u:



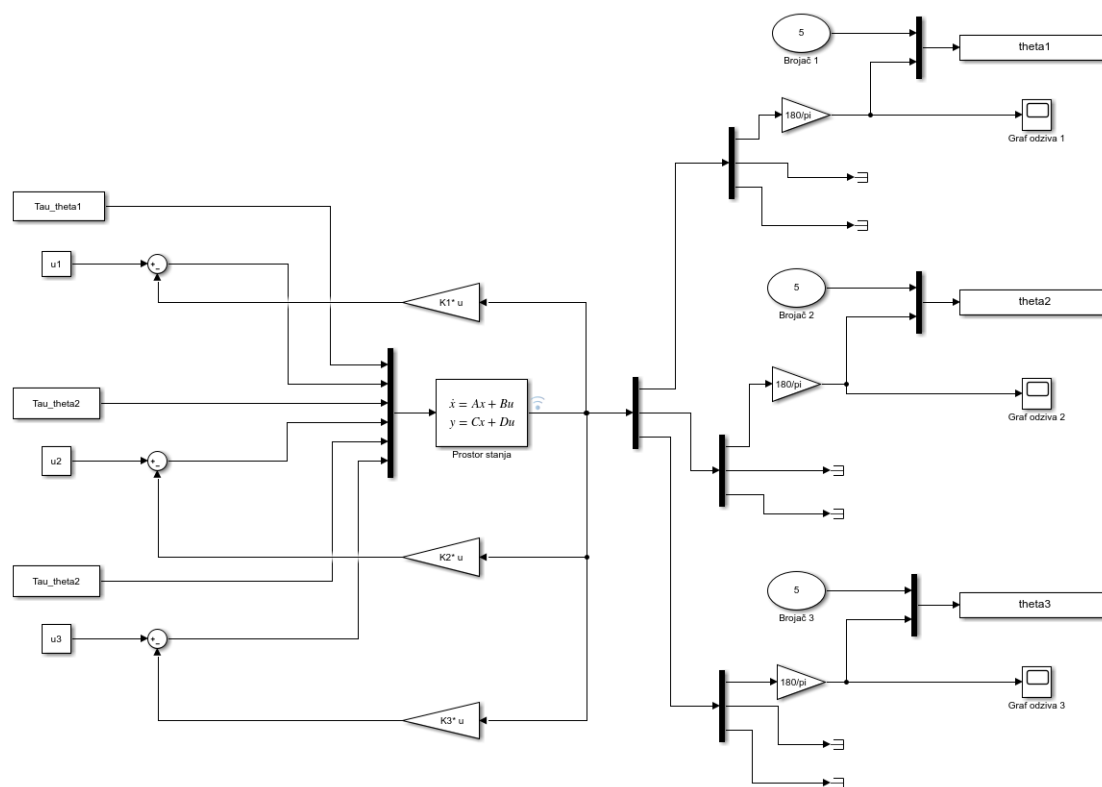
Slika 7: Prikaza bloka prostora stanja sa označenim poljem za početne uvjete

Početni uvjeti bit će izraženi matricom dimenzija  $1 \times 9$  gdje se svaki stupac odnosi na pojedino stanje sustava. Tablično će se prikazati početni uvjeti, koji su svojevoljno odabrani:

Tablica 2: Tablica početnih uvjeta

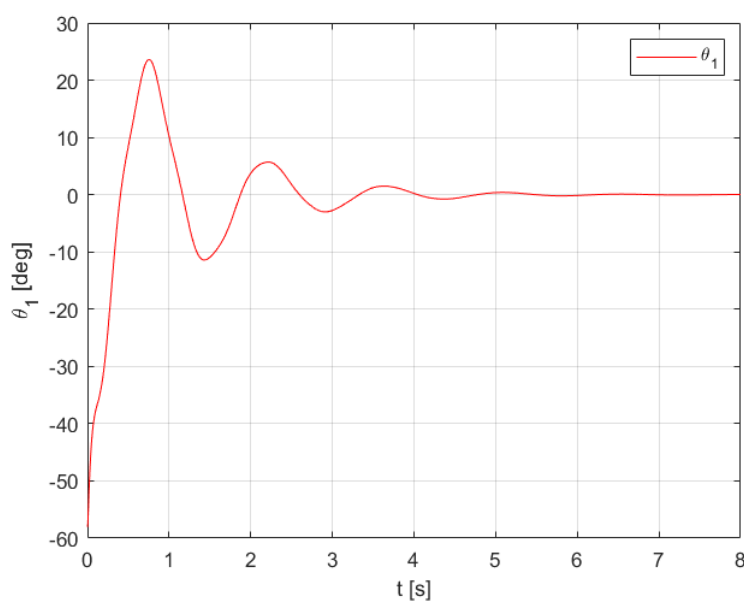
Parametri	Njihalo 1	Njihalo 2	Njihalo 3
$\theta$	$-58^\circ$	$-24^\circ$	$36^\circ$
$\dot{\theta}$	$-120^\circ/\text{s}$	$-90^\circ/\text{s}$	$0^\circ/\text{s}$
$\dot{\varphi}$	$-360^\circ/\text{s}$	$0^\circ/\text{s}$	$180^\circ/\text{s}$

Zatvoreni sustav s LQR-om će se zatim prikazati u *Simulink*-u:

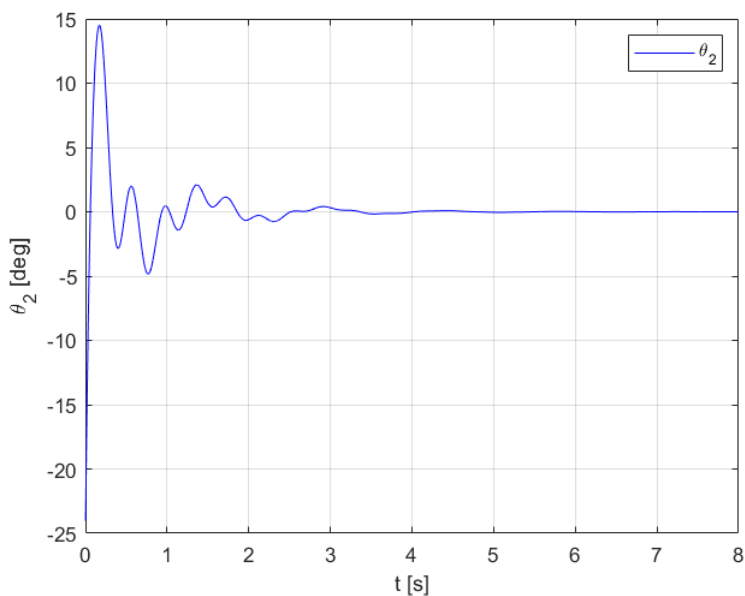


Slika 8: Prikaz linearnog modela u zatvorenom krugu s LQR-om u *Simulink*-u

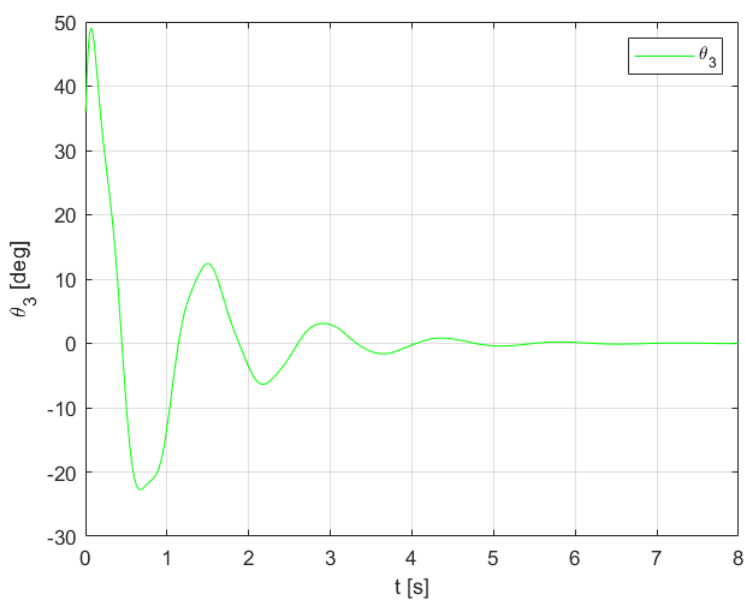
Sve što preostaje je pokrenuti simulaciju, čije će trajnje iznositi  $t = 8$  s, i grafički prikazati kutove zakreta pojedinih njihala:



Slika 9: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 1 u LQR regulaciji



Slika 10: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 2 u LQR regulaciji



Slika 11: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 3 u LQR regulaciji

Iz grafova se vidi kako će se kut svakog njihala stabilizirati u željenu vrijedost nula, što znači da je zatvoreni sustav dobro reguliran i time stabilan.

### 3.1.4 Stabilnost zatvorenog linearnog sustava sa LQR-om

Grafovi potvrđuju stabilnost sustava. Usprkos tome, izračunat će se polovi zatvorenog sustava kao još jedna provjera stabilnosti:

$$p_1 = -539,4$$

$$p_2 = -249,5$$

$$p_3 = -185$$

$$p_4 = -1,54 + 16,12i$$

$$p_5 = -1,54 - 16,12i$$

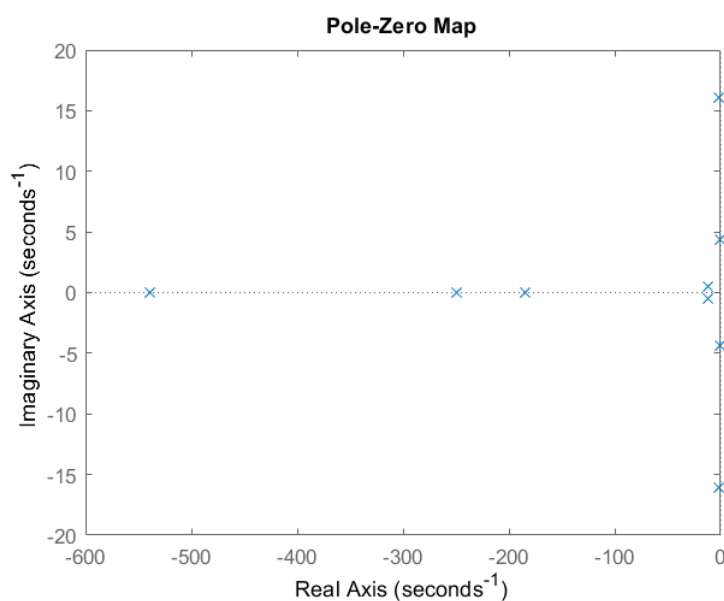
$$p_6 = -11,81 + 0,52i$$

$$p_7 = -11,81 - 0,52i$$

$$p_8 = -0,93 + 4,34i$$

$$p_9 = -0,93 - 4,34i$$

S obzirom da svi polovi imaju negativan realni dio, zaključuje se da je sustav stabilan. Polovi će se prikazati u Gaussovoj ravlini:



Slika 12: Prikaz polova linearnog zatvorenog sustava sa LQR-om



### 3.2. Ljapunovljeva funkcija

Uz provjeru stabilnost izračunom polova, postoji i opcija provjere stabilnosti pomoću Ljapunovljeve funkcije kao i mogućnost regulacije zatvorenog sustava. Osnovni oblik Ljapunovljeve funkcije dan je jednadžbom:

$$v(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (3.14)$$

Gdje je  $\mathbf{x}$  vektor stanja, a  $\mathbf{P}$  matrica optimizacije funkcije. Za izračun matrice  $\mathbf{P}$  koriste se programski alati poput *Yalmip*-a u programskom paketu *MATLAB* koji će se koristiti za ovaj slučaj. Treba naglasiti kako je matrica  $\mathbf{P}$  simetrična. To znači da vrijedi  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ . Uz to je i pozitivno definitna:  $\mathbf{P} \succ 0$ . Ovo znači da su joj svojstvene vrijednosti (eng. *eigenvalues*) pozitivne.

Postoje dva uvjeta stabilnosti:

- 1)  $v(x) > 0$       za  $x \neq 0$
- 2)  $\dot{v}(x) < 0$       za  $x \neq 0$

Iz uvjeta se može očitati da iako je funkcija pozitivna, zbog njene negativne derivacije njena vrijednost će se smanjivati i težiti prema nuli, odnosno stanju stabilnosti. Uvrštavanjem vrijednosti funkcije (3.1) unutar prvog uvjeta, dobit će se izraz:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0 \quad (3.15)$$

Kako bi izraz (3.15) bio pozitivan za matricu  $\mathbf{P}$  mora vrijediti:

$$\mathbf{P} > 0 \quad (3.16)$$

Sada će se raspisati drugi uvjet:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x}) &< 0 \\ \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} &< 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Gdje je izraz (3.17) očita derivacija umnoška. U izrazu se dobiva  $\dot{\mathbf{x}}$ . Za otvoreni sustav, ta vrijednost definirana je izrazom:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.18)$$

Izraz (3.18) će se uvrstiti u izraz (3.17), a zatim će se prikazati postupak deriviranja i rezultat:

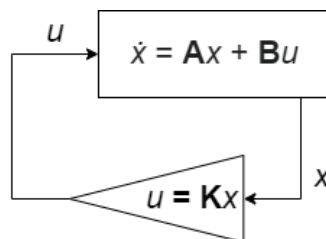
$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x}) &< 0 \\ \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{P}\mathbf{x} &< 0 \\ \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} &< 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Kako bi vrijednost bila negativna, izraz  $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})$  mora biti negativan:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (3.20)$$

Ova dva uvjeta osnova su rješavanja Ljapunovljeve funkcije za otvoreni sustav  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Uvjeti su linearni i vrlo lako rješivi pomoću *Yalmip*-a, no to se neće raditi za ovaj slučaj. Pomoću otvorenog sustava se željelo prikazati i pojasniti osnovne uvjete za računanje Ljapunovljeve funkcije. Ti uvjeti poslužiti će za regulacije zatvorenog sustava.

Ranije se već pomoću polova prikazalo da je otvoreni sustav nestabilan. Kako bi se doveo u stabilno stanje, logično je da sustav treba regulirati. Shemom će se prikazati osnovni princip zatvorenog kruga reguliranog Ljapunovljenim kontrolerom:



Slika 13: Shema zatvorenog kruga

Povratnom vezom se u jednadžbu stanja dodaje  $u = \mathbf{K}\mathbf{x}$  čime se dobiva nova jednadžba stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (3.21)$$

Dobiveni uvjeti za otvoreni krug mogu se iskoristiti kao uvjeti za zatvoreni krug ako se matrica  $\mathbf{A}$  zamijeni izrazom  $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$  u drugom uvjetu (3.20). Uvrštavanjem izraza u dobit će se nejednadžba:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) < 0 \quad (3.22)$$

Nejednadžbu je sada potrebno raspisati:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T) &< 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} &< 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Za daljnje raspisivanje, potrebno je obje strane izraza pomnožiti sa matricom  $\mathbf{P}^{-1}$ , čime se dobiva drugi uvjet za zatvoreni krug [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \cdot / \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} < 0 \quad / \cdot \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1} < 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

S obzirom da se više nepoznanica množe jedna s drugom, zaključuje se da je izraz (3.24) nelinearan. Ovo stvara problem jer *Yalmip* ne može riješavati nelinearne probleme. Zbog ovoga će se uvrstiti susptitucije  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}$  i  $\mathbf{L} = \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1}$ , koje će izraz (3.24) pretvoriti u linearnu nejednadžbu:

$$\mathbf{Y} \mathbf{A}^T + \mathbf{L}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{B} \mathbf{L} < 0 \quad (3.25)$$

Uvrsti li se supstitucija  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}$  u prvi uvjet (3.16) dobit će se izraz prvog uvjeta za zatvoreni krug:

$$\mathbf{Y} > 0 \quad (3.26)$$

Pomoću supstitucija dobila su se dva uvjeta stabilnosti koja vrijede za zatvoreni krug:

$$\mathbf{Y} > 0 \quad (3.27)$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{L}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{L} < 0 \quad (3.28)$$

Dobiveni uvjeti poslužit će za optimizaciju zatvorenog sustava. Pomoću *Yalmip*-a moguće je izračunati vrijednosti matrice kontrolera  $\mathbf{K}$  koja će stabilizirati zatvoreni sustav.

Prije nego što se započne optimizacija potrebno je korigirati matricu  $\mathbf{B}$ . Poremećaji sustava izraženi varijablom  $\tau_\theta$  morat će se izuzeti jer se te vrijednosti ne mogu regulirati. Razlog ovomu je što se u kućištima njihala ne nalaze elektromotori koji bi mogli regulirati njihala, već se zadatak regulacije svodi na elektromotore zamašnjaka. Iz matrice  $\mathbf{B}$  će se onda izbrisati stupci povezani uz ulaze  $\tau_\theta$  čime će se dobiti nova matrica  $\mathbf{B}_r$ , koja će se koristiti pri optimizaciji:

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,2942 & 0 & 0 \\ -7,7825 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,6012 & 0 \\ 0 & -16,8587 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0307 \\ 0 & 0 & -5,7618 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Kao što je ranije spomenuto, za rješavanje problema optimizacije koristit će se *Yalmip*. Zbog razumijevanja prikazat će se kod u *MATLAB*-u sa komentarima koji će pojasniti korištene naredbe:

```
% Matrica Br predstavlja matricu ulaza koji ce se regulirati
Br = B;
Br(:,1) = [];
Br(:,2) = [];
Br(:,3) = [];

% Naredba sdpvar() definirat ce simetricnu matricu sa realnim
% vrijednostima. Matrica Y imat ?e dimenzije kao matrice A, dok ce matrica
% L imati dimenzije 3x9, odnosno transponirane dimenzije matrice Br.
% Ove matrice bit ce rezultat optimizacije.
Y = sdpvar(9);
L = sdpvar(3,9);

% Postavljanje uvjeta ovog sustava
uvjeti = [-Y <= 0, Y*A.' + L.*Br.' + A*Y + Br*L <= 0];

% Naredbom solvesdp() pokrenut ce se optimizacija na temelju
% postavljenih uvjeta
optimizacijsko_rjesenje_centralizirano = solvesdp(uvjeti);

% Naredba double() ce symbolicke rezultate optimizacije
% pretvoriti u vrijednosti
Y = double(Y);
L = double(L);

% Rezultati se uvrstavaju u izraza za supstituciju, cime se dobiva
% vrijednost pojacanja K
P_c = inv(Y);
K_L_c = L/Y;
```

Slika 14: *Yalmip* kod za centralizirano upravljanje u programskom paketu *MATLAB*

Rezultat ovog kod bit će matrica Ljapunovljevog kontrolera za centralizirano upravljanje  $\mathbf{K}_L$ :

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} -342,8 & -25,46 & -2,230 & -443 & -29,36 & -0,8970 & -278,7 & -20,75 & -2,086 \\ -130,8 & -8,545 & -1,305 & -140,4 & -10,68 & -0,6196 & -110,7 & -7,131 & 0,0499 \\ -259,2 & -17,68 & -0,5628 & -321,4 & -19,82 & -3,034 & -205,2 & -14,97 & -0,4713 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Svaki red unutar matrice  $\mathbf{K}_L$  upravljaat će jedno njihalo.

Dobivana matrica kontrolera vrijedit će za centralizirano upravljanje. Ovo znači da će se sve informacije potrebne za regulaciju prikupljati u jednom kontroleru, koji će upravljati sa sva tri njihala. Problem centraliziranog upravljanja je što takav sustav morati upravljati sa većim količinama informacija. Zbog ovoga će povratne veze za svako njihalo imati visoku eneregiju.

Kako bi se ovo izbjeglo postoji drugi model regulacije: decentralizirano upravljanje. Takav pristup regulaciji podosta smanjuje energiju sustava i zasebno upravlja svakom od podkomponenti. Ovo bi značilo da će svako njihalo imati svoj vlastiti kontroler.

Najveća razlika u kodu nalazi se u varijablama optimizacije **Y** i **L**. Te matrice će postati blok dijagonalne matrice. Ovo znači da će vrijednosti matrica kontrolera biti zadane po dijagonali, dok će ostale vrijednosti unutar matrica biti jednake nuli. S obzirom da matrica **Y** ima dimenzije  $9 \times 9$ , matrice kontrolera postaviti će se po dijagonali veličina  $3 \times 3$ . Za matricu **L** koja ima dimenzije  $3 \times 9$ , matrice kontrolera po dijagonali imat će dimenzije  $1 \times 3$ . Zbog boljeg pojašnjenja, ispisat će se kod sa popratnim komentarima:

```
% Definiraju se simetricne matrice
Y1 = sdpvar(3);
Y2 = sdpvar(3);
Y3 = sdpvar(3);

L1 = sdpvar(1,3);
L2 = sdpvar(1,3);
L3 = sdpvar(1,3);

% Definirane matrice se uvrštavaju po dijagonali
Y = [Y1 zeros(3,6);
     zeros(3,3) Y2 zeros(3,3);
     zeros(3,6) Y3];

L = [L1 zeros(1,6);
     zeros(1,3) L2 zeros(1,3);
     zeros(1,6) L3];

uvjeti = [-Y <= 0, Y*A.' + L.*Br.' + A*Y + Br*L <= 0];

optimizacijsko_rjesenje_decentralizirano = solvesdp(uvjeti);

Y = double(Y);
L = double(L);

P_dec = inv(Y);
K_L_dec = L/Y;
```

Slika 15: *Yalmip* kod za decentralizirano upravljanje u programskog paketa *MATLAB*

Pokretanjem optimizacije dobit će se poruka:

```
solution =  
  
struct with fields:  
  
    yalmipversion: '20210331'  
    matlabversion: '9.4.0.813654 (R2018a)'  
    yalmiptime: 0.3760  
    solvertime: 0.1310  
    info: 'Numerical problems (SeDuMi-1.3)'  
    problem: 4
```

Slika 16: Dobivena greška nakon pokušaja rješavanja optimizacijskog problema pomoću *Yalmip*-a

Poruka na slici upućuje da se problem ne može optimizirati sa postavljenim parametrima. Nastaju čak četiri numerička problema. Razlog ovomu su dvije opruge u modelu, odnosno njihova konstanta  $c$ . U radu je postavljane vrijednost konstante opruga u iznosu 100N/m. Očito da je da se pri optimizaciji za decentralizirano upravljanje, problem ne može riješiti za tako visoku konstantu. S obzirom da se ta vrijednost svojevrijemno zadala, ona će se promijeniti za potrebe ovog decentraliziranog upravljanja.

Postavit će se puno manja vrijednost konstante opruga u iznosu samo 0,1N/m. Uvrsti li se ova vrijednost u izraz (2.67), vrijednosti unutar matrice  $\mathbf{A}$  će se promijeniti. Redefinirana matrica  $\mathbf{A}$  imat će sljedeće vrijednosti u sebi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 170 & 0 & 0,0528 & 0,1754 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -170 & 0 & -0,3178 & -0,1754 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1459 & 0 & 0 & 171 & 0 & 0,0418 & 0,1459 & 0 & 0 \\ -0,1459 & 0 & 0 & -171 & 0 & -0,2709 & -0,1459 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2129 & 0 & 0 & 167,1 & 0 & 0,0598 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2129 & 0 & 0 & -167,1 & 0 & -0,3342 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Pokrene li se isti kod na slici 16 sa modificiranom matricom, problem će se riješiti i dobit će se matrica Ljapunovljevog kontrolera za decentralizirano upravljanje  $\mathbf{K}_L$ :

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} -855,6 & -59,9 & -4,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -415,2 & -29,4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1027 & -70,8 & -5,5 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

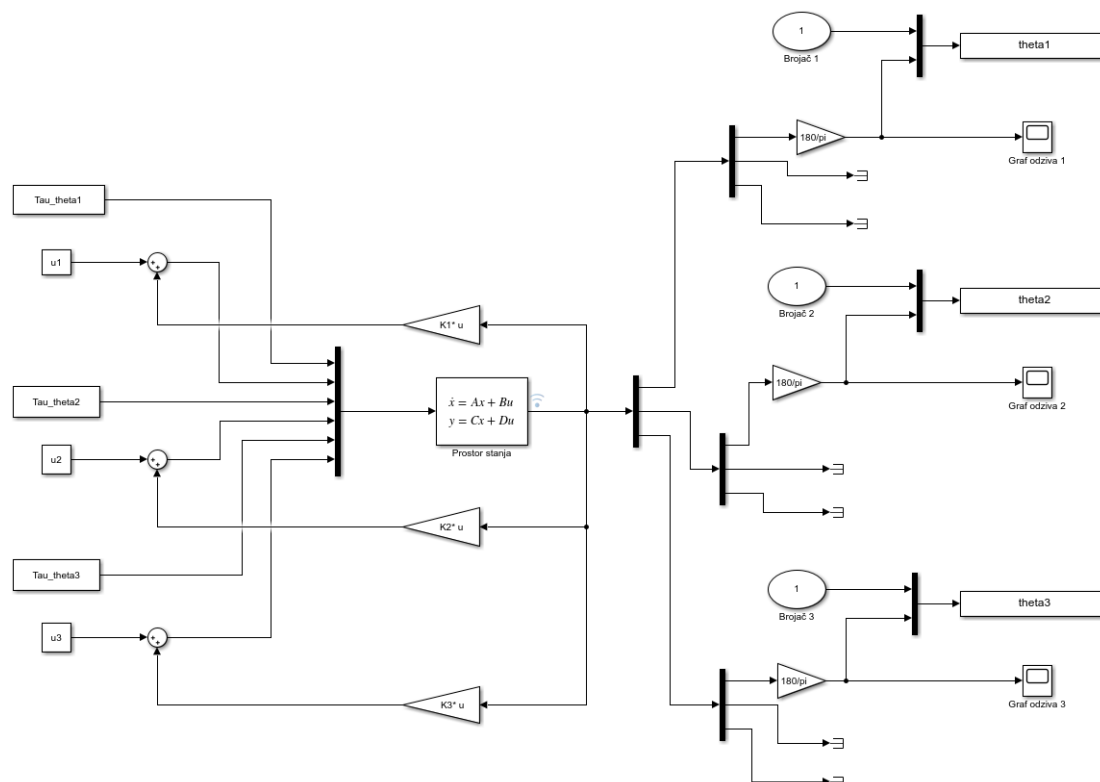
Gdje će se svaki rad unutar matrice odnositi na jedan od ulaza. S obzirom da svaki red matrice **K** odgovara jednoj povratnoj vezi, matrica će se podijeliti na tri manje matrice kontrolera:

$$\mathbf{K}_{L_1} = \begin{bmatrix} -855,6 & -59,9 & -4,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{K}_{L_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -415,2 & -29,4 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{K}_{L_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1027 & -70,8 & -5,5 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Sad je moguće napraviti simulaciju pomoću programskog paketa *Simulink*:

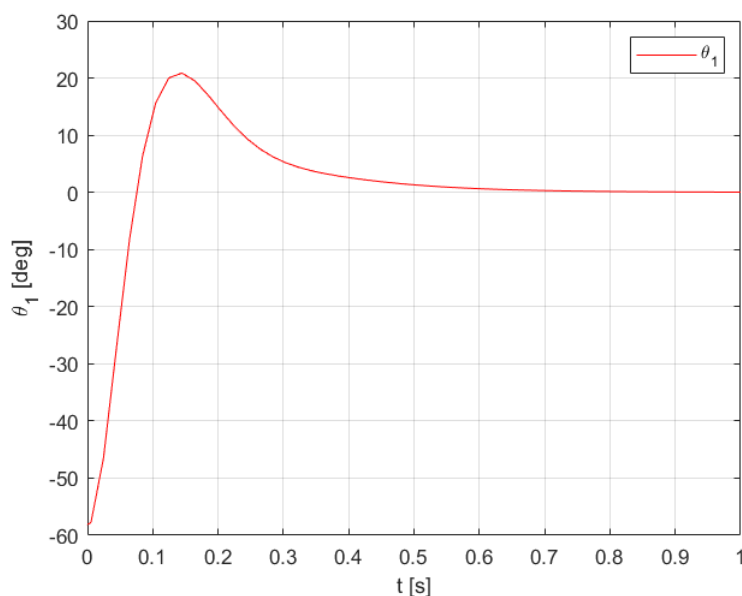


Slika 17: Prikaz linearnog modela u zatvorenom krugu upravljanog Ljapunovljevim kontrolerom

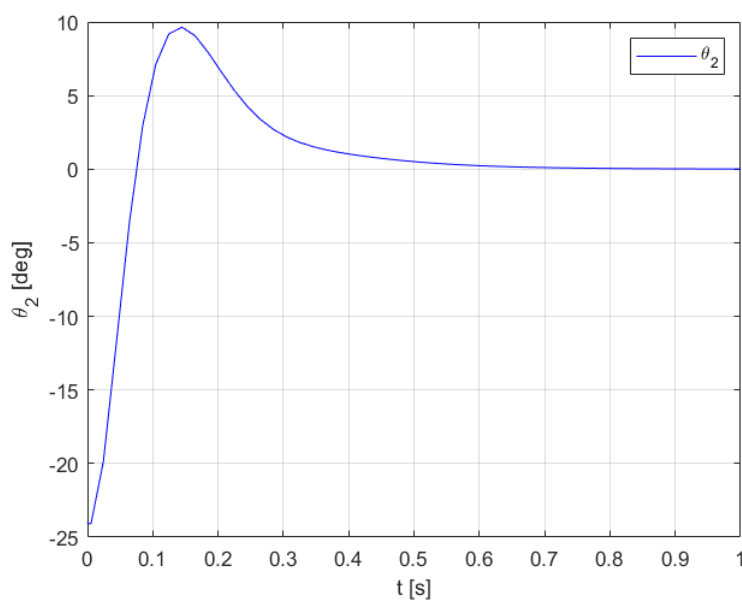


Naizgled ova simulacija izgleda isto kao simulacija sa LQR-om (Slika 8). Razlika između te dvije simulacije je što će se kod Ljapunovljeva kontrolera povratna veza zbrajati u sumatoru, a ne oduzimati.

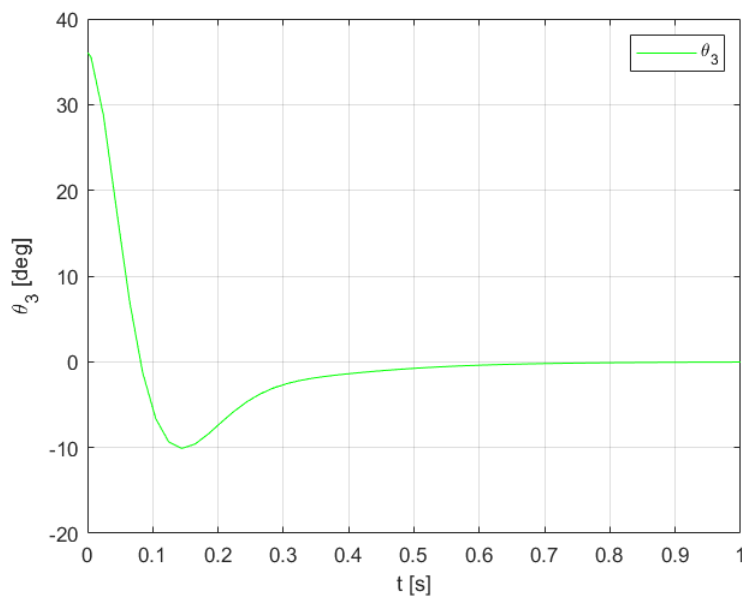
Pokrenut će se simulacija u trajanju  $t = 1$  s. Ispod će se prikazati odzivi simulacije, odnosi kutovi zakreta pojedinih njihala:



Slika 18: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 1 u decentraliziranoj Ljapunovljevoj regulaciji



Slika 19: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 2 u decentraliziranoj Ljapunovljevoj regulaciji

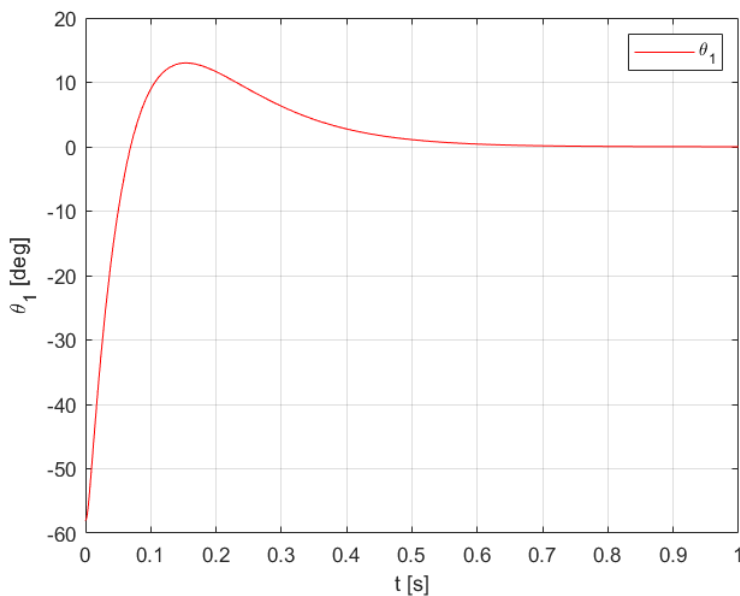


Slika 20: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 3 u decentraliziranoj Ljapunovljevoj regulaciji

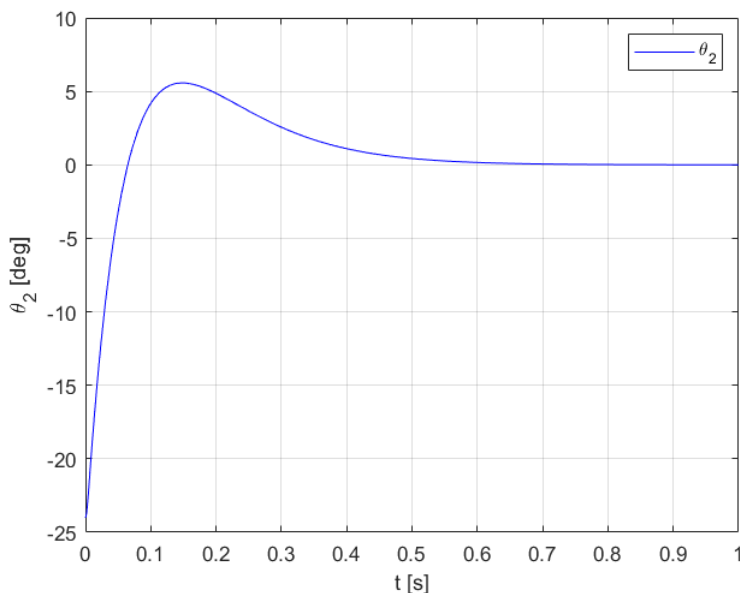
S obzirom da se grafovi stabiliziraju u nuli, može se zaključiti da je sustav stabilan i dobro reguliran. Uz to će se primjetiti da se sustav jako brzo stabilizira u vremenu od  $\approx 0,7$  s.

## 4. Usporedba centraliziranog i decentraliziranog upravljanja

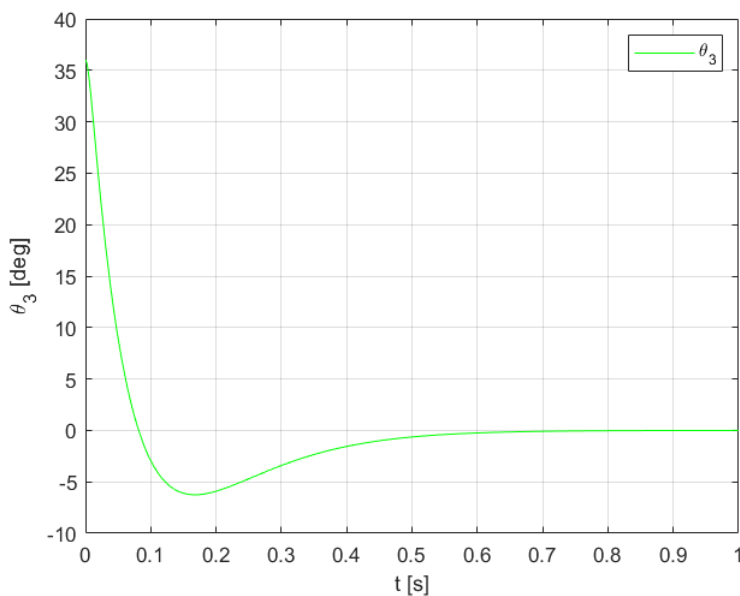
U prijašnjem poglavlju se vrijednost konstante opruge  $c$  promijenila. Zbog toga je potrebno simulaciju regulacije sa LQR-om (Slika 8) ponovno pokrenuti kako bi se dobio adekvatan odziv. Napraviti će se simulacija u trajanju  $t = 1$  s isto kao i simulacija decentraliziranog upravljanja kako bi se odzivi mogli usporediti:



Slika 21: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 1 u LQR regulaciji za  $c = 0,1$  N/m

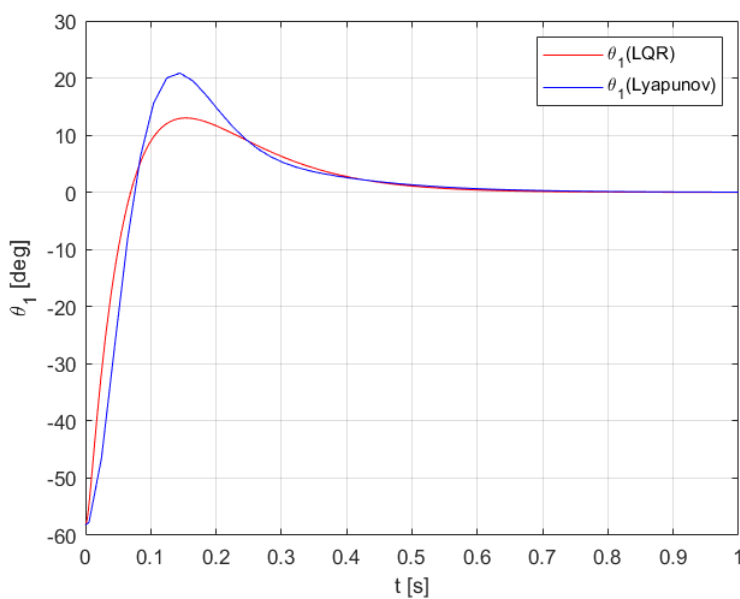


Slika 22: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 2 u LQR regulaciji za  $c = 0,1$  N/m

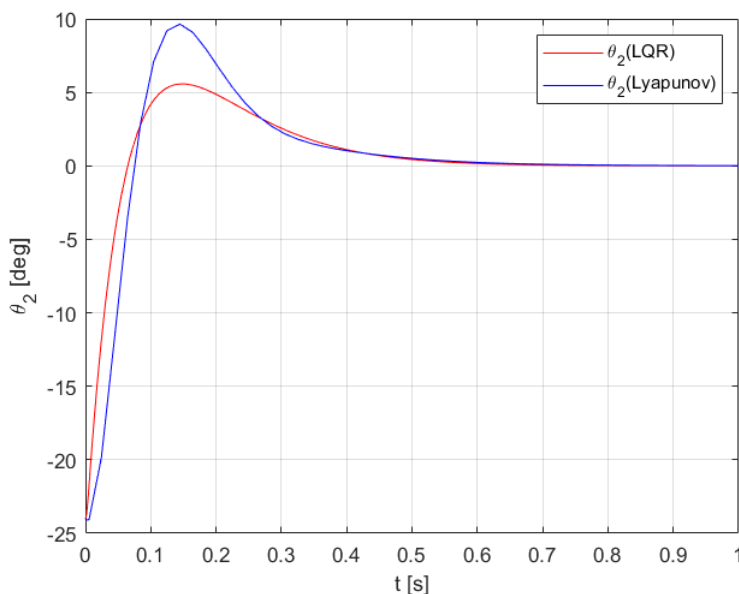
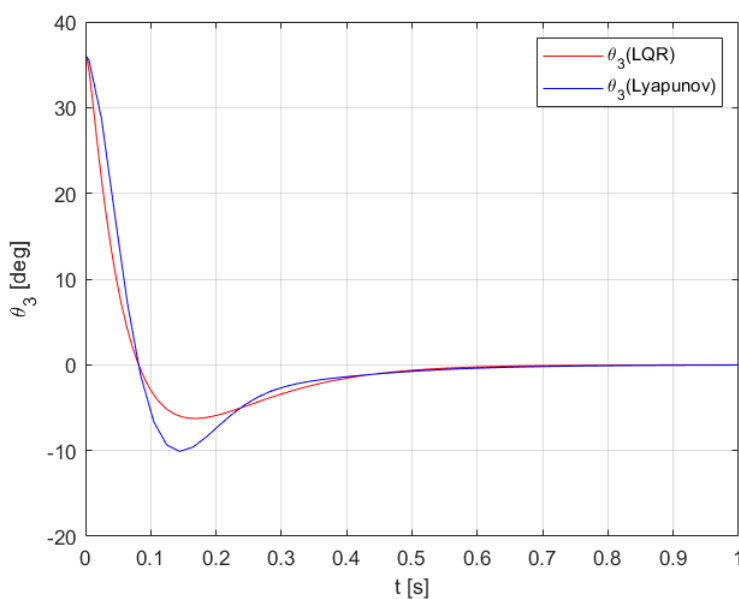


Slika 23: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 3 u LQR regulaciji za  $c = 0,1 \text{ N/m}$

Sada će se odzivi za ova dva tipa regulacije preklopiti i prikazati u jednom grafu:



Slika 24: Usporedba kutova zakreta Njihala 1 za  $c = 0,1 \text{ N/m}$

Slika 25: Usporedba kutova zakreta Njihala 2 za  $c = 0,1 \text{ N/m}$ Slika 26: Usporedba kutova zakreta Njihala 3 za  $c = 0,1 \text{ N/m}$ 

Preklapanjem grafova bolje će se prikazati razlike u putanji do stanja stabilnosti. Lako se primjeti da će obje regulacije rezultirati u jednako dugim procesima stabilizacije ( $\approx 0,7 \text{ s}$ ). Prva veća razlika nalazi se odmah na početku simulacija. Primjetit će se da LQR regulacija naglo ispravlja grešku bez većih devijacija, dok će Lyapunova regulacija imati blaže djelovanje. Obje regulacije imate će nekakav *overshoot*. Ovo je izraz koji opisuje odstupanje od željene vrijednosti koja je u ovom slučaju nula. No kod Lyapunovljeve regulacije odstupanje je skoro dvostruko veće od onog u LQR regulaciji. Iz toga se može zaključiti da je LQR regulacija preciznija. Usprkos tome, poslije odstupanja, Lyapunovljev odziv će se brže približiti nuli i s blažim nagibom stabilizirati. Par sekundi poslije, odzivi se praktički ujednače i jednako se stabiliziraju u nuli.

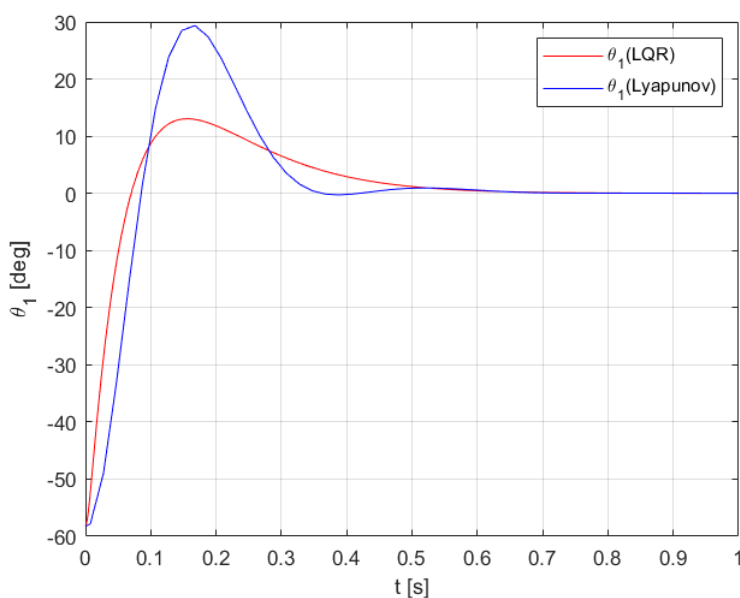
Iako su obje regulacije uspješno stabilizirale sustav, treba primjetiti razliku između vrijednosti unutar matrice kontrolera. Matrica kontrolera za LQR regulaciju bit će puna matrica, odnosno imat će vrijednosti u svakom polju, dok će matrica Ljapunovljeva kontrolera imati vrijednosti samo po dijagonili. To ukazuje da je za regulacije decentraliziranog sustava potrebno manje informacija i time manje energije u povratnoj vezi, što je poprilično zgodno kad sustav ima komponente na velikim udaljenostima jedna od druge, jer će se na svaku komponentu moći staviti kontroler samo za tu komponentu!

Sad preostaje pitanje: uz kakva ograničenja se ovaj sustav može decentralizirano upravljati? Ranije se vidjelo kako sustav nije moguće decentralizirano upravljati sa konstantom opruga u vrijednosti 100 N/m. Vrijednost je smanjena na 0,1 N/m i onda je decentralizirana regulacija bila moguća. Znači da je negdje između tih dviju vrijednosti granica. U idućem će se djeluju iterativnim postupkom povećavati veličina konstante opruga  $c$  i pratiti odzivi obiju pristupa regulaciji.

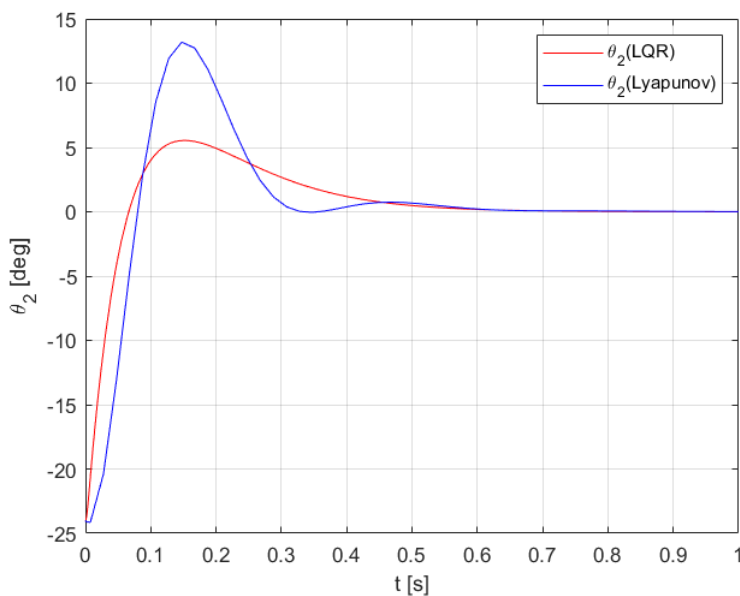
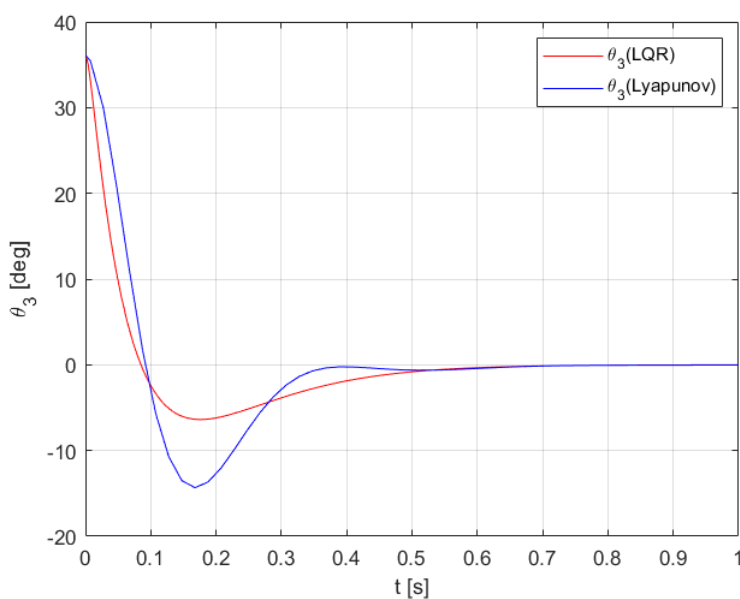
#### 4.1. Analiza robusnosti centralizirano i decentralizirano upravljanog sustava

Robusnost sustava je sposobnost sustava da funkcionira usprkos nekakvim poremećajima ili nekakvim većim ograničenjima. U prijašnjem se poglavlju nesvjesno pokazalo da je centralizirani sustav puno robusniji od decentraliziranog sustava jer je uspješno reguliran sustav s većom vrijednošću konstante opruge  $c$ .

Kako bi se provjerilo do koje je vrijednosti konstante opruge sustav moguće decentralizirano regulirati sustav, potrebno je napraviti više različitih simulacija. Već se napravila regulacije sa  $c = 0,1 \text{ N/m}$ , stoga će se uzeti slučaj u kojem je  $c = 5 \text{ N/m}$ . Korigirat će se matrica  $\mathbf{A}$ , dobiti nove matrice kontrolera kako je objašnjeno ranije i pokrenut će se simulacija. Dobiveni odzivi će se preklopiti u jednom grafu:



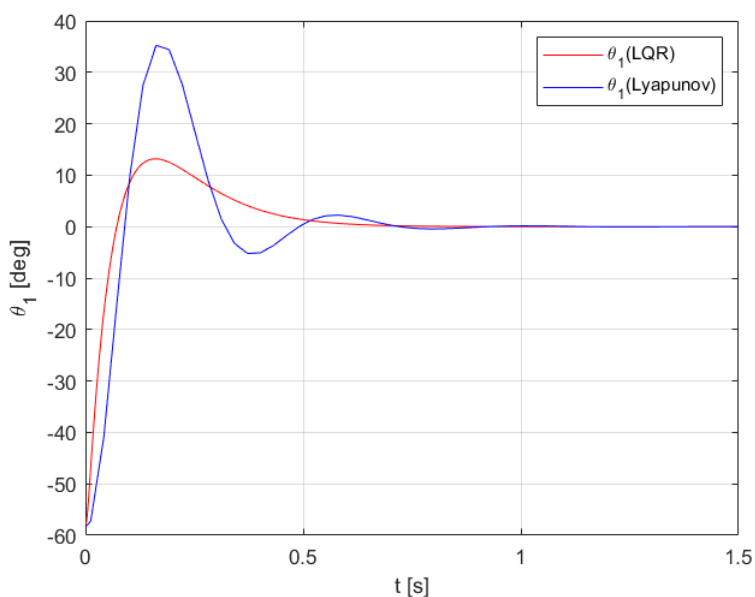
Slika 27: Usporedba kutova zakreta Njihala 1 za  $c = 5 \text{ N/m}$

Slika 28: Usporedba kutova zakreta Njihala 2 za  $c = 5 \text{ N/m}$ Slika 29: Usporedba kutova zakreta Njihala 3 za  $c = 5 \text{ N/m}$ 

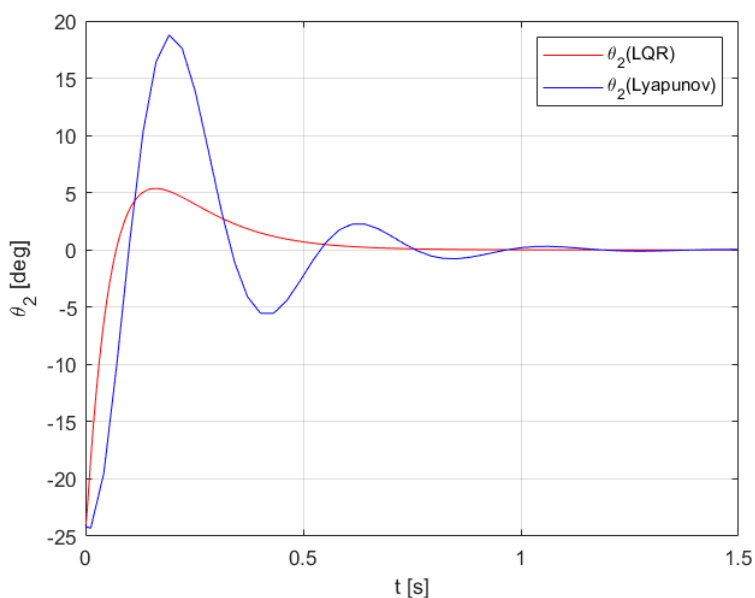
Za ovu vrijednost konstante opruge, odziv Ljapunovljeve regulacije bit će neprecizniji i odstupat će više puta od željene vrijednosti. Lagano se počinje uviđati koliko je decentralizirana regulacija osjetljiva na veće poremećaje, dok je LQR regulacija praktički nepromijenjena.



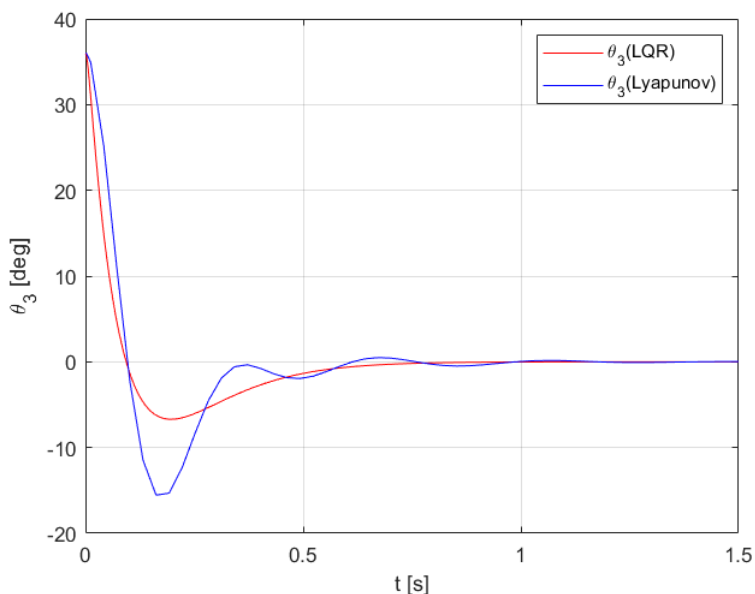
Simulacija će se ponoviti za vrijednost konstante opruge  $c = 15 \text{ N/m}$ . Prikazat će se i usporediti dobiveni odzivi:



Slika 30: Usporedba kutova zakreta Njihala 1 za  $c = 15 \text{ N/m}$

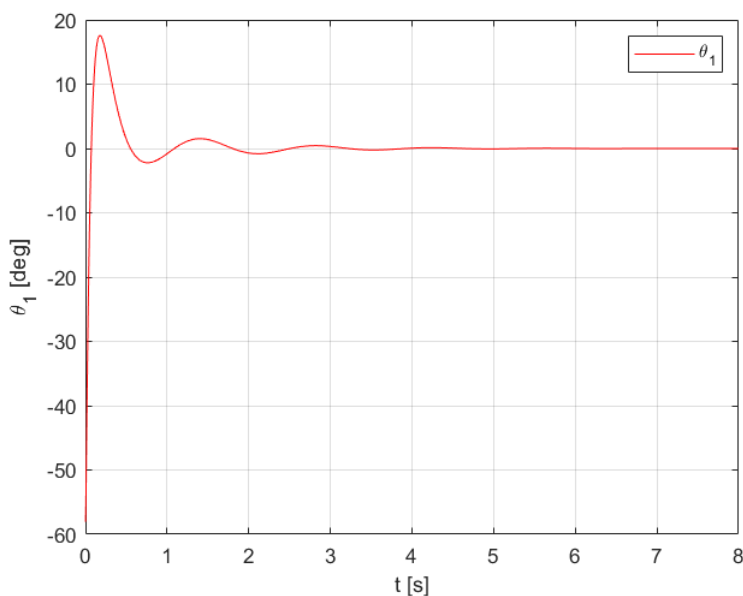


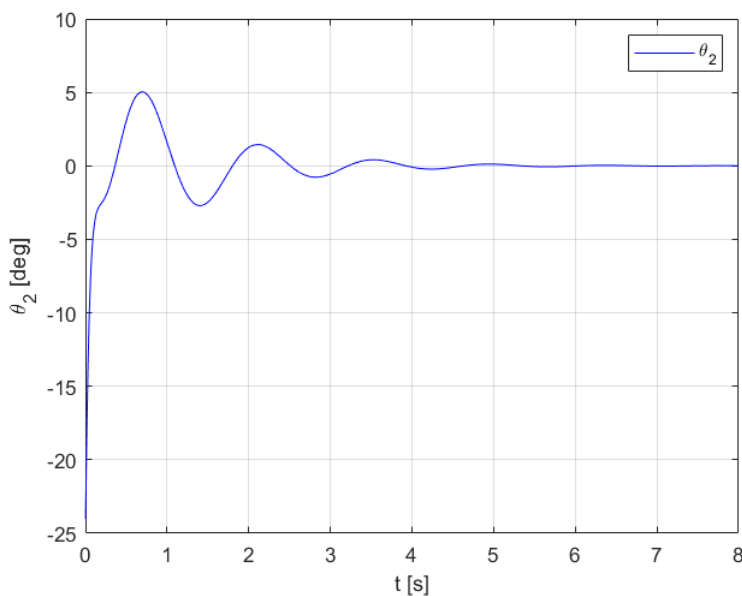
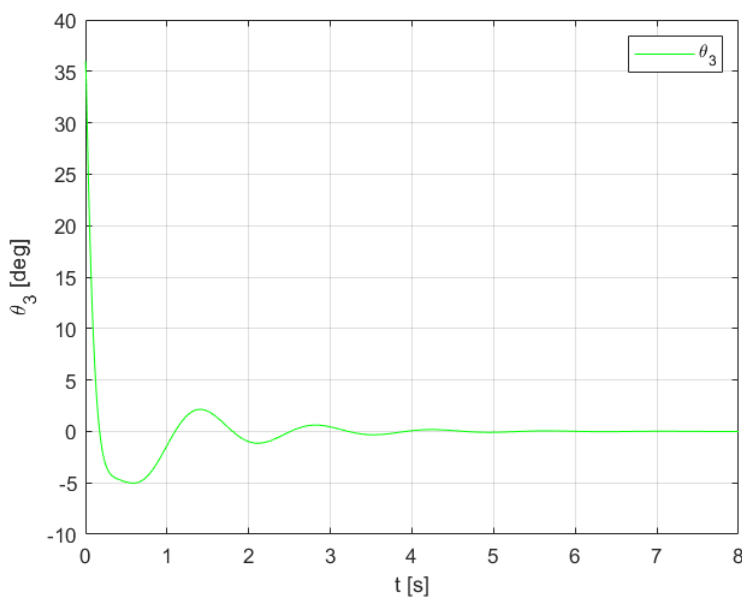
Slika 31: Usporedba kutova zakreta Njihala 2 za  $c = 15 \text{ N/m}$

Slika 32: Usporedba kutova zakreta Njihala 3 za  $c = 15 \text{ N/m}$ 

Grafovi ukazuju kako će sve više vremena biti potrebno za stabilizaciju sustava decentraliziranim upravljenjem. Uz to, odstupanja postepeno postaju sve veća, dok se odziv centralizirane regulacije neće zamjetno mijenjati.

Simulacija će se ponoviti za vrijednost konstante opruge  $c = 40 \text{ N/m}$ . Za ovaj slučaj se neće uspoređivati grafovi jer *Yalmip* nije uspio riješiti problem, odnosno ponovno se dobiva poruka koja se dobila za slučaj  $c = 100 \text{ N/m}$  (Slika 16). Kod LQR regulacije bit će druga priča. Sustav će se moći regulirati, a odzivi će imati sljedeći izgled:

Slika 33: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 1 u LQR regulaciji za  $c = 40 \text{ N/m}$

Slika 34: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 2 u LQR regulaciji za  $c = 40\text{ N/m}$ Slika 35: Grafički prikaz kuta zakreta Njihala 3 u LQR regulaciji za  $c = 40\text{ N/m}$ 

Iako je regulacija uspješna treba primijetiti da će se sustav potpuno stabilizirati nakon šest sekundi, što je puno duže od npr. regulacije pri  $c = 0,1\text{ N/m}$ . Primijetiti će se da je ponašanje njihala za razliku od prijašnjih slučajeva eratično i s više odstupanja. Ovo upućuje na povećanje zahtjevnosti regulacije sustava. No činjenica da je sustav uspješno reguliran pomoću LQR-a ukazuje na izrazitu robusnost centraliziranih sustava.

## 5. Zaključak

Rad se započeo prikazom modela inverznih njihala povezanih oprugama. Prikazom rastegnutih opruga pozornost se obratila kutovima zakreta koji su kasnije igrali glavnu ulogu u regulaciji. Dobiveni izraz za produljenje opruge bio je nelinearan i kasnije se pokazalo da bi bez linearizacije izračuni bili mnogo kompleksniji. Dobiveni model bio je poprilično velik; opisan sa šest jednažbi, sa šest ulaza i devet izlaza. Računanje tih jednažbi bilo bi puno zahtjevnije da se računi nisu odradili pomoću *MATLAB*-a. Kasnije su se za regulaciju koristili isključivo ulazi napona elektromotora. Simulaciranje pomoću *Simulink*-a bilo je od velike važnosti za prikaz odziva i naknadnu usporedbu istih. Ispostavilo se da su, iako energijski zahtjevniji, centralizirani sustavi izrazito robusni, time puno više otporni na poremećaje koji djeluju na sustav.

## Literatura

- [1] Martin Gracin, *Konstrukcija i upravljanje inverznog njihala sa zamašnjakom*, 2021.
- [2] <https://www.maxongroup.com/maxon/view/content/index>
- [3] <http://underactuated.mit.edu>
- [4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Linearquadratic\\_regulator](https://en.wikipedia.org/wiki/Linearquadratic_regulator)
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic\\_Riccati\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_Riccati_equation)
- [6] <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=ControlStateSpace>
- [7] Erfan Nozari, *Lecture 3: Stability, Controllability & Observability*, 2020.
- [8] <https://link.springer.com/content/pdf/bbm:978-3-319-32324-4/1>

## Prilog

```

1      %% Matricna transformacija
2
3  -   syms Jn1 Jn2 Jn3 Jz1 Jz2 Jz3 Ln1 Ln2 Ln3 Lz1 Lz2 Lz3 ...
4         mn1 mn2 mn3 mz1 mz2 mz3 M1 M2 M3 Fid1 Fid2 Fid3 ...
5         R1 R2 R3 g O1 O2 O3 T01 T02 T03 Ka1 Ka2 Ka3 ...
6         u1 u2 u3 Q1 Q2 Q3 H1 H2 H3 c LH
7
8
9  -   H = [Jn1 + Jz1 + mz1*Ln1^2   Jz1 0 0 0 0;
10         Jz1   Jz1 0 0 0 0;
11         0 0 Jn2 + Jz2 + mz2*Ln2^2 Jz2 0 0;
12         0 0 Jz2 Jz2 0 0;
13         0 0 0 0 Jn3 + Jz3 + mz3*Ln3^2 Jz3;
14         0 0 0 0 Jz3 Jz3];
15
16  -   C = [0 ; ((M1^2)*Fid1)/R1; 0 ; ((M2^2)*Fid2)/R2; 0 ; ((M3^2)*Fid3)/R3];
17
18  -   G = [-(mn1*Ln1*g + mz1*Lz1*g)*sin(O1) + c*LH^2*O1 - c*LH^2*O2; 0;
19         -(mn2*Ln2*g + mz2*Lz2*g)*sin(O2) - c*LH^2*O1 + 2*c*LH^2*O2 ...
20         - c*LH^2*O3; 0;
21         -(mn3*Ln3*g + mz3*Lz3*g)*sin(O3) - c*LH^2*O2 + c*LH^2*O3; 0];
22
23  -   T = [T01 ; -((Ka1*M1)*u1)/R1; T02 ;
24         -((Ka2*M2)*u2)/R2; T03 ; -((Ka3*M3)*u3)/R3];
25
26  -   Q = H^(-1) * (T - C - G);
27
28
29      %% Zadavanje parametara i racunanje matrica prostora stanja
30
31  -   Ln1 = 123.42*10^(-3);
32  -   Ln2 = 135.762*10^(-3);
33  -   Ln3 = 111.078*10^(-3);
34
35  -   Lz1 = 124.45*10^(-3);
36  -   Lz2 = 136.895*10^(-3);
37  -   Lz3 = 112.005*10^(-3);
38
39  -   mn1 = 0.366;
40  -   mn2 = 0.4026;
41  -   mn3 = 0.3294;
42
43  -   mz1 = 0.096;
44  -   mz2 = 0.1056;
45  -   mz3 = 0.0864;
46
47      % Ovdje ce se mijenjati vrijednosti konstante opruga kako bi se
48      % usporedivali odzivi centraliziranog i decentraliziranog upravljanja
49  -   c = 0.1;
50      %c = 5;
51      %c = 15;
52      %c = 0.1*10^3;
53      %c = 40;
54
55  -   LH = 0.076;
56

```

```

57 - Jn1 = 1.83*10^(-3);
58 - Jn2 = 2.013*10^(-3);
59 - Jn3 = 1.647*10^(-3);
60
61 - Jz1 = 6.567*10^(-4);
62 - Jz2 = 7.2237*10^(-4);
63 - Jz3 = 5.9103*10^(-4);
64
65 - R1 = 13.8;
66 - R2 = 3.51;
67 - R3 = 53.1;
68
69 - M1 = 49*10^(-3);
70 - M2 = 24.1*10^(-3);
71 - M3 = 92.8*10^(-3);
72
73 - Ka1 = 1.2;
74 - Ka2 = 1.5;
75 - Ka3 = 1.6;
76
77 - g = 9.81;
78
79
80 - A = [0 1 0 0 0 0 0 0 0;
81         (Ln1*g*mn1 + Lz1*g*mz1 - c*LH^2)/(mz1*Ln1^2 + Jn1) 0 ...
82         ((M1^2)/R1)/(mz1*Ln1^(2) + Jn1) (c*LH^2)/(mz1*Ln1^2 + Jn1) 0 0 0 0 0;
83         -(Ln1*g*mn1 + Lz1*g*mz1 - c*LH^2)/(mz1*Ln1^2 + Jn1) 0 ...
84         -((M1^2*(Jn1 + mz1*Ln1^2 + Jz1))/(Jz1*R1))/(mz1*Ln1^(2) + Jn1) ...
85         -(c*LH^2)/(mz1*Ln1^2 + Jn1) 0 0 0 0 0;
86         0 0 0 0 1 0 0 0 0;
87         (c*LH^2)/(mz2*Ln2^2 + Jn2) 0 0 ...
88         (Ln2*g*mn2 + Lz2*g*mz2 - 2*c*LH^2)/(mz2*Ln2^2 + Jn2) 0 ...
89         ((M2^2)/R2)/(mz2*Ln2^(2) + Jn2) (c*LH^2)/(mz2*Ln2^2 + Jn2) 0 0;
90         -(c*LH^2)/(mz2*Ln2^2 + Jn2) 0 0 ...
91         -(Ln2*g*mn2 + Lz2*g*mz2 - 2*c*LH^2)/(mz2*Ln2^2 + Jn2) 0 ...
92         -((M2^2*(Jn2 + mz2*Ln2^2 + Jz2))/(Jz2*R2))/(mz2*Ln2^(2) + Jn2) ...
93         -(c*LH^2)/(mz2*Ln2^2 + Jn2) 0 0;
94         0 0 0 0 0 0 0 1 0;
95         0 0 0 (c*LH^2)/(mz3*Ln3^2 + Jn3) 0 0 ...
96         (Ln3*g*mn3 + Lz3*g*mz3 - c*LH^2)/(mz3*Ln3^2 + Jn3) 0 ...
97         ((M3^2)/R3)/(mz3*Ln3^(2) + Jn3);
98         0 0 0 -(c*LH^2)/(mz3*Ln3^2 + Jn3) 0 0 ...
99         -(Ln3*g*mn3 + Lz3*g*mz3 - c*LH^2)/(mz3*Ln3^2 + Jn3) 0 ...
100        -((M3^2*(Jn3 + mz3*Ln3^2 + Jz3))/(Jz3*R3))/(mz3*Ln3^(2) + Jn3)];
101
102
103 - B = [0 0 0 0 0 0;
104         1/(mz1*Ln1^2 + Jn1) ((Ka1*M1)/R1)/(mz1*Ln1^2 + Jn1) 0 0 0 0;
105         -1/(mz1*Ln1^2 + Jn1) ...
106         -((Ka1*M1)*(Jn1 + mz1*Ln1^2 + Jz1))/((Jz1*R1)*(mz1*Ln1^2 + Jn1)) ...
107         0 0 0 0;
108         0 0 0 0 0 0;
109         0 0 1/(mz2*Ln2^2 + Jn2) ((Ka2*M2)/R2)/(mz2*Ln2^2 + Jn2) 0 0;
110         0 0 -1/(mz2*Ln2^2 + Jn2) ...
111         -((Ka2*M2)*(Jn2 + mz2*Ln2^2 + Jz2))/((Jz2*R2)*(mz2*Ln2^2 + Jn2)) 0 0;
112         0 0 0 0 0 0;
113         0 0 0 0 1/(mz3*Ln3^2 + Jn3) ((Ka3*M3)/R3)/(mz3*Ln3^2 + Jn3);
114         0 0 0 0 -1/(mz3*Ln3^2 + Jn3) ...
115         -((Ka3*M3)*(Jn3 + mz3*Ln3^2 + Jz3))/((Jz3*R3)*(mz3*Ln3^2 + Jn3))];
116
117

```

```

118 - C = [1 0 0 0 0 0 0 0 0;
119       0 1 0 0 0 0 0 0 0;
120       0 0 1 0 0 0 0 0 0;
121       0 0 0 1 0 0 0 0 0;
122       0 0 0 0 1 0 0 0 0;
123       0 0 0 0 0 1 0 0 0;
124       0 0 0 0 0 0 1 0 0;
125       0 0 0 0 0 0 0 1 0;
126       0 0 0 0 0 0 0 0 1];
127
128
129 - D = [0 0 0 0 0 0;
130       0 0 0 0 0 0;
131       0 0 0 0 0 0;
132       0 0 0 0 0 0;
133       0 0 0 0 0 0;
134       0 0 0 0 0 0;
135       0 0 0 0 0 0;
136       0 0 0 0 0 0;
137       0 0 0 0 0 0];
138
139
140 %% Određivanje i prikaz polova otvorenog sustava u Gaussovoj ravnini
141
142 - polovi_otvorenog_sustava = eig(A);
143
144 - sustav=ss(A,B,C,D);
145 - figure()
146 - pzmap(sustav)
147
148
149 %% Postavljanje početnih uvjeta i vrijednosti ulaza
150
151 - theta_1 = -58*pi/180;
152 - theta_2 = -24*pi/180;
153 - theta_3 = 36*pi/180;
154
155 - d_theta_1 = -120*pi/180;
156 - d_theta_2 = -90*pi/180;
157 - d_theta_3 = 0*pi/180;
158
159 - d_fi_1 = -360*pi/180;
160 - d_fi_2 = 0*pi/180;
161 - d_fi_3 = 180*pi/180;
162
163 - u1 = 0;
164 - u2 = 0;
165 - u3 = 0;
166
167 - Tau_theta1 = 0;
168 - Tau_theta2 = 0;
169 - Tau_theta3 = 0;
170
171 - pocetni_uvjeti_za_prostor_stanja = [theta_1 d_theta_1 d_fi_1 ...
172                                     theta_2 d_theta_2 d_fi_2 ...
173                                     theta_3 d_theta_3 d_fi_3];
174
175

```



```

176 %% Određivanje upravljivosti i osmotrivosti za LQR regulaciju
177
178 - prostor_stanja = ss(A,B,C,D);
179
180 - co = ctrb(prostor_stanja);
181 - upravljivost = rank(co);
182
183 - ob = obsv(prostor_stanja);
184 - osmotrivost = rank(ob);
185
186
187 %% Racunanje matrice kontrolera za centraliziranu LQR regulaciju
188
189 - A_LQR = A;
190 - B_LQR = B;
191 - B_LQR(:,1) = [];
192 - B_LQR(:,2) = [];
193 - B_LQR(:,3) = [];
194 - C_LQR = C;
195 - D_LQR = D;
196
197 - Q = [10000 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 100 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 100 0 0 0 0 0 0;
198       0 0 0 10000 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 100 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 100 0 0 0;
199       0 0 0 0 0 0 10000 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 100 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 100];
200
201 - R = [0.1 0 0; 0 0.1 0; 0 0 0.1];
202
203 - K_LQR = lqr(A_LQR,B_LQR,Q,R);
204
205 - K1_LQR = K_LQR(1,:);
206 - K2_LQR = K_LQR(2,:);
207 - K3_LQR = K_LQR(3,:);
208
209
210 %% Plotanje odziva sustava centralizirane LQR regulacije
211
212 - sim('linearni_model_LQR.slx')
213
214 - figure()
215 - plot(theta1(:,1),theta1(:,2),'r')
216 - legend('\theta_1')
217 - xlabel('t [s]')
218 - ylabel('\theta_1 [deg]')
219 - grid on
220
221 - figure()
222 - plot(theta2(:,1),theta2(:,2),'b')
223 - legend('\theta_2')
224 - xlabel('t [s]')
225 - ylabel('\theta_2 [deg]')
226 - grid on
227
228 - figure()
229 - plot(theta3(:,1),theta3(:,2),'g')
230 - legend('\theta_3')
231 - xlabel('t [s]')
232 - ylabel('\theta_3 [deg]')
233 - grid on
234
235

```

```

236 %% Određivanje i prikaz polova zatvorenog sustava sa LQR regulacijom
237
238 - B_LQR = B;
239 - B_LQR(:,1) = [];
240 - B_LQR(:,2) = [];
241 - B_LQR(:,3) = [];
242
243 - Ac = (A-B_LQR*K_LQR);
244
245 - polovi_zatvorenog_LQR_sustava = eig(Ac);
246
247 - sustav=ss(Ac,B,C,D);
248 - figure()
249 - pzmap(sustav)
250
251
252 %% Optimizacija centralizirano upravljanog sustava pomocu YALMIP-a
253
254 % Matrica Br predstavlja matricu ulaza koji ce se regulirati
255 - Br = B;
256 - Br(:,1) = [];
257 - Br(:,2) = [];
258 - Br(:,3) = [];
259
260 % Naredba sdpvar() definirat ce simetricnu matricu sa realnim
261 % vrijednostima. Matrica Y imat će dimenzije kao matrice A, dok će matrica
262 % L imati dimenzije 3x9, odnosno transponirane dimenzije matrice Br.
263 % Ove matrice bit ce rezultat optimizacije.
264 - Y = sdpvar(9);
265 - L = sdpvar(3,9);
266
267 % Postavljanje uvjeta ovog sustava
268 - uvjeti = [-Y <= 0, Y*A.' + L.*Br.' + A*Y + Br*L <= 0];
269
270 % Naredbom solvesdp() pokrenut ce se optimizacija na temelju
271 % postavljenih uvjeta
272 - optimizacijsko_rjesenje_centralizirano = solvesdp(uvjeti);
273
274 % Naredba double() ce simbolicke rezultate optimizacije
275 % pretvoriti u vrijednosti
276 - Y = double(Y);
277 - L = double(L);
278
279 % Rezultati se uvrštavaju u izraza za supstituciju, cime se dobiva
280 % vrijednost pojačanja K
281 - P_c = inv(Y);
282 - K_L_c = L/Y;
283
284
285 %% Optimizacija decentralizirano upravljanog sustava pomocu YALMIP-a
286
287 % Matrica Br predstavlja matricu ulaza koji ce se regulirati
288 - Br = B;
289 - Br(:,1) = [];
290 - Br(:,2) = [];
291 - Br(:,3) = [];
292
293 % Definiraju se simetricne matrice
294 - Y1 = sdpvar(3);
295 - Y2 = sdpvar(3);
296 - Y3 = sdpvar(3);
297

```

```
298 - L1 = sdpvar(1,3);
299 - L2 = sdpvar(1,3);
300 - L3 = sdpvar(1,3);
301
302 % Definirane matrice se uvrštavaju po dijagonali
303 - Y = [Y1 zeros(3,6);
304       zeros(3,3) Y2 zeros(3,3);
305       zeros(3,6) Y3];
306
307 - L = [L1 zeros(1,6);
308       zeros(1,3) L2 zeros(1,3);
309       zeros(1,6) L3];
310
311 - uvjeti = [-Y <= 0, Y*A.' + L.*Br.' + A*Y + Br*L <= 0];
312
313 - optimizacijsko_rjesenje_decentralizirano = solvesdp(uvjeti);
314
315 - Y = double(Y);
316 - L = double(L);
317
318 - P_dec = inv(Y);
319 - K_L_dec = L/Y;
320
321 % Ispisuju se matrice kontrolera za pojedine povratne veze
322 - K1_L_dec = K_L_dec(1,:);
323 - K2_L_dec = K_L_dec(2,:);
324 - K3_L_dec = K_L_dec(3,:);
325
326
327 %% Plotanje odziva sustava decentralizirane regulacije
328
329 - sim('linearni_model_Ljapunov.slx')
330
331 - figure()
332 - plot(theta1(:,1),theta1(:,2),'r')
333 - legend('\theta_1')
334 - xlabel('t [s]')
335 - ylabel('\theta_1 [deg]')
336 - grid on
337
338 - figure()
339 - plot(theta2(:,1),theta2(:,2),'b')
340 - legend('\theta_2')
341 - xlabel('t [s]')
342 - ylabel('\theta_2 [deg]')
343 - grid on
344
345 - figure()
346 - plot(theta3(:,1),theta3(:,2),'g')
347 - legend('\theta_3')
348 - xlabel('t [s]')
349 - ylabel('\theta_3 [deg]')
350 - grid on
351
352
```

```
353 %% Plotanje usporedbe odzvia dviju regulacija
354
355 - sim('linearni_model_LQR.slx');
356 - theta1_LQR = theta1;
357 - theta2_LQR = theta2;
358 - theta3_LQR = theta3;
359
360 - sim('linearni_model_Ljapunov.slx');
361 - theta1_Ljapunov = theta1;
362 - theta2_Ljapunov = theta2;
363 - theta3_Ljapunov = theta3;
364
365 - figure()
366 - plot(theta1_LQR(:,1), theta1_LQR(:,2), 'r', ...
367       theta1_Ljapunov(:,1), theta1_Ljapunov(:,2), 'b')
368 - legend('\theta_1(LQR)', '\theta_1(Ljapunov)')
369 - xlabel('t [s]')
370 - ylabel('\theta_1 [deg]')
371 - grid on
372
373 - figure()
374 - plot(theta2_LQR(:,1), theta2_LQR(:,2), 'r', ...
375       theta2_Ljapunov(:,1), theta2_Ljapunov(:,2), 'b')
376 - legend('\theta_2(LQR)', '\theta_2(Ljapunov)')
377 - xlabel('t [s]')
378 - ylabel('\theta_2 [deg]')
379 - grid on
380
381 - figure()
382 - plot(theta3_LQR(:,1), theta3_LQR(:,2), 'r', ...
383       theta3_Ljapunov(:,1), theta3_Ljapunov(:,2), 'b')
384 - legend('\theta_3(LQR)', '\theta_3(Ljapunov)')
385 - xlabel('t [s]')
386 - ylabel('\theta_3 [deg]')
387 - grid on
388
389
390
```