

# Aerodinamička analiza PrandtlID letećeg krila

---

**Aradski, David**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:353035>

*Rights / Prava:* [Attribution-ShareAlike 4.0 International/Imenovanje-Dijeli pod istim uvjetima 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-23**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

David Aradski

ZAGREB, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

AERODINAMIČKA ANALIZA PRANDTLA LETEĆEG KRILA

Mentor:  
doc.dr.sc. Dubravko Matijašević

Student:  
David Aradski

ZAGREB, 2022.

*Zahvaljujem se svom mentoru doc.dr.sc.  
Dubravku Matijaševiću na stručnim  
savjetima pri izradi ovog rada.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, srpanj 2022.

David Aradski



|  |        |
|--|--------|
| Sveučilište u Zagrebu<br>Fakultet strojarstva i brodogradnje |        |
| Datum  | Prilog |
| Klasa: 602 - 04 / 22 - 6 / 1                                 |        |
| Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -                                    |        |

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **David Aradski** JMBAG: 0035199190

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Aerodinamička analiza PrandtlID letećeg krila**

Naslov rada na engleskom jeziku: **PrandtlID flying wing aerodynamic analysis**

Opis zadatka:

PrandtlID leteće krilo je napravljeno da se mogućnost leta u kvadratnom ispiranju (eng. *normal-wash*) istraži u naravi. S druge strane, većinu tih pitanja može se istraživati i numeričkim pokusima. Štoviše, numeričkim se metodama koje imaju visoku vjernost originalu (eng. *high-fidelity*) dobije puno detaljniji uvid u strujno polje u odnosu na mogućnosti pokusa u naravi. Činjenica da je PrandtlID letjelica čija je geometrija javno dostupna nameće ju kao testnu platformu. Stoga se i u ovom radu ona koristi za dobivanje dubljeg poimanja o realizaciji leta u kvadratnom ispiranju, u viskoznom fluidu.

U okviru ovog rada potrebno je izvršiti analizu aerodinamičkih svojstava PrandtlID letećega krila. U tu svrhu potrebno je upotrijebiti numeričke metode različite vjernosti originalu za dobivanje kompletnijeg uvida u aerodinamička svojstva. Posebno obratiti pažnju na inducirani otpor u proračunima kako neviskoznog tako i viskozog fluida. Za eventualne analize aerodinamičkih utjecaja upravljačkih površina iskoristiti metode niže vjernosti originalu (eng. *low-fidelity*).

U okviru rada potrebno je prezentirati problem i korištene metode, komentirati dobivene rezultate te navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

5. svibnja 2022.

Datum predaje rada:

7. srpnja 2022.

Predviđeni datumi obrane:

18. – 22. srpnja 2022.

Zadatak zadao:

Doc.dr.sc. Dubravko Matijašević

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

# Sadržaj

|  |           |
|--|-----------|
| Sadržaj  | v         |
| Popis slika  | vii       |
| Popis tablica  | ix        |
| Popis oznaka   | x         |
| Sažetak  | xii       |
| Summary  | xiii      |
| <b>1. Uvod</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2. Teorijska pozadina zvonolike raspodjele uzgona</b>                           | <b>3</b>  |
| 2.1. Inducirani otpor . . . . .  | 3         |
| 2.2. Minimalni inducirani otpor . . . . .  | 5         |
| 2.2.1. Zvonolika raspodjela . . . . .  | 5         |
| 2.2.2. Kvadratna brzina ispiranja . . . . .  | 7         |
| <b>3. PrandtlID krilo</b>  | <b>9</b>  |
| <b>4. Numeričke metode i njihova razrada</b>                                       | <b>12</b> |
| 4.1. Metodologija . . . . .  | 12        |
| 4.2. Numerička adaptacija Prandtllove noseće linije za proizvoljna krila . . . . . | 12        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| 4.2.1.    | Intenzitet vezanog vrtloga i inducirane brzine . . . . .         | 13        |
| 4.2.2.    | Određivanje aerodinamičke sile i momenta . . . . .               | 17        |
| 4.3.      | Hermitska interpolacija radijalnim baznim funkcijama . . . . .   | 18        |
| 4.3.1.    | Osnovni koncept metode . . . . .                                 | 18        |
| 4.3.2.    | Polinomni članovi . . . . .                                      | 19        |
| 4.4.      | Metoda konačnih volumena . . . . .                               | 20        |
| 4.4.1.    | Matematički model fluida . . . . .                               | 20        |
| 4.4.2.    | Modeliranje turbulencije . . . . .                               | 21        |
| 4.4.3.    | Diskretizacija modela . . . . .                                  | 22        |
| 4.4.4.    | Numeričke sheme za konvekcijski i difuzijski transport . . . . . | 24        |
| <b>5.</b> | <b>Numerička Analiza</b>   | <b>26</b> |
| 5.1.      | 3D numerička analiza metodom konačnih volumena . . . . .         | 26        |
| 5.1.1.    | Kreiranje geometrije . . . . .                                   | 26        |
| 5.1.2.    | Kreiranje mreže . . . . .  | 30        |
| 5.1.3.    | Rubni uvjeti . . . . .   | 32        |
| 5.1.4.    | Rezultati 3D proračuna . . . . .                                 | 32        |
| 5.1.5.    | Određivanje induciranoog otpora iz rezultata MKV . . . . .       | 34        |
| 5.2.      | 2D proračun aeroprofila . . . . .                                | 38        |
| 5.2.1.    | Kreiranje geometrije . . . . .                                   | 38        |
| 5.2.2.    | Kreiranje mreže . . . . .  | 39        |
| 5.2.3.    | Rezultati proračuna . . . . .                                    | 41        |
| 5.2.4.    | Interpolacija HRBF metodom . . . . .                             | 41        |
| 5.3.      | Proračun noseće linije za otklon upravljačkih površina . . . . . | 42        |
| 5.3.1.    | Otklon upravljačkih površina u istom smjeru . . . . .            | 44        |
| 5.3.2.    | Otklon u suprotnom smjeru . . . . .                              | 46        |
| <b>6.</b> | <b>Zaključak</b>   | <b>49</b> |
|           | <b>Literatura</b>  | <b>51</b> |
| <b>A.</b> | <b>Jednodimenzijski primjer HRBF metode</b>                      | <b>53</b> |



# Popis slika

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Zvonolika raspodjela opterećenja . . . . .   | 6  |
| 2.2  | Usporedba bezdimenzijskih brzina ispiranja . . . . .   | 7  |
| 3.1  | Usporedba induciranih brzina eliptične i zvonolike raspodjele cirkulacije<br>krila . . . . . | 9  |
| 3.2  | Izmjerene kutne brzine PrandtlID letjelice . . . . .   | 10 |
| 3.3  | PrandtlID leteće krilo . . . . .   | 11 |
| 4.1  | Krilo diskretizirano na $\Pi$ segmente . . . . .   | 13 |
| 4.2  | Inducirana brzina u točki $(x,y,z)$ . . . . .  | 14 |
| 4.3  | Newtonova metoda za funkciju s jednom varijablom . . . . .                                   | 16 |
| 4.4  | Primjer dva konačna volumena . . . . .   | 23 |
| 5.1  | Aeroprofil različitih sekcija . . . . .  | 27 |
| 5.2  | Aeroprofil različitih sekcija sa strijelom . . . . .   | 28 |
| 5.3  | Aeroprofil različitih sekcija sa strijelom i postavnim kutom . . . . .                       | 28 |
| 5.4  | 3D geometrija krila . . . . .  | 29 |
| 5.5  | Domena za proračun metodom konačnih volumena . . . . .                                       | 30 |
| 5.6  | Proračunska mreža . . . . .  | 31 |
| 5.7  | Proračunska mreža oko krila . . . . .  | 31 |
| 5.8  | Polje iznosa brzine na gornjaci krila . . . . .  | 32 |
| 5.9  | Polje iznosa brzine na donjaci krila . . . . .   | 33 |
| 5.10 | Polje tlaka na gornjaci . . . . .  | 33 |

|   |    |
|---|----|
| 5.11 Polje tlaka na donjaci . . . . .   | 34 |
| 5.12 Diskretizacija noseće linije za ekstrakciju cirkulacije . . . . .                    | 35 |
| 5.13 Cirkulacija za napadni kut $0^\circ$ . . . . .                                       | 36 |
| 5.14 Inducirana brzina za napadni kut $0^\circ$ . . . . .                                 | 37 |
| 5.15 Cirkulacija za napadni kut $5^\circ$ . . . . .                                       | 38 |
| 5.16 Prikaz srednje linije s otklonima upravljačke površine . . . . .                     | 39 |
| 5.17 Proračunska mreža za 2D proračun metodom konačnih volumena . . . . .                 | 39 |
| 5.18 Profinjenje proračunske mreže oko aeroprofila . . . . .                              | 40 |
| 5.19 Profinjenje mreže uz noseću liniju . . . . .   | 40 |
| 5.20 Polje tlaka oko noseće linije . . . . .  | 41 |
| 5.21 Interpolacija koeficijenta uzgona . . . . .  | 42 |
| 5.22 Usporedba cirkulacije bez otklona s teorijskom cirkulacijom . . . . .                | 43 |
| 5.23 Inducirana brzina bez otklona upravljačkih površina . . . . .                        | 44 |
| 5.24 Usporedba cirkulacije bez otklona s teorijskom cirkulacijom . . . . .                | 45 |
| 5.25 Inducirana brzina bez otklona upravljačkih površina . . . . .                        | 46 |
| 5.26 Cirkulacija za suprotan otklon upravljačkih od $5^\circ$ . . . . .                   | 47 |
| 5.27 Inducirana brzina sa suprotnim otklonom upravljačkih površina od $5^\circ$ . . . . . | 48 |
| A.1 Primjer interpolacije radijalnim funkcijama . . . . .                                 | 54 |

# Popis tablica

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Podaci o letjelici . . . . .   | 10 |
| 3.2 | Kut uvijanja na sekcijama krila . . . . .  | 11 |
| 4.1 | Klasične radijalne funkcije . . . . .  | 20 |
| 5.1 | Rubni uvjeti 3D proračuna . . . . .  | 32 |
| 5.2 | Rubni uvjeti 2D proračuna . . . . .  | 41 |
| 5.3 | Aerodinamičke sile . . . . .   | 43 |
| 5.4 | Aerodinamičke sile za isti otklon upravljачke od $5^\circ$ . . . . .               | 45 |
| 5.5 | Aerodinamičke sile za suprotan otklon upravljачkih površina od $5^\circ$ . . . . . | 47 |
| 5.6 | Moment valjanja i skretanja . . . . .  | 48 |

# Popis oznaka

|                   |  |    |
|-------------------|--|----|
| $D_i$             | Inducirani otpor [N] . . . . .   | 5  |
| $D_\phi$          | Difuzivnost svojstva $\phi$ [kg/ms] . . . . .                                    | 24 |
| $\mathbf{F}$      | Vektor aerodinamičke sile [N] . . . . .  | 13 |
| $\mathbf{J}$      | Jacobijeva matrica . . . . .   | 16 |
| $KV$              | Kontrolni volumen [m <sup>3</sup> ] . . . . .                                    | 21 |
| $L$               | Uzgon [N] . . . . .  | 4  |
| $\mathbf{M}$      | Vektor aerodinamičkog momenta [Nm] . . . . .                                     | 18 |
| $S$               | Površina ruba kontrolnog volumena [m <sup>2</sup> ] . . . . .                    | 21 |
| $V_\infty$        | Brzina iz beskonačnosti [m/s <sup>2</sup> ] . . . . .                            | 4  |
| $a_0$             | Gradijent koeficijenta uzgona po napadnom kutu [-] . . . . .                     | 4  |
| $b$               | Raspon krila [m] . . . . .   | 3  |
| $c$               | Tetiva aeroprofila [m] . . . . .   | 4  |
| $k$               | Kinetička energija turbulencije[J/kg] . . . . .                                  | 22 |
| $\mathbf{l}_i$    | Vektor vezanog segmenta [m] . . . . .  | 13 |
| $p$               | Tlak [Pa] . . . . .  | 21 |
| $\mathbf{v}_{ij}$ | Bezdimenzijska brzina na koju segment $i$ inducira na segmetnu $j$ [-] . . . . . | 14 |
| $w_i$             | Brzina ispiranja [m/s] . . . . .   | 3  |
| $\Gamma$          | Intenzitet cirkulacije brzine oko vezanog vrtloga [m/s <sup>2</sup> ] . . . . .  | 3  |
| $\Omega$          | Relaksacijski faktor[-] . . . . .  | 16 |
| $\alpha$          | Napadni kut brzine iz beskonačnosti[rad] . . . . .                               | 4  |
| $\alpha_0$        | Napadni kut resultantne brzine [rad] . . . . .                                   | 4  |
| $\alpha_i$        | Napadni kut inducirane brzine [rad] . . . . .                                    | 4  |

|          |  |    |
|----------|--|----|
| $\phi$   | Općenita fizikalna veličina . . . . .  | 24 |
| $\gamma$ | Intenzitet cirkulacije brzine oko slobodne vrtložne niti [m/s <sup>2</sup> ] . . . . . | 3  |
| $\mu$    | Dinamička viskoznost [Pas] . . . . .   | 21 |
| $\nu$    | Kinematička viskoznost[m <sup>2</sup> /s] . . . . .                                    | 21 |
| $\rho$   | gustoća fluida [kg/m <sup>3</sup> ] . . . . .  | 5  |
| $\mu_t$  | Dinamička turbulentna viskoznost[Pas] . . . . .  | 22 |
| $\theta$ | Glauertova varijabla [rad] . . . . .   | 4  |

# Sažetak

U ovom radu analizirana je letjelica PrandtlID. PrandtlID leteće krilo je konstruirano kako bi se istražila mogućnost leta sa zvonolikom raspodjelom opterećenja te kako bi se testirali efekti koji se pojavljuju zbog pozitivne brzine ispiranja pri vrhovima krila. Rekonstruirana je geometrija letjelice, provedeni su proračuni krila i aeroprofila metodom konačnih volumena te je provedena analiza numeričkom adaptacijom noseće linije za otklon upravljačkih površina kako bi se istražila mogućnost povoljnog skretanja.

**Ključne riječi:** Numerička Prandtlova metoda noseće linije, Zvonolika raspodjela cirkulacije, PrandtlID leteće krilo, Povoljno skretanje, HRBFI aerodinamičkih svojstava aeroprofila s upravljačkom površinom

# Summary

In this thesis, the PrandtlID aircraft was analyzed. PrandtlID flying wing was constructed to investigate the possibility of flight with a bell-shaped spanload and to test the effects that occur due to the upwash velocity at the wingtips. The geometry of the aircraft was reconstructed, wing and airfoil calculations were carried out using the finite volume method and numerical adaptation of the lifting line was used to analyze deflection of the control surfaces in order to investigate the possibility of a proverse yaw.

**Keywords:** Numerical Prandtl Lifting Line method, Bell-shaped circulation distribution, PrandtlID flying wing, Proverse yaw, HRBFI of airfoil with aileron aerodynamic properties

# 1 | Uvod

Razvojem mikroprocesora, baterija, kamera, komunikacijske tehnologije, pojavila se mogućnost korištenja malih bespilotnih letjelica za razne praktične svrhe. Samo neki od primjera su nadgledanje granice i druge primjene video nadzora, prikupljanja podataka koji mogu biti korisni u različitim industrijama, te uspostavljanje komunikacijske povezanosti u nepristupačnim terenima. Od takvih letjelice se zahtjeva da mogu dugi vremenski period provesti u letu za što je vrlo važna minimizacija inducirano otpora.

Leteća krila se nameću kao najpovoljnija baza za takav koncept. Da bi se minimizirao inducirani otpor krilo treba biti vitko. Za vitko leteće krilo problematičan je način stvaranja momenta skretanja i on se uglavnom svodi na stvaranje dodatnog otpora u svrhu stvaranja željenog moment skretanja. Istovremeno je potrebno mnimizirati otpor za što je potrebno vitko krilo te upravljati smjerom leta bez vertikalnog stabilizatora. Kao moguća alternativa tradicionalnim krilima nameću se krila sa zvonolikom raspodjelom cirkulacije. Krila sa zvonolikom raspodjelom, uz minimiziranje inducirano otpora, na vrhovima krila imaju pozitivan smjer brzine ispiranja što otvara mogućnost upravljanja momentom skretanja poželjnim skretanjem (eng. *provers yaw*). No takva krila su još uvijek relativno neistražena te postoje brojni problemi za koja treba pronaći rješenja. Za let u viskoznom fluidu povećanje raspona će povećati viskozni dio otpora. Također, potrebno je letjeti u području što bliže idealnog napadnog kuta npr. unutar " *drag bucketa*". Također zvonolika raspodjela opterećenja stvara kvadratnu brzinu ispiranja što znači da svaka promjena cirkulacije može izazvati velike promjene inducirano napadnog kuta pri vrhovima krila. Takve promjene inducirano napadnog kuta mogu uzrokovati da vršni aeroprofil više ne budu u području oko idealnog napadnog kuta, čime se otpori



trenja i oblika mogu značajno povećavati i uzrokovati neočekivane momente skretanja. U ovom radu će biti analizirana platforma PrandtlD koja je konstruirana kao prva iteracija za testiranje leta sa zvonolikom raspodjelom opterećenja. U drugom poglavlju će se ukratko opisati teorijska pozadina minimizacije induciranoog otpora, zatim će se u trećem poglavlju ukratko opisati PrandtlD letjelica, u četvrtom poglavlju opisane su numeričke metode koje se koriste u analizi, i u petom poglavlju su dani detalji i rezultati analize.

## 2 Teorijska pozadina zvonolike raspodjele uzgona

U ovom će se poglavlju ukratko pojasniti osnovni pojmovi i teorijska analiza koja je temelj za razvoj PrandtlID letjelice.

### 2.1. Inducirani otpor

Konačno krilo koje daje uzgon će stvarati razliku između tlakova na donjaci i gornjaci. Dok se kreće kroz fluid, konačno krilo oko sebe generira cirkulacijsko strujanje, te zbog promjene te cirkulacije generira se i slobodna vrtložna plahta iza krila koja je definirana izrazom (2.1).

$$\gamma(y) = \frac{d\Gamma(y)}{dy} = \Gamma'(y) \quad (2.1)$$

gdje je  $\Gamma$  cirkulacija sekcije  $y$ , a  $\Gamma'$  označava njenu derivaciju.

Strujanje s takvom slobodnom vrtložnom plahtom ima vertikalnu komponentu brzine na vezani vrtlog koja se naziva brzina ispiranja na vezanom vrtlogu i za ravno krilo je dana izrazom (2.2).

$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\gamma(y_0)}{y - y_0} dy_0 \quad (2.2)$$

Ako se integrira brzina po krivulji koja obuhvaća krilo odredit će se intenzitet cirkulacije te se krilo može prikazati kao vezani vrtlog na jednoj četvrtini tetive s dobivenim intenzitetom cirkulacije. Za određivanje cirkulacije može se koristiti rješenje za beskonačno krilo tako da se napadni kut korigira za promjenu napadnog kuta koja nastaje

uslijed brzine ispiranja. Što je dobra aproksimacija za krila velikih aspektnih odnosa, što je zadovoljeno za krila koja se ovdje promatraju.

$$\alpha_0 = \alpha + \alpha_i \quad (2.3)$$

$$\alpha_i = \frac{w_i}{V_\infty} \quad (2.4)$$

Koristeći tu korekciju, cirkulacija se određuje izrazom (2.5) [1].

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} a_0(y) c(y) V_\infty \left[ \alpha(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'(y_0)}{y - y_0} dy_0 \right] \quad (2.5)$$

Opće rješenje jednadžbe može se odrediti pomoću Fourierovog reda prema izrazu (2.6). Uz pretpostavku takve  $\Gamma$  da zadovoljava rubne uvjete  $\Gamma(y = \pm b/2) = 0$  na vrhovima krila.

$$\Gamma(\cos \theta) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta, \quad (2.6)$$

gdje je:

$$y = -b/2 \cos \theta \quad (2.7)$$

$$dy = b/2 \sin \theta d\theta. \quad (2.8)$$

Sila uzgona definirana je izrazom (2.9) koji pomoću izraza (2.6) prelazi u izraz (2.10).

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (2.9)$$

$$L = \rho V_\infty^2 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^0 \sin(n\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (2.10)$$

Iz izraza (2.10) slijedi:

$$L = \frac{\pi}{2} \rho V_\infty^2 b^2 A_1. \quad (2.11)$$

Brzina ispiranja nalazi se u vertikalnoj ravnini okomito na vezani vrtlog te će za posljedicu imati silu u smjeru brzine iz beskonačnosti koja je određena izrazom (2.12).

$$D_i = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w_i(y) \Gamma(y) dy \quad (2.12)$$

Izraz (2.12) može se svesti na sljedeći izraz [2]:

$$D_i = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma(y)\Gamma(y_0)}{(y_0 - y)^2} dy_0 dy . \quad (2.13)$$

Razvojem u Fourierov red izraza (2.13) dobiva se sljedeći izraz:

$$D_i = \frac{2 \left(\frac{L}{b}\right)^2}{\pi \rho V_\infty^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{A_n^2}{A_1^2} . \quad (2.14)$$

Izraz (2.14) se može pojednostaviti korištenjem relacije  $B_n = \frac{A_n}{A_1}$  te se dobiva konačan izraz za inducirani otpor:

$$D_i = \frac{2 \left(\frac{L}{b}\right)^2}{\pi \rho V_\infty^2} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n B_n^2 \right) . \quad (2.15)$$

## 2.2. Minimalni inducirani otpor

Obzirom da je inducirani otpor neizbježna nepoželjna sila, potrebno ju je svesti na minimum. Iz izraza (2.15) vrlo se jasno vidi da će za određeni raspon krila i silu uzgona sila induciranog otpora biti minimalna kada su za sve  $B_n$  vrijedi  $B_n = 0$ . Opisana raspodjela cirkulacije naziva se eliptičnom i dana je u [3]:

$$\frac{b \bar{L}(\theta)}{L} = \frac{4}{\pi} \sin \theta . \quad (2.16)$$

Eliptična raspodjela cirkulacije stvara veliko opterećenje na konstrukciju što za posledicu ima veću masu krila.

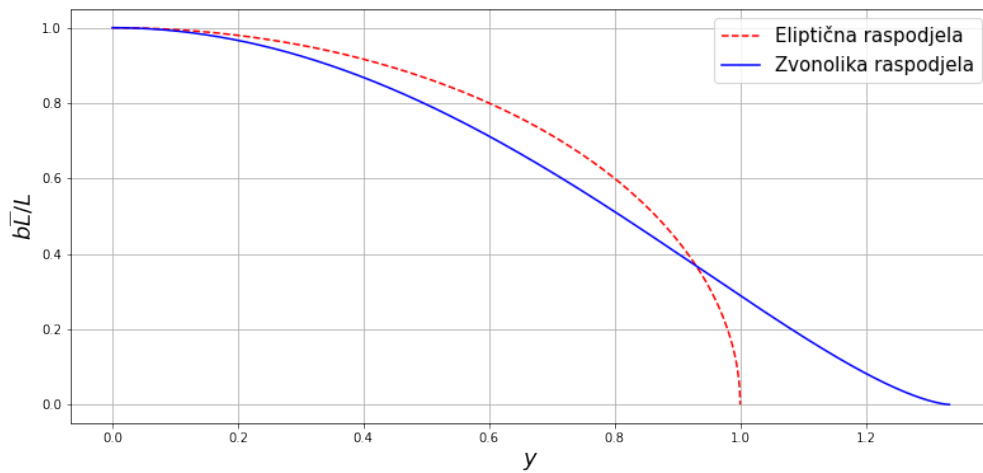
### 2.2.1. Zvonolika raspodjela

Alternativnu raspodjelu opterećenja ponudio je Prandtl u [4] gdje je za ograničenje u minimizacijskom problemu uzeo silu uzgona krila, linearno povezoao moment savijanja s masom konstrukcije krila te dopustio da se raspon mijenja tako da ne dovodi do

promjene u masi konstrukcije. Navedenim je postavljanjem minimizacijskog problema došao do zvonolike raspodjele koja bi uz postavljene pretpostavke imala najmanji inducirani otpor. Zvonolika raspodjela je dana u izrazu (2.17).

$$\frac{b\bar{L}(\theta)}{L} = \frac{4}{\pi} \left[ \sin \theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta \right] \quad (2.17)$$

Za razliku od eliptične raspodjele opterećenja kod zvonolike raspodjele nisu svi  $B_n$  koeficijenti jednaki nuli već je  $B_3 = -1/3$ . Koeficijent Fourierovog reda za inducirani otpor  $B_3$  ima takva svojstva da svojim smanjivanjem smanjuje moment savijanja koji raspodjela opterećenja stvara te se njegovim smanjivanjem može povećati raspon bez povećanja mase. No, ne smije biti manji od  $B_3 = -1/3$  jer bi se tada pri vrhovima krila počeo pojavljivati negativan uzgon, što bi polučilo kontra efekt u pokušaju smanjenja induciranih otpora.



Slika 2.1: Zvonolika raspodjela opterećenja

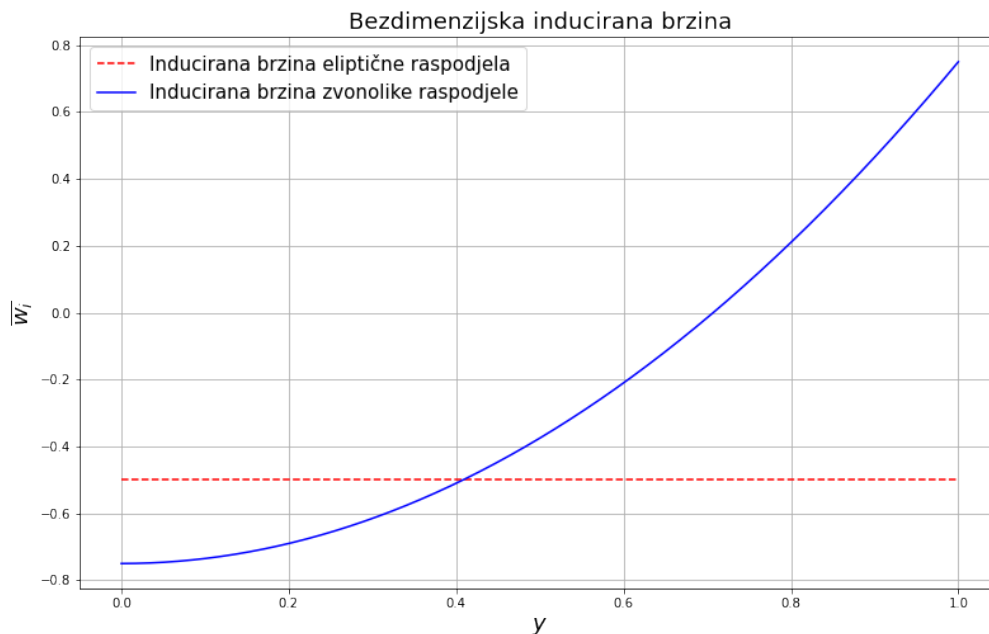
Na slici 2.1 su prikazane ekvivalentna zvonolika i eliptična raspodjela opterećenja. Ekvivalentne su u smislu toga da daju jednaku silu uzgona i da je prema Prandtlovim pretpostavkama potrebna jednaka težina konstrukcije krila za takvo opterećenje. Raspodjela opterećenja s  $B_3 = -1/3$  dopušta povećanje raspona za 22.5% u odnosu na ekvivalentno krilo s eliptičnom raspodjelom te će stvarati 11.1% manji inducirani otpor [4].

### 2.2.2. Kvadratna brzina ispiranja

Izraz za bezdimenzijsku induciranu brzinu zvonolike cirkulacije krila je [5]:

$$\overline{w}_i(y) = \frac{3}{2} \left( y^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (2.18)$$

Na slici 2.2 prikazana je usporedba induciranih brzina zvonolike i eliptične raspodjele cirkulacije za isti iznos uzgona. Za razliku od eliptične raspodjele cirkulacije gdje je brzina ispiranja konstantna po rasponu, kod zvonolike je brzina je kvadratna funkcija.



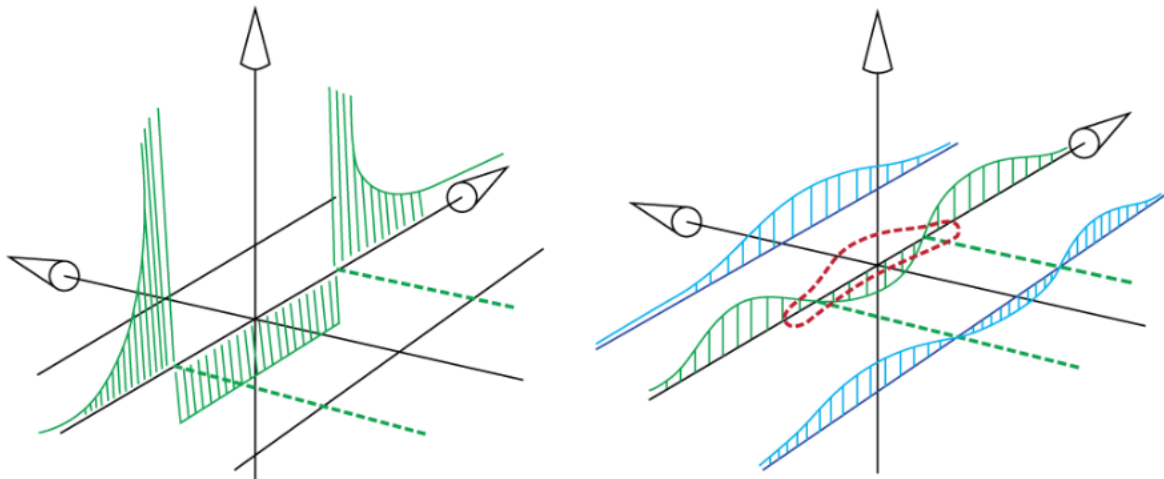
Slika 2.2: Usporedba bezdimenzijskih brzina ispiranja

Može se uočiti da inducirana brzina zvonolike raspodjele poprima pozitivan iznos pri vrhovima krila te će sekcije koje se nalaze u tom području pozitivne inducirane brzine imati smjer aerodinamičke sile zarotiran prema smjeru leta. To za posljedicu ima da je u tom području inducirani otpor u smjeru leta, tj. više nije otpor nego pogon (inducirana propulzija). Svakako treba naglasiti da se taj efekt ne može postići bez povećanja induciranog otpora pri korijenu krila, tako da je ukupni inducirani otpor i dalje u smjeru strujanja fluida i nepoželjna je sila. No, obzirom da se područje inducirane

propulzije nalazi na velikom kraku, a povećanje induciranog otpora zbog te propulzije se nalazi pri korijenu krila, ova pojava ima potencijal biti mehanizam stvaranja momenta skretanja.

### 3 PrandtlID krilo

Kako bi se validirala zvonolika raspodjela opterećenja [4] u *NASA Armstrong Flight Research Center* konstruirano je leteće krilo PrandtlID koje je objavljeno u [5]. Platforma za razvoj je bilo leteće krilo Horten H Xc. Cilj ekperimenta je bio prikazati koordinirani let letjelice sa zvonolikom raspodjelom opterećenja i bez vertikalnih površina korištenjem povoljnog skretanja (eng. *proverse yaw*) koje zbog pozitivnog smjera brzine ispiranja na vrhovima krila omogućuje zvonolika raspodjela opterećenja. Usporedba brzina ispiranja eliptičnog i zvonolikog krila prikazana je na slici 3.1 koja je preuzeta iz[5])

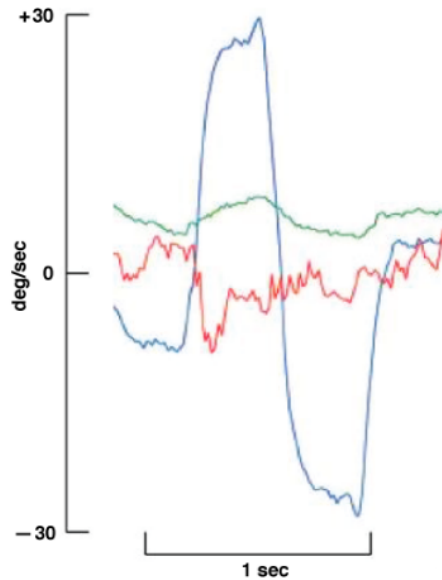


Slika 3.1: Usporedba induciranih brzina eliptične i zvonolike raspodjele cirkulacije krila

Koristeći takvu konfiguraciju opterećenja i brzine ispiranja izmjerene su kutne brzine



prikazane na slici 3.2.



Slika 3.2: Izmjerene kutne brzine PrandtID letjelice [5]

Crvenom bojom je prikazana brzina propinjanja i ona ima oscilacije uslijed turbulencija u nastrujavanju zraka, plavom bojom je prikazana kutna brzina valjanja, a zelenom kutna brzina skretanja. Može se uočiti da kutna brzina valjanja ima isti predznak kao i kutna brzina skretanja. Činjenica da su te dvije kutne brzine istog predznaka je veliku prednost u odnosu na tradicionalna krila kod kojih bi te dvije kutne brzine imale različit predznak i pojavilo bi se nepovoljno skretanje (eng. *adverse yaw*) koje je potrebno korigirati otklonom upravljačke površine na vertikalnom stabilizatoru.

U [5] su dani vršni i korjenski aeroprofil, ukupni kut uvijanja krila na sekcijama i ostali podaci o letjelici koji će biti navedeni u nastavku.

Tablica 3.1: Podaci o letjelici

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| raspon $b$ [m]             | 3.75m      |
| kut strijele $[\circ]$     | $24^\circ$ |
| korjenska tetiva $c_r$ [m] | 0.4m       |
| vršna tetiva $c_t$ [m]     | 0.1m       |

Tablica 3.2: Kut uvijanja na sekcijama krila

|    |        |    |         |
|----|--------|----|---------|
| 0  | 8.3274 | 11 | 7.2592  |
| 1  | 8.5524 | 12 | 6.6634  |
| 2  | 8.7259 | 13 | 5.9579  |
| 3  | 8.8441 | 14 | 5.1362  |
| 4  | 8.9030 | 15 | 4.1927  |
| 5  | 8.8984 | 16 | 3.1253  |
| 6  | 8.8257 | 17 | 1.9394  |
| 7  | 8.6801 | 18 | 0.6589  |
| 8  | 8.4565 | 19 | -0.6417 |
| 9  | 8.1492 | 20 | -1.6726 |
| 10 | 7.7522 |    |         |

Na PrandtID letjelici od upravljačkih površina koriste se elevoni koji mogu imati jednak ili suprotan otklon kada se koriste kao krilca. Upravljačke površine se nalaze na vanjskih 14% raspona te zauzimaju 25% tetive. Na slici 3.3 je prikazano PrandtID krilo u letu.



Slika 3.3: PrandtID leteće krilo

## 4 Numeričke metode i njihova razrada

U ovom poglavlju rada opisan će se metodologija analize te će ukratko biti predstavljene numeričke metode koje će se koristiti za analizu PrandtlID krila.

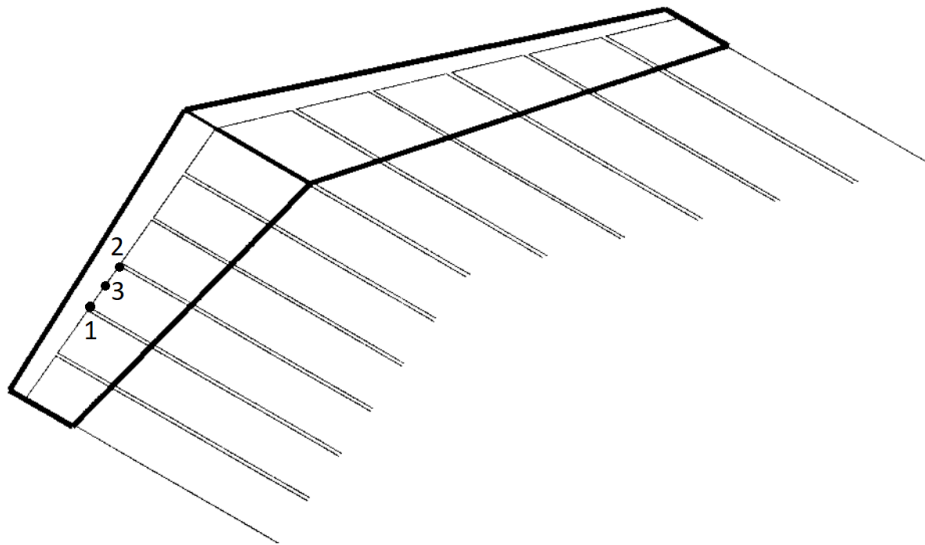
### 4.1. Metodologija

PrandtlID letjelica analizirat će se nelinearnom numeričkom metodom noseće linije koja omogućuje analizu s otklonom upravljačkih površina. Za proračun su potrebni koeficijenti uzgona za vršni i korjenski aeroprofil s otklonom upravljačke površine. Za određivanje koeficijenta uzgona aeroprofila koristit će se 2D proračun metodom konačnih volumena. Dobiveni koeficijenti će se interpolirati HRBF metodom te će se dobivena interpolacija koristiti u nelinearnoj numeričkoj metodi noseće linije. Numerička metoda noseće linije također kao ulaz zahtjeva pretpostavku cirkulacije oko krila. Za određivanje ulazne cirkulacije koristit će se 3D proračun metodom konačnih volumena. Iz vremenski osrednjenog polja tlaka, koje se dobije iz 3D proračuna viskoznog strujanja oko krila, bit će napravljena ekstrakcija cirkulacije te će ona služiti kao ulazna cirkulacija u proračunu numeričkom metodom noseće linije.

### 4.2. Numerička adaptacija Prandtllove noseće linije za proizvoljna krila

Za analizu letjelice s upravljačkim površinama koristit će se numerička adaptacija klasične noseće linije koja je opisana u [6]. U metodi se krilo diskretizira s parnim

brojem vrtložnih elemenata koji su definirani s tri točke, dvije koje su početak i kraj vezanog vrtloga i treća koja je evaluacijska i nalazi se između prve dvije na vezanom vrtlogu segmenta, a u njoj se računa brzina ispiranja za procjenu inducirano napadnog kuta prilikom računanja cirkulacije  $\Gamma$ . Iz prve i druge točke u beskonačnost se protežu vrtložne niti slobodnog vrtloga i one sa segmentom vezanog vrtloga čine  $\Pi$  vrtlog. Na slici 4.2. je prikazano krilo podijeljeno na segmente s točkama koje definiraju određeni segment.



Slika 4.1: Krilo diskretizirano na  $\Pi$  segmente

Za izračun brzine ispiranja u evaluacijskoj točki se se koristi brzina koju induciraju vrtložne niti slobodnog vrtloga te, kako bi se mogla analizirati krila sa strijelom, i inducirana brzina vezanog vrtloga. Smjer slobodnih vrtložnih niti je postavljen tako da budu kolinearni s brzinom iz beskonačnosti

#### 4.2.1. Intenzitet vezanog vrtloga i inducirane brzine

Aerodinamička sila se određuje po trodimenzionalnom Kutta-Žukovski teoremu koji je dan izrazom (4.1).

$$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{V} \times \Gamma) \quad (4.1)$$

Za pojedinačni segment izraz (4.1) se može prikazati kao:

$$d\mathbf{F}_i = \rho\Gamma_i\mathbf{V}_{tot_i} \times d\mathbf{l}_i. \quad (4.2)$$

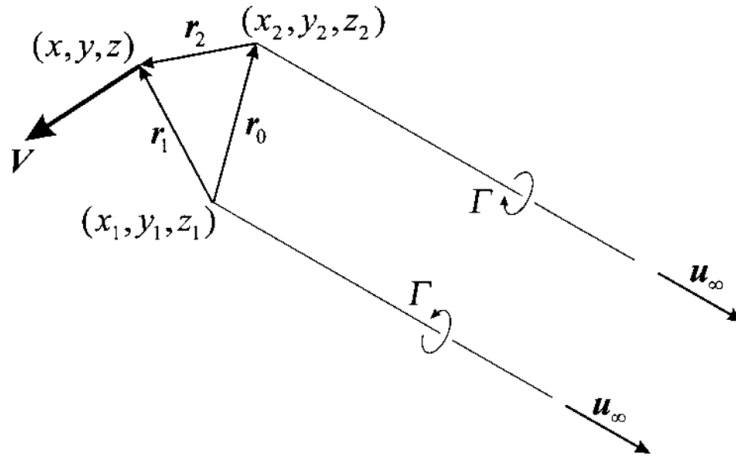
Potrebno je odrediti cirkulaciju  $\Gamma$  i rezultantnu brzinu  $\mathbf{V}_{tot}$ . Brzina  $\mathbf{V}_{tot}$  određuje se zbrojem brzine iz beskonačnosti  $\mathbf{V}_\infty$  i inducirane brzine  $\mathbf{V}_{ind}$ .

$$\mathbf{V}_{tot_i} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_{ind_i} \quad (4.3)$$

Inducirana brzina koju vrtlog  $\Pi$  inducira u određenoj točki je dana izrazom (4.4).

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{u}_\infty \times \mathbf{r}_2}{r_2(r_2 - \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}_2)} + \frac{(r_1 + r_2)\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_2}{r_1r_2(r_1r_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)} - \frac{\mathbf{u}_\infty \times \mathbf{r}_1}{r_1(r_1 - \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}_1)} \right] \quad (4.4)$$

Na slici 4.2 je prikazana inducirana brzina u proizvoljnoj točki.



Slika 4.2: Inducirana brzina u točki (x,y,z)

Bezdimenzijski oblik jednadžbe (4.4) je dan u izrazu (4.5).

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{c}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{u}_\infty \times \mathbf{r}_{i2j}}{r_{i2j}(r_{i2j} - \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}_{i2j})} + \delta_{ij} \frac{(r_{i1j} + r_{i2j})\mathbf{r}_{i2j} \times \mathbf{r}_{i2j}}{r_{i1j}r_{i2j}(r_{i1j}r_{i2j} + \mathbf{r}_{i1j} \cdot \mathbf{r}_{i2j})} - \frac{\mathbf{u}_\infty \times \mathbf{r}_{i1j}}{r_{i1j}(r_{i1j} - \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}_{i1j})} \right] \quad (4.5)$$

U izrazu (4.5)  $\mathbf{v}_{ij}$  je inducirana brzina koju  $\Pi$  vrtlog  $i$  inducira u evaluacijskoj točki elementa  $j$ . Kada se sumiraju sve brzine koje induciraju  $j$  elementi određuje se lokalna brzina na  $\Pi$  vrtlogu  $i$ .

$$\mathbf{V}_{tot_i} = \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j \mathbf{v}_{ji}}{c_j} \quad (4.6)$$

Iz izraza (4.2) i (4.6) dobiva se izraz aerodinamičke sile za element  $i$ :

$$d\mathbf{F}_i = \rho \Gamma_i \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j \mathbf{v}_{ji}}{c_j} \right) \times d\mathbf{l}_i \quad (4.7)$$

Izraz za silu  $d\mathbf{F}_i$  preko koeficijenta uzgona  $C_{L_i}$  je dan u izrazu (4.8).

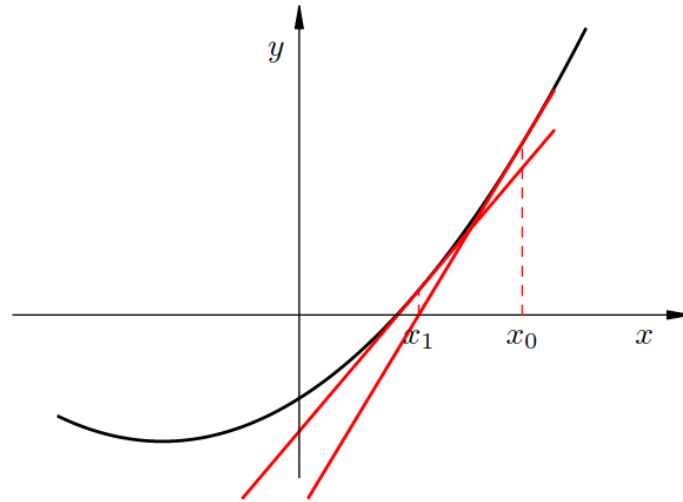
$$|d\mathbf{F}_i| = \frac{1}{2} \rho V_{tot_i}^2 C_{L_i}(\alpha_i, \delta_i) A_i, \quad V_{tot_i} = \left| \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \right| \quad (4.8)$$

Ovakav način uvođenja koeficijenta uzgona  $C_{L_i}$  omogućuje korištenje metode i kada ne vrijedi linearna ovisnost između uzgona i napadnog kuta te omogućuje analizu s upravljačkim površinama.

Dolazi se do nelinearnog sustava jednadžbi kojima je definiran model, sustav je dan u izrazu (4.9).

$$2 \left| \Gamma_i \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \right| - V_{tot_i}^2 C_{L_i}(\alpha_i, \delta_i) A_i = 0 \quad (4.9)$$

Postoje brojne metode za rješavanje nelinearnih sustava jednadžbi, a ovdje se koristi Newtonova metoda. Princip metode se može prikazati na jednostavnom slučaju funkcije s jednom varijablom. Pretpostavi se da je rješenje  $x_n$ , tada se za taj  $x_n$  računa derivacija funkcije te se provlači pravac kroz točku  $f(x_n)$  te se kao novo rješenje  $x_{n+1}$  uzima nultočka pravca. Iteracijskim postupkom metoda vrlo brzo konvergira prema rezultatu. Na slici 4.3 prikazane su prve dvije iteracije.



Slika 4.3: Newtonova metoda za funkciju s jednom varijablom

Za određivanje  $x_{n+1}$  koristi se jednažba:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoda ne konvergira globalno ako postoje lokalni ekstremi, ali konvergira jako brzo kada ne postoje lokalni ekstremi. Cirkulacija oko konačnog krila nema lokalnih ekstrema te je metoda prikladna za korištenje.

Sustav prilagođen za rješavanje Newtonovom metodom dan je u izrazu (4.10).

$$f_i(\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{R}$$

$$f_i(\mathbf{\Gamma}) = 2 \left| \Gamma_i \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times \mathbf{dl}_i \right| - V_{tot_i}^2 C_{L_i}(\alpha_i, \delta_i) A_i \quad (4.10)$$

Potrebno je pronaći vektor  $\mathbf{\Gamma}$  uz koji će vektor reziduala  $\mathbf{R}$  biti nulvektor. Određivanje započinje pretpostavkom za  $\mathbf{\Gamma}$  i korištenjem Newtonove korekcijske jednažbe iteracijskim postupkom se približava točnom rezultatu.

$$[\mathbf{J}] \Delta \mathbf{\Gamma} = -\mathbf{R}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma} + \Omega \Delta \mathbf{\Gamma}$$

$\Omega$  je relaksacijski faktor, a  $[\mathbf{J}]$  je Jacobijeva matrica definirana prema:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \Gamma_j}.$$

$$J_{ij} = \delta_{ij} 2|\mathbf{W}_i| + \frac{2\mathbf{W}_i \cdot (\mathbf{v}_{ji} \times d\mathbf{l}_i)}{|\mathbf{W}_i|} \Gamma_i - V_{toti}^2 A_i \frac{\partial C_{L_i}}{\partial \alpha_i} \frac{V_{a_i}(\mathbf{v}_{ji} \cdot \mathbf{u}_{n_i}) - V_{n_i}(\mathbf{v}_{ji} \cdot \mathbf{u}_{a_i})}{V_{a_i}^2 + V_{n_i}^2}, \quad (4.11)$$

$$- 2A_i C_{L_i}(\alpha_i, \delta_i)(\mathbf{V}_{toti} \cdot \mathbf{v}_{ji})$$

gdje su  $\mathbf{W}_i, V_{a_i}$  i  $V_{n_i}$  definirani izrazima (4.12), (4.13) i 4.14:

$$\mathbf{W}_i = \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \quad (4.12)$$

$$V_{a_i} = \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \cdot \mathbf{u}_{a_i} \quad (4.13)$$

$$V_{n_i} = \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \cdot \mathbf{u}_{n_i}. \quad (4.14)$$

Pogađanje prvog  $\Gamma$  može se olakšati korištenjem lineariziranog oblika:

$$\frac{2}{A_i \frac{\partial C_{L_i}}{\partial \alpha_i}} |\Gamma_i(\mathbf{V}_\infty \times d\mathbf{l}_i) - V_\infty \sum_{j=1}^N \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \cdot \mathbf{u}_{n_i}| = V_\infty (\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{u}_{n_i} - \alpha_{L0_i}), \quad (4.15)$$

no neće biti potrebno jer će se u ovoj analizi kao početni  $\Gamma$  koristiti cirkulacija dobivena metodom konačnih volumena.

### 4.2.2. Određivanje aerodinamičke sile i momenta

Nakon određivanja  $\Gamma_i$  svakog segmenta određuju se sile na svakom segmentu te se njihovim zbrajanjem može odrediti rezultantna sila.

$$\mathbf{F} = \rho \sum_{i=1}^n \left[ \Gamma_i \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \right]. \quad (4.16)$$

Aerodinamički moment oko težišta se računa sljedećim izrazom:

$$\mathbf{M} = \rho \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \left[ \Gamma_i \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \right] + \delta \mathbf{M}_i. \quad (4.17)$$



Uz pretpostavku da je  $C_{M_i}$  konstantan na svakom segmentu,  $\delta\mathbf{M}_i$  se računa po izrazu:

$$\delta\mathbf{M}_i = -\frac{1}{2}\rho V_{tot_i}^2 C_{M_i} A_i \mathbf{u}_{s_i}, \quad (4.18)$$

gdje je  $\mathbf{u}_{s_i}$  jedinični vektor u smjeru raspona:

$$\mathbf{u}_{s_i} = \mathbf{u}_{a_i} \times \mathbf{u}_{n_i}. \quad (4.19)$$

### 4.3. Hermitska interpolacija radijalnim baznim funkcijama

Da bi se interpolirali višedimenzionalni raspršeni podaci razvijena je metoda interpolacije radijalnim baznim funkcijama. Prikladna je za interpolaciju takvih podataka jer se funkcija udaljenosti računa između svake točke podataka i njezinih susjeda, a jedino ograničenje je da dvije točke ne smiju biti iste te nema dodatnih ograničenja na njihov raspored.

#### 4.3.1. Osnovni koncept metode

Radijalna funkcija je funkcija  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  čija vrijednost ovisi samo o magnitudi jednog argumenata. Na primjer  $g(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|) = \phi(r)$ , gdje je  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  i  $r$  je duljina  $\mathbf{x}$ . Cilj je odrediti interpolant  $s(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  koji zadovoljava interpolacijske uvjete:

$$s(\mathbf{x}_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.20)$$

Interpolant radijalne bazne funkcije  $s(\mathbf{x}_i)$  je konveksna kombinacija radijalnih baznih funkcija  $\phi(\mathbf{x})$ .

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad (4.21)$$

Iz uvjeta (4.20) slijedi:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.22)$$

Izraz (4.22) se može zapisati u sljedećem matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\|) \\ \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_2\|) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n\|) & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_n\|) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

ili skraćeno:

$$\Phi \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}. \quad (4.24)$$

Očito je da je  $n \times n$  matrica  $\Phi$  simetrična te kako bi izraz (4.23) imao jedinstveno rješenje potrebno je da matrica  $\Phi$  bude nesingularna.

### 4.3.2. Polinomni članovi

Korisno je u interpolaciju dodati polinomne članove nižeg reda tako da interpolant (4.21) prijelazi u sljedeći oblik:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + \sum_{j=1}^m \chi_j p_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

Zadaje se i dodatno ograničenje [7]:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_j(\mathbf{x}_i) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.26)$$

Uz navedena ograničenja na interpolacijske uvjete i uvjete ortogonalnosti polinoma (4.26) dolazi se do sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} \Phi & P \\ P^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

što se može zapisati i kao:

$$\Phi \boldsymbol{\lambda} + P \boldsymbol{\chi} = \mathbf{f}, \quad P^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}. \quad (4.28)$$

Neki od klasičnih radijalnih baznih funkcija su prikazane u tablici 4.1.

Tablica 4.1: Klasične radijalne funkcije

| Radijalna bazna funkcija | $\phi(r)$                    | Parametri          | Red         |
|--------------------------|------------------------------|--------------------|-------------|
| Gaussove                 | $e^{-(cr)^2}$                | $c > 0$            | 0           |
| Poliharmonični spline    | $r^{2k-1}$                   | $k \in \mathbb{N}$ | $m = k$     |
|                          | $r^{2k} \log(r)$             | $k \in \mathbb{N}$ | $m = k + 1$ |
| Multikvadratik           | $\sqrt{r^2 + c^2}$           | $c > 0$            | 1           |
| Inverzni multikvadratik  | $\frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$ | $c > 0$            | 0           |
| Inverzni kvadratik       | $\frac{1}{r^2 + c^2}$        | $c > 0$            | 0           |

## 4.4. Metoda konačnih volumena

U ovom dijelu rada prezentirat će se osnove metode konačnih volumena koja će se koristiti za 3D analizu krila i 2D analizu aeroprofila u viskoznoj struji fluida.

### 4.4.1. Matematički model fluida

Matematički model strujanja fluida definiran je s pet osnovnih zakona: zakon očuvanja mase, količine gibanja, očuvanja energije i drugi zakon termodinamike. Jednadžbe se mogu zapisati u obliku da se entropija pojavljuje samo u drugom zakonu termodinamike pa se on može izostaviti. Zakon očuvanja momenta količine gibanja kao posljedicu ima simetričnost tenzora naprežanja. Obzirom da se razmatra aerodinamika malih Machovih brojeva, fluid se može smatrati nestlačivim pa se i zakon očuvanja energije može izostaviti jer se za nestlačivi fluid može svesti na zakon očuvanja količine gibanja. Tako da je strujanje nestlačivog fluida opisano zakonom očuvanja količine gibanja i zakonom očuvanja mase, jednadžbe tih zakona se nazivaju Navier-Stokesove jednadžbe.

#### Zakon očuvanja mase

Obzirom da je fluid nestlačiv diferencijalna jednadžba glasi:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.29)$$

što u integralnoj formi za kontrolni volumen s fiksnim rubom prelazi u oblik:

$$\int_S v_i n_i dS = 0, \quad (4.30)$$

gdje je  $S$  površina ruba kontrolnog volumena, a sumiranje po ponovljenom indeksu je implicitno.

### Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja za newtonovski fluid u konzervativnoj diferencijalnoj Eulerovoj formi je dan izrazom:

$$\frac{\partial (v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i, \quad (4.31)$$

gdje je  $\nu$  kinematička viskoznost:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4.32)$$

Izraz (4.31) u integralnoj formi za kontrolni volumen s fiksnim rubom prelazi u oblik:

$$\frac{d}{dt} \int_{KV} v_i dKV + \int_S v_i v_j n_j dS = - \int_{KV} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dKV + \int_S \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j dS + \int_{KV} f_i dKV \quad (4.33)$$

#### 4.4.2. Modeliranje turbulencije

Za opis turbulencije u strujanju koristi se Reynoldsov broj  $Re$  koji je definiran kao omjer inercijskih sila i viskoznih sila.

##### Model turbulencije $k - \omega$ SST

Za rješavanje nekih problema u kojima se pojavljuje turbulencija prikladno je koristiti vremenski osrednjene jednadžbe gibanja fluida RANS (eng. *Reynolds-averaged Navier Stokes*) gdje se koristi statistički vremenski osrednjeno polje brzine i oscilirajuće polje brzine. Diferencijalni oblik osrednjenih jednadžbi zakona očuvanja mase i količine gibanja glase:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho v'_i v'_j} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Član  $\rho \bar{v}'_i v'_j$  opisuje turbulentnu difuziju količine gibanja. Za njegovo određivanje se koristi Boussiesqova hipoteza koja stvara analogiju s Newtonovim modelom viskoznosti, a za Reynoldsova naprezanja je pretpostavljen linearni gradijent brzine:

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} \quad (4.35)$$

U izrazu (4.35)  $k$  je kinetička energija turbulencije, a  $\mu_t$  je turbulentna viskoznost. Takvim pristupom je za modeliranje turbulencije potrebno odrediti turbulentnu viskoznost.

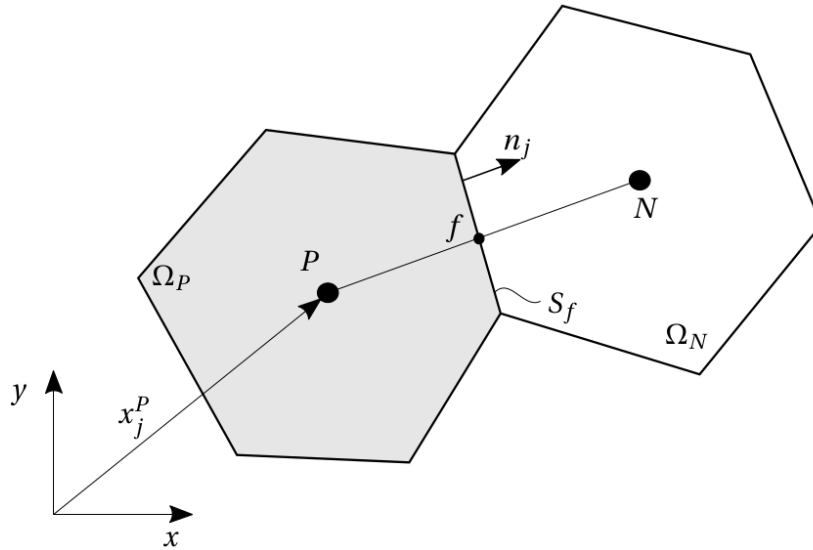
$k-\omega$  model turbulencije koristi se za zatvaranje sustava jednadžbi osrednjeg strujanja fluida. Obuhvaća dvije jednadžbe, jednadžbu transporta kinetičke energije  $k$  i jednadžbu specifične brzine disipacije turbulencije  $\omega$ . Modelira efekte difuzije, transport efekata turbulencije osrednjenim stujanjem te nastajanje i nestajanje turbulencije. Izrazom (4.36) je definirana transportna jednadžba kinetičke energije turbulencije  $k$ , a izrazom (4.37) specifična brzina disipacije turbulencije  $\omega$  [8].

$$\frac{D}{Dt}(\rho k) = \nabla \cdot (\rho D_k \nabla k) + \rho G - \frac{2}{3} \rho k (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \beta^* \omega k + S_k \quad (4.36)$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho \omega) = \nabla \cdot (\rho D_\omega \nabla \omega) + \frac{\rho \gamma G}{\nu} - \frac{2}{3} \rho \gamma \omega (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \beta \omega^2 - \rho (F_1 - 1) C D_{k\omega} + S_\omega \quad (4.37)$$

### 4.4.3. Diskretizacija modela

Jednadžbe dane matematičkim modelom strujanja za većinu slučajeva su nerješive analitički te se za njihovo rješavanje koriste razne numeričke metode od kojih je jedna metoda konačnih volumena. Da bi se primjenila, potrebno je kontinuum domene diskretizirati s određenim brojem konačnih volumena. Nakon diskretizacije prostora potrebno je diskretizirati i jednadžbe tako da integralne jednadžbe cijele domene prelaze u sustav algebarskih jednadžbi za koje su rješenja približna vrijednost početnih nediskretiziranih jednadžbi. Na slici 4.4 je prikazan primjer dva konačna volumena.



Slika 4.4: Primjer dva konačna volumena [9]

Na svaki konačni ili kontrolni volumen primjenjuje se integralni oblik jednadžbi i vrijednost srednje fizikalne veličine koja se uzima kao vrijednost u središnjem čvoru. Na primjer za fizikalnu veličinu  $\phi$  u konačnom volumenu  $KV$  se računa njezina srednja vrijednost:

$$\int_{KV} \phi dKV = \bar{\phi} KV_P, \quad (4.38)$$

te ako su težište i čvor volumena koincidiraju za osnovnu metodu konačnih volumena vrijedit će, do na grešku drugog reda:

$$\phi_P = \bar{\phi}. \quad (4.39)$$

Koristeći gornji izraz aproksimacija volumnog integrala u konačnom volumenu se može zapisati kao:

$$\int_{KV} \phi dKV = \bar{\phi} KV_P. \quad (4.40)$$

Ovakva aproksimacija je točna ako je raspodjela fizikalne veličine linearna, a ako nije postojat će greška koja će se, smanjivanjem konačnog volumena, smanjivati s redom metode. Takav postupak se može provesti i na ostalim članovima transportne jednadžbe (4.41).

$$\frac{d}{dt} \int_{KVP} \rho \phi dKV = - \int_{\partial S_P} \left( \rho \phi v_j - D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{KVP} S_\phi dKV \quad (4.41)$$

### Nestacionarni član

Koristeći izraz (4.40) član vremenske promjene aproksimiran je na sljedeći način:

$$\frac{d}{dt} \int_{KV_P} \rho \phi dKV = \rho \frac{\partial \phi_P}{\partial t} KV_P. \quad (4.42)$$

### Konvektivni i difuzijski član

Protok fizikalne veličine kroz rub konačnog volumena je definiran konvektivnim i difuzijskim članom. Koristeći integralni teorem srednje vrijednosti konvektivni i difuzijski transport fizikalne veličine  $\phi$  kroz rub volumena  $S_f$  je aproksimiran na sljedeći način:

$$\int_{\partial S_P} \left( \rho \phi v_j - D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \left[ \rho (\overline{v_i n_i \phi})_{S_f} - D_\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{S_f} \right] S_f \quad (4.43)$$

U izrazu (4.43) potrebno je aproksimirati iznos fizikalne veličine  $\phi$  u točki  $f$  na rubu između konačnih volumena kao što je prikazano na slici 4.4. tako da izraz (4.43) prelazi u oblik:

$$\left[ \rho v_{n_f} \phi_f - D_\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_f \right] S_f \quad (4.44)$$

### Izvorski član

$$\int_{KV_P} S_\phi dKV = S_{\phi_P} KV_P \quad (4.45)$$

#### 4.4.4. Numeričke sheme za konveksijski i difuzijski transport

Numeričke sheme povezuju vrijednost fizikalnih veličina centra konačnog volumena i vrijednost veličine na rubu konačnog volumena [10].

#### Uzvodna shema za konvekciju

Uzvodna shema (eng. *upwind*) je prvog reda točnosti i bezuvjetno je stabilna. Prema njoj se za vrijednost fizikalne veličine na rubu uzima vrijednost iz centra konačnog

volumena koji se nalazi uzvodno kao što je pokazano izrazom (4.46).

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{za } v_n \geq 0 \\ \phi_N & \text{za } v_n < 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Uzvodna shema uzrokuje numeričku difuziju što smanjuje njenu točnost.

### Linearna uzvodna shema za konvekciju

Linearna uzvodna shema (eng. *linear upwind*) proširuje uzvodnu shemu tako da se za određivanje vrijednosti na rubu koristi i informacija o gradijentu fizikalne veličine u središtu uzvodnog volumena te se preko vrijednosti fizikalne veličine u centru i njezinog gradijenta određuje vrijednost na rubu konačnog volumena kao što je to dano u izrazu (4.47).

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P + \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_P |x_j^f - x_j^P| & \text{Za } v_n \geq 0 \\ \phi_N + \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_N |x_j^f - x_j^N| & \text{Za } v_n < 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

Linearna uzvodna shema se često koristi jer poboljšava točnost, a nema tako stroge zahtjeve po pitanju stabilnosti kao linearna shema koja će biti nestabilna ako je Pelcetov broj veći od dva.

### Shema centralnih diferencijala

Za određivanje gradijenta fizikalne veličine na rubu konačnog volumena, koji su potrebni za modeliranje difuzijskog toka fizikalne veličine koristi se shema centralnih diferencijala

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_f = \frac{\phi_N - \phi_P}{|x_j^N - x_j^P|} \quad (4.48)$$



# 5 | Numerička Analiza

U ovom poglavlju bit će dan pregled numeričke analize, ulazne postavke i pripreme proračune te njihovi rezultati.

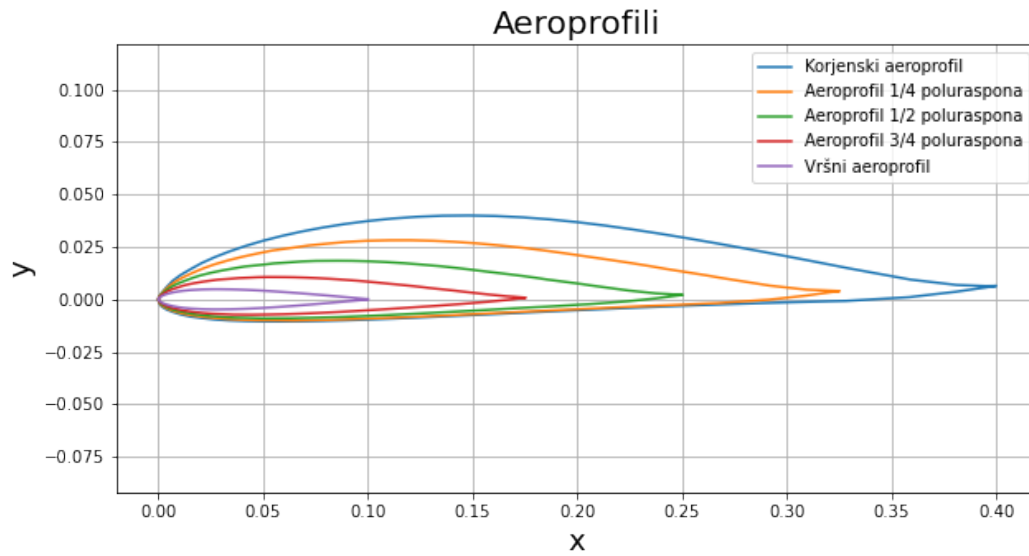
## 5.1. 3D numerička analiza metodom konačnih volumena

Za 3D numeričku analizu krila metodom konačnih volumena koristi se softverski paket *OpenFoam*[11]. Za proračun je potrebno generirati gemoetriju, proračunsku mrežu konačnih volumena, te postaviti odgovarajuće rubne uvjete na rubu domene strujanja. Proračun se koristi kako bi se dobilo polje brzine, i tlaka iz kojeg se vrši ekstrakcija cirkulacije oko krila. Za taj potupak je pogodno bilo koje vremenski osrednjeno volumno polje, ali se u ovom slučaju koristi *RANS* jer zahtjeva najmanje računalne snage, a u ovom slučaju kada se to polje koristi samo za ekstrakciju cirkulacije daje zadovoljavajuću točnost.

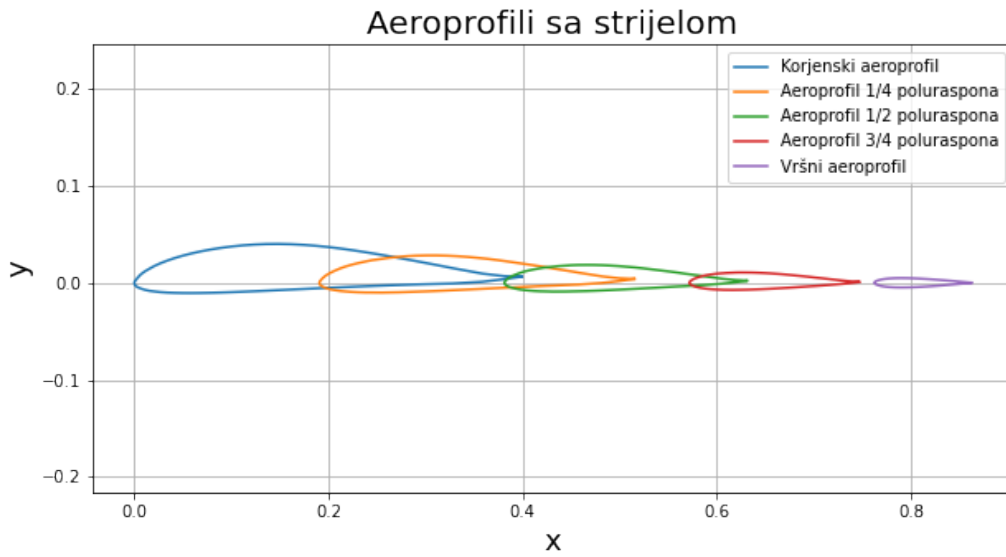
### 5.1.1. Kreiranje geometrije

Geometrija PrandtlID letjelice je dana u [5]. Zadani su aeroprofilu u korijenu i na vrhu krila. Aeroprofilu su linearno interpolirani. Na dvadeset sekcija je dano ukupno uvijanje krila, zbroj aerodinamičkog i geometrijskog uvijanja. Potrebno je odrediti aerodinamičko uvijanje aeroprofila na danim sekcijama te tako iz danog kuta uvijanja odrediti geometrijski kut uvijanja krila. Nakon određivanja geometrijskog kuta uvijanja i inter-

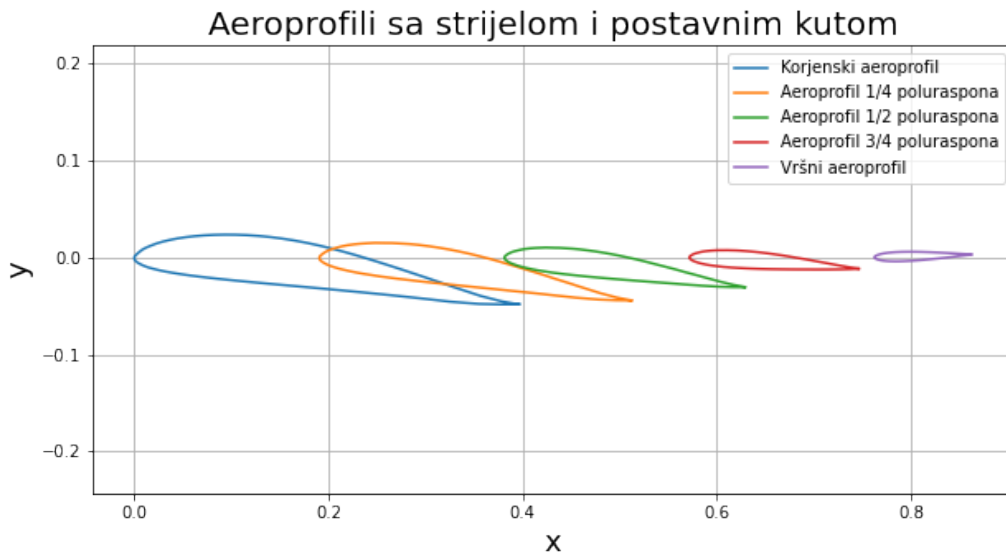
poliranja aeroprofila po sekcijama krilo je definirano. Na slici 5.1 su prikazani aeroprofil korijena, jedne četvrtine poluraspona, polovice poluraspona tri četvrtine poluraspona, te vršni aeroprofil. Na slici 5.2 su prikazani s danom strijelom, a na slici 5.3 položaj nakon postavljanja na kut geometrijskog uvijanja.



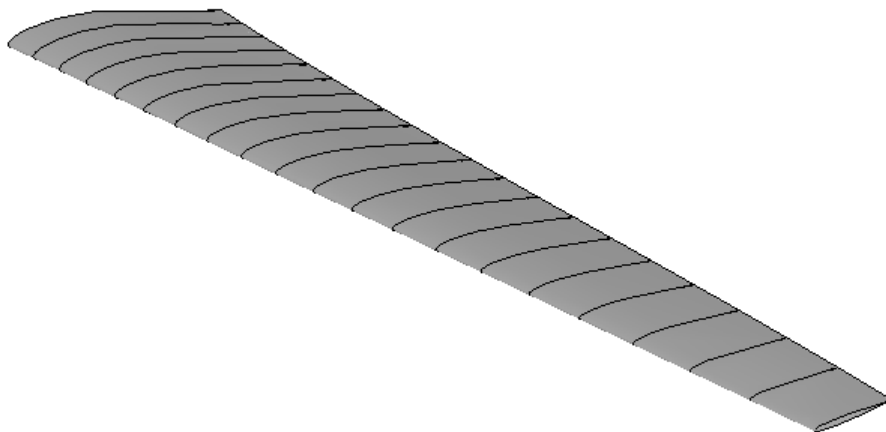
Slika 5.1: Aeroprofil različiteh sekcija



Slika 5.2: Aeroprofilni različnih sekcija sa strijelom

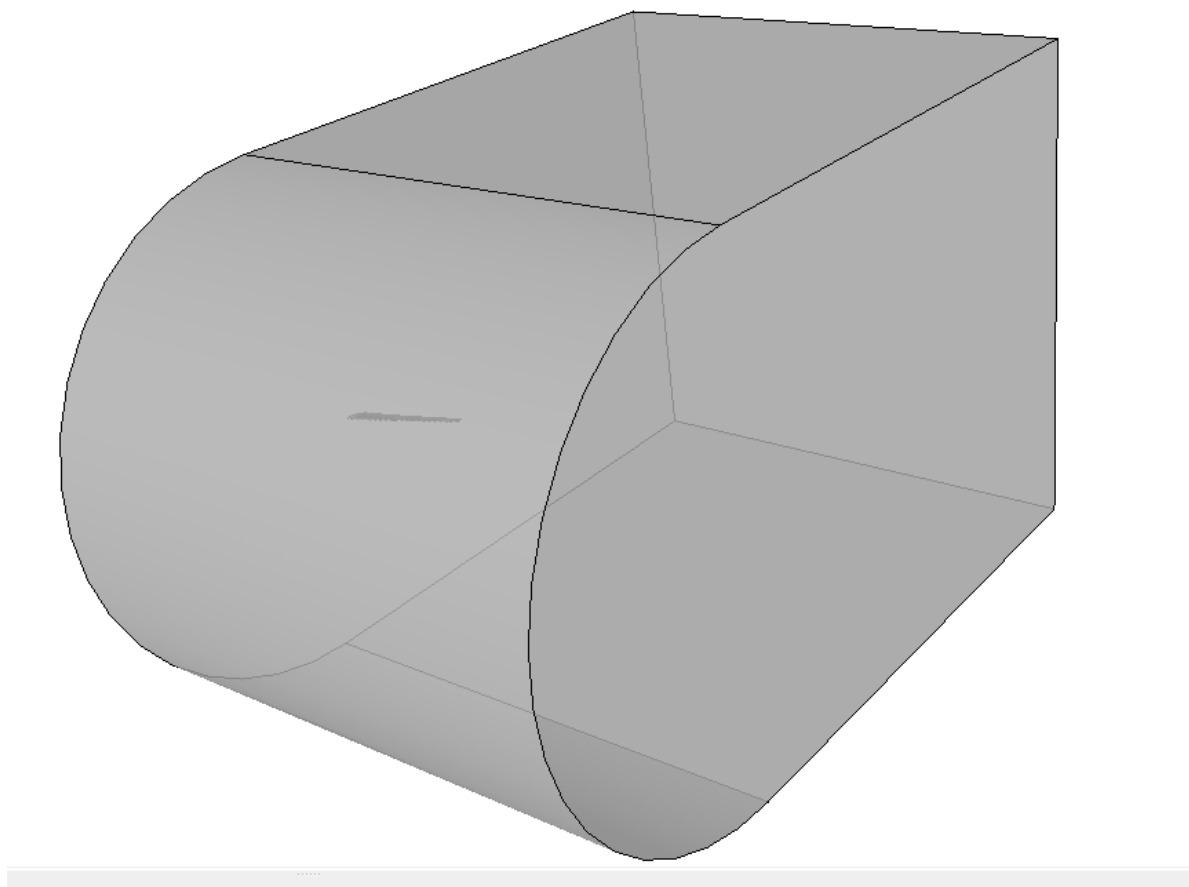


Slika 5.3: Aeroprofilni različnih sekcija sa strijelom i postavnim kutom



Slika 5.4: 3D geometrija krila

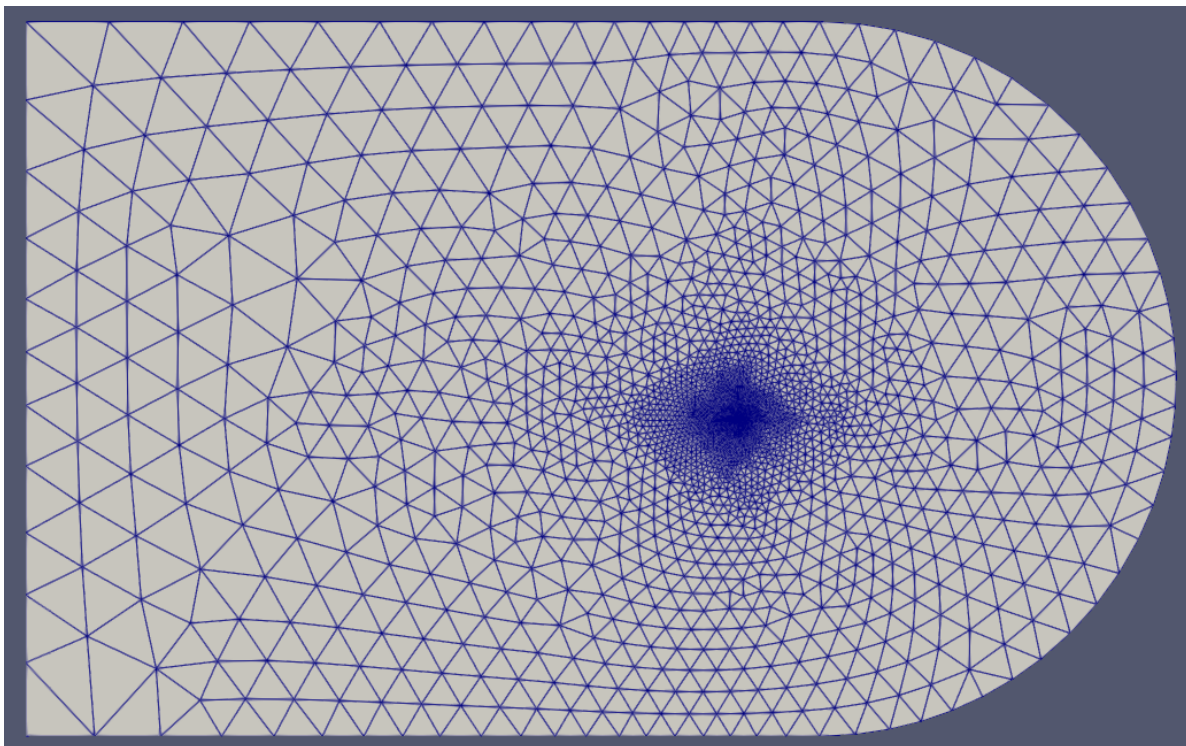
Generiranje 3D modela geometrije se provodi u programskom paketu *SALOME* koristeći modul *SHAPER* te je generirano krilo prikazano na slici 5.4. Generirana je i domena za proračun koja je prikazana na slici 5.5.



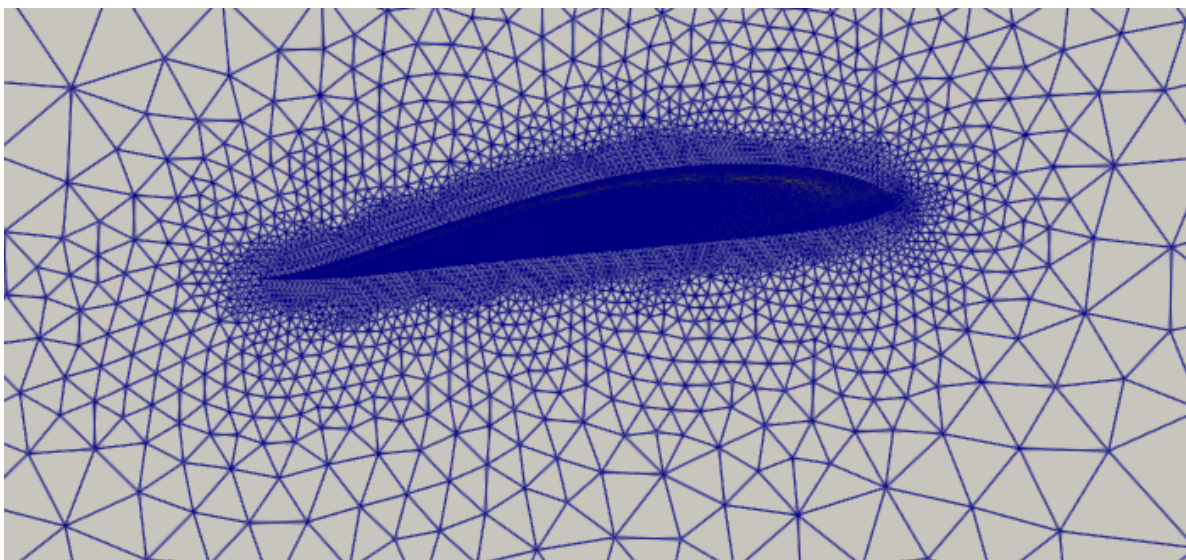
Slika 5.5: Domena za proračun metodom konačnih volumena

### 5.1.2. Kreiranje mreže

Mreža za proračun metodom konačnih volumena je generirana u *MESH* modulu *SALOME* programskog paketa te je kreirana nestrukturirana mreža korištenjem *NETGEN* mesh generatora koja se sastoji od devet milijuna konačnih volumena. Na slici 5.6 je prikazana cijela proračunska mreža, dok je na slici 5.7 prikazana proračunska mreža oko krila.



Slika 5.6: Proračunska mreža



Slika 5.7: Proračunska mreža oko krila

### 5.1.3. Rubni uvjeti

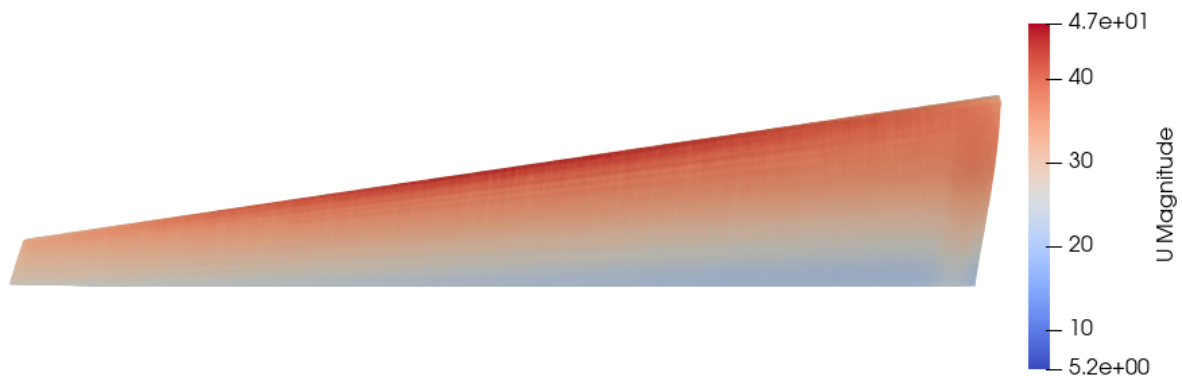
Obzirom da se pri proračunu proučava ograničena domena strujanja fluida, potrebno je na njezinim rubovima postaviti rubne uvjete. U tablici 5.1 su dani rubni uvjeti na rubu domene za proračun metodom konačnih volumena.

Tablica 5.1: Rubni uvjeti 3D proračuna

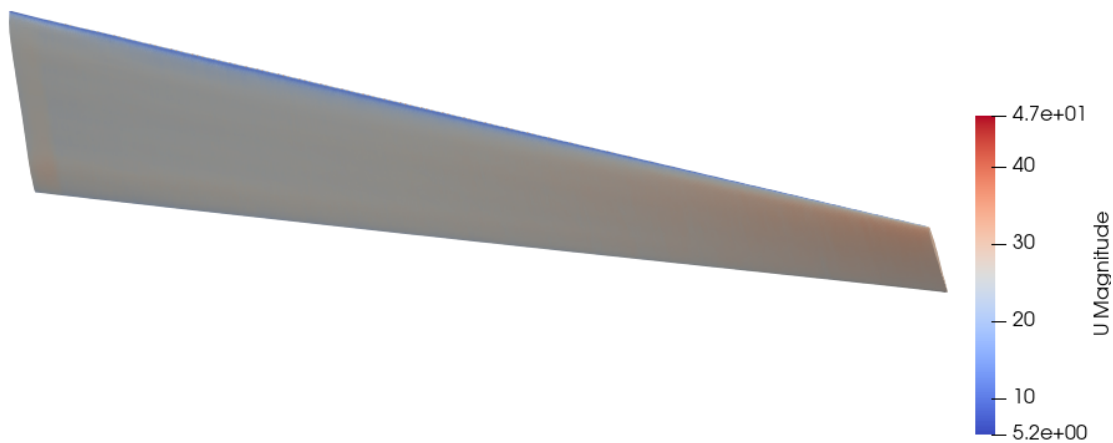
|              | ulaz/bočna strane         | izlaz                     | krilo                           | ravnina simetrije |
|--------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------------|-------------------|
| $U$          | <i>freestreamVelocity</i> | <i>freestreamVelocity</i> | <i>noSlip</i>                   | <i>symmetry</i>   |
| $p$          | <i>freestreamPressure</i> | <i>freestreamPressure</i> | <i>zeroGradient</i>             | <i>symmetry</i>   |
| $k$          | <i>inletOutlet</i>        | <i>inletOutlet</i>        | <i>kqRWallFunction</i>          | <i>symmetry</i>   |
| $\omega$     | <i>inletOutlet</i>        | <i>inletOutlet</i>        | <i>omegaWallFunction</i>        | <i>symmetry</i>   |
| $\text{nut}$ | <i>calculated</i>         | <i>calculated</i>         | <i>nutUSpaldingWallFunction</i> | <i>symmetry</i>   |

### 5.1.4. Rezultati 3D proračuna

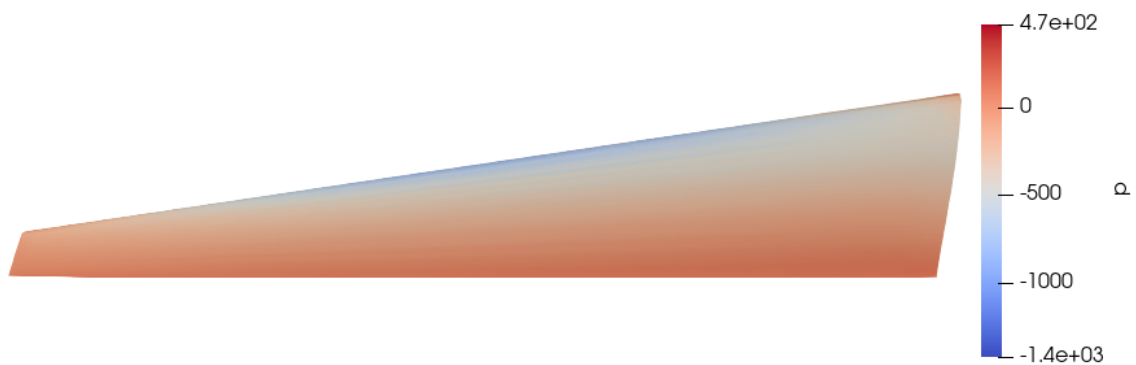
Za proračun se koristi solver *simpleFoam* te proračun konvergira nakon četrsto iteracija. Na slikama 5.8 i 5.9 je prikazana magnituda brzine na donjaci i gornjaci, dok je na slikama 5.10 i 5.11 prikazan iznos tlaka gornjaci i donjaci krila.



Slika 5.8: Polje iznosa brzine na gornjaci krila

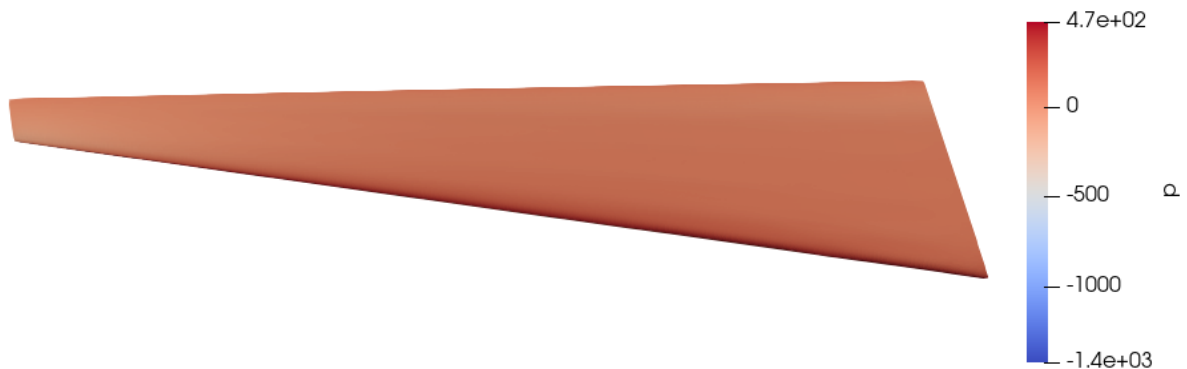


Slika 5.9: Polje iznosa brzine na donjaci krila



Slika 5.10: Polje tlaka na gornjaci





Slika 5.11: Polje tlaka na donjaci

Nakon dobivanja polja brzina i tlaka potrebno je odrediti inducirani otpor prema postupku koji će biti opisan u sljedećem poglavlju.

### 5.1.5. Određivanje inducirano g otpora iz rezultata MKV

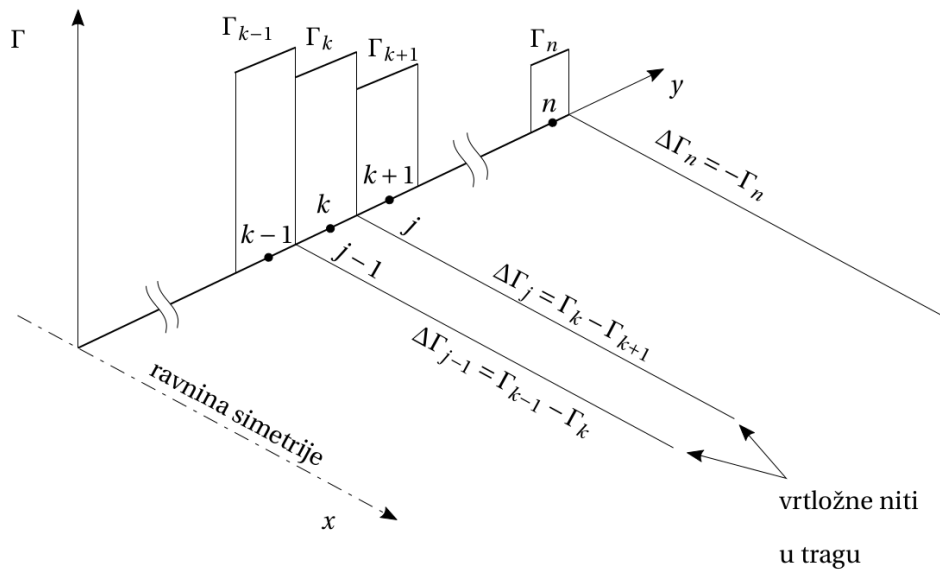
Za određivanje inducirano g otpora iz rezultata proračuna metodom konačnih volumena koristit će se metoda noseće linije [12]. Inače je ta metoda primjenjiva samo na ravna krila bez strijele, ali se u ovom slučaju za izračun cirkulacije oko krila koristi polje brzina iz proračuna metodom konačnih volumena, te će prema *Munkovu teoremu o staggeru* [2] za isti raspored cirkulacije i isti raspon površine različitih oblika dati isti inducirani otpor kao i noseća linija. Time se inducirani otpor za svako krilo kojem se cirkulacija odredi MKV proračunom može računati modelom noseće linije ako se na ravnu noseću liniju istog raspona postavi cirkulacija određena za krilo sa strijelom. Postupak određivanja cirkulacije se svodi na dijeljenje krila na segmente i izračuna uzgona segmenata  $k$  po izrazu:

$$L_k = (\sin \alpha - \cos \alpha) \int_{S_k} \rho n_i dS. \quad (5.1)$$

Prema zakonu Kutta i Žukovskog cirkulacija koja uzrokuje dobiveni uzgon je dana u izrazu (5.2).

$$\Gamma_k = \frac{L_k}{\rho V_\infty b_k} \quad (5.2)$$

Na slici 5.12 je prikazan model noseće linije koji se dobije takvim postupkom.



Slika 5.12: Diskretizacija noseće linije za ekstrakciju cirkulacije [12]

Inducirana brzina koju je potrebno odrediti za dobivanje inducirano otpora određuje se prema izrazu:

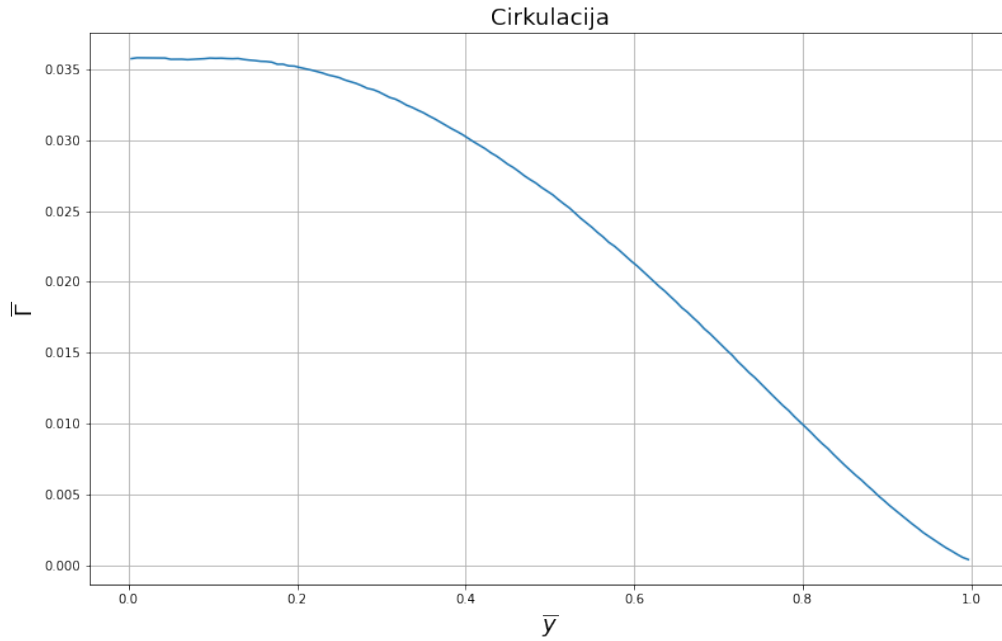
$$w_{i_k} = \sum_{j=0}^n \frac{\Delta\Gamma_j}{4\pi(y_j - y_k)}. \quad (5.3)$$

Koristeći dobivenu induciranu brzinu pomoću izraza (5.3) može se odrediti inducirani otpor prema izrazu (5.4).

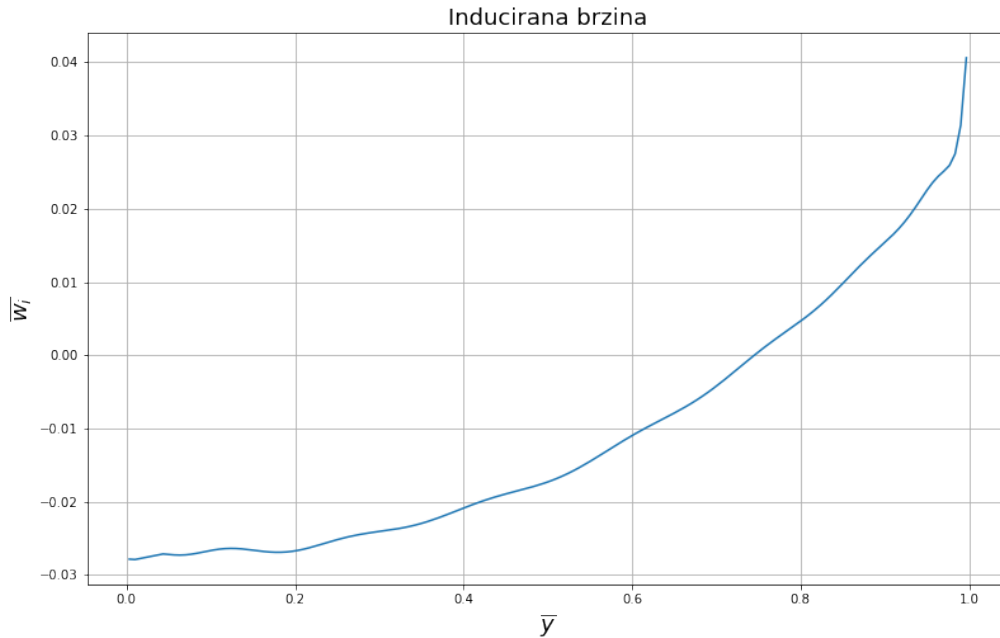
$$C_{D_i} = \frac{2}{V_\infty^2} S_{ref} \sum_{k=1}^n w_{i_k} \Gamma_k \quad (5.4)$$

Za opisanu proceduru se koristi *Python* kod koji je dan u [13] koji se kao skripta pokreće iz sučelja programskog paketa *Paraview*. Na slici 5.13 prikazana je bezdimenzijska cirkulacija dobivena gore navedenim postupkom. Bezdimenzijska cirkulacija je izražena sljedećim izrazom:

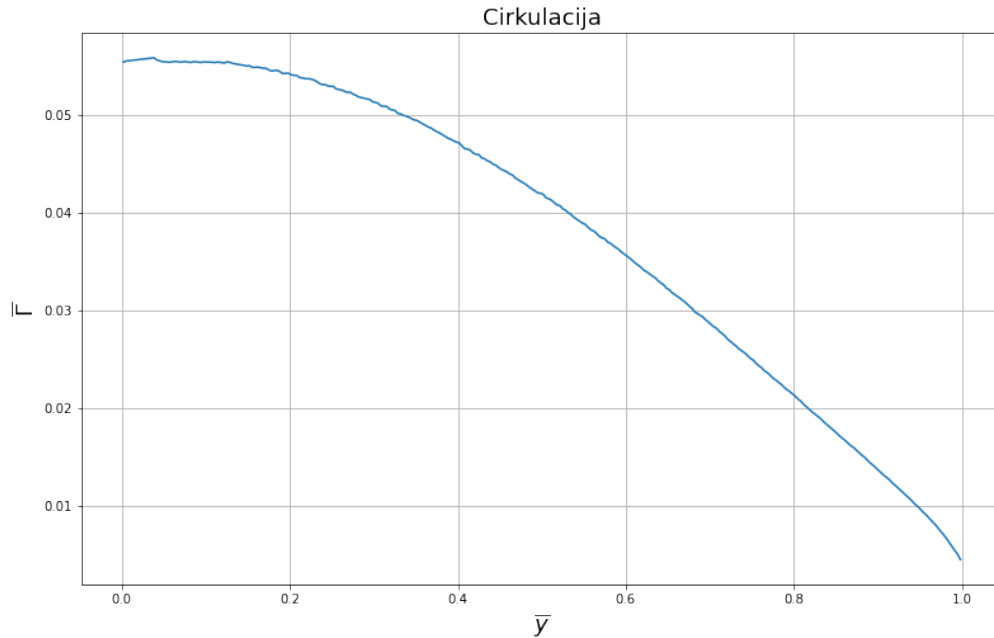
$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{V_\infty b} \quad (5.5)$$

Slika 5.13: Cirkulacija za napadni kut  $0^\circ$ 

Može se uočiti da cirkulacija pri napadnom kutu  $0^\circ$  ima oblik zvonolike raspodjele. Na slici 5.14 je prikazana inducirana brzina određena iz proračuna metodom konačnih volumena te se može uočiti da prati oblik kvadratne funkcije i postaje pozitivna na otprilike 70% raspona.

Slika 5.14: Inducirana brzina za napadni kut  $0^\circ$ 

Na slici 5.15 je prikazana cirkulacija za stujanje oko krila pri napadnom kutu od  $5^\circ$ . Može se uočiti da raspodjela cirkulacije više nije zvonolika te je to jedan od glavnih problema za koji je potrebno pronaći rješenje. Povećanjem napadnog kuta sekcije pri vrhovima krila počinju generirati sve veću cirkulaciju, a time gradijent cirkulacije na vrhu krila više neće biti jednak nuli te se pojavljuje izraženi vrtlog koji će kao posljedicu imati veći inducirani otpor. Na primjer, pri napadnom kutu od  $0^\circ$  koeficijent inducirano otpora iznosi  $C_{D_i} = 0.01225$ , dok se za napadni kut od  $5^\circ$  on značajno povećava te je  $C_{D_i} = 0.01657$ . Osim povećanja inducirano otpora degradacija zvonolike raspodjele će značajno povećati moment savijanja pa smanjenje mase konstrukcije nije moguće jer će krilo u nekim režimima leta biti opterećeno većim momentima savijanja zbog gubitka zvonolike raspodjele cirkulacije.

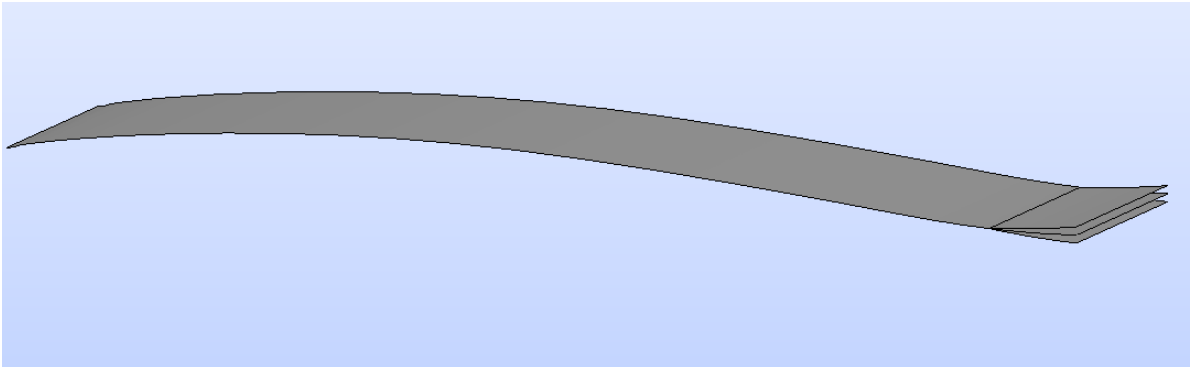
Slika 5.15: Cirkulacija za napadni kut  $5^\circ$ 

## 5.2. 2D proračun aeroprofila

Proračun metodom konačnih volumena za vršni i korjenski aeroprofil će se računati za geometriju aeroprofila bez debljine, iz razloga što proračun oko srednje linije daje vrlo dobre rezultate te je geometrija jednoznačna, dok je opisivanje otklona zakrilca kod aeroprofila s debljinom znatno teže jednoznačno geometrijski opisati.

### 5.2.1. Kreiranje geometrije

Koristeći točke aeroprofila dane u [5] određuje se aeroprofil, zatim se računa srednja linija kroz koju se provlači *spline*. *Spline* se dijeli oko točke kod koje počinje upravljačka površina te se nakon toga upravljačka površina rotira oko te te točke za željeni kut.

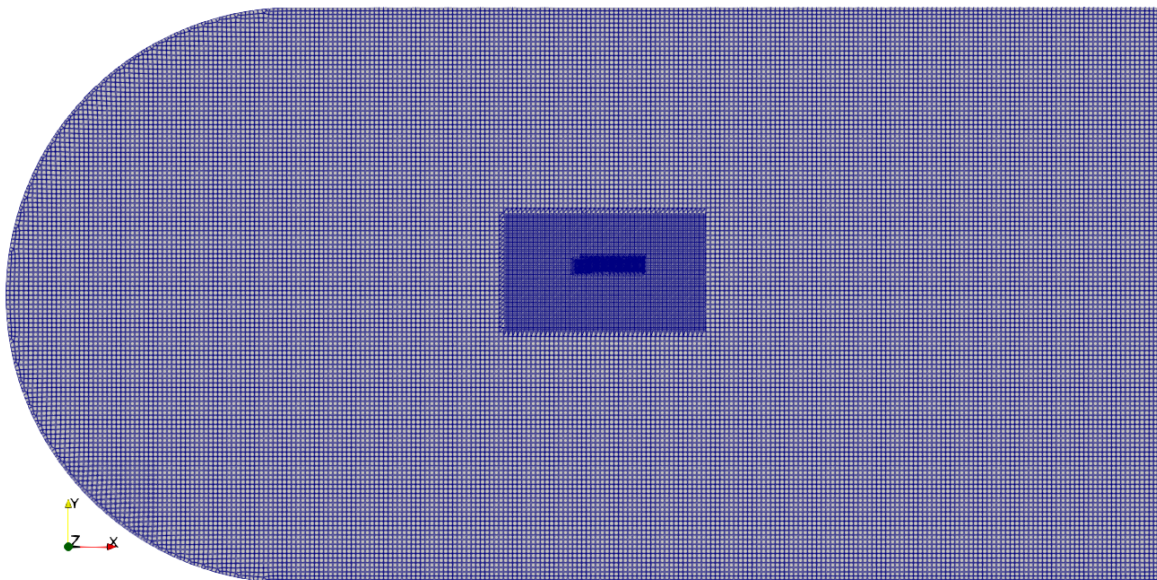


Slika 5.16: Prikaz srednje linije s odklonima upravljačke površine

Generiranje geometrije se vrši u programskom paketu *SALOME*. Postupak je skriptiran te se geometrija eksportira u *fms* formatu koji je najpogodniji za korištenje u *cfMesh* alatu.

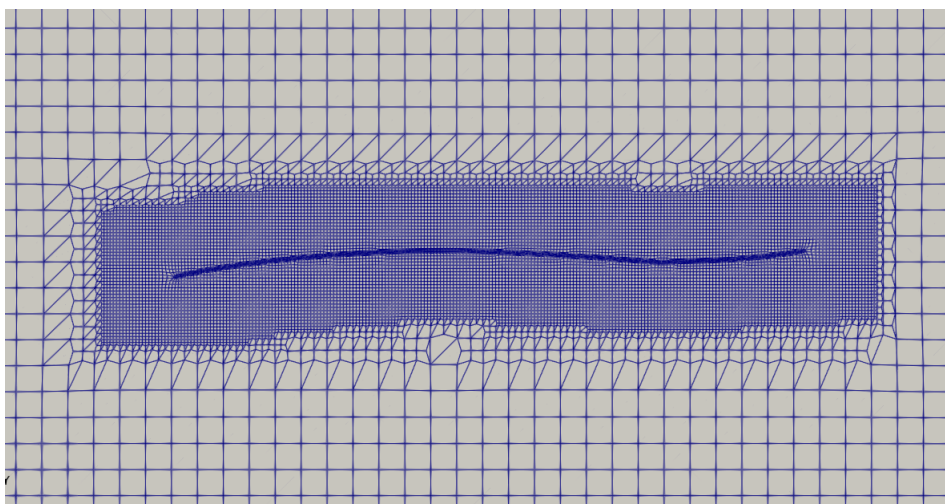
### 5.2.2. Kreiranje mreže

Za kreiranje mreže oko noseće linije aeroprofila koristi se softverski paket *cfMesh*.

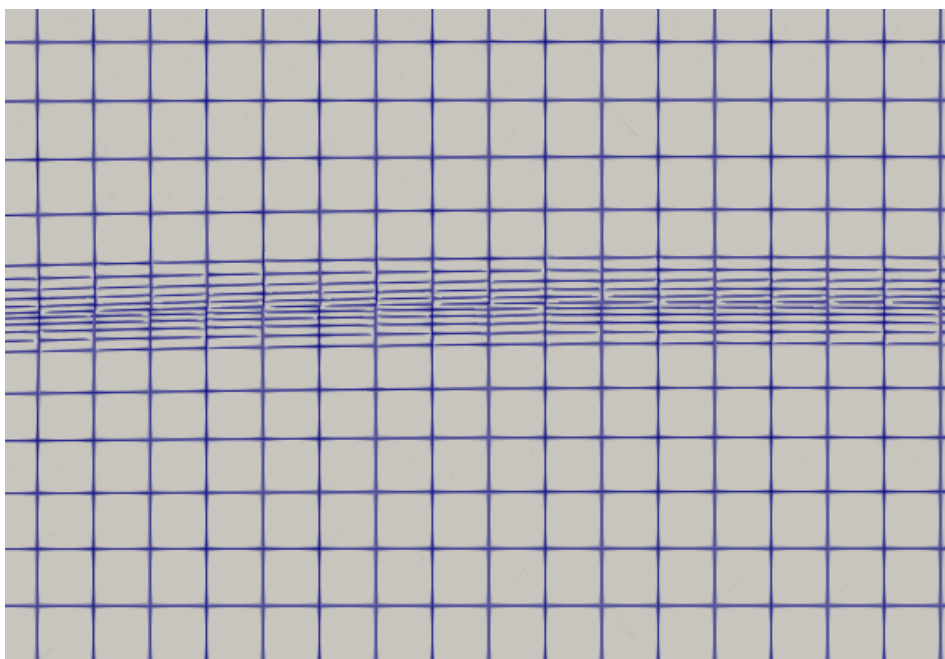


Slika 5.17: Proračunska mreža za 2D proračun metodom konačnih volumena

Mreža je generirana s dvije zone profinjenja i dodatnim profinjenjem uz samu noseću liniju kao što je prikazano na slici 5.19. Na slici 5.18 je prikazana mreža oko noseće linije.



Slika 5.18: Profinjenje proračunske mreže oko aeroprofila



Slika 5.19: Profinjenje mreže uz noseću liniju

Tablica 5.2: Rubni uvjeti 2D proračuna

|       | ulaz                      | izlaz                     | aeroprofil                      | bočne strane |
|-------|---------------------------|---------------------------|---------------------------------|--------------|
| $U$   | <i>freestreamVelocity</i> | <i>freestreamVelocity</i> | <i>noSlip</i>                   | <i>empty</i> |
| $p$   | <i>freestreamPressure</i> | <i>freestreamPressure</i> | <i>zzeroGradient</i>            | <i>empty</i> |
| $nut$ | <i>freestream</i>         | <i>freestream</i>         | <i>nutUSpaldingWallFunction</i> | <i>empty</i> |

### 5.2.3. Rezultati proračuna

Na slici 5.20 je prikazano polje tlaka za napadni kut od  $2^\circ$ , s otklonom  $5^\circ$  upravljačke površine koja je 10% tetive.



Slika 5.20: Polje tlaka oko noseće linije

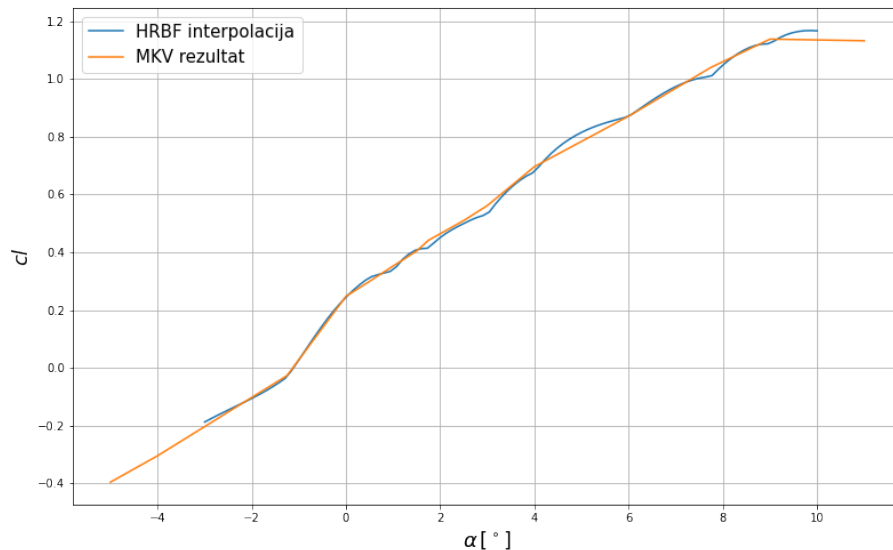
Cijeli postupak od generiranja geometrije, postavljanja proračuna, njihovog pokretanja i ekstrakcije koeficijenata je skriptiran tako da je proračun napravljen za dvjestotinjak različitih konfiguracija napadnog kuta, duljine upravljačke površine i kuta otklona upravljačke površine za korjenski i vršni aeroprofil.

### 5.2.4. Interpolacija HRBF metodom

Za ekstrakciju koeficijenata uzgona, otpora i aerodinamičkog momenta korištena je funkcija *forcecoeffs1* koja je dio programskog paketa *OpenFOAM*. U programskom jeziku *Python* je napisan kod za HRBF interpolacijsku metodu podataka s tri varijable. Tako se dobije interpolacija koja kao ulaz koristi tri varijable: napadni kut, postotak tetive



koji zauzima upraljačka površina i kut otklona upravljačke površine, a vraća koeficijente uzgona, otpora i aerodinamičkog momenta.



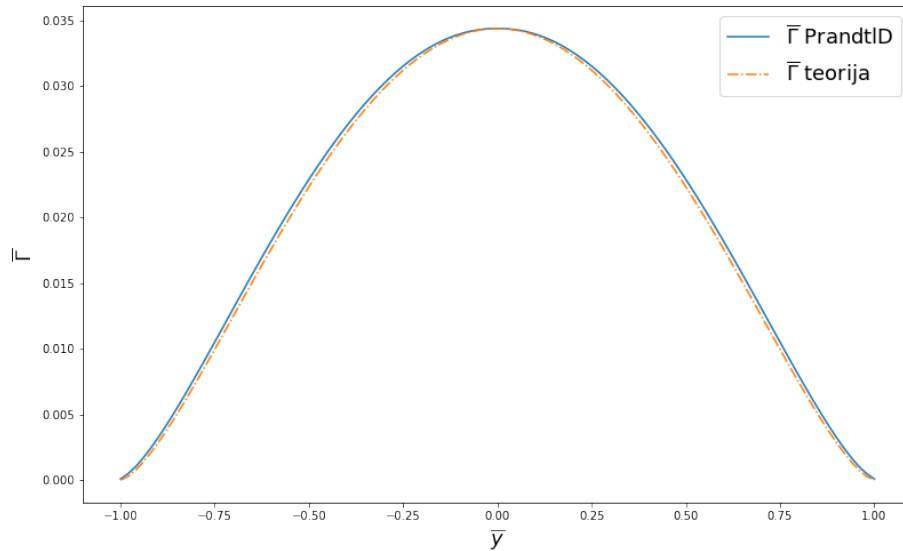
Slika 5.21: Interpolacija koeficijenta uzgona

Na slici 5.21 je prikazana interpolacija koeficijenta uzgona bez otklona upravljačkih površina.

### 5.3. Proračun noseće linije za otklon upravljačkih površina

Dobiveni rezultat cirkulacije za strujanje oko krila i HRBF interpolacija koeficijenata implementirani su u numeričku metodu noseće linije za proizvoljna krila za koji je kod napisan u programskom jeziku *Python* i prilagođen tako da omogućuje unos otklona upravljačkih površina.

Na slici 5.22 je prikazana usporedba dobivene cirkulacije i teorijske cirkulacije za krilo bez otklona upravljačkih površina.

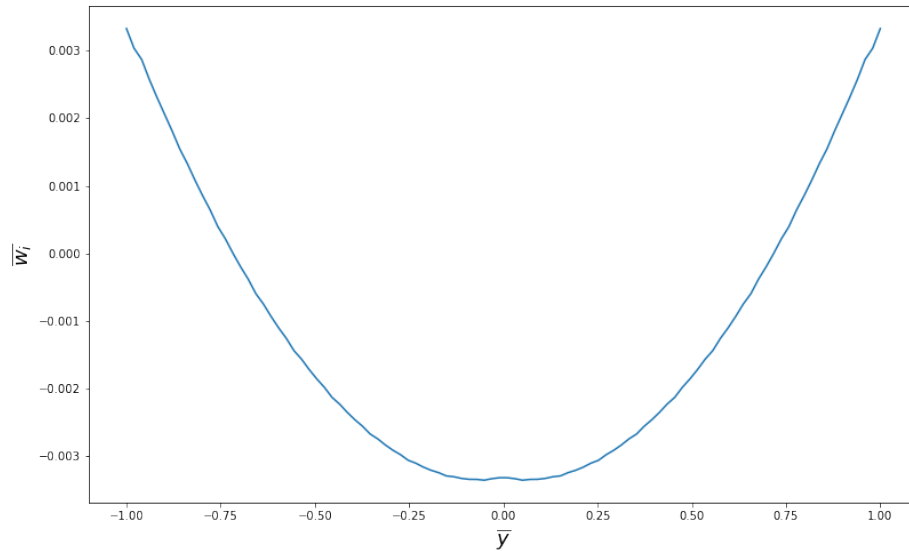


Slika 5.22: Usporedba cirkulacije bez otklona s teorijskom cirkulacijom

Inducirana brzina bez otkona upravljačkih površina ima gotovo pravilan oblik kvadratne funkcije te na  $\sim 75\%$  raspona postaje pozitivna što je bilo i za očekivati na osnovu MKV proračuna. Njezina raspodjela po rasponu je prikazana na slici 5.23. U tablici 5.3 su dane aerodinamičke sile i koeficijent inducirano g otpora.

Tablica 5.3: Aerodinamičke sile

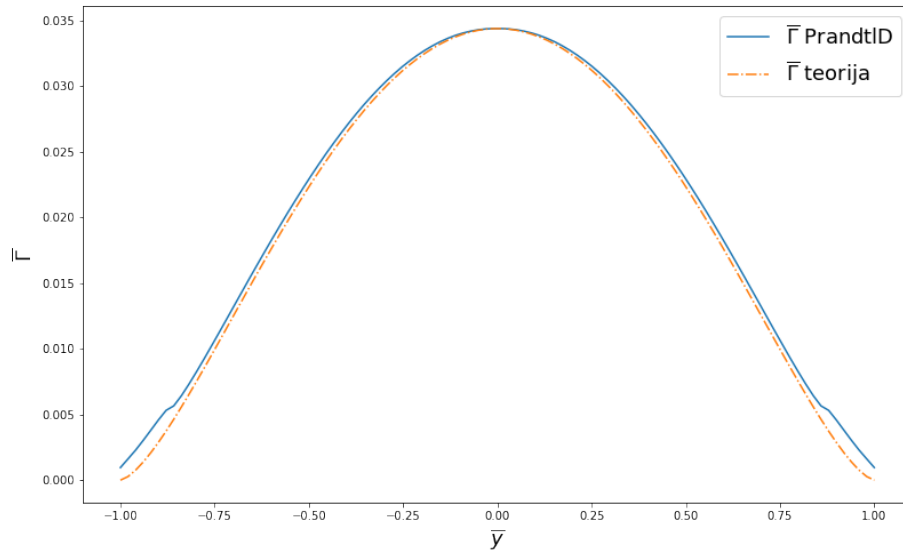
|           |            |
|-----------|------------|
| $L$ [N]   | 0.09394988 |
| $D$ [N]   | 0.00433227 |
| $C_{D_i}$ | 0.0102113  |



Slika 5.23: Inducirana brzina bez otklona upravljačkih površina

### 5.3.1. Otklon upravljačkih površina u istom smjeru

Upravljačke površine se mogu otklanjati sinkronizirano u istom ili u suprotnom smjeru. Na slici 5.24 je dana cirkulacija za pozitivan otklon upravljačke površine od  $5^\circ$ . Može se uočiti povećanje cirkulacije pri vrhovima krila.

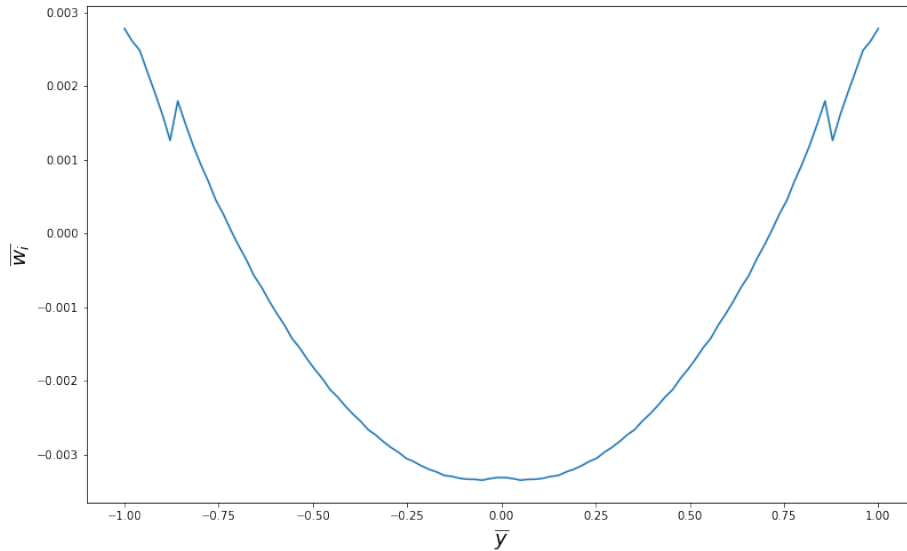


Slika 5.24: Usporedba cirkulacije bez otklona s teorijskom cirkulacijom

Otklonom zakrilaca se na njihovom početku javlja slobodni vrtlog koji za uzrok ima skok u induciranoj brzini. Skok u vrijednosti inducirane brzine umanjuje njen iznos u kojem se nalaze upravljačke površine što za posljedicu ima smanjenje kuta zakreta aerodinamičke sile prema smjeru leta, odnosno povećanje induciranog otpora. U tablici 5.4 su dane aerodinamičke sile i inducirani otpor.

Tablica 5.4: Aerodinamičke sile za isti otklon upravljačke od  $5^\circ$ 

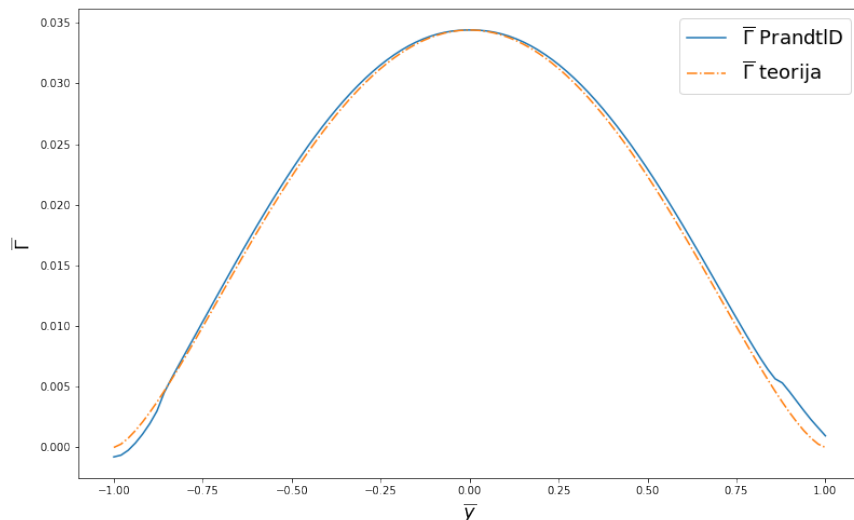
|           |            |
|-----------|------------|
| $L$ [N]   | 0.09497606 |
| $D$ [N]   | 0.00451208 |
| $C_{D_i}$ | 0.01068441 |



Slika 5.25: Inducirana brzina bez otklona upravljačkih površina

### 5.3.2. Otklon u suprotnom smjeru

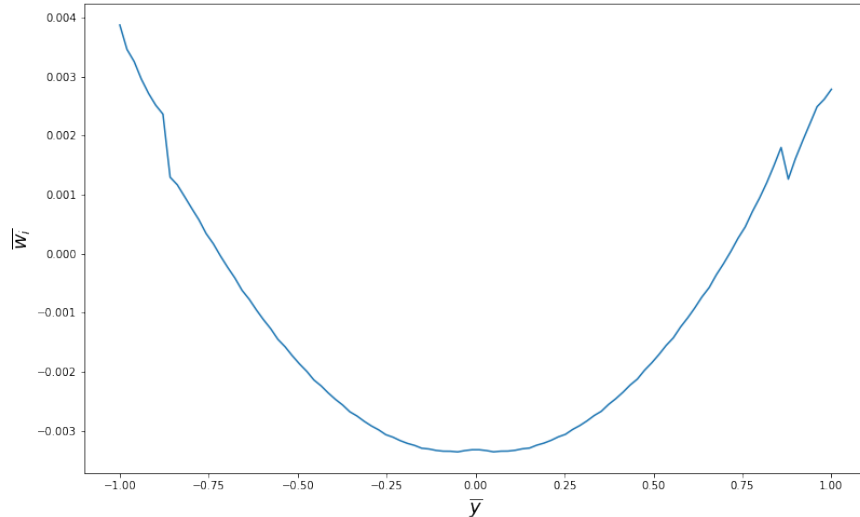
Upravljačke površine je moguće otklanjati i u suprotnom smjeru te je na slici 5.26 prikazana cirkulacija za suprotan otklon upravljačkih površina od  $5^\circ$ . Suprotan otklon površina, osim što stvara približno suprotne efekte na vrhovima krila za cirkulaciju, imat će suprotan efekt i na induciranu brzinu. Na strani negativnog otklona na području upravljačke površine će doći do povećanja pozitivnog iznosa inducirane brzine, dok će na području pozitivno otklonjene površine doći do smanjenja pozitivnog iznosa inducirane brzine što je prikazano na slici 5.27.

Slika 5.26: Cirkulacija za suprotan otklon upravljačkih od  $5^\circ$ 

Promjena cirkulacije zbog otklona upravljačkih površina u suprotnom smjeru dovodi do povećanja induciranog otpora bez značajne promjene sile uzgona. Aerodinamičke sile za takav otklon su dane u tablici 5.5.

Tablica 5.5: Aerodinamičke sile za suprotan otklon upravljačkih površina od  $5^\circ$

|           |            |
|-----------|------------|
| $L$ [N]   | 0.09394841 |
| $D$ [N]   | 0.00434781 |
| $C_{D_i}$ | 0.01024433 |



Slika 5.27: Inducirana brzina sa suprotnim otklonom upravljačkih površina od  $5^\circ$

### Momenti skretanja i valjanja

Za suprotan otklon upravljačkih površina cilj je stvoriti moment valjanja. PrandtlD krilo je konstruirano kako bi pri stvaranju momenta valjanja stvaralo moment skretanja istog predznaka. U tablici 5.6 su dani dobiveni moment skretanja  $M_s$  i moment valjanja  $M_v$  za suprotan otklon upravljačkih površina za kut od  $5^\circ$ .

Tablica 5.6: Moment valjanja i skretanja

|            |             |
|------------|-------------|
| $M_v$ [Nm] | 0.001715121 |
| $M_s$ [Nm] | 0.000089457 |

Može se uočiti da su po predznaku momenti isti što je dokaz generiranja poželjnog momenta skretanja. Taj moment je iznosom mali jer se na strani krila na kojoj se pozitivna inducirana brzina povećava, cirkulacija smanjuje, dok na drugoj strani dolazi do suprotne pojave te se smanjuje iznos pozitivne inducirane brzine, a povećava cirkulacija. No ipak promjena u induciranoj brzini koja smanjuje moment skretanja nije toliko velika da bi ga potpuno poništila.

## 6 | Zaključak

Letjelica PrandtlID, analizirana u ovom radu, prva je javno dostupna geometrija za istraživanje letećih krila sa zvonolikom raspodjelom opterećenja, koja minimiziraju inducirani otpor.

Koristeći dostupne podatke o letjelici rekonstruirana je geometrija letjelice. Da bi se dobilo polje brzina u viskoznom toku za određivanje cirkulacije, izvršen je proračun metodom konačnih volumena. Nadalje, metodom konačnih volumena su određeni i aerodinamički koeficijenti za aeroprofile referentnih sekcija krila koji su interpolirani s HRBF metodom. Interpolacija blago oscilira jer interpolirani podaci nisu potpuno glatki. Dobivena cirkulacija oko krila i interpolacija koeficijenata se koriste u numeričkoj metodi noseće linije za analizu otklona upravljačkih površina.

Ekstrakcijom cirkulacije brzine iz polja brzina dobivenog metodom konačnih volumena zaključuje se da krilo stvara zvonoliku raspodjelu opterećenja i da je brzina ispiranja kvadratnog oblika. Analizom suprotnih otklona upravljačkih površina dobiven je moment valjanja istog predznaka kao i moment skretanja. Isti predznak momenta valjanja i skretanja omogućuje kvadratna raspodjela brzine ispiranja jer zbog pozitivnog predznaka pri vrhu krila zakreće aerodinamičku silu u smjeru brzine leta na sekcijama koje se nalaze u tom području.

Iz proračuna za veće napadne kutove dobiva se cirkulacija koja više nije zvonolikog oblika. Ta pojava nastaje zbog povećanja ukupnog napadnog kuta pri vrhovima krila jer povećanjem napadnog raste inducirana brzina koja zbog pozitivnog iznosa dodatno povećava napadni kut pri vrhovima krila. Zbog tog efekta je približno zvonoliku raspodjelu moguće postići za uzak raspod napadnih kutova, a pri drugim napadnim



kutovima gradijent cirkulacije na vrhovima krila nije jednak nuli u idealnom fluidu teži u beskonačnost što poništava pozitivne efekte zvonolike raspodjele. Za proširenje raspona napadnih kutova kod kojih je raspodjela opterećenja zvonolika potrebno je pronaći kompleksnu konfiguraciju upravljačkih površina ili neki drugi mehanizam promjene zakrivljenosti aeroprofila na sekcijama kako bi se očuvala zvonolika raspodjela cirkulacije. Modeliranje raspodjele upravljačkih površina, koja bi omogućila održavanje zvonolike raspodjele cirkulacije pri većem rasponu napadnih kutova, može biti tema daljnjeg istraživanja koje je moguće provesti integracijom HRBFI aerodinamičkih podataka i numeričke Prandtlove metode noseće linije, koja je korištena u ovom radu.

# Literatura

- [1] Petar Kesić. *Osnove aerodinamike*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2003.
- [2] R. T. Jones. *The spanwise distribution of lift for minimum induced drag of wing having given lift and a given bending moment*. NACA Technical note 2249, 1963.
- [3] Max M. Munk. *The Minimum Induce Drag of Aerofoils*. NACA report 121, 1923.
- [4] L. Prandtl. *Über Tragflügel kleinsten induzierten Widerstandes*. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt Vol. 24, No. 11, 1933.
- [5] Albion H. Bowers and Oscar J. Murillo. *On Wings of the Minimum Induced Drag: Spanload Implications for Aircraft and Birds*. NASA/TP—2016–219072, 2016.
- [6] D. O. Snyder and W. F. Phillips. *Modern Adaptation of Prandtl's Classic Lifting-Line Theory*. Journal of Aircraft Vol. 37., 2000.
- [7] Wilna du Toit. *Radial Basis Function Interpolation*. Department of Mathematical Sciences University of Stellenbosch, 2008.
- [8] Openfoam: User guide v2112. <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-turbulence-ras-k-omega-sst.html>. 15. 6. 2022.
- [9] Željko Tuković. *Metoda kontrolnih volumena na domenama promjenjivog oblika*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2005.

- [10] Openfoam: User guide v2112. <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/6-solving/6.2-numerical-schemes>. 15. 6. 2022.
- [11] Openfoam v2112. <https://www.openfoam.com/>. 17. 5. 2022.
- [12] T. Budanko. *Leteće krilo za prikupljanje vegetacijskih indeksa*. Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2020.
- [13] parainduced. <https://github.com/tbudanko/paraInduced>. 29. 5. 2022.

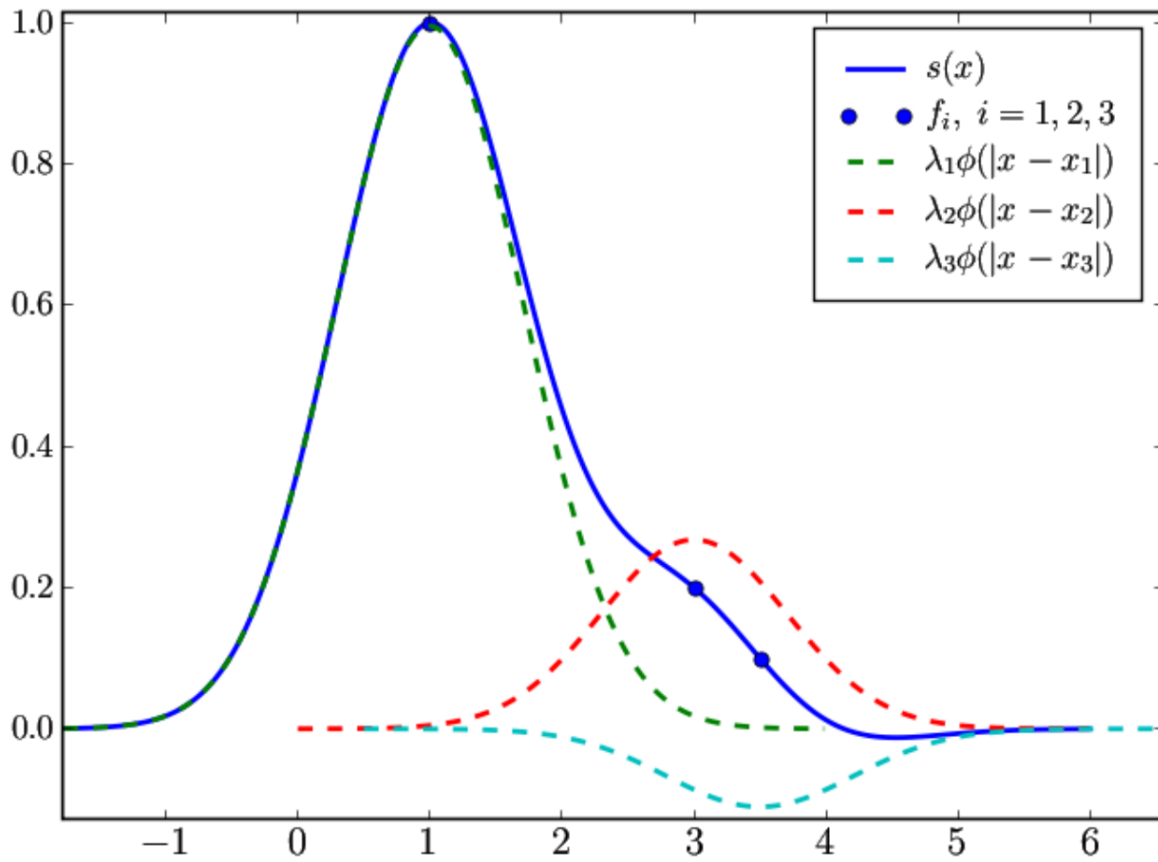
# A | Jednodimenzijski primjer HRBF metode

U dodatku će biti dan jednodimenzijski primjer HRBF interpolacije [7]. Ako se uzmu tri točke podataka:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$  i  $x_3 = 3.5$ . Vrijednosti u danim točkama su dane kao:  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 0.2$  i  $f_3 = 0.1$ . Izabire se radijalna funkcija  $\phi(r) = e^{-r^2}$ . Da bi se izračunao interpolant  $s(x)$  potrebno je odrediti  $\lambda$ . Ako se podaci uvrste u (4.23) dobiva se sljedeća relacija:

$$\begin{bmatrix} \phi(0) & \phi(2) & \phi(2.5) \\ \phi(2) & \phi(0) & \phi(0.5) \\ \phi(2.5) & \phi(0.5) & \phi(0) \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & 0.002 \\ 0.02 & 1 & 0.78 \\ 0.002 & 0.78 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Rješavanjem izraza (A.1) određuje se  $\lambda_1 = 0.995$ ,  $\lambda_2 = 0.268$  i  $\lambda_3 = -0.111$ . Tako da je interpolant dan izrazom (A.2).

$$s(x) = 0.995\phi(|x - 1|) + 0.268\phi(|x - 3|) - 0.111\phi(|x - 3.5|) \quad (\text{A.2})$$



Slika A.1: Primjer interpolacije radijalnim funkcijama

Na slici A.1 [7] je prikazan dobiveni interpolant za dani primjer.