

# Utjecaj realnih uvjeta poletno-sletne staze na duljinu polijetanja

---

**Kurtak, Matej**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:935900>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Matej Kurtak

ZAGREB, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

UTJECAJ REALNIH UVJETA POLETNO-SLETNE STAZE NA DULJINU  
POLIJETANJA

Mentor:  
prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Student:  
Matej Kurtak

ZAGREB, 2022.

*Zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. sc. Milanu Vrdoljaku na pomoći, savjetima i prenesenom znanju tijekom izrade ovog završnog rada.*

*Zahvaljujem svojoj obitelji na pruženoj podršci tijekom dosadašnjeg studiranja.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, veljača 2022.

Matej Kurtak



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 22 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Matej Kurtak**

JMBAG: **0035220293**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Utjecaj realnih uvjeta poletno-sletne staze na duljinu polijetanja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Influence of runway realistic conditions on take-off distance**

Opis zadatka:

Poletno-sletne staze često nisu potpuno ravne, kako se uobičajeno razmatra, već imaju nagib radi konfiguracije terena ili odvoda površinskih voda što u određenoj mjeri utječe na karakteristike polijetanja. Na potrebnu duljinu polijetanja u još većoj mjeri utječu realni atmosferski uvjeti ne-standardne atmosfere te vjetar. Analitičke formule za određivanje potrebne duljine polijetanja staze mogu obuhvatiti neke od ovih realnih uvjeta poletno-sletne staze, ali cjelovita analiza može se provesti primjenom proširenog modela gibanja središta mase zrakoplova, odnosno proširenog modela materijalne točke. Proširenje modela materijalne točke uključuje gibanje oko poprečne osi tijekom rotacije zrakoplova oko stražnjih kotača.

Predmet analize u ovom radu je avion s tricikl konfiguracijom podvozja, s glavnim kotačima i prednjim, nosnim kotačem. Za razmatrani avion potrebno je:

- prikazati sve potrebne i korištene podatke;
- odrediti potrebnu duljinu polijetanja u idealnim uvjetima poletno-sletne staze;
- analizirati utjecaj nagiba poletno-sletne staze;
- analizirati utjecaj ne-standardnih atmosferskih uvjeta na duljinu polijetanja;
- usporediti rezultate analitičkih formula i rezultate proširenog modela materijalne točke.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	vii
Popis tablica	ix
Popis oznaka	x
Sažetak	xii
Summary	xiii
1. Uvod	1
2. Model polijetanja	3
3. Zrakoplov	8
3.1. Općenito . . . . .	8
3.2. Podaci o zrakoplovu . . . . .	10
3.3. Pogon . . . . .	10
3.4. Aerodinamika . . . . .	11
3.5. Moment tromosti . . . . .	12
3.6. Model pilota . . . . .	13

<b>4. Analiza duljine polijetanja</b>	<b>14</b>
4.1. Idealni uvjeti . . . . .	14
4.2. Staze s konstantnim nagibom . . . . .	17
4.3. Staze s promjenjivim nagibom . . . . .	21
4.4. Model stvarne staze . . . . .	26
4.5. Utjecaj početne mase zrakoplova . . . . .	29
<b>5. Analiza utjecaja nestandardnih atmosferskih uvjeta</b>	<b>32</b>
5.1. Ravna staza . . . . .	32
5.2. Model stvarne staze . . . . .	36
<b>6. Analitičko rješenje</b>	<b>37</b>
6.1. Utjecaj vjetra na duljinu polijetanja . . . . .	40
<b>7. Zaključak</b>	<b>41</b>
<b>Literatura</b>	<b>43</b>



# Popis slika

2.1	Komponente svih sila koje djeluju na zrakoplov . . . . .	4
3.1	MiG-21bis-D HRZ-a . . . . .	9
3.2	Moment tromosti oko osi y u odnosu na masu goriva . . . . .	12
4.1	Ovisnost visine i duljine polijetanja - idealno . . . . .	15
4.2	Ovisnost brzine i duljine polijetanja - idealno . . . . .	16
4.3	Ovisnost kutova $\alpha, \gamma, \delta_m$ i duljine polijetanja - idealno . . . . .	17
4.4	Visina u ovisnosti o duljini polijetanja za različite kutove nagiba staze . .	18
4.5	Brzina u ovisnosti o duljini polijetanja za različite kutove nagiba staze . .	19
4.6	Napadni kut u ovisnosti o duljini polijetanja za različite kutove nagiba staze . . . . .	20
4.7	Kut otklona kormila visine u ovisnosti o duljini polijetanja za različite kutove nagiba staze . . . . .	20
4.8	Visina zrakoplova u ovisnosti o duljini polijetanja za stazu A . . . . .	21
4.9	Visina zrakoplova u ovisnosti o duljini polijetanja za stazu B . . . . .	22
4.10	Visina zrakoplova u ovisnosti o duljini polijetanja za stazu C . . . . .	22
4.11	Brzina zrakoplova u ovisnosti o duljini polijetanja za staze A, B i C . . . .	24
4.12	Ovisnost kutova $\alpha, \gamma, \delta_m$ o duljini polijetanja za stazu A . . . . .	25
4.13	Ovisnost kutova $\alpha, \gamma, \delta_m$ o duljini polijetanja za stazu B . . . . .	25
4.14	Ovisnost kutova $\alpha, \gamma, \delta_m$ o duljini polijetanja za stazu C . . . . .	26
4.15	Nadmorske visine točaka staze u zračnoj luci Zonguldak . . . . .	27
4.16	Zračna luka Zonguldak u Turskoj . . . . .	27

4.17	Ovisnost visine o duljini polijetanja za stvarnu i idealnu stazu . . . . .	28
4.18	Ovisnost kuta penjanja zrakoplova o duljini polijetanja . . . . .	29
4.19	Visina u odnosu na duljinu polijetanja za različite početne mase . . . . .	30
4.20	Ukupne duljine polijetanja s obzirom na početnu masu . . . . .	31
5.1	Temperature, tlakovi, gustoća i brzina zvuka za nestandardne atmosfere .	33
5.2	Ovisnost visine o duljini polijetanja za nestandardne atmosfere . . . . .	34
5.3	Ovisnost brzine o duljini polijetanja za nestandardne atmosfere . . . . .	35
5.4	Ovisnost brzine o duljini polijetanja za nestandardne atmosfere na modelu stvarne staze . . . . .	36
6.1	Ovisnost duljine prve faze polijetanja o brzini vjetra . . . . .	40

# Popis tablica

3.1	Svojstva zrakoplova MiG-21 . . . . .	10
4.1	Duljine polijetanja za staze A, B i C. . . . .	23
4.2	Duljine polijetanja za model stvarne staze . . . . .	28
4.3	Duljine polijetanja za različite početne mase . . . . .	30
5.1	Duljine polijetanja za nestandardne atmosfere . . . . .	33
5.2	Duljine polijetanja za nestandardne atmosfere na modelu stvarne staze . . . . .	36
6.1	Usporedba analitičkih i numeričkih brzina polijetanja . . . . .	38
6.2	Usporedba analitičkih i numeričkih duljina polijetanja . . . . .	38

# Popis oznaka

$C_D$	koeficijent otpora, [-]	13
$C_{D0}$	multi otpor, [-]	13
$C_L$	koeficijent uzgona, [-]	13
$C_m$	koeficijent momenta propinjanja, [-]	13
$C_{Lmax}$	maksimalni koeficijent uzgona, [-]	40
$C_T$	specifična masena potrošnja goriva, [kg s/N]	7
$D$	sila otpora, [N]	7
$T$	potisak, [N]	7
$I_y$	moment tromosti oko osi $y$ , [kg m <sup>2</sup> ]	7
$K$	koeficijent inudciranog otpora, [-]	13
$K_q$	pojačanje povratne veze po kutnoj brzini, [-]	13
$K_\theta$	pojačanje povratne veze po kutu propinjanja, [-]	13
$L$	sila uzgona, [N]	7
$M$	moment propinjanja, [Nm]	13
$R$	sila reakcije podloge, [N]	7
$S_{ref}$	referentna površina, [m <sup>2</sup> ]	40
$T_z$	temperatura zraka, [K]	40
$V$	brzina zrakoplova, [m/s]	7
$V_k$	brzina u odnosu na Zemlju, [m/s]	7
$V_R$	brzina na kraju prve faze polijetanja, [m/s]	7
$V_{TO}$	brzina na kraju druge faze polijetanja, [m/s]	7
$V_w$	brzina vjetra, [m/s]	40

$W$	težina, [N] . . . . .	7
$a$	brzina zvuka, [m/s] . . . . .	40
$c_A$	duljina aerodinamičke tetive, [m] . . . . .	40
$g$	ubrzanje sile teže, [m/s <sup>2</sup> ] . . . . .	40
$h$	visina središta mase, [m] . . . . .	7
$k_s$	vertikalna udaljenost osi zadnjeg kotača od središta mase, [m] . . . . .	40
$l_s$	horizontalna udaljenost osi zadnjeg kotača od središta mase, [m] . . . . .	40
$m$	masa zrakoplova, [kg] . . . . .	7
$p$	tlak zraka, [Pa] . . . . .	40
$q$	kutna brzina, [rad/s] . . . . .	13
$s$	udaljenost od ishodišta, [m] . . . . .	7
$s_1$	duljina polijetanja prve faze, [m] . . . . .	7
$s_2$	duljina polijetanja druge faze, [m] . . . . .	7
$s_3$	duljina polijetanja treće faze, [m] . . . . .	7
$s_g$	duljina polijetanja na kraju druge faze, [m] . . . . .	7
$s_p$	ukupna duljina polijetanja na kraju treće faze, [m] . . . . .	7
$t$	vrijeme, [s] . . . . .	7
$x_l$	udaljenost od ishodišta po osi $x$ , [m] . . . . .	7
$y_l$	udaljenost od ishodišta po osi $y$ , [m] . . . . .	7
$\alpha$	napadni kut, [rad] . . . . .	7
$\alpha_T$	kut između pravca potiska i osi $x$ zrakoplova, [rad] . . . . .	7
$\chi$	kut skretanja, [rad] . . . . .	7
$\gamma$	kut penjanja, [rad] . . . . .	7
$\gamma_p$	kut nagiba staze, [rad] . . . . .	13
$\mu$	faktor trenja, [-] . . . . .	7
$\mu_A$	kut nagiba oko osi $x$ zrakoplova, [rad] . . . . .	7
$\rho$	gustoća zraka, [kg/m <sup>3</sup> ] . . . . .	40
$\theta$	kut propinjanja, [rad] . . . . .	7
$\theta_z$	zadana vrijednost kuta propinjanja, [rad] . . . . .	13

# Sažetak

Cilj ovog rada je analizirati utjecaj realnih uvjeta poletno-sletne staze na duljinu polijetanja zrakoplova i usporediti rezultate s onima dobivenim u idealnim uvjetima. Opisan je prošireni model gibanja središta mase koji je korišten u numeričkom proračunu. Zatim su opisana svojstva zrakoplova MiG-21 korištenog u analizi. Prikazani su rezultati duljine polijetanja na idealnoj stazi koji su kasnije korišteni za usporedbu. Analizirane su duljine polijetanja na stazama s različitim pozitivnim i negativnim konstantnim nagibom. Potom su razmatrane tri staze s promjenjivim nagibom. Analiza je provedena i na modelu stvarne staze koja zbog utjecaja reljefa mijenja nagib. Također je razmotren utjecaj početne mase zrakoplova na duljinu polijetanja. Duljina polijetanja izračunata je na idealnoj i stvarnoj stazi u vrućoj i hladnoj nestandardnoj atmosferi i u standardnim atmosferskim uvjetima za usporedbu. Na kraju su numerička rješenja uspoređena s analitičkim rješenjem za ravnu stazu. Analitički je analiziran i utjecaj vjetra na duljinu polijetanja.

**Ključne riječi:** MiG-21, duljina polijetanja, nagib staze, model materijalne točke, nestandardna atmosfera

# Summary

The goal of this paper is to analyse the influence of realistic runway conditions on take off distance and to compare results with those obtained in ideal conditions. Description of modified point-mass model used in numerical calculation is given. Properties of analysed aircraft MiG-21 are also described. The results of take off distance on ideal runway are shown and they are later used for comparison. Furthermore, take off distances are analysed on runways with constant positive and negative slopes. Three runways with variable slopes are then examined. Also, analysis is conducted on a model of a real runway which has a variable slope due to uneven terrain. In addition, influence of the initial mass of the aircraft on take off distance is studied. Take off distance is calculated on ideal and real runway in hot and cold non-standard atmospheres and in standard atmospheric conditions for comparison. In conclusion, numerical results are compared with analytical solutions for a flat runway. Influence of wind on take off distance is also analytically assessed.

**Keywords:** MiG-21, take off distance, runway slope, point-mass model, non-standard atmosphere

# 1 | Uvod

Proračun duljine polijetanja jedan je od važnih dijelova analize performansi zrakoplova. U analitičkim modelima tog proračuna zanemarene su promjene varijabli tijekom polijetanja koje uključuju koeficijente uzgona, otpora, momenta propinjanja, potisak i druge. Pretpostavljeni su idealni uvjeti u kojima je poletno-sletna staza potpuno ravna, a gustoća je konstantna i ne mijenja se s visinom. Iz tih razloga duljinu polijetanja bolje je računati numerički. Takav model uzima u obzir promjenu varijabli tijekom polijetanja i pruža mogućnost zadavanja realnih početnih uvjeta. Za analizu polijetanja u radu korišten je numerički model za zrakoplov MiG-21. U stvarnosti staze nisu savršeno ravne cijelom svojom duljinom, što rezultira promjenom njihovih nagiba i kuta propinjanja zrakoplova tijekom polijetanja. Korištenjem proširenog numeričkog modela materijalne točke analiziran je utjecaj nagiba poletno-sletne staze na duljine polijetanja na kraju svake faze. Drugi bitan utjecaj na duljinu polijetanja ima atmosfera u kojoj se zrakoplov nalazi. Ona utječe na temperaturu, tlak, gustoću zraka i brzinu zvuka pa su u analizi razmotrene tri različite atmosfere.

U radu je prvo opisan model polijetanja korišten u numeričkom proračunu. Prikazane su korištene jednadžbe i opisane faze polijetanja. Zatim su u trećem poglavlju izneseni podaci o razmatranom zrakoplovu poput geometrijskih i aerodinamičkih svojstava, pogonske grupe i inercijskih značajki. Nadalje su predstavljeni rezultati analize za polijetanje u idealnim uvjetima poletno-sletne staze i za polijetanje na stazama s konstantnim nagibom. Zatim je analizirano polijetanje na jednostavnijim stazama s promjenjivim nagibom koje se sastoje od dva različita dijela konstantnog nagiba. U četvrtom poglavlju prikazani su rezultati za model stvarne staze i utjecaj početne mase



zrakoplova na duljinu polijetanja. Uz standardnu atmosferu, čiji je utjecaj na duljinu polijetanja na već prikazanim stazama iznesen u petom poglavlju, uvedene su i dvije nestandardne. U šestom poglavlju rezultati za ravnu stazu uspoređeni su s dva analitička rješenja. Konačno, izneseni su zaključci na temelju dobivenih rezultata i smjernice za daljnji rad na modelu.

## 2 Model polijetanja

Za analizu polijetanja korišten je prošireni model gibanja središta mase zrakoplova. U proširenom modelu razmatra se i gibanje zrakoplova oko poprečne osi do koje dolazi tijekom rotacije zrakoplova oko stražnjih kotača pri polijetanju. U ovom modelu pretpostavljen je ravnotežni let, odnosno uvjet da je rezultantni moment na zrakoplov jednak nuli. Nadalje, rotacija i zakrivljenost Zemlje zanemareni su zbog toga što su kod polijetanja razmatrane male udaljenosti. Zanemaren je i vjetar zbog nemogućnosti njegova predviđanja duž poletno-sletne staze. [1]

Vektorske jednadžbe modela materijalne točke koje opisuju gibanje središta mase zrakoplova glase:

$$m \cdot \frac{d\vec{V}_K}{dt} = \vec{F} + \vec{T} + \vec{W} \quad (2.1)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_K. \quad (2.2)$$

Komponente dinamičke jednadžbe (2.1) u brzinskom koordinatnom sustavu glase:

$$m \frac{dV}{dt} = T \cdot \cos(\alpha_T - \alpha) - D + W \cdot \sin\gamma \quad (2.3)$$

$$mV \cos\gamma \frac{d\chi}{dt} = L - T[\sin(\alpha_T - \alpha)] \cdot \sin\mu_A \quad (2.4)$$

$$-mV \frac{d\gamma}{dt} = [-L + T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cdot \cos\mu_A + W \cos\gamma. \quad (2.5)$$

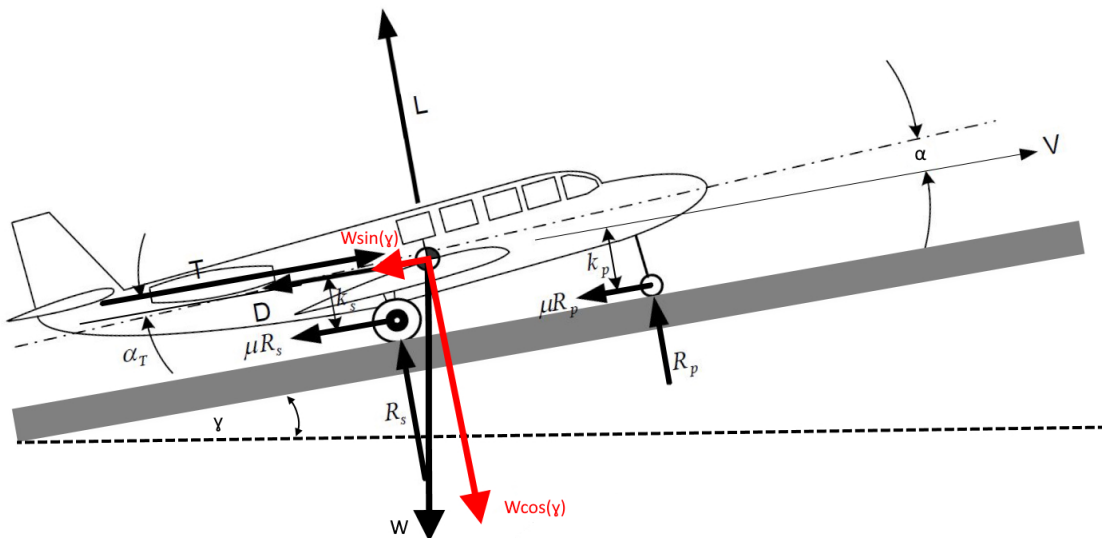
Komponente kinematičke jednadžbe (2.2) glase:

$$\frac{dx_l}{dt} = V \cos \gamma \cos \chi \quad (2.6)$$

$$\frac{dy_l}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (2.7)$$

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \gamma. \quad (2.8)$$

Navedene jednadžbe potrebno je proširiti za slučaj polijetanja i slijetanja u kojem se pojavljuju dodatne sile - reakcije podloge  $R$  i pripadajuća sila trenja  $\mu \cdot R$ .



Slika 2.1: Komponente svih sila koje djeluju na zrakoplov

Sila reakcije podloge glasi:

$$R = W \cos \gamma - L + T \sin(\alpha_T - \alpha), \quad (2.9)$$

dok jednadžba (2.3) za zrakoplov u dodiru s podlogom prelazi u:

$$m \frac{dV}{dt} = T \cdot \cos(\alpha_T - \alpha) - D - \mu \cdot R - W \sin \gamma. \quad (2.10)$$

Jednadžba (2.5) također postaje:

$$-mV \frac{d\gamma}{dt} = -L + T \sin(\alpha_T - \alpha) + W \cos \gamma - R. \quad (2.11)$$

Na razmatranim stazama pod kutem  $\gamma$  potrebno je silu težine zrakoplova  $W$  rastaviti na dvije komponente jer ona djeluje okomito prema središtu Zemlje. Prva komponenta  $W \cos(\gamma)$  djeluje okomito na stazu, a druga,  $W \sin(\gamma)$ , paralelno s njom. U modelu je potrebno dodatnu komponentu težine paralelnu sa stazom dodati sili otpora.

U ovom radu razmatrano je polijetanje zrakoplova s tricikl konfiguracijom podvozja. Za  $V \geq V_R$  sila reakcije na prednji dio podvozja jednaka je nuli jer kotači pri toj brzini više nisu u dodiru s podlogom. Slično, za  $V \geq V_{TO}$  sila reakcije na stražnji dio podvozja jednaka je nuli.

Dodatne dvije jednadžbe potrebne su za opisivanje rotacije oko središta mase oko osi  $y$  pri polijetanju - dinamička jednadžba za kutnu brzinu propinjanja (2.12) i kinematička jednadžba kuta propinjanja (2.13).

$$I_y \frac{dq}{dt} = M + M_R \quad (2.12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = q. \quad (2.13)$$

Iako postoji razlika između kuta valjanja  $\phi$  oko  $x$  osi zrakoplova i kuta  $\mu_A$  oko osi  $x_a$  aerodinamičkog koordinatnog sustava, može se razmatrati da je  $\mu_A = \phi$ . U slučaju polijetanja zanimljiva je jednadžba (2.14) iz koje je moguće izračunati prijedeni put:

$$\frac{ds}{dt} = V. \quad (2.14)$$

Posljednja jednadžba od interesa (2.15) opisuje protok goriva kroz mlazni motor koji je proporcionalan potisku motora.

$$\frac{dm}{dt} = -C_T \cdot T. \quad (2.15)$$

Sustav diferencijalnih jednadžbi ovog modela u matricnom zapisu glasi:

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}[T \cdot \cos(\alpha_T - \alpha) - D - \mu \cdot R - W \sin \gamma] \\ \frac{1}{mV \cos \gamma}[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \sin \phi \\ \frac{1}{mV}[L - T \sin(\alpha_T - \alpha)] \cos \phi - \frac{1}{mV}(W \cos \gamma - R) \\ V \cos \gamma \cos \chi \\ V \cos \gamma \sin \chi \\ V \sin \gamma \\ \frac{1}{I_y}(M + M_R) \\ q \\ V \\ -C_T \cdot T \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

s vektorom stanja:

$$X(t) = \begin{bmatrix} V & \chi & \gamma & x_l & y_l & h & q & \theta & s & m \end{bmatrix}^T. \quad (2.17)$$

Polijetanje u ovom modelu podijeljeno je u tri faze. [2] Prva faza, zalijetanje po stazi, traje od početka polijetanja do trenutka odvajanja prednjeg kotača od staze. Početna brzina zrakoplova  $V_0$  u svim je analizama jednaka nuli. Duljina prve faze polijetanja označava se s  $s_1$ , a brzina postignuta na kraju prve faze je  $V_R$ . Druga faza traje od trenutka odvajanja prednjih kotača od staze do trenutka odvajanja zadnjih i njena duljina iznosi  $s_2$ . Brzina zrakoplova u tom trenutku označuje se s  $V_{TO}$ . Treća faza traje od odvajanja zrakoplova od staze do trenutka u kojem je dostigao propisanu visinu od staze, a njena udaljenost je  $s_3$ . Ukupna duljina polijetanja  $s_p$  definirana je kao zbroj duljina svih faza:

$$s_p = s_1 + s_2 + s_3. \quad (2.18)$$

Zanimljiva je i udaljenost koju zrakoplov prijeđe u dodiru sa stazom  $s_g$  koja je jednaka zbroju duljina prvih dvaju faza:

$$s_g = s_1 + s_2. \quad (2.19)$$

Općenito se pri polijetanju razmatraju odvojeno treća i četvrta faza. [2] Treća faza traje od trenutka odvajanja zrakoplova od staze do postizanja odabranog kuta penjanja  $\gamma$ , a četvrtu fazu čini pravocrtno penjanje do određene visine. U modelu su definirane tri faze polijetanja jer razmatrani zrakoplov visinu prepreke dostigne već u trećoj fazi pa četvrta faza nije prisutna.

Bitno je naglasiti da pilot ima značajan utjecaj na polijetanje jer će o njegovim procjenama ovisiti napadni kut, kut penjanja i kut otklona kormila visine. U svim provedenim analizama korišten je isti model pilota tako da svi dobiveni rezultati budu međusobno usporedivi.

## 3 | Zrakoplov

### 3.1. Općenito

Zrakoplov MiG-21 nadzvučni je lovac-presretač kojeg je razvio sovjetski Mikojan-Gurjevič 50-ih godina 20. stoljeća. Drži rekord za nadzvučni zrakoplov proizveden u najviše primjeraka u povijesti – preko 11 tisuća. Koristilo ga je šezdesetak zemalja na svijetu, a u mnogima od njih u službi je i danas. Trup je poluljuskaste konstrukcije, napravljen uglavnom od aluminija s čeličnim ojačanjima na najopterećenijim dijelovima. Poprečni presjeci trupa eliptičnog su oblika. Delta krilo ima kut strijele od  $57^\circ$  i aeroprofil TsAGI S-12. Pogoni ga turbomlazni motor Tumansky R-25 s naknadnim izgaranjem. Protok zraka do motora reguliran je stošcem koji se nalazi u usisniku. Računalo hidraulički mijenja položaj stošca u usisniku s obzirom na brzinu leta kako bi usporio struju zraka do podzvučnih brzina prije nego što uđe u kompresor. Pri nižim brzinama usisnik je uvučen, a pri višim nadzvučnim izvučen. Repne površine sastoje se od vertikalnog stabilizatora, horizontalnog stabilizatora koji se otklanja cijelom svojom površinom i peraje na donjem dijelu. Podvozje zrakoplova izvedeno je u tricikl konfiguraciji. Prednji i stražnji kotači uvlače se u trup. Na slici 3.1 je prikazan MiG-21bis-D Hrvatskog ratnog zrakoplovstva.



Slika 3.1: MiG-21bis-D HRZ-a



## 3.2. Podaci o zrakoplovu

U tablici 3.1 prikazana su najvažnija svojstva zrakoplova MiG-21.

Tablica 3.1: Svojstva zrakoplova MiG-21

Duljina $l$	14.7 m
Raspon krila $b$	7.154 m
Visina $h$	4.1 m
Površina krila $S$	23 m <sup>2</sup>
Duljina aerodinamičke tetive $c_A$	4.002 m
Masa praznog zrakoplova $m_E$	5843 kg
Maksimalna dopuštena masa zrakoplova $m_F$	10420 kg
Potisak na razini mora	40180 N
Potisak na razini mora s naknadnim izgaranjem	69580 N
Maksimalna brzina	2175 km/h
Dolet	660 km
Plafon leta	17500 m
Maksimalno opterećenje	8.5
Brzina $V_R$ prema priručniku [1]	69.4 - 75 m/s
Duljina polijetanja $s_g$ prema priručniku	810 m

## 3.3. Pogon

Motor ima šest režima rada koji se mijenjaju palicom gasa.[3] Režimi su:

- mali gas
- nominal 60%
- nominal 80%
- nominal 100%
- maximal

- forsaž.

U svim analizama polijetanja korišten je forsaž.

### 3.4. Aerodinamika

Aerodinamički model u obzir uzima koeficijente uzgona, momenta propinjanja i otpora. Koeficijent uzgona zrakoplova u modelu računat je po izrazu [1]

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta}\delta_m + C_{L\dot{\alpha}^*}\dot{\alpha}^* + C_{Lq}q^*, \quad (3.1)$$

gdje je  $\alpha$  napadni kut,  $\delta_m$  kut otklona kormila visine,  $\dot{\alpha}^*$  brzina promjene napadnog kuta i  $q^*$  brzina promjene kuta propinjanja. Otpor kod nultog uzgona  $C_{D0}$  dobiven je iz funkcije koja u obzir uzima otklon zakrilaca. Koeficijent  $C_{L\alpha}$  dobiven je funkcijom čiji su ulazni parametri Machov broj, otklon zakrilaca i položaj podvozja.  $C_{L\delta_m}$  računat je funkcijom kojoj je ulazni parametar samo Machov broj. Pretpostavljeno je da je  $\dot{\alpha}^*$  u svim fazama polijetanja jednak nuli jer ga ovim modelom nije moguće odrediti. Koeficijent momenta propinjanja jednak je

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_m + C_{m\dot{\alpha}^*}\dot{\alpha}^* + C_{mq}q^*. \quad (3.2)$$

Koeficijenti u jednadžbi momenta propinjanja dobiveni su funkcijama koje kao ulazne parametre uzimaju Machov broj zrakoplova, otklon zakrilaca, položaj podvozja i zračne kočnice.

Koeficijent otpora ima oblik:

$$C_D = C_{Dmin} + K(C_L - C_{Lmin})^2. \quad (3.3)$$

Koeficijent induciranog otpora  $K$  i  $C_{Lmin}$  ovise o Machovom broju i otklonu zakrilaca, dok je  $C_{Dmin}$  kompliciran za računanje jer na njega uz navedene parametre utječe otklon zračne kočnice, položaj podvozja, smještaj vanjskih spremnika za gorivo i naoružanje. Utjecaj tla u procjeni koeficijenta otpora je zanemaren.

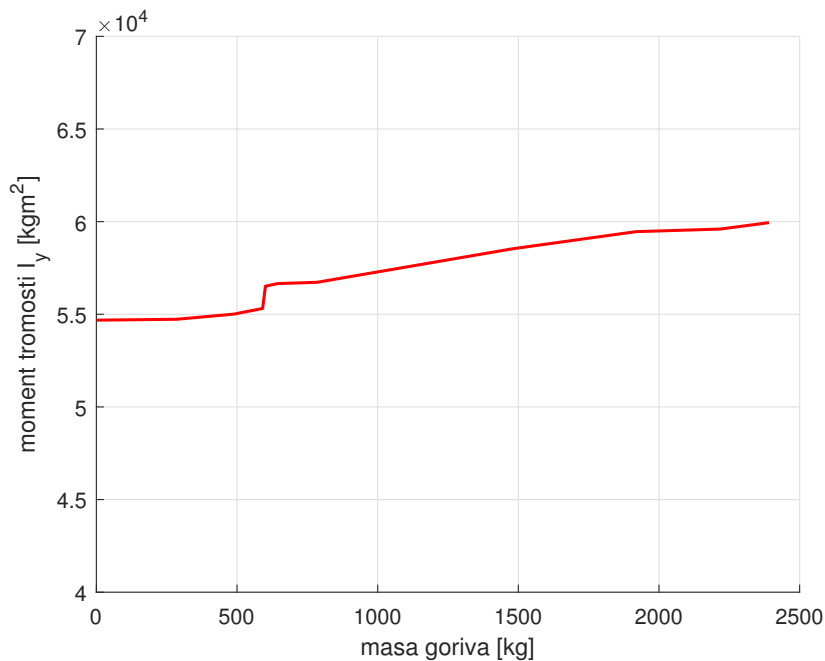
U provedenoj analizi podvozje zrakoplova izvučeno je do samog kraja polijetanja, a zračna kočnica uvučena. Moguće je provesti analizu nad tri konfiguracije MiG-a 21 s obzirom na naoružanje: bez ovješanih raketa, s dvije rakete i s četiri rakete. Odabrana je konfiguracija bez ovješanih raketa. U konfiguraciju je još moguće dodati vanjski spremnik goriva ovješan ispod trupa zrakoplova, ali on u analizi nije razmatran.

### 3.5. Moment tromosti

Za proračun je bitan moment tromosti oko poprečne osi  $y$ . On ovisi o rasporedu mase u odnosu na težište zrakoplova i u stvarnosti se mijenja s vremenom zbog potrošnje goriva. Početna masa zrakoplova s pilotom i gorivom u analizi iznosi 8650 kg. Za takvu konfiguraciju početni moment tromosti jednak je

$$I_y = 58909 \text{ kg m}^2. \quad (3.4)$$

Na slici 3.2 prikazana je promjena momenta tromosti oko osi  $y$  s obzirom na masu goriva u zrakoplovu.



Slika 3.2: Moment tromosti oko osi  $y$  u odnosu na masu goriva

Iz dijagrama je jasno da se iznos momenta tromosti značajno ne mijenja s masom goriva u zrakoplovu pa je njegov iznos tijekom cijele analize pretpostavljen kao konstantan.

### 3.6. Model pilota

Za provođenje proračuna duljine polijetanja potrebno je modelirati pilota koji će upravljati zrakoplovom tijekom druge i treće faze polijetanja. [1] Napravljena je povratna veza po kutu propinjanja zrakoplova  $\theta$ :

$$\delta_{m_\theta} = K_\theta \cdot (\theta - \theta_z), \quad (3.5)$$

gdje je  $\theta_z$  zadana vrijednost kuta propinjanja, a  $K_\theta$  pojačanje povratne veze po kutu propinjanja. Stvorena je i povratna veza po kutnoj brzini  $q$  koja je i u stvarnosti primijenjena na zrakoplovu:

$$\delta_{m_q} = K_q \cdot q. \quad (3.6)$$

Ukupni kut otklona kormila visine jednak je zbroju otklona:

$$\delta_m = \delta_{m_0} + \delta_{m_\theta} + \delta_{m_q}. \quad (3.7)$$

Za pojačanje povratne veze po kutu propinjanja odabrana je vrijednost  $K_\theta=0.25$ . [1] Vrijednost  $\theta_z$  jednaka je  $10^\circ$  za  $V < 95$  m/s, odnosno  $12^\circ$  u drugoj i trećoj fazi polijetanja. Vrijednost pojačanja povratne veze po kutnoj brzini  $K_q$  definirana je u [3]. Kut otklona  $\delta_{m_0}$  do kraja prve faze polijetanja konstantan je i iznosi  $-24^\circ$ , nakon čega linearno raste do  $-12^\circ$  na kraju druge faze. U trećoj fazi  $\delta_{m_0}$  određen je uvjetima ravnotežnog leta  $L = W$  i  $M = 0$ .

## 4 Analiza duljine polijetanja

### 4.1. Idealni uvjeti

Idealni uvjeti poletno-sletne staze podrazumijevaju da je staza potpuno ravna, odnosno

$$\gamma_p = 0. \quad (4.1)$$

Gustoća zraka, temperatura, tlak i brzina zvuka mijenjaju se s visinom po standardnom atmosferskom modelu International Standard Atmosphere (ISA). [4] Po tom modelu za niže slojeve atmosfere, ispod 11 km visine, temperatura se mijenja s visinom  $h$  po izrazu

$$T_z = 288.15 - 0.0065h \text{ [K]}. \quad (4.2)$$

Promjena tlaka s visinom računa se izrazom

$$p = 101325(1 - 0.00002256h)^{5.256} \text{ [Pa]}. \quad (4.3)$$

Poznavanjem tih dviju vrijednosti moguće je izračunati gustoću zraka  $\rho$  koja je jednaka

$$\rho = \frac{0.003484p}{T} \text{ [kg/m}^3\text{]}. \quad (4.4)$$

Brzina zvuka  $a$  ovisi jedino o temperaturi:

$$a = 20.05\sqrt{T} \text{ [m/s]}. \quad (4.5)$$

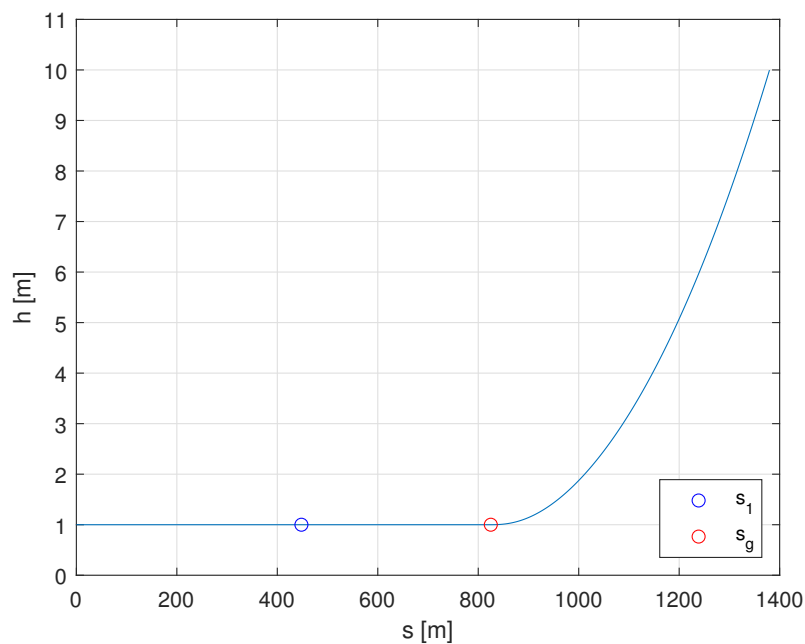
Idealni uvjeti podrazumijevaju i da nema vjetra te da je poletno-sletna staza smještena na razini mora, odnosno da je njena nadmorska visina jednaka nuli. Taj je uvjet bitan jer na toj nadmorskoj visini motor zrakoplova ostvaruje maksimalni potisak.

U idealnim uvjetima poletno-sletne staze dobivene su sljedeće duljine:

$$s_1 = 448 \text{ m}$$

$$s_g = 825 \text{ m}$$

$$s_p = 1380 \text{ m}$$



Slika 4.1: Ovisnost visine i duljine polijetanja - idealno

Izračunata duljina polijetanja  $s_g$  nije znatno različita od duljine polijetanja prema priručniku [1] koja iznosi 810 m. Na grafu ovisnosti visine  $h$  središta mase zrakoplova i udaljenosti  $s$  od početka staze 4.1 ucrtane su točke  $s_1$  i  $s_g$ . Središte mase zrakoplova u početnom položaju nalazi se na visini od 1 m. Vidljivo je da nakon točke  $s_g$  visina počinje parabolično rasti do visine od 10 m koja označava kraj treće faze polijetanja. Graf ovisnosti brzine zrakoplova i duljine polijetanja pokazuje rast brzine do

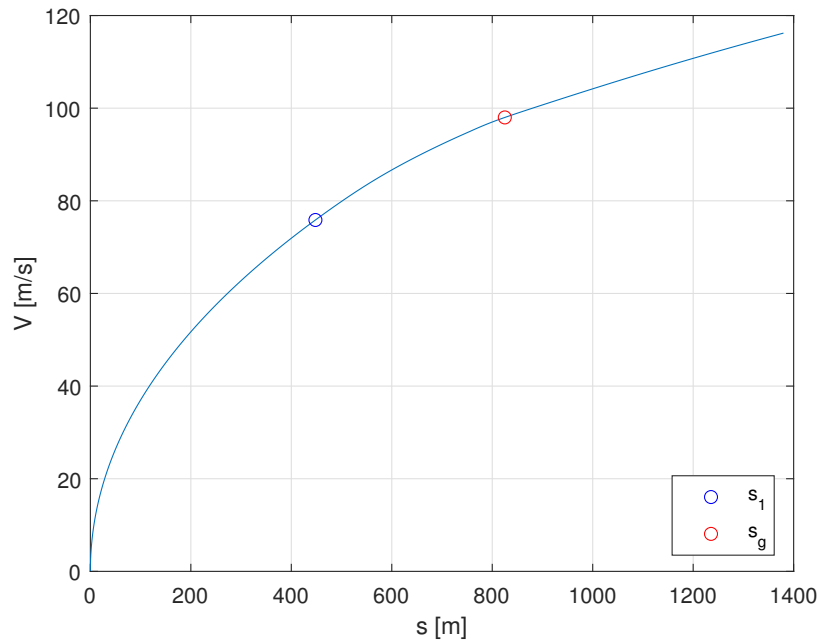
$$V = 116.2 \text{ m/s.}$$

Brzine na krajevima prve i druge faze polijetanja su:

$$V_R = 75.86 \text{ m/s,}$$

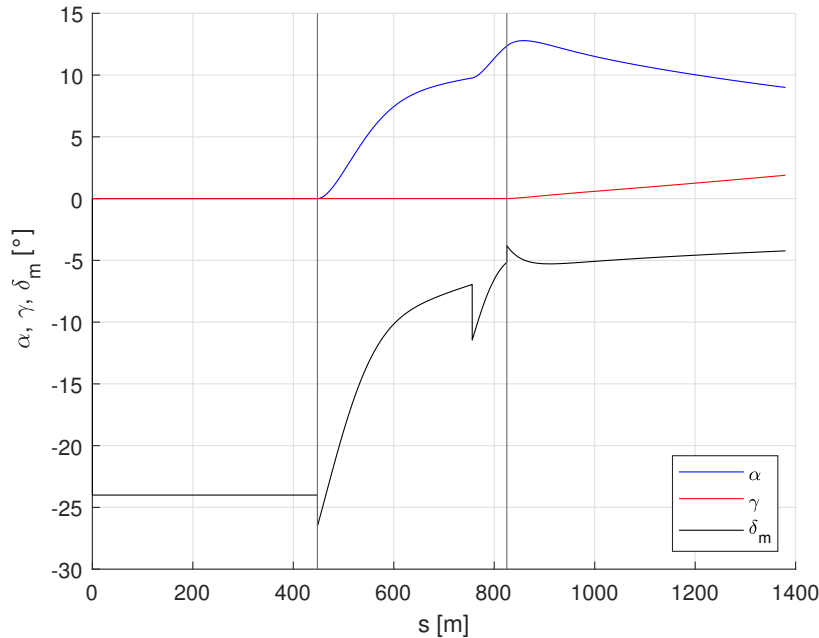
$$V_{TO} = 98 \text{ m/s.}$$

Izračunata brzina  $V_R$  neznatno je veća od maksimalne navedene u priručniku koja iznosi 75 m/s. [1] Na grafu brzine 4.2 nije primjetan trenutak promjene faze polijetanja.



Slika 4.2: Ovisnost brzine i duljine polijetanja - idealno

Zanimljiv je i graf ovisnosti napadnog kuta  $\alpha$ , kuta penjanja  $\gamma$  i kuta otklona kormila visine  $\delta_m$  o duljini polijetanja 4.3. Vertikalne linije označavaju kraj prve, odnosno druge faze polijetanja. Napadni kut maksimalnu vrijednost postiže netom nakon odvajanja zrakoplova od staze. Kormilo visine kod polijetanja se otklanja prema gore, u negativnom smjeru oko osi  $y$ , stoga njegov otklon ima negativan predznak. Tijekom prve faze polijetanja pretpostavljen je konstantan otklon kormila visine  $\delta_m$  koji je dovoljan da započne rotacija zrakoplova. Najveći apsolutni kut otklona postiže se točno u trenutku odvajanja stražnjih kotača od staze. Tijekom druge i treće faze  $\delta_m$  određen je modelom pilota, odnosno povratnom vezom koja dovodi do promjenjivih vrijednosti u tim fazama. Kut penjanja konstantan je i jednak nuli sve do trenutka odvajanja, nakon čega počinje linearno rasti.

Slika 4.3: Ovisnost kutova  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta_m$  i duljine polijetanja - idealno

## 4.2. Staze s konstantnim nagibom

Sljedeći promatrani slučaj je polijetanje na stazi s konstantnim kutem  $\gamma_p$  u istoj standardnoj atmosferi. Odabrana su tri pozitivna i tri negativna kuta poletno-sletne staze:

$$\gamma_{p1} = 1^\circ, \gamma_{p2} = 2^\circ, \gamma_{p3} = 3^\circ$$

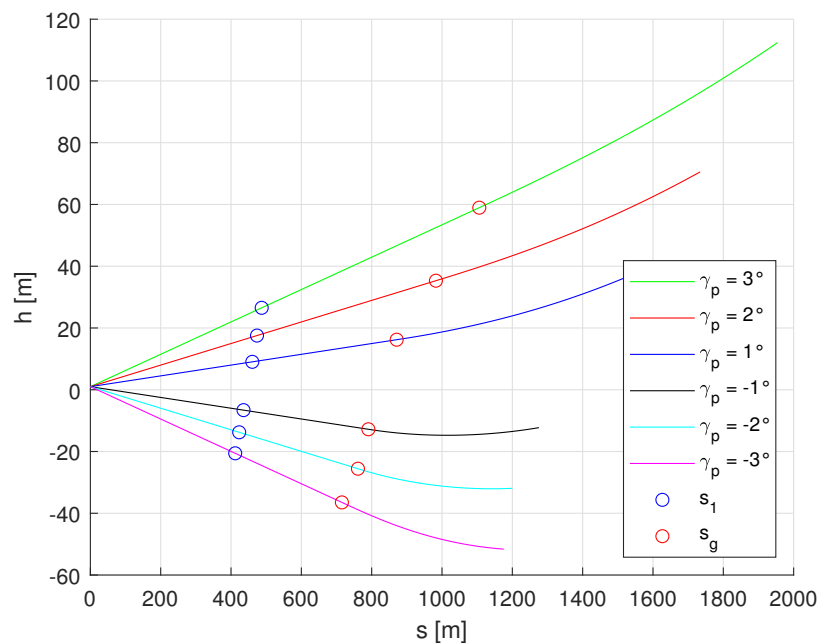
i

$$\gamma_{p4} = -1^\circ, \gamma_{p5} = -2^\circ, \gamma_{p6} = -3^\circ.$$

Nacrtao je graf ovisnosti visine zrakoplova o duljini polijetanja 4.4 za svih šest analiziranih nagiba s točkama u kojima završava prva, odnosno druga faza polijetanja. Povećanjem nagiba staze dolazi do povećanja duljina  $s_1$  i  $s_g$ , dok se smanjenjem nagiba te duljine smanjuju. Iz toga proizlazi da su duljine pojedinih faza polijetanja i ukupna duljina polijetanja proporcionalne kutu nagiba staze  $\gamma_p$ . Duljine prvih dviju faza moguće je objasniti činjenicom da kod pozitivnih kutova nagiba težina zrakoplova djeluje u suprotnom smjeru od pomaka središta mase, a kod negativnih kutova pomak



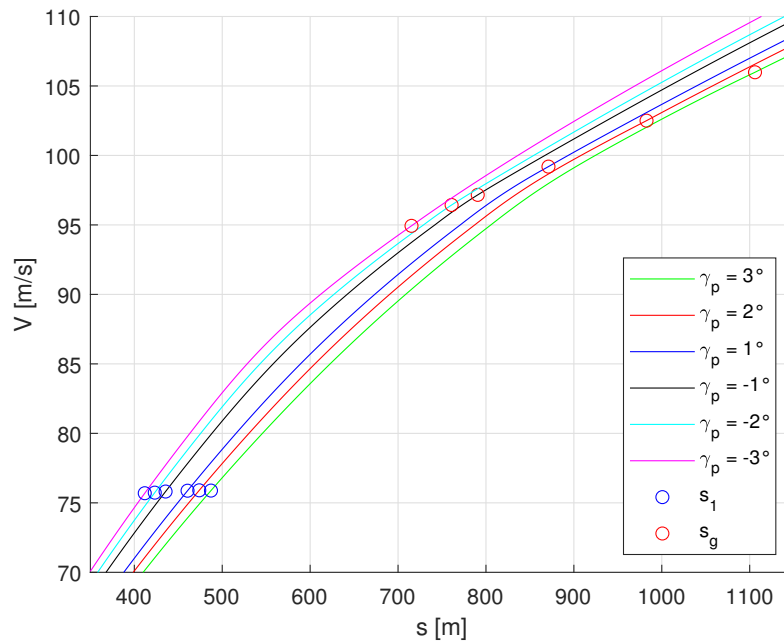
središta mase je u smjeru težine. Sila težine rastavljena je na dvije komponente i jedna od njih uvijek djeluje na pravcu otpora. U prvom slučaju ta komponenta težine djeluje u smjeru otpora i dodaje se na njega, dok u drugom djeluje suprotno od njega pa se u obzir uzima njihova razlika. Veliku razliku u trećim fazama polijetanja čini definirana visina prepreke koju zrakoplov mora preletjeti. Treća faza završava u trenutku kada je zrakoplov na visini od 10 m od staze. U slučaju pozitivnih nagiba staze, zrakoplov će se odvojiti od zemlje, ali će se nadmorska visina staze ispod njega još uvijek povećavati pa će udaljenost  $s_p$  potrebna za postizanje te visine biti veća. U drugom slučaju kada je kut nagiba staze negativan nadmorska visina staze konstantno se smanjuje pa zrakoplov nakon odvajanja od nje puno brže postiže definiranu visinu.



Slika 4.4: Visina u ovisnosti o duljini polijetanja za različite kutove nagiba staze

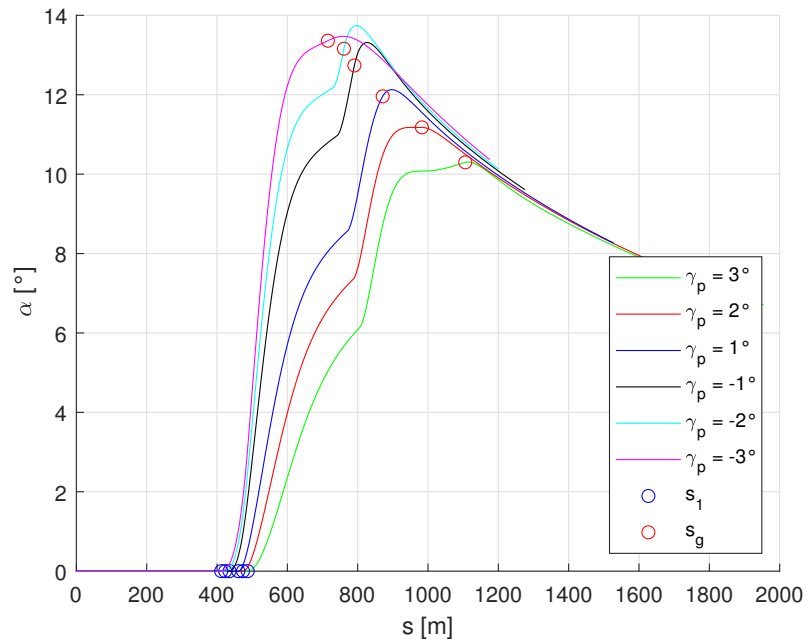
Prikazan je detalj iz dijagrama ovisnosti brzine o duljini polijetanja 4.5 na kojem se vide brzine na kraju prve i druge faze polijetanja. Postignute brzine najmanje su za najveći kut nagiba, a najveće za najmanji kut nagiba. Iz toga slijedi da su postignute brzine kod polijetanja obrnuto proporcionalne kutu  $\gamma_p$ . Brzine na kraju prve faze u svim su slučajevima gotovo identične, dok se brzine na kraju druge faze bitno razlikuju. U slučaju najvećeg kuta nagiba brzina potrebna za odvajanje zrakoplova od staze je

najveća, a za najmanji kut nagiba ona je najmanja. To je objašnjivo time da je ukupna sila duž negativne osi  $x$  brzinskog koordinatnog sustava znatno veća u slučajevima većeg nagiba pa je potrebna veća brzina za njezino savladavanje.

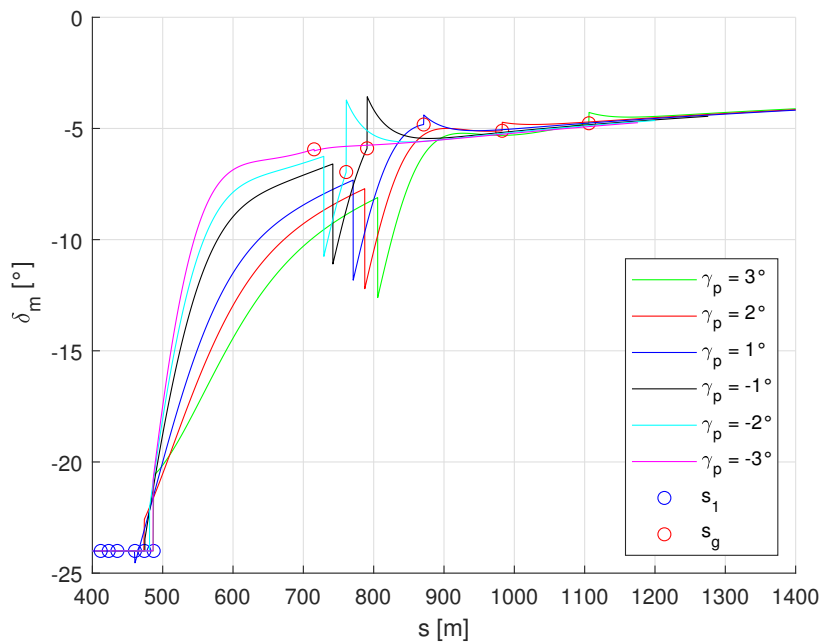


Slika 4.5: Brzina u ovisnosti o duljini polijetanja za različite kutove nagiba staze

Analizirana su još dva parametra u ovisnosti o duljini polijetanja - napadni kut  $\alpha$  i kut otklona kormila visine  $\delta_m$  i prikazani na slikama 4.6 i 4.7. Napadni kut jednak je nuli sve do trenutka odvajanja prednjeg kotača od staze, nakon čega počinje iznimno brzo rasti. Vidljivo je da kod najmanjih kutova nagiba doseže najveće maksimalne vrijednosti u blizini točke odvajanja zrakoplova od staze nakon čega opada do kraja polijetanja. Kut otklona kormila konstantan je do duljine  $s_1$ , a zatim dolazi do njegova povećanja. Za veće nagibe staze taj kut prvotno dostiže manje vrijednosti, ali s većom prijeđenom udaljenošću u svim slučajevima teži istoj vrijednosti.



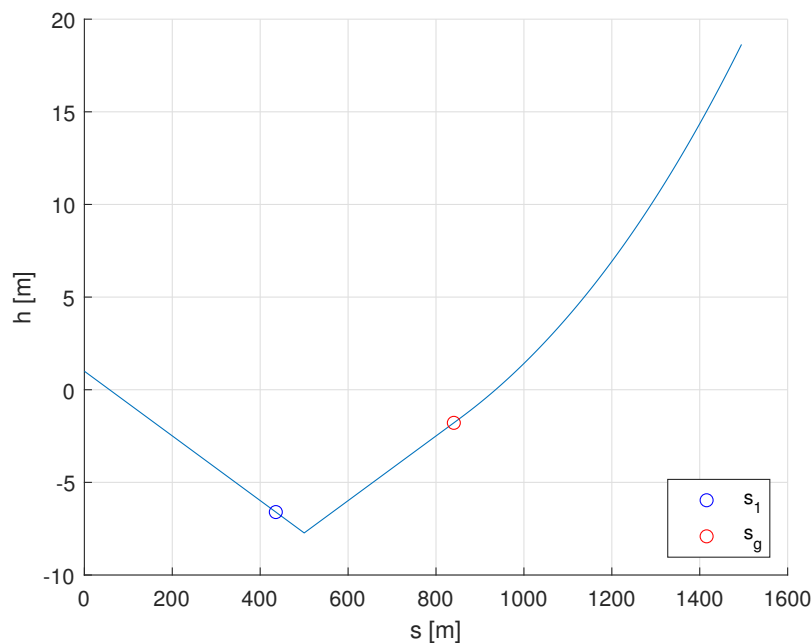
Slika 4.6: Napadni kut u ovisnosti o duljini polijetanja za različite kutove nagiba staze



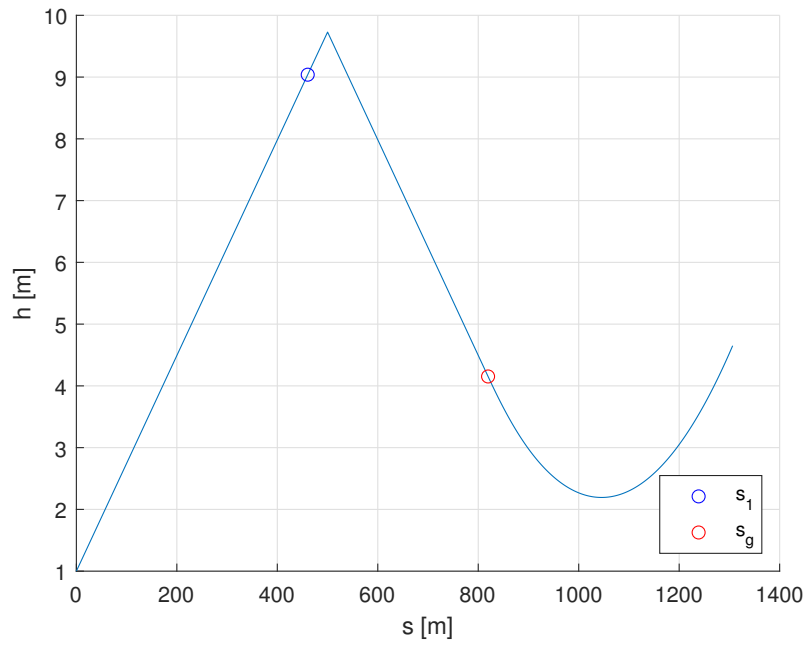
Slika 4.7: Kut otklona kormila visine u ovisnosti o duljini polijetanja za različite kutove nagiba staze

### 4.3. Staze s promjenjivim nagibom

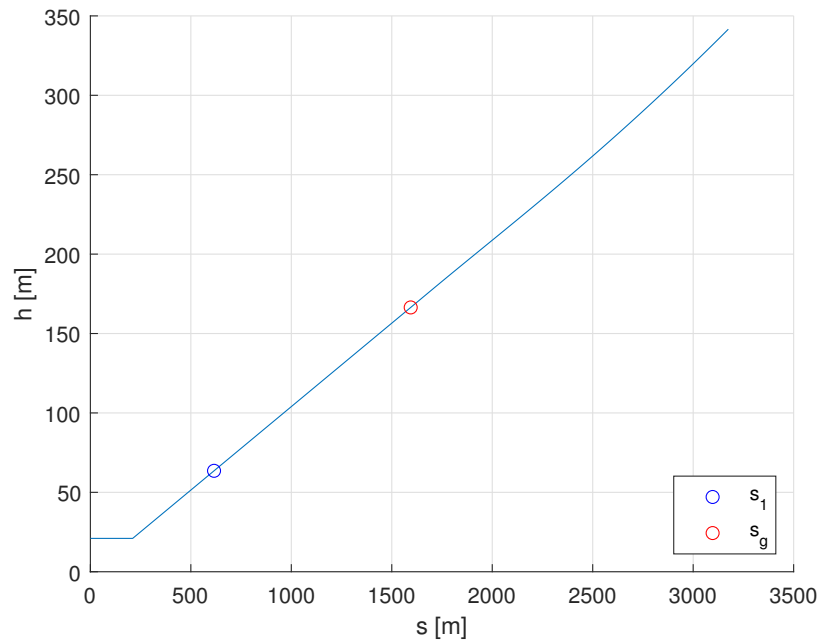
Odabrane su tri vrste poletno-sletnih staza s promjenjivim nagibom. Staza A ima nagib od  $-1^\circ$  do 500 m udaljenosti horizontalne projekcije od početka staze i nagib od  $1^\circ$  nadalje. Staza B prvih 500 m ima pozitivan nagib od  $1^\circ$ , a dalje negativan od  $-1^\circ$ . Staza C modelirana je tako da ima kratki ravni dio nakon kojeg slijedi oštar nagib, slično kao na modernim nosačima zrakoplova. Pretpostavljeno je da staza poprma nagib na udaljenosti od približno 210 m od početka. Nagib rampe je konstantan i iznosi  $6^\circ$ . Ova je staza razmatrana zbog utvrđivanja duljine polijetanja za MiG-21 na kratkim stazama koje su projektirane za moderne zrakoplove s mogućnošću kratkog polijetanja. Staze A i B postavljene su na nultoj nadmorskoj visini. Staza C postavljena je na nadmorsku visinu jednaku visini nosača iznad površine mora koja je procijenjena na 20 m. Na sve tri staze pretpostavljeno je da se nagib mijenja u jednoj točki što zbog malih kutova nagiba ne predstavlja problem pri polijetanju. Na slikama 4.8, 4.9 i 4.10 prikazane su ovisnosti visine zrakoplova o duljini polijetanja za sve tri staze.



Slika 4.8: Visina zrakoplova u ovisnosti o duljini polijetanja za stazu A



Slika 4.9: Visina zrakoplova u ovisnosti o duljini polijetanja za stazu B



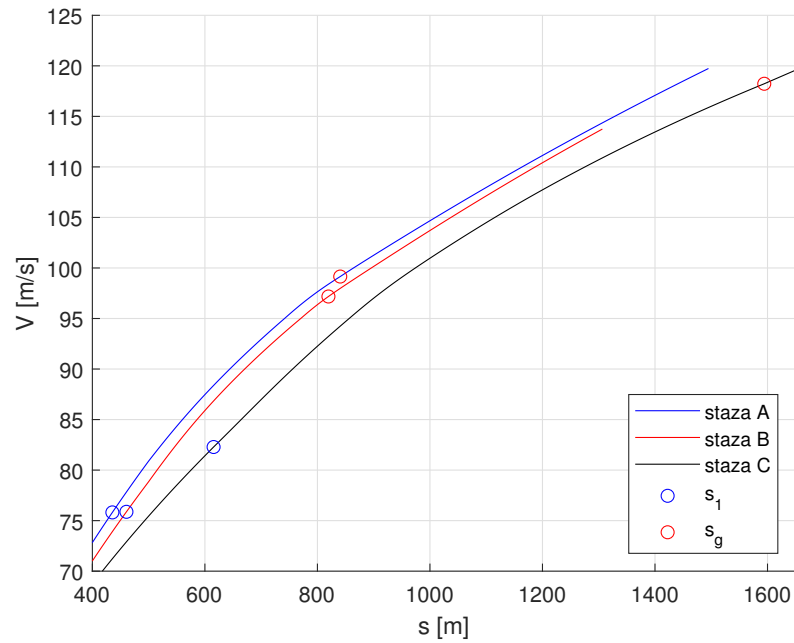
Slika 4.10: Visina zrakoplova u ovisnosti o duljini polijetanja za stazu C

U tablici 4.1 su prikazane duljine polijetanja za sve tri staze.

Tablica 4.1: Duljine polijetanja za staze A, B i C.

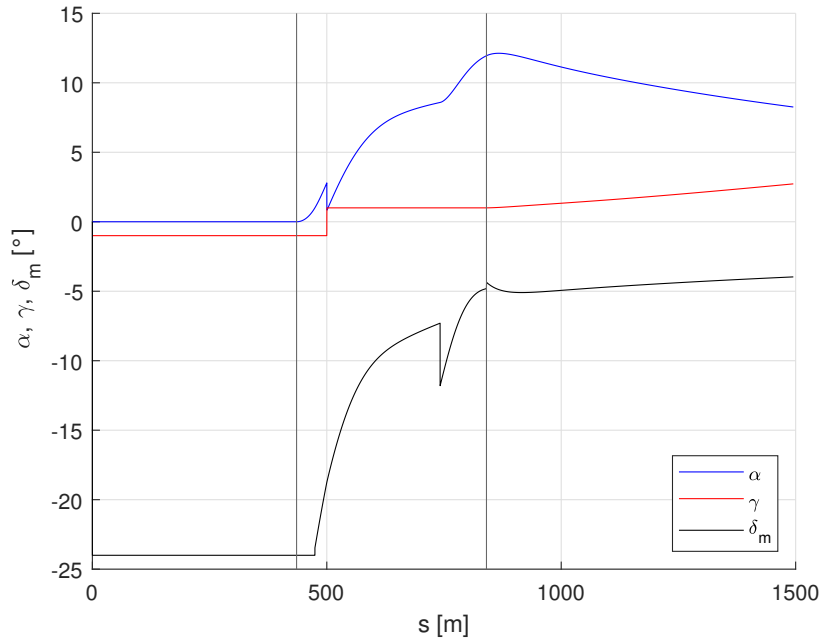
	$s_1$	$s_g$	$s_p$
staza A	435.6 m	840.6 m	1495 m
staza B	460.5 m	819.6 m	1307 m
staza C	615.5 m	1594 m	3175 m
idealna staza	448 m	825 m	1380 m

Kod staze A i B prva faza polijetanja završava na prvom dijelu, malo prije promjene nagiba. Do odvajanja prednjeg kotača od staze prije dolazi kod staze A zbog negativnog nagiba, ali zrakoplov prije gubi kontakt sa stazom na stazi B. Ipak, potrebna udaljenost za završetak treće faze polijetanja znatno je veća kod staze A pa je s tog stajališta staza B bolji izbor. Staza C ima daleko najveće duljine polijetanja. Za odvajanje zrakoplova od staze potrebna je gotovo dvostruko veća udaljenost nego kod prve dvije staze, a polijetanje bi završilo na udaljenosti većoj od tri kilometra od početne točke. Očito je da takva staza nije pogodna za MiG 21 jer bi rampa za njegovo polijetanje trebala biti duga gotovo 1400 m. Takva velika duljina potrebna je jer zrakoplov mora nadvisiti pistu za određenu visinu, a njena nadmorska visina raste s kutom nagiba od  $6^\circ$ .

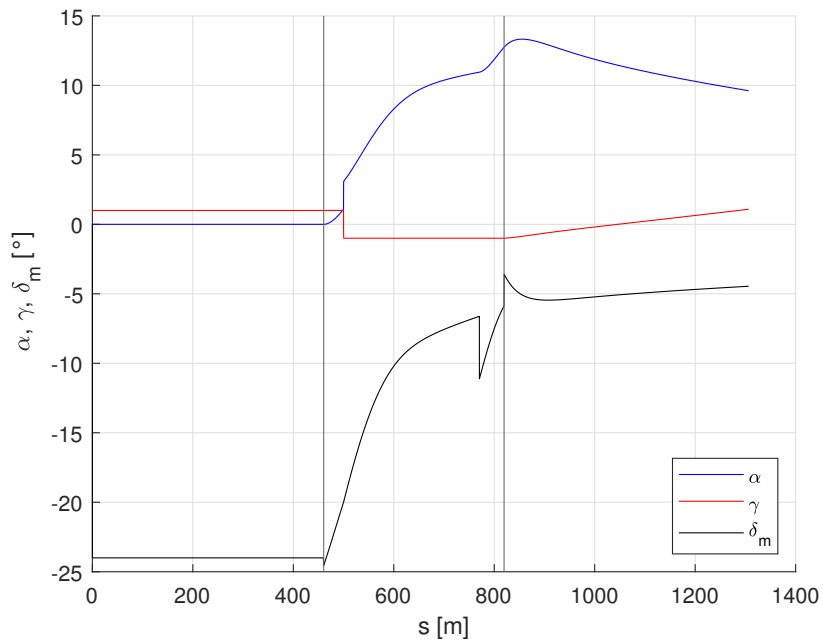


Slika 4.11: Brzina zrakoplova u ovisnosti o duljini polijetanja za staze A, B i C

Iz slike 4.11 vidljivo je da su brzine  $V_R$  za staze A i B vrlo slične, dok je za stazu C veća. Brzina odvajanja zrakoplova  $V_{TO}$  malo je veća za stazu A u odnosu na stazu B, a na stazi C je ona drastično veća. Na slikama 4.12, 4.13 i 4.14 prikazan je i dijagram ovisnosti  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $\delta_m$  o duljini polijetanja za svaku stazu. Vertikalne linije označavaju kraj prve, odnosno druge faze polijetanja.

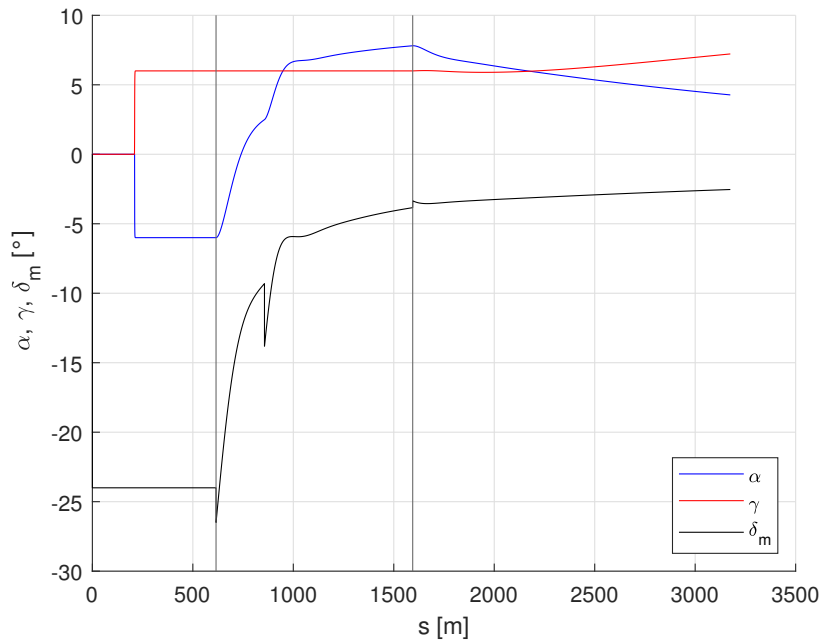


Slika 4.12: Ovisnost kutova  $\alpha, \gamma, \delta_m$  o duljini polijetanja za stazu A



Slika 4.13: Ovisnost kutova  $\alpha, \gamma, \delta_m$  o duljini polijetanja za stazu B





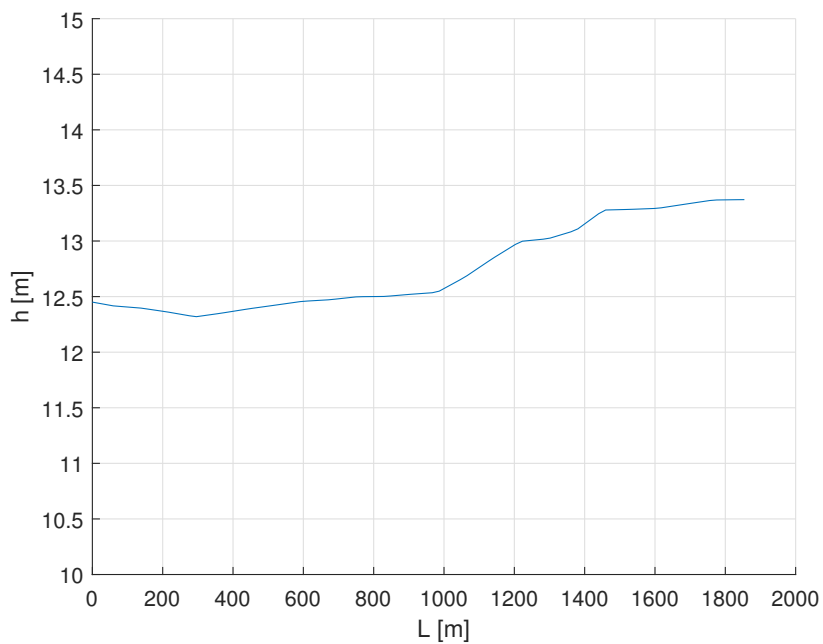
Slika 4.14: Ovisnost kutova  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta_m$  o duljini polijetanja za stazu C

Dijagrami za staze A i B vrlo su slični. Na slici 4.12 vidljiv je malo manji maksimalni napadni kut  $\alpha$  i manji apsolutni otklon kormila visine  $\delta_m$  nego na slici 4.13. Slika 4.14 za stazu C pokazuje drugačiju promjenu napadnog kuta tijekom polijetanja kod koje je na početku jednak nuli pa poprima negativnu vrijednost s koje nakon odvajanja prednjeg kotača počinje rasti do trenutka odvajanja zrakoplova od staze.

#### 4.4. Model stvarne staze

Napravljen je model stvarne poletno-sletne staze na temelju dostupnih podataka geodetskog mjerenja staze zračne luke Zonguldak u Turskoj, prikazane na slici 4.16. [5] Staza se nalazi u blizini obale Crnog mora i ima prosječnu nadmorsku visinu od otprilike 13 m i duljinu od 1870 m. Podaci sadrže izmjerenu visinu u 475 točaka na stazi, po 5 u svakom poprečnom presjeku. Iako postoje razlike i u visini na istom poprečnom presjeku staze, u modelu su korištene visine na središnjoj liniji. Tako je dobiven skup od 95 jednako razmaknutih točaka s pripadajućim visinama. Iz tih točaka izračunati su nagibi u diskretnim točkama staze. Nagibi i visine u svakom trenutku polijetanja

linearno su interpolirani iz dobivenih podataka. Na slici 4.15 je prikazana nadmorska visina točaka staze u odnosu na njihove udaljenosti od ishodišta na njenom početku.



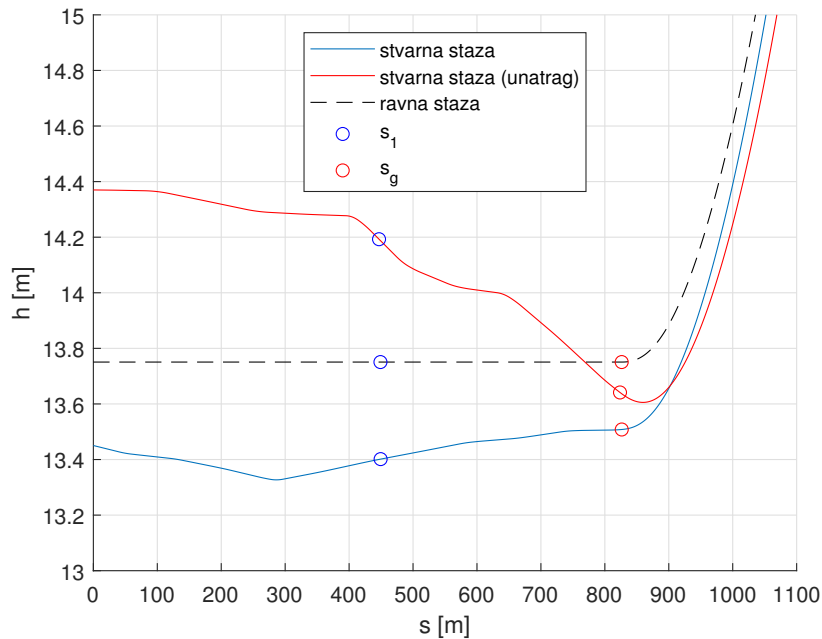
Slika 4.15: Nadmorske visine točaka staze u zračnoj luci Zonguldak



Slika 4.16: Zračna luka Zonguldak u Turskoj

Na slici 4.17 prikazan je detalj iz dijagrama ovisnosti visine zrakoplova o duljini

polijetanja za navedenu stazu i za potpuno ravnu stazu na kojem se vidi intenzivna promjena kuta nagiba stvarne staze zbog njene neravnosti.



Slika 4.17: Ovisnost visine o duljini polijetanja za stvarnu i idealnu stazu

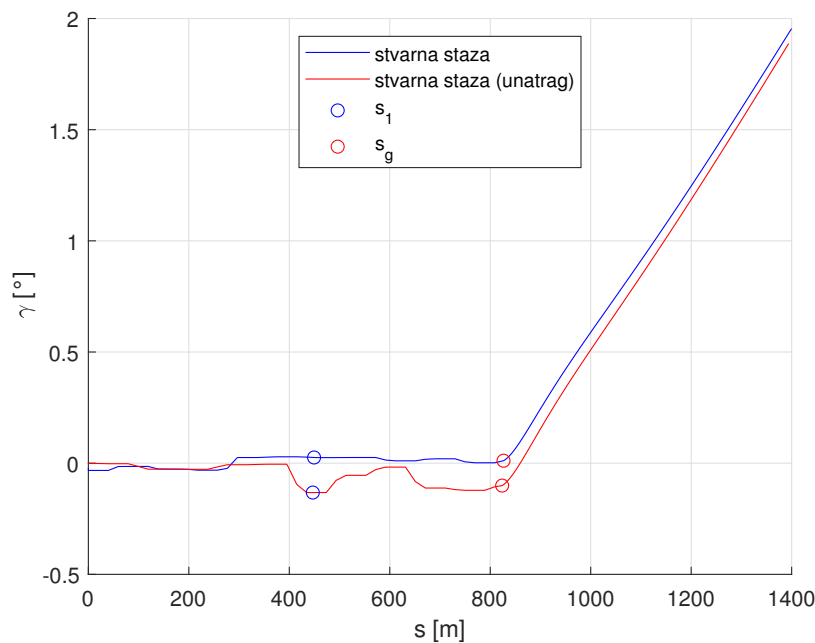
Tablica 4.2: Duljine polijetanja za model stvarne staze

	$s_1$	$s_g$	$s_p$
stvarna staza	449.3 m	826.4 m	1400 m
stvarna staza (unatrag)	446.8 m	823.7 m	1394 m
ravna staza	449 m	826.4 m	1383 m

U tablici 4.2 navedene su duljine polijetanja za slučaj polijetanja na stvarnoj stazi u oba smjera i potpuno ravne inačice te staze na konstantnoj nadmorskoj visini koja je izračunata kao prosjek visina svih točaka staze. Između duljina  $s_1$  i  $s_g$  za stvarnu i ravnu stazu razlike su zanemarive, dok je kod konačne duljine polijetanja zamjetna. Kraću ukupnu duljinu polijetanja moguće je objasniti time što staza poprma veće nagibe prema kraju. Zanimljivo je analizirati slučaj u kojem je odabran suprotan smjer polijetanja. Izračunati nagibi staze kod polijetanja sa suprotne strane postaju negativni pa je u

slučaju takvog polijetanja do kraja druge faze nagib staze negativan. Zato su duljine polijetanja  $s_1$  i  $s_g$  za takvo polijetanje manje i od onih za ravnu stazu i za polijetanje u prvom smjeru. Razlika je primjetna u trećoj fazi gdje je ukupna duljina polijetanja veća nego za potpuno ravnu stazu, ali još uvijek manja nego za polijetanje u prvom smjeru.

Ostali izračunati parametri za ova tri slučaja vrlo su slični pa ih nema potrebe prikazivati. Interesantan je jedino kut penjanja  $\gamma$  zrakoplova čija je promjena za prvi i suprotan smjer polijetanja prikazana na slici 4.18.



Slika 4.18: Ovisnost kuta penjanja zrakoplova o duljini polijetanja

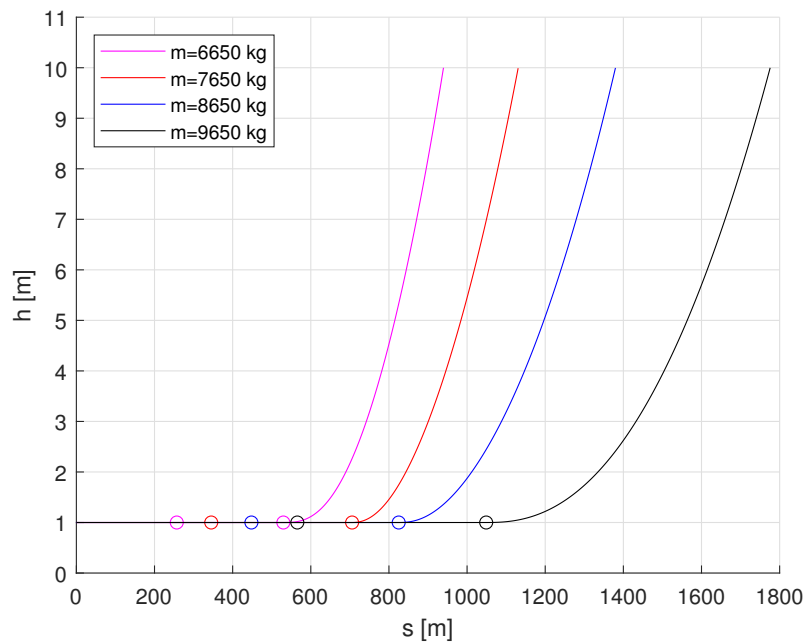
## 4.5. Utjecaj početne mase zrakoplova

Osim nagiba staze, varijabla na koju je moguće utjecati jest ukupna početna masa zrakoplova  $m$ . Količina goriva na polijetanju izravno utječe na ukupnu masu pa je analizirana potrebna duljina polijetanja za različite početne mase. Sve dosadašnje analize provedene su s početnom masom od 8650 kg pa su u ovoj analizi odabrane početne mase različite za višekratnik jedne tone od početne. Duljine polijetanja prikazane su u tablici 4.3.

Tablica 4.3: Duljine polijetanja za različite početne mase

	$s_1$	$s_g$	$s_p$
m=6650 kg	257 m	529.8 m	939.8 m
m=7650 kg	345.1 m	705.7 m	1131 m
m=8650 kg	448 m	825 m	1380 m
m=9650 kg	565.5 m	1049 m	1776 m

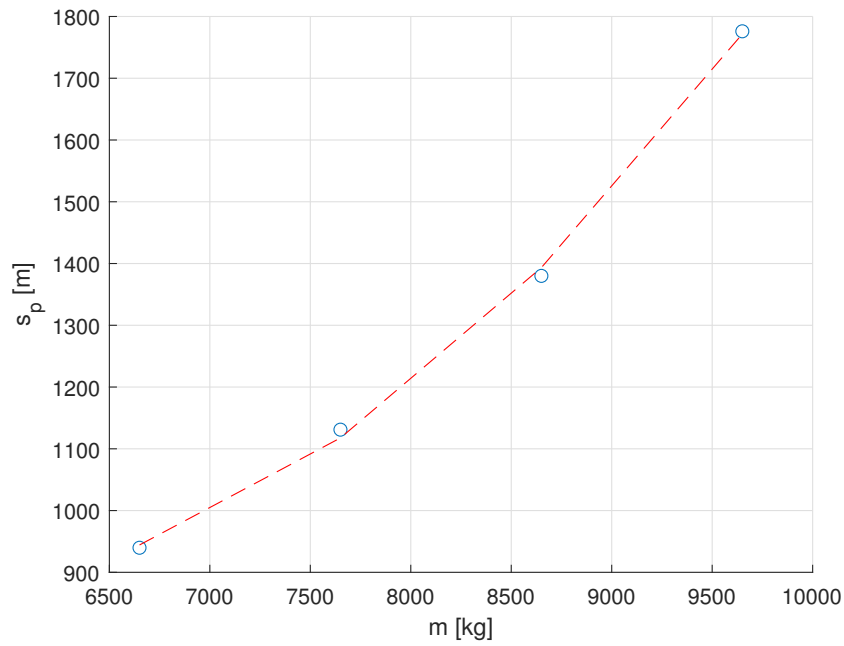
Promjena visine zrakoplova s obzirom na duljinu polijetanja za četiri različite početne mase prikazana je na slici 4.19 s točkama koje označavaju kraj prve, odnosno druge faze polijetanja.



Slika 4.19: Visina u odnosu na duljinu polijetanja za različite početne mase

Promjena početne mase goriva značajno utječe na duljinu polijetanja. Razlika u ukupnoj duljini polijetanja najočitija je između dvije najveće početne mase. Pri analizi je bitno prepostaviti količinu goriva koja ne prelazi maksimalnu dopuštenu masu zrakoplova na polijetanju, a s druge strane nije toliko mala da zrakoplov nema dovoljno goriva za polijetanje. Usporedbom ukupnih duljina polijetanja s različitim početnim masama

na slici 4.20 vidljivo je da povećanjem mase duljina polijetanja nelinearno raste. Plavim kružićima označene su ukupne duljine polijetanja za pojedine početne masu, a crvena linija vrijednosti interpolirane krivuljom drugog reda.

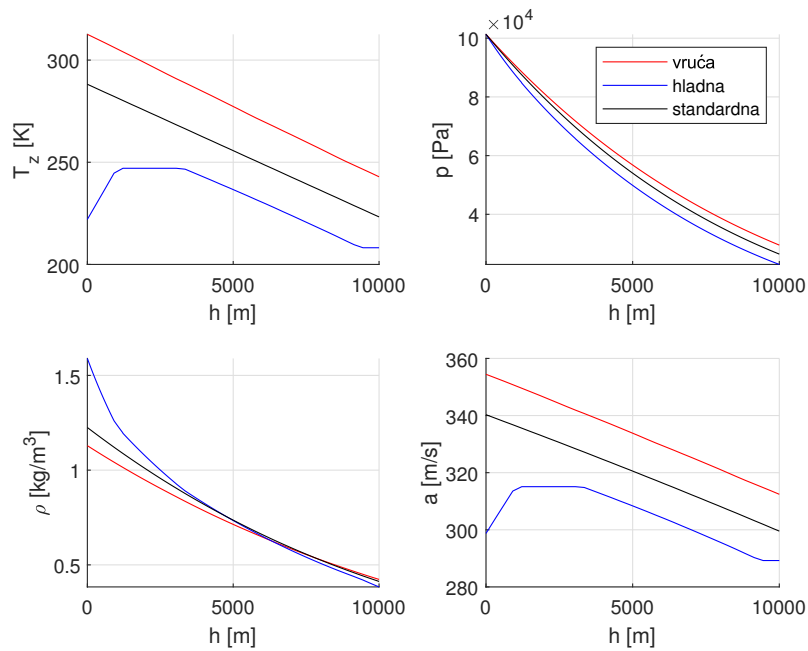


Slika 4.20: Ukupne duljine polijetanja s obzirom na početnu masu

# 5 Analiza utjecaja nestandardnih atmosferskih uvjeta

## 5.1. Ravna staza

Osim standardne, polijetanje je analizirano u još dvije nestandardne atmosfere modelirane prema standardima MIL-STD-210A. Po njima su definirane četiri nestandardne atmosfere: vruća, hladna, polarna i tropska.[6] [7] Za daljnju analizu odabrane su vruća i hladna atmosfera jer su najčešće od četiri navedene. Model daje vrijednosti temperature  $T_z$ , tlaka  $p$ , gustoće zraka  $\rho$  i brzine zvuka  $a$  na zadanoj nadmorskoj visini  $h$ . Ovisnost tih veličina o visini  $h$  prikazana je na slici 5.1 sa standardnom atmosferom za usporedbu. Izračunate su vrijednosti do 10 km nadmorske visine, ali za polijetanje su najzanimljivije vrijednosti izračunatih veličina za manje nadmorske visine. Temperatura u vrućoj atmosferi linearno opada od početne vrijednosti od otprilike 313 K, a u hladnoj raste s prvim kilometrom nadmorske visine, zatim je konstantna i na višim nadmorskim visina počinje linearno opadati. Vrijednosti tlakova za obje atmosfere su slične, pogotovo na manjim visinama. Gustoća zraka bitno je drugačija na nultoj nadmorskoj visini za hladnu atmosferu, dok s visinom poprima slične vrijednosti za obje atmosfere. Promjena brzine zvuka identična je promjeni temperature jer brzina zvuka u fluidu izravno ovisi o njegovoj temperaturi.



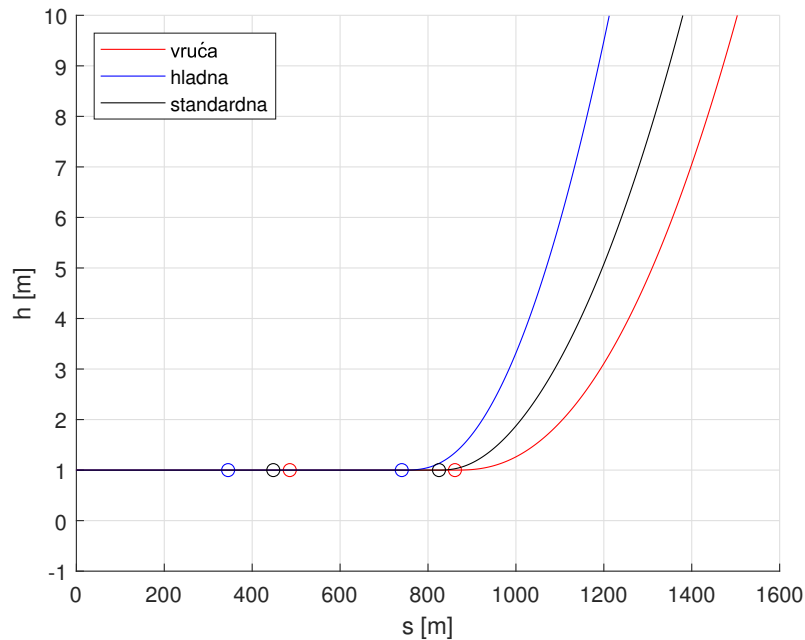
Slika 5.1: Temperature, tlakovi, gustoća i brzina zvuka za nestandardne atmosfere

Prvo je analizirano polijetanje na potpuno ravnoj stazi u vrućoj i hladnoj atmosferi. Rezultati duljina polijetanja prikazani su u tablici 5.1 s ranije izračunatim vrijednostima za standardnu atmosferu za usporedbu. Na slici 5.2 prikazan je dijagram ovisnosti visine o duljini polijetanja za sve tri atmosfere. Za svaku atmosferu ucrtane su dvije točke, prva označava duljinu  $s_1$ , a druga  $s_g$ .

Tablica 5.1: Duljine polijetanja za nestandardne atmosfere

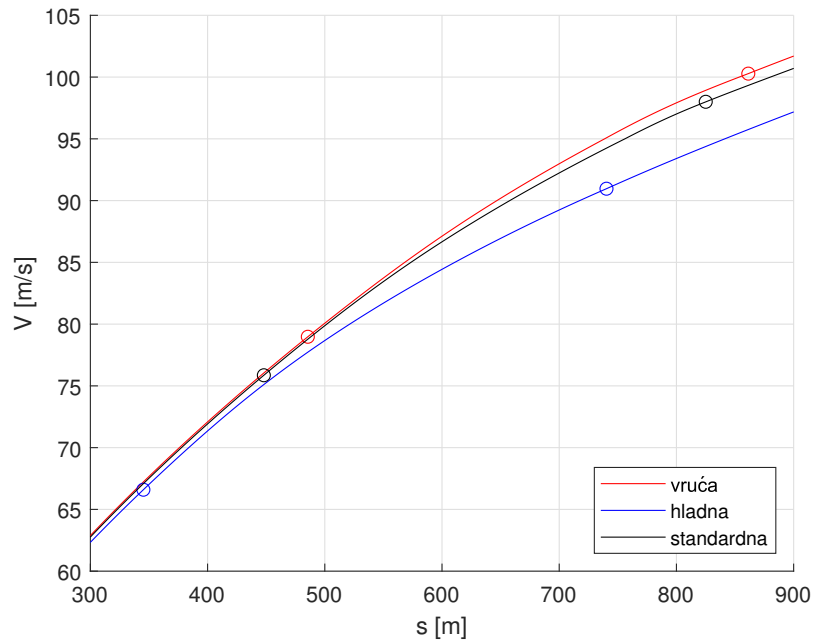
	$s_1$	$s_g$	$s_p$
vruća	485.5 m	861.3 m	1504 m
hladna	345.2 m	740.3 m	1213 m
standardna	448 m	825 m	1380 m





Slika 5.2: Ovisnost visine o duljini polijetanja za nestandardne atmosfere

Razlike duljina polijetanja za vruću i hladnu atmosferu iznimno su velike. U hladnoj atmosferi duljine polijetanja su manje nego u toploj, što je moguće objasniti većom gustoćom zraka pri nižim temperaturama. Za standardnu atmosferu dobivene vrijednosti nalaze se između onih za toplu i hladnu. Iako se hladna atmosfera pokazuje kao najbolja sa stajališta duljine polijetanja, zanimljivo je primijetiti da je druga faza, od  $s_1$  do  $s_g$ , u takvoj atmosferi najdulja. Druga zanimljiva varijabla je brzina čija je ovisnost o duljini polijetanja za atmosfere prikazana na slici 5.3 s točkama koje označuju kraj prve, odnosno druge faze polijetanja.



Slika 5.3: Ovisnost brzine o duljini polijetanja za nestandardne atmosfere

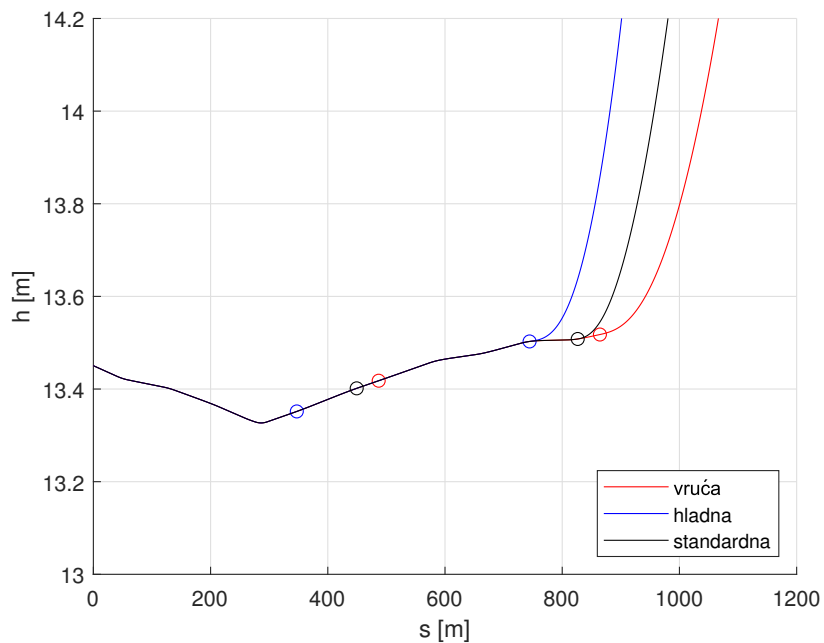
Brzine za vruću i standardnu atmosferu imaju sličan profil i iznosima su znatno veće od onih za hladnu atmosferu. To pokazuje da je u hladnoj atmosferi ukupna duljina polijetanja  $s_p$  najkraća, ali do nje dolazi pri najmanjoj brzini  $V_{TO}$  zbog povećanog uzgona u atmosferi s većom gustoćom zraka.

## 5.2. Model stvarne staze

Utjecaj nestandardnih atmosfera analiziran je i na modelu stvarne staze u Turskoj. Duljine polijetanja prikazane su u tablici 5.2, a detalj iz dijagrama ovisnosti visine o duljini polijetanja na slici 5.4. Vrijednosti su vrlo bliske onima za potpuno ravnu stazu na nultoj nadmorskoj visini.

Tablica 5.2: Duljine polijetanja za nestandardne atmosfere na modelu stvarne staze

	$s_1$	$s_g$	$s_p$
vruća	486.8 m	864.3 m	1528 m
hladna	347.1 m	744.3 m	1228 m
standardna	449.3 m	826.4 m	1400 m



Slika 5.4: Ovisnost brzine o duljini polijetanja za nestandardne atmosfere na modelu stvarne staze

## 6 Analitičko rješenje

Duljinu polijetanja moguće je izračunati i analitičkim postupkom koji u obzir ne uzima kut nagiba staze. U takvom proračunu koeficijent momenta propinjanja  $C_m$ , koeficijent uzgona  $C_L$ , koeficijent nultog otpora  $C_{D0}$  i koeficijent inducirano otpora  $K$  smatraju se konstantnim, što kod proširenog modela materijalne točke nije slučaj. Gustoća zraka u proračunu preuzeta je iz modela standardne atmosfere pri nultoj nadmorskoj visini. Za analitički proračun potrebno je odrediti brzinu odvajanja prednjeg kotača  $V_R$  i brzinu odvajanja zrakoplova od staze  $V_{TO}$ . Izrazi po kojima se računaju preuzeti su iz [2]:

$$V_R = \sqrt{\frac{2W(l_s + \mu k_s)}{\rho S_{ref}[c_A C_m + C_L(l_s + \mu k_s)]}}, \quad (6.1)$$

$$V_{TO} = 1.1 \sqrt{\frac{2W}{\rho S_{ref} C_{Lmax}}}. \quad (6.2)$$

One imaju velik utjecaj na analitički račun duljine polijetanja. U provedenom analitičkom proračunu te su brzine procijenjene prema tablici 6.1. Također je prikazan njihov iznos izračunat numeričkim proširenim modelom materijalne točke za slučaj polijetanja u idealnim uvjetima.

Tablica 6.1: Usporedba analitičkih i numeričkih brzina polijetanja

	analitički	numerički	razlika
$V_R$	75 m/s	75.86 m/s	-1.1%
$V_{TO}$	98 m/s	98 m/s	0%

Analitički proračun ograničen je samo na prve dvije faze polijetanja, odnosno na računanje duljina  $s_1$  i  $s_g$ . One su računate po izrazima:

$$s_1 = \frac{1}{2C} \ln \frac{A + BV_R + CV_R^2}{A + BV_0 + CV_0^2} - \frac{V_W}{2\sqrt{-AC}} \ln \frac{(V_R - V_1)(V_0 - V_2)}{(V_R - V_2)(V_0 - V_1)}, \quad (6.3)$$

$$s_g = \frac{1}{2C} \ln \frac{A + BV_{TO} + CV_{TO}^2}{A} - \frac{B}{2C^2(V_1 - V_2)} \ln \frac{(V_1 - V_{TO})V_2}{(V_2 - V_{TO})V_1}, \quad (6.4)$$

gdje su  $A$ ,  $B$  i  $C$  koeficijenti pripadajućeg polinoma,  $V_1$  i  $V_2$  njegovi korijeni,  $V_0$  početna brzina, a  $V_W$  brzina vjetra. U tablici 6.2 prikazane su duljine polijetanja izračunate analitičkim i numeričkim modelom.

Tablica 6.2: Usporedba analitičkih i numeričkih duljina polijetanja

	analitički	numerički	razlika
$s_1$	445.7 m	448 m	-0.5%
$s_g$	782 m	825 m	-5.2%

Brzine polijetanja izračunate analitičkim i numeričkim putem bitno se ne razlikuju. Duljina  $s_1$  dobivena analitičkim putem gotovo je jednaka duljini dobivenoj numeričkim modelom. S druge strane, duljina odvajanja zrakoplova od staze ima nešto veće odstupanje i njena točnost ne zadovoljava preciznije proračune. Za proračun duljine odvajanja prednjeg kotača od staze analitička metoda daje dovoljno točne vrijednosti pa numerički proračun nije potreban, uz uvjet dobro pretpostavljenih brzina  $V_R$  i  $V_{TO}$ .

Duljinu polijetanja na kraju druge faze moguće je analitički izračunati i na jednostavniji način, prema izrazu [8]

$$s_g = \frac{1.44W^2}{g\rho S_{ref} C_{Lmax} T}. \quad (6.5)$$

Pri izvođenju ovog izraza pretpostavljeno je da je srednja vrijednost sile  $F = D + \mu(W - L)$  tijekom polijetanja jednaka vrijednosti za  $0.7V_{TO}$ . Druga je pretpostavka da je težina zrakoplova puno veća od sile otpora koja na njega djeluje i sile trenja na stazi.

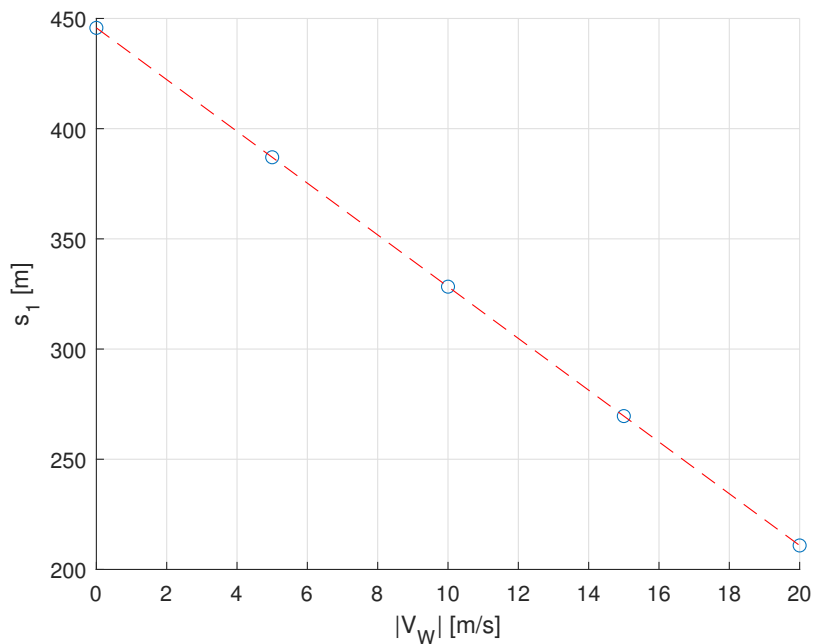
Uvrštavanjem podataka za zrakoplov u jednadžbu, dobivena je duljina polijetanja

$$s_g = 823.3 \text{ m}$$

koja je puno bliža numeričkom rješenju nego prvotnom analitičkom, uz korištenje jednostavnijeg postupka.

## 6.1. Utjecaj vjetra na duljinu polijetanja

Analitičkim proračunom moguće je analizirati utjecaj vjetra na duljinu polijetanja. Vjetar nema utjecaj na duljinu potrebnu za odvajanje zrakoplova od staze  $s_g$ , ali znatno utječe na duljinu  $s_1$ . Na slici 6.1 prikazan je dijagram ovisnosti brzine čeonog vjetra  $V_W$  o duljini prve faze polijetanja  $s_1$  za brzine vjetra od 0, 5, 10, 15 i 20 m/s na potpuno ravnoj stazi. Plavi kružići predstavljaju duljine polijetanja za razmatrane brzine vjetra, a crvena linija predstavlja linearno interpolirane vrijednosti.



Slika 6.1: Ovisnost duljine prve faze polijetanja o brzini vjetra

Duljina prve faze polijetanja linearno se smanjuje s povećanjem brzine čeonog vjetra. Povećana brzina povećava uzgon zrakoplova što dovodi do ranijeg odvajanja prednjeg kotača od staze.

## 7 | Zaključak

Provedena je analiza utjecaja nagiba poletno-sletne staze i atmosferskih uvjeta na duljinu polijetanja zrakoplova MiG-21. Iz rezultata dobivenih numeričkim proračunom temeljenim na proširenom modelu materijalne točke izvedeni su sljedeći zaključci.

- Za male kutove nagiba piste razlika u duljini polijetanja postoji, ali nije toliko izražena kao kod promjene atmosferskih uvjeta ili početne mase zrakoplova.
- Na modelu stvarne staze gdje su promjene kuta nagiba česte, ali malog iznosa, razlika u duljini polijetanja gotovo je i zanemariva jer promjena kuta nagiba utječe samo na težinu zrakoplova koju je u tom slučaju potrebno rastaviti na dvije komponente.
- Povećanjem početne mase zrakoplova duljina polijetanja nelinearno raste.
- Različite nestandardne atmosfere primarno se razlikuju po temperaturi koja utječe na ostale veličine stanja atmosfere. Zbog toga dolazi do promjene sile uzgona, sile otpora i sile potiska motora zrakoplova. Smanjenjem temperature gustoća zraka se povećava, a time raste maseni protok kroz motor što izravno povoljno utječe na potisak. Zbog rasta dinamičkog tlaka povećavaju se sila uzgona, ali i sila otpora. Iz navedenih razloga hladnije atmosfere su bolje sa stajališta što manje duljine polijetanja.
- Usporedba analitičkog proračuna duljine staze s numeričkim rješenjem pokazuje slične rezultate dobivene manje računski zahtjevnim putem.



- Povećanjem brzine čeonog vjetra u analitičkom proračunu duljina polijetanja linearno se smanjuje.

U daljnjem radu u numerički model trebalo bi implementirati mogućnost utjecaja vjetra na duljinu polijetanja. U takvom modelu bilo bi moguće analizirati i utjecaj vjetra na staze s promjenjivim kutom nagiba i usporediti takve rezultate s analitičkim rješenjima. U model bi također bilo moguće dodati druge zrakoplove i usporediti duljine polijetanja za zrakoplove s mlaznim i elisnim motorima.

# Literatura

- [1] M. Vrdoljak and I. Zovak. Application of steady state model for flight path planning of the fighter airplane including take-off and landing. In *Proceedings of 7th ICCSM International Congress of Croatian Society of Mechanics*, Zadar, Hrvatska, 2012. Studio HRG.
- [2] S. Janković. *Mehanika leta zrakoplova*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2001.
- [3] I. Vidović. Ocjena radnog opterećenja i razine kvalitete direktnog upravljanja borbenog zrakoplova. Master's thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2022.
- [4] P. Kesić. *Osnove aerodinamike*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2003.
- [5] Mendeley Data. Spaceborne digital elevation data of runway at Zonguldak airport, Turkey. <https://data.mendeley.com/datasets/3ts2h4v8m8/1>, 2019. pristupljeno u veljači 2022.
- [6] J. C. Zuppardo. *Graphical Comparison of U.S. Standard Atmospheres and Military Standard Climatic Extremes*. 1993.
- [7] P. Car. Simulacija leta aviona opće avijacije u nestandardnoj atmosferi s vjetrom. Master's thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2021.
- [8] J. D. Anderson. *Introduction to Flight*. McGraw-Hill, 7th edition, 2012.