

# Računalna simulacija strujanja krvi u arteriji s premosnicom

---

**Petric, Blaž**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:250030>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-10**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Blaž Petric

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Ivo Džijan, dipl. ing.

Student:

Blaž Petric

Zagreb, 2022.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se prof. dr. sc. Ivi Džijanu na prihvaćanju mentorstva i savjetima tijekom pisanja rada i prof. dr. sc. Zdravku Viragu na pomoći oko postavljanja rubnog uvjeta. Posebno se zahvaljujem doc. dr. sc. Severinu Krizmaniću čiji su mi pomoć, savjeti i razgovori bili od neizmjerne važnosti te omogućili da izradim ovaj rad. Veliko hvala mojim roditeljima i obitelji na neizmornoj podršci i strpljivosti.

Blaž Petric



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Blaž Petric** JMBAG: **0035220085**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Računalna simulacija strujanja krvi u arteriji s premosnicom**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical simulation of blood flow in an artery with a bypass graft**

Opis zadatka:

Prilikom kirurškog liječenja nekih bolesti arterijskog sustava (značajnog suženja ili začepljenja arterije), ugrađuje se premosnica, kojom se zaobilazi suženo mjesto i time osigurava potrebnu opskrbu krvlju dijelova tkiva, koji bi inače izgubili funkciju. Nakon obavljenog kirurškog liječenja, u nekih pacijenata se uočava tendencija stvaranja naslaga i začepljenja arterije na mjestu spoja premosnice i zdravog dijela arterije, što dovodi do potrebe za ponovnim kirurškim zahvatom. Ta tendencija ovisi o mnogo čimbenika, a među značajnim čimbenicima mogu se navesti materijal i geometrija premosnice, način njena spajanja na zdravi dio arterije, a u hemodinamičkom smislu su to pojava odvajanja strujanja i razina pulsacija smičnih naprezanja na stijenci.

U ovom radu potrebno je provesti računalnu simulaciju strujanja krvi kroz zadani model lokalnog dijela krvotoka s ugrađenom premosnicom, primjenom metoda računalne dinamike fluida. Pri izradi rada se preporučuje primjena slobodno dostupnog programskog paketa OpenFOAM koji se temelji na metodi konačnih volumena.

U sklopu rada potrebno je:

- Izraditi ili preuzeti geometrijske modele lokalnog arterijskog stabla s premosnicom, te prema potrebi uvesti pojednostavljena geometrije.
- Obaviti kompletan računalni proračun koji uključuje prostornu diskretizaciju geometrijskog modela, odabir i podešavanje numeričkog postupka, te obradu rezultata.

Rad treba sadržavati:

1. Uvod.
2. Opis problema, rubnih uvjeta i metoda rješavanja.
3. Prikaz dobivenih rezultata i njihovu analizu.
4. Zaključke.

Rezultate proračuna je potrebno prikazati odgovarajućim tablicama, dijagramima i slikama.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Zadatak zadao:

*Ivo Džijan*  
Prof. dr. sc. Ivo Džijan

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
3. rok: 22. 9. 2022.

Predvideni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Predsjednik Povjerenstva:

*V. Soldo*  
Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. UVOD .....	1
1.1. Kardiovaskularni sustav .....	2
1.1.1. Srce.....	2
1.1.2. Krvne žile .....	3
1.1.3. Krv.....	4
1.2. Ateroskleroza .....	5
2. HEMODINAMIKA .....	7
2.1. Viskoznost krvi .....	7
2.2. Viskoelastični materijali.....	8
2.3. Otpor krvne žile i Poiseuilleov zakon .....	10
2.4. Inercija.....	11
2.5. Podatljivost.....	12
2.6. Windkessel model .....	14
2.6.1. Windkessel model s 2 elementa .....	14
2.6.2. Windkessel model s 3 elementa .....	16
2.6.3. Windkessel model s 4 elementa .....	16
3. MATEMATIČKI MODEL .....	18
3.1. Reynoldsov transportni teorem .....	18
3.2. Osnovni zakoni dinamike fluida .....	18
3.2.1. Zakon očuvanja mase .....	19
3.2.2. Zakon očuvanja količine gibanja.....	19

---

3.3. Dopunska jednačba - Newtonov zakon viskoznosti.....	20
4. NUMERIČKA DINAMIKA FLUIDA .....	22
5. RAČUNALNI MODEL .....	29
5.1. Prikaz mreže i rubni uvjeti .....	29
5.2. Numerički rješavač.....	35
6. PRIKAZ REZULTATA .....	36
6.1. Grafički prikazi volumenskog protoka i tlaka.....	36
6.2. Smično naprezanje .....	39
7. ZAKLJUČAK .....	46
PRILOZI.....	49

## POPIS SLIKA

Slika 1.1 Uzroci smrti u Hrvatskoj tijekom 2020. godine .....	1
Slika 1.2 Ljudski kardiovaskularni sustav .....	2
Slika 1.3 Dijelovi ljudskog srca.....	3
Slika 1.4 Sastav krvi .....	4
Slika 1.5 Ateroskleroza u arterijama .....	5
Slika 1.6 Premosnica koronarnih arterija.....	6
Slika 2.1 Gradijent brzine .....	7
Slika 2.2 Odnos smičnog naprezanja i gradijenta brzine kod krvi.....	8
Slika 2.3 Histereza prilikom jednog ciklusa opterećenja.....	9
Slika 2.4 Kelvin – Voigtov model .....	9
Slika 2.5 Impuls razlike tlaka ubrzava fluid u vremenu .....	11
Slika 2.6 Pojednostavljeni prikaz Windkessel modela .....	14
Slika 2.7 Električna shema Windkessel modela s 2 elementa .....	15
Slika 2.8 Električna shema Windkessel modela s 3 elementa.....	16
Slika 2.9 Električna shema Windkessel modela s 4 elementa.....	16
Slika 2.10 Primjer složenijeg modela.....	17
Slika 4.1 Dio diskretiziranog područja proračuna.....	23
Slika 4.2 Kontrolni volumen u interakciji s okolinom.....	25
Slika 5.1 Prikaz računalnog modela premosnice – slučaj A.....	29
Slika 5.2 Prikaz računalnog modela premosnice – slučaj B.....	30
Slika 5.3 Prikaz položaja stenozе u odnosu na ulaznu račvu u slučaju B.....	30
Slika 5.4 Detalj mreže u ulaznoj račvi .....	31
Slika 5.5 Detalj mreže u izlaznoj račvi – slučaj B .....	31
Slika 5.6 Windkessel model s 3 elementa.....	33
Slika 5.7 Numerička rješenja različitih shema .....	35
Slika 6.1 Pulsirajuća promjena protoka prilikom jednog otkucaja – slučaj A.....	36
Slika 6.2 Pulsirajuća promjena tlakova prilikom jednog otkucaja – slučaj A .....	37



---

Slika 6.3 Pulsirajuća promjena protoka prilikom jednog otkucaja – slučaj B .....	37
Slika 6.4 Pulsirajuća promjena tlakova prilikom jednog otkucaja – slučaj B.....	38
Slika 6.5 Maksimalno smično naprezanje na izlazu iz prenosnice – slučaj A .....	39
Slika 6.6 Maksimalno smično naprezanje na izlazu iz prenosnice – slučaj B .....	40
Slika 6.7 Vrijednost $OSI \cdot \tau_w$ – slučaj A.....	41
Slika 6.8 Vrijednost $OSI \cdot \tau_w$ – slučaj B .....	42
Slika 6.9 Grafički prikaz anvelope smičnog naprezanja i $OSI \cdot \tau_w$ duž donje izvodnice – slučaj A .....	43
Slika 6.10 Grafički prikaz vremenske promjene smičnog naprezanja u odabranim točkama duž donje izvodnice – slučaj A .....	43
Slika 6.11 Grafički prikaz anvelope smičnog naprezanja i $OSI \cdot \tau_w$ duž donje izvodnice – slučaj B .....	44
Slika 6.12 Grafički prikaz vremenske promjene smičnog naprezanja u odabranim točkama duž donje izvodnice – slučaj B .....	44

**POPIS TABLICA**

Tablica 1.1 Svojstva i parametri krvožilnog sustava .....	4
Tablica 2.1 Pregled analogije u elektrotehnici i mehanici fluida .....	13
Tablica 5.1 Nazivi, vrste površina i pripadajući rubni uvjeti – slučaj A.....	32
Tablica 5.2 Nazivi, vrste površina i pripadajući rubni uvjeti – slučaj B.....	32

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	$m^2$	Površina poprečnog presjeka krvne žile
$C$	$m^4s^2/kg$	Volumenska podatljivost krvne žile
$C'$	$m^3s^2/kg$	Površinska podatljivost krvne žile
$D_n$	$kg/s$	Jačina difuzije
$F_n$	$kg/s$	Jačina konvekcije
$\mathcal{F}$	-	Ekstenzivna fizikalna veličina
$f_i$	$m/s^2$	Vektor specifične masene sile
$E$	$kg/m^2s^2$	Konstanta krutosti opruge
$\mathcal{J}_n$	-	Vektor protoka fizikalne veličine na granici konačnog volumena
$L$	$kg/m^4$	Inercija u Windkessel modelu
$l$	$m$	Duljina krvne žile
$m$	$kg$	Masa
$n_j$	-	Vektor normale
$\Delta n$	$m$	Udaljenost između dva konačna volumena
$P$	$m^2/s^2$	Kinematički tlak
$p$	$kg/ms^2$	Tlak
$\Delta p$	$kg/ms^2$	Razlika tlaka
$Pe_\Delta$	-	Lokalni Pecletov broj
$Q$	$m^3/s$	Volumenski protok krvi
$r'$	$m$	Radijus krvne žile
$R'$	$kg/m^2s$	Konstanta prigušivača
$R_{ch}$	$kg/m^4s$	Karakteristična impedancija na ulazu u aortu
$R$	$kg/m^4s$	Periferni otpor
$S$	$m^2$	Površina stranice konačnog volumena
$S_\varphi$	-	Izvorski član u konvekcijsko – difuzijskoj jednačbi
$t$	$s$	Vrijeme
$V$	$m^3$	Volumen

---

$x$	m	Koordinata Kartezijevog koordinatnog sustava
$y$	m	Koordinata Kartezijevog koordinatnog sustava
$v_j$	m/s	Vektor brzine
$v_n$	m/s	Vektor brzine projiciran na smjer normale
$\Gamma$	kg/ms	Koeficijent difuzije
$\gamma$	s <sup>-1</sup>	Brzina deformacije
$\varepsilon$	m	Deformacija krvne žile
$\eta'$	kg/m <sup>3</sup> s	Viskozni otpor arterijske stijenke
$\mu$	kg/ms	Viskoznost krvi
$\nu$	m <sup>2</sup> /s	Kinematička viskoznost krvi
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća krvi
$\Sigma_{ij}$	kg/ms <sup>2</sup>	Tenzor viskoznih naprezanja
$\sigma_{ij}$	kg/ms <sup>2</sup>	Tenzor naprezanja
$\sigma$	kg/ms <sup>2</sup>	Naprezanje viskoelastičnog tijela
$\tau_w$	kg/ms <sup>2</sup>	Smično naprezanje na stijenci krvne žile
$\varphi$	-	Specifična fizikalna veličina

## SAŽETAK

Razvojem računala i numeričkih metoda pojavili su se uvjeti za numeričko modeliranje složenih strujanja kao što je strujanje krvi u arterijskom krvotoku. Cilj ovog rada je provesti numeričku simulaciju strujanja krvi kroz arterijsku premosnicu. U radu je definiran matematički model nestlačivog, izotermnog, laminarnog, 3D pulsirajućeg strujanja unutar krvne žile s krutom stijenkom. Izrađena su i analizirana dva geometrijski različita modela spajanja premosnice na zdravi dio krvne žile: spoj u obliku koljena i spoj u obliku račve. Pulsirajuće strujanje krvi ostvareno je propisivanjem vremenskog profila volumenskog protoka krvi na ulazu u domenu i ugradnjom Windkessel modela s 3 elementa kao rubnog uvjeta na izlazu iz domene. Uloga Windkessel modela je uzimanje u obzir podatljivosti krvne žile, perifernog otpora mikrocirkulacije i ulazne impedancije aortnog zaliska. Intenzitet oscilatornosti smičnih naprezanja uzet je u obzir umnoškom  $OSI \cdot \tau_w$ , u kojem faktor  $OSI$  iskazuje stupanj promjene smjera smičnog naprezanja, a  $\tau_w$  predstavlja srednju vrijednost smičnog naprezanja na stijenci krvne žile. Iznos tog umnoška se koristi kao kriterij za procjenu uvjeta za stvaranje hiperplazije (zadebljanje stijenke krvne žile). Simulacija je provedena u programskom paketu *OpenFOAM* dok je analiza rezultata napravljena u programu *ParaView* i *gnuplot*. Rezultati simulacije pokazuju da su zbog nagle promjene smjera strujanja krvi i postojanja oštih rubova vrijednosti smičnog naprezanja veće u slučaju spoja premosnice i krvne žile u obliku račve u usporedbi sa spojem u obliku koljena. Također su u slučaju spoja u obliku račve i vrijednosti umnoška  $OSI \cdot \tau_w$  nekoliko puta veće u području gdje se u stvarnim uvjetima očekuje nastanak hiperplazije.

Ključne riječi: računalne simulacije, hemodinamika, premosnica, Windkessel model, smično naprezanje

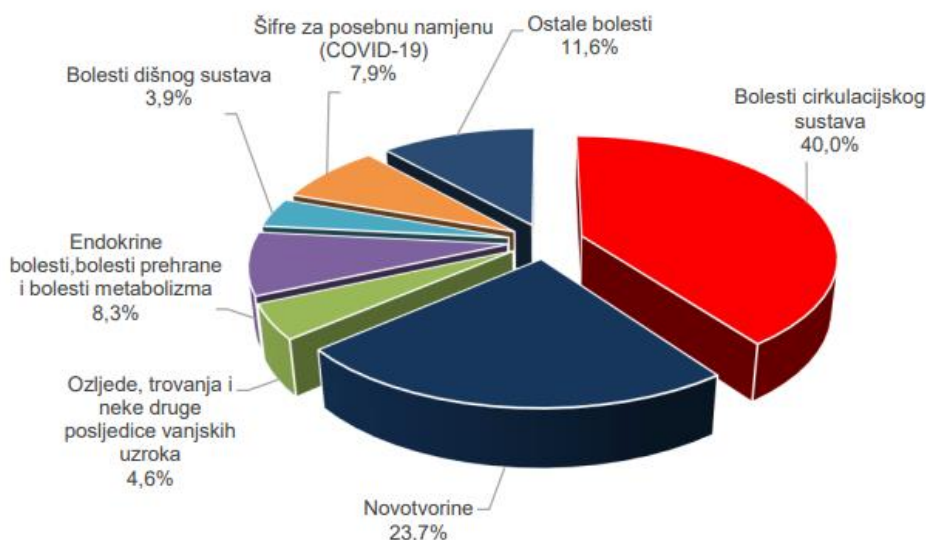
## SUMMARY

With the development of computers and numerical methods, the conditions for numerical modeling of complex flows such as blood flow in the arterial blood stream appeared. The aim of this work is to run a numerical simulation of blood flow through an arterial bypass. In this thesis is defined mathematical model of incompressible, isothermal, laminar, 3D pulsating flow inside a blood vessel with a rigid wall. Two geometrically different models of joining the bypass to a healthy part of the blood vessel were created and analyzed: a joint in the form of a knee and a joint in the form of a fork. The pulsatile blood flow was achieved by prescribing the time profile of the volume blood flow at the entrance to the domain and incorporating the Windkessel model with 3 elements as a boundary condition at the exit from the domain. The role of the Windkessel model is to consider the compliance of the blood vessel, the peripheral resistance of the microcirculation and the input impedance of the aortic valve. The intensity of oscillatory shear stress is considered by the product  $OSI \cdot \tau_w$ , in which the  $OSI$  factor expresses the degree of change in the direction of wall shear stress, and  $\tau_w$  represents the mean value of wall shear stress on the blood vessel wall. The amount of this product is used as a criterion for evaluating the conditions for the formation of hyperplasia (thickening of the blood vessel wall). The simulation was carried out in the *OpenFOAM* software package, while the results were analyzed in the *ParaView* and *gnuplot*. The simulation results show that due to the sudden change in blood flow direction and the existence of sharp edges, the wall shear stress values are higher in the case of the junction of the bypass and blood vessel in the form of a fork compared to the junction in the form of a knee. Also, in the case of joint in the form of a fork, values of the product  $OSI \cdot \tau_w$  are several times higher in the area where the occurrence of hyperplasia is expected in real conditions.

Key words: computer simulations, hemodynamics, bypass, Windkessel model, wall shear stress

## 1. UVOD

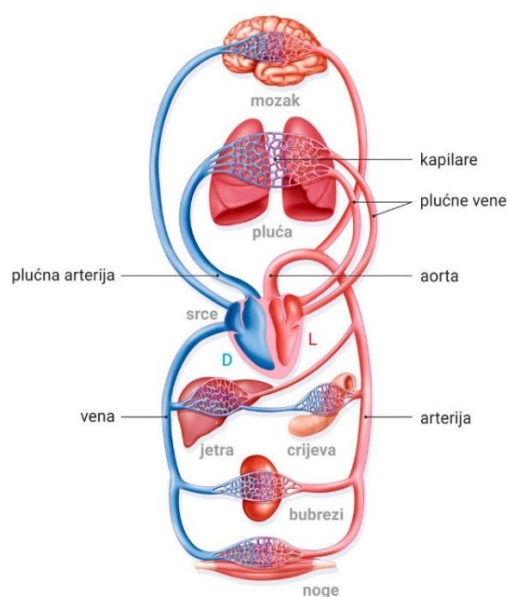
Veliki udio kardiovaskularnih bolesti (ateroskleroza, vazokonstrikcija) pogađa arterijski dio cirkulacijskog sustava. 2020. godine su bolesti cirkulacijskog sustava najveći uzrok smrti u Hrvatskoj. Udio umrlih od kardiovaskularnih bolesti u ukupnom mortalitetu iznosi 40% (slika 1.1). Upravo iz tog razloga sve je veća potreba za istraživanjem cirkulacijskog sustava kako u svrhu boljeg razumijevanja njegove funkcije tako i uzroka i mehanizma nastanka cirkulacijskih bolesti. U istraživanjima se primjenjuju eksperimentalni i računalni pristup te se oni međusobno nadopunjuju. S obzirom na ograničene mogućnosti eksperimentiranja na ljudima često se pribjegava računalnom pristupu. Računalni pristup se temelji na teorijskom pristupu čiji je cilj postaviti što bolji matematički model strujanja krvi te pojava koje se događaju u kardiovaskularnom sustavu. Tijekom posljednjih nekoliko desetljeća dolazi do naglog razvoja računalne dinamike fluida koja je postala moćan alat za rješavanje, vizualizaciju i analiziranje strujanja krvi u kardiovaskularnom sustavu. Hemodinamika je grana mehanike fluida koja se bavi pojavama i silama koje se javljaju uslijed strujanja krvi u krvotoku. Kako bi se što vjerodostojnije modelirale pojave u arterijskom krvotoku, matematički model mora biti fiziološki realan, što znači da promjena parametara modela vjerno odražava stvarne fiziološke promjene u krvotoku.



Slika 1.1 Uzroci smrti u Hrvatskoj tijekom 2020. godine [2]

## 1.1. Kardiovaskularni sustav

Kardiovaskularni ili cirkulacijski sustav se sastoji od srca, krvnih žila i krvi. Zajedno s dišnim sustavom svakoj stanici tijela osigurava kisik i hranjive tvari, a istovremeno uklanja otpadne tvari i ugljikov dioksid. Ljudski krvotok se sastoji od dva cirkulacijska kruga: jedan od lijeve klijetke srca preko arterijskog stabla, mreže kapilara i nazad preko venskog stabla do desne pretklijetke (sistemska cirkulacija); i drugi od desne klijetke preko plućne arterije kroz plućne kapilare i nazad kroz plućne vene u lijevu pretklijetku (plućna cirkulacija).

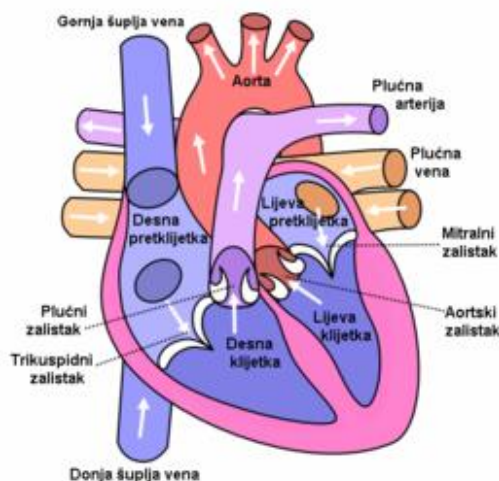


Slika 1.2 Ljudski kardiovaskularni sustav [3]

### 1.1.1. Srce

Srce je organ veličine stisnute šake građen od posebne vrste poprečno-prugastog mišića tzv. mišićnog tkiva. Nalazi se u prsnoj šupljini s lijeve strane tijela. Radi kao pumpa koja ritmičkim stezanjem i opuštanjem potiskuje krv u krvne žile. Mišićnom pregradom srce je podijeljeno na desnu i lijevu polovicu od kojih svaka ima dvije komore: pretklijetku i klijetku. Kad je srčani mišić opušten, tada krvi iz vena ulazi u pretklijetke. One se stežu i potiskuju krv u opuštena klijetke, koje se zatim stežu i potiskuju krv u arterije. Na mjestu gdje se vene spajaju s pretklijetkama, između pretklijetki i klijetki te između klijetki i arterija nalaze se zalisci koji sprječavaju vraćanje krvi. Za vrijeme mirovanja srce odrasle osobe steže se i opušta 60 - 80 puta u minuti dok se kod tjelesnih napora taj broj poveća jer srce mora brže i više opskrbljivati sve organe kisikom i hranjivim tvarima. [16]





Slika 1.3 Dijelovi ljudskog srca [4]

### 1.1.2. Krvne žile

Arterije su krvne žile koje odvođe krv iz srca prema svim dijelovima tijela. Njihove su stijenke građene od glatkog mišićnog tkiva, vrlo su čvrste i elastične kako bi podnijele velik tlak pod kojim krv izlazi iz srca. Krvni tlak u arterijama se s udalžavanjem od srca smanjuje. Aorta, glavna arterija koja izlazi iz srca grana se u brojne arterije koje odvođe krv prema svim dijelovima tijela. Arterije se granaju u sve tanje i tanje ogranke, sve do najtanjih krvnih žila koje nazivamo kapilare. U njima je krvni tlak već prilično nizak pa je njihova stijenka građena od samo jednog sloja stanica što omogućuje izmjenu tvari između krvi i stanica u okolnom tkivu. Kisik i hranjive tvari izlaze iz kapilara u tkivo, a u kapilare, u krv, ulaze ugljikov dioksid i otpadne tvari. Kapilare se spajaju u sve deblje žilice i žile koje nazivamo vene, a one vode krv natrag prema srcu. Budući da je tlak krvi u venama nizak, njihove stijenke su tanje i nisu tako elastične kao kod arterija. Unutar glavnih vena nalaze se mišićni zalisci koji sprječavaju vraćanje krvi. [26]

### 1.1.3. Krv

Krv je tekućina koja se sastoji od različitih vrsta krvnih stanica (eritrociti, leukociti, trombociti) koje se nalaze u krvnoj plazmi. Krv služi za prijenos kisika i ugljikova dioksida, zatim za prijenos hormona, otpadnih tvari, enzima, vitamina te za regulaciju tjelesne temperature. U krvi su najbrojniji eritrociti koji čine gotovo 50% volumena krvi. Njihov najvažniji sastavni dio je hemoglobin koji je zaslužan za prijenos kisika svim organima u tijelu. Leukociti imaju puno manje nego eritrociti i njihova glavna zadaća je stvaranje protutijela i osiguravanje tijelu imunitet protiv infekcija. Trombociti su krvne stanice bez jezgre i one su dio zaštitnog mehanizma za zaustavljanje krvarenja, nakupljaju se na mjestu ozljede i započinju proces zgrušavanja krvi.



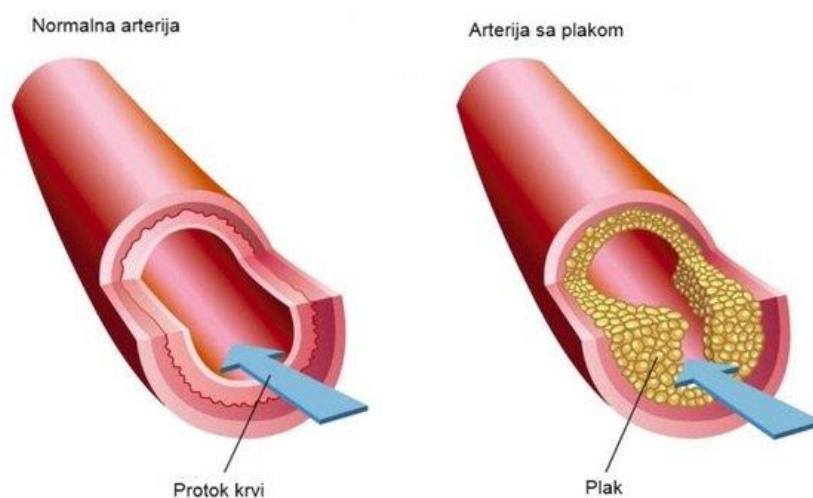
Slika 1.4 Sastav krvi [5]

Tablica 1.1 Svojstva i parametri krvožilnog sustava

Naziv fizikalnog svojstva	Oznaka	Iznos	Mjerna jedinica
Viskoznost krvi	$\mu$	$3,71 \cdot 10^{-3}$	Pas
Gustoća krvi	$\rho$	1060	kg/m <sup>3</sup>
Volumenski protok krvi	$Q$	0,15	l/min
Normalni sistolički tlak	$SYS$	120	mmHg
Normalni dijastolički tlak	$DIA$	80	mmHg
Potrebna visina dobave srca	$\Delta h$	65	mmHg

## 1.2. Ateroskleroza

Kardiovaskularne bolesti su bolesti srca i krvožilnog sustava. Najčešći uzrok svih ovih bolesti je ateroskleroza, tj. oštećenje arterija obilježeno suženjem žile zbog lokalnog zadebljanja unutarnjeg sloja stijenke žile koje se zove aterom. Aterom je građen od kolesterola i raspadnutih stanica koje prekriva vezivo i kalcij te je stijenka žile na tom mjestu tvrđa i neelastična. Arteriosklerotična nakupina sužava promjer arterije pa tkivo koje ona opskrbljuje dobiva manje krvi pa i kisika, a zbog smanjenja elastičnosti može doći i do puknuća žile. [17] Nakon dužeg vremena organ sa smanjenom dopremom kisika počinje otkazivati.

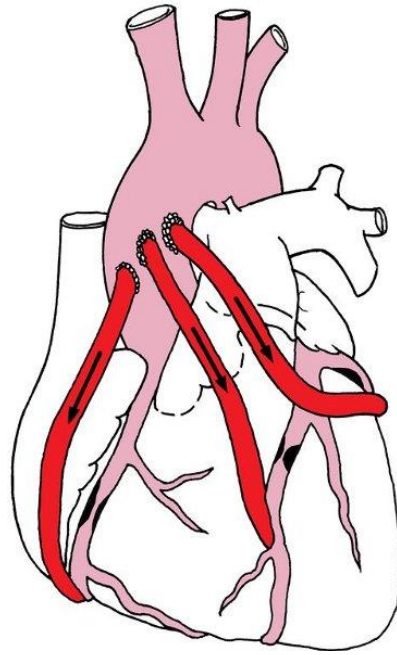


**Slika 1.5 Ateroskleroza u arterijama [18]**

Jedno od mogućih rješenja je ugradnja prenosnice (*bypass*).

### Prenosnice

Ugradnja prenosnice izvodi se kirurškim postupkom te ona služi kako bi krv zaobišla začepljeni ili suženi dio krvne žile. Izvodi se pomoću arterijske stijenke prsnog koša i/ili dijela vene s noge. Broj ugrađenih prenosnica ovisi o broju arterija koje su oštećene i o veličini i kvaliteti arterija iza mjesta suženja. Krv bogata kisikom može tada putem prenosnice doći do organa iza mjesta suženja. Sužene i začepljene arterije se ne uklanjaju. [19]



**Slika 1.6 Premosnica koronarnih arterija [20]**

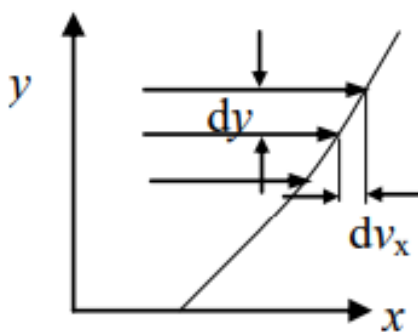
## 2. HEMODINAMIKA

Kao što je bilo rečeno u uvodu, hemodinamika proučava pojave koje se javljaju prilikom strujanja krvi i silama koje utječu na protok krvi. Kako bismo mogli razumjeti hemodinamiku potrebna su nam znanja iz hidrodinamike i anatomije ljudskog cirkulacijskog sustava. Iako bi mnogi pomislili da se strujanje krvi u krvnim žilama može zamijeniti strujanjem vode u cjevovodima ipak treba napomenuti da je to djelomično točno zbog određenih specifičnosti koje pokazuju krvne žile i krv. Krv za razliku od vode nije Newtonovska tekućina što otežava određivanje reoloških svojstava (deformacije, naprezanja,...). Reologija je dio fizike koji se bavi tečenjem materije, tj. njezinim deformacijama koje se pod djelovanjem napreznja neprekidno deformiraju. Modeliranje strujanja krvi je otežano također i zbog složene geometrije i velikog raspona promjera krvnih žila (najveći promjer ima aorta i iznosi oko 30 mm, dok je najmanji kod kapilara i iznosi 8  $\mu\text{m}$ ). Danas se koristi MSCT (Multislice Computed Tomography) metoda koja upotrebom suvremenih uređaja za kompjutoriziranu tomografiju omogućuje visoko kvalitetan prikaz krvnih žila i tkiva u svim dijelovima tijela. Treća specifičnost je da stijenka krvne žile pokazuje viskoelastična i neizotropna svojstva.

### 2.1. Viskoznost krvi

Viskoznost je fizikalna veličina koja pokazuje otpor fluida k tečenju, a definirana je kao mjera unutarnjeg trenja fluida. Trenje se javlja kao posljedica postojanja relativne brzine između dva bliska sloja fluida. Gradijent brzine (brzina deformacije) je omjer razlika brzine između dva susjedna sloja fluida i njihove udaljenosti. Matematički se zapisuje kao:

$$\gamma = \frac{dv_x}{dy} \quad (2.1)$$

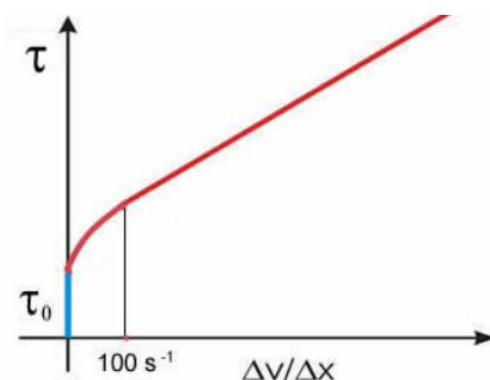


Slika 2.1 Gradijent brzine

Fluidi s linearnom vezom između gradijenta brzine i smičnog naprezanja nazivaju se Newtonovski fluidi. Faktor proporcionalnosti je viskoznost.

$$\tau_w = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (2.2)$$

Kao što je bilo rečeno krv nije Newtonovski fluid te veza između smičnog naprezanja i brzine deformacije kod krvi nije linearna. To je zbog toga što se krv sastoji od plazme i krvnih zrnaca. Kada bi gledali samu plazmu ona bi slijedila Newtonov zakon viskoznosti, ali krv ne. Kod dovoljno visokih brzina deformacija može se reći da krv zadovoljava Newtonov zakon viskoznosti (slika 2.2).



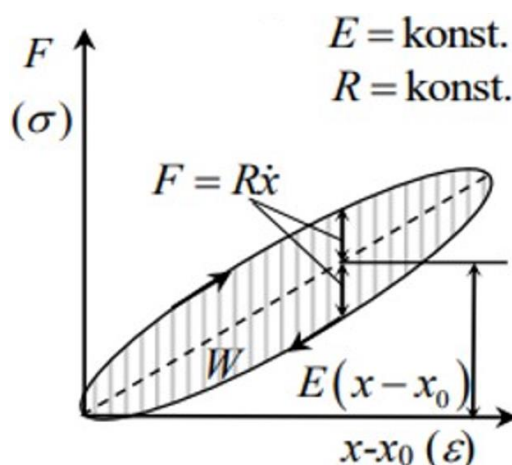
**Slika 2.2 Odnos smičnog naprezanja i gradijenta brzine kod krvi [6]**

Za strujanje krvi u velikim arterijama promjera većeg od 1 mm i pri dovoljno velikom gradijentu brzine pretpostavlja se da vrijedi Newtonov zakon viskoznosti. Sa smanjivanjem promjera krvnih žila (arteriole, kapilare, venule), čiji je promjer reda veličine promjera krvnih zrnaca upitan je model krvi kao kontinuuma te gornji izraz više ne vrijedi. Prema tome ne-Newtonovski karakter krvi ima ulogu samo u mikrocirkulaciji. Isto tako viskoznost krvi ovisi o temperaturi, ali pretpostavka je da se temperatura održava na 36 - 37 °C pa se taj utjecaj može zanemariti.

## 2.2. Viskoelastični materijali

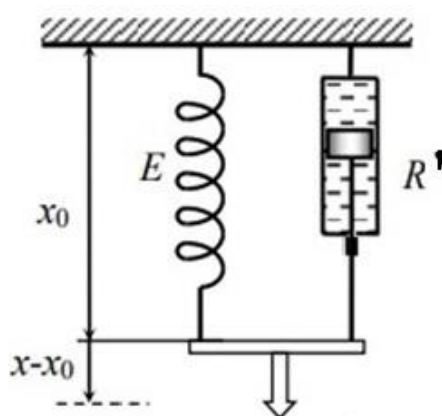
Viskoelastičnost je svojstvo materijala koji pokazuje i elastične i viskozne karakteristike kada se podvrgne deformaciji. Kod elastičnih materijala je karakteristično da se opterećenje i rasterećenje prikazano u dijagramu naprezanje – deformacija odvija po istom pravcu. U takvom sustavu nema disipacije energije. Kod fluida naprezanje je razmjerno brzini deformacije, što se može prikazati pomoću prigušivača. Ako bi otpor prigušivača (pri strujanju fluida je to

viskoznost) bio konstantan, tada bi karakteristika prigušivača u dijagramu naprezanje – brzina deformacije bila pravac (linearan sustav) te bi vrijedio Newtonov zakon viskoznosti koji je objašnjen u poglavlju 2.1. Stijenka krvnih žila pokazuje viskoelastična svojstva što znači da će naprezanje (uzrokovano tlakom) u krvnoj žili zavisiti od deformacije (promjena promjera, odnosno površine poprečnog presjeka žile) i brzine deformacije (brzina promjene promjera, tj. površine poprečnog presjeka žile). U dijagramu naprezanje – deformacija se pojavljuje histereza, pri čemu je površina petlje jednaka disipiranoj energiji tijekom ciklusa opterećenja.



**Slika 2.3 Histereza prilikom jednog ciklusa opterećenja**

Najjednostavniji model viskoelastičnog materijala je Kelvin – Voigtov model koji se sastoji od paralelne veze opruge i prigušivača (slika 2.4).



**Slika 2.4 Kelvin – Voigtov model**

Diferencijalna jednadžba Kelvin – Voigtova modela koja povezuje naprezanje s deformacijom i brzinom deformacije je:

$$R' \frac{d\varepsilon}{dt} + E\varepsilon = \sigma \quad (2.3)$$

Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe se može pokazati kako ovaj model ne opisuje u potpunosti ponašanje realnog viskoelastičnog materijala jer ne pokazuje nikakvu relaksaciju naprezanja [7]. Pojavu puzanja opisuje relativno dobro. Puzanje je porast deformacije uz konstantno naprezanje. Relaksacija naprezanja je pojava kod koje se smanjuje naprezanje u vremenu uz konstantnu deformaciju. Oblik jednadžbe (2.3) koji se koristi prilikom modeliranja strujanja u krvotoku je:

$$p - p_0 = \frac{A - A_0}{C'} + \eta' \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.4)$$

gdje je  $p_0$  referentni tlak,  $A_0$  referentna površina poprečnog presjeka pri tom tlaku,  $\eta'$  koeficijent otpora stijenke koji je posljedica viskoznosti materijala stijenke,  $C'$  je površinska podatljivost žile koja će biti objašnjena u nastavku.

Iako Kelvin Voigtov model ne opisuje potpuno ponašanje krvnih žila, danas se najčešće koristi zbog svoje jednostavnosti.

U ovom radu se zbog jednostavnosti neće uzeti viskoelastična svojstva krvnih žila, već će se žila promatrati kao kruti element. Ovo uvelike pojednostavljuje numerički proračun jer se izbjegava modeliranje i proračun pomaka i naprezanja u stijenci arterije. Ipak, kako bi se sačuvala veza između vremenskih profila protoka i tlaka, utjecaj ostatka fizikalnog modela koji se u stvarnosti sastoji od nistrujnog dijela krvotoka (arteriole, kapilare, tkivo,...) obuhvaćen je posebnom vrstom rubnog uvjeta (*windkesselPressure* rubni uvjet).

### 2.3. Otpor krvne žile i Poiseuilleov zakon

Otpor krvne žile je sila koja se opire strujanju krvi kroz krvnu žilu dok Poiseuilleov zakon definira otpor koji se javlja prilikom laminarnog i nestlačivog strujanja krvi kroz žilu konstantnog promjera. Ovisi o promjeru i duljini žile te viskoznosti krvi. Izvodi se iz Navier-Stokesovih jednadžbi, a glasi:

$$Q = \frac{\Delta p}{R} = \frac{\Delta p}{l} \frac{\pi}{8\mu} r'^4 \quad (2.5)$$

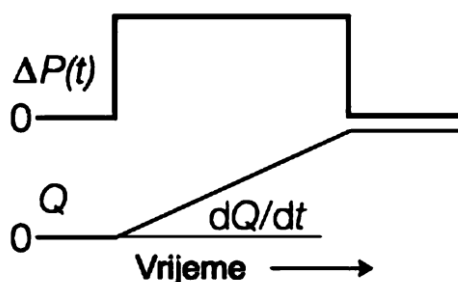
Ovaj zakon je analogan Ohmovom zakonu u elektrotehnici gdje volumenski protok  $Q$  predstavlja struju, razlika tlaka  $\Delta p$  razliku potencijala odnosno napon, a ostatak formule otpor  $R$ . Poiseuilleov zakon se može primijeniti za kombinaciju krvnih žila pa čak i cijelu sistemsku cirkulaciju. Sistemski otpor krvožilnog sustava čine pretežno male arteriole i kapilare.



Primjenjujući prethodni zakon, uz pretpostavku polumjera aorte od 15 mm (najveći polumjer aorte i nalazi se na njenom početku) i duljine 500 mm te polumjera arteriole od 7,5  $\mu\text{m}$  i duljine 1 mm možemo procijeniti omjer njihovih otpora. Omjer polumjera je 2000, dok je omjer duljina 500. Lako se dobije iz formule (2.5) uvrštavajući navedene vrijednosti da je otpor jedne arteriole  $3,2 \cdot 10^{10}$  puta veći od otpora aorte. No ne smije se zanemariti činjenica da sve arteriole, kojih je otprilike  $3 \cdot 10^8$  proizlaze iz jedne aorte pa ih se može promatrati kao paralelan spoj. Znajući pravilo da se paralelni otpori zbrajaju na inverzan način može izračunati da je ukupni otpor svih arteriola otprilike 100 puta veći od otpora aorte. [11]

## 2.4. Inercija

Drugi važan pojam koji se javlja u hemodinamici jest inercija. Inercija se definira kao mjera tromosti stupca fluida koju je potrebno ubrzati, a potrebna pogonska sila koja se troši na ubrzavanje je upravo razlika tlaka. Fizikalno označava efektivnu masu. Uz inerciju stupca, razlika tlaka mora biti dostatna i za svladati sve linijske gubitke u krvotoku.



**Slika 2.5 Impuls razlike tlaka ubrzava fluid u vremenu [11]**

Inercijski efekti su najveći u velikim arterijama gdje je viskozni otpor mali, a pulsirajući karakter značajan. Izvodi se preko 2. Newtonovog zakona:

$$\Delta p A = \rho l A \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \quad (2.6)$$

Nakon što se površine poprečnog presjeka pokrate u jednadžbi (2.6) ostaje izraz:

$$\Delta p = \rho l \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = L \frac{dQ}{dt} \quad (2.7)$$

gdje oznaka  $L$  označava koeficijent inercije. Iz jednadžbe (2.7) se vidi da je koeficijent inercije obrnuto proporcionalan kvadratu polumjera, za razliku od otpora koji je obrnuto proporcionalan

sa četvrtom potencijom polumjera pa se zaključuje da koeficijent inercije u većim žilama igra veću ulogu nego otpor. [11]

## 2.5. Podatljivost

Podatljivost (popustljivost) predstavlja povećanje volumena krvne žile uslijed povećanja transmuralnog (rasteznog) tlaka. Matematički se zapisuje kao omjer promjene volumena i razlike tlaka:

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (2.8)$$

Fizikalno gledajući, što krvna žila ima veću podatljivost, to se više deformira uslijed istih uvjeta tlaka i volumena od žile koja ima manju podatljivost. Inverzna veličina podatljivosti je krutost žile. Također se može definirati i površinska podatljivost gdje se volumen zamjenjuje površinom poprečnog presjeka.

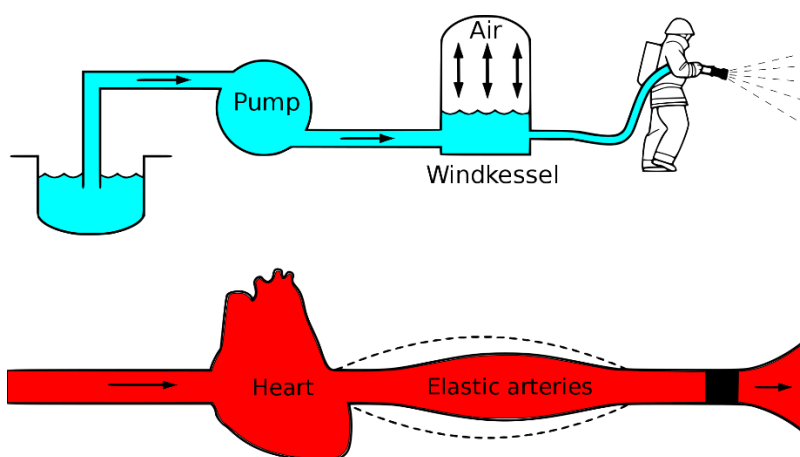
Navedeni pojmovi mogu se povezati i s pojmovima iz drugih grana fizike. Tako npr. u elektrotehnici pokretačka sila koja pokreće tok struje je razlika potencijala tj. napon dok je u mehanici fluida pokretačka sila razlika tlaka. Iz navedenog vidimo da postoje analogije između elektrotehnike i mehanike fluida, napon odgovara razlici tlaka, a struja volumenskom protoku fluida. Sljedeći element koji se nalazi u strujnom krugu je kondenzator. On sprema određenu količinu naboja pri određenom naponu. Analogan element u mehanici fluida je spremnik koji akumulira volumen (u elektrotehnici naboj) fluida, pri čemu mora postojati linearna veza između volumena fluida u spremniku i tlaka. Razumijevanje fizikalnih analogija je važno jer će upravo podatljivost žile biti zamijenjena s kapacitetom u elektrotehnici, a otpor koji se pojavljuje prilikom strujanja krvi će biti zamijenjen otporom u strujnom krugu. Donja tablica prikazuje sažeti prikaz između analogija u elektrotehnici i mehanici fluida.

Tablica 2.1 Pregled analogije u elektrotehnici i mehanici fluida

Veličina	Električna	Mehanika fluida
Količina; $K$	Naboj; $q$	Volumen; $V$
Strujanje; $S = \frac{dK}{dt}$	Struja; $i = \frac{dq}{dt}$	Protok; $Q = \frac{dV}{dt}$
Potencijal; $P$	Električni potencijal; $\varphi'$	Tlak; $p$
Pokretačka sila; $F = \Delta P$	Napon; $u = \Delta\varphi'$	Razlika tlaka; $\Delta p$
Kapacitivnost; $C = \frac{\Delta K}{\Delta F}$	Kondenzator; $C = \frac{\Delta q}{\Delta u}$	Spremnik; $C = \frac{\Delta V}{\Delta p}$
Otpornost; $R = \frac{\Delta P}{S}$	Ohmov zakon; $R = \frac{u}{i}$	Hagen – Poiseuille; $R = \frac{\Delta p}{Q}$
Tromost; $\frac{P}{\frac{dS}{dt}}$	Induktivitet zavojnice; $L = \frac{u}{\frac{di}{dt}}$	Inercija stupca fluida; $M = \frac{\Delta p}{\frac{dQ}{dt}} = \frac{\rho l}{A}$

## 2.6. Windkessel model

Windkessel modeli su modeli koji se koriste prilikom modeliranja sistole i dijastole, ponašanja krvnih žila tijekom njih te uspostavljaju odnos između tlaka i protoka u njima. Najjednostavniji Windkessel model se sastoji od pumpe na koju je spojena zračna komora. Sistem je ispunjen vodom, osim određenog volumena zraka koji se nalazi u zračnoj komori. Kako se voda pumpa u spremnik, ona istovremeno tlači zrak i potiskuje vodu iz spremnika prema izlazu. Tlačenje zraka u spremniku simulira elastičnost i istežljivost arterija. [13]

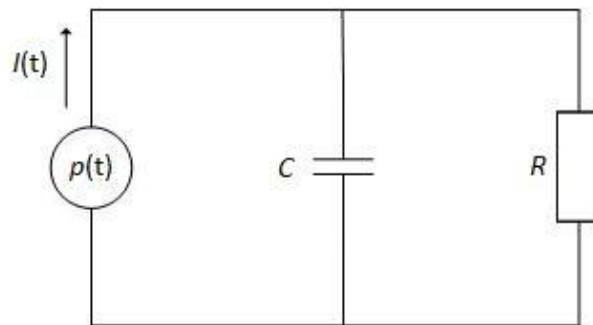


Slika 2.6 Pojednostavljeni prikaz Windkessel modela [14]

Pumpa na slici 2.6 predstavlja srce, zračna komora podatljivost krvne žile, dok izlaz iz spremnika predstavlja periferni otpor strujanja od trenutka kada krv napusti aortu pa sve dok se ne vrati u desnu pretkljetku kao venska krv. Podatljivost se u elektrotehničkom smislu modelira kondenzatorom kapaciteta  $C$ , a periferni otpor otpornikom otpora  $R$  koji je izvor disipacije energije.

### 2.6.1. Windkessel model s 2 elementa

Windkessel model koji se sastoji od 2 elementa predstavlja najjednostavniji model koji opisuje vezu između tlaka i protoka u krvotoku. Tijekom jednog perioda srčanog ciklusa uzima u obzir ukupni periferni otpor mikrocirkulacije i podatljivost arterijske stijenke.



**Slika 2.7 Električna shema Windkessel modela s 2 elementa [13]**

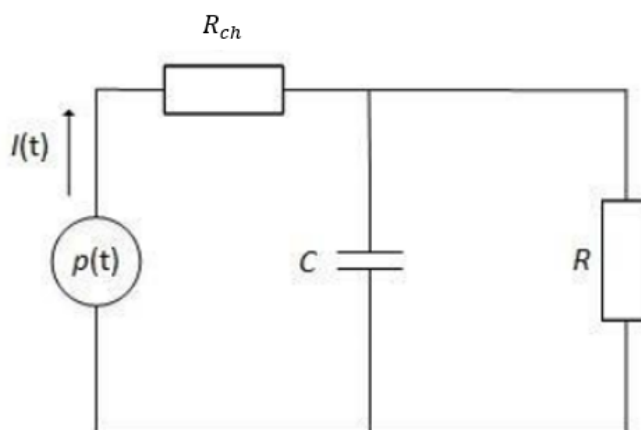
Periferni otpor ekvivalentan je otporniku  $R$  koji je izvor disipacije energije dok je podatljivost arterije analogna kondenzatoru kapaciteta  $C$  koji ima funkciju pohrane električnog naboja. Struja  $I$  predstavlja volumenski protok krvi, a krvni tlak u aorti modeliran je kao izvor izmjenične struje (napon) koji je promjenjiv u vremenu. Uz pretpostavku Poiseuilleovog zakona i analogije podatljivosti arterije i kondenzatora za koju vrijedi linearna promjena volumena i tlaka, može se napisati diferencijalna jednačba koja opisuje odnos tlaka i protoka:

$$I = \frac{p}{R} + C \frac{dp}{dt} \quad (2.9)$$

Osnovni nedostatak ovog modela je da ne modelira disipaciju energije uslijed viskoznosti arterijske stijenke i ne uzima u obzir karakterističnu impedanciju na ulazu u aortu. Taj modela zbog nedostatka dodatne viskozne disipacije energije ne daje dobru rekonstrukciju tlaka na temelju protoka.

### 2.6.2. Windkessel model s 3 elementa

Dodavanjem otpornika  $R_{ch}$  u RLC shemu simulira se karakteristična impedancija zbog ubrizgavanja krvi kroz aortni zalistak. Ostali elementi su jednaki kao i u prethodnom modelu.



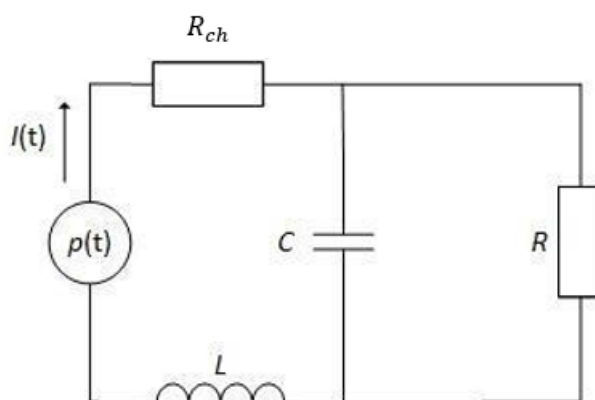
Slika 2.8 Električna shema Windkessel modela s 3 elementa

Diferencijalna jednačba koja opisuje model glasi:

$$\left(1 + \frac{R_{ch}}{R}\right) Q + CR_{ch} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{p}{R} + C \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.10)$$

### 2.6.3. Windkessel model s 4 elementa

Windkessel model s 4 elementa dobije se tako da se u model s 3 elementa doda zavojnica induktiviteta  $L$ .

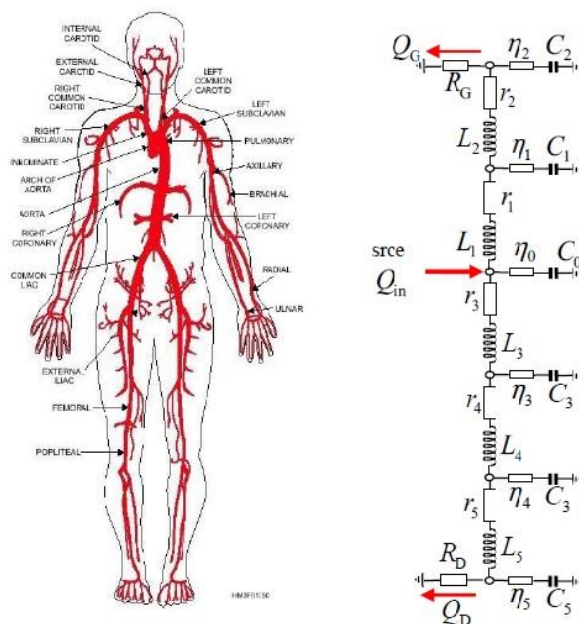


Slika 2.9 Električna shema Windkessel modela s 4 elementa

Uloga zavojnice je simuliranje inercije fluida koja u prijašnjim modelima nije bila uzeta u obzir.

Ovakvim modelima se može povećati kompleksnost čime se veza između protoka i tlaka sve više približava realnom krvotoku.

Slika 2.8 prikazuje složeniji model koji za razliku od modela s 2 elementa sadrži još dodatno otpor  $r$  te zavojnicu induktiviteta  $L$ . Otpor  $r$  predstavlja otpor prolaska krvi kroz aortni ili plućni zalistak. Zavojnica induktiviteta  $L$  simulira inerciju krvi.



**Slika 2.10** Primjer složenijeg modela

Gornja slika prikazuje složeniji model krvožilnog sustava u kojem postoje 2 grane: jedna koja distribuira krv prema donjim ekstremitetima i druga prema gornjim ekstremitetima i glavi.  $C_0$  i  $\eta_0$  modeliraju volumen ulaza u aortu, komora koja je modelirana s  $C_1$  i  $\eta_1$  predstavlja volumen velikih arterija koje dovode krv rukama i glavi, a komora s indeksima 2 predstavlja male arteriole.  $L$  i  $r$  elementi predstavljaju linijske gubitke i inerciju u tim dijelovima.  $R_G$  predstavlja koncentrirani otpor kapilara u dijelovima glave. Analogno s druge strane elementi s indeksima 3 modeliraju velike arterije, s 4 označuju nižu generaciju malih arterija dok elementi s indeksom 5 arteriole. Koncentrirani otpor kapilara modeliran je otporom  $R_D$ . Upravo otpori  $R_G$  i  $R_D$  određuju protoke prema gornjim i donjim ekstremitetima.

### 3. MATEMATIČKI MODEL

Svaka simulacija započinje definiranjem matematičkog modela koji opisuje fizikalni model stvarnog svijeta. Fizikalni model se sastoji od niza pretpostavki pri aproksimaciji stvarnog svijeta. [8]

#### 3.1. Reynoldsov transportni teorem

Svi zakoni mehanike (koji su definirani za materijalno tijelo) i termodinamike (koji su definirani za zatvoreni termodinamički sustav) u mehanici fluida će biti primjenjivi na materijalni volumen. Materijalni volumen se sastoji uvijek od istih čestica. [12] U tom smislu će se definirati kontrolni volumen čije se granice poklapaju s površinom za koju se želi istražiti utjecaj strujanja fluida. Kontrolni volumen je opasan kontrolnom površinom na kojoj razlikujemo ulazni dio, izlazni dio i plašt kroz koji nema protoka fluida. Budući da su svi zakoni mehanike fluida izvedeni za materijalni volumen potrebno ih je preformulirati za kontrolni volumen. Teorem koji predstavlja njihovu vezu naziva se Reynoldsov transportni teorem.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho \varphi dV = \int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho \varphi)}{\partial t} dV + \int_{S_{KV}} \rho \varphi v_j n_j dS \quad (3.1)$$

Veličina  $\varphi$  predstavlja masenu gustoću ekstenzivne fizikalne veličine koja se definira kao:

$$\varphi = \frac{d\mathcal{F}}{dm} \quad (3.2)$$

gdje je  $\mathcal{F}$  predstavlja ekstenzivnu fizikalnu veličinu.

#### 3.2. Osnovni zakoni dinamike fluida

Dinamika fluida se temelji na osnovnim zakonima fizike u koje spadaju:

1. Zakon očuvanja mase,
2. Zakon očuvanje količine gibanja,
3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja,
4. Zakon očuvanja energije,
5. Drugi zakon termodinamike

U modelu se promatra inertan, jednofazan i homogen fluid pa zakon momenta količine gibanja ne nosi nikakvu novost u odnosu na zakon očuvanja količine gibanja osim simetričnosti tenzora



naprezanja. Drugi zakon termodinamike je pasivna jednadžba te se može rješavati nezavisno od ostalih jednadžbi. Primjenjuje se prema potrebi (ukoliko postoji potreba za ispitivanjem fizikalnosti rješenja) [10] te se neće uzimati u obzir. Zakon očuvanja energije se također neće uzimati u obzir jer se pretpostavlja izotermni (temperatura krvi je konstantne temperature) i nestlačivi tok.

Preostali zakoni koji će se promatrati su zakon očuvanja mase te zakon očuvanja količine gibanja.

### 3.2.1. Zakon očuvanja mase

Zakon očuvanja mase izrečen riječima, za materijalni volumen, glasi: Brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli. [10]

Matematički zapis ovog zakona je:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \rho dV = 0 \quad (3.3)$$

Korištenjem Reynoldsovog transportnog teorema možemo je zapisati dalje u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{KV}} \rho dV + \int_{S_{KV}} \rho v_j n_j dS = 0 \quad (3.4)$$

Korištenjem Gaussovog teorema prelazi se sa zatvorenog integrala po površini na integral po volumenu:

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} dV = 0 \quad (3.5)$$

S obzirom da vrijedi hipoteza kontinuuma, jednadžbu (3.5) možemo zapisati u diferencijalnom obliku:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.6)$$

### 3.2.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja izrečen riječima, za materijalni volumen, glasi: Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen. [10]

Matematički zapis ovog zakona je:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_{M(t)}} \rho v_i dV = \int_{V_{M(t)}} \rho f_i dV + \int_{S_{M(t)}} \sigma_i dS \quad (3.7)$$

Primjenom Reynoldsovog teorema izraz (3.7) prelazi u:

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_{S_{KV}} \rho v_i v_j n_i dS = \int_{V_{KV}} \rho f_i dV + \int_{S_{KV}} \sigma_i dS \quad (3.8)$$

Primijenivši vezu vektora i tenzora naprezanja  $\sigma_i (n_j) = n_j \sigma_{ij}$  i Gaussov teorem dobivamo:

$$\int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} dV = \int_{V_{KV}} \rho f_i dV + \int_{V_{KV}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (3.9)$$

Konzervativni diferencijalni zapis jednadžbe (3.9) glasi:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.10)$$

Pri analizi problema strujanja krvi u ovom radu utjecaj gravitacije je zanemaren dok je za modeliranje tenzora naprezanja  $\sigma_{ij}$  potrebna dopunska jednadžba.

### 3.3. Dopunska jednadžba - Newtonov zakon viskoznosti

Kao što je objašnjeno u poglavlju 2.1. krv koja struji kroz arterije može se promatrati kao Newtonovska pa za nju vrijedi Newtonov zakon viskoznosti. Tenzor naprezanja može se prikazati preko sfernog i devijatorskog dijela:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \Sigma_{ij} \quad (3.11)$$

gdje je  $\Sigma_{ij}$  simetrični tenzor viskoznih naprezanja, a  $\delta_{ij}$  Kroneckerov delta simbol (jedinični tenzor). Upravo Newtonov zakon uspostavlja linearnu vezu između simetričnog tenzora naprezanja i tenzora brzine deformacije (simetričnog dijela gradijenta brzine). [10]

$$\Sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left( \mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.12)$$

U nestlačivom strujanju divergencija brzine prema jednadžbi kontinuiteta je jednaka nuli pa slijedi:

$$\Sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 2\mu D_{ji} \quad (3.13)$$

Kada se jednačba (3.13) uvrsti u jednačbu (3.10) dobije se konačan oblik zakona količine gibanja:

$$\frac{\partial(v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.14)$$

gdje je  $P$  kinematički tlak (statički tlak podijeljen s gustoćom), a  $\nu$  kinematička viskoznost (viskoznost podijeljena s gustoćom).

## 4. NUMERIČKA DINAMIKA FLUIDA

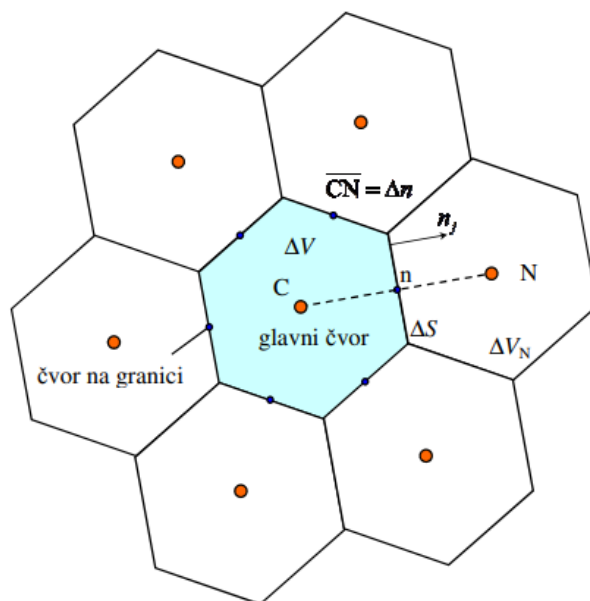
Strujanje fluida je opisano nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama koje su najčešće drugog reda te iz tog razloga analitičko rješenje postoji samo u ograničenom broju slučajeva, najčešće kad se nelinearni i lokalni član zanemaruju. Stoga se zbog potrebe rješavanja kompliciranijih problema u mehanici fluida, uz teorijski i eksperimentalni pristup, razvojem računala počinju stvarati uvjeti za numeričko rješavanje matematičkih modela koji opisuje strujanje fluida. Time započinje nagli razvoj treće grane mehanike fluida nazvana računalna dinamika fluida. [8] Razlika između analitičkog rješenja i numeričkog jest da nam je u analitičkom rješenju poznato polje rješenja u cijeloj domeni proračuna, dok u numeričkom znamo rješenje samo u diskretiziranim točkama domene te se ono razlikuje od analitičkog rješenja za pogrešku diskretizacije koja je posljedica veličine mreže te zbog pogreške rješavanja diskretiziranih jednačbi koja se javlja zbog konačne točnosti računala i reziduala koji nakon iterativnih postupaka ne bude jednak nuli. Nakon definiranja matematičkog modela koji je ujedno i prvi korak u numeričkoj simulaciji potrebno je numerički riješiti matematički model. U numeričko rješavanje matematičkog modela spada: diskretizacija prostora odnosno generiranje geometrijske mreže, diskretizacija jednačbi te rješavanje sustava diskretiziranih algebarskih jednačbi. Zadnji korak numeričke simulacije je analiza rješenja koji uključuje prikaz vektorskih, skalarnih i tenzorskih polja te dijagramske prikaze željenih fizikalnih veličina. [8]

### Metoda konačnih volumena

Metoda konačnih volumena je integralna metoda koja se temelji na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednačbi po kontrolnim volumenima na koje je podijeljeno područje proračuna. Danas je najzastupljenija numerička metoda u području računalne dinamike fluida. Opći oblik transportne jednačbe za skalarno polje glasi:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma_{\Delta S}} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV \quad (4.1)$$

Jednačba (4.1) se rješava za svaki kontrolni volumen. Gornja jednačba glasi riječima: *Brzina promjene fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena razmjerna je brzini protoka tog fizikalnog svojstva kroz granice konačnog volumena i brzini nastajanja ili nestajanja tog fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena.* [8]



**Slika 4.1 Dio diskretiziranog područja proračuna [8]**

Prvi član u jednadžbi 4.1 predstavlja brzinu promjene sadržaja fizikalne veličine unutar konačnog volumena, članovi s površinskim integralom predstavljaju konvekcijski i difuzijski protok fizikalne veličine kroz granice konačno volumena dok zadnji član označava izvor/ponor fizikalne veličine unutar konačnog volumena. Protok fizikalne veličine je definiran kao pozitivan kad se odvija od konačnog volumena prema okolini zbog smjera normale na površini  $\Delta S$ , a minus ispred integrala u jednadžbi 4.1 pokazuje da će se uslijed takvog protoka sadržaj fizikalne veličine unutar konačnog volumena smanjivati. Ispred volumenskog integrala s desne strane je plus jer se radi o izvoru, a kad bi bio minus radilo bi se o ponoru fizikalne veličine unutar konačnog volumena.

### Diskretizacija volumenskih integrala

U jednadžbi 4.1 pojavljuju se površinski i volumenski integrali koji se mogu aproksimirati teoremom o srednjoj vrijednosti. Tako se može pisati za lokalnu promjenu uz pretpostavku nestlačivog strujanja:

$$\int_{\Delta V} \varphi dV = \bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V \quad (4.2)$$

Pod pretpostavkom da su konačni volumeni malih dimenzija, raspored fizikalne veličine  $\varphi$  može se aproksimirati linearnom raspodjelom razvojem u Taylorov red [8]:

$$\varphi(x_j) = \varphi_C + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_C (x_j - x_j^C) \quad (4.3)$$

Uvrštavanjem izraza (4.3) u izraz (4.2) dobije se:

$$\int_{\Delta V} \varphi dV = \varphi_C \Delta V + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_C \left[ \int_{\Delta V} x_j dV - x_j^C \Delta V \right] \quad (4.4)$$

gdje integral s desne strane predstavlja statički moment volumena u odnosu na ishodište koordinatnog sustava tj. umnožak vektora položaja težišta i volumena  $\Delta V$  pa se dalje može pisati:

$$\int_{\Delta V} \varphi dV = \left[ \varphi_C + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_C (x_j^T - x_j^C) \right] \Delta V \quad (4.5)$$

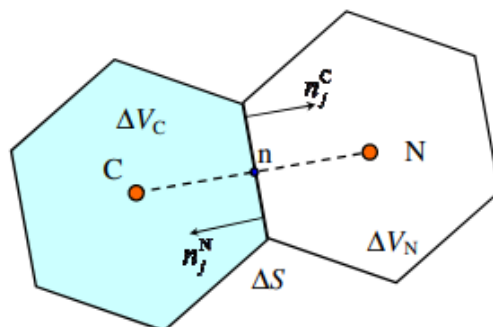
Ako je glavni čvor u težištu konačnog volumena, član s gradijentom fizikalne veličine otpada pa se zaključuje da će za slučaj linearne raspodjele srednja vrijednost fizikalne veličine biti jednaka upravo vrijednosti fizikalne veličine u glavnom čvoru. Konačan oblik aproksimacije za lokalni član glasi:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = \frac{d}{dt} (\rho \bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V) \approx \frac{d}{dt} (\rho \varphi_C \Delta V) = \rho \frac{d\varphi_C}{dt} \Delta V \quad (4.6)$$

Analogno se može pisati i za izvorski član:

$$\int_{\Delta V} S_\varphi dV = \bar{S}_{\varphi, \Delta V} \Delta V \approx S_C \Delta V \quad (4.7)$$

## Konvekcijski i difuzijski protok



**Slika 4.2 Kontrolni volumen u interakciji s okolinom**

U jednadžbi (4.1) članovi s površinskim integralom predstavljaju protok fizikalne veličine uslijed difuzije i konvekcije kroz stranice konačnog volumena. Prvi član u integralu predstavlja konvekciju, dok drugi difuziju. Protoku fizikalnog svojstva doprinosi samo normalna komponenta vektora toka. [8]

$$\Delta J_n = \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \int_{\Delta S} \left( \rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (4.8)$$

Također je potrebno i na protok fizikalne veličine primijeniti teorem o srednjoj vrijednosti pa tada jednadžba (4.8) glasi:

$$\Delta J_n = \left[ \rho (\overline{v_n \varphi})_{\Delta S} - \Gamma \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Delta S} \right] \Delta S \quad (4.9)$$

Član koji označava konvektivni protok  $\rho v_j \varphi$  izražen je preko srednje vrijednosti umnoška normalne komponente brzine i fizikalne veličine na površini  $\Delta S$  konačnog volumena. Ako se točka  $n$  na slici 4.3 nalazi u težištu površine  $\Delta S$  tada se konvektivni dio jednadžbe može aproksimirati izrazom:

$$(\overline{v_n \varphi})_{\Delta S} \approx \bar{v}_{n, \Delta S} \bar{\varphi}_{\Delta S} \approx v_{n, n} \varphi_n \quad (4.10)$$

Vrijednost  $\varphi_n$  na stranici  $\Delta S$  računa se preko vrijednosti  $\varphi$  u glavnim čvorovima kojima je stranica  $\Delta S$  zajednička tj.  $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_C, \varphi_N)$ . Ako je točka  $n$  u težištu stranice  $\Delta S$ , tada je površinski integral drugog reda točnosti. [21] Intenzitet konvekcije ovisi o vrijednosti fizikalne veličine  $\varphi_n$  na stranici  $\Delta S$  koja se iznosi masenim protokom  $\rho v_{n, n} \Delta S$ . Ova vrsta protoka je jednosmjerna i pozitivna kada ja vektor brzine kolinearan i jednako orijentiran kao vanjska normala ruba kontrolnog volumena, odnosno kada se fizikalna veličina iznosi iz kontrolnog volumena.

Analogno se može napisati i za srednju vrijednost normalne derivacije koja se aproksimira vrijednošću normalne derivacije polja  $\varphi$  u točki  $n$ :

$$\left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}\right)_{\Delta S} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_n = \frac{1}{\Delta n} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}}\Big|_n \quad (4.11)$$

gdje je uvedena bezdimenzijska koordinata  $\tilde{n} = n/\Delta n$ .  $\Delta n$  predstavlja udaljenost čvorova C i N. Sada se jednačba (4.9) može zapisati u obliku:

$$\Delta J_n = \rho v_{n,n} \Delta S \varphi_n - \frac{\Gamma \Delta S}{\Delta n} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}}\Big|_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}}\Big|_n \quad (4.12)$$

Difuzija predstavlja prijenos fizikalne veličine iz volumena u okolinu i obratno zbog razlike vrijednosti fizikalne veličine. Ako je  $\varphi_C > \varphi_N$  tada fizikalna veličina istječe iz konačnog volumena u susjedni konačni volumen. Za razliku od konvekcije, difuzijski protok je dvosmjernan.

Iz navedenog se da zaključiti da se transport fizikalnog svojstva fluida kroz granicu konačnog volumena vrši konvekcijskim i difuzijskim protokom. Njihov omjer je definiran lokalnim Pecletovim brojem koji služi za ocjenu važnosti pojedinog transporta.

$$Pe_{\Delta} = \frac{\rho v_{n,n} \Delta n}{\Gamma} = \frac{F_n}{D_n} \quad (4.13)$$

Difuzija je dominantan prijenos na mikro-razini (mali  $\Delta n$ ) dok je konvekcija dominantna na makro-razini. Difuzija je povoljna sa stajališta numerike jer teži ujednačavanju fizikalnog svojstva unutar domene, tj. nema velikih gradijenata fizikalnih veličina koji se teško opisuju numeričkim putem kao kod konvekcije. Opisana je laplaceovim operatorom.

Kada se izrazi (4.6), (4.7) i (4.12) uvrste u izraz (4.1) dobije se oblik diskretizirane jednačbe za  $\rho = konst.$ :

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_C}{dt} = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left( F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}}\Big|_n \right)^{nb} + S_C \Delta V \quad (4.14)$$

gdje član sa sumom označava sumu po svim stranicama zatvorenog ruba konačnog volumena.



Koristeći neku od shemu diferencije koja koristi samo čvorne vrijednosti  $\varphi_C$  i  $\varphi_N$  za aproksimaciju izraz (4.12) prelazi u oblik:

$$\Delta J_n = F_n \varphi_n - D_n \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N) \quad (4.15)$$

gdje je  $a_N$  okolni koeficijent koji pokazuje utjecaj okolnog čvora na promatrani čvor i koji ovisi o primijenjenoj shemi diferencije. U numeričkom postupku računaju se i pamte vrijednosti polja  $\varphi$  glavnim čvorovima (na slici 4.3 su to čvorovi C i N) pa će biti potrebno aproksimirati poznate vrijednosti na stranice konačnih volumena. Taj postupak se naziva shema diferencije. [8] Uvrštavanjem jednadžbe (4.15) u (4.14) dobije se:

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_C}{dt} = -\varphi_C \sum_{nb=1}^{Nb} F^{nb} - \sum_{nb=1}^{Nb} [a_N (\varphi_C - \varphi_N)]^{nb} + S_C \Delta V \quad (4.16)$$

Prva suma je prema jednadžbi kontinuiteta jednaka nuli pa preostaje:

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_C}{dt} = -\varphi_C \sum_{nb=1}^{Nb} a_N^{nb} + \sum_{nb=1}^{Nb} [a_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + S_C \Delta V \quad (4.17)$$

Ukoliko se jednadžba (4.17) integrira implicitnom metodom tada se izvorski član linearizira u obliku:

$$S_C \Delta V = a + g \varphi_C \quad (4.18)$$

Naknadnim sređivanjem i integriranjem dolazi se do algebarske jednadžbe koja vrijedi za jedan volumen i koja glasi:

$$a_C \varphi_C = \sum_{nb=1}^{Nb} [a_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + b \quad (4.19)$$

$$a_C = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} + \sum_{nb=1}^{Nb} a_N^{nb} - g + \sum_{nb=1}^{Nb} F^{nb} \quad (4.20)$$

$$b = a + \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \varphi_C^{old} \quad (4.21)$$

Član s jačinom konvekcije  $F^{nb}$  u jednadžbi (4.20) je prema jednadžbi kontinuiteta jednak nuli, ali se ostavlja jer pretpostavljena početna vrijednost polja  $\varphi$  ne mora zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta. Ako je taj član negativan izostavlja se iz jednadžbe jer smanjuje dominantnost glavne dijagonale u matrici  $[A_{ji}]$ , a time i konvergenciju.

Ako se postupak ponovi za sve konačne volumene unutar domene dobit će se sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojem su nepoznanice čvorne vrijednosti polja  $\varphi$ . Broj jednadžbi je jednak broju konačnih volumena, odnosno broju nepoznatih čvornih vrijednosti polja  $\varphi$ . [8] Sustav jednadžbi se može zapisati u matričnom obliku:

$$[A_{ji}][\varphi_i] = [b_j] \quad (4.22)$$

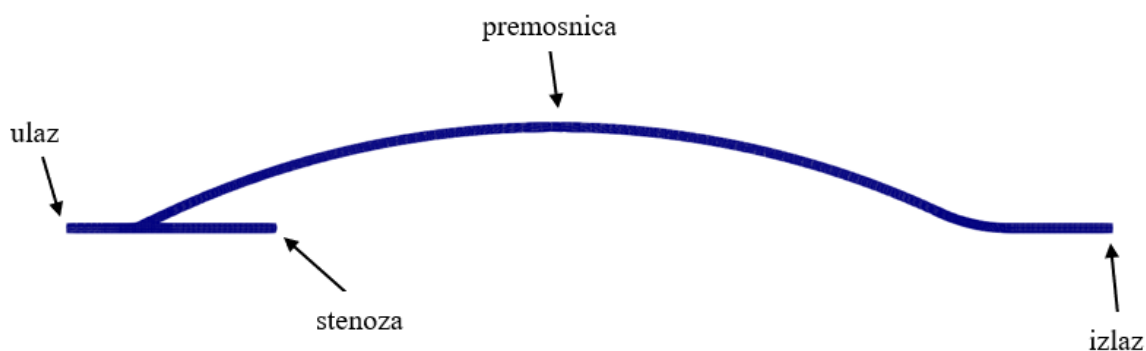
gdje je  $[A_{ji}]$  matrica sustava u kojoj retke čine koeficijenti  $a_c$  i  $a_N^{nb}$  pri čemu su koeficijenti  $a_c$  na glavnoj dijagonali, a koeficijenti  $a_N^{nb}$  izvan glavne dijagonale.  $[\varphi_i]$  označava vektor nepoznanica, a  $[b_j]$  vektor desne strane u kojeg ulaze sve ostale poznate veličine.

## 5. RAČUNALNI MODEL

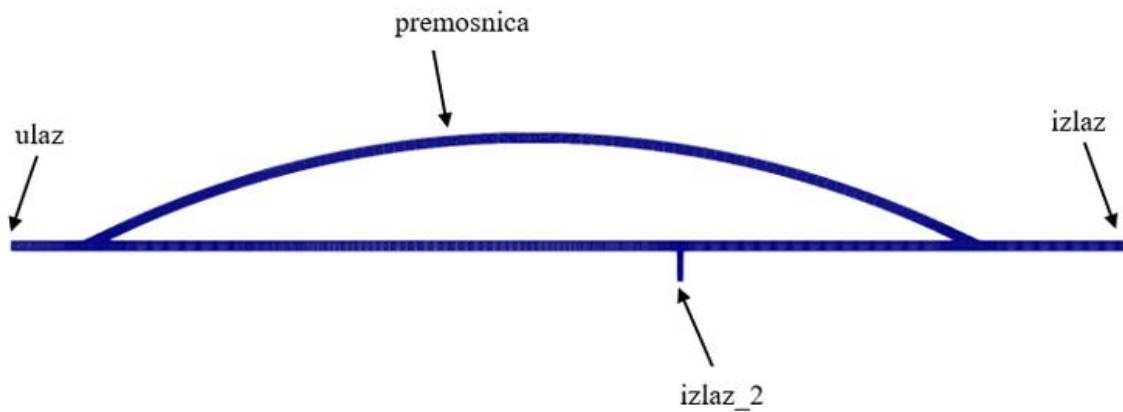
U ovom poglavlju biti će prikazani računalni model žile i premosnice s odgovarajućom geometrijskom mrežom i rubnim uvjetima te numeričke sheme i rješavač. Simulacija je provedena za dva geometrijska modela od kojih jedan (označen kao slučaj A) ima spoj premosnice i zdrave krvne žile u obliku koljena dok drugi model (označen kao slučaj B) ima spoj u obliku račve gdje 80% protoka struji kroz površinu *izlaz* većeg promjera dok ostalih 20% protoka struji kroz *izlaz\_2* manjeg promjera (vidi sliku 5.2). Promjer dijela *izlaz* iznosi 7 mm (oba slučaja) dok je promjer dijela *izlaz\_2* 4 mm.

### 5.1. Prikaz mreže i rubni uvjeti

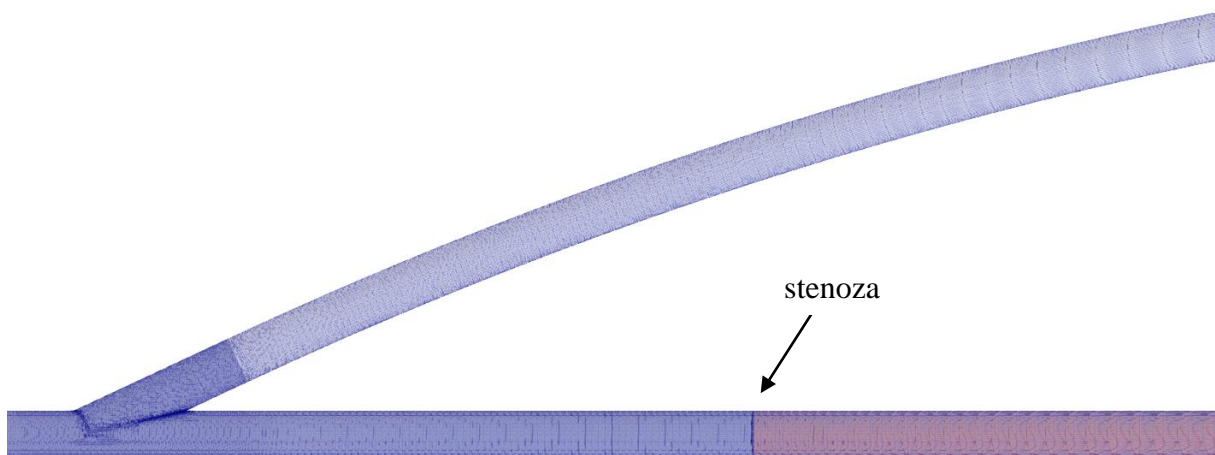
Mreža korištena u ovom radu je generirana pomoću programskog paketa *cfMesh* koji se temelji na biblioteci *OpenFOAM* paketa. Taj paket omogućava automatsko stvaranje mreža koje su određene složenosti. Prilikom izrade mreže potrebno je obratiti pozornost na veličinu i finoću mreže kod oštih rubova i u blizini stijenke žile zbog graničnog sloja koji se javlja zbog viskoznosti krvi. Također mreža mora biti prilagođena numeričkom proračunu i frekvenciji fizikalnih pojava koje se pojavljuju tijekom trajanja simulacije na način da ih sve obuhvati. Pritom treba voditi računa o optimizaciji raspoložive memorije računala tako da se mreža ne sastoji od prevelikog broja konačnih volumena. Prikaz računalnih modela premosnice može se vidjeti na sljedećim slikama:



Slika 5.1 Prikaz računalnog modela premosnice – slučaj A

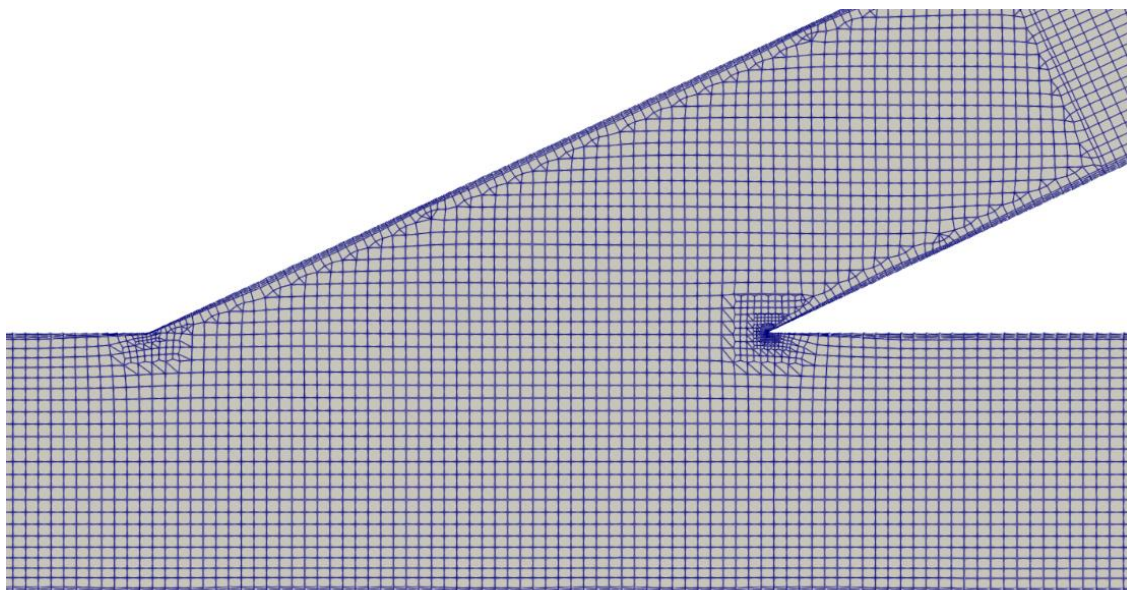


**Slika 5.2 Prikaz računalnog modela premosnice – slučaj B**

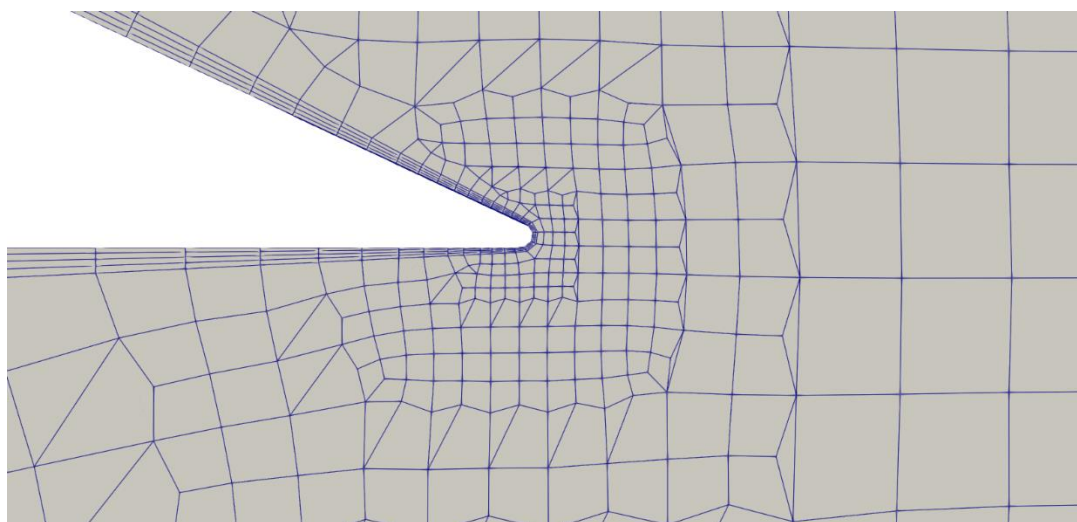


**Slika 5.3 Prikaz položaja stenoze u odnosu na ulaznu račvu u slučaju B**

Položaj stenoze je isti u modelu A i u modelu B. Kroz stenozu nema protoka zbog odgovarajućeg rubnog uvjeta danog u tablicama 5.1 i 5.2.



**Slika 5.4 Detalj mreže u ulaznoj račvi – slučajevi A i B**



**Slika 5.5 Detalj mreže u izlaznoj račvi – slučaj B**

Mreža u slučaju A se sastoji od ukupno 487456 konačnih volumena dok u slučaju B od 794572 konačnih volumena. *MeshDict* je datoteka paketa *cfMesh* u kojoj su kontrolirane postavke diskretizacije prostora. Tamo su definirane veličine konačnih volumena u geometrijskom modelu. Kako bi se mogli implementirati rubni uvjeti, potrebno je vanjsku površinu geometrijskog modela podijeliti na kontrolne površine. Mogu se podijeliti na:

- Slučaj A: *ulaz*, *plast* (stijenka prenosnice i zdrave krvne žile), *izlaz*, *stenoza*
- Slučaj B: *ulaz*, *plast* (stijenka prenosnice i zdrave krvne žile), *izlaz*, *izlaz\_2*, *stenoza*

Kontrolne površine dane su u tablici 5.1 i 5.2.

**Tablica 5.1 Nazivi, vrste površina i pripadajući rubni uvjeti – slučaj A**

Naziv površine	Vrsta površine	Rubni uvjet	
		$U$	$p$
ulaz	<i>patch</i>	<i>flowRateInletVelocity</i>	<i>zeroGradient</i>
plast	<i>wall</i>	<i>noSlip</i>	<i>zeroGradient</i>
stenoza	<i>wall</i>	<i>noSlip</i>	<i>zeroGradient</i>
izlaz	<i>patch</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>windkesselPressure</i>

*patch* je vrsta granice koja se definira najčešće na ulaznom i izlaznom presjeku te ona definira uvjet bez geometrijskih ili topoloških informacija o geometrijskoj mreži. *wall* vrsta granice označava nepropusnost stijenke. [22]

**Tablica 5.2 Nazivi, vrste površina i pripadajući rubni uvjeti – slučaj B**

Naziv granice	Vrsta granice	Rubni uvjet	
		$U$	$p$
ulaz	<i>patch</i>	<i>flowRateInletVelocity</i>	<i>zeroGradient</i>
stenoza	<i>wall</i>	<i>noSlip</i>	<i>zeroGradient</i>
izlaz	<i>patch</i>	<i>zeroGradient</i>	<i>windkesselPressure</i>
izlaz_2	<i>patch</i>	<i>noSlip</i>	<i>windkesselPressure</i>
plast	<i>wall</i>	<i>noSlip</i>	<i>zeroGradient</i>

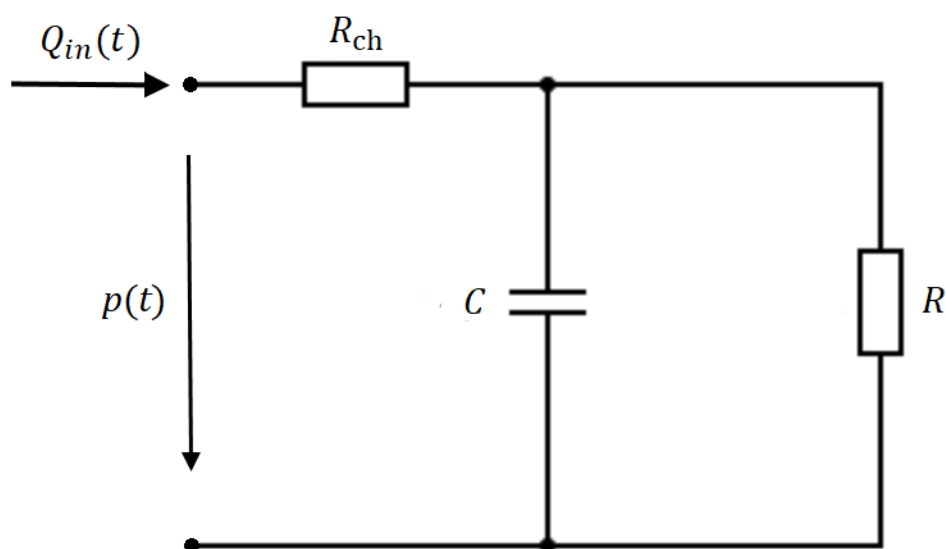
Prilikom modeliranja izrazito je važno postaviti dobre rubne uvjete kako bi rezultati simulacije što vjerodostojnije prikazivali stvarno strujanje fluida. Rubni uvjeti se postavljaju po rubovima područja proračuna. Mogu biti stacionarni ili nestacionarni. Strujanje krvi je nestlačivo, laminarno i izrazito nestacionarno. U takvom strujanju po rubovima domene se zadaju brzina  $U$  i tlak  $p$ .

*noSlip* rubni uvjet definira da prilikom strujanja ne postoji relativna brzina između površine stijenke krvne žile i krvi što znači da je brzina strujanja krvi na površini stijenke jednaka brzini gibanja stijenke, u ovom slučaju jednaka nuli. *zeroGradient* je Von Neumannov rubni uvjet koji kaže da je gradijent fizikalne veličine jednak nuli. Kao što je bilo rečeno, strujanje krvi je pulsirajuće nestacionarni problem pa tada ni rubni uvjet ne može imati fiksiranu vrijednost.

Primjer takvog rubnog uvjeta je *flowRateInletVelocity*. On definira volumenske protoke kao propisani vremenski profil zadan u obliku datoteke te ih postavlja na ulazni presjek. Time je vrijednost brzine na ulaznoj granici zadana preko volumenskog protoka koji je funkcija vremena.

### ***windkesselPressure* rubni uvjet**

Rubni uvjet za tlak na izlaznoj površini modeliran je preko Windkessel modela s 3 elementa. Objašnjenje pojma Windkessel je napravljeno u poglavlju 2.6. Sljedeća slika prikazuje shemu Windkessel modela s 3 elementa.



**Slika 5.6 Windkessel model s 3 elementa [23]**

Diferencijalna jednadžba koja opisuje sustav dobije se kombinacijom 1. i 2. Kirchoffovog zakona na strujni krug, a glasi:

$$\left(1 + \frac{R_{ch}}{R}\right) Q + CR_{ch} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{p}{R} + C \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.1)$$

gdje  $R_{ch}$  predstavlja otpor strujanja prolaskom krvi kroz aortni zalistak koji je tijekom sistole otvoren, a tijekom diastole zatvoren kako bi spriječio povrat krvi. Iznosi otprilike  $R_{ch} = 0,06 \cdot R$ .  $R$  predstavlja otpor svih malih arteriola, kapilara i venula te se naziva periferni otpor.  $C$  predstavlja podatljivost arterijske žile, a u rubnom uvjetu predstavlja kapacitet krvnih žila u sustavu. Iskustvene vrijednosti koje su primijenjene u ovom radu iznose u slučaju A:  $R_{ch} = 2,6547 \cdot 10^8 \text{ kg}/(\text{m}^4\text{s})$ ;  $R = 4,159 \cdot 10^9 \text{ kg}/(\text{m}^4\text{s})$ ;  $C = 4,8089 \cdot 10^{-10} \text{ s}^2\text{m}^4/\text{kg}$ .

Jednadžba (5.1) se za svaku pojedinu izlaznu površinu promatra kao obična diferencijalna jednadžba prvog reda koja se integrira Gearovom implicitnom metodom (*backward*). Ta metoda integracije uzima u obzir vrijednosti protoka i tlaka iz zadnja dva vremenska trenutka;  $t^{n-1}$  i  $t^{n-2}$ . Derivacija po vremenu je opisana shemom drugog reda točnosti. Ako se vrijednosti protoka i tlaka u prošlim trenucima razviju u Taylorov red gdje indeks  $n$  označava sadašnji trenutak,  $n - 1$  prošli, a  $n - 2$  pretpošli trenutak dobije se:

$$Q^{n-1} = Q^n - \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \quad (5.2)$$

$$Q^{n-2} = Q^n - 2 \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta t + 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \quad (5.3)$$

Ako se jednadžba (5.2) pomnoži s 4 te se jednadžbe međusobno oduzmu dobije se:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{3Q^n - 4Q^{n-1} + Q^{n-2}}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (5.4)$$

Analogno se može dobiti i za tlak:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{3p^n - 4p^{n-1} + p^{n-2}}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (5.5)$$

Na kraju se jednadžbe (5.4) i (5.5) uvrštavaju u početnu diferencijalnu jednadžbu (5.1) umjesto derivacija po vremenu, dok  $Q$  i  $p$  postaju  $Q = Q^n$ ,  $p = p^n$ .

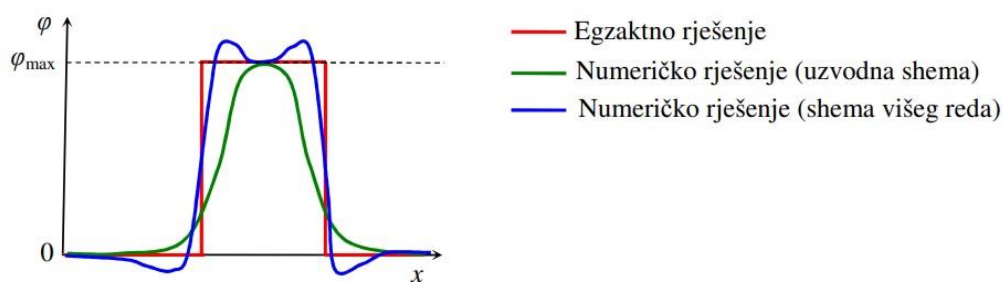
Prema istom principu je postavljen rubni uvjet za slučaj B. Vrijednosti na izlazu većeg promjera su:  $R_{ch} = 3,3183 \cdot 10^8 \text{ kg}/(\text{m}^4\text{s})$ ;  $R = 5,1987 \cdot 10^9 \text{ kg}/(\text{m}^4\text{s})$ ;  $C = 3,8471 \cdot 10^{-10} \text{ s}^2\text{m}^4/\text{kg}$ , a na izlazu manjeg promjera su:  $R_{ch} = 1,3273 \cdot 10^9 \text{ kg}/(\text{m}^4\text{s})$ ;  $R = 2,0795 \cdot 10^{10} \text{ kg}/(\text{m}^4\text{s})$ ;  $C = 9,6177 \cdot 10^{-11} \text{ s}^2\text{m}^4/\text{kg}$ .

Možemo zaključiti da je periferni otpor u izlazu veće dimenzije 4 puta manji kako bi omjer protoka u izlaznim presjecima bio 80% prema 20%.



## 5.2. Numerički rješavač

Korišteni numerički rješavač je *pimpleFoam* koji se koristi prilikom proračuna nestlačivog i nestacionarnog strujanja. Kao osnova se koristi PIMPLE algoritam koji je kombinacija SIMPLE (eng. Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) i PISO (eng. Pressure Implicit with Splitting of Operator) algoritma. PIMPLE algoritam omogućava rješavanje spregnutih jednadžbi za tlak i brzinu pri nestacionarnom strujanju. Kako bi se tlak dobio u paskalima, rješenje se mora pomnožiti s gustoćom krvi koja prema tablici (1.1) iznosi  $1060 \text{ kg/m}^3$ . Prilikom izrade dijagrama taj tlak se još dijeli s faktorom 133,3229 kako bi se dobio tlak u mmHg. GAMG (eng. Geometric Agglomerated Algebraic Multigrid Solver) rješavač radi korekciju tlaka. Vremenski korak integracije primijenjen u modelima je  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . Shema vremenske integracije je *backward* metoda koja je drugog reda točnosti te koristi vrijednosti veličina iz prethodna dva vremenska koraka. Gradijenti su definirani *Gauss linear* shemom, a divergencija brzine *bounded Gauss linearUpwindV* shemom koja je linearna uzvodna shema drugog reda točnosti. Prilikom računanja ovakvom shemom vrijednosti fizikalnih veličina na stranicama konačnih volumena računaju se linearnom ekstrapolacijom iz uzvodnih članova. Nedostatak ovakvih shema je da mogu generirati nove minimume i maksimume u blizini diskontinuiteta pa se zato omeđuju, no unose manje numeričke difuzije. Kod shema prvog reda točnosti problem je što unose numeričku difuziju u rješenje, ali zbog pozitivnih koeficijenata ne stvaraju probleme pri konvergenciji numeričkog postupka niti generiraju oscilatorna rješenja.



**Slika 5.7 Numerička rješenja različitih shema [8]**

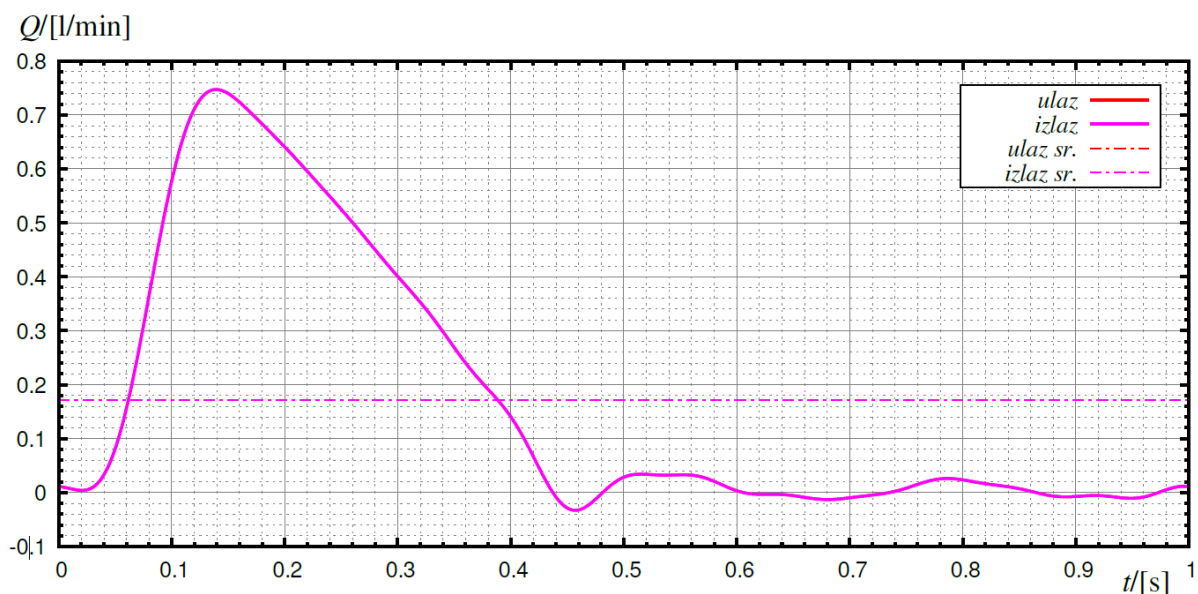
Kako ne bi došlo do divergencije postupka, potrebno je definirati podrelaksacijske faktore koji se nalaze u *fvSolution* datoteci. Njihova vrijednost se kreće između 0 i 1. Velika vrijednost podrelaksacijskog faktora može dovesti do divergencije numeričkog postupka, a mala do prespore konvergencije.

## 6. PRIKAZ REZULTATA

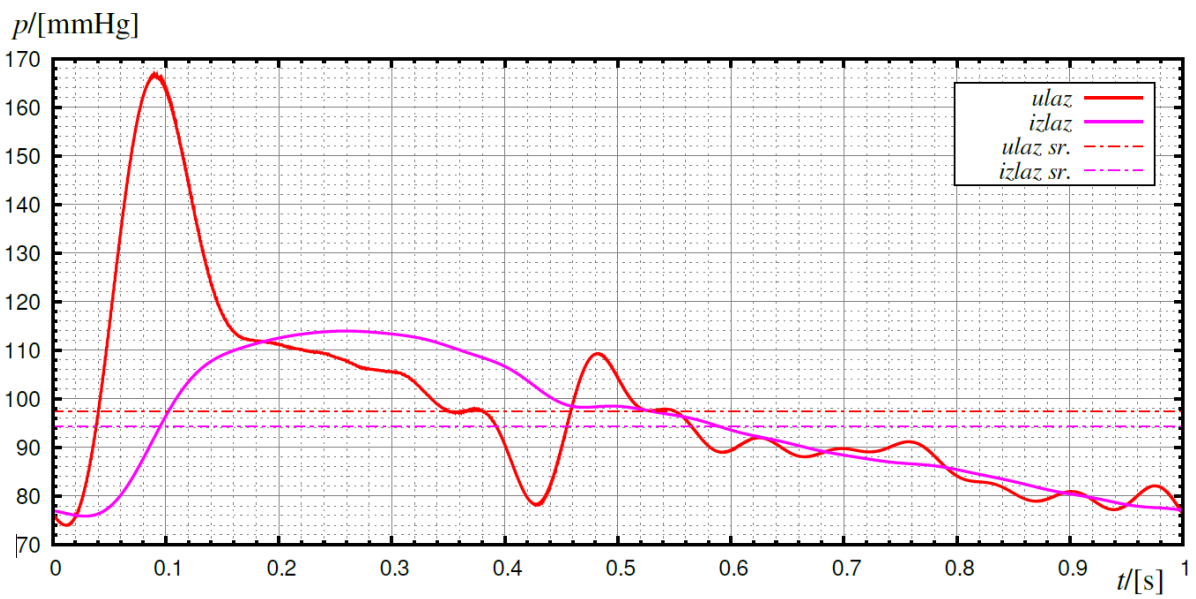
Simulacija je provedena u javno otvorenom programskom paketu *OpenFOAM* (eng. Open Source Field Operation And Manipulation). To je program koji radi operacije nad transportnim jednadžbama te rješava složene proračune u termodinamici, dinamici fluida, kemiji, elektrotehnici,... Vizualizacija provedenih simulacija rađena je u programu *ParaView* koji se danas često koristi u post-processiranju rezultata u računalnoj dinamici fluida. Grafički prikazi napravljeni su u programu *gnuplot*. U rezultatima simulacije prikazuju se polja brzine, tlaka i smičnog naprezanja u kritičnim presjecima za vrijeme sistole. Također će biti grafički prikazano kako se navedene veličine mijenjaju tijekom vremena.

### 6.1. Grafički prikazi volumenskog protoka i tlaka

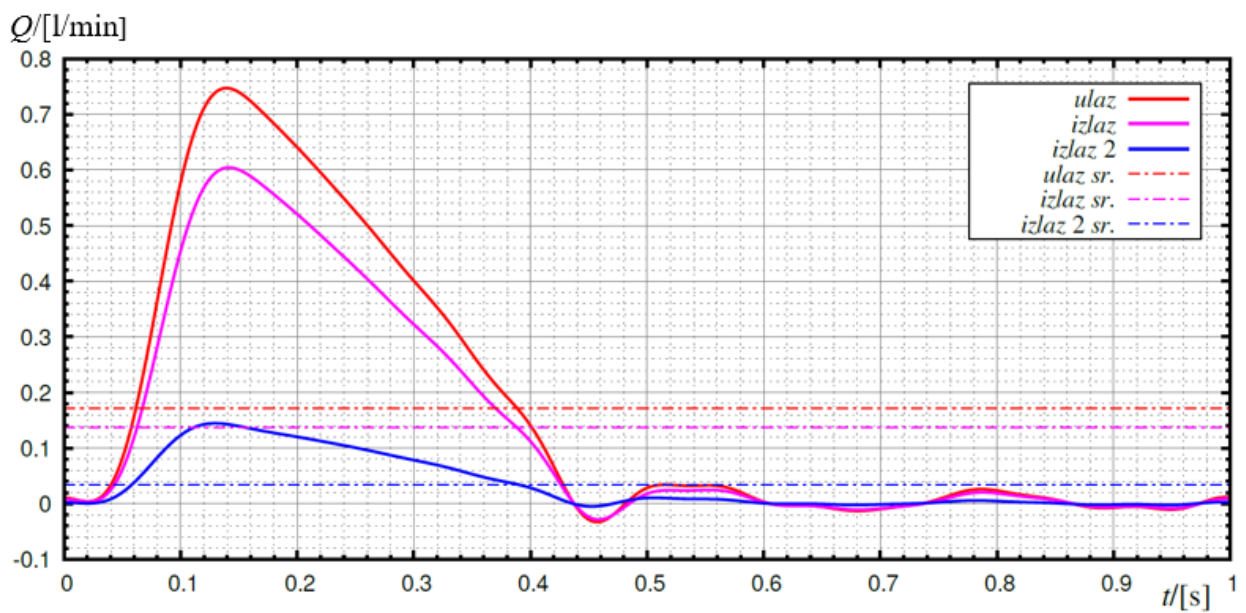
Slike ispod prikazuju vremenske promjene protoka i tlakova u ulaznim i izlaznim površinama:



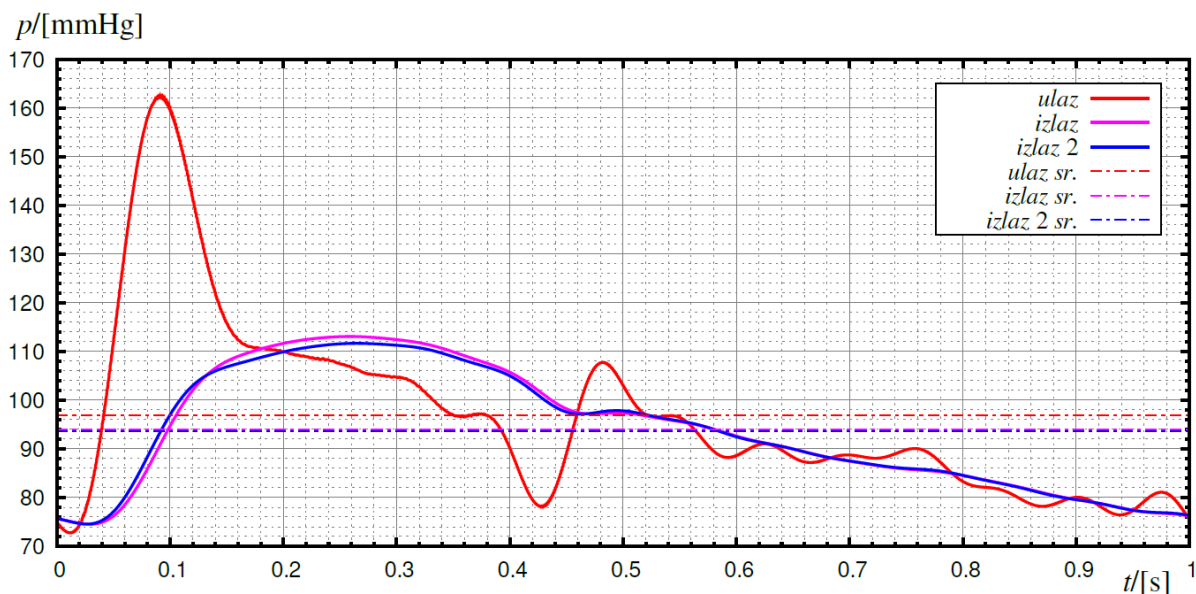
Slika 6.1 Pulsirajuća promjena protoka prilikom jednog otkucaja – slučaj A



Slika 6.2 Pulsirajuća promjena tlakova prilikom jednog otkucaja – slučaj A



Slika 6.3 Pulsirajuća promjena protoka prilikom jednog otkucaja – slučaj B



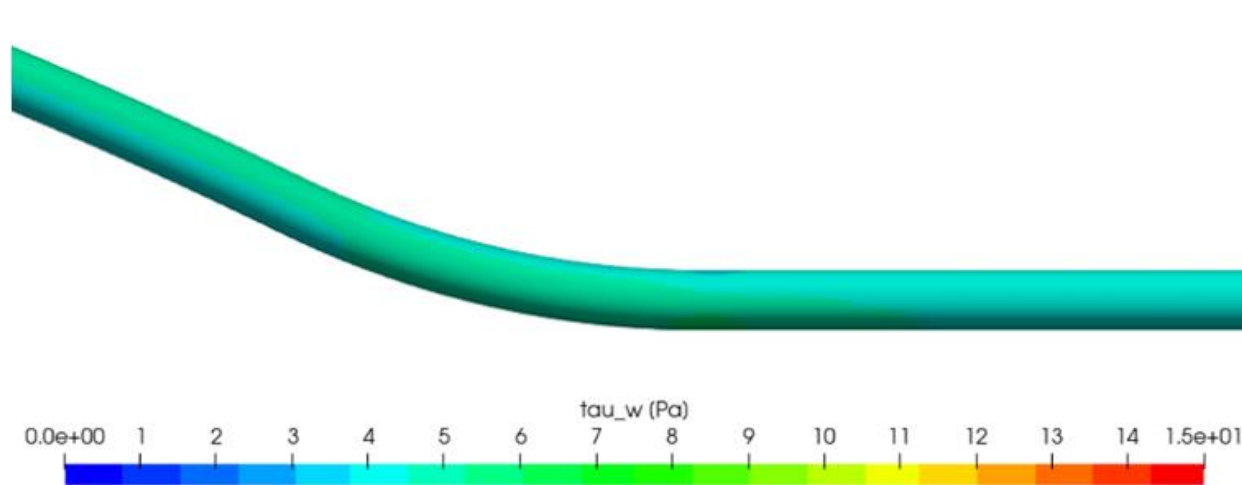
**Slika 6.4 Pulsirajuća promjena tlakova prilikom jednog otkucaja – slučaj B**

Krivulje prikazane u dijagramima prikazuju srednje integralne vrijednosti tlaka i volumenskog protoka po ulaznoj i izlaznoj površini. Sa slika 6.1 i 6.3 vidimo da je maksimalni volumenski protok u slučaju A u izlaznom presjeku veći nego u slučaju B, dok je na ulazu identičan što je i logično jer je zadan istim rubnim uvjetom. Na slici 6.1 linije koje označuju volumenski protok na ulazu i izlazu se poklapaju jer se radi o nestlačivom strujanju fluida i jer je podatljivost krvne žile uzeta u obzir tek na izlazu. U slučaju A maksimalna vrijednost u izlaznom presjeku iznosi 0,75 l/min dok u slučaju B 0,6 l/min. Razlog leži u vrijednostima otpora. Prema Poiseuilleovu zakonu, koji je objašnjen u poglavlju 2.3, protok je proporcionalan razlici tlaka, a obrnuto proporcionalan otporu koji se javlja u strujanju. Otpor na rubnoj površini *izlaz* je 25% veći u slučaju B nego u slučaju A. Iz tog je razloga maksimalni protok slučaja B za 25% manji nego u slučaju A. U oba slučaja protok pada na nulu u vremenu od 0,44 s i nastavlja oscilirati oko te vrijednosti. Međusobne vrijednosti tlaka u promatranim slučajevima su sličnija nego vrijednosti protoka. Zanimljivo je za primijetiti kako nakon 0,52 s vrijednosti tlaka teže izjednačavanju tako da tlak na ulazu počinje oscilirati oko vrijednosti tlaka na izlazima. Vremenski profil tlaka na ulazu nije fizikalni već je uzrokovan nametanjem zadanog vremenskog profila u odsustvu podatljivosti stijenke. Oblik profila tlaka na izlaznim granicama i unutar područja proračuna u blizini izlaza je puno bliži stvarnom profilu jer je podatljivost ostatka arterijskog stabla modelirana Windkessel modelom u rubnom uvjetu. Na vrijednost tlaka, osim otpora, utječe i podatljivost krvne žile. Što je manja podatljivost žile, tj. veća krutost bit će veće povećanje tlaka pri određenom volumenu krvi što ga srce izbaci u arterije. Prosječne vrijednosti tlaka u oba

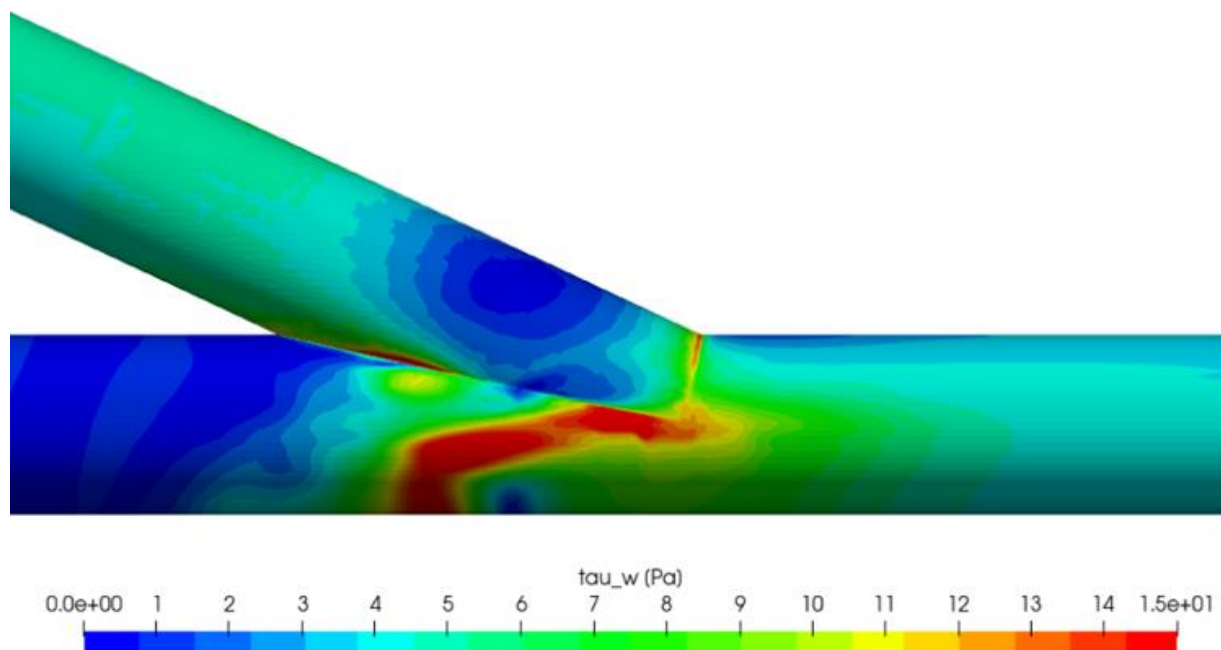
slučaja na izlazu iznosi 94 mmHg, dok je na ulazu prosječna vrijednost tlaka viša i iznosi 97 mmHg. Prosječna vrijednost volumenskog protoka u slučaju A na ulazu i izlazu iznosi 0,17 l/min, dok u slučaju B kroz dio *izlaz* iznosi 0,135 l/min što je 80% od ukupnog protoka. Prosječni protok kroz *izlaz\_2* iznosi 0,035 l/min. Prosječne vrijednosti tlakova i protoka na slikama 6.1 – 6.4 označene su crtano.

## 6.2. Smično naprezanje

Smično naprezanje u krvnim žilama nastaje zbog postojanja relativnih brzina u blizini stijenke krvne žile te je ono mjera kojom se određuje intenzitet „vučenja“ stijenke krvne žile od strane krvi koja struji. Analiza smičnog naprezanja u hemodinamici je od iznimne važnosti jer postoji korelacija između uvjeta strujanja koji su određeni smičnim naprezanjem i nastanka i razvoja kardiovaskularnih bolesti kao što su ateroskleroza. Tako se npr. kod nekih pacijenata nakon obavljenog kirurškog zahvata uočava tendencija stvaranja naslaga i začepljenja arterije na mjestu spoja zdravog dijela arterije i prenosnice što dovodi do potrebe za ponovnim kirurškim zahvatom. Sljedeće slike prikazuju rezultate simulacije na izlazu iz prenosnice:



**Slika 6.5** Maksimalno smično naprezanje na izlazu iz prenosnice – slučaj A



**Slika 6.6** Maksimalno smično naprezanje na izlazu iz prenosnice – slučaj B

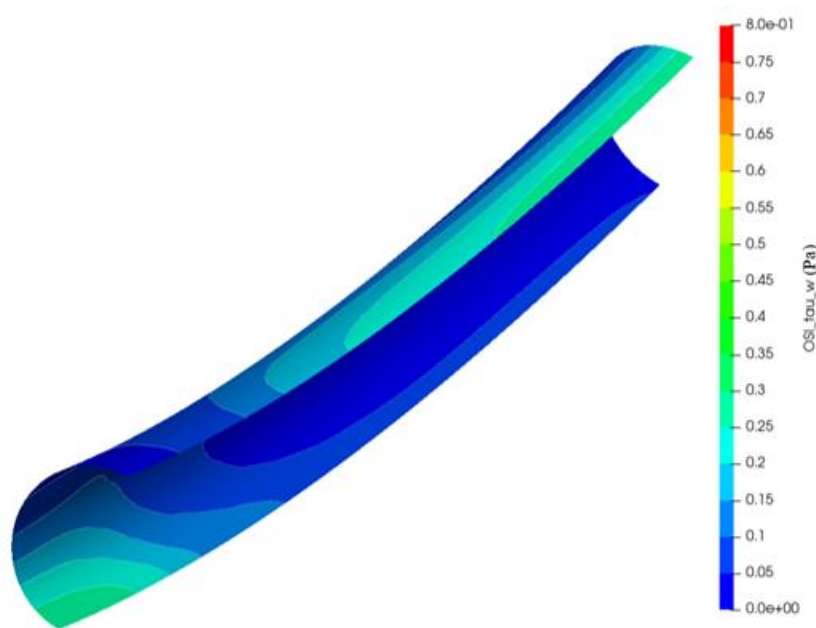
Vidimo da je vrijednost smičnog naprezanja u slučaju B za red veličine veća nego u slučaju A zbog naglih skretanja struje krvi i grananja – dolazi do koncentracije naprezanja. Tamo su veći gradijenti brzine pa posljedično i naprezanja. Na slici 6.6 vidljiva je visoka vrijednost naprezanja na oštrim bridovima te u zaustavnom području gdje se tok krvi dijeli na dio koji nastavlja prema izlazu i dio toka koji se vraća u područje arterije između spojeva. U područjima gdje nema naglih promjena profil brzine je već formiran pa nema ni većih vrijednosti naprezanja. U slučaju A vrijednost naprezanja je ista u cijeloj domeni zbog uniformnog profila brzine.

Smična naprezanja kojima je izložena krv prirodno osciliraju tijekom jednog ciklusa. Poznato je da ova pojava vrlo negativno utječe na stijenku krvne žile. Pretpostavlja se da su takva mjesta na kojima se događaju velike promjene smjera smičnih naprezanja na stijenci pogodna za nastanak ateroma i hiperplazije. Hiperplazija je bujanje endotelnog sloja arterije. Dakle, očekuje se da će opasnost od nastanka ovih pojava biti to veća, što je veći intenzitet smičnih naprezanja i što je veća frekvencija promjene smjera smičnih naprezanja. U svrhu otkrivanja takvih mjesta, uvodi se parametar u obliku prostornog ili površinskog skalarnog polja *OSI* (eng. Oscillatory Shear Index) koji iskazuje stupanj promjene smjera smičnih naprezanja na stijenci te se računa kao:

$$OSI = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\frac{1}{T} \left| \int_0^T \vec{\tau}_w dt \right|}{\frac{1}{T} \int_0^T |\vec{\tau}_w| dt} \right] \quad (6.1)$$

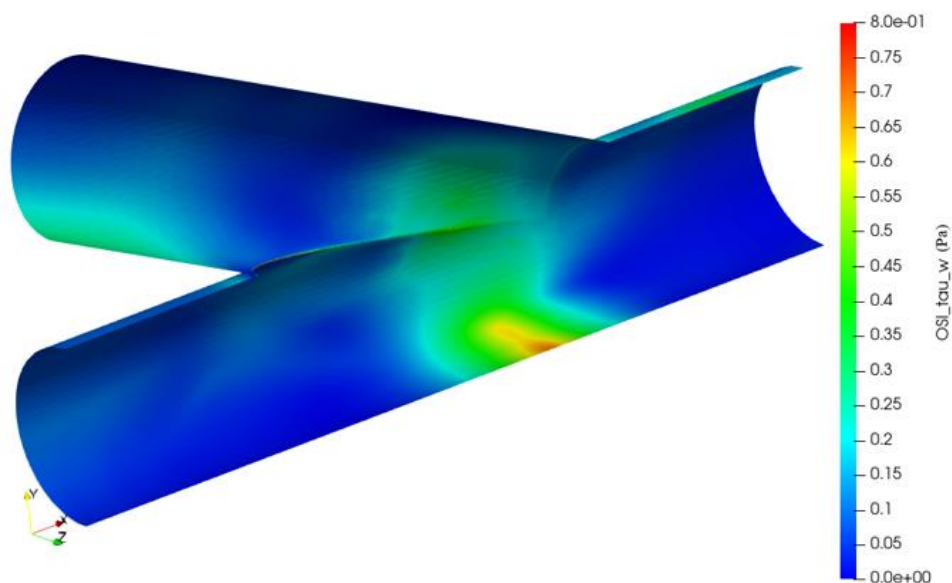
gdje  $T$  označava trajanje jedne periode (jednog otkucaja srca) ili njen cjelobrojni višekratnik. U izrazu (6.1) brojnik predstavlja apsolutnu vrijednost srednje vrijednosti vektora smičnog naprezanja na stijenci, a nazivnik srednju vrijednost intenziteta vektora smičnog naprezanja na stijenci. Kod uobičajenog strujanja kroz arterije smjer smičnog naprezanja ostaje uglavnom isti pa su brojnik i nazivnik u izrazu (6.1) izjednačeni te veličina  $OSI$  pokazuje nisku vrijednost. Ako smično naprezanje značajno mijenja smjer tijekom jednog ciklusa kao u slučaju pomicanja zaustavnog područja duž stijenke (slučaj B), brojnik u izrazu (6.1) može poprimiti vrijednost blisku 0,5 (što je ujedno i maksimalna vrijednost veličine  $OSI$ ). Veličina  $OSI$  pokazuje samo narav strujanja u smislu pojave promjene smjera smičnog naprezanja na stijenci, a ne govori ništa o intenzitetu smičnog naprezanja. Primjerice, za dva različita slučaja u kojima bi smično naprezanje jednako osciliralo po smjeru, ali u jednom slučaju s velikim amplitudama, a u drugom s malim, veličina  $OSI$  bi pokazivala istu vrijednost. Stoga se definira dodatna veličina koja uzima u obzir i promjenu smjera i intenzitet smičnog naprezanja na stijenci u obliku umnoška  $OSI \cdot \tau_w$ , gdje  $\tau_w$  označava srednje smično naprezanje na stijenci (definirano kao i nazivnik u izrazu (6.1)).

Sljedeće slike prikazuju vrijednost  $OSI \cdot \tau_w$ :



**Slika 6.7** Vrijednost  $OSI \cdot \tau_w$  – slučaj A

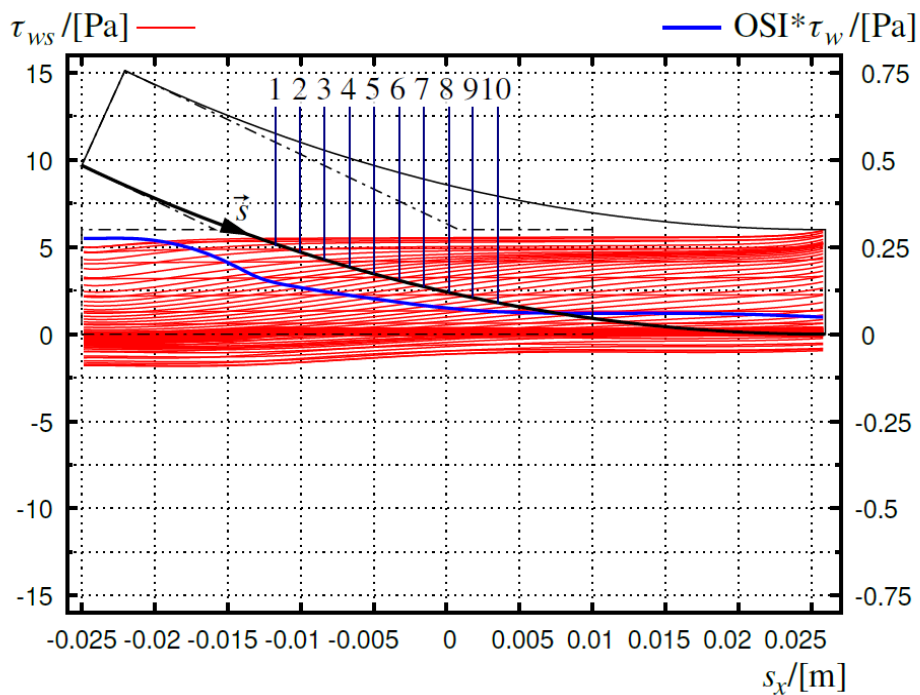




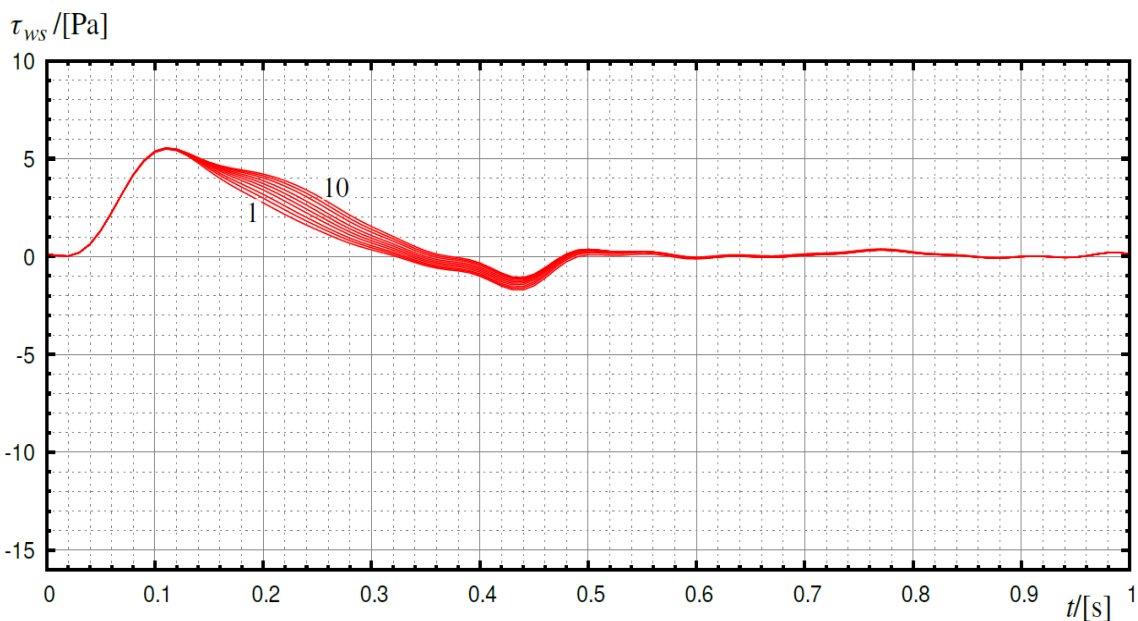
**Slika 6.8 Vrijednost  $OSI \cdot \tau_w$  – slučaj B**

Usporedbom slika 6.7 i 6.8 vidimo da se veće vrijednosti veličine  $OSI \cdot \tau_w$  pojavljuju u slučaju B. Razlog je u tome što mlaz krvi udara u stijenku žile i nakon toga se raspodjeljuje prema izlazima. Kako je strujanje pulsirajuće naravi, mjesto razdvajanja tokova (zaustavno područje) nije stalno već se tijekom jednog perioda pomiče duž stijenke te ponešto mijenja oblik. Sa slike 6.8 je vidljivo da je vrijednost veličine  $OSI \cdot \tau_w$  pokazuje maksimum na donjem području stijenke. Tijekom pregleda nestacionarnih rješenja za smično naprezanje na stijenci uočeno je da je ovaj položaj maksimuma stalan te da se tijekom jednog pulsa pomiče jedino duž koordinate  $x$ . Stoga je za daljnje grafičke prikaze raspodjele smičnog naprezanja na stijenci i veličine  $OSI \cdot \tau_w$  odabrana donja izvodnica račvastog spoja (slučaj B) i donja izvodnica koljena (slučaj A). Zbog specifičnog položaja i simetrije, vektor smičnog naprezanja na stijenci duž ove izvodnice može poprimiti samo komponentu duž izvodnice. Na ovaj način se u prikazima raspodjele smičnog naprezanja i veličine  $OSI \cdot \tau_w$  duž izvodnice može zorno pokazati formulacija veličine  $OSI$ . Pri izračunavanju veličine  $OSI$  (izraz 6.1) brojnik predstavlja integral vektorske veličine dok za slučaj izvodnice on prelazi u običan integral komponente smičnog naprezanja u smjeru izvodnice (u daljnjem tekstu nazvana uzdužna komponenta).

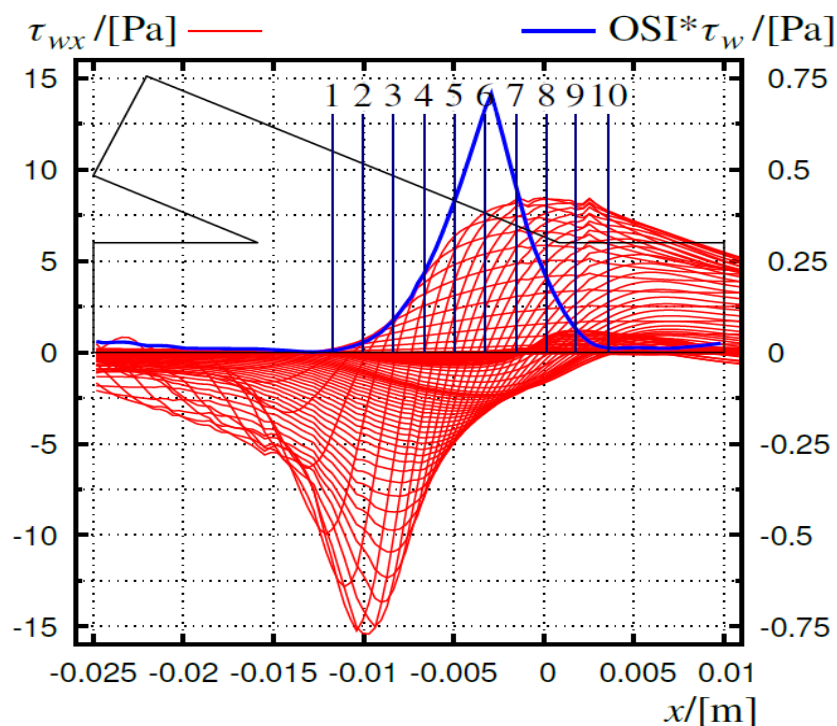




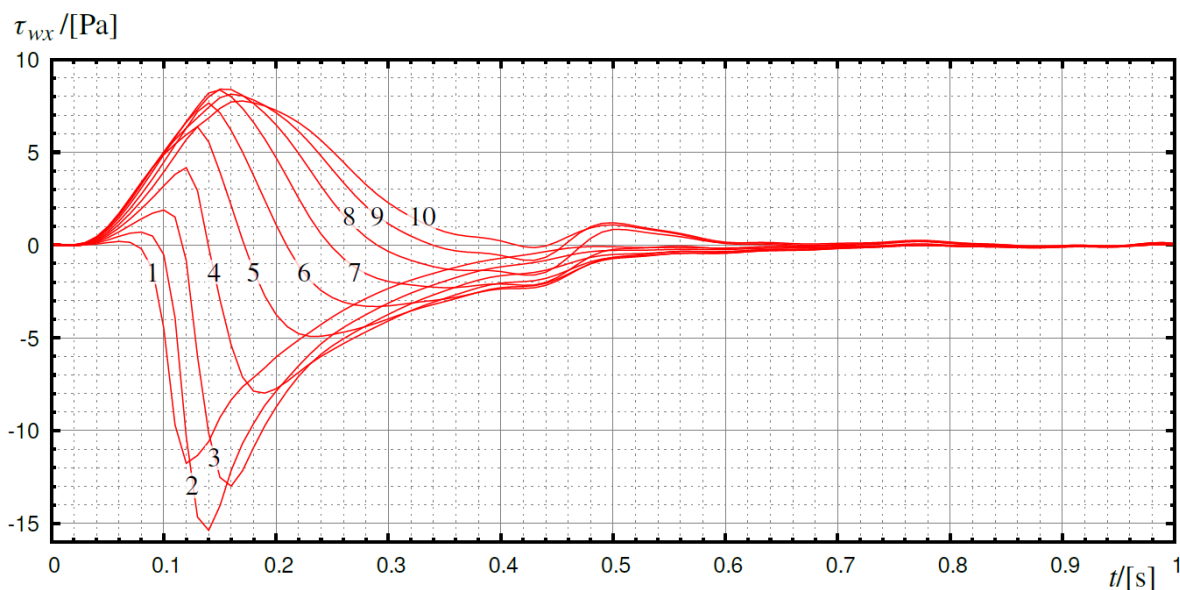
**Slika 6.9 Grafički prikaz anvelope smičnog napreznja i  $OSI \cdot \tau_w$  duž donje izvodnice – slučaj A**



**Slika 6.10 Grafički prikaz vremenske promjene smičnog napreznja u odabranim točkama duž donje izvodnice – slučaj A**



**Slika 6.11** Grafički prikaz anvelope smičnog napreznja i  $OSI \cdot \tau_w$  duž donje izvodnice – slučaj B



**Slika 6.12** Grafički prikaz vremenske promjene smičnog napreznja u odabranim točkama duž donje izvodnice – slučaj B

Na slikama 6.9 i 6.11 crvenom je bojom unesena raspodjela uzdužne komponente smičnog napreznja duž izvodnice za više odabranih, jednako raspodijeljenih vremenskih trenutaka unutar vremena jednog perioda otkucaja srca. Ovime je dobivena anvelopa smičnog napreznja na stijenci. Povećana gustoća krivulja na pojedinim područjima govori o dužem trajanju

smičnog naprezanja u iznosu kojeg pokazuju krivulje. Na navedenim slikama nedostaje informacija o vremenskoj raspodjeli pa je za odabranih deset točaka na izvodnicama u oba slučaja izrađen i odgovarajući dijagram vremenske promjene smičnog naprezanja (slike 6.10 i 6.12). Kritična mjesta na izvodnici u kojima bi se trebale pojaviti najveće oscilirajuće vrijednosti smičnih naprezanja, prema slici 6.11, ističu se točke 4 i 5 (smična naprezanja osciliraju u sličnim amplitudama na pozitivnu i negativnu stranu te značajno smanjuju vrijednost brojnika u izrazu (6.1), ali povećavaju vrijednost  $OSI$ ). Međutim, kada se pogleda vremenska raspodjela za ove dvije točke prikazana na slici 6.12, dobije se predodžba da bi i točke 6 i 7 mogle imati visoku vrijednost  $OSI$ . Ovdje vidimo i korisnost uvođenja parametra  $OSI \cdot \tau_w$  gdje je njegovom primjenom utvrđen maksimum između točaka 6 i 7.

Ovime se pokazalo kako se u cilju pronalaženja mjesta za koja se pretpostavlja da postoji opasnost pojave hiperplazije, umjesto promatranja vremenske raspodjele smičnih naprezanja na stijenci uključujući i njihovu promjenu smjera, može se promatrati jedna skalarna veličina  $OSI \cdot \tau_w$ . Tako se u primjeru zahvata premošćivanja začepljene arterije, koja se razmatra u ovom radu, pokazuje da se spajanjem premosnice u obliku račve na zdravi ostatak arterije (slike 6.8, 6.11, 6.12) povećavaju izgledi za pojavu hiperplazije. Naime, ova pojava je uočena i u kliničkoj praksi. Ukoliko nije potrebno zadržati ostatak arterije koja se nalazi ustrojno od spoja premosnice i arterije, tada je bolje ili ukloniti taj dio ili spriječiti strujanje iz premosnice u taj dio arterije, a spoj premosnice i arterije obaviti u obliku koljena (slika 6.7, 6.9, 6.10). U tom slučaju se ne pojavljuju oscilacije smičnih naprezanja velikog intenziteta, kako to pokazuju usporedbe raspodjela veličine  $OSI \cdot \tau_w$  u ova dva slučaja (na slikama 6.9 i 6.11 označeno plavom bojom).

## 7. ZAKLJUČAK

Pri numeričkom modeliranju kardiovaskularnog sustava javljaju se brojni izazovi: krv nije Newtonovski fluid, stijenka arterije je viskoelastična i neizotropna, geometrija krvnih žila je složena, javljaju se velike deformacije aorte. U numeričkoj simulaciji strujanja kroz premosnicu u ovom radu uvedena su brojna pojednostavljenja koja znatno olakšavaju postavljanje i izvedbu proračuna. Neka od pojednostavljenja su: kruta stijenka krvne žile, krv je Newtonovski fluid, pojednostavljena geometrija krvne žile. Cilj rada je bio pokazati kako lokalni uvjeti utječu na pojavu ateroma i hiperplazije (zadebljanje stijenke krvne žile) kod dva različita načina spajanja premosnice na zdravi dio arterije. Iz rezultata se može vidjeti kako je spajanje premosnice na zdravi dio arterije u obliku račve nepovoljniji slučaj. Iz dobivene raspodjele smičnih napreznja po stijenci koljena (slučaj A) i račve (slučaj B), kojima se premosnica spaja na zdravu krvnu žilu, vidi se da su vrijednosti smičnog napreznja veće u slučaju B nego slučaju A. Razlog je nagla promjena smjera strujanja krvi u jednom dijelu zdrave krvne žile te postojanje oštih rubova zbog kojih dolazi do povećanja napreznja. Kao kriterij za procjenu uvjeta za stvaranje hiperplazije usvojen je umnožak veličine  $OSI \cdot \tau_w$  ( $OSI$  – eng. Oscillatory Shear Index,  $\tau_w$  – smično napreznje na stijenci krvne žile). U slučaju spoja u obliku račve (slučaj B) taj umnožak ima visoku vrijednost u području gdje se u stvarnim uvjetima očekuje nastanak hiperplazije, dok je u slučaju spoja u obliku koljena (slučaj A) taj umnožak mali te se u koljenu u stvarnim uvjetima može očekivati izostanak hiperplazije.

## LITERATURA

- [1] Bárdossy G., Halász G.: Modeling blood flow in the arterial system, Periodica polytechnica Mechanical Engineering, 2011.
- [2] Hrvatski zavod za javno zdravstvo: Izvješće o umrlim osobama u Hrvatskoj u 2020. godini, 2021.
- [3] <https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/3b8a4b4e-84b0-4580-aa6f-e38efe028ed9/biologija-8/m04/j01/index.html>
- [4] <http://www.studyblue.com/notes/note/n/structure-of-heart-/deck/11369164>
- [5] <https://sites.google.com/site/krvcovjeka123/sastav-krvi>
- [6] <http://physics.mef.hr/Predavanja/reologija/main22.html>
- [7] D. Pustaić, I. Cukor: Teorija plastičnosti i viskoelastičnosti, sažetak predavanja, 2009.
- [8] Z. Virag, I. Džijan: Računalna dinamika fluida, Zagreb, 2014.
- [9] Z. Virag, S. Krizmanić: Dinamika plinova, Zagreb, 2021.
- [10] Z. Virag, M. Šavar, I. Džijan: Mehanika fluida II, Zagreb 2018.
- [11] Fajković D., Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu – Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [12] Z. Virag, M. Šavar, I. Džijan: Mehanika fluida I, Zagreb 2018.
- [13] Šimunek J., Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu – Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.
- [14] [https://en.wikipedia.org/wiki/Windkessel\\_effect](https://en.wikipedia.org/wiki/Windkessel_effect)
- [15] Westerhof N., Lankhaar J. W., Westerhof B. E.: The arterial Windkessel, Medical & Biological Engineering & Computing, 2008.
- [16] <https://skolica-prehrane.rijeka.hr/moje-tijelo/srcano-zilni-sustav/>
- [17] [http://zdravljezasve.hr/html/zdravlje07\\_cuvari.html](http://zdravljezasve.hr/html/zdravlje07_cuvari.html)
- [18] <https://krenizdravo.dnevnik.hr/ateroskleroza-7>
- [19] <http://www.magdalena.hr/usluge/kirurgija/operacije-srca/>
- [20] <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=50156>
- [21] Matijašević D., Disertacija, Sveučilište u Zagrebu – Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2011.
- [22] <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/4-mesh-generation-and-conversion/4.2-boundaries>

- [23] Ištvanović J., Završni rad, Sveučilište u Zagrebu – Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2021.
- [24] Konnigk L., Torner B., Bruschewski M., Grundmann S., Wurm F.: Equivalent Scalar Stress Formulation Taking into Account Non-Resolved Turbulent Scales, 2021.
- [25] Markučić V., Disertacija, Sveučilište u Zagrebu – Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2021.
- [26] <https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=67730>

## **PRILOZI**

I. CD-R disc