

# Aerodinamičke značajke konfiguracije tandem krila

---

**Matić, Filip**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:315642>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-25**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Filip Matić**

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Student:

Filip Matic

Zagreb, 2022.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu. Zahvaljujem se obitelji na potpori, svojoj djevojci, te mentoru Milanu Vrdoljaku i asistentu Marijanu Andriću na vodstvu.

Filip Matić



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum: 02-2022	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 22 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 - 159	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Filip Matić** JMBAG: **0069075384**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Aerodinamičke značajke konfiguracije tandem krila**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Aerodynamic characteristics of tandem wing configuration**

Opis zadatka:

Konfiguracija tandem krila (engl. tandem wing) s dva krila podjednake površine ne-konvencionalna je i ima rijetku primjenu u praksi. Kod određenih zahtjeva na konfiguraciju, poput ograničenja maksimalne dimenzije raspona krila, takva konfiguracija bi mogla ostvariti veću poletnu masu od konvencionalne konfiguracije. U konfiguraciji tandem krilo uobičajeno se prednje krilo postavlja blizu nosa letjelice, a stražnje nizstrujno, bliže repu letjelice. S aspekta aerodinamike od interesa je analiza interferencije između dva krila. Vrtložni trag prednjeg krila, ovisno o relativnom geometrijskom položaju u odnosu na stražnje krilo, može imati značajan utjecaj na aerodinamičke značajke sile uzgona i momenta propinjanja na stražnjem krilu, a taj utjecaj može biti promjenjiv ovisno o uvjetima leta. Provedba ovakve analize moguća je primjenom teorije noseće linije za oba krila te odgovarajućim modelom vrtložnog traga. Kako se vrtložni trag nakon napuštanja izlaznog ruba modificira i razvija nizstrujno prikladna bi bila primjena metode slobodnog traga (engl. free-wake method ili free-vortex method) koja trag opisuje segmentima vrtložnih niti. Nizstrujne pozicije čvorova tih segmenata u tragu određene su lokalnom brzinom, koja je značajnim dijelom definirana brzinom induciranom samim vrtložnim tragom.

Predmet rada je primjena prilagođenog modela noseće linije za određivanje aerodinamičkih značajki odabrane konfiguracije tandem krila. U okviru završnog rada potrebno je:

- prikazati geometriju i sve potrebne podatke za odabranu konfiguraciju tandem krila;
- odrediti aerodinamičke značajke izoliranih krila tandem konfiguracije;
- odrediti aerodinamičke značajke ukupne konfiguracije tandem krilo;
- analizirati utjecaj parametara od interesa, međusobnog položaja krila te napadnog kuta.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VII
1. UVOD.....	1
1.1. Tijek istraživanja.....	1
2. Matematički model .....	2
2.1. Krilo u nestlačivoj struji zraka .....	2
2.2. Model noseće linije .....	3
2.2.1. Princip metode noseće linije .....	4
2.2.2. Inducirane brzine.....	5
2.2.3. Određivanje intenziteta $\Pi$ vrtloga .....	6
2.2.4. Aerodinamički koeficijenti krila .....	7
2.3. Slobodan trag .....	8
2.3.1. Vrtložna jezgra.....	10
3. Numerička implementacija matematičkog modela .....	11
3.1. Weissinger za jedno krilo.....	11
3.2. Slobodan trag .....	12
3.3. Aerodinamički koeficijenti tandem konfiguracije .....	13
4. Rezultati.....	16
4.1. Usporedba rezultata Weissingerove metode i slobodnog traga .....	17
4.2. Usporedba rezultata za promjenu napadnog kuta .....	19
4.3. Usporedba rezultata za promjene horizontalnog pomaka .....	22
4.4. Usporedba rezultata za promjene vertikalnog pomaka .....	24
4.5. Usporedba rezultata za promjenu postavnog kuta prednjeg krila .....	26
5. Zaključak .....	29
6. Literatura.....	30

**POPIS SLIKA**

Slika 2.1 Strujanje na krilu [3] .....	2
Slika 2.2 Vrtložna plahta [3] .....	3
Slika 2.3 Promjena intenziteta cirkulacije [3] .....	4
Slika 2.4 Geometrija krila zamijenjena vrtlozima [3] .....	5
Slika 2.5 Položaj točaka na segmentu [3] .....	5
Slika 2.6 Rubni uvjeti [3] .....	6
Slika 2.7 Elementarna aerodinamička sila na segment prema Žukovskom [3.] .....	7
Slika 2.8 Točke diskretiziranog traga .....	9
Slika 2.9 Deformirani trag, referentna konfiguracija, $\alpha = 8^\circ$ .....	9
Slika 3.1 Diskretizirano krilo .....	11
Slika 3.2 Pretpostavljeni pravocrtni trag .....	12
Slika 3.3 Deformirani trag .....	13
Slika 3.4 Raspodjela $G$ po rasponu krila .....	13
Slika 3.5 Raspodjela $G$ po rasponu krila .....	14
Slika 3.6 Raspodjela $\Gamma$ po rasponu krila .....	15
Slika 4.1 Referentna geometrija .....	16
Slika 4.2 Raspodjela $G$ Weissingerovu metodu .....	17
Slika 4.3 Raspodjela $G$ za slobodni trag .....	17
Slika 4.4 Deformirani trag za referentnu konfiguraciju .....	18
Slika 4.5 Ovisnost $C_L$ o $\alpha$ .....	19
Slika 4.6 Ovisnost $C_{L\alpha}$ o $\alpha$ .....	20
Slika 4.7 Ovisnost $C_{Dind}$ o $\alpha$ .....	20
Slika 4.8 Prikaz vrtložnog traga za $\alpha=8^\circ$ .....	21
Slika 4.9 Ovisnost $C_L$ o $\Delta X/c$ .....	22
Slika 4.10 Ovisnost $C_{L\alpha}$ o $\Delta X/c$ .....	23
Slike 4.11 Ovisnost $C_{Dind}$ o $\Delta X/c$ .....	23
Slika 4.12 Slobodni trag za horizontalni pomak od dvije tetive .....	24
Slika 4.13 Ovisnost $C_L$ o $\Delta Z/c$ .....	25
Slike 4.14 Ovisnost $C_{L\alpha}$ o $\Delta Z/c$ .....	25
Slike 4.15 Ovisnost $C_{Dind}$ o $\Delta Z/c$ .....	26
Slika 4.16 Slobodan trag za krila u istoj ravnini .....	26
Slika 4.17 Ovisnost $C_L$ o postavnom kutu .....	27

---

Slika 4.18 Ovisnost $C_{L\alpha}$ o postavnom kutu.....	27
Slika 4.19 Ovisnost $C_{Dind}$ o postavnom kutu.....	28
Slika 4.20 Trag za postavni kut $i_W=4^\circ$ .....	28



---

**POPIS TABLICA**

Tablica 2.1 Rezultati za referentnu konfiguraciju, $\alpha=8^\circ$ .....	10
Tablica 4.1 Usporedba aerodinamičkih koeficijenata .....	18

**POPIS OZNAKA**

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis oznake</b>
<i>A</i>	[-]	vitkost krila
<i>a<sub>0</sub></i>	[-]	gradijent sile uzgona aeroprofila
<b>B</b>	[1/m]	matrica koja povezuje induciranu brzinu i cirkulaciju
<i>b</i>	[m]	raspon krila
<i>C<sub>Dind</sub></i>	[-]	koeficijent induciranog otpora
<i>C<sub>L</sub></i>	[-]	koeficijent sile uzgona krila
<i>C</i>	[-]	koeficijent
<i>c</i>	[m]	tetiva krila
<i>D</i>	[N]	sila otpora
<i>G</i>	[-]	bezdimenzijska cirkulacija
<i>h</i>	[m]	udaljenost kontrolne točke od ¼ tetive
<i>i<sub>w</sub></i>	[rad]	postavni kut krila
<b>J</b>	[-]	jedinična matrica
<i>L</i>	[N]	sila uzgona
<i>m</i>	[-]	broj Π -vrtloga
<i>n</i>	[m]	normala na segment krila
<i>r</i>	[m]	vektor položaja
<i>S</i>	[m <sup>2</sup> ]	površina krila
<i>V<sub>∞</sub></i>	[m/s]	brzina slobodne struje
<i>w</i>	[m/s]	inducirana brzina
<i>x<sub>w</sub></i>	[m]	horizontalni razmak između krila
<i>z<sub>w</sub></i>	[m]	vertikalni razmak između krila
<i>Γ</i>	[m <sup>2</sup> /s]	cirkulacija
<i>ΔX</i>	[m]	horizontalni pomak stražnjeg krila
<i>ΔZ</i>	[m]	vertikalni pomak stražnjeg krila
<i>Φ</i>	[rad]	kut dihedrala
<i>Λ</i>	[rad]	kut strijele

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis oznake</b>
$\alpha$	[rad]	napadni kut
$\vartheta$	[rad]	kut između vektora položaja
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća

---

**SAŽETAK**

Konfiguracije zrakoplova kroz povijest se nisu puno mijenjale primarno zbog rigoroznih sigurnosnih zahtijevam koji za sobom povlače dugotrajan razvoj koji je potrebna za certifikaciju novih konfiguracija i naravno sve to košta te je i također pitanje isplativosti. Tandem konfiguracija ako je pravilno izvedena potencijalno može značajno povećati koristan teret zrakoplova, bez da se povećava raspon krila. U ovom radu koristeći Weissingerovu metodu noseće linije sa slobodnim tragom napravljena je procjena aerodinamičkih veličina za tandem konfiguraciju, ova metoda je odabrana da se može bolje proučiti interakcija stražnjeg i prednjeg krila.

Ključne riječi: Weissingerova metoda noseće linije, tandem konfiguracija, slobodan trag

---

**SUMMARY**

Aircraft configurations haven't changed very much primarily because of rigorous safety requirements which require long development times in order to certify such new configurations of course this costs money, and that raises the question of profitability. Tandem configuration, if done right, could potentially increase useful cargo, without increasing wingspan. In scope of this work an assessment of aerodynamic coefficients has been made using Weissinger's lifting line method with free wake, this method was selected to better understand the interaction between front and rear wing

Keywords: Weissinger's lifting line method, tandem configuration, free wake

## 1. UVOD

Procjena aerodinamičkih koeficijenata oduvijek je predstavljala problem, čak i ako imamo zrakoplov na kojemu možemo obavljati mjerenja određivanje nekih fizikalnih veličina predstavlja problem (npr. gustoća zraka). Budući da određivanje različitih koeficijenata je problematično jednako je teško odrediti kakve performanse će imati krila zrakoplova. U tandem konfiguraciji koju promatramo posebno je važno da imamo što kvalitetniju procjenu budući da prednje krilo stvara trag iza sebe koji može značajno promijeniti performanse stražnjeg krila. Metoda koja je odabrana za procjenu tih koeficijenata je modificirana Weissingerova metoda noseće linije [1], sa slobodnim tragom. Slobodan trag (*eng. free wake method, FWM*) [2] nam predstavlja područje od posebnog interesa, jer u situaciji gdje imamo dvije velike noseće površine kao kod tandem konfiguracije, bitno je što bolje procijeniti interakciju među njima. Prilikom izvođenja analize pretpostavljeno je da se krila ne deformiraju, nema vjetra, također krila uvijek ostaju u istom odnosu jedno na drugo (nema torzije trupa zrakoplova).

### 1.1. Tijek istraživanja

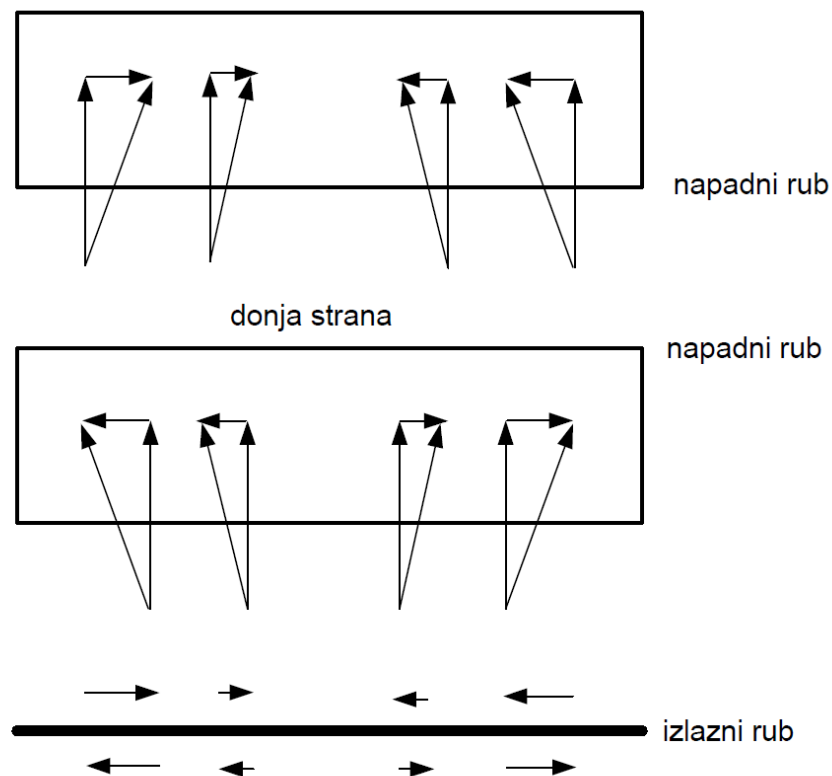
Najbitnije karakteristike svakog numeričkog rješavača su brzina i točnost, kako bi nam u fazi projektiranja dalo što brže i točnije rješenje, ta svestranost nam omogućava procjenu različitih konfiguracija. Prednost korištenja metode noseće linije je to što nam u preliminarnoj fazi konstruiranja daje dosta rezultata koji se mogu iskoristiti za procjenu performansi. Za tandem konfiguracije je to naročito bitno jer nam omogućava da variramo horizontalni te vertikalni razmak među nosivim površinama, te razliku postavnih kutova i odabir aeroprofila za prednje te stražnje krilo. Postavimo matematički model koji koristi kombinaciju Biot-Savartova zakona te teorema Kutta-Joukowski i jednog od modela za vrtložnu jezgru za izračunavanje induciranih brzina i pomaka koji su posljedica deformacije slobodnog traga. Takav model se može unijeti u velik broj rješavača, također se može riješiti analitički, rješavač koji je odabran je Matlab, zbog velike brzine rješavanja (ekvivalentnom kodu je u Octave-u trebalo četiri puta duže) i mogućnosti crtanja grafova, deformiranog i nedeformiranog traga.

## 2. Matematički model

Za procjenu aerodinamičkih koeficijenata i samim time performanse krila se koristi modificirana Weissingerova metoda noseće linije. Metoda noseće linije je postavljena početkom 20. stoljeća, od otkrića imala je mnoge modifikacije, jedna od kojih je upravo Weissingerova. Ova modifikacija nam omogućava da ne promatramo samo ravninsko pravokutno krilo nego da možemo dodati još i kut strijele  $\Lambda$ , te kut dihedrala  $\Phi$ . U našoj geometriji ti parametri nisu uključeni nego se promatra krilo simetričnog aeroprofila koje je pravokutno i neuvijeno, također nema kut strijele niti kut dihedrala.

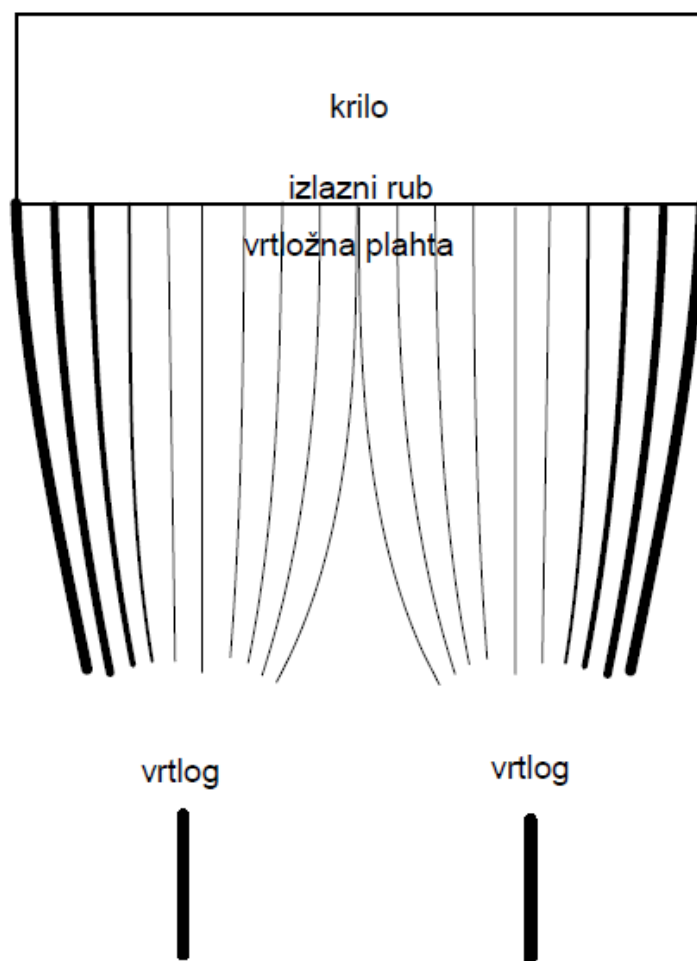
### 2.1. Krilo u nestlačivoj struji zraka

Bitno nam je odrediti fizičku sliku strujanja fluida konačnog krila radi određivanje raspodjele tlaka na gornjaci i na donjaci. Na gornjaci imamo podtlak a na donjaci imamo nad tlak, te zbog te raspodjele tlaka pri krajevima krila doći do 'prelijevanja' zraka iz područja višeg tlaka, donjake, do područja nižeg tlaka, gornjake. Zbog tog prelijevanja imati ćemo bočnu komponentu brzine na donjaci od sredine krila prema kraju krila te obrnuto na gornjaci od krajeva krila do sredine (Slika 2.1).



Slika 2.1 Strujanje na krilu [3]

Kao posljedica tog bočnog strujanja stvarati će se vrtlozi na izlaznom rubu krila. Ti vrtlozi, ako promatramo krilo gledajući u izlazni rub, će imati pozitivan smjer na desnoj strani krila, te negativan na lijevoj strani (Slika 2.2). Te će oni stvarati vrtložnu plahtu iza stražnjeg ruba krila. Intenzitet tih vrtloga će ovisiti o njihovom položaju na krilu, vrtlozi koji se nalaze na krajevima krila će imati veći intenzitet od onih vrtloga koji se nalaze na sredini krila.



Slika 2.2 Vrtložna plahta [3]

Zbog ovakve slike strujanja će aerodinamički koeficijenti razlikovati od onih koje ima sam profil krila.

## 2.2. Model noseće linije

Kao osnova za procjenu aerodinamičkih koeficijenata koristit ćemo nemodificiranu Weissingerovu teoriju noseće linije, što znači da nam je kut strijele na četvrtini tetive jednak



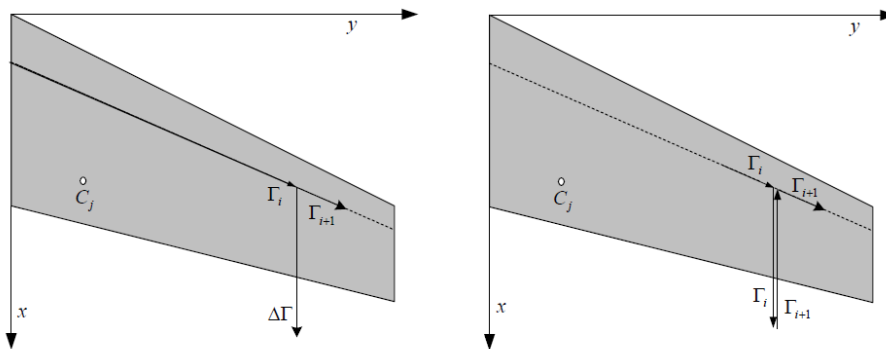
nuli  $\Lambda_{1/4c} = 0$ . Metoda radi na principu da se geometrija krila zamijeni setom potkovičastih vrtloga, od kojih imamo jedan duž širinu krila koji se nalazi na četvrtini tetive, a ostali su postavljeni okomito na njega tako da izlaze sa izlaznog ruba krila. Intenzitet uzdužnog tako zvanog vezanog vrtloga se mijenja po rasponu krila, jer se rasipa sa uzdužnim vrtlozima koji stvaraju vrtložnu 'plahtu' iza izlaznog ruba.

### 2.2.1. Princip metode noseće linije

Ako krilo podijelimo na  $m$  segmenata i promatramo intenzitete vrtloga na tim segmentima možemo reći da bilo kakva promjena intenziteta na granicama segmenta vezanog vrtloga se može izraziti kao

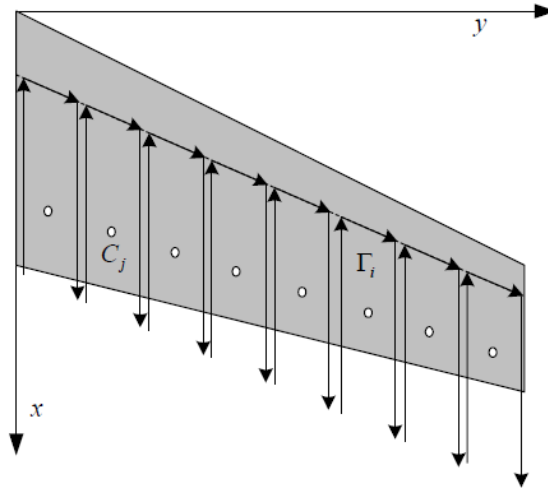
$$\Delta\Gamma = \Gamma_{i+1} - \Gamma_i \quad (2.1)$$

Na taj način na granicama segmenata imamo setove okomitih vrtloga usmjerenih prema izlaznom rubu čiji je intenzitet s lijeve strane jednak  $\Gamma_i$ , a sa desne  $\Gamma_{i+1}$ , ti intenziteti odgovaraju i intenzitetu vezanog vrtloga na istom segmentu (Slika 2.3).



Slika 2.3 Promjena intenziteta cirkulacije [3]

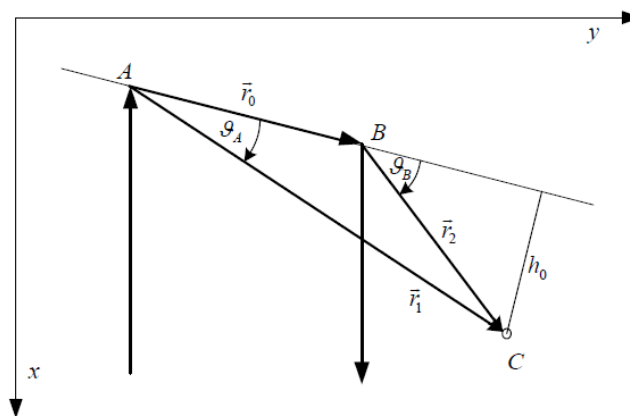
Možemo primijetiti da na taj način dobivamo setove vrtloga istog intenziteta. Takve setove vrtloga nazivamo  $\Pi$  vrtlozima ili potkovičastim vrtlozima, te u nemodificiranoj metodi oni imaju kruti trag od polu beskonačnosti do vezanog vrtloga, te od vezanog natrag do polu beskonačnosti. Te na taj način dobijemo diskretizirano krilo.



Slika 2.4 Geometrija krila zamijenjena vrtlozima [3]

### 2.2.2. Inducirane brzine

Postavimo koordinatni sustav na način da je os  $x$  u smjeru ne poremećene brzine, os  $y$  u smjeru raspona krila na desno, os  $z$  čini desnokretni koordinatni sustav. Ishodište koordinatnog sustava postavimo ili u vrh krila ili na glavni vezani vrtlog, naravno u osi simetrije krila. Kao posljedica vrtložnosti vrtlog svakog "i" segmenta inducira brzinu u svakoj kontrolnoj točki "j" brzinu  $\vec{V}_{ij}$ .



Slika 2.5 Položaj točaka na segmentu [3]

Svaki  $\Pi$  vrtlog sastoji se od tri segmenta. Od polu beskonačnosti do točke A, od A do B takozvani vezani vrtlog i od B do polu beskonačnosti. Te inducirane brzine dobijemo pomoću Biot-Savartova zakona, gdje brzina od polu beskonačnosti do točke A

$$\vec{V}_1 = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{n}_x \times \vec{r}_1}{r_1(r_1 - \vec{n}_x \cdot \vec{r}_1)}. \tag{2.2}$$

Brzina od točke A do točke B

$$\vec{V}_0 = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 (r_1 r_1 + r_1 \cdot r_2)} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2. \quad (2.3)$$

Brzina od točke B do polu beskonačnosti

$$\vec{V}_2 = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{n}_x \times \vec{r}_2}{r_2 (r_2 - \vec{n}_x \cdot r_2)}. \quad (2.4)$$

Te ukupna brzina za "j" kontrolnu točku glasi

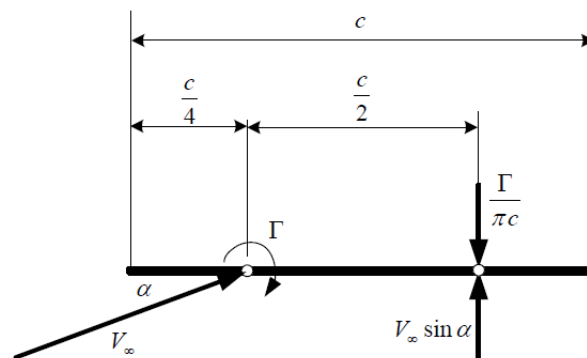
$$\vec{w} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{n}_x \times \vec{r}_1}{r_1 (r_1 - \vec{n}_x \cdot r_1)} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 (r_1 r_1 + r_1 \cdot r_2)} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{n}_x \times \vec{r}_2}{r_2 (r_2 - \vec{n}_x \cdot r_2)}. \quad (2.5)$$

Također se može izlučiti intenzitet vrtloga  $\Gamma$  i dobije se oblik

$$\vec{w} = \vec{B} \cdot \Gamma. \quad (2.6)$$

### 2.2.3. Određivanje intenziteta $\Pi$ vrtloga

Kao što možemo primijetiti kako bi smo dobili iznos inducirane brzine u "j" kontrolnoj točki potrebno je odrediti ponajprije intenzitet  $\Pi$  vrtloga. To možemo odrediti iz ukupno  $m$  rubnih uvjeta od kojih je po jedan za svaki segment. Rubni uvjet nam nalaže da u kontrolnoj točki na udaljenosti  $h = \frac{c}{2} \frac{a_0}{2\pi}$  od krutog vrtloga ispunjen uvjet da je vertikalna komponenta inducirane brzine jednaka vertikalnoj komponenti neporemećene struje (uvjet nepromočivosti) te ostaje samo tangencijalna brzina (Slika 2.6). Budući da koristimo simetričan aeroprofil  $a_0 = 2\pi$ .



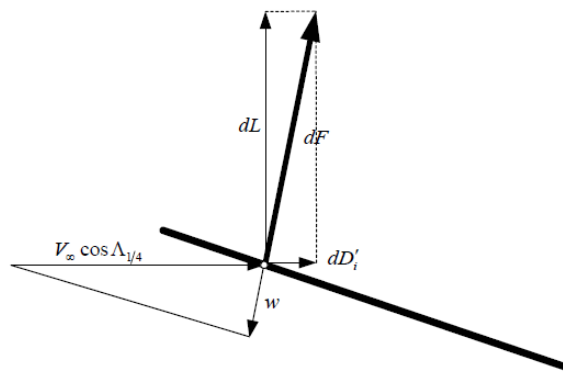
Slika 2.6 Rubni uvjeti [3]

Kako bi odredili intenzitet vrtloga  $\Gamma$  postavljaju se rubni uvijeti u  $i$ -tim kontrolnim točkama za koje primjenjujemo jednadžbu (2.6) za određivanje ukupne inducirane brzine od  $j$ -tog  $\Gamma$ -vrtloga, ukupna brzina u kontrolnoj točki  $i$  se dobije sumom svih induciranih brzina od svih  $\Gamma$ -vrtloga. Također se ta suma može izraziti i matricno u obliku  $\mathbf{B}\Gamma$  koju možemo izračunati pomoću jednadžbe (2.5) i (2.6) za svaku kontrolnu točku  $i$  od svakog  $\Gamma$ -vrtloga  $j$ . Iz rubnog uvjeta nepromočivosti slijedi da je

$$\Gamma = -V_\infty \sin \alpha (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{J}). \quad (2.7)$$

#### 2.2.4. Aerodinamički koeficijenti krila

Prema teoriji Žukovskog [4] na elementarnom segmentu krila djeluje elementarna aerodinamička sila  $dF$ , na način kako je prikazano na slici 2.7



Slika 2.7 Elementarna aerodinamička sila na segment prema Žukovskom [3.]

Sa slike (2.7) se može uočiti da vertikalna komponenta elementarne sile predstavlja upravo uzgon, a horizontalna predstavlja otpor. Također prema teoriji Žukovskog sila uzgona za krilo je

$$L = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma dy. \quad (2.8)$$

Te se jednostavnim raspisivanjem sile uzgona, te dijeljenjem sa dinamičkim tlakom i referentnom površinom lako dođe do jednadžbe iz koje možemo dobiti koeficijent uzgona i ona glasi

$$C_L = \frac{2}{S} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma(y)}{V_\infty} dy, \quad (2.9)$$

analogno tome prema Žukovskome je sila otpora jednaka

$$D = 2\rho_\infty \int_0^{b/2} w\Gamma dy, \quad (2.10)$$

te također nakon dijeljenja sa dinamičkim tlakom i referentom površinom i supstitucijom  $\Gamma$  sa jednadžbom (2.7) dobije se

$$C_{Dind} = A\alpha \sum_{j=1}^m \frac{w_j}{V_\infty} G_j \frac{1}{m}, \quad (2.11)$$

gdje je  $G$  bez dimenzijska cirkulacija jednaka

$$G = \frac{\Gamma}{(b/2)V_\infty \sin(\alpha)} = \frac{\mathbf{B}^{-1}\mathbf{J}}{b/2}. \quad (2.12)$$

Koja se dobiva iz (2.7) Također ako uvedemo jednadžbu za  $G$  koja glasi

$$G = \frac{\Gamma_\alpha}{(b/2)V_\infty}, \quad (2.13)$$

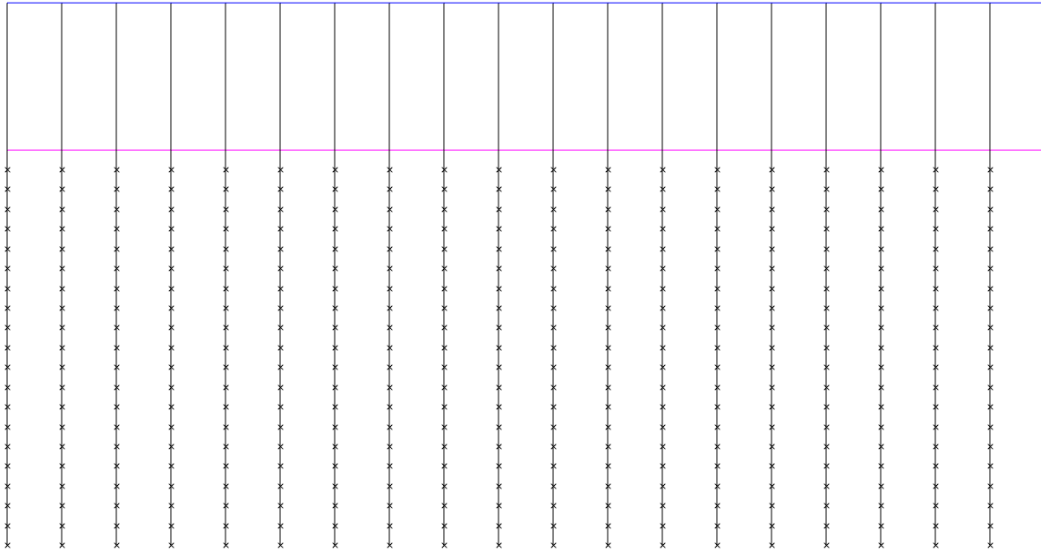
možemo također odrediti gradijent koeficijenta uzgona  $C_{L\alpha}$  čija jednadžba glasi

$$C_{L\alpha} = \frac{A}{m} \sum_{j=1}^m G_j. \quad (2.14)$$

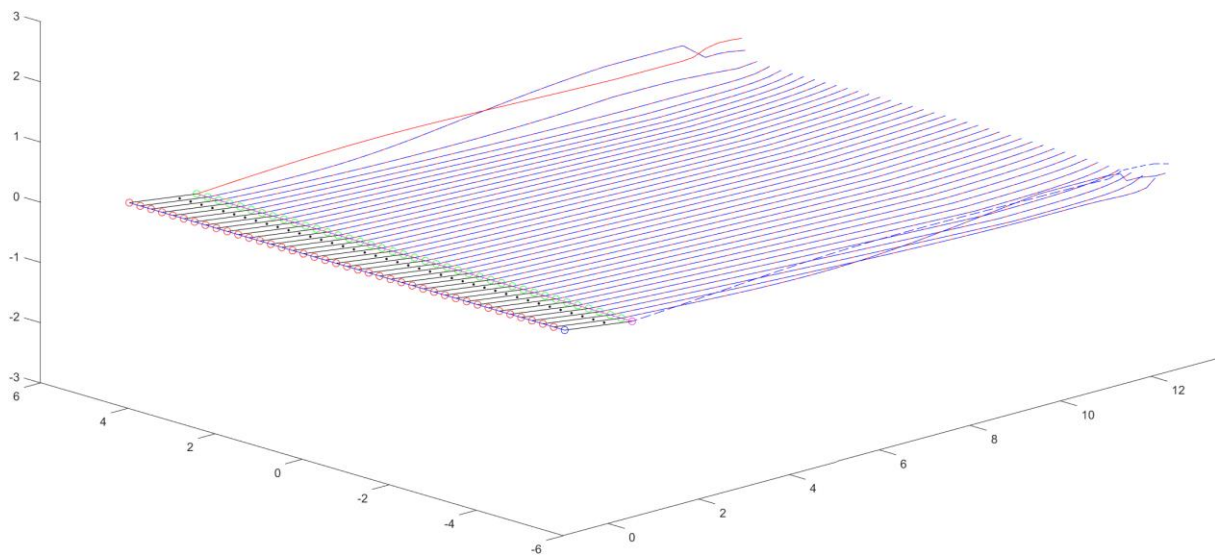
### 2.3. Slobodan trag

Budući da se u rješavač uključuje slobodan trag, što nam predstavlja područje od velikog interesa jer ukoliko je dobro izveden bi dao točnije rješenje za različite intenzitete vrtloga, te i točnije aerodinamičke koeficijente pojedinog krila.  $\Pi$  vrtlozi kojima je zamijenjena geometrija krila se mogu, kao što je već navedeno, podijeliti na tri dijela. Vezani vrtlog koji se nalazi na jednoj četvrtini i dva pravocrtna vrtloga od segmenta do polu beskonačnosti. Ta dva polu beskonačna vrtloga možemo diskretizirati. Duljina vrtloga koja se diskretizira za prednje krilo je 5 tetiva  $c$  od napadnog ruba, a za stražnje je 2 tetive  $c$  zbog toga što utjecaj ostatka traga malo pridonosi intenzitetu vrtloga  $\Gamma$ . Granice gdje se spajaju segmenti pravocrtnog polu beskonačnog vrtloga se nazivaju čvorovi vrtloga (Slika 2.8) i oni su točke koje će se pomicati. Isto kao i sa kontrolnim točkama u svakom čvoru traga računamo inducirane brzine, pomoću Biot-Savart-ova zakona, od svakog vezanog  $\Pi$  vrtloga, dva vrtloga koja su uvijek vezana za krilo, te svaki od segmenata slobodnog traga. Budući da sada imamo set čvorova u kojima su izračunate inducirane brzine ukoliko ih pomnožimo sa vremenom diskretizacije, dobijemo pomake za svaki čvor koje možemo zbrojiti sa koordinatama odgovarajućeg čvora te tako

dobijemo deformirani trag. Ovu proceduru možemo nekoliko puta ponoviti, te ukoliko rješenje konvergira trebali bi dobiti statično rješenje deformiranog traga (Slika 2.9) . Rezultati



Slika 2.8 Točke diskretiziranog traga



Slika 2.9 Deformirani trag za  $\alpha = 4^\circ$

Tablica 2.1 Rezultati za deformirani trag (Slika 2.9)

$C_L$	1.226
$C_{L\alpha}$	4.0417
$C_{Dind}$	0.0115

### 2.3.1. Vrtložna jezgra

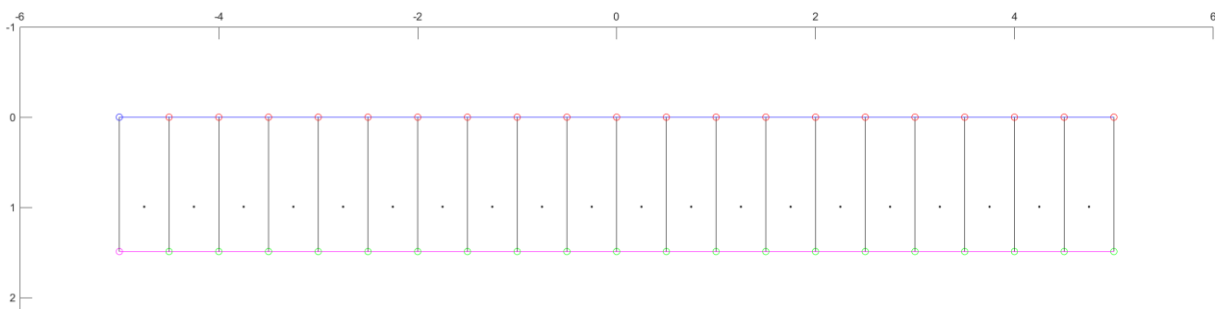
Vrtložna jezgra (*eng. Vortex core*) je matematički model koji se koristi na području gdje bi Biot-Savartov zakon davao jako velike iznose induciranih brzina. Problem nastaje ukoliko vrtložna nit prolazi jako blizu ili kroz kontrolnu točku, u tom slučaju budući da je vrijednost inducirane brzine obrnuto proporcionalna udaljenosti od vrtložne niti do kontrolne točke. Kako bi riješili taj problem budući da je njegovo rješenje ne fizikalno, možemo primijeniti neki od modela koje nam nude fizikalno rješenje. Jedno od tih je Rankinov model koji pretpostavlja linearnu ovisnost o udaljenost, također postoji Vatistasov model [4] koji pretpostavlja nelinearnu ovisnost. Zadnja mogućnost je da jednostavno kažemo da na određenoj udaljenosti od vrtložnoj traga inducirana brzina je jednaka nuli, ovo nije točno rješenje, ali ne daje veliku grešku u primjeni.

### 3. Numerička implementacija matematičkog modela

Matematički model kako je postavljen može se riješiti analitički, ali zbog interakcije svakog  $\Pi$  vrtloga sa svakom kontrolnom točkom, još i svakim čvorom u tragu, i to sve u nekoliko iteracija bi učinilo taj proces izuzetno sporim, a zbog i samog broja jednadžbi daje nam veliku šansu za grešku. Primjenom algoritma koji se može napisati u MATLAB-u taj proces se može značajno ubrzati i eliminacijom čovjeka kao numeričkog rješavača također znamo da će rezultati u najmanju ruku točno biti izračunati. Također na ovaj način možemo bilo kakve izmjene i modifikacije jednostavno i brzo dodati, kao što su pomicanje vertikalnog i horizontalnog pomaka, postavnih kutova te napadnog kuta. U rješavač se mogu još dodati kut strijele, kut dihedrala, uvijanje krila, vertikalni stabilizatori i slično, no oni ovdje nisu korišteni.

#### 3.1. Weissinger za jedno krilo

Kao što je naznačeno prva stvar koju je nužno napraviti je podijeliti krilo na segmente kako bi smo mogli odrediti koordinate točaka za koje su vezani  $\Pi$  vrtlozi, kontrolne točke, te koordinate točaka u tragu. Kako bi dobili koordinate potrebnih točaka, krilo podijelimo na  $m$ -segmentata, i tako za svaki segment odredimo pet točaka na krilu, na slici 3.1 plavi kružići označavaju točku A, crveni točku B, ljubičasti označavaju točku D, zeleni točku E i na sredini pojedinog segmenta je postavljena kontrolna točka C. Na slici (3.1) je prikazana samo jedna plava točka zbog toga što se točke A i točke B preklapaju u modelu, isto ide i za točku D.



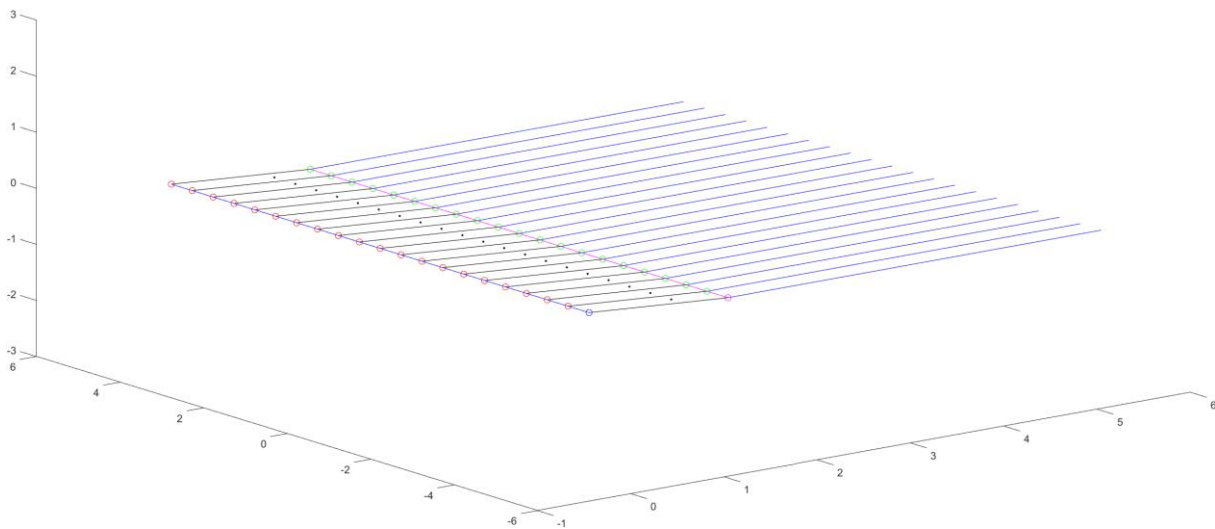
Slika 3.1 Diskretizirano krilo

Tako postavljene točke ćemo tretirati kao krute i uvijek vezane za krilo dok ćemo točke u tragu pomicati.



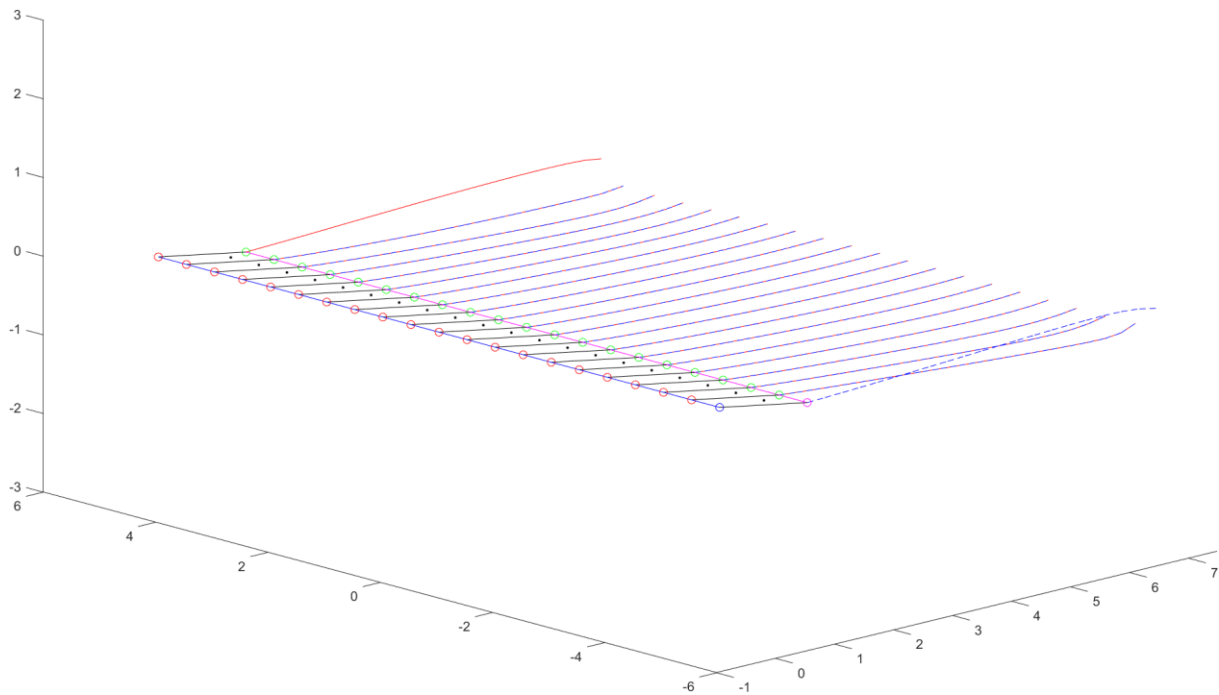
### 3.2. Slobodan trag

Dva načina na koja možemo pristupiti vrtložnom tragu je da ga generiramo postupno uzimajući u obzir sve  $\Pi$  vrtloge koje smo ranije oformili, u procesu iteracije u prvom koraku jedini  $\Pi$  vrtlozi koje bi imali bi bili oni na krilu, ili da pristupimo na način da pretpostavimo pravocrtni vrtložni trag koji je već sam podijeljen na segmente te računamo inducirane brzine i pomake od istih u čvorovima vrtložnog traga. Ovaj drugi način je onaj za koji smo se opredijelili. U nultoj iteraciji počinjemo sa pretpostavljenim pravocrtnim tragom, koji se prostire tri tetive udaljenosti iza stražnjeg krila (Slika 3.2). Taj trag je podijeljen na  $mm$ -dijelova. Za takav trag prvo je napravljena procjena aerodinamičkih koeficijenata, te su uspoređeni sa rješenjem koje je dobiveno Weissingerovom metodom sa pravocrtnim polu beskonačnim tragom slika (3.4) odstupanja za gradijent koeficijenta uzgona su oko 1% [3]. Na taj način se donekle možemo osigurati da rješenje koje dobijemo sa deformiranim tragom točno. Nakon toga preuzima iteracijski algoritam koji računa inducirane brzine, te s njima i pomake, koje na kraju algoritma se zbrajaju sa koordinatama čvorova u kojima su i izračunati pomaci i na taj način osvježavaju njihove koordinate.

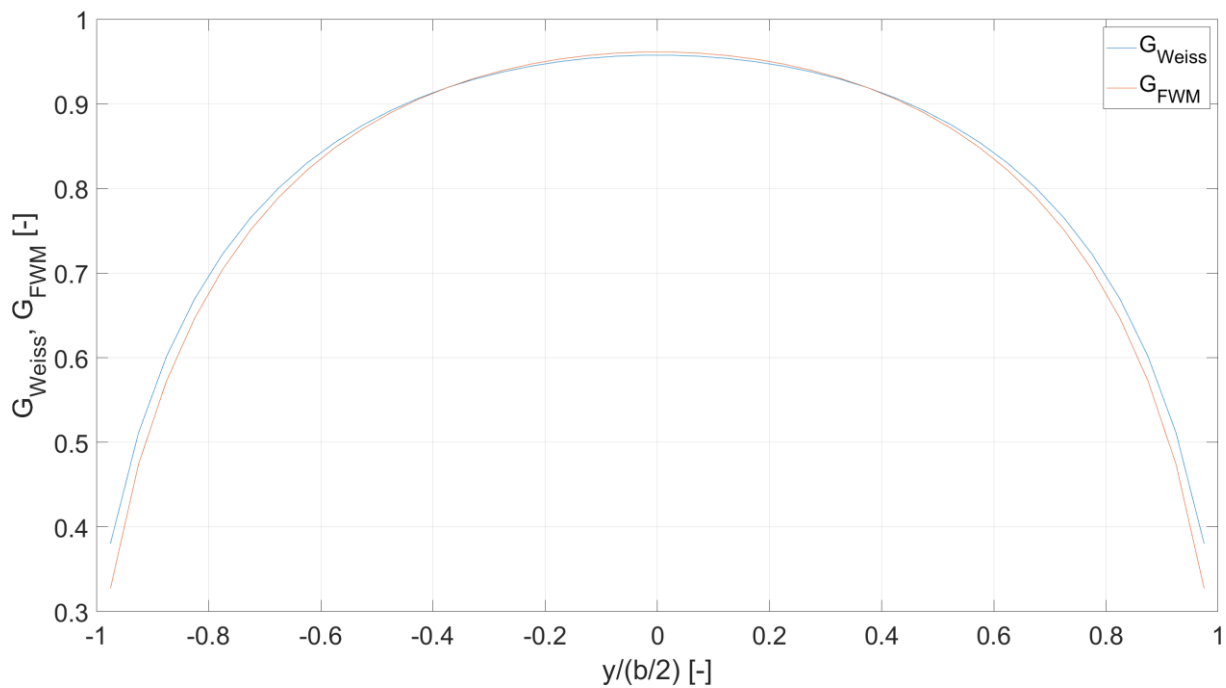


Slika 3.2 Pretpostavljeni pravocrtni trag

Na slici (3.2) i slici (3.3) je prikazano krilo sa puno grubljom diskretizacijom u odnosu na onu koja je korištena za računanje aerodinamičkih koeficijenata.



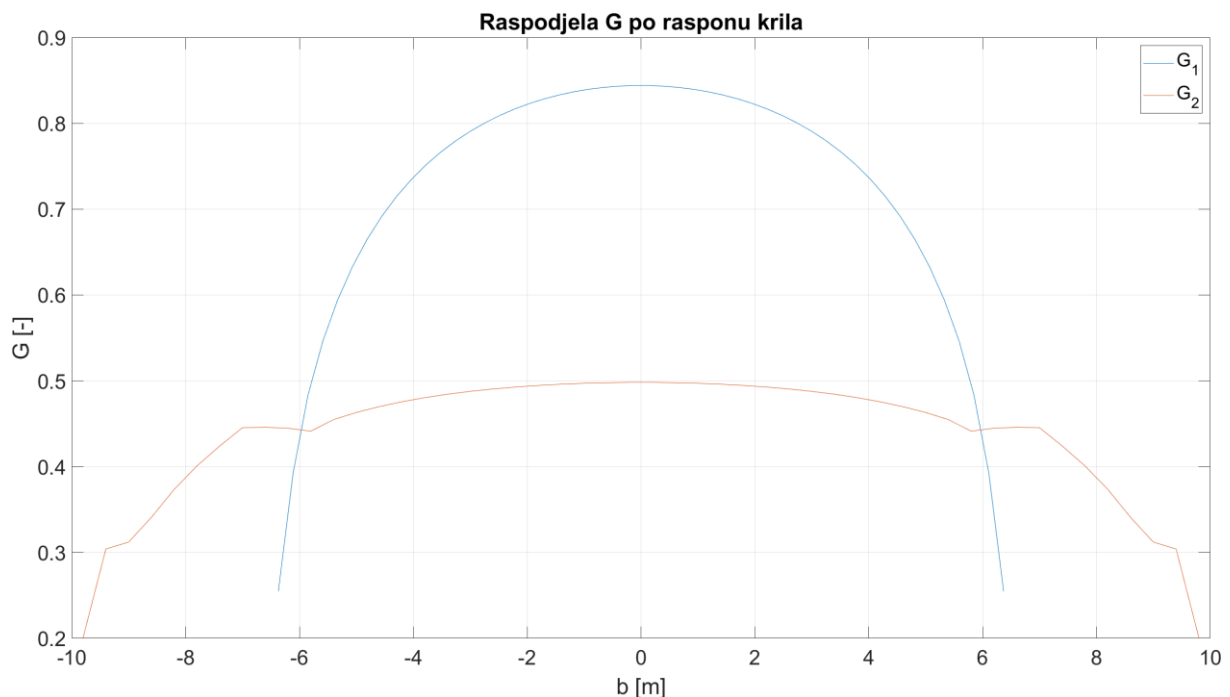
Slika 3.3 Deformirani trag

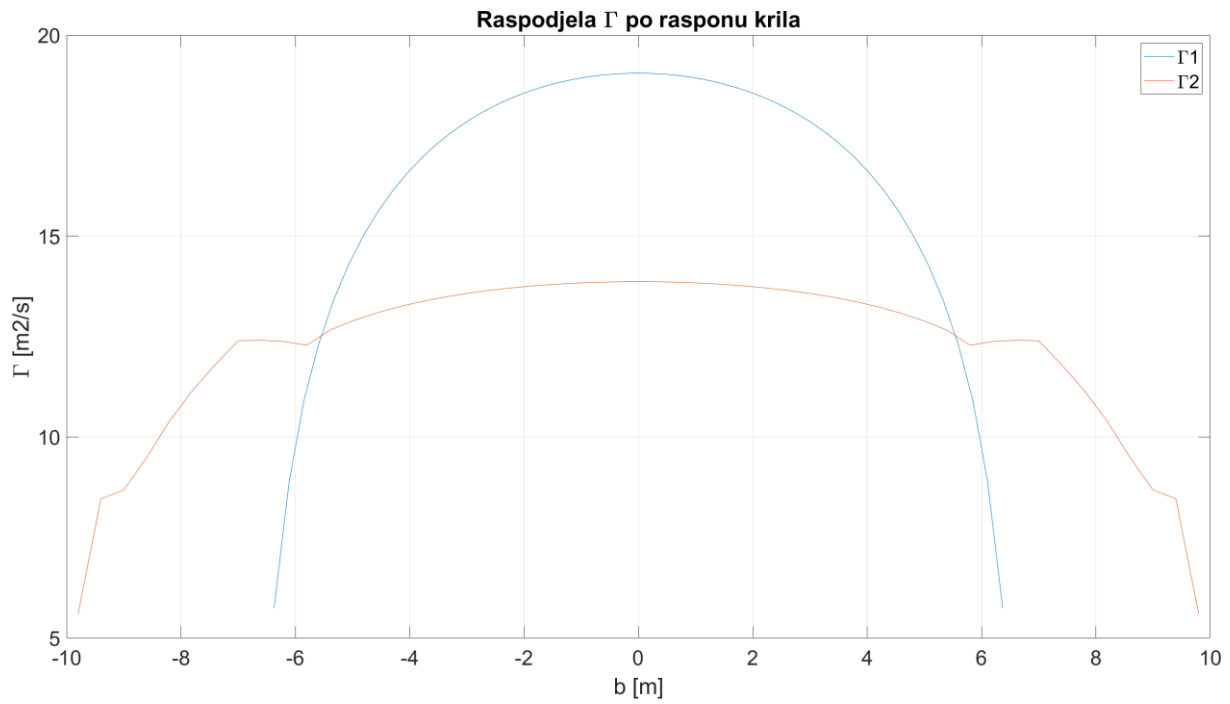
Slika 3.4 Raspodjela  $G$  po rasponu krila

### 3.3. Aerodinamički koeficijenti tandem konfiguracije

Aerodinamičke koeficijente za jedno krilo su izračunati prema jednadžbama (2.9) i (2.11). Za tandem konfiguraciju način na koji računamo aerodinamičke koeficijente ostaje identičan, samo

prilikom postavljanja matrica  $\mathbf{B}$  i određivanja cirkulacije  $\Gamma$  uzimaju se ne samo vrtlozi na krilu za koje određujemo koeficijente nego i one od drugog krila, očekivano je da će prednje krilo značajnije utjecati na stražnje, no zbog brzine zrakoplova koja je pretpostavljena na  $V_\infty = 20$  [m/s] i stražnje krilo će utjecati na prednje iako minimalno. U računu je ta i interakcija uzeta u obzir iako neće značajne razlike napraviti, budući da su oba krila dovoljno udaljena. Na slici (3.4) prikazana je raspodjela bez dimenzijske cirkulacije  $G$  i  $\Gamma$ . Vrijednosti koje imaju indeks jedan su za prednje krilo, a one koje imaju indeks dva su za stražnje krilo.

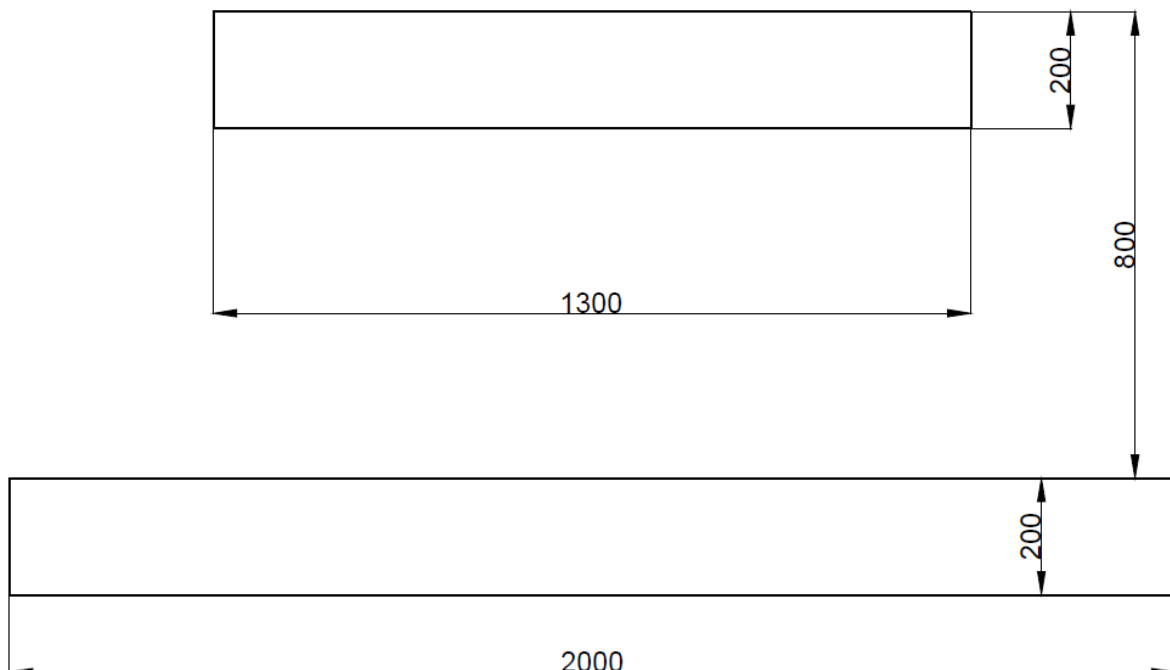
Slika 3.5 Raspodjela  $G$  po rasponu krila

Slika 3.6 Raspodjela  $\Gamma$  po rasponu krila

Daljnji rezultati će biti pojašnjeni i prikazani u sljedećem poglavlju.

## 4. Rezultati

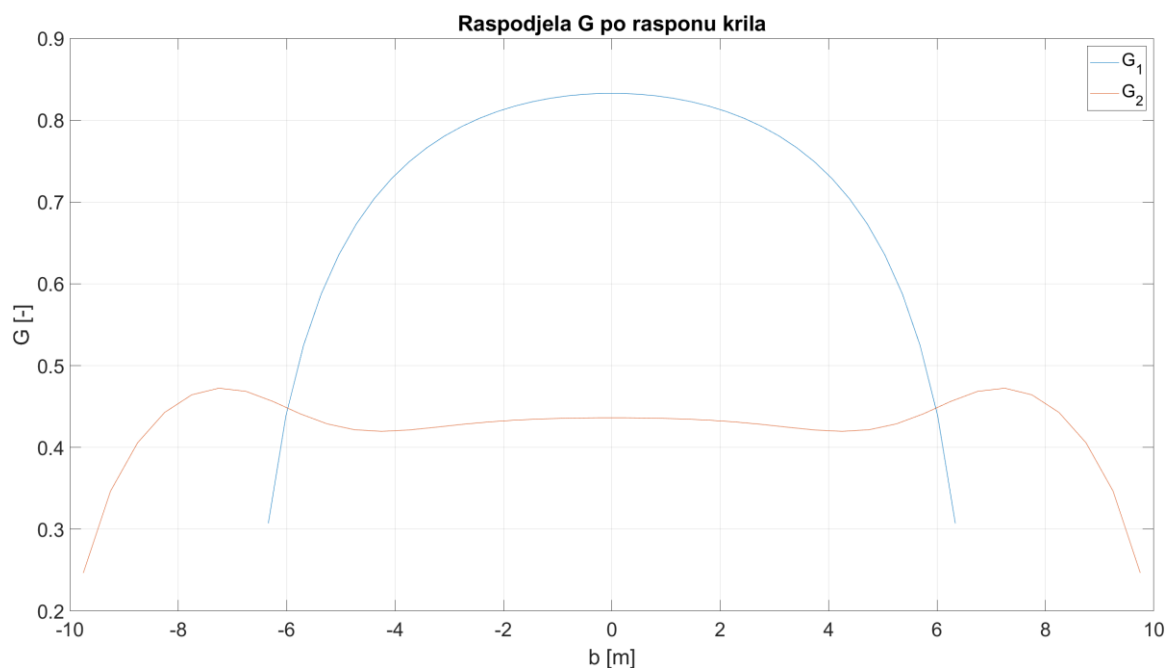
Postavivši sve jednadžbe i funkcije bitno je odabrati na koliko  $\Pi$  vrtloga ćemo diskretizirati krilo, na koliko ćemo segmenata podijeliti vrtložni trag, te koliko iteracija ćemo odraditi. Prednje i stražnje krilo će biti podijeljena na  $m=50$   $\Pi$  vrtloga, vrtložni trag prednjeg na  $mm_1=50$  segmenata, a stražnjeg na  $mm_2=20$ . Broj iteracija će biti 20 za sve analize u kojima mijenjamo jednu od varijabli, zbog brzine rješavanja, no za 'referentan' položaj će se izvesti sa 50. Geometrija zrakoplova koju promatramo je prikazana na slici (4.1) i smatra se referentom, prednje krilo je manje i nalazi se ispod stražnjeg krila. Sve mjere su dane u milimetrima. Postavni kut prednjeg krila u referentnoj geometriji je  $i_{w1} = 2^\circ$  a stražnjeg  $i_{w2} = 0^\circ$  napadni kut je  $\alpha = 2^\circ$ . Vertikalni pomak stražnjeg krila u referentnoj konfiguraciji je jedna dužina tetive  $c$ , a horizontalni je četiri udaljenosti tetive. Veličine koje ćemo mijenjati kako bi promatrali koliko utječu na aerodinamičke koeficijente su: napadni kut  $\alpha$ , vertikalni razmak između krila  $\Delta Z$ , horizontalni razmak  $\Delta X$  između krila i postavni kut prednjeg krila  $i_w$ .



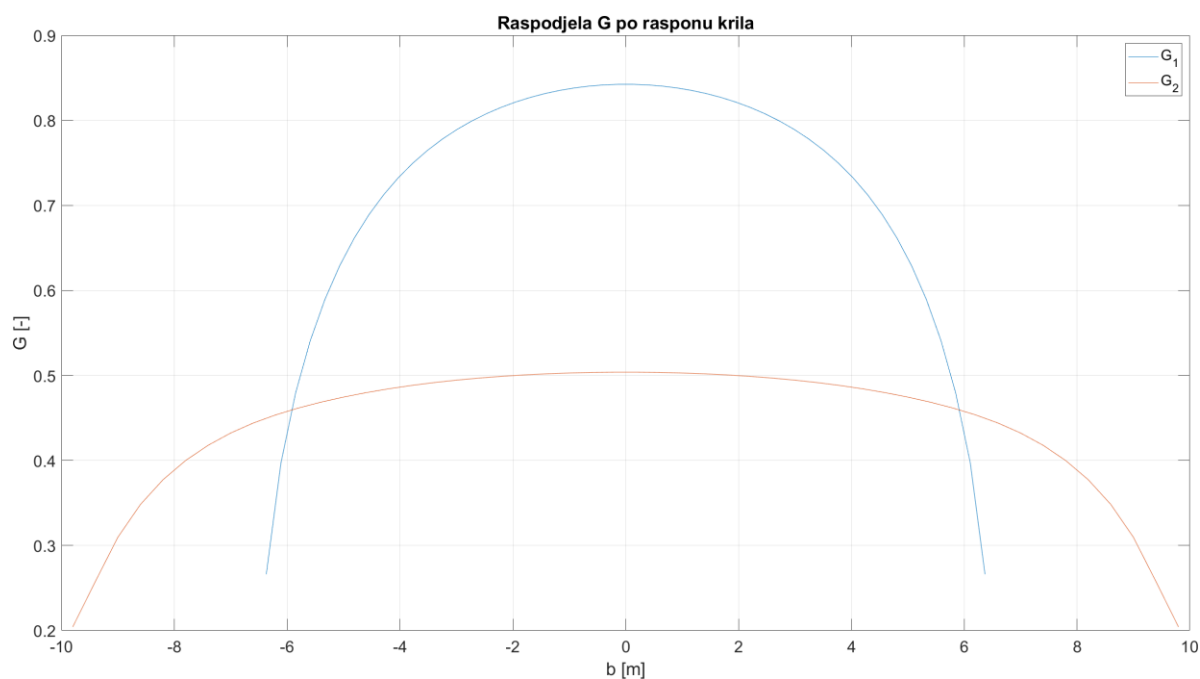
Slika 4.1 Referentna geometrija

#### 4.1. Usporedba rezultata Weissingerove metode i slobodnog traga

Prvo ćemo usporediti aerodinamičke koeficijente koje dobijemo koristeći Weissingerovu metodu koja koristi pravocrtni polu beskonačni trag koji se ne deformira u vremenu i rezultate koje dobijemo za konačan slobodan trag. Za obje procjene se koristi referentna konfiguracija.



Slika 4.2 Raspodjela  $G$  Weissingerovu metodu

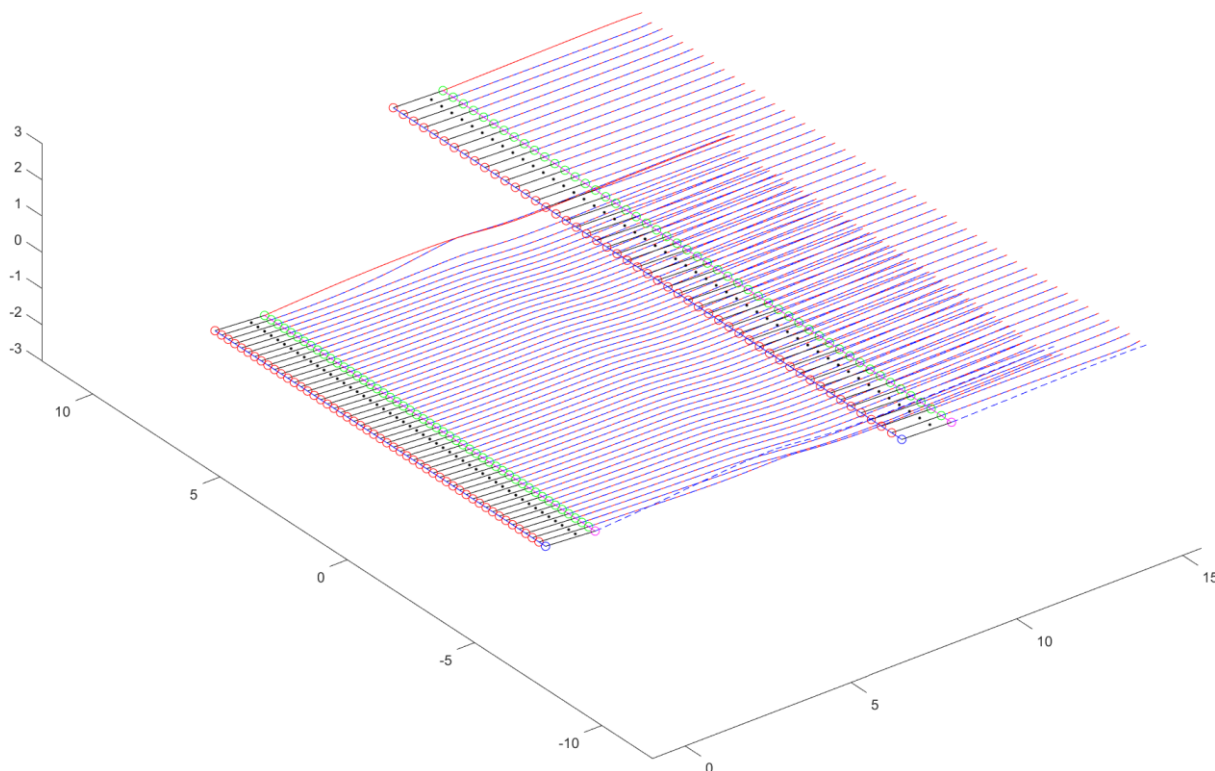


Slika 4.3 Raspodjela  $G$  za slobodni trag

Aerodinamički koeficijenti za referentnu konfiguraciju su dani u tablici (4.1). Sa lijeve strane su koeficijenti koji su dobiveni koristeći Weissingerovu metodu sa krutim polu beskonačnim tragom [3], sa lijeve strane su rezultati dobiveni koristeći FWM konačne duljine.

Tablica 4.1 Usporedba aerodinamičkih koeficijenata

	Kruti trag	Slobodan trag
$C_{L1}$	0.9947	1.2471
$C_{L2}$	0.2953	0.3838
$C_{L\alpha 1}$	4.6348	4.6488
$C_{L\alpha 1}$	4.2304	4.3987
$C_{Dind1}$	0.0052	0.0115
$C_{Dind2}$	0.0017	0.0028

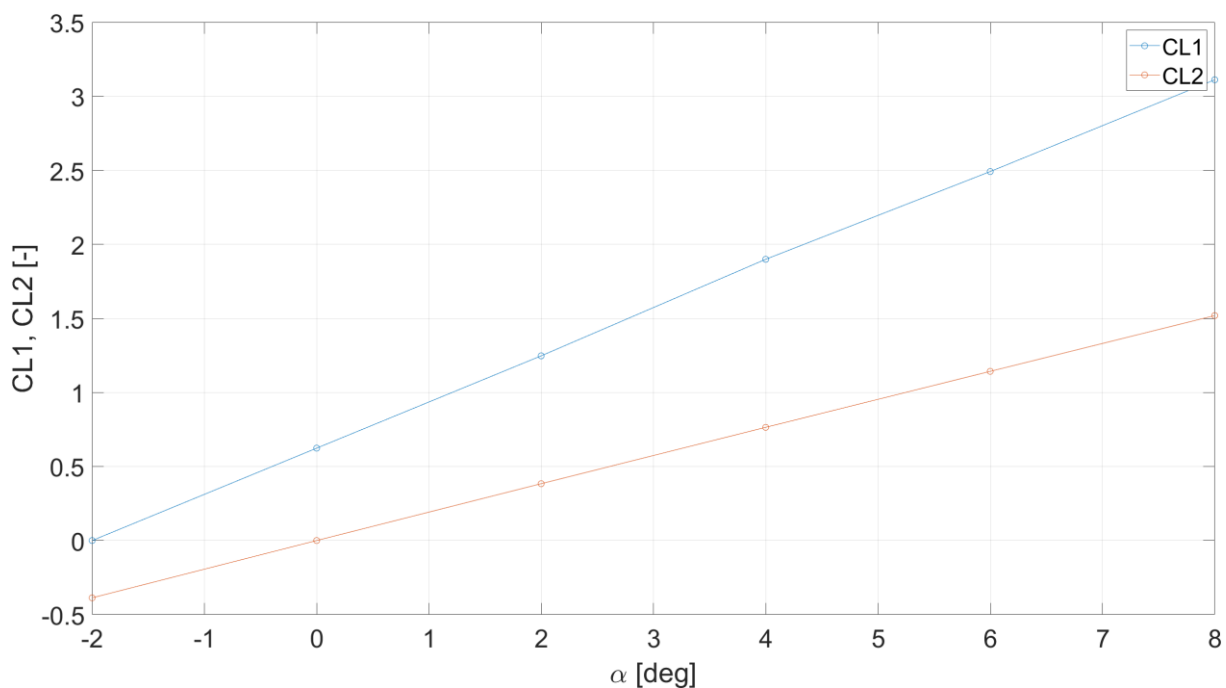


Slika 4.4 Deformirani trag za referentnu konfiguraciju

Može se vidjeti sa slika (4.2) i (4.3) da su vrijednosti  $G$  jako slične no oblik raspodjele je drugačiji i prilikom usporedbe koeficijenata vidi se da to ima značajan učinak na rezultate. Na slici (4.4) je dan deformirani trag referentne konfiguracije.

## 4.2. Usporedba rezultata za promjenu napadnog kuta

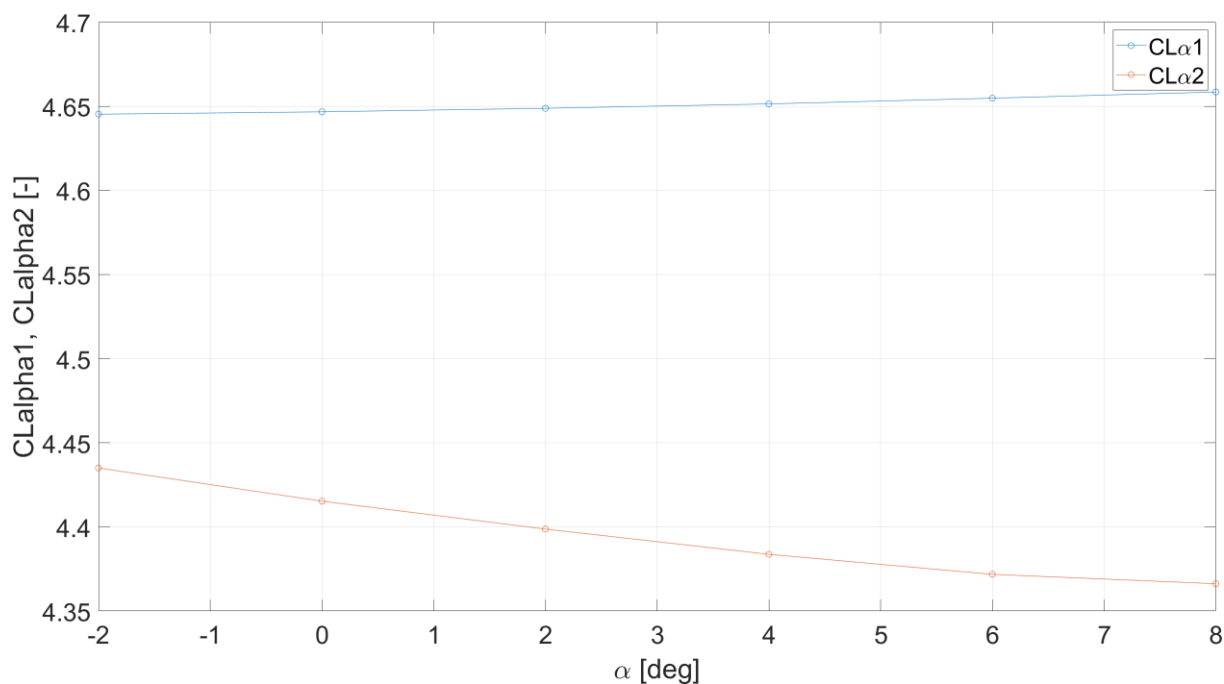
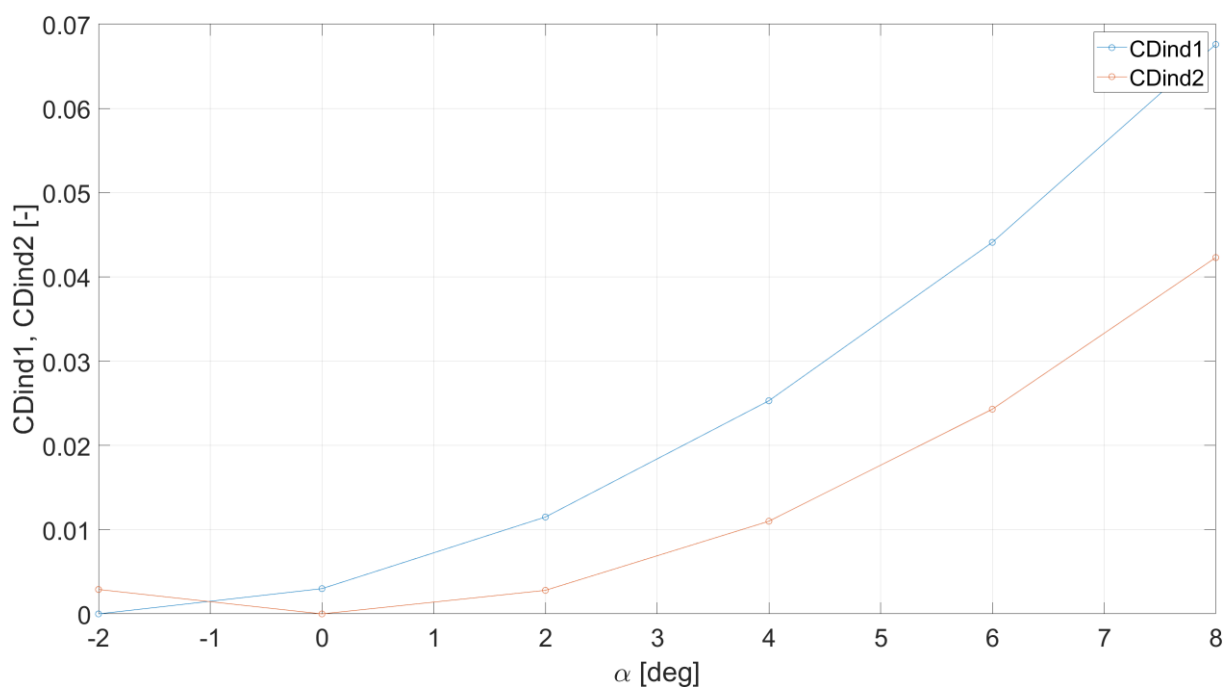
U ovoj analizi mijenjan je napadni kut kako bi se vidjela promjena koeficijenata. U klasičnoj konfiguraciji se može odrediti parametar gradijenta sile uzgona i gradijenta sile otpora, tako da ovakva analiza bi potencijalno bila suvišna. Zbog interakcije oba krila ipak provodimo ovaku analizu.



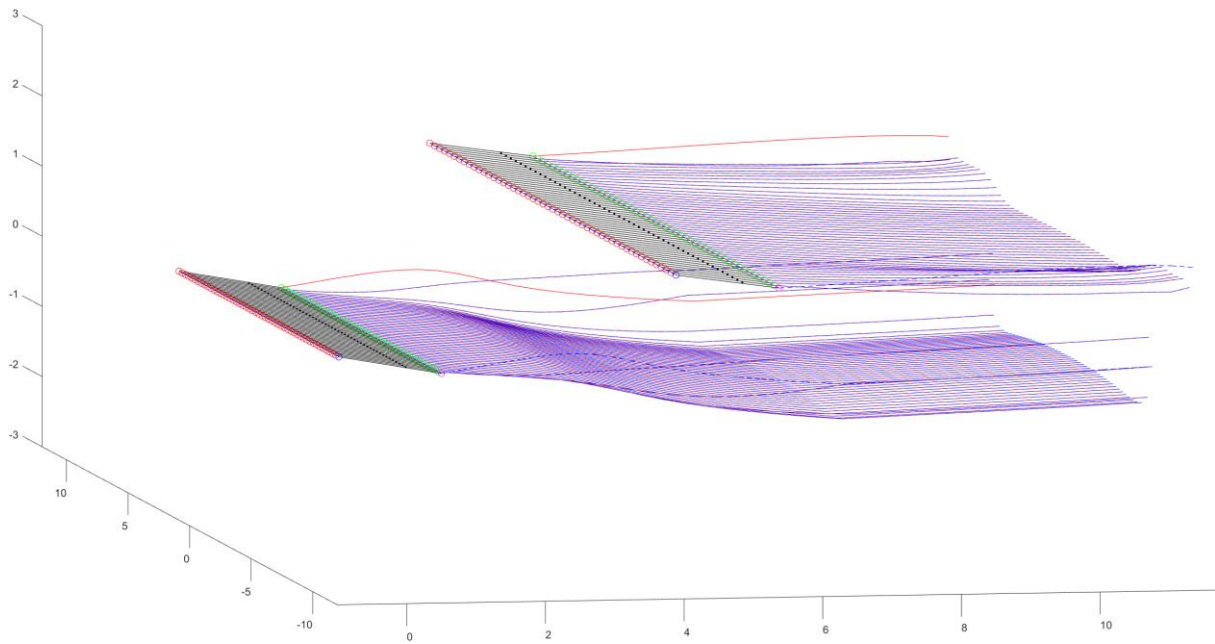
Slika 4.5 Ovisnost  $C_L$  o  $\alpha$

Na slici (4.5) dani su koeficijenti uzgona koji se mijenjaju po napadnom kutu, kao što je donekle očekivano prednje krilo se ponaša kao da nema stražnjeg krila, dok za stražnje krilo sam koeficijent uzgona u startu je niži, a također njegov prirast je manji što se može vidjeti na slici (4.6).



Slika 4.6 Ovisnost  $C_{L\alpha}$  o  $\alpha$ Slika 4.7 Ovisnost  $C_{Dind}$  o  $\alpha$ 

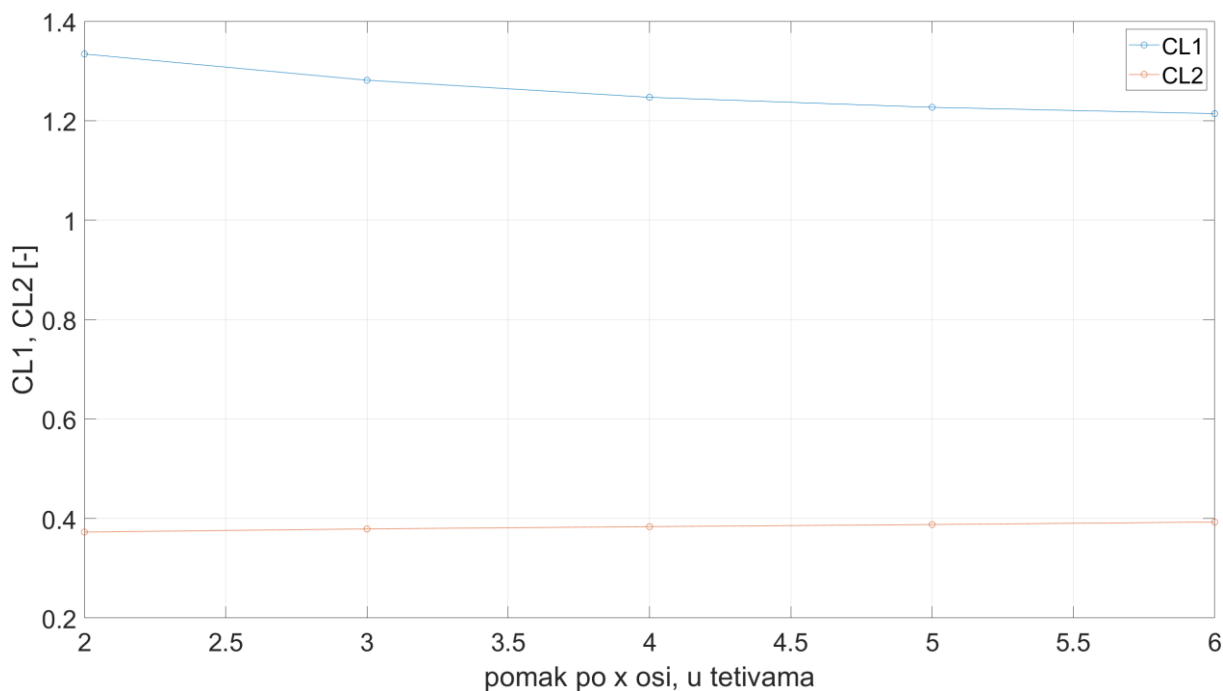
Jedini parametar koji smo mijenjali u ovoj analizi je napadni kut, koji smo mijenjali od  $-2^\circ$  do  $8^\circ$  sa inkrementom od  $2^\circ$ , ostale veličine su ostale iste kao u referentnoj konfiguraciji. Sa slike (4.7) može se vidjeti velika ne linearnost koeficijenta otpora. Na slici (2.9) prikazan je vrtložni trag za najveći analizirani napadni kut.

Slika 4.8 Prikaz vrtložnog traga za  $\alpha=8^\circ$ 

Prikazano na slici (4.8) se vidi da čak i kod većih napadnih kutova vrtložna plahta prolazi dalje od stražnjeg krila, ovakva interakcija nam pokazuje da kod leta pod ekstremnim napadnim kutovima nije nužno da bi stražnje krilo bilo ono koje bi izgubilo uzgon što nam daje naznaku da bi se zrakoplov potencijalno mogao sam vratiti u ravnotežan položaj.

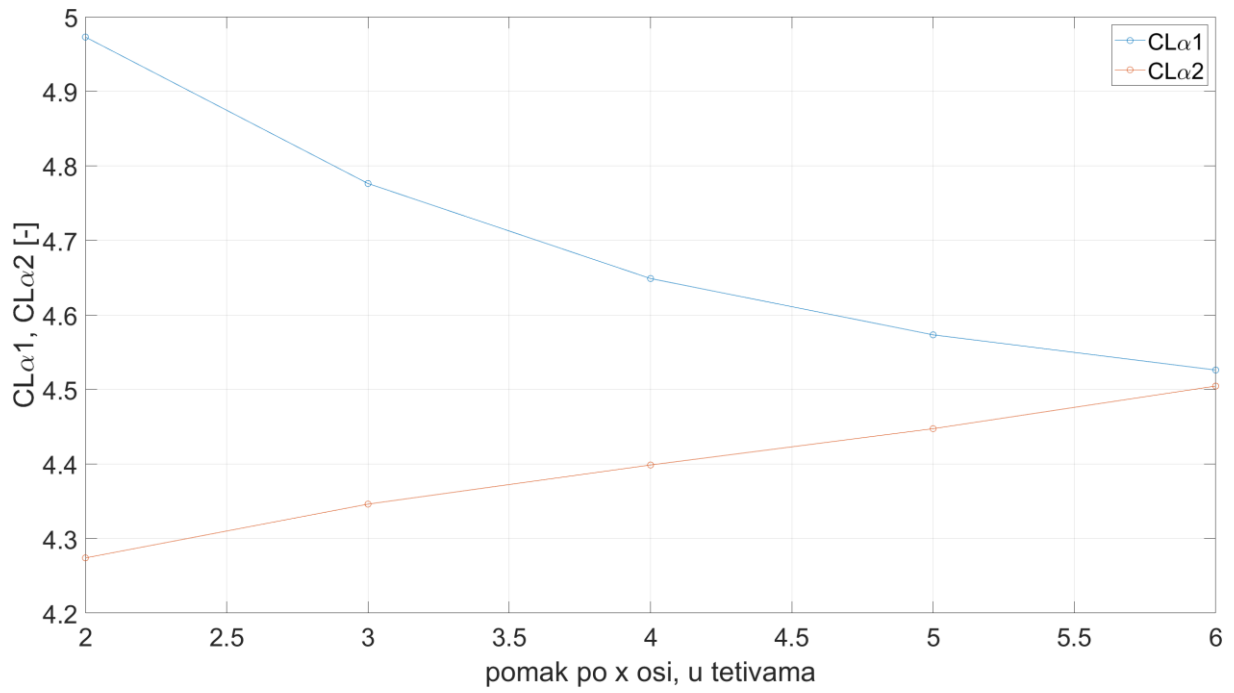
### 4.3. Usporedba rezultata za promjene horizontalnog pomaka

U ovoj analizi kao i u prethodnoj gledali smo kako se mijenjaju koeficijenti, jedina varijabla koju smo mijenjali je horizontalni razmak između prednjeg i stražnjeg krila. Ostale veličine su iste kao u referentnoj konfiguraciji.

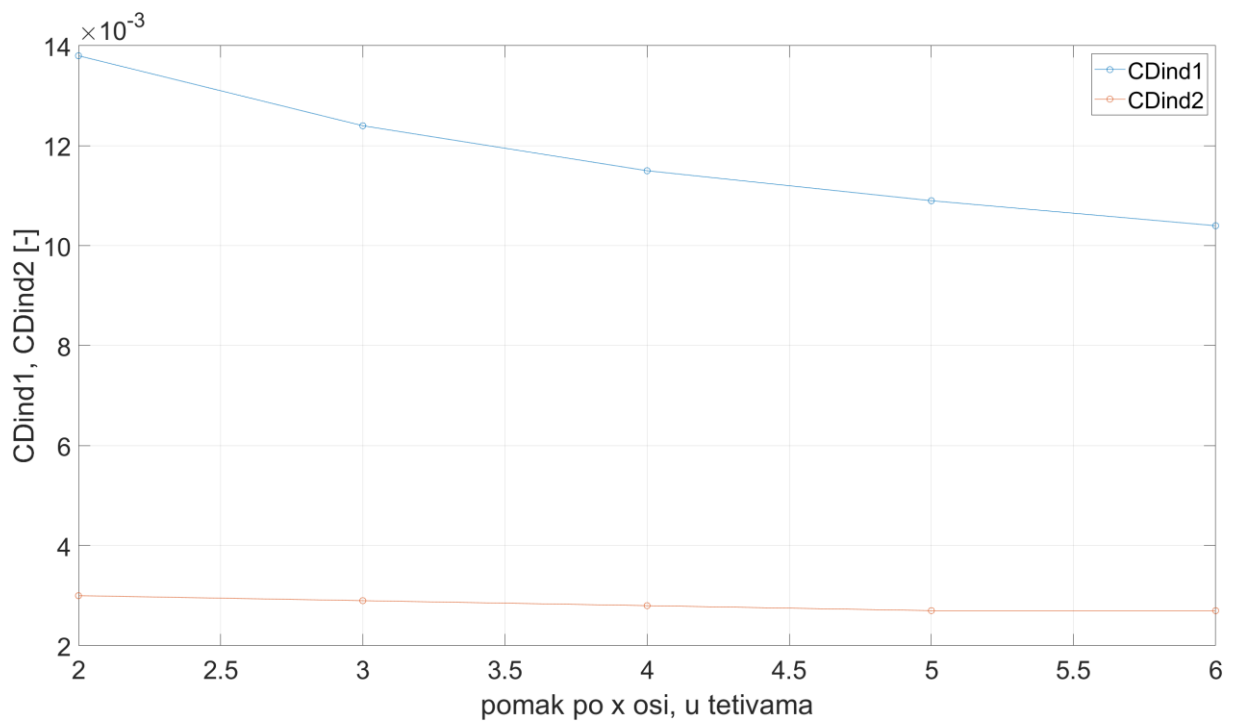


Slika 4.9 Ovisnost  $C_L$  o  $\Delta X/c$

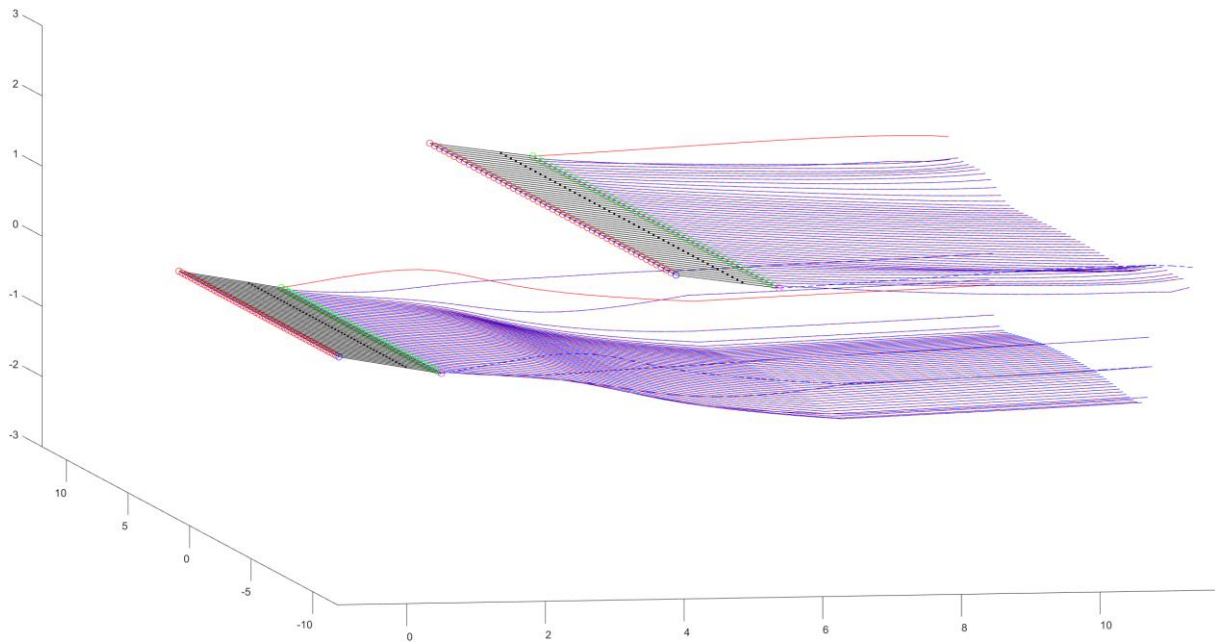
Kao što je donekle očekivano koeficijenti uzgona, koeficijenti gradijenta uzgona i koeficijent induciranog otpora se ponašaju očekivano što je veći razmak između krila, konvergiraju ka vrijednostima u slobodnoj struji. Na slici (4.9) je to posebno vidljivo, dok na slici (4.8) je interesantno da blizina stražnjeg krila povećava koeficijent uzgona prednjeg krila.



Slika 4.10 Ovisnost  $CL_{\alpha}$  o  $\Delta X/c$



Slike 4.11 Ovisnost  $CD_{ind}$  o  $\Delta X/c$

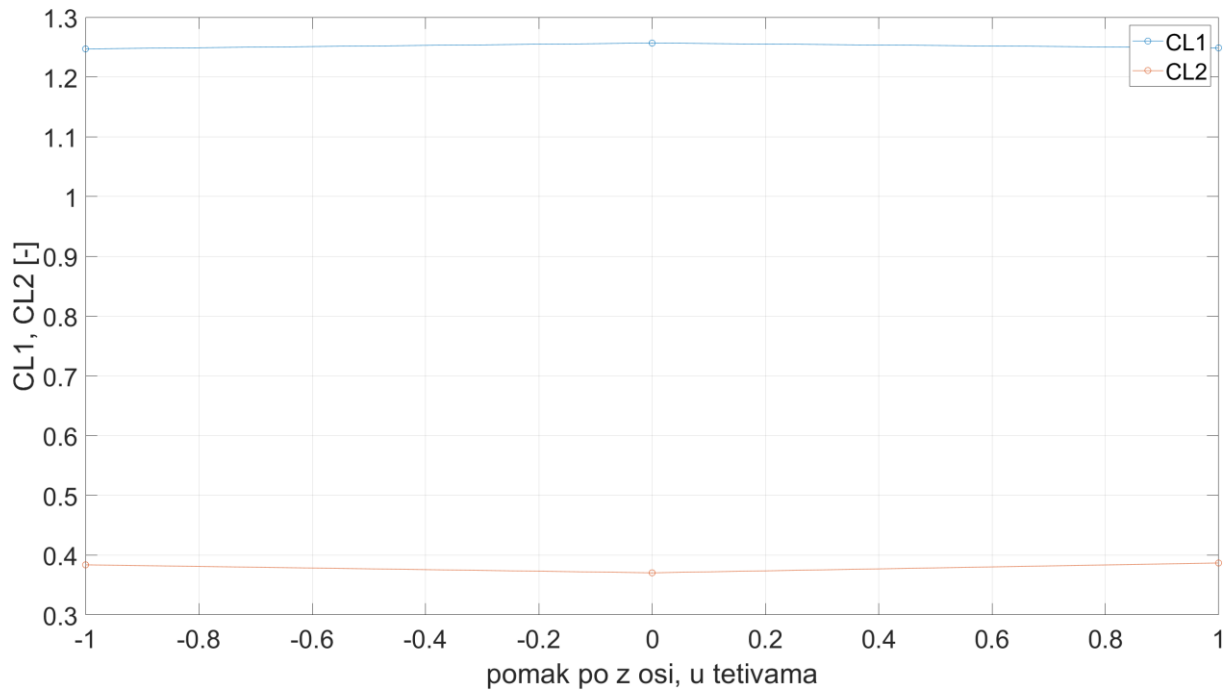
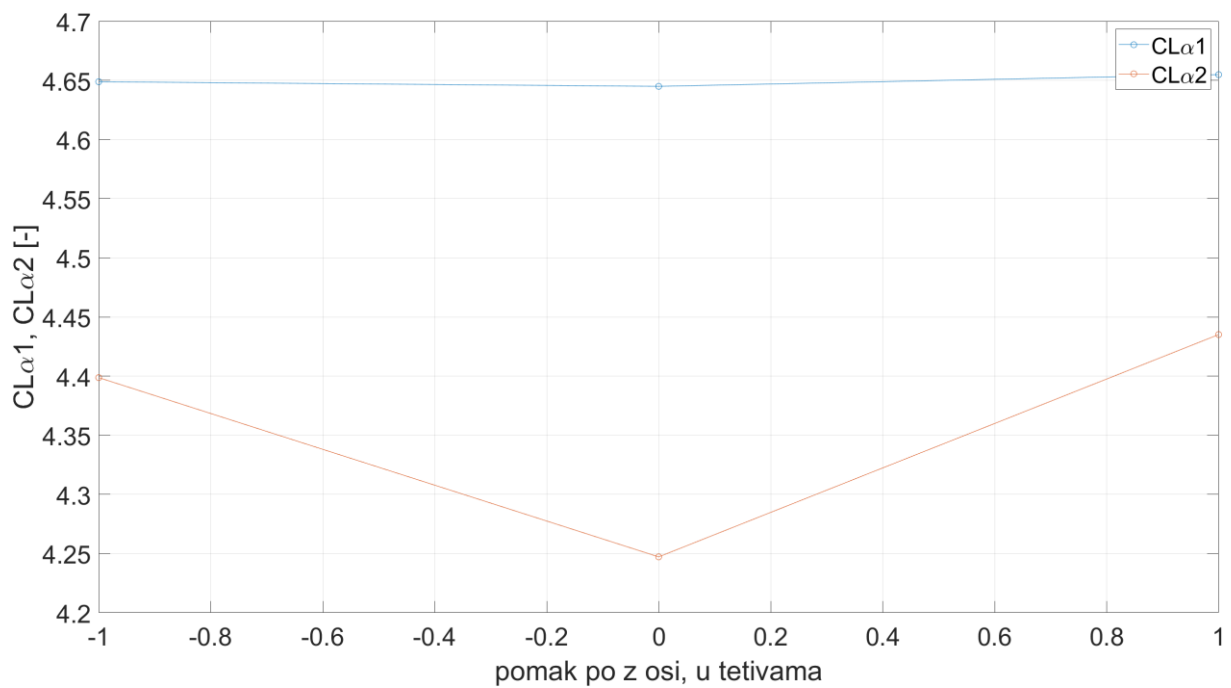


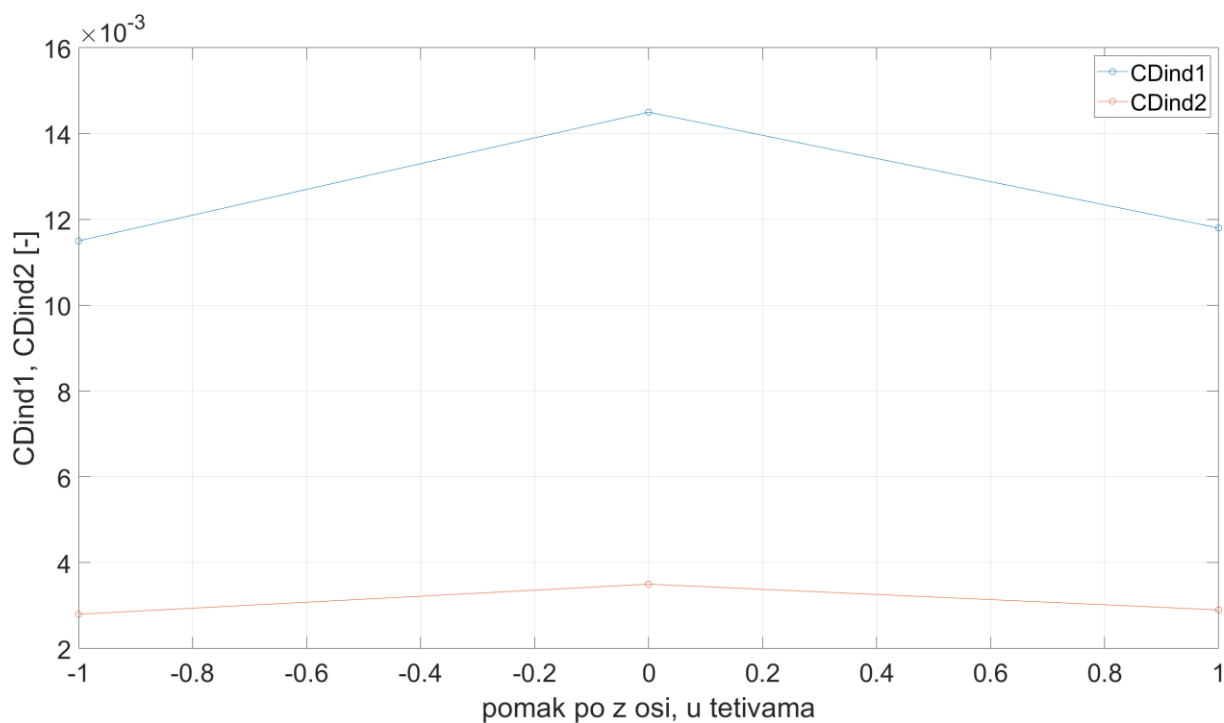
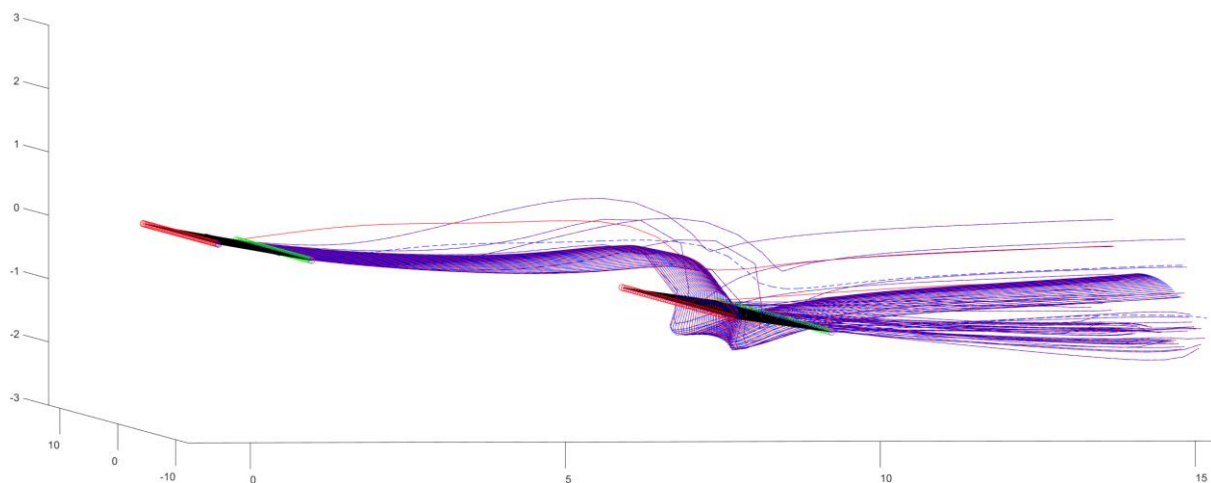
Slika 4.12 Slobodni trag za horizontalni pomak od dvije tetive

U ovoj analizi horizontalni pomak je mijenjan od dvije duljine tetive do šest duljina tetive u inkrementu od jedne duljine tetive. I na slici 4.11 je očito kako stražnje krilo „gura“ vrtložnu plahu prednjeg krila dalje od sebe, što je i očekivano.

#### 4.4. Usporedba rezultata za promjene vertikalnog pomaka

Vertikalni pomak drugog krila je variran također u duljinama tetive, čiji je inkrement bio jedna udaljenost tetive, u rasponu od jedne duljine tetive ispod krila do jedne duljine tetive iznad krila. Na slikama (4.12), (4.13) i (4.14) možemo vidjeti da koeficijenti su relativno konstantni, što je zanimljivo jer očekivano bi bilo da performanse stražnjeg krila koje je u struji prednjeg bi bile značajno lošije od dobivenih.

Slika 4.13 Ovisnost  $C_L$  o  $\Delta Z/c$ Slike 4.14 Ovisnost  $C_{L\alpha}$  o  $\Delta Z/c$

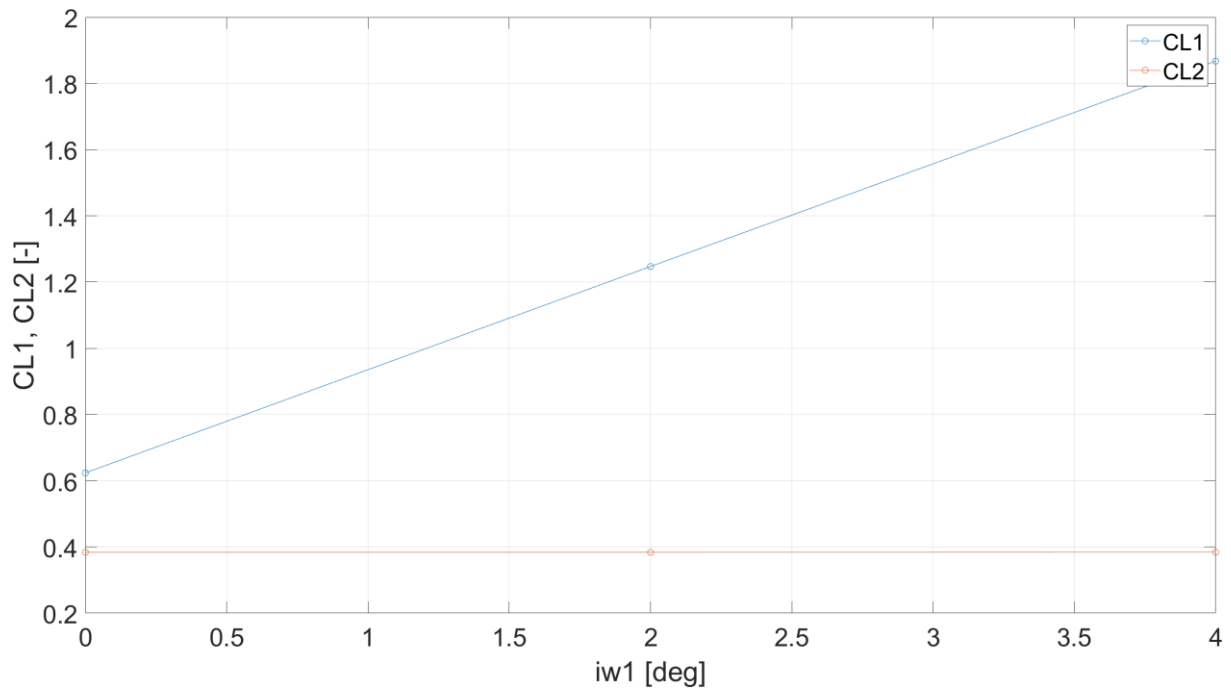
Slike 4.15 Ovisnost  $C_{Dind}$  o  $\Delta Z/c$ 

Slika 4.16 Slobodan trag za krila u istoj ravnini

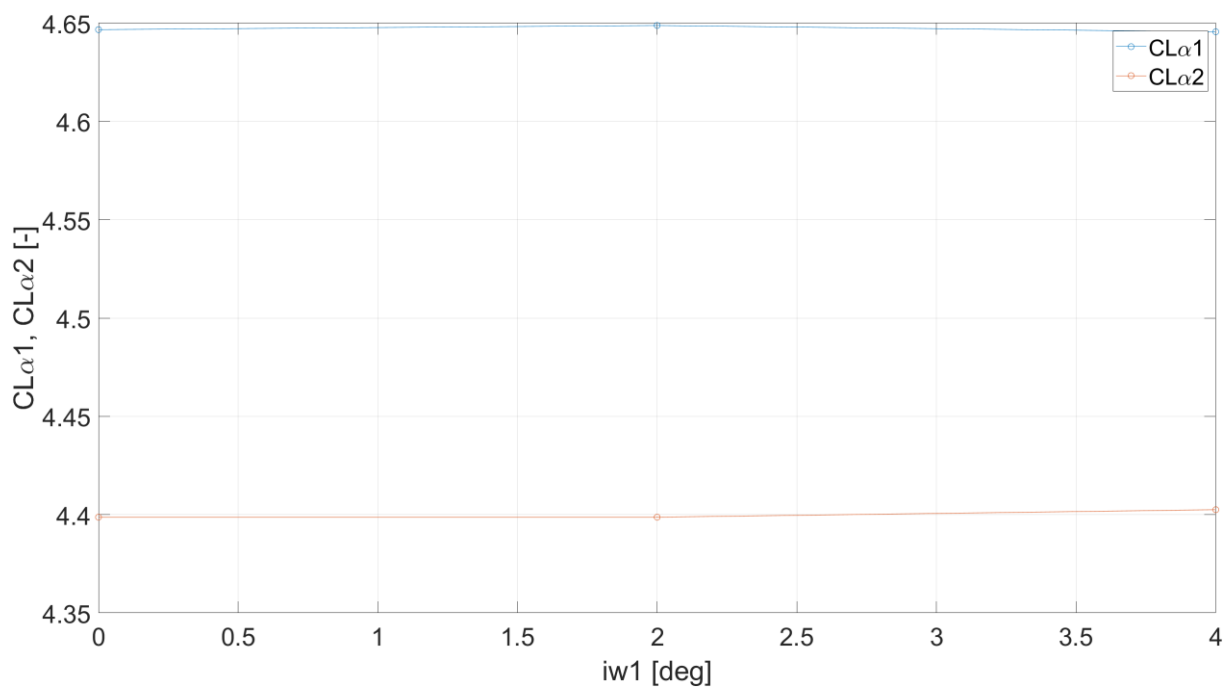
Na slici (4.15) se vidi da trag prednjeg krila prolazi kroz površinu stražnjeg što je uzrok promijene koeficijenta, ali postavlja se pitanje o njihovoj točnosti.

#### 4.5. Usporedba rezultata za promjenu postavnog kuta prednjeg krila

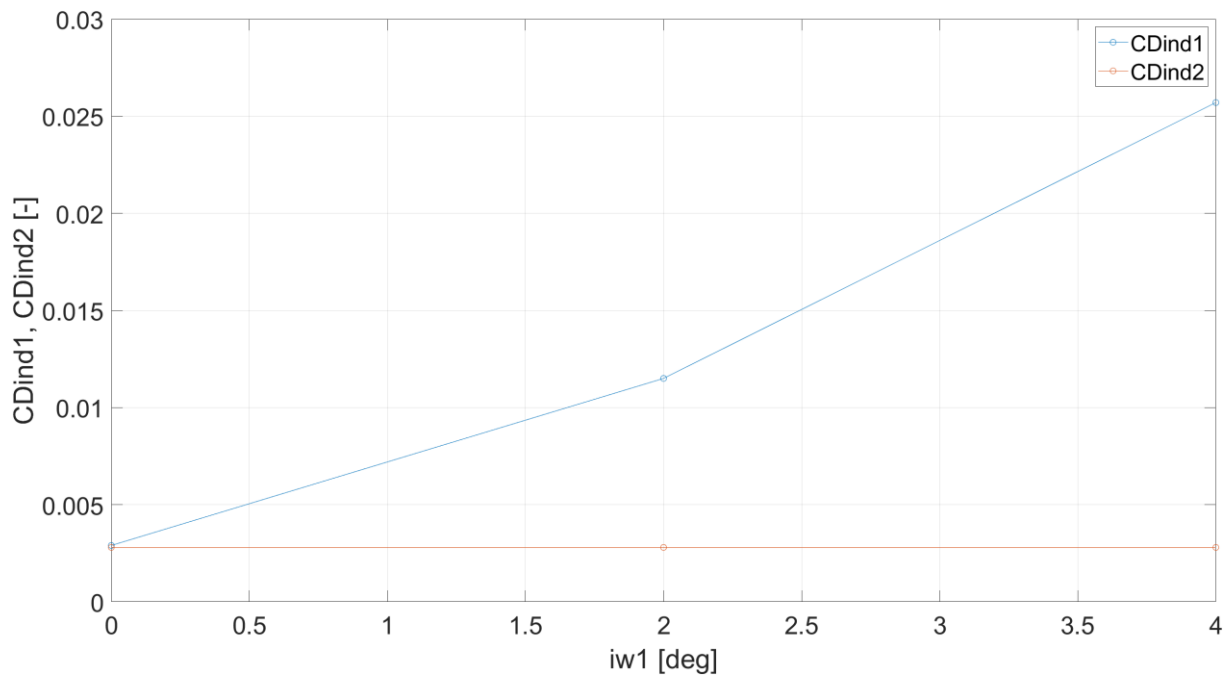
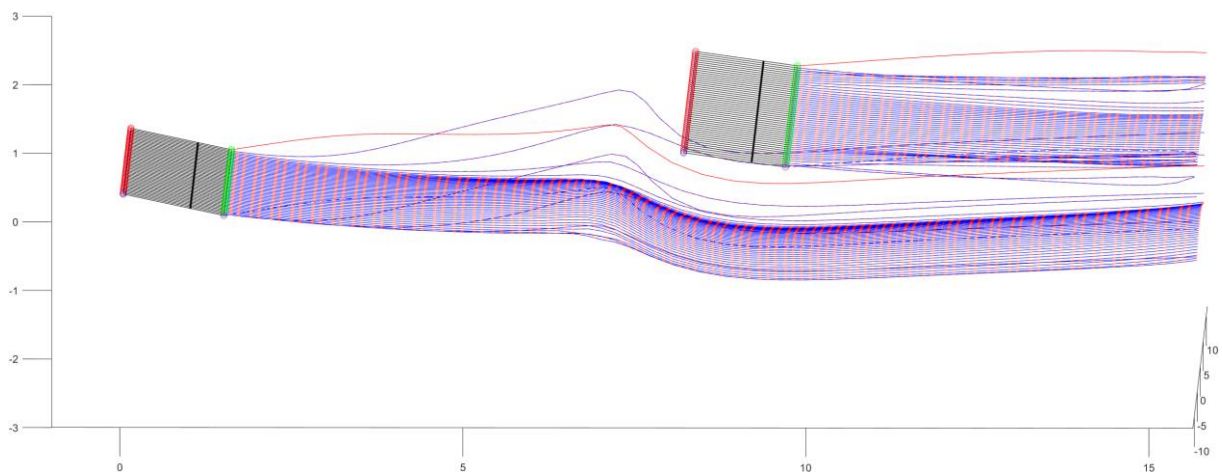
Postavni kut prvog krila mijenjan je od  $0^\circ$  do  $4^\circ$  sa inkrementom od  $2^\circ$ . Svi ostali parametri su isti kao i u referentnoj konfiguraciji.

Slika 4.17 Ovisnost  $C_L$  o postavnom kutu

Kao što je se moglo i pretpostaviti koeficijenti ostaju relativno konstantni za prednje i stražnje krilo (Slika 4.17), osim naravno koeficijenta uzgona i induciranog otpora prednjeg krila koji se linearno mijenja (Slika 4.16 i 4.18)

Slika 4.18 Ovisnost  $C_{L\alpha}$  o postavnom kutu



Slika 4.19 Ovisnost  $C_{Dind}$  o postavnom kutuSlika 4.20 Trag za postavni kut  $i_w=4^\circ$ 

Slično kao i u slučaju gdje smo mijenjali horizontalni pomak, na slici (4.19) lako se može vidjeti kako stražnje krilo gura vrtložni trag dalje od sebe. Također se dobro vidi da dolazi do većeg povijanja vrtložne plahte pri većim napadnim kutovima što je uzrokovano većim postavnim kutem prednjeg krila koji generira veći uzgon te i time veće intenzitete vrtloga.

## 5. Zaključak

U okviru ovog završnog rada je razvijen model vrtloga tandem konfiguracije kod kojeg je umjesto krutog pravocrtnog traga primijenjena metoda slobodnog traga što omogućava dodatni rezultat za deformaciju traga prednje i stražnje noseće površine u konfiguraciji te njen utjecaj na aerodinamičke koeficijente. Koristeći modificiranu Wessingerovu metodu noseće linije, u kombinaciji sa FWM, napravljena je analiza tandem konfiguracije. Sudeći po rezultatima konfiguracija pokazuje da ako se može osigurati dovoljno velik horizontalni i vertikalni razmak, stražnje krilo ima gubitaka no nije neupotrebljivo, iako se mora uzeti u obzir da je koeficijent uzgona stražnjeg krila oko 40% manji no što bi bio da je u slobodnoj struji, što bi zahtijevalo, kao što je i pretpostavljeno u referentnoj geometriji, da prednje krilo bude manje od stražnjeg. Koeficijenti otpora i gradijent koeficijenta uzgona se mijenjaju očekivano, gdje za prednje krilo ostaju praktički konstantni, koeficijent otpora se linearno povećao, dok za stražnje krilo postoji nelinearnost što je posljedica vrtložnog traga sa prednjeg krila. Takva konfiguracija pokazuje, ako bi se pozabavilo sa postavnim kutovima i odabirom odgovarajućeg aeroprofila, da bi se moglo sa istim rasponom krila mogao povećati koristan teret, također budući da oba krila stvaraju značajnu količinu uzgona, potencijalno bi lako bilo sa postavnim kutovima namijesiti da je zrakoplov statički stabilan. Naravno metoda bi se trebala potvrditi sa eksperimentom iz leta ili nekom kompleksnijom metodom da se performanse koje su izračunate mogu smatrati točnima. U kontrastu sa Weissingerovom metodom, ovako postavljena analiza zahtijeva značajno više vremena, no u fazi konstruiranja zrakoplova i dalje je prihvatljiva opcija, ako se ustanovi da dobivena rješenja se pokazuju točnima. Mora se napomenuti da kada je postavljen vertikalni razmak bio nula, performanse stražnjeg krila nisu se toliko drastično promijenile što nam ukazuje da se daljnja ispitivanja moraju napraviti. Nadalje metoda ima još mnogo mjesta za proširenje te nudi veliku primjenjivost za razne konfiguracije bilo da ima više nosivih površina ili samo jedna, također postoji i mogućnost modeliranja wingleta i upravljačkih površina. Kao daljnja razrada metode dobro bi bilo uključiti interakciju trupa sa krilima budući da bi takva interakcija potencijalno dovela do značajnije razlike koeficijenata među krilima. Također kao što je napomenuto implementacija naprednijeg modela vrtložne jezgre je među lakšim modifikacijama koje bi se mogle ugraditi, kao što je i određivanje hvatišta sile uzgona cijele konfiguracije i kako se ono mijenja sa različitim parametrima. Kao i mnoge preliminarne metode ovakvi rezultati bi se trebali uzeti sa oprezom i idealno potvrditi sa još nekom metodom ili eksperimentom u stvarnom svjetu.

## 6. Literatura

- [1] Anderson, John. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill Education. 2001.
- [2] J. Katz, A. Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics, 2nd ed.* Cambridge University 2001. Press, Cambridge.
- [3] Janković S., Vrdoljak M. *Aerodinamika I, predavanja*. Fakultet strojarstva i brodogradnje. 2016.
- [4] Vatistas, G.H., Kozel, V., Mih. W.C. *A simpler model for concentrated vortices*. Exp. Fluids, vol. 11, pp. 73–76. 1991.