

# Analiza vibracija stola za izolaciju vibracija

---

**Perica, Ivan**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:195733>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-05**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Ivan Perica**

Zagreb, 2022

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **ANALIZA VIBRACIJA STOLA ZA IZOLACIJU VIBRACIJA**

Mentor

Prof. dr. sc. Marko Jokić

Student

Ivan Perica

Zagreb, 2022

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena rijekom studija I navedenu literature.

Zahvaljujem se svom mentoru Dr. sc. Marku Jokiću, dipl. ing. na strpljenju i prenesenom znanju.

Ivan Perica



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
 Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
 Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ivan Perica**

JMBAG: **0035220230**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza vibracija stola za izolaciju vibracija**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Vibration analysis of vibration isolation table**

Opis zadatka:

Stol za izolaciju vibracija koristi se u slučaju kada je potrebno izolirati mjerni instrument, poput preciznog optičkog ili mehaničkog mjernog instrumenta, od vibracija okoline koje nepovoljno utječu na rad instrumenta. Najčešće je izveden kao masivna ploča koja je sustavom opruga i prigušnih elemenata povezana s osloncima stola i okolinom. Stol za izolaciju vibracija, radi povećanja učinkovitosti, dodatno može biti opremljen sustavom za aktivnu regulaciju vibracija.

U ovom radu je potrebno provesti analizu učinkovitosti stola za izolaciju vibracija. Potrebno je dati pregled postojećih rješenja, te odabrati konstrukcijsku varijantu podesnu za izolaciju manjih optičkih instrumenata, poput mikroskopa. Za odabranu konstrukcijsku varijantu, načiniti matematički model s ciljem ocjene učinkovitosti sustava izolacije vibracija. Analizu provesti za odabrane parametre vibracija okoline, te istražiti utjecaj značajki sustava opruga i prigušnih elemenata na učinkovitost izolacije.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. **Marko Jokić**

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
 2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
 3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
 2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
 3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. **Vladimir Soldo**

## Sadržaj

1	Uvod.....	1
1.1	Općenito o vibracijama .....	1
1.2	Izolacija vibracija.....	1
2	Stolovi za izolaciju vibracija.....	2
2.1	Što su stolovi za izolaciju vibracija?.....	2
2.2	Izvedbe stolova za izolaciju vibracija .....	4
3	Modeliranje sustava .....	8
3.1	Diferencijalne jednadžbe.....	10
3.2	Sustav u matičnom obliku .....	14
4	Analiza .....	17
4.1	Vrijednosti geometrijskih parametara .....	18
4.2	Vrijednosti vibracijskih parametara .....	18
4.3	Analiza programskim paketom Matlab .....	20
5	Zaključak.....	28
6	Literatura.....	30

## Popis slika

Slika 2.1 - Stol za izolaciju vibracija .....	3
Slika 2.2 - Ploča stola.....	4
Slika 2.3 - Presjek ploče stola.....	4
Slika 2.4 - Kruti oslonci .....	5
Slika 2.5 - Pasivni oslonci.....	6
Slika 2.6 - Aktivni oslonci .....	7
Slika 3.1 - Odabrani stol .....	8
Slika 3.2 - Mehanički model sustava za vertikalnu uzbuđu.....	9
Slika 3.3 - Razlika raspodjele pomaka po duljini opruge .....	10
Slika 3.4 - Sile na ploču uslijed horizontalne uzbuđe .....	11
Slika 4.1 - Prijenosna funkcija $u_1 - i_1$ .....	21
Slika 4.2 - Prijenosna funkcija $u_1 - i_4$ .....	21
Slika 4.3 - Prijenosna funkcija $u_2 - i_2$ .....	22
Slika 4.4 - Prijenosna funkcija $u_2 - i_5$ .....	22
Slika 4.5 - Prijenosna funkcija $u_3 - i_3$ .....	23
Slika 4.6 - Prijenosna funkcija $u_3 - i_6$ .....	23
Slika 4.7 - Prijenosna funkcija $u_4 - i_1$ .....	24
Slika 4.8 - Prijenosna funkcija $u_4 - i_4$ .....	24
Slika 4.9 - Prijenosna funkcija $u_5 - i_2$ .....	25
Slika 4.10 - Prijenosna funkcija $u_5 - i_5$ .....	25
Slika 4.11 - Prijenosna funkcija $u_6 - i_3$ .....	26
Slika 4.12 - Prijenosna funkcija $u_6 - i_6$ .....	26
Slika 4.13 - Prikaz polova sustava u kompleksnoj ravnini .....	27

**Popis tablica**

Tablica 2.1 - Svojstva najčešćih šumova .....	2
Tablica 4.1 - Parametri stola .....	18
Tablica 4.2 - Vrijednosti koeficijenata prigušenja .....	19



**Popis oznaka**

Oznaka	Mjerna jedinica	Opis
$u_v$	m	Vertikalni pomak podloge
$u_y$	m	Rotacija podloge oko osi y
$u_z$	m	Rotacija podloge oko osi z
$\dot{u}_v$	m/s	Translatorna brzina podloge
$\dot{u}_y$	m/s	Kutna brzina podloge oko osi y
$\dot{u}_z$	m/s	Kutna brzina podloge oko osi z
$x$	m	Vertikalni pomak ploče stola
$\varphi_y$	m	Rotacija ploče stola oko osi y
$\varphi_z$	m	Rotacija ploče stola oko osi z
$\dot{x}$	m/s	Translatorna brzina ploče stola
$\dot{\varphi}_y$	m/s	Kutna brzina ploče stola oko osi y
$\dot{\varphi}_z$	m/s	Kutna brzina ploče stola oko osi z
$\ddot{x}$	m/s <sup>2</sup>	Ubrzanje ploče stola
$\ddot{\varphi}_y$	m/s <sup>2</sup>	Kutno ubrzanje ploče stola oko osi y
$\ddot{\varphi}_z$	m/s <sup>2</sup>	Kutno ubrzanje ploče stola oko osi z
$a$	m	Pola duljine stola
$b$	m	Pola širine stola
$k_s$	N/m	Ekvivalentna krutost serijskog spoja opruga
$k_n$	N/m	Krutost noge stola
$k_p$	N/m	Krutost prigušivača
$F_{ki}$	N	Elastična sila u pojedinom prigušivaču
$F_{ci}$	N	Sila prigušenja u pojedinom prigušivaču
$m$	kg	Masa ploče stola
$J_y$	kgm <sup>2</sup>	Moment tromosti ploče stola oko osi y
$J_z$	kgm <sup>2</sup>	Moment tromosti ploče stola oko osi z
$l_n$	m	Duljina noge stola
$l_p$	m	Duljina prigušnog elementa

---

$l_{uk}$	m	Ukupna duljina noge sa prigušnim elementom
$h$	m	Visina stola
$A_n$	m <sup>2</sup>	Površina poprečnog presjeka stola
$E$	MPa	Modul elastičnosti za čelik
$\omega_{np}$	Hz	Vertikalna rezonantna frekvencija prigušivača
$\zeta$	/	Bezdimenzijski faktor prigušenja
$c_p$	Ns/m	Koeficijent prigušenja prigušivača

## Sažetak

Kako znanost i industrija napreduju, napredak je u sve manjim inkrementima i na sve nižoj razini. Za proučavanje, mjerenje i dokumentiranje takvih fenomena, potrebno je koristiti vrlo preciznu mjernu opremu. Korištenje vrlo precizne opreme zahtijeva i vrlo kontrolirane uvjete u kojima se ona primjenjuje, jer mjerenje je pouzdano koliko i najslabija karika mjernog postava.

Jedan od poremećaja koji najviše utječu na točnost i pouzdanost mjerenja su mehaničke vibracije. Vibracije dolaze u raznim oblicima a najproblematičnije su nisko-frekvencijske vibracije prenesene sa okoline kroz podlogu na mjerni postav. Mjerni postav potrebno je izolirati od takvih vibracija kako bi one u što manjoj mjeri utjecale na rezultate eksperimenata. Za tu svrhu se primjenjuju stolovi za izolaciju vibracija, koji se najčešće sastoje od masivne ploče oslonjene na četiri noge sa prigušnim i opružnim elementima.

U ovome radu dan je pregled izvedbi stolova za izolaciju vibracija. Nakon pregleda, odabrana je pasivna izvedba stola za izolaciju vibracija i načinjen matematički model. Matematički model stavljen je u prostor stanja, te je takav unesen u računalni program Matlab, gdje je analiziran kako bi se uočili utjecaji prigušenja i krutosti sustava na njegov odziv.

Ključne riječi: Stol za izolaciju vibracija, Analiza vibracija, Prisilne vibracije, Izolacija vibracija

## Summary

With today's rate in science and industry advancements, improvements are smaller and smaller and at a much lower level. For observing, measuring and documenting phenomena needed for advancement, it is necessary to use very precise measuring equipment. The use of that equipment requires highly controlled environment in which it is used, because the experiment is as precise and as reliable as its weakest link.

One of the biggest disturbances influencing the measuring precision are mechanical vibrations. Mechanical vibrations come in all kinds of forms, but the most problematic are the low frequency vibrations translated from the environment through foundation to the experimental setup. It is required to isolate the experimental setup from those kinds of vibrations and make them influence the measuring processes as little as possible. Optical tables are used for that purpose. They are most often comprised of a massive breadboard supported by 4 legs with isolation elements.

In this paper an overview of the types of optical tables is given. After the overview, the passive isolation was chosen for the analysis and a mathematical model was made. Mathematical model was converted into a state space model and was imported into software called Matlab, where it was analyzed for the purpose of observing how the elastic and damping elements influence the response of the system.

Key words: Optical tables, Vibration analysis, Forced vibrations, Vibration isolation

# 1 Uvod

## 1.1 Općenito o vibracijama

Vibracije su oscilatorno gibanje mehaničkih sustava. Osnovni vibracijski sustav sastoji se od 3 člana. Prvi član je opružni član u kojem se akumulira potencijalna energija. Drugi član je član u kojem se akumulira kinetička energija. Treći je član prigušni koji disipira energiju. Tijekom vibriranja kinetička se energija pretvara u potencijalnu i obratno, a ukoliko je prigušenje dovoljno značajno u mehanički model se dodaje i prigušivač koji tijekom svakog perioda uzima dio energije i pretvara ju u toplinsku.

Vibracije se mogu dijeliti prema raznim kriterijima. Prva podjela je na diskretne i kontinuirane vibracijske sustave. Diskretne sustave karakteriziraju odvojene mase i krutosti, te konačan broj stupnjeva slobode gibanja, dok kod kontinuiranih sustava govorimo o beskonačnom broju stupnjeva slobode gibanja. Druga podjela je vezana na prisustvo uzbudne sile. Ako sustav vibrira slobodno bez sile, govorimo o slobodnim vibracijama, a ukoliko na sustav djeluje uzbudna sila govorimo o prisilnim vibracijama. Nadalje, vibracijske sustave možemo podijeliti na prigušene i neprigušene, ovisno o tome je li u mehaničkom modelu prisutan prigušivač. U realnim sustavima neko prigušenje je uvijek prisutno, no pitanje koje se postavlja pred inženjera je ocijeniti je li ono dovoljno zanemarivo za isključivanje iz modela. Osim toga, podjelu možemo izvršiti na linearne i nelinearne sustave. Za linearne sustave metode su jednostavnije i vrlo dobro razvijene, dok je nelinearne sustave puno teže analizirati. Na posljetku, podjelu vibracija možemo izvršiti i prema periodičnosti. Prema tome razlikujemo pravilne, odnosno determinističke vibracije, te nepredvidive ili stohastičke vibracije kod kojih ne znamo točno funkciju uzbuđene već je potrebno aproksimirati njene vrijednosti nekim metodama. [2],[3]

Analiza izvršena u ovom radu bavit će se diskretnim linearnim prigušenim prisilnim stohastičkim sustavom.

## 1.2 Izolacija vibracija

Vibracije u inženjerskoj praksi nikada ne djeluju samo na sustav iz kojeg izvire. Gibanje čestica sustava uvijek pobuđuje i gibanja čestica susjednih predmeta s kojima je osnovni sustav u kontaktu. U tom slučaju javlja se transmisija vibracija, te i susjedni sustavi počinju vibrirati. Osim toga, može se javiti i obratna situacija gdje predmeti van promatranog sustava vibriraju, ali su nizom materija u kontaktu sa promatranim sustavom pa ga mogu uzbuditi i nepoželjno djelovati na njega. U oba slučaja to može dovesti do većih ili manjih problema.

Prema tome izolacija vibracija, kao područje istraživanja unutar teorije vibracije, razlikuje dva glavna problema. Prvi je problem prijenosa vibracija sa radnog sustava na okolinu, a drugi je problem utjecaja dinamike okoline na promatrani sustav. [2],[3]

Ovdje promatrani problem je analiziranje smanjenja transmisije vibracija okoline na mjerne instrumente putem stola za izolaciju vibracija, odnosno analiza prijenosa vibracija okoline na promatrani sustav.

## 2 Stolovi za izolaciju vibracija

### 2.1 Što su stolovi za izolaciju vibracija?

U laboratorijima, često se provode vrlo precizni eksperimenti, te ih se pokušava izolirati od što više vanjskih šumova (što šum je konkretno ovisi o tome što se mjeri). Jedan od čestih šumova, odnosno smetnji su vanjske vibracije koje se prenose na sustav i utječu na točnost provedenog eksperimenta. Izvori vanjskih vibracija mogu biti razni, poput: klima uređaja, hodanja ljudi, toka vanjskog prometa i slično.

Type	Frequency	Amplitude
Air Compressors	4 - 20 Hz	$10^{-2}$ in
Handling Equipment	5 - 40 Hz	$10^{-3}$ in
Pumps (Vacuum, comp or non-comp fluids)	5 - 25 Hz	$10^{-3}$ in
Building Services	7 - 40 Hz	$10^{-4}$ in
Foot Traffic	0.5 - 6 Hz	$10^{-5}$ in
Acoustics (B)	100 - 10000 Hz	$10^{-2}$ to $10^{-4}$ in
Air currents	Labs can Vary Depending on Class	Not Applicable
Punch Presses	Up to 20 Hz	$10^{-2}$ to $10^{-5}$ in
Transformers	50 - 400 Hz	$10^{-4}$ to $10^{-5}$ in
Elevators	Up to 40 Hz	$10^{-3}$ to $10^{-5}$ in
Building Motion	46 Hz per Meter of Height, Horizontal	0.1 in
Building Pressure Waves	1 - 5 Hz	$10^{-5}$ in
Railroad <sup>a</sup>	5 - 20 Hz	$\pm 0.15g$
Highway Traffic <sup>a</sup>	5 - 100 Hz	$\pm 0.001g$

Tablica 2.1 - Svojstva najčešćih šumova

Prema tome, očito je da su vibracije neizbježne, te je rješenje problema postaviti mjerne uređaje na poseban stol, stol za izolaciju vibracija. Stol za izolaciju vibracija tada nastoji smanjiti prijenos vanjskih vibracija na eksperimentalni postav. Osim što mora izolirati cijeli postav od okoline, stol za izolaciju vibracija mora imati mogućnost čvrstog prihvata instrumenata na njegovu površinu, te minimalnu transmisiju vibracija s elemenata sustava koji vibriraju na ostale elemente.



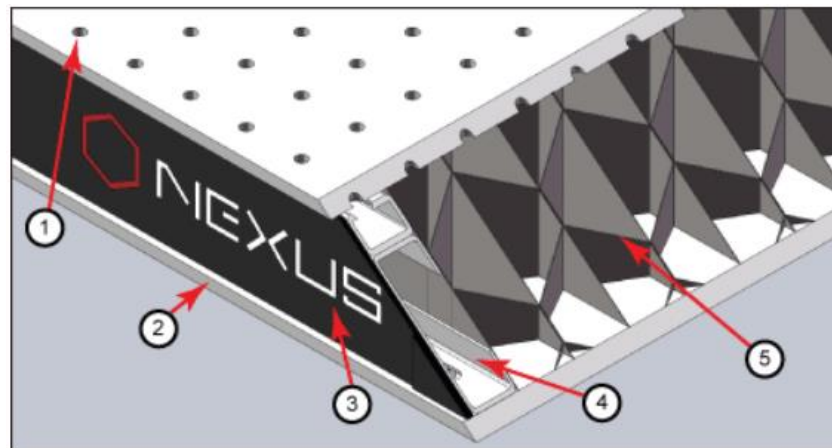
**Slika 2.1 - Stol za izolaciju vibracija**

## 2.2 Izvedbe stolova za izolaciju vibracija

U suštini, stol za izolaciju vibracija sastoji se od dva glavna dijela: ploče na koju se postavljaju instrumenti i sustava nogu stola na kojima ta ploča stoji.



Slika 2.2 - Ploča stola



[Click to Enlarge](#)

Figure 2: Nexus Table / Breadboard Cross Section, Showing the (1) Top Skin, (2) Bottom Skin, (3) Side Finishing Trim, (4) Side Panels, and (5) Honeycomb Core

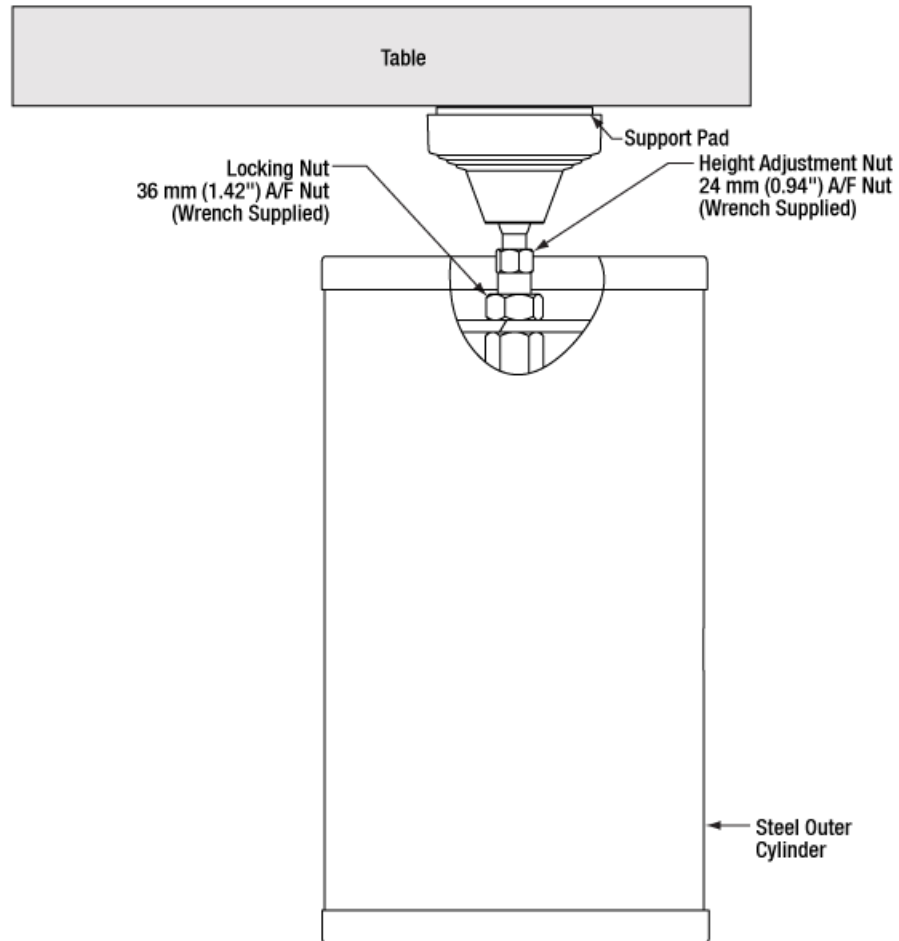
Slika 2.3 - Presjek ploče stola

Ploča stola kompleksnija je nego izgleda. Naime, ona je zapravo *sandwich* konstrukcija sastavljena od dvije ploče sa gornje i donje strane između kojih su aluminijske saće, te obruba stola.

Noge stola uvijek dolaze kao set, te se na njih montira ploča stola. Postoje 3 osnovne izvedbe oslanjanja ploče stola za izolaciju vibracija.

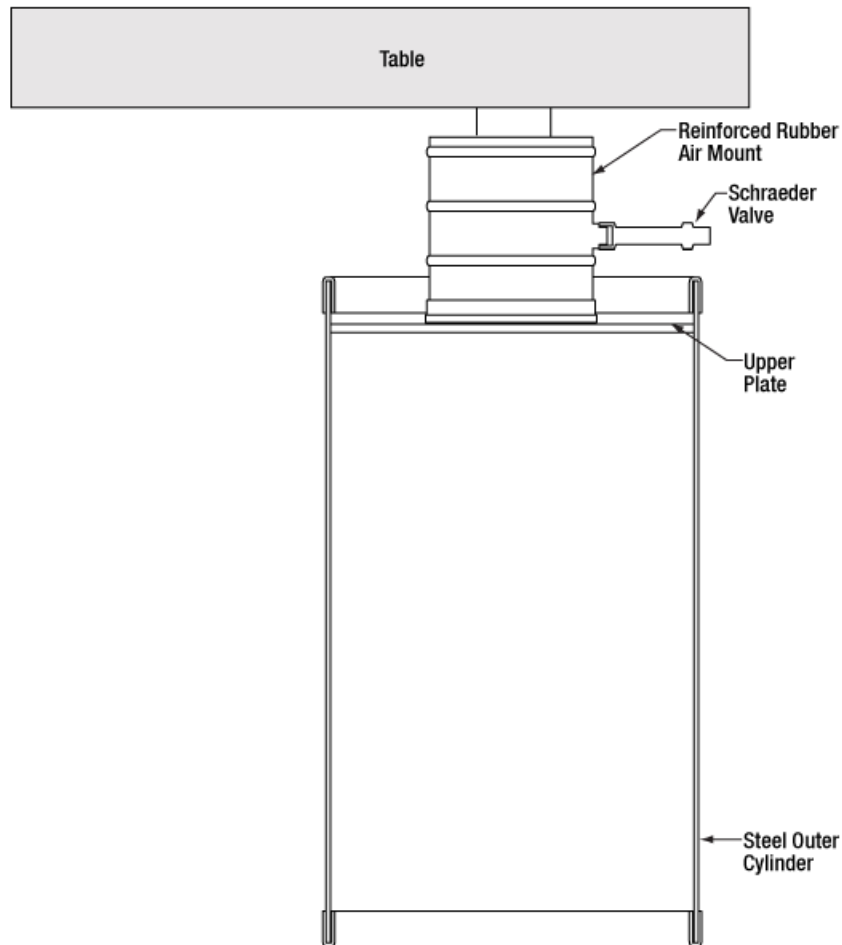


Prva i najjednostavnija izvedba je kruto oslanjanje stola. Noge su fiksne a vijcima se samo može podesiti ravnoća stola. Za izolaciju vibracija koriste se samo elastična svojstva ploče stola i nogu stola. Elastičnost i prigušenje oslonaca nisu podesivi, već su konstantni i predodređeni konstrukcijskom izvedbom i odabranim materijalima.



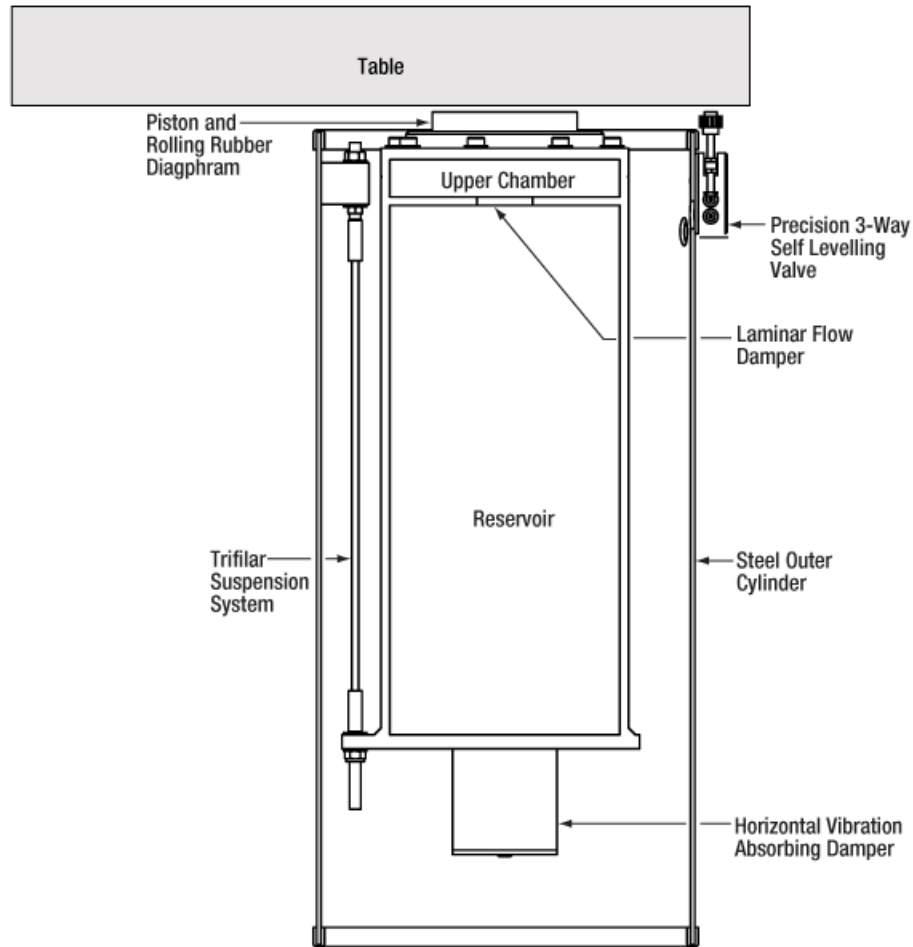
Slika 2.4 - Kruti oslonci

Druga izvedba su oslonci sa pasivnom izolacijom. U odnosu na krutu izolaciju, u ovoj izvedbi dodane su zračne opruge podesive karakteristike. Karakteristika se može podešavati povećanjem ili smanjenjem tlaka unutar opruga, ovisno o konkretnoj primjeni, ali je fiksna tijekom eksperimenta.



Slika 2.5 - Pasivni oslonci

Treće učestala izvedba je aktivno izolirana ploča. Za ostvarenje aktivne izolacije, u odnosu na prethodnu izvedbu, dodani su servo ventili i elektronika, koji automatiziraju sustav, te omogućuju konstantne korekcije karakteristika za najbolju izolaciju postava od vanjskih vibracija, no to znatno poskupljuje cijeli stol.



Slika 2.6 - Aktivni oslonci

Sve tri izvedbe primjenjive su u današnjoj industriji s obzirom na to koja razina preciznosti je potrebna. Ova analiza bavit će se pasivnom izvedbom oslanjanja ploče. [5]

### 3 Modeliranje sustava

Za proračune realnih sustava potrebno ih je predočiti odgovarajućim mehaničkim, a potom i matematičkim modelima, uzimajući u obzir određene utjecajne faktore i dijelove sustava. Realne sustave moguće je modelirati na mnoge načine i do velike razine kompleksnosti, no to nije najbolje rješenje. Na inženjeru je da odredi do koje razine kompleksnosti je potrebno modelirati sustav. Modeliran na preniskoj razini, proračun neće dati rezultate koji odgovaraju stvarnosti. Nasuprot toga, proračun prekompleksnog modela može vremenski trajati neisplativo dugo, ili u ekstremnom slučaju je moguće da se do rješenja ne može ni doći.

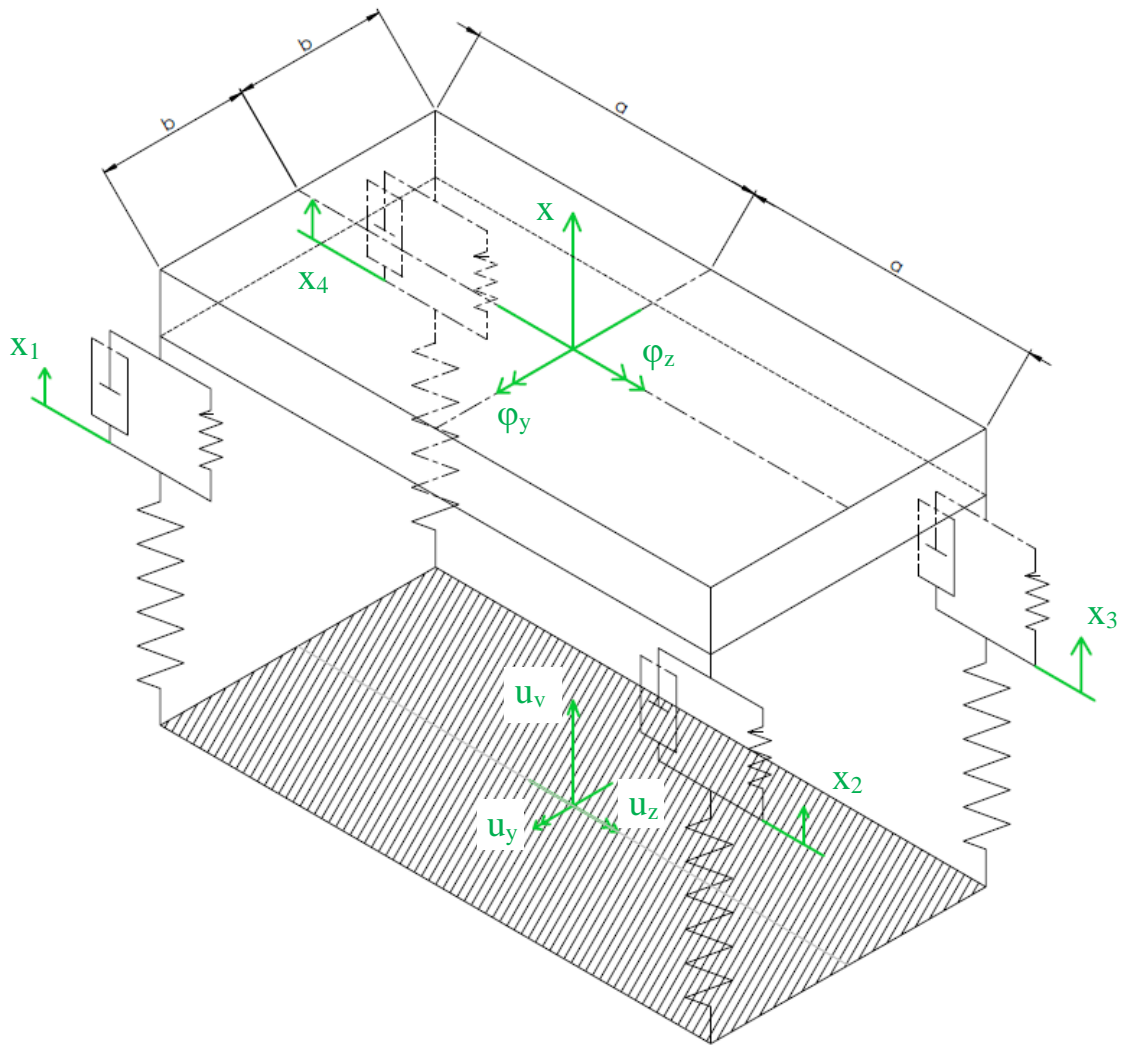


Slika 3.1 - Odabrani stol

Stvarni stol (Slika 3.1) potrebno je prebaciti u mehanički model za proračun.

Uzbuda će biti harmonijskog karaktera u obliku oscilatornih translatornih i rotacijskih pomaka podne ploče na kojoj se stol nalazi. Izlaz će biti stupnjevi slobode gibanja ploče. Budući da je zadatak ovakvih stolova izolirati od vertikalnih vibracija, nemaju nikakvo prigušenje u horizontalnom smjeru. S tim na umu, relevantni stupnjevi slobode gibanja za ubaciti u mehanički model su vertikalna translacija i dva zakreta kao što je prikazano (Slika 3.2).

Na slici usvojenog mehaničkog modela (Slika 3.2) mogu se uočiti smjerovi koordinatnih osi, te stupnjevi slobode gibanja odabranog sustava.



Slika 3.2 - Mehanički model sustava za vertikalnu uzбудu

### 3.1 Diferencijalne jednačbe

Analiza će biti provedena za prikazanu uzbudu podloge. Vodeći se prikazanim modelom (Slika 3.2), potrebno je postaviti jednačbe ravnoteže sustava da bi se došlo do diferencijalnih jednačbi sustava. Da bi se postavile pravilne jednačbe ravnoteže, potrebno je uvesti pretpostavke odnosa pomaka pojedinih točaka sustava jer je tada moguće jednoznačno odrediti smjerove djelovanja elastičnih i prigušnih sila.

Prema tome, uz pretpostavku  $x > a\varphi_y > b\varphi_z > u_v > au_y > bu_z$ , mogu se postaviti jednačbe ravnoteže.

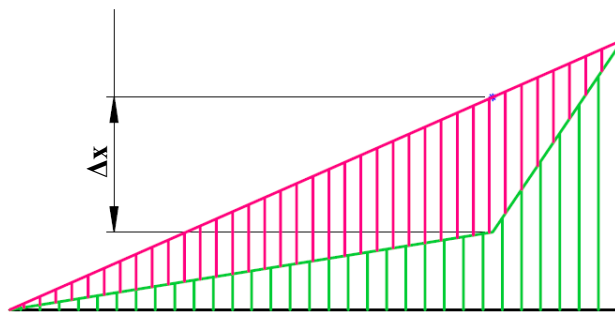
Budući da su sve noge jednake, imaju istu krutost. Osim njih, i svi elastični oslonci su jednaki pa imaju jednake krutosti i faktore prigušenja. Pretpostavljaju se mali zakreti, te se s obzirom na to sustav linearizira.

Imajući na umu da kao konačni rezultat želimo prijenosnu funkciju uzbude podloge kao ulaza i rezultirajućih pomaka ploče kao izlaza, sve diferencijalne jednačbe potrebno je oblikovati da mogu dati traženi rezultat.

Što se tiče pomaka, to će biti učinjeno na način da se dvije krutosti spoje u fiktivnu serijsku krutost. Krutost noge i krutost prigušivača su u seriji pa je potrebno izračunati njihovu ekvivalentnu krutost.

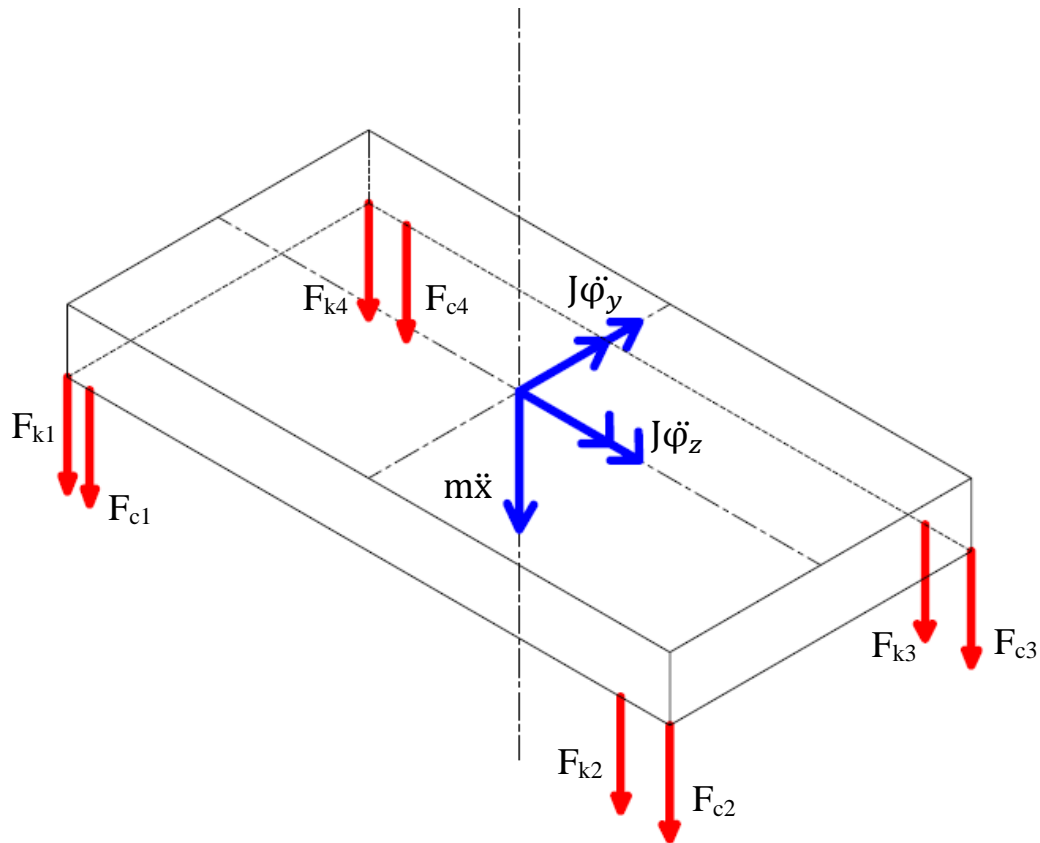
$$k_s = \frac{k_n k_p}{k_n + k_p} \quad (3.1)$$

Što se tiče viskoznih sila stvar postaje nešto kompliciranija, s obzirom da nam je za viskoznu silu potrebna relativna brzina točke koja nije niti jedna od željenih varijabli i točke ruba stola. To dovodi do znatno kompleksnijih jednačbi, te će se iz tog razloga pretpostaviti da je omjer brzina jednak omjeru pomaka. Sada možemo za brzinu problematične točke koristiti derivaciju njenog pomaka, no ne možemo samo derivirati pomak fiktivne serijske opruge, već moramo pomak pomnožiti sa koeficijentom koji jednak omjeru krutosti fiktivne opruge i krutosti noge stola. Razlog je taj što fiktivna opruga daje jednake rezultate kao dvije opruge na krajevima, ali ne daje odgovarajuću raspodjelu pomaka (Slika 3.3).



Slika 3.3 - Razlika raspodjele pomaka po duljini opruge

Potrebna nam je diferencijalna jednačba gibanja za ploču stola pa je potrebno postaviti jednačbe ravnoteže za istu. Sile prigušivača i opruga za pojedini kut su smještene koncentrično u kut stola, ali radi zornijeg prikaza nacrtane su razdvojeno.



Slika 3.4 - Sile na ploču uslijed horizontalne uzbude

Prvo se postavlja  $\sum F_x = 0$ :

$$m\ddot{x} + F_{k1} + F_{c1} + F_{k2} + F_{c2} + F_{k3} + F_{c3} + F_{k4} + F_{c4} = 0 \quad (3.2)$$

Gdje su sile rezultat relativnih pomaka i brzina podloge i ploče:

$$\begin{aligned}
& m\ddot{x} + k_s * (x - a\varphi_y - b\varphi_z - u_v + au_y + bu_z) \\
& + c_p * \left( (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v + a\dot{u}_y + b\dot{u}_z \right) \right) \\
& \quad + k_s * (x + a\varphi_y - b\varphi_z - u_v - au_y + bu_z) \\
& + c_p * \left( (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v - a\dot{u}_y + b\dot{u}_z \right) \right) \\
& \quad + k_s * (x + a\varphi_y + b\varphi_z - u_v - au_y - bu_z) \\
& + c_p * \left( (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v - a\dot{u}_y - b\dot{u}_z \right) \right) \\
& \quad + k_s * (x - a\varphi_y + b\varphi_z - u_v + au_y - bu_z) \\
& + c_p * \left( (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v + a\dot{u}_y - b\dot{u}_z \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sljedeće nam je potrebna  $\sum M_y = 0$ :

$$\begin{aligned}
& -J_y \varphi_y'' + b * F_{k1} + b * F_{c1} - b * F_{k2} - b * F_{c2} \\
& -b * F_{k3} - b * F_{c3} + b * F_{k4} + b * F_{c4} = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Kao i za silu uvrštavamo pomake i brzine da bi dobili odgovarajuće relativne pomake i brzine:

$$\begin{aligned}
& -J_y \varphi_y'' + a * k_s * (x - a\varphi_y - b\varphi_z - u_v + au_y + bu_z) \\
& + a * c_p * \left( (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v + a\dot{u}_y + b\dot{u}_z \right) \right) \\
& \quad - a * k_s * (x + a\varphi_y - b\varphi_z - u_v - au_y + bu_z) \\
& - a * c_p * \left( (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v - a\dot{u}_y + b\dot{u}_z \right) \right) \\
& \quad - a * k_s * (x + a\varphi_y + b\varphi_z - u_v - au_y - bu_z) \\
& - a * c_p * \left( (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v - a\dot{u}_y - b\dot{u}_z \right) \right) \\
& \quad + a * k_s * (x - a\varphi_y + b\varphi_z - u_v + au_y - bu_z) \\
& + a * c_p * \left( (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v + a\dot{u}_y - b\dot{u}_z \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$



Zadnja jednačba ravnoteže glasi  $\sum M_z = 0$ :

$$\begin{aligned} -J_z \varphi_z'' + a * F_{k1} + a * F_{c1} + a * F_{k2} + a * F_{c2} \\ -a * F_{k3} - a * F_{c3} - a * F_{k4} - a * F_{c4} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sa uvrštenim pomacima i brzinama točaka:

$$\begin{aligned} & -J_z \varphi_z'' + b * k_s * (x - a\varphi_y - b\varphi_z - u_v + au_y + bu_z) \\ & + b * c_p * \left( (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v + a\dot{u}_y + b\dot{u}_z \right) \right) \\ & \quad + b * k_s * (x + a\varphi_y - b\varphi_z - u_v - au_y + bu_z) \\ & + b * c_p * \left( (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y - b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v - a\dot{u}_y + b\dot{u}_z \right) \right) \\ & \quad - b * k_s * (x + a\varphi_y + b\varphi_z - u_v - au_y - bu_z) \\ & - b * c_p * \left( (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} + a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v - a\dot{u}_y - b\dot{u}_z \right) \right) \\ & \quad - b * k_s * (x - a\varphi_y + b\varphi_z - u_v + au_y - bu_z) \\ & - b * c_p * \left( (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \frac{k_s}{k_n} * \left( \frac{l_n}{l_{uk}} (\dot{x} - a\dot{\varphi}_y + b\dot{\varphi}_z) - \dot{u}_v + a\dot{u}_y - b\dot{u}_z \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.2 Sustav u matičnom obliku

Nakon što su postavljene diferencijalne jednačbe sustava kao funkcije traženih varijabli, biti će preoblikovane u formu koja je pogodna za matični zapis cijelog sustava, kako bi se kasnije mogla provesti analiza istog putem metode prostora stanja.

Metoda prostora stanja koristi zapis diferencijalne jednačbe n-tog reda kao n diferencijalnih sustava prvog reda, odnosno ako postoje simultane diferencijalne jednačbe, kao što ovdje je slučaj, ukupan red svih jednačbi sustava. U ovom slučaju imamo 3 diferencijalne jednačbe drugog reda što će rezultirati 6 diferencijalnih jednačbi prvog reda. [4]

U općenitom obliku, matematički model prostora stanja dan je jednačbama:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3.9)$$

Gdje su:

- $\mathbf{x}(t)$  - vektor stanja
- $\mathbf{u}(t)$  - vektor ulaza
- $\mathbf{y}(t)$  - vektor izlaza
- $\mathbf{A}$  - matrica sustava
- $\mathbf{B}$  - matrica ulaza
- $\mathbf{C}$  - matrica izlaza
- $\mathbf{D}$  - matrica prijenosa

Sustav ploče stola potrebno je zapisati u traženom obliku. Kao vektor stanja bit će odabran vektor koji sadrži brzine i pomake ploče, a za vektor ulaza odabrane su brzine i pomaci podloge.

Kada smo to odredili možemo jednađbe (3.3) (3.5) (3.7) srediti i preobličiti da iz njih izrazimo ubrzanje sa jedne strane, a sve ostalo sa druge strane.

$$\ddot{x} = -4 \frac{k_s}{m} x - 4 \frac{c_p}{m} \left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) \dot{x} + 4 \frac{k_s}{m} u_v + 4 \frac{c_p}{m} \dot{u}_v \quad (3.10)$$

$$\ddot{\varphi}_y = -4 \frac{a^2 k_s}{J_y} \varphi_y - 4 \frac{a^2 c_p}{J_y} \left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) \dot{\varphi}_y + 4 \frac{a^2 k_s}{J_y} u_y - 4 \frac{a^2 c_p k_s}{J_y k_n} \dot{u}_y \quad (3.11)$$

$$\ddot{\varphi}_z = -4 \frac{b^2 k_s}{J_z} \varphi_z - 4 \frac{b^2 c_p}{J_z} \left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) \dot{\varphi}_z + 4 \frac{b^2 k_s}{J_z} u_z - 4 \frac{b^2 c_p k_s}{J_z k_n} \dot{u}_z \quad (3.12)$$

Sada sustav vrlo jednostavno može biti prikazan u standardnom obliku prostora stanja.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varphi_y \\ \dot{\varphi}_z \\ \dot{x} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 \frac{k_s}{m} & 0 & 0 & -4 \frac{c_p}{m} \left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -4 \frac{a^2 k_s}{J_y} & 0 & 0 & -4 \frac{a^2 c_p}{J_y} \left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -4 \frac{b^2 k_s}{J_z} & 0 & 0 & -4 \frac{b^2 c_p}{J_z} \left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \\ \dot{x} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 \frac{k_s}{m} & 0 & 0 & 4 \frac{c_p}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 4 \frac{a^2 k_s}{J_y} & 0 & 0 & -4 \frac{a^2 c_p k_s}{J_y k_n} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \frac{b^2 k_s}{J_z} & 0 & 0 & -4 \frac{b^2 c_p k_s}{J_z k_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ u_y \\ u_z \\ \dot{u}_v \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \\ \dot{x} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \\ \dot{x} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_v \\ u_y \\ u_z \\ \dot{u}_v \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Jednadžbe (3.13) i (3.14) predstavljaju sustav u prostoru stanja gdje su matrice A, B, C i D jednoznačno određene. Pomoću tih matrica sa konkretnim vrijednostima sada je moguće dalje unijeti ih u računalo te dobiti tražene podatke, kao što je prikazano u sljedećem poglavlju.

## 4 Analiza

Kada je model sustava jednoznačno određen, može se preći u njegovu analizu. S obzirom da je sustav modeliran kao opći problem, bez konkretnih vrijednosti masa, krutosti i prigušenja, najprije će se usvojiti njihove vrijednosti. Jednom kada su one utvrđene, sustav se u matičnom obliku prenosi u računalo u neki od alata za računalnu matematiku (poput Pythona, Octavea, ili u ovom radu odabranog: Matlaba). Kada su unutra unesene matrice sustava, računalo može lagano načiniti Bode-ove dijagrame koji prikazuju veze pojedinih ulaza i izlaza sustava, te se tada, pomoću zorne vizualne reprezentacije, mogu interpretirati i komentirati rezultati analize.

Kao ulaz u ovo poglavlje, radi lakšeg praćenja, usporedivši jednadžbe (3.13), (3.14) i jednadžbe (3.8), (3.9), ispod su izlistane karakteristične matrice sustava u prostoru stanja.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4\frac{k_s}{m} & 0 & 0 & -4\frac{c_p}{m}\left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -4\frac{a^2 k_s}{J_y} & 0 & 0 & -4\frac{a^2 c_p}{J_y}\left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -4\frac{b^2 k_s}{J_z} & 0 & 0 & -4\frac{b^2 c_p}{J_z}\left(1 - \frac{k_s l_n}{k_n l_{uk}}\right) \end{bmatrix} \quad (4.1.)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\frac{k_s}{m} & 0 & 0 & 4\frac{c_p}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 4\frac{a^2 k_s}{J_y} & 0 & 0 & -4\frac{a^2 c_p k_s}{J_y k_n} & 0 \\ 0 & 0 & 4\frac{b^2 k_s}{J_z} & 0 & 0 & -4\frac{b^2 c_p k_s}{J_z k_n} \end{bmatrix} \quad (4.2.)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.)$$

#### 4.1 Vrijednosti geometrijskih parametara

U matricama sustava, pojavljuju se parametri geometrije stola: duljina noge, duljina prigušivača, duljina ploče, širina ploče, visina ploče, površina presjeka noge, masa ploče, kao i momenti tromosti ploče oko osi y i z. U ovom poglavlju predstavljene su konkretne vrijednosti tih parametara, izračunate prema dimenzijama proizvođača.

Parametar	Vrijednost
$l_n$	610 mm
$l_p$	90 mm
$l_{uk}$	700 mm
a	1000 mm
b	500 mm
h	210 mm
m	262 kg
$J_y$	88296183 kgmm <sup>2</sup>
$J_z$	22796183 kgmm <sup>2</sup>
$A_n$	3380 mm <sup>2</sup>

Tablica 4.1 - Parametri stola

#### 4.2 Vrijednosti vibracijskih parametara

Osim samih geometrijskih vrijednosti, u matricama sustava se pojavljuju i važni parametri za vibracijske sustave koji jesu mase, krutosti i prigušenja.

Kao što je iz dosad priloženog vidljivo, u obzir su uzete dvije utjecajne krutosti,  $k_n$  – krutost noge i  $k_p$  – krutost prigušivača.

Najprije će biti određena krutost noge. Krutost noge bit će izračunata iz formule za računanje pomaka aksijalno opterećenog štapa.

$$u = \frac{Fl}{AE} \quad (4.5.)$$

Taj izraz može biti preokrenut i uspoređen s općim izrazom za elastičnu silu:

$$F = \frac{AE}{l} * u \rightarrow F = k * \Delta x \quad (4.6.)$$

Možemo analogijom primijetiti izraz za krutost aksijalno opterećenog štapa koji će biti upotrijebljen za izračun aksijalne krutosti noge uz konkretne vrijednosti. Prema tome:

$$k_n = \frac{A_n E}{l_n} = \frac{3380 * 210000}{610} = 1163607 \text{ N/mm} \quad (4.7.)$$

Iako podesive krutosti (povećanjem i smanjenjem tlaka u prigušivaču), za prazan stol, proizvođač za noge stola daje vertikalnu rezonantnu frekvenciju. Poznavanjem veze mase, krutosti i rezonantne frekvencije možemo doći do vrijednosti krutosti prigušivača.

$$\omega_{np} = \sqrt{\frac{k_p}{m}} \quad (4.8.)$$

$$k_p = \omega_{np}^2 * m = 4,42^2 * 262 * 10^{-3} = 5,119 \text{ N/mm} \quad (4.9.)$$

Što se tiče vrijednosti prigušenja, s obzirom na podesivu karakteristiku prigušivača, biti će određeni koeficijenti prigušenja za 3 karakteristične vrijednosti bezdimenzijskog faktora prigušenja kako bi se na dijagramima u daljnjoj analizi zorno mogao prikazati njihov utjecaj na odziv sustava.

Izračun će biti obavljen prema formuli:

$$c_p = 2 * \xi * m * \omega_{np} \quad (4.10.)$$

Za bolje uočavanje utjecaja prigušenja na odziv sustava, odabrani su 3 karakteristična bezdimenzijska faktora prigušenja sustava: podkritično prigušen, kritično prigušen i nadkritično prigušen sustav. Za taj skup odabranih vrijednosti bezdimenzijskih faktora prigušenja, to iznosi:

$\xi$	$c_p$
0,5	1,1580 Ns/mm
1,0	2,3161 Ns/mm
2,0	4,6322 Ns/mm

**Tablica 4.2 - Vrijednosti koeficijenata prigušenja**

Sada uz konkretne vrijednosti svih parametara koji se nalaze u matricama prostora stanja sustava, može se ući u računalnu analizu.

### 4.3 Analiza programskim paketom Matlab

Matrice A,B,C,D (jednadžbe (4.1.), (4.2.), (4.3.), (4.4.)) sa uvrštenim vrijednostima iz prethodnog poglavlja unesene su u programski paket Matlab. Unutar Matlaba, pomoću „Control system“ toolbox-a, od njih je načinjen model u prostoru stanja za zadani sustav. Kada je to učinjeno, mogu se pozvati razne funkcije, koje mogu vrlo brzo analizirati sustav na željeni način. Za analizu ovog problema posebno su zanimljivi Bode-ovi dijagrami. Kako Bode-ovi dijagrami prikazuju prijenosne funkcije, za sustav sa 6 ulaza i 6 izlaza, postoji 36 mogućih kombinacija za grafički prikaz, no nisu sve kombinacije jednako vrijedne fizikalne interpretacije u stvarnome svijetu. Ispod su prikazani i komentirani relevantni grafički prikazi rezultata analize.

Za bolje razumijevanje grafova najprije su ispod samostalno prikazani vektori ulaznih i izlaznih veličina.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_v \\ u_y \\ u_z \\ \dot{u}_v \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \\ \dot{x} \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} \quad (4.11.)$$

Na prikazu iznad, redom od gore prema dole numerirani su ulazi:

1. Vertikalna translacija podloge
2. Rotacija podloge oko osi y
3. Rotacija podloge oko osi z
4. Brzina vertikalne translacije podloge
5. Kutna brzina rotacije podloge oko osi y
6. Kutna brzina rotacije podloge oko osi z

Također, bitno je uočiti i izlaze sustava, koji su redom od gore prema dole:

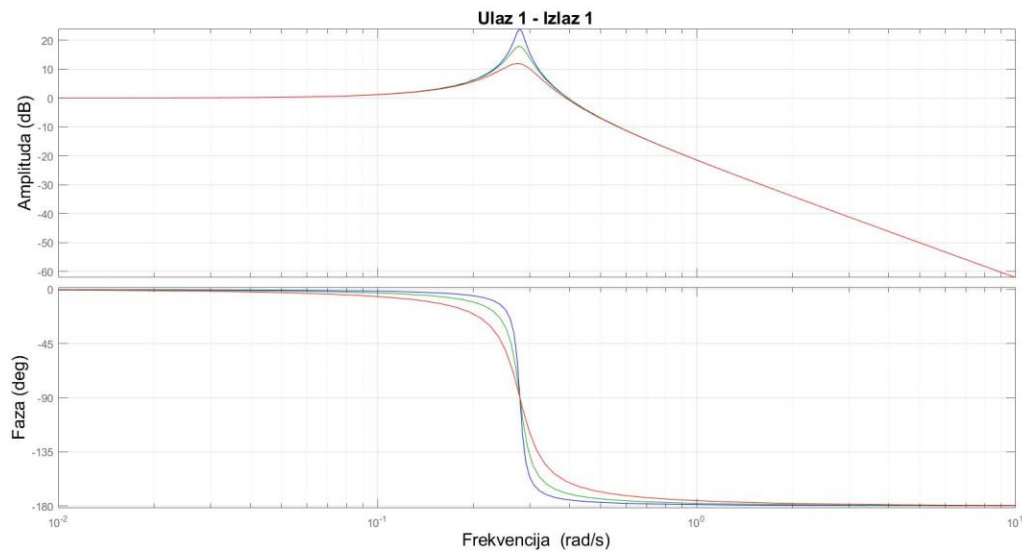
1. Vertikalna translacija ploče stola
2. Rotacija ploče stola oko osi y
3. Rotacija ploče stola oko osi z
4. Brzina vertikalne translacije ploče stola
5. Kutna brzina rotacije ploče stola oko osi y
6. Kutna brzina rotacije ploče stola oko osi z

Prema toj nomenklaturi prikazani su grafovi ispod.

Osim toga na svakom grafu mogu se uočiti 3 prikazane linije (Vidi: Tablica 4.2 ):

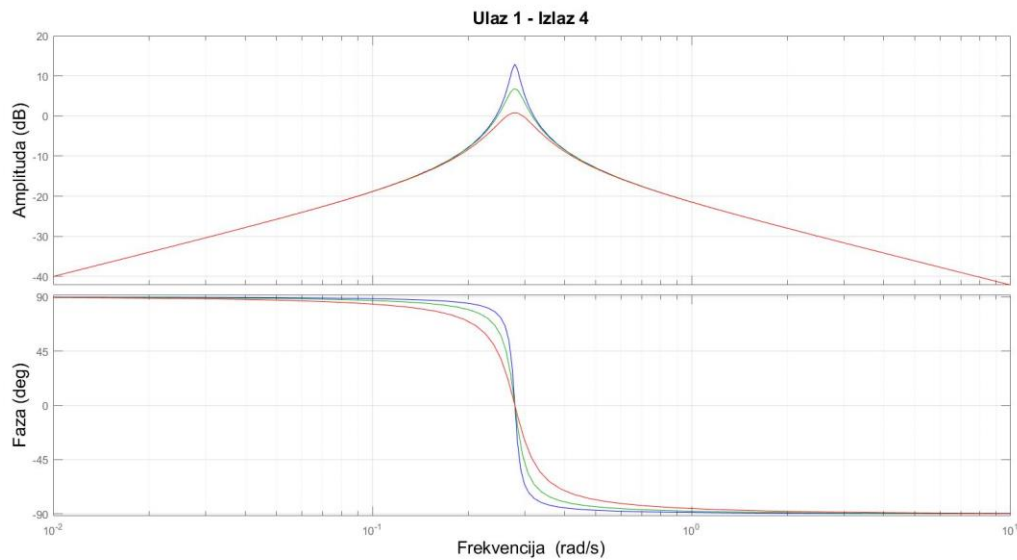
- Plava: Koja predstavlja podkritično prigušen sustav
- Zelena: Koja predstavlja kritično prigušen sustav
- Crvena: Koja predstavlja nadkritično prigušen sustav





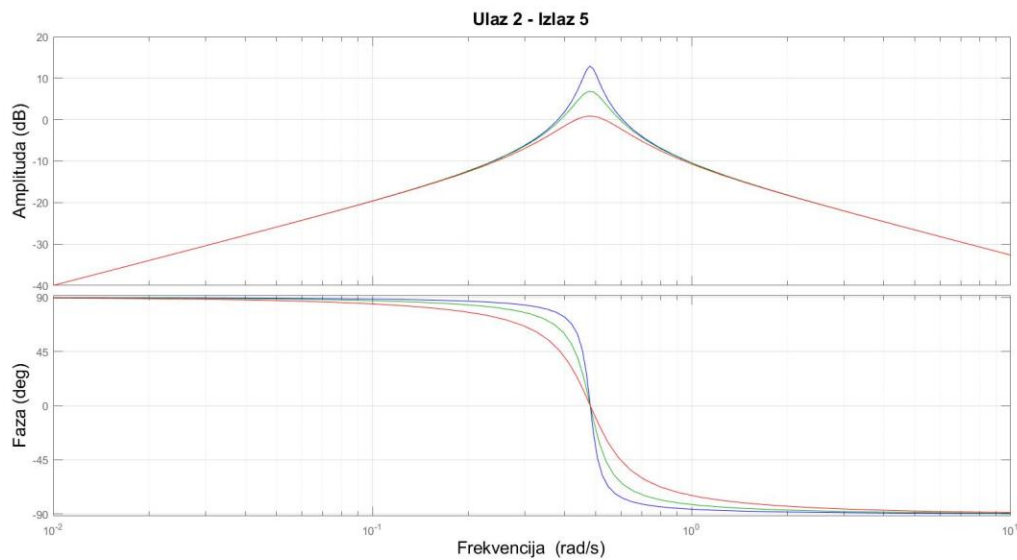
**Slika 4.1 - Prijenosna funkcija u1 - i1**

Prvi graf prikazuje prijenosnu funkciju čiji je ulaz vertikalni pomak podloge a izlaz vertikalni pomak ploče stola.

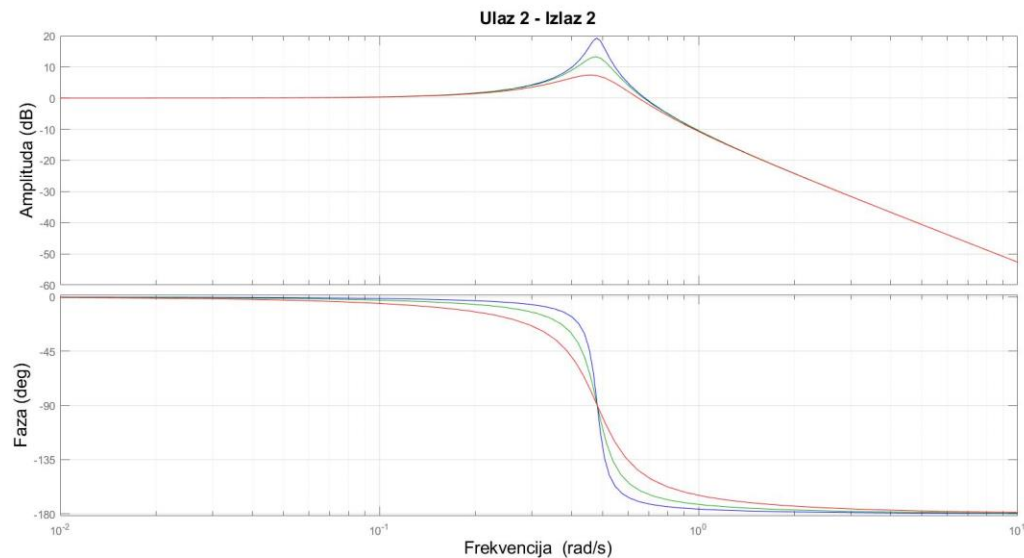


**Slika 4.2 - Prijenosna funkcija u1 - i4**

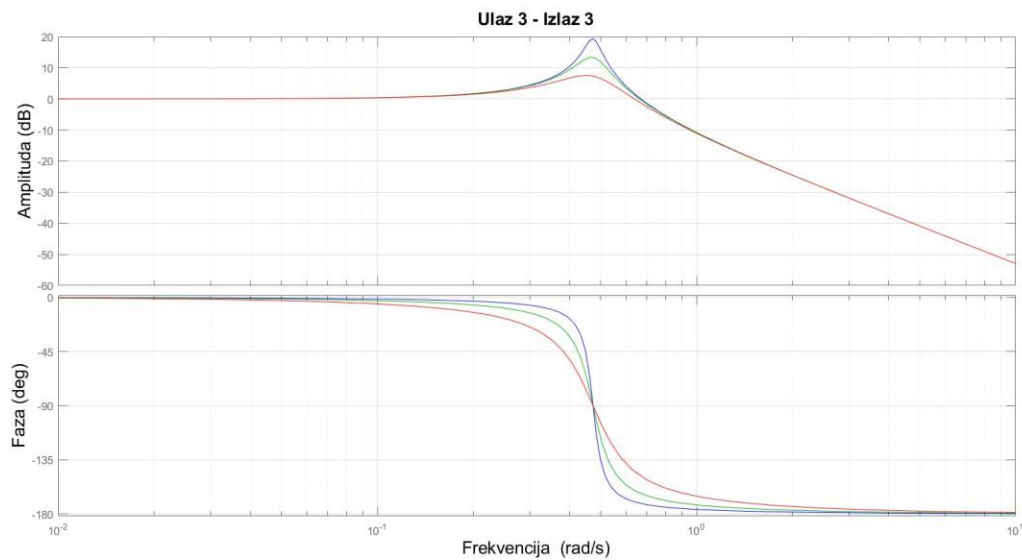
Drugi Bode-ov dijagram prikazuje prijenosnu funkciju sa ulazom vertikalnog pomaka podloge, ali sada je izlaz translatorsna brzina ploče stola.

**Slika 4.3 - Prijenosna funkcija u2 - i2**

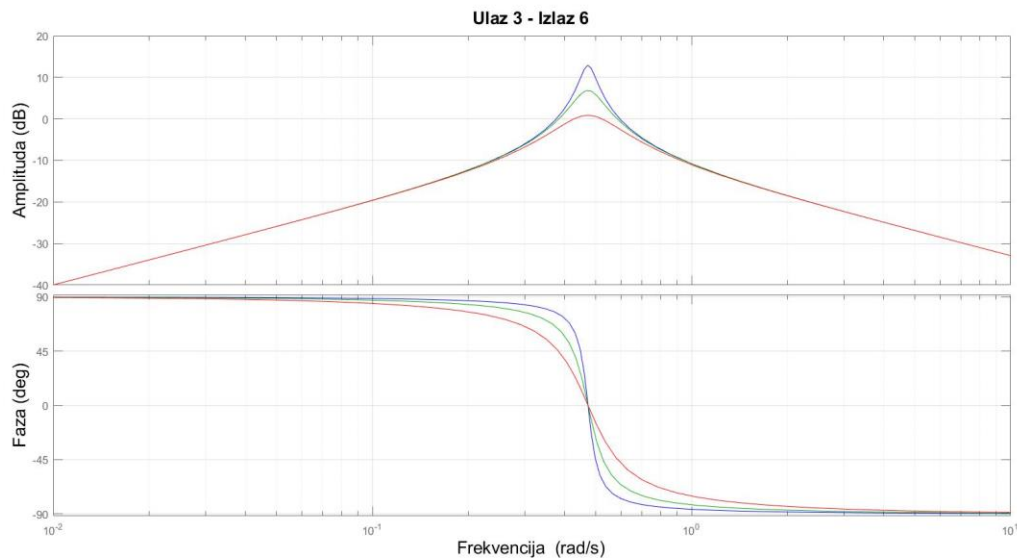
Treći dijagram prikazuje prijenosnu funkciju čiji je ulaz rotacija podloge oko osi y, a izlaz rotacija stola oko osi y.

**Slika 4.4 - Prijenosna funkcija u2 - i5**

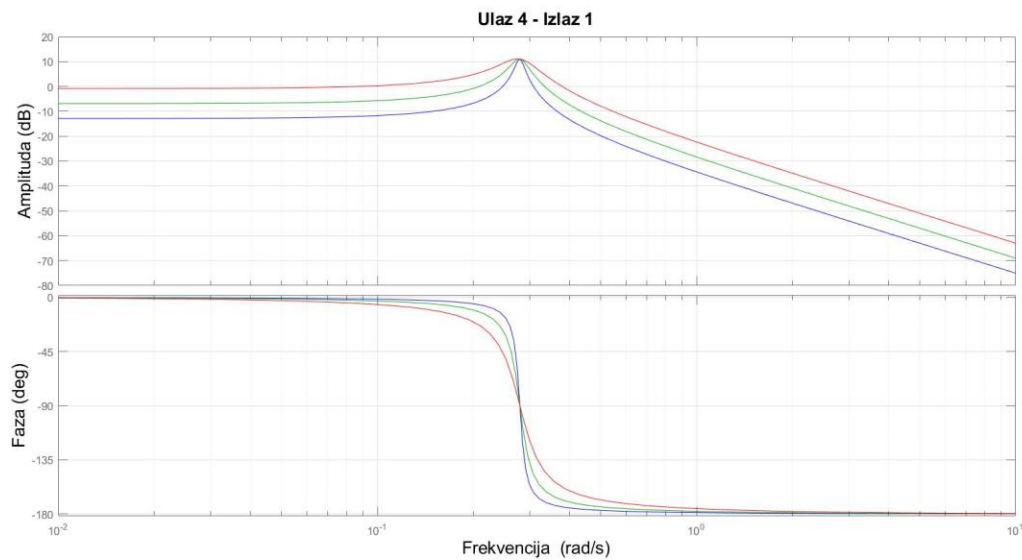
Četvrti Bode-ov graf prikazuje prijenosnu funkciju čiji je ulaz rotacija podloge oko osi y, ali izlaz je sada kutna brzina ploče stola oko osi y.

**Slika 4.5 - Prijenosna funkcija u3 - i3**

Peti po redu relevantan dijagram daje nam vizualnu reprezentaciju prijenosne funkcije koja za ulaz ima rotaciju podloge oko osi z, a izlazna veličina je rotacija ploče stola oko osi z.

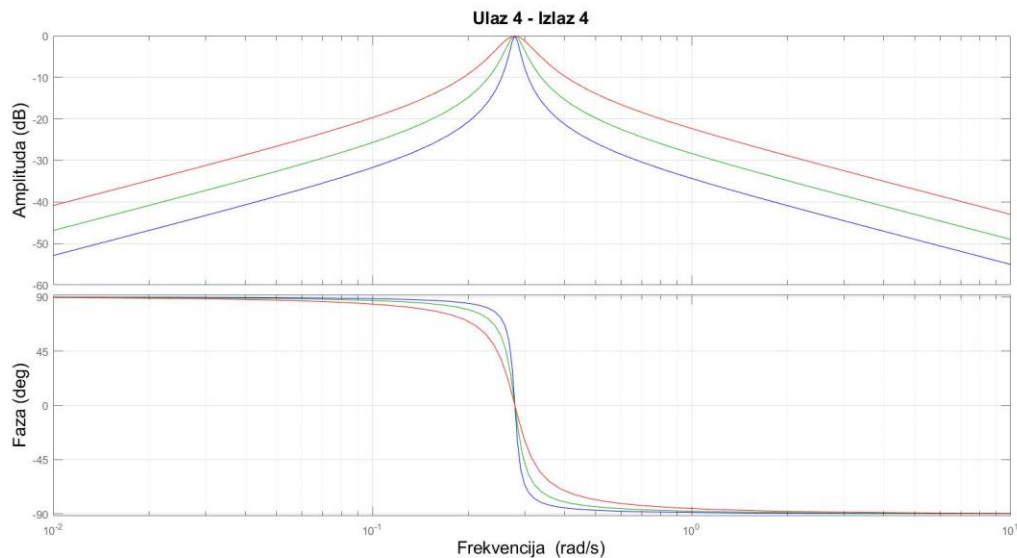
**Slika 4.6 - Prijenosna funkcija u3 - i6**

Na grafu šest, ulaz je, kao i u petom, rotacija podloge oko osi z, ali izlazna veličina je sada kutna brzina ploče stola oko osi z.



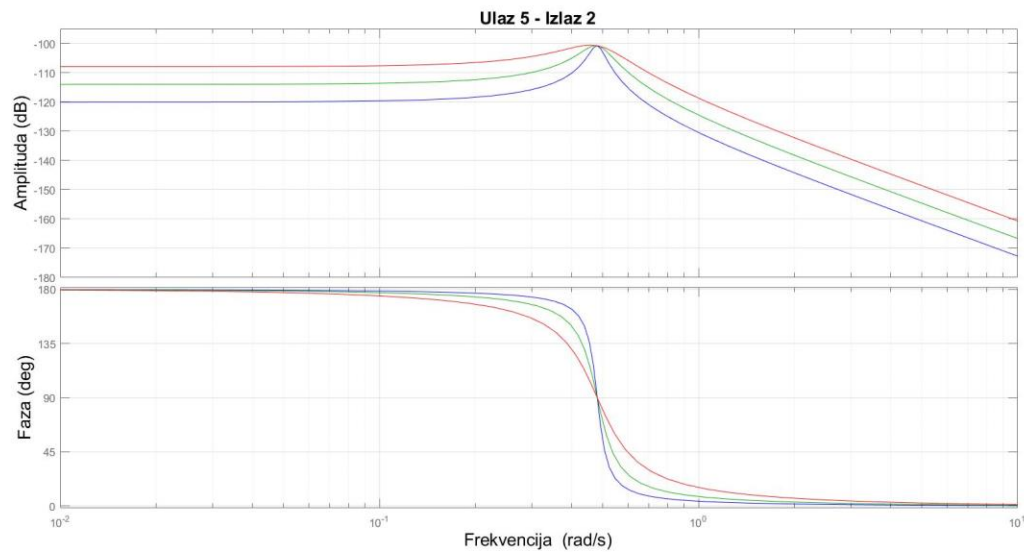
**Slika 4.7 - Prijenosna funkcija u4 - i1**

U Bode-ovom dijagramu iznad prikazana je prijenosna funkcija koja za ulaz ima vertikalnu translatorsnu brzinu podloge, a za izlaz ima vertikalnu pomak ploče.



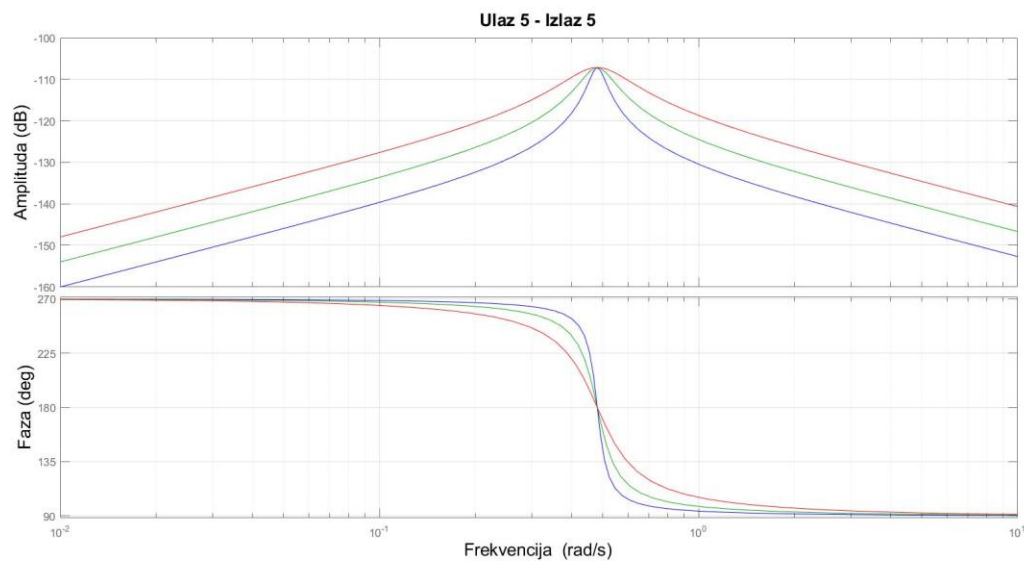
**Slika 4.8 - Prijenosna funkcija u4 - i4**

Ovaj dijagram prikazuje amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku prijenosne funkcije koja povezuje translatorsnu brzinu podloge sa translatorsnom brzinom ploče stola.



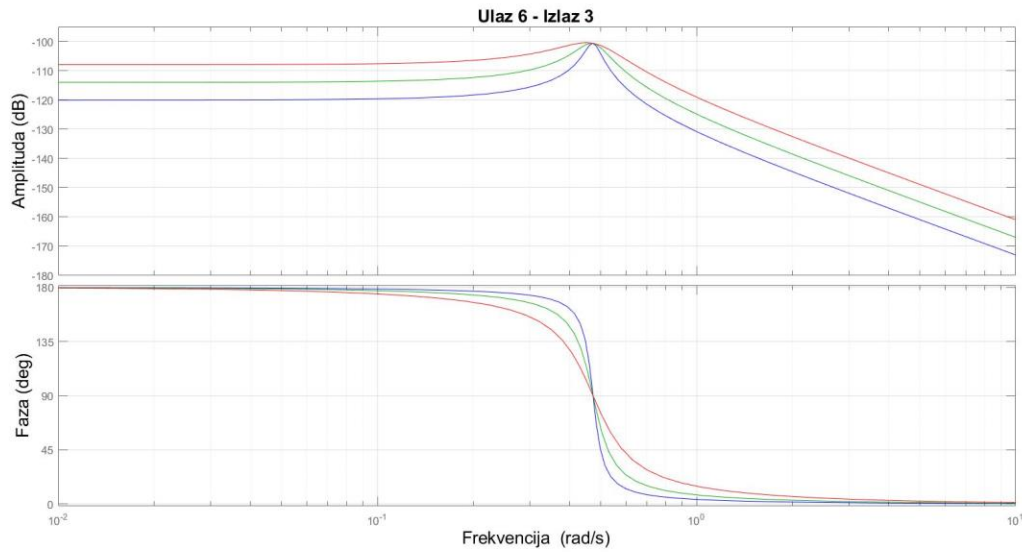
Slika 4.9 - Prijenosna funkcija u5 - i2

Graf devet, prikazuje vezu između kutne brzine podloge oko osi y, te kutnog pomaka ploče stola oko osi y.



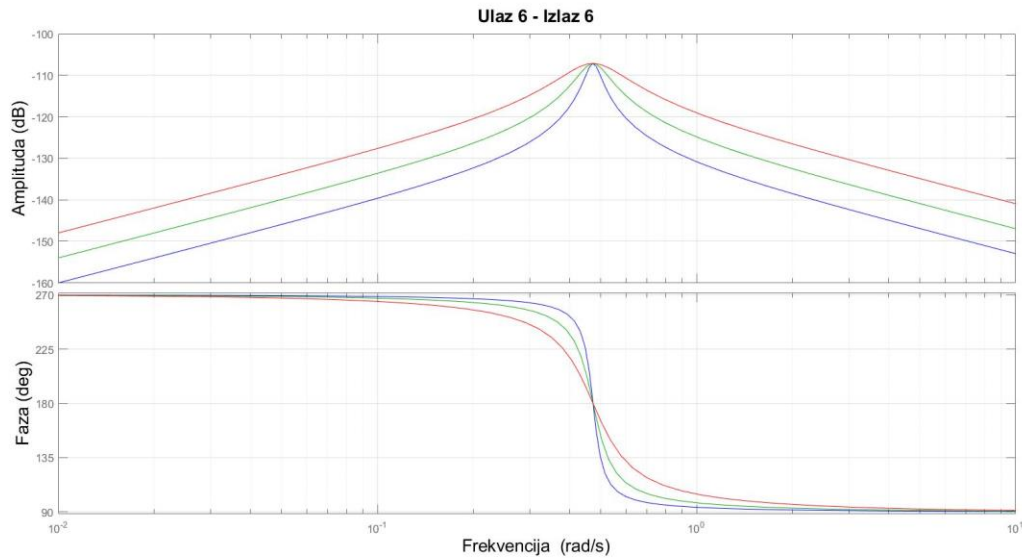
Slika 4.10 - Prijenosna funkcija u5 - i5

Na dijagramu deset, prikazana je prijenosna funkcija koja povezuje kutnu brzinu podloge oko osi y sa kutnom brzinom ploče stola oko osi y.



Slika 4.11 - Prijenosna funkcija u6 - i3

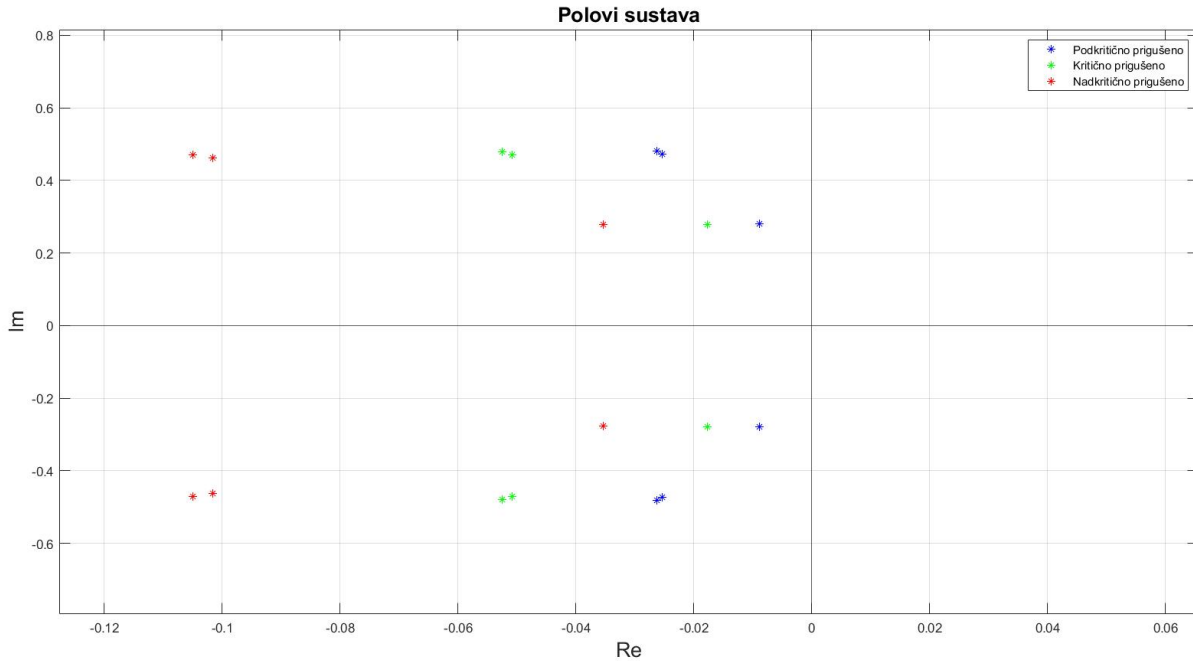
Na pretposljednem dijagramu vidi se prijenosna funkcija kojoj je ulaz kutna brzina podloge oko osi z, a izlaz kutni pomak ploče stola oko osi z.



Slika 4.12 - Prijenosna funkcija u6 - i6

Na posljednjem relevantnom Bode-ovom dijagramu, nalazi se prikaz prijenosne funkcije koja uvodi u vezu kutnu brzinu podloge oko osi z sa kutnom brzinu ploče stola oko osi z.

Osim Bode-ovih dijagrama jako su zanimljivi polovi sustava pri njegovoj analizi. Polovi sustava su vrijednosti za koje nazivnik prijenosne funkcije sustava poprima vrijednost 0, a time cijela prijenosna funkcija poprima beskonačne vrijednosti. U analizi ovog konkretnog problema, polovi sustava predstavljaju rezonantne frekvencije cijelog sustava. Realni dijelovi polova sustava govore nam o stabilnosti sustava, dok nam kompleksni dijelovi govore o oscilatornosti njegovih izlaza, tu je bitno naglasiti da sustav oscilira većom frekvencijom što je on na imaginarnoj osi udaljeniji od ishodišta. Imajući to na umu, zanimljivo je promotriti kako različiti faktori prigušenja utječu na promjenu položaja polova sustava. To će biti učinjeno pozivom funkcije `pole()` unutar MatLaba, nakon čega su rezultati grafički prikazani slikom ispod.



Slika 4.13 - Prikaz polova sustava u kompleksnoj ravnini

Time su prezentirane relevantni prikazi računalne analize za ovaj sustav. Ovi prikazi grafički prikazuju relevantne informacije te će rezultati biti komentirani u odlomku sljedećem odlomku pod naslovom „5.Zaključak“.

## 5 Zaključak

U prethodnom odlomku prikazane su veze ulaza i izlaza Bode-ovim dijagramima. U prvih 6 grafova ulazi su pomaci i zakreti podloge, dok su u drugih 6 grafova ulazi translatorne i kutne brzine podloge. Takva grupacija je napravljena jer se zorno vide utjecaji prigušenja na prijenosne funkcije. Kao što je već rečeno prikazani su slučaj podkritičnog, kritičnog i nadkritičnog prigušenja.

U prvih 6 grafova uočava se da povećanje prigušenja za posljedicu ima smanjenje faktora uvećanja amplitude vibracija u rezonantnoj frekvenciji, dok je na ostalim frekvencijama utjecaj minimalan. Osim utjecaja na amplitudno faznu karakteristiku, promjena prigušenja pokazuje i utjecaj na frekvencijsko faznu karakteristiku, gdje skok u promjeni faze preko rezonantne frekvencije postaje sve manje nagao, što se prigušenje više povećava.

U drugoj grupaciji od 6 grafova, gdje su kao relevantni ulazi promatrane brzine podloge, uočavaju se nešto različite pojave u odnosu na prethodnih 6 prijenosnih funkcija. Naime, povećanje prigušenja ne odražava se na vibracije u rezonantnoj frekvenciji, već se znatno odražava na vibracije na cijelom ostalom spektru frekvencija. Što se tiče utjecaja prigušenja na fazno frekvencijsku karakteristiku, tu je slučaj kao i prethodni, gdje povećanje prigušenja daje za rezultat blaži prijelaz preko skoka u fazi vibracija preko rezonantne frekvencije.

Osim utjecaja prigušenja na odziv sustava, jako je zanimljivo uočiti da se rezonantna frekvencija vibracija svakog pojedinog promatranog slučaja nalazi u spektru od  $10^{-1}$  do  $10^0$  što daje naslutiti da su ovakvi stolovi projektirani da izoliraju vibracije na takav način da su rezonantne frekvencije mnogo ispod problematičnih frekvencija koje uzrokuju probleme za postav na stolu.

Na posljetku važno je i objasniti zašto je od sustava sa 6 ulaza i 6 izlaza, što rezultira sa 36 mogućih prijenosnih funkcija, relevantno prikazati samo njih 12. Odgovor leži u konkretnom problemu koji se analizira. Budući da u modelu koji je analiziran nema nikakve eksperimentalne postavke na stolu, bilo je u redu za pretpostaviti težinu ploče stola kao koncentriranu silu u težištu stola. Uz to, sva 4 prigušivača su postavljena simetrično i jednaki su međusobno. Kao rezultat toga, nije se javila samostalna sila van težišta ploče stola koja nema silu na suprotnom kraku da bi se vertikalnim vibracijama te točke stol uzbudio na rotaciju. Stoga, ostale prijenosne funkcije u ovom konkretnom slučaju u Bode-ovom prikazu su prazni grafovi jer ovakav postav ne može biti vertikalnim vibracijama uzbuden na rotaciju, a analogno objašnjenje vrijedi i za ostale slučajeve ulaza i izlaza.

Osim Bode-ovih dijagrama, u poglavlju analize rezultata prikazani su polovi cijelog sustava u kompleksnoj ravnini u ovisnosti o faktoru prigušenja. Polovi cijelog sustava su vezani za njegove rezonantne frekvencije. Prvo što se može uočiti da za jedan faktor prigušenja postoji 6 polova što i odgovara zadanom sustavu jer ima 6 izlaza. Sljedeće je bitno uočiti da su u svakom slučaju polovi sustava 3 kompleksno konjugirana para. Realni dijelovi kompleksnih polova sustava govore o amplitudama vibracija, dok njihovi imaginarni govore o njihovom oscilatornom ponašanju. Dade se primijeniti da se u svakom od 3 slučaja svi polovi sustava nalaze lijevo od ishodišta kompleksne ravnine što nam sa strane stabilnosti sustava govori da je sustav stabilan, odnosno sve stabilniji što je više prigušen, što je i za očekivati.



Time je sustav analiziran i dani su relevantni zaključci o njemu. Sustav je lineariziran, te je pretpostavljena raspodjela brzina na elastičnim elementima jednaka raspodjeli pomaka. Tako korištene pretpostavke su pojednostavile analizu sustava i omogućile da on bude ručno analiziran, te da se predoče relevantni rezultati. To ostavlja mjesta za poboljšanje. S obzirom da su noge mnogo kruće od prigušivača, dovodi se u pitanje bi li bolja rješenja dala analiza sustava bez njih jer se tada ne bi morale uvoditi pretpostavke o brzinama (ali bi se tada zanemarila krutost čeličnih nogu stola). Osim toga ploča stola je pretpostavljena kao kruto tijelo jer u stvarnosti i je mnogo kruća od ostalih elemenata ovog vibracijskog sustava, ali bilo bi zanimljivo analizirati rezultate kada bi se ona promatrala kao elastično tijelo, no to bi mnogo povećalo složenost sustava i tada ručne metode analize ne bi više bile prikladne. Na posljetku, oprema koju stola treba izolirati isto posjeduje svoju masu koja, te ona ne bi bila smještena u težištu sustava, što bi dovelo do promjena u rezultatima analize.

Iz svega toga kao zaključak se nameće da je za stvarnu primjenu ovakvog stola potrebno provjeriti i konačni postav naručitelja, te eksperimentalne rezultate potvrditi mjerenjima kako bi cijela stvar optimalno funkcionirala. Unatoč tome, analiza kakva je provedena u ovom radu odlična je početna točka i daje korisne podatke koji imaju stvarnu fizikalnu interpretaciju na ponašanje sustava.

## 6 Literatura

- [1] B. Kraut.: Strojarski priručnik, Tehnička knjiga Zagreb, 1970.
- [2] D. J. Inman: Engineering vibrations, University of Michigan, 1994.
- [3] S. S. Rao: Mechanical vibrations, University of Miami, 1986
- [4] J. Petrić: Automatska regulacija, FSB Sveučilište u Zagrebu, 2012
- [5] <https://www.thorlabs.com/>, 01.07.2022.