

Numerička analiza fermentacijskog spremnika za proizvodnju piva

Labar, Luka

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:387185>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-27**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Luka Labar

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit, dipl. ing.

Student:

Luka Labar

Zagreb, 2022.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc.dr.sc. Ivici Skozritu na pruženoj pomoći, savjetima i kritikama prilikom izrade ovog rada. Zahvaljujem se svim prijateljima i kolegama koji su učinili proces studiranja ugodnijim i lakšim. Zahvaljujem se cijeloj svojoj obitelji na potpori i motivaciji, a posebno roditeljima bez kojih ništa ovo ne bi bilo moguće.

Luka Labar



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodostrojarški

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Luka Labar**

JMBAG: **0035216332**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza fermentacijskog spremnika za proizvodnju piva**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical analysis of fermentation tank for beer production**

Opis zadatka:

Fermentacijski spremnici su osnovni dio opreme svakog postrojenja za proizvodnju piva. Mogu stajati zasebno ili biti spojeni u kompaktne jedinice. Postoje otvoreni spremnici i zatvoreni spremnici koji mogu biti cilindrične, konusne i sferne izvedbe ili kombinacije istih. Ovisno o vrsti fermentacije postoje spremnici za glavnu fermentaciju, za naknadnu fermentaciju te spremnici namijenjeni za obje faze fermentacije. U pravilu se izrađuju od nehrđajućeg čelika sa ili bez dodane izolacije. Svaki od spremnika na sebi nosi i sustav za hlađenje te regulatore temperature i tlaka.

Analizirati fermentacijski spremnik za proizvodnju piva iskoristive zapremine 1000L. Za definirane podatke o konstrukciji, dimenzijama te opterećenju i rubnim uvjetima spremnika potrebno je provjeriti da li spremnik zadovoljava uvjet čvrstoće, tj. potrebno je izvršiti kontrolni proračun spremnika. Proračun je potrebno provesti analitički i numerički te usporediti dobivene rezultate. Numerički proračun provesti primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristiti dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa. Potrebno je izvršiti verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i procedura na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.
3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Škizit Ivica

Predsjednik Povjerenstva:

V Soldo
Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	VII
POPIS OZNAKA	VIII
SAŽETAK.....	XI
SUMMARY	XII
1 UVOD.....	1
1.1 Tehnologija proizvodnje piva	1
1.1.1 Proizvodnja slada	1
1.1.2 Proizvodnja piva	2
1.2 Fermentacija (vrenje) piva	3
1.2.1 Glavno vrenje.....	3
1.2.2 Naknadno vrenje	4
1.3 Spremnici za fermentaciju (vrenje) piva.....	4
1.4 Opis zadatka i model odabranog spremnika	6
1.4.1 Opis zadatka i primjena odabranog spremnika.....	6
1.4.2 Tehnički podaci o odabranom spremniku.....	7
2 METODA KONAČNIH ELEMENATA	9
2.1 Osnovno o metodi	9
2.2 Globalna jednadžba konačnih elemenata	11
2.3 Programski paket Abaqus®	12
2.3.1 Karakterizacija elemenata u Abaqusu.....	13
2.3.2 Procedura modeliranja u Abaqusu	14
3 VERIFIKACIJA KONAČNIH ELEMENATA	16
3.1 Analitičko rješenje	16
3.1.1 Membransko stanje	16
3.1.2 Savijanje.....	17
3.2 Konačni elementi korišteni za verifikaciju	20
3.2.1 Linearni ljuskasti trokutasti konačni element (S3)	20
3.2.2 Linearni ljuskasti četverokutni konačni element (S4R).....	20
3.2.3 Kvadratni ljuskasti trokutasti konačni element (STRI65).....	20
3.2.4 Kvadratni ljuskasti četverokutni konačni element (S8R)	21
3.3 Verifikacija.....	21
4 ANALITIČKI PRORAČUN	24

4.1	Osnovno o teoriji ljustaka	24
4.2	Osnovno o tankim kružnim pločama	25
4.3	Visina maksimalnog volumena piva	26
4.4	Membransko stanje u ljuskama	26
4.4.1	Konusna ljuska	27
4.4.2	Cilindrična ljuska – Veća	30
4.4.2.1	Područje u kojem djeluje samo nadlak $0 \leq x \leq (h_{c1} - h_{cpotr})$	30
4.4.2.2	Područje u kojem djeluje i nadtlak i hidrostatski tlak $(h_{c1} - h_{cpotr}) \leq x \leq h_{c1}$..	31
4.4.3	Sferna ljuska	32
4.4.4	Cilindrična ljuska – Manja	33
4.5	Lokalno savijanje	34
4.5.1	Spoj konusne ljuske i veće cilindrične ljuske	37
4.5.2	Spoj veće cilindrične ljuske i sferne ljuske	43
4.5.3	Spoj sferne ljuske i manje cilindrične ljuske	49
4.5.4	Spoj manje cilindrične ljuske i kružne ploče	54
4.6	Čvrstoća konstrukcije	59
4.6.1	Spoj konusne ljuske i veće cilindrične ljuske	60
4.6.2	Spoj veće cilindrične ljuske i sferne ljuske	60
4.6.3	Spoj sferne ljuske i manje cilindrične ljuske	61
4.6.4	Spoj manje cilindrične ljuske i kružne ploče	61
5	NUMERIČKA ANALIZA	63
5.1	Postavke analize	63
5.2	Rezultati analize	66
5.2.1	Raspodjele radijalnih pomaka i zakreta	66
5.2.2	Naprežanja na mjestima spojeva	72
5.2.3	Grafički prikazi pomaka na spremniku	76
6	USPOREDBA ANALITIČKIH I NUMERIČKIH REZULTATA	79
7	ZAKLJUČAK	86
	LITERATURA	88
	PRILOZI	89

POPIS SLIKA

Slika 1.	Tehnološki postupci za proizvodnju pivarskog slada [3]	1
Slika 2.	Vrste slada i piva u ovisnosti o temperaturi sušenja slada [4].....	2
Slika 3.	Tehnologija proizvodnje piva [3]	2
Slika 4.	Fermentacija piva [5].....	3
Slika 5.	Otvoreni spremnik [6]	5
Slika 6.	Zatvoreni cilindrični horizontalni i vertikalni spremnik [6].....	5
Slika 7.	Zatvoreni cilindrično-konusni spremnik [6].....	6
Slika 8.	Odabrani spremnik [7].....	7
Slika 9.	Skica odabranog spremnika sa uvedenim pojednostavljenjima	7
Slika 10.	Jednodimenzijski konačni elementi.....	9
Slika 11.	Dvodimenzijski konačni elementi	10
Slika 12.	Trodimenzijski konačni elementi	10
Slika 13.	Osnosimetrični konačni element	10
Slika 14.	Konačni elementi za rješavanje problema savijanja ploča	11
Slika 15.	Element za analizu ljuskastih konstrukcija	11
Slika 16.	Proces analize unutar računalnog alata [10].....	13
Slika 17.	Familije elemenata u Abaqusu [10].....	13
Slika 18.	Elementi s obzirom na broj čvorova u Abaqusu [10].....	14
Slika 19.	Procedura modeliranja u Abaqusu [10].....	15
Slika 20.	Skica jednostavnog spremnika	16
Slika 21.	Presjek ljuske.....	17
Slika 22.	Spoj cilindra i podloge	18
Slika 23.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini cilindrične ljuske	19
Slika 24.	Linearni ljuskasti trokutasti konačni element (S3) [10]	20
Slika 25.	Linearni ljuskasti četverokutni konačni element (S4R) [10].....	20
Slika 26.	Kvadratni ljuskasti trokutasti konačni element (STRI65) [10]	20
Slika 27.	Kvadratni ljuskasti četverokutni konačni element (S8R) [10]	21
Slika 28.	Cilindrična ljuska sa definiranim rubnim uvjetima i tlakom.....	21
Slika 29.	Mreža četverokutnih konačnih elemenata različitih gustoća.....	22
Slika 30.	Mreža trokutastih konačnih elemenata različitih gustoća	22
Slika 31.	Konvergenција rješenja	23
Slika 32.	Ljuskasti kontinuum	24
Slika 33.	Općenita raspodjela naprežanja po debljini ljuske	25

Slika 34.	Raspodjela naprezanja u tankim ljuskama	25
Slika 35.	Tanka kružna ploča	25
Slika 36.	Skica spremnika	27
Slika 37.	Pomoćna skica za određivanje cirkularnog glavnog polumjera	28
Slika 38.	Presjek konusa	28
Slika 39.	Presjek prvog područja većeg cilindra	30
Slika 40.	Presjek drugog područja većeg cilindra	31
Slika 41.	Presjek sfere	33
Slika 42.	Presjek manjeg cilindra	34
Slika 43.	Pomoćna skica za određivanje granica integracije kod sferne ljuske	36
Slika 44.	Pomoćna skica za određivanje granica integracije kod sferne ljuske	36
Slika 45.	Spoj konusa i cilindra	37
Slika 46.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice konusne ljuske	42
Slika 47.	Raspodjela zakreta po duljini izvodnice konusne ljuske	42
Slika 48.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusa	43
Slika 49.	Raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusa	43
Slika 50.	Spoj većeg cilindra i sfere	44
Slika 51.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuske sa strane sfere	47
Slika 52.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini luka sferne ljuske	48
Slika 53.	Raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane sfere	48
Slika 54.	Raspodjela zakreta po duljini luka sferne ljuske	48
Slika 55.	Spoj manjeg cilindra i sfere	49
Slika 56.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske	53
Slika 57.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini luka sferne ljuske	53
Slika 58.	Raspodjela zakreta po duljini manje cilindrične ljuske	53
Slika 59.	Raspodjela zakreta po duljini luka sferne ljuske	54
Slika 60.	Spoj manjeg cilindra i kružne ploče	54
Slika 61.	Presjek ploče	55
Slika 62.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske	58
Slika 63.	Raspodjela zakreta po duljini manje cilindrične ljuske	59
Slika 64.	Raspodjela zakreta po radijusu ploče	59
Slika 65.	Model spremnika u Abaqusu sa dodanim rubnim uvjetima i opterećenjem	63
Slika 66.	Model spremnika sa definiranom mrežom konačnih elemenata	64

Slika 67.	Gustoća mreže za detalj A.....	64
Slika 68.	Gustoća mreže za detalj B.....	65
Slika 69.	Gustoća mreže za detalj C.....	65
Slika 70.	Gustoća mreže za detalj D.....	65
Slika 71.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice konusne ljuske	66
Slika 72.	Raspodjela zakreta po duljini izvodnice konusne ljuske.....	66
Slika 73.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusne ljuske	67
Slika 74.	Raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusne ljuske....	67
Slika 75.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske	68
Slika 76.	Raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske	68
Slika 77.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice sferne ljuske sa strane veće cilindrične ljuske	68
Slika 78.	Raspodjela zakreta po duljini izvodnice sferne ljuske sa strane veće cilindrične ljuske	69
Slika 79.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice sferne ljuske sa strane manje cilindrične ljuske	69
Slika 80.	Raspodjela zakreta po duljini izvodnice sferne ljuske sa strane manje cilindrične ljuske	69
Slika 81.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske	70
Slika 82.	Raspodjela zakreta po duljini manje cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske....	70
Slika 83.	Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske sa strane kružne ploče	71
Slika 84.	Raspodjela zakreta po duljini manje cilindrične ljuske sa strane kružne ploče	71
Slika 85.	Raspodjela zakreta po duljini polumjera kružne ploče	71
Slika 86.	Ekvivalentna naprezanja na cijelom spremniku prema Trescinoj teoriji čvrstoće	72
Slika 87.	Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalj A	73
Slika 88.	Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalj B	73
Slika 89.	Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalj C	73
Slika 90.	Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalj D	74
Slika 91.	Ekvivalentna naprezanja na cijelom spremniku prema von Misesovoj teoriji čvrstoće.....	74
Slika 92.	Ekvivalentna naprezanja prema von Misesovoj teoriji čvrstoće za detalj A.....	75
Slika 93.	Ekvivalentna naprezanja prema von Misesovoj teoriji čvrstoće za detalj B.....	75
Slika 94.	Ekvivalentna naprezanja prema von Misesovoj teoriji čvrstoće za detalj C.....	75

Slika 95.	Ekvivalentna naprezanja prema von Misesovoj teoriji čvrstoće za detalj D.....	76
Slika 96.	Radijalni pomak za cijeli spremnik	76
Slika 97.	Radijalni pomak za detalj A	77
Slika 98.	Radijalni pomak za detalj B	77
Slika 99.	Radijalni pomak za detalj C	77
Slika 100.	Radijalni pomak za detalj D	78
Slika 101.	Progib tanke kružne ploče	78
Slika 102.	Usporedba radijalnog pomaka konusa	80
Slika 103.	Usporedba zakreta konusa	80
Slika 104.	Usporedba radijalnog pomaka većeg cilindra sa strane konusa	80
Slika 105.	Usporedba zakreta većeg cilindra sa strane konusa	81
Slika 106.	Usporedba radijalnog pomaka većeg cilindra sa strane sfere.....	81
Slika 107.	Usporedba zakreta većeg cilindra sa strane sfere	82
Slika 108.	Usporedba radijalnog pomaka sfere sa strane većeg cilindra.....	82
Slika 109.	Usporedba zakreta sfere sa strane većeg cilindra	82
Slika 110.	Usporedba radijalnog pomaka sfere sa strane manjeg cilindra	83
Slika 111.	Usporedba zakreta sfere sa strane manjeg cilindra	83
Slika 112.	Usporedba radijalnog pomaka manjeg cilindra sa strane sfere	83
Slika 113.	Usporedba zakreta manjeg cilindra sa strane sfere	84
Slika 114.	Usporedba radijalnog pomaka manjeg cilindra sa strane ploče	84
Slika 115.	Usporedba zakreta manjeg cilindra sa strane ploče.....	85
Slika 116.	Usporedba zakreta kružne ploče.....	85

POPIS TABLICA

Tablica 1. Osnovni podaci o odabranom spremniku [7]	8
Tablica 2. Gustoća piva[8]	8
Tablica 3. Rezultati sa različitim elementima i gustoćama mreže	22
Tablica 4. Ekvivalentna naprezanja na mjestima spojeva u Abaqusu.....	72
Tablica 5. Usporedba ekvivalentnih naprezanja.....	79

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
E	GPa	Modul elastičnosti
d_c	m	Promjer cilindra
D	Nm	Fleksijska krutost
d_p	m	Promjer kružne ploče
e	%	Relativna pogreška
f_1, f_2, f_3, f_4	-	Eksponecijalno-trigonometrijske funkcije
g	m/s ²	Ubrzanje gravitacije
G	N	Sila uslijed težine fluida
h	m	Debljina stijenke ljuske
h_{c1}	m	Visina većeg cilindra
h_{cpotr}	m	Visina do koje je veći cilindar ispunjen tekućinom
h_k	m	Visina konusa
h_p	m	Debljina kružne ploče
h_{uk}	m	Ukupna visina stupca tekućine
K	N/m	Globalna matrica krutosti
k	N/m	Lokalna matrica krutosti
M_0	Nm/m	Poopćeni moment
m_{pr}	kg	Masa praznog spremnika
m_{pu}	kg	Masa punog spremnika
M_r	Nm/m	Radijalni moment kružne ploče
M_ϑ	Nm/m	Meridijalni moment u ljuskama
M_φ	Nm/m	Cirkularni moment u ljuskama
N_ϑ	N/m	Meridijalna sila u ljuskama
N_φ	N/m	Cirkularna sila u ljuskama
p	Pa	Tlak
p_h	Pa	Hidrostatski tlak
p_n	Pa	Normalni tlak

p_0	Pa	Nadtlak
p_{uk}	Pa	Ukupni tlak
Q	N/m	Poprečna unutarnja sila u kružnoj ploči
Q_0	N/m	Poprečna sila
Q_{rm}	N/m	Radijalna poprečna sila u ljuskama
\mathbf{R}	N	Globalni vektor sila
\mathbf{r}	N	Lokalni vektor sila
r_1	m	Meridijalni polumjer ljuske
r_2	m	Cirkularni polumjer ljuske
R_{c1}	m	Polumjer većeg cilindra
R_{c2}	m	Polumjer manjeg cilindra
R_e	N/mm ²	Granica elastičnosti
R_s	m	Polumjer sfere
s	m	Izvodnica ljuske
S	-	Faktor sigurnosti
s_1, s_2	m	Granice integracije kod sferne ljuske
S_{num}	-	Faktor sigurnosti numeričkog proračuna
t	m	Debljina stijenke ljuske
u_r	m	Radijalni pomak ljuske
$u_{r,m}$	m	Radijalni membranski pomak ljuske
V	m ³	Volumen
V_{cpotr}	m ³	Volumen većeg cilindra ispunjen tekućinom
V_k	m ³	Volumen konusa
V_{uk}	m ³	Ukupni volumen tekućine
x	m	Koordinata
X_1, X_3, X_5, X_7, X_9	N/m	Poprečne sile
$X_2, X_4, X_6, X_8, X_{10}$	Nm/m	Poprečni momenti
α	rad	Zakret ljuske
α	°	Kut

α_{11}	m^2/N	Uplivni koeficijenti
α_{12}, α_{21}	m/N	
α_{22}	$1/\text{N}$	
α_m	rad	Membranski zakret ljuske
β	°	Kut
β	$1/\text{m}$	Geometrijsko-materijalna značajka ljuske
ϑ, ϑ_0	°	Kut
ρ_p	kg/m^3	Gustoća tekućine
σ_{ekv}	N/mm^2	Ekvivalentno naprezanje
σ_{max}	N/mm^2	Maksimalno naprezanje
$(\sigma_{max})_{num}$	N/mm^2	Maksimalno naprezanje dobiveno numerički
$\sigma_{\vartheta max}$	N/mm^2	Maksimalno meridijalno naprezanje u ljusci
$\sigma_{\varphi max}$	N/mm^2	Maksimalno cirkularno naprezanje u ljusci
ν	-	Poissonov faktor

SAŽETAK

Tema ovog rada je numerička analiza fermentacijskog spremnika za proizvodnju piva. Na početku rada dan je kratki uvod o proizvodnji piva te o spremnicima za fermentaciju istog. Za odabrani spremnik iskoristivog volumena 1000 l i ukupnog volumena 1200 l izvršen je analitički i numerički proračun. Geometrija odabranog spremnika sastavljena je od konusne, sferne i dvije cilindrične ljuske te od tanke kružne ploče. Prije samog proračuna dan je kratki teorijski uvod o tankim kružnim pločama i ljuskama te o metodi konačnih elemenata (MKE). Analitički proračun proveden je primjenom jednadžbi izvedenih iz teorije tankih kružnih ploča i ljuski. Za svaki dio spremnika određeni su i u dijagramu prikazani radijalni pomaci i zakreti. Također, određena su naprezanja na kritičnim mjestima spremnika. Primjenom Trescine teorije čvrstoće na tim mjestima određena su ekvivalentna naprezanja te je na osnovu najvećeg dobivenog naprezanja provjerena čvrstoća spremnika u odnosu na granicu elastičnosti odabranog materijala spremnika. Numerički proračun izveden je primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata (MKE). Verifikacija konačnih elemenata za ovu analizu napravljena je na primjeru jedne cilindrične ljuske opterećene konstantnim tlakom. Različitim vrstama konačnih elemenata i različitim gustoćama mreže prikazana je konvergencija rješenja te je na taj način opravdana upotreba konačnih elemenata za glavni proračun. Provedbom glavnog proračuna određeni su radijalni pomaci i zakreti svakog dijela spremnika te ekvivalentna naprezanja na kritičnim mjestima. Radijalni pomaci i zakreti prikazani su u dijagramima te grafički na cijelom spremniku i u detaljnijem pogledu u blizini spojeva. Ekvivalentna naprezanja određena su primjenom Trescine i von Misesove teorije čvrstoće te su ista prikazana grafički na cijelom spremniku i u detaljnijem pogledu za svako kritično mjesto. Za najveće naprezanje dobiveno Trescinom teorijom čvrstoće provjerena je čvrstoća spremnika u odnosu na granicu elastičnosti odabranog materijala spremnika. Rezultati dobiveni primjenom obje metode uspoređeni su. Radijalni pomaci i zakreti uspoređeni su u preklopljenim dijagramima, a ekvivalentna naprezanja dobivena primjenom Trescine teorije čvrstoće uspoređena su tablično te je prikazan relativna pogreška numeričkog rješenja.

Ključne riječi:

Abaqus®, cilindar, čvrstoća, fermentacija, konus, ljuska, metoda konačnih elemenata (MKE), naprezanje, numerička analiza, ploča, sfera, spremnik, Tresca

SUMMARY

The topic of this paper is the numerical analysis of the fermentation tank for beer production. At the beginning of the paper, a brief introduction was presented on the production of beer and fermentation tanks. Analytical and numerical calculations were performed for the selected tank with a usable volume of 1000 l and a total volume of 1200 l. The geometry of the selected tank consists of one conical, one spherical and two cylindrical shell and a thin circular plate. Before the calculation, a brief theoretical introduction on thin circular plates and shells and on the finite element method (FEM) was presented. Analytical calculation was performed using equations derived from the theory of thin circular plates and shells. Radial displacements and rotations were determined for each part of the tank and shown in the diagram. Also, stresses were determined at critical places of the tank. By applying Tresca's failure theory, equivalent stresses were determined at these places, and based on the highest stress obtained, the strength of the tank was examined in relation to the elastic limit of the selected tank material. Numerical calculation was performed using the Abaqus® software package based on the finite element method (FEM). Verification of finite elements for this analysis was made on the example of one cylindrical shell loaded with constant pressure. Different types of finite elements and different mesh densities show the convergence of solutions, thus justifying the use of finite elements for the main calculation. By applying main calculation radial displacements and rotations were determined for each part of the tank as well as the equivalent stresses at critical places. Radial displacements and rotations are shown in diagrams and graphically throughout the tank and in a more detailed view near the joints. Equivalent stresses were determined using Tresca's and von Mises failure theory and are shown graphically throughout the tank and in more detailed view for each critical place. For the highest stress obtained by Tresca's failure theory, the strength of the tank in relation to the elastic limit of the selected tank material was examined. The results obtained using both methods were compared. Radial displacements and rotations are compared in overlapping diagrams and the equivalent stresses obtained by applying Tresca's failure theory are compared by the means of table and the relative error of the numerical solution is shown.

Key words:

Abaqus®, cone, cylinder, fermentation, finite element method (FEM), numerical analysis, plate, shell, sphere, strength, stress, tank, Tresca

1 UVOD

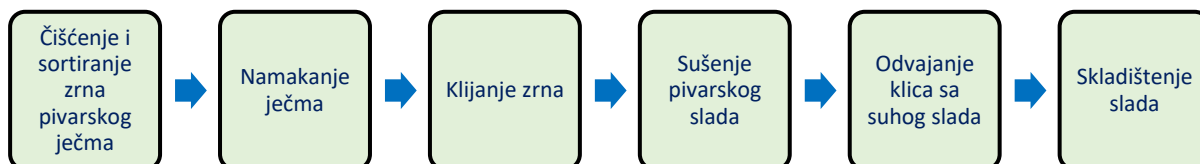
Pivo je alkoholno piće koje se proizvodi procesom alkoholnog vrenja iz slada, hmelja, vode i pivskog kvasca. Smatra se jednim od najstarijih alkoholnih pića na svijetu, čiji su se prvi oblici pojavili na području drevnog Babilona (7000 godina prije nove ere) [1]. Od svojih početaka pa do danas razvio se veliki broj različitih vrsta piva koja se mogu razlikovati [2]:

- prema vrsti kvasca
- prema masenom udjelu ekstrakata u sladovini
- prema glavnoj sirovini za proizvodnju sladovine
- prema boji
- prema volumnom udjelu alkohola.

1.1 Tehnologija proizvodnje piva

1.1.1 Proizvodnja slada

Ječam je žitarica koja sadrži škrob. Kako pivarski kvasac ne može pretvoriti škrob u alkohol ječam je potrebno preraditi u slad (isklijali ječam). Zadaća proizvodnje slada je stvaranje enzima za razgradnju škroba u šećere te proteina u aminokiseline. Tijek proizvodnje slada prikazan je na [Slika 1].



Slika 1. Tehnološki postupci za proizvodnju pivarskog slada [3]

Svrha sušenja u proizvodnji slada jest zaustavljanje klijanja, produženje trajnosti slada te stvaranje boje i arome. Početak sušenja je na 30 – 35°C, a završnim sušenjem dobivaju se različite vrste slada u ovisnosti o temperaturi sušenja:

1. svijetli slad (80°C)
2. tamni slad (90 – 110°C)
3. prženi slad (200°C)
4. dimljeni slad.

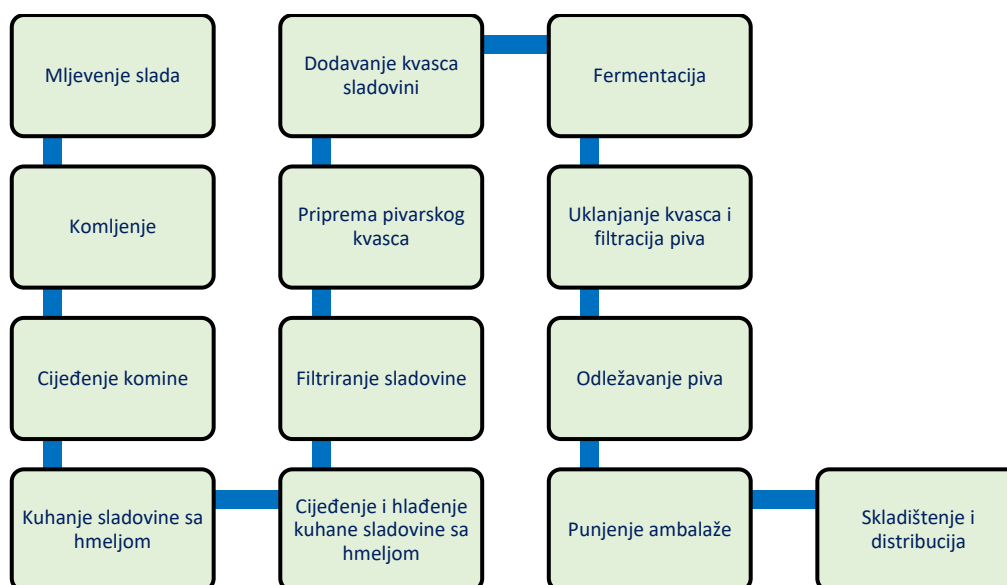
Na [Slika 2] prikazane su različite vrste slada i piva u ovisnosti o navedenim temperaturama sušenja slada.



Slika 2. Vrste slada i piva u ovisnosti o temperaturi sušenja slada [4]

1.1.2 Proizvodnja piva

Komina se dobiva dodavanjem vode u već pripremljeni slad te kuhanjem na temperaturama između 35°C i 76°C. Tim postupkom razgrađuju se proteini i škrob te nastaje komina (slatki kom). Slatki kom sadrži šećere koji mogu fermentirati u alkohol. Daljnji postupak jest kuhanje sladovine s dodanim hmeljem. Svrha kuhanja sladovine jest isparivanje suvišne vode, ekstrakcija gorkih i aromatičnih tvari iz hmelja te uništavanje mikroorganizama. Nakon kuhanja sladovina se filtrira i hladi na temperaturu fermentacije (vrenja). Dodavanjem kvasca sladovini može počinje proces fermentacije. Nakon provedene fermentacije pivo se filtrira i uklanja se zaostali kvasac te se pivo ostavlja da odleži. Nakon odležavanja pivom se puni ambalaža te se skladišti i distribuira do potrošača. Cijeli proces proizvodnje piva prikazan je na [Slika 3].



Slika 3. Tehnologija proizvodnje piva [3]

U daljnjim poglavljima objasniti će se proces fermentacije te prikazati različiti tipovi spremnika za fermentaciju („fermentora“).

1.2 Fermentacija (vrenje) piva

Fermentacija (vrenje) je najvažnija faza u proizvodnji piva. Poznate su dvije metode fermentacije (vrenja):

- donje vrenje
 - koristi se kvasac donjeg vrenja
 - početak fermentacije je na 6 – 8°C
 - proizvode se Lager piva i Pilsneri
 - piva su puna ekstrakta, stabilne pjene i piju se hladna
- gornje vrenje
 - koristi se kvasac gornjeg vrenja
 - početak fermentacije je na 15 – 20°C
 - proizvode se Ale piva i pšenična piva
 - piva imaju malo ekstrakta, sličnija su vinu nego pivu i piju se topla.

O fermentaciji ovisi vrsta i kvaliteta gotovog proizvoda. Fermentacija (vrenje) može se podijeliti na:

1. glavno vrenje
2. naknadno vrenje.

[Slika 4] prikazuje proces fermentacije.



Slika 4. Fermentacija piva [5]

Fermentacija se odvija u posebnim spremnicima za fermentaciju („fermentorima“) koji dolaze u različitim oblicima i veličinama ovisno o tipu fermentacije.

1.2.1 Glavno vrenje

U tijeku glavnog vrenja dolazi do fermentacije šećera u alkohol i CO₂, djelovanjem enzima iz kvasca uz oslobađanje topline. Za glavno vrenje karakteristična su sljedeća stanja:

- početno vrenje
- stanje niske bijele pjene
- stanje visoke smeđe pjene
- stanje loma pjene
- stanje zrelosti.

Početno vrenje je prvi period vrenja. U tijeku početnog vrenja se na površini sladovine pojavi pjena i javlja se 12-20 h nakon što je dodan kvasac. Stanje niske bijele pjene je stanje kada je cjelokupna površina sladovine u posudi za glavno vrenje prekrivena čvrstom pjenom. Stanje visoke smeđe pjene je najintenzivniji dio alkoholnog vrenja piva. U ovom koraku se stvara visoki sloj pjene, koja na površini postupno postaje valovita. Dijelovi stare pjene postaju smeđi, dok je nova pjena bijela. Stanje loma pjene nastaje nakon najintenzivnijeg vrenja i tada se pjena počinje raspadati, vrenje slabi, kvasac se taloži, a površina sladovine postupno se oslobađa pjene i postaje tamna. Stanje zrelosti je posljednji period glavnog vrenja i karakterizira ga taloženje kvasca. Procesom glavnog vrenja dobiva se mlado pivo. Za proces glavnog vrenja upotrebljavaju se otvoreni ili zatvoreni spremnici s ugrađenim sustavima za hlađenje i održavanje optimalnih temperatura u pojedinim periodima glavnog vrenja. Na dužinu glavnog vrenja utječu temperatura, vrsta i količina kvasca te koncentracija i sastav sladovine. Glavno vrenje traje oko 4 dana na temperaturi između 5°C i 8°C. Glavno vrenje se prekida kada se postigne zadana vrijednost prevrelosti mladog piva. Na kraju se mlado pivo ohladi na 3°C i prebaci u spremnike za naknadno vrenje [1].

1.2.2 Naknadno vrenje

Mlado pivo koje nastaje u fazi glavnog vrenja mora sadržavati dovoljnu količinu šećera koji može fermentirati da bi se osigurao normalan tijek naknadnog vrenja. Naknadno vrenje se odvija u zatvorenim spremnicima za odležavanje piva na temperaturi -1°C i pod tlakom ugljikovog dioksida. Ovaj postupak poboljšava aromu i okus piva. Kod odležavanja piva kontroliraju se intenzitet previranja, tlak u spremnicima za naknadno vrenje, bistrenje piva, stabilnost pjene, okus piva i temperaturni režim. Naknadno vrenje traje 12-14 dana, ovisno o vrsti piva [1].

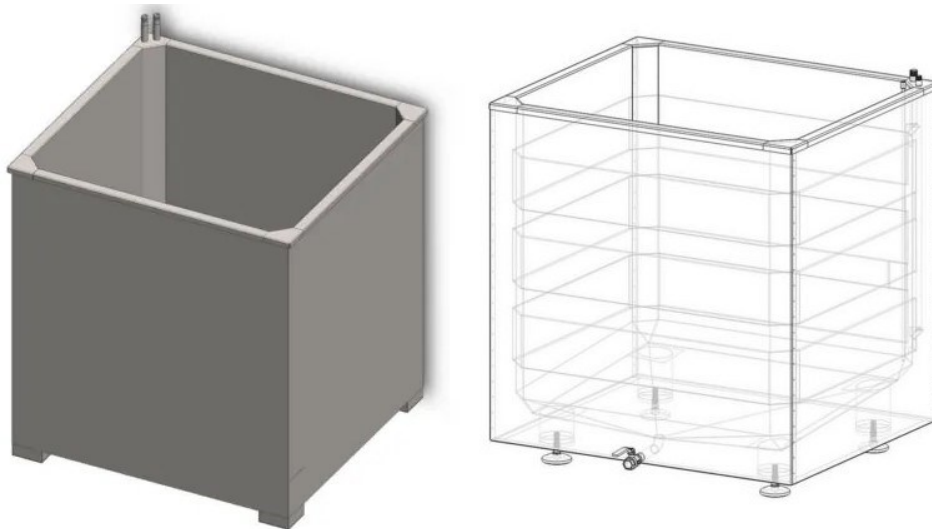
1.3 Spremnici za fermentaciju (vrenje) piva

Spremnici za fermentaciju (vrenje) piva dijele se na [6]:

- spremnike za glavno vrenje

- spremnike za naknadno vrenje
- univerzalne spremnike.

Spremnici za fermentaciju općenito mogu biti zatvoreni ili otvoreni, cilindrični vertikalni ili vodoravni te cilindrično-konusni spremnici. Na [Slika 5] prikazan je primjer jednog otvorenog spremnika.



Slika 5. Otvoreni spremnik [6]

Na [Slika 6] prikazan je jedan cilindrični horizontalni i jedan vertikalni spremnik.



Slika 6. Zatvoreni cilindrični horizontalni i vertikalni spremnik [6]

Na [Slika 7] prikazan je jedan cilindrično-konusni spremnik. Fermentacijski spremnici u pravilu se izrađuju od nekog nehrđajućeg čelika. Mogu biti pod tlakom ili bez tlaka ovisno o potrebi i namjeni. Svaki od njih na sebi nosi i sustav za hlađenje te razne regulatore, npr.

regulatore tlaka, regulatore temperature. Ovisno o namjeni dolaze raznih dimenzija te mogu biti izolirani ili bez izolacije.



Slika 7. Zatvoreni cilindrično-konusni spremnik [6]

1.4 Opis zadatka i model odabranog spremnika

1.4.1 Opis zadatka i primjena odabranog spremnika

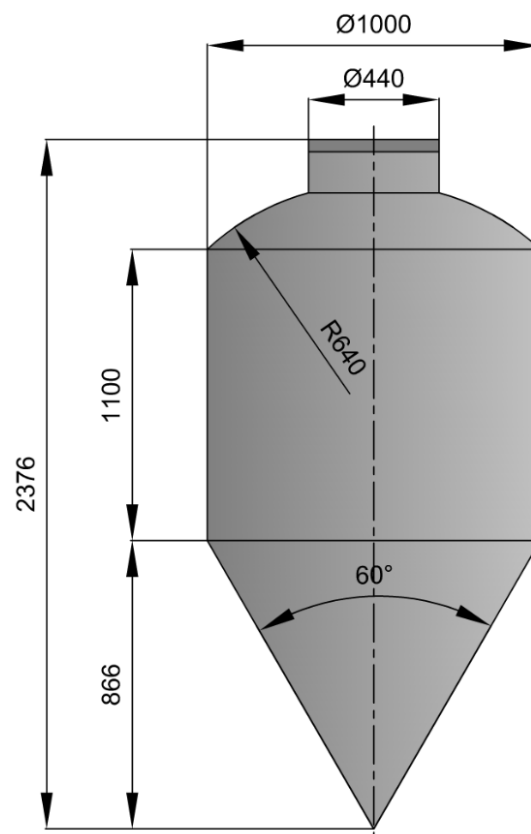
Za potrebe ovog rada odabran je model spremnika CCT-SHP-1000DE proizvođača Czech Brewery System. CCT-SHP-1000DE je visokotlačni cilindrično-konusni fermentacijski spremnik iskoristive zapremine 1000 litara i ukupne zapremine 1200 litara namijenjen za glavno i naknadno vrenje piva, vina i drugih pića. Izrađen je od čelika E360. Koristi se na tlakovima od 0 do 0,25 MPa. Spremnik je neizoliran s ugrađenim hlađenjem pomoću vodenih rashladnih kanala [7]. Za potrebe ovog rada pojednostavnit će se konstrukcija spremnika tj. neće se modelirati ventili, mali otvori, sustav hlađenja i slično, niti noge. Čitava konstrukcija spremnika će se podijeliti na konusni i cilindrični dio spremnika slobodno oslonjen, cilindrični dio te sferni dio na kojem se nalazi cilindrični otvor zatvoren kružnom pločom. Za navedeni spremnik provest će se numerička analiza metodom konačnih elemenata (MKE) u programskom paketu Abaqus®, a dobiveni rezultati će se usporediti s analitičkim rješenjem dobivenim pomoću teorije ljusaka. Također, provest će se verifikacija svih korištenih konačnih elemenata u radu na nekom jednostavnijem primjeru. [Slika 8] prikazuje odabrani spremnik.



Slika 8. Odabrani spremnik [7]

1.4.2 Tehnički podaci o odabranom spremniku

Na [Slika 9] prikazana je skica odabranog spremnika sa uvedenim pojednostavljenjima.



Slika 9. Skica odabranog spremnika sa uvedenim pojednostavljenjima

Na stranicama proizvođača dostupne su osnovne dimenzije, a ostali potrebni podaci za izradu i proračun tog spremnika su prilagođeni pojednostavljenom modelu. Osnovni podaci o odabranom spremniku dani su u [Tablica 1].

Tablica 1. Osnovni podaci o odabranom spremniku [7]

MATERIJAL	E360
MODUL ELASTIČNOSTI - E [GPa]	210
POISSONOV FAKTOR - ν	0,3
ISKORISTIVI VOLUMEN SPREMNIKA - V_k [l]	1000
UKUPNI VOLUMEN SPREMNIKA - V_{uk} [l]	1200
UKUPNA VISINA - h_{uk} [mm]	2776
VANJSKI PROMJER SPREMNIKA - d_c [mm]	1000
MASA PRAZNOG SPREMNIKA - m_{pr} [kg]	201
MASA PUNOG SPREMNIKA - m_{pu} [kg]	1401
MAKSIMALNI DOPUŠTENI NADTLAK - p_0 [MPa]	0,25
DEBLJINA STIJENKE CILINDRIČNE LJUSKE - t_c [mm]	3
DEBLJINA STIJENKE KONUSNE LJUSKE - t_k [mm]	3
KUT KONUSNE LJUSKE - ϑ [°]	60
DEBLJINA STIJENKE SFERNE LJUSKE - t_s [mm]	2,5
DEBLJINA STIJENKE CILINDRIČNOG OTVORA - t_o [mm]	2,5
DEBLJINA KRUŽNE PLOČE - h_p [mm]	10
PROMJER KRUŽNE PLOČE - d_p [mm]	440

Zbog jednostavnijeg modeliranja i računanja za sve stijenke ljusaka će se koristiti jednaka debljina stijenke iznosa $t = 3$ mm, a za krušnu ploču debljina stijenke $h_p = 10$ mm. Osim podataka o spremniku potrebnih za proračun potrebno je još poznavati i gustoću piva kako bi se mogao u obzir uzeti hidrostatski tlak kojeg pivo izaziva. Gustoća piva razlikuje se od piva do piva, a za potrebe ovog rada koristit će se gustoća iznosa prikazanog u [Tablica 2].

Tablica 2. Gustoća piva[8]

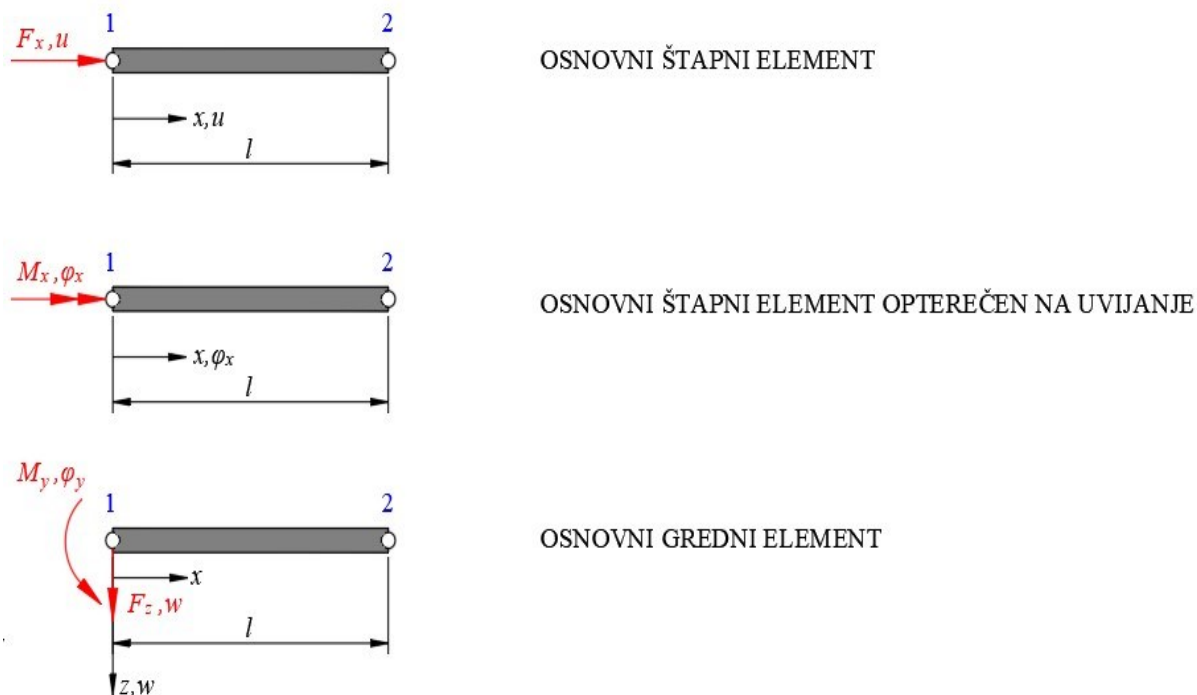
GUSTOĆA PIVA - ρ [kg/m ³]	1060
--	------

2 METODA KONAČNIH ELEMENATA

2.1 Osnovno o metodi

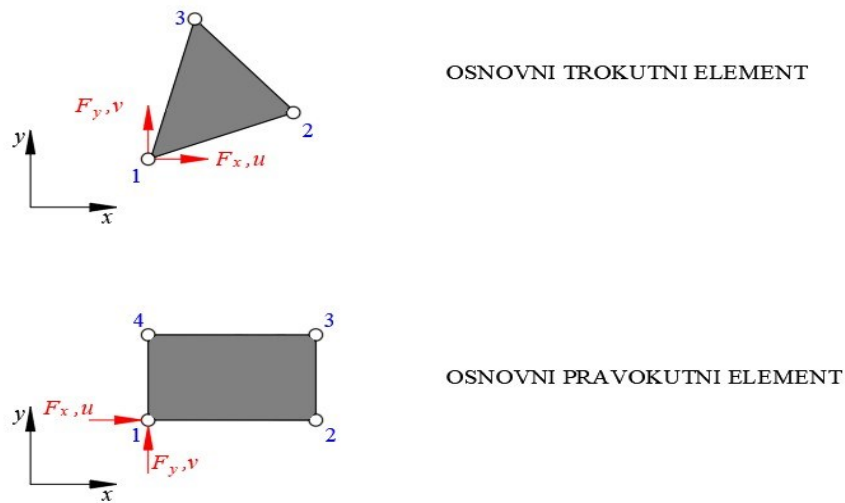
Metoda konačnih elemenata približna je numerička metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma i nezaobilazna je u inženjerskim proračunima. Promatrani kontinuum s beskonačnim brojem stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode gibanja čineći tako mrežu konačnih elemenata. Konačni elementi spajaju se u točkama koje se nazivaju čvorovi. Za svaki element pretpostavlja se rješenje zadane diferencijalne jednačbe u obliku interpolacijskih funkcija koje povezuju zavisne varijable s njihovim vrijednostima u čvorovima. Rješenja dobivena ovom metodom su približna, a stvarnim vrijednostima mogu se približiti samo uz pravilan izbor proračunskog modela i uz pravilno odabrane konačne elemente. Uz pravilnu formulaciju konačnih elemenata, približavanje točnome rješenju raste s povećanjem broja elemenata. Za rješavanje problema složenih konstrukcija potrebno je kreirati gustu mrežu konačnih elemenata za čije je rješavanje potrebno računalo. Metoda konačnih elemenata primjenu nalazi kako u mehanici deformabilnih tijela, tako i za rješavanje općih problema polja. Ovisno o obliku i nepoznatim parametrima u čvorovima, izvedeni su različiti tipovi konačnih elemenata [9]. Konačni elementi mogu se podijeliti u nekoliko grupa:

1. JEDNODIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENTI



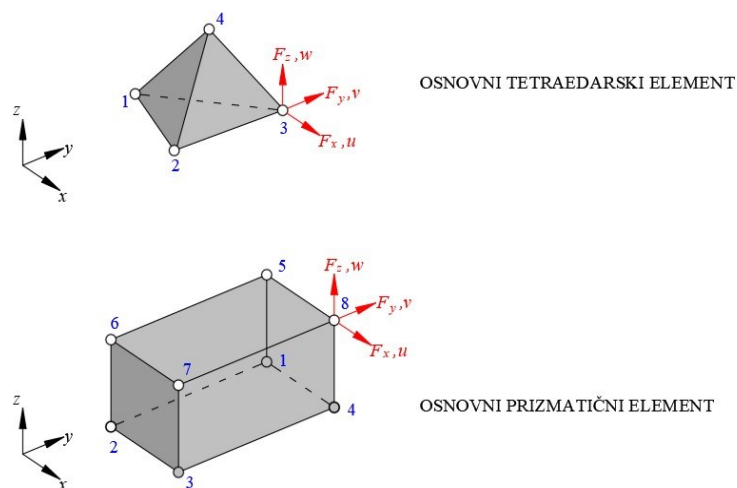
Slika 10. Jednodimenzijски konačni elementi

2. DVODIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENTI



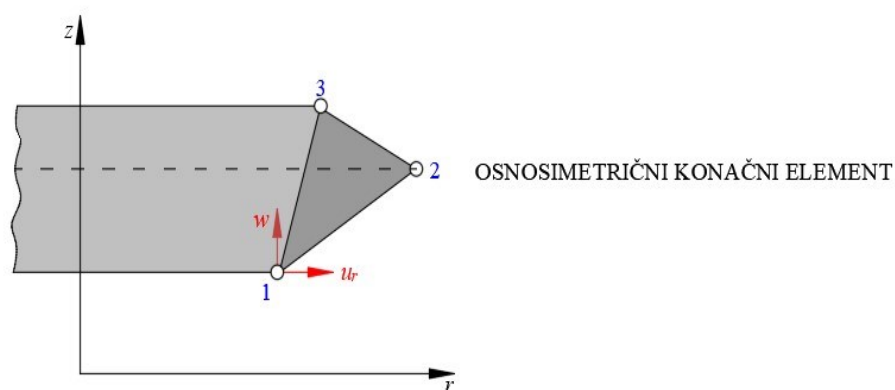
Slika 11. Dvodimenzijски konačni elementi

3. TRODIMENZIJSKI KONAČNI ELEMENTI



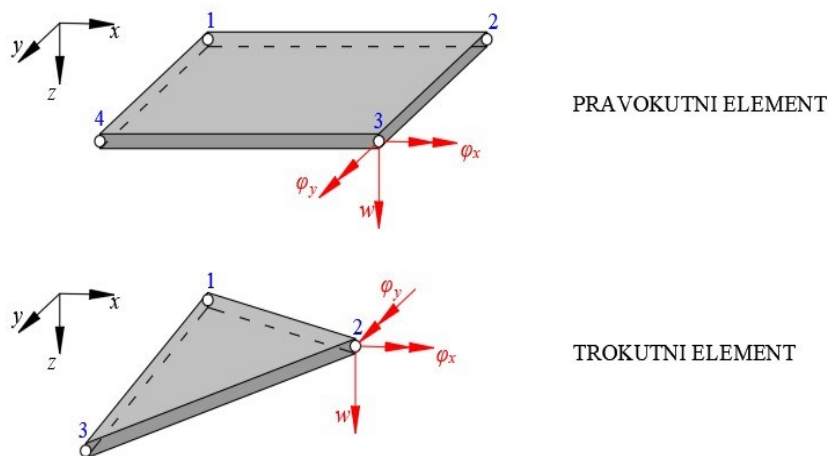
Slika 12. Trodimenzijски konačni elementi

4. OSNOSIMETRIČNI KONAČNI ELEMENTI



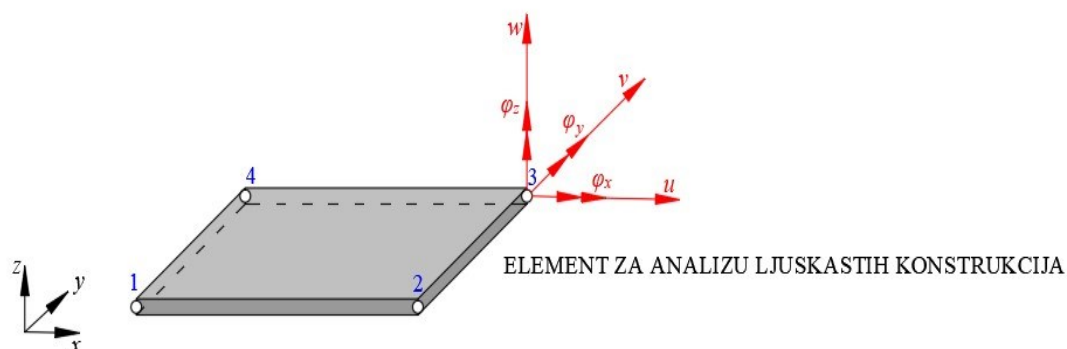
Slika 13. Osnosimetrični konačni element

5. KONAČNI ELEMENTI ZA RJEŠAVANJE PROBLEMA SAVIJANJA PLOČA



Slika 14. Konačni elementi za rješavanje problema savijanja ploča

6. KONAČNI ELEMENTI ZA ANALIZU LJUSKASTIH KONSTRUKCIJA



Slika 15. Element za analizu ljuskastih konstrukcija

Prethodno prikazani konačni elementi su samo osnovni primjeri. Postoje također elementi višeg reda, zakrivljeni elementi kod ljusaka, itd.

2.2 Globalna jednadžba konačnih elemenata

Globalna jednadžba konačnih elemenata dobije se iz uvjeta stacionarnosti ukupne potencijalne energije, odnosno minimuma ukupne potencijalne energije ($\delta\pi = 0$) i glasi:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{R} . \quad (2.1)$$

Formiranje globalne matrice krutosti \mathbf{K} u računalnom programu najčešće se provodi tzv. postupkom popunjavanja. Pritom se koristi tablica izjednačavanja iz koje se vidi podudaranje globalnih i lokalnih stupnjeva slobode. Počinje se s nul-matricom reda koji je jednak redu globalne matrice krutosti, a nakon toga se provodi proces popunjavanja s članovima matrice krutosti pojedinog elementa. Matrica krutosti je simetrična matrica čiji je red jednak ukupnom

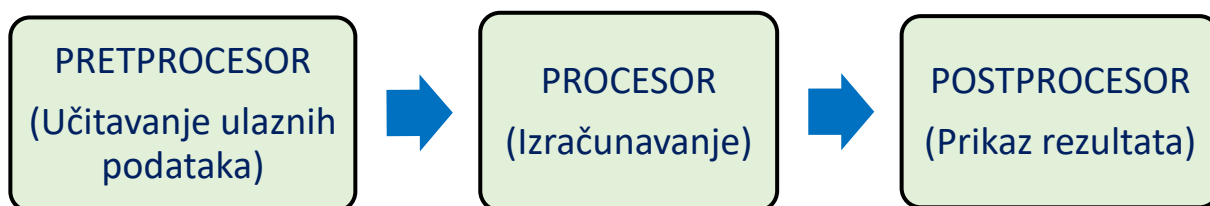
broju stupnjeva slobode proračunskog modela. Matrica krutosti je također pojasna matrica što znači da joj se elementi različiti od nule nalaze na glavnoj dijagonali ili u blizini glavne dijagonale. Širina pojasa ovisi o načinu numeriranja čvorova i pripadnih stupnjeva slobode. Što je pojas te matrice uži to ona zahtjeva manje računalne memorije i proces rješavanja jednadžbi je brži. Determinanta matrice krutosti je nula, što znači da matrica nema inverz i ona je singularna. Broj nultih vlastitih vrijednosti matrice krutosti jednak je pomacima proračunskog modela kao krutog tijela. Postavljanjem rubnih uvjeta sprječavaju se pomaci krutog tijela te matrica krutosti postaje pozitivno definitna, što je uvjet za rješavanje sustava jednadžbi. Globalna matrica krutosti \mathbf{K}_g proračunskog modela jednaka je zbroju globalnih matrica krutosti svakog pojedinog elementa \mathbf{K}^i [9]:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}^i. \quad (2.2)$$

2.3 Programski paket Abaqus®

Programski paket Abaqus® proizvođača Dassault Systemes računalni je alat za rješavanje problema metodom konačnih elemenata. Sastoji se od dva osnovna proizvoda za analizu, Abaqus/Standard i Abaqus/Explicit, te nekoliko dodataka za analizu. Abaqus/Standard je alat za općenitu primjenu koji može riješiti široki raspon linearnih i nelinearnih problema te daje odziv statičkih, dinamičkih, toplinskih, električkih i elektromagnetskih sustava. Rješava sustav jednadžbi implicitno na svakom inkrementu. Abaqus/Explicit je alat posebne namjene koji koristi eksplicitnu dinamičku formulaciju konačnih elemenata. Rješava sustav tako da korača kroz vrijeme u malim vremenskim inkrementima bez rješavanja spregnutog sustava jednadžbi na svakom inkrementu. Pogodan je za rješavanje kratkih, tranzijentnih pojava te je također vrlo učinkovit kod visoko nelinearnih problema. Abaqus/CAE je okolina koja omogućava kreiranje modela, analizu i nadzor analize te prikaz rezultata [10]. U pretprocesoru se opisuje geometrija odabranog proračunskog modela. Obavlja se podjela kontinuuma na konačne elemente, pri čemu je prethodno potrebno odrediti tipove konačnih elemenata. Provodi se numeriranje čvorova i pripadnih stupnjeva slobode. U ulaznim podacima potrebno je definirati rubne uvjete i opterećenje te je potrebno definirati postavke materijala. Prilikom stvaranja mreže konačnih elemenata potrebno je postići mrežu elemenata što pravilnijeg oblika. U procesoru se algoritmi za rješavanje problema matematičkog modeliranja. Na temelju podataka iz pretprocesora računaju se matrice krutosti \mathbf{k} i vektori opterećenja \mathbf{r} različitih konačnih elemenata. Na temelju podataka iz biblioteke elemenata te ulaznih podataka, u procesoru se formira globalna matrica

krutosti \mathbf{K} i globalni vektor opterećenja \mathbf{R} . Proces analize unutar računalnog alata prikazan je na [Slika 16].



Slika 16. Proces analize unutar računalnog alata [10]

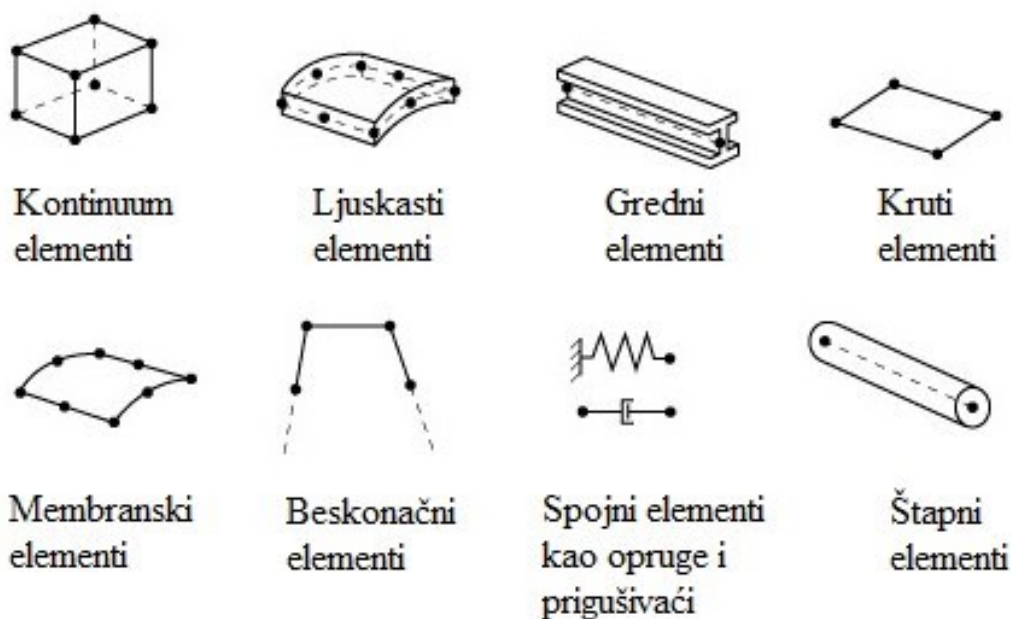
Za određene globalne matrice krutosti i globalne vektore opterećenja rješava se sustav jednačbi (2.1). Grafički postprocesori omogućuju grafički prikaz rezultata. Prikazuju se deformirani oblici proračunskog modela te raspodjela unutarnjih sila i naprezanja [10].

2.3.1 Karakterizacija elemenata u Abaqusu

Svaki element u Abaqus biblioteci je definiran:

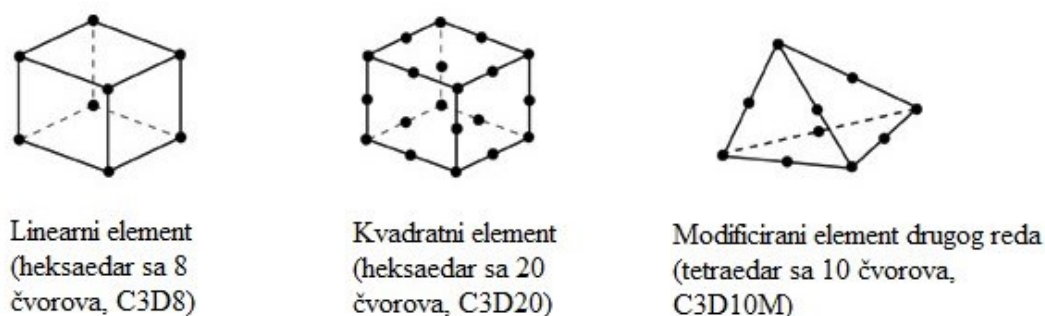
- familijom elemenata
- stupnjevima slobode gibanja
- brojem čvorova
- tipom formulacije
- tehnikom integracije.

Na [Slika 17] prikazane su familije elemenata u Abaqusu.



Slika 17. Familije elemenata u Abaqusu [10]

Na [Slika 18] prikazani su neki elementi s obzirom na broj čvorova u Abaqusu.

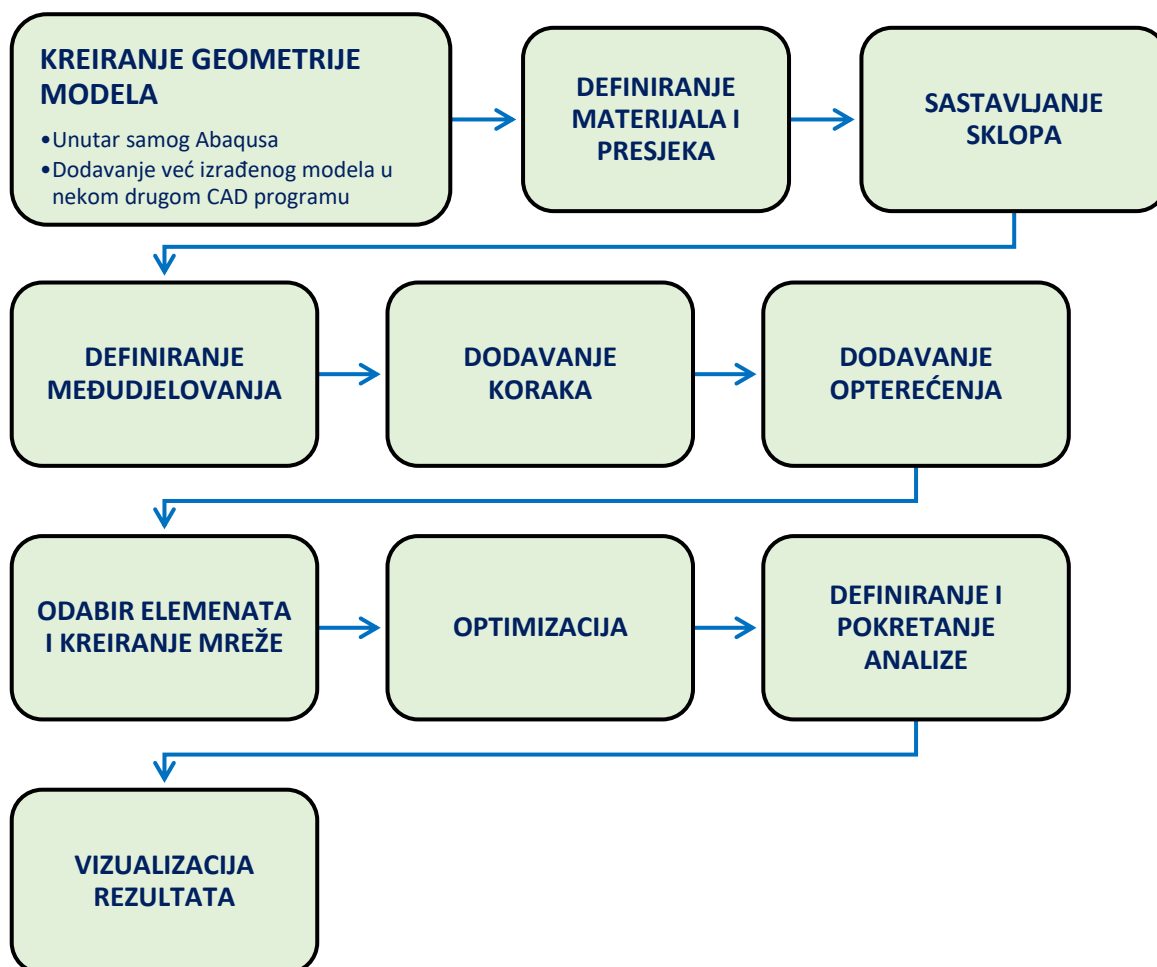


Slika 18. Elementi s obzirom na broj čvorova u Abaqusu [10]

Svaki element u Abaqusu ima jedinstveno ime (npr. T2D2, S4R, C3D8I,...). Ime elementa identificira svaki od prethodno navedenih aspekata o elementu. Pomaci i ostali stupnjevi slobode računaju se u svakom čvoru elementa, a vrijednosti u ostalim dijelovima elementa računaju se interpolacijom iz čvornih pomaka. Obično je red interpolacije definiran brojem čvorova na elementu.

2.3.2 Procedura modeliranja u Abaqusu

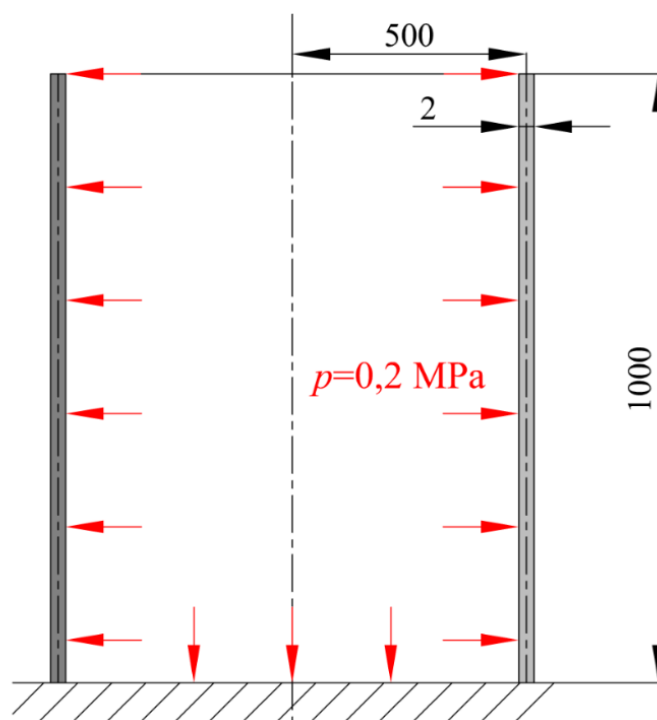
Prilikom modeliranja u sučelju Abaqus/CAE prolazi se kroz nekoliko modula (eng. Module). Prvi korak je definiranje pojedinih dijelova problema (u Abaqusu modul 'Part') bilo skiciranjem unutar samog sučelja ili ubacivanjem iz nekog drugog CAD alata. Za definirani model dalje se kreiraju postavke (u Abaqusu modul 'Property') u vidu odabira materijala, definiranja presjeka i dodjele presjeka odabranom dijelu. Za definirane dijelove, materijale i presjeke kreiraju se instance i spajaju dijelovi u sklop (u Abaqusu modul 'Assembly'). Kada je definiran sklop definira se korak analize (u Abaqusu modul 'Step') i odabiru željeni izlazni podaci. Ako je više dijelova u kontaktu definira se njihovo međudjelovanje (u Abaqusu modul 'Interaction'). Nadalje se definira opterećenje (u Abaqusu modul 'Load') u vidu sila, momenata, tlakova, itd., te rubni uvjeti. Kada su napravljeni svi prethodni koraci kreće se na izradu mreže konačnih elemenata (u Abaqusu modul 'Mesh') gdje se definira veličina i vrsta konačnih elemenata, vrsta integracije pri izvođenju matrica krutosti te vrsta rješavača (Abaqus/Standard ili Abaqus/Explicit). Nakon kreiranja mreže, ako je potrebno, kreira se zadatak optimizacije (u Abaqusu modul 'Optimization'). Nakon izrade svih prethodnih koraka kreira se analiza (u Abaqusu modul 'Job') te se pokreće analiza i prati razvoj zbog mogućih grešaka. Na kraju svega se pregledavaju zatraženi rezultati i crtaju dijagrami (u Abaqusu modul 'Visualization'). Cijeli postupak modeliranja unutar Abaqusa prikazan je na [Slika 19].



Slika 19. Procedura modeliranja u Abaqusu [10]

3 VERIFIKACIJA KONAČNIH ELEMENATA

Za verifikaciju konačnih elemenata izradit će se model jednostavnog spremnika opterećenog konstantnim tlakom te će se za njega izvršiti numerička analiza primjenom različitih elemenata dostupnih u programskom paketu. Dobiveni rezultati u nekoj karakterističnoj točki konstrukcije usporedit će se s analitičkim rješenjem u toj istoj točki te će se na temelju dobivenih rezultata zaključiti koji je tip konačnih elemenata najbolji za promatrani problem. Skica jednostavnog spremnika prikazana je na [Slika 20].



Slika 20. Skica jednostavnog spremnika

Pored vrijednosti zadanih skicom također je poznat i modul elastičnosti $E = 210000$ MPa te Poissonov faktor $\nu = 0,3$.

3.1 Analitičko rješenje

Analitičko rješenje ovakvog problema dobije se kao kombinacija utjecaja membranskog naprezanja i naprezanja uslijed savijanja.

3.1.1 Membransko stanje

Za cilindričnu ljusku vrijedi:

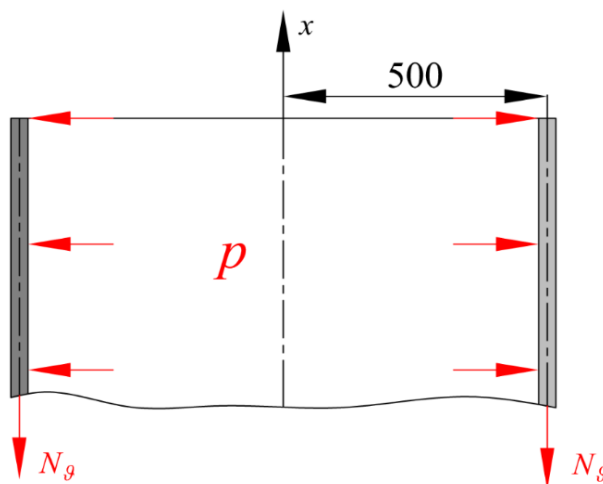
$$r_1 = \infty, \quad (3.1)$$

$$r_2 = R. \quad (3.2)$$

Da bi se mogao odrediti membranski pomak $u_{r,m}^c$ i membranski zakret α_m^c potrebno je riješiti jednadžbu ravnoteže ljuske koja glasi:

$$\frac{N_{\vartheta}}{r_1} + \frac{N_{\varphi}}{r_2} = p_n. \quad (3.3)$$

Na [Slika 21] prikazan je presjek ljuske.



Slika 21. Presjek ljuske

Sa [Slika 21] može se vidjeti kako je $N_{\vartheta} = 0$ jer je spremnik otvoren. Tlak $p_n = p$, pa jednačba (3.3) korištenjem uvjeta (3.1) i (3.2) dobiva oblik:

$$N_{\varphi} = p \cdot R. \quad (3.4)$$

Membranski pomak cilindrične ljuske jednak je:

$$u_{r,m}^c = \frac{R}{Eh} (N_{\varphi} - \nu N_{\vartheta}). \quad (3.5)$$

Kada se uvrsti $N_{\vartheta} = 0$ i $N_{\varphi} = p \cdot R$ dobije se membranski pomak cilindrične ljuske:

$$u_{r,m}^c = \frac{pR^2}{Eh}. \quad (3.6)$$

Membranski zakret cilindra određuje se iz izraza:

$$\alpha_m^c = \frac{du_{r,m}^c}{dx}. \quad (3.7)$$

Kako membranski pomak ne ovisi o x dobije se da je $\alpha_m^c = 0$.

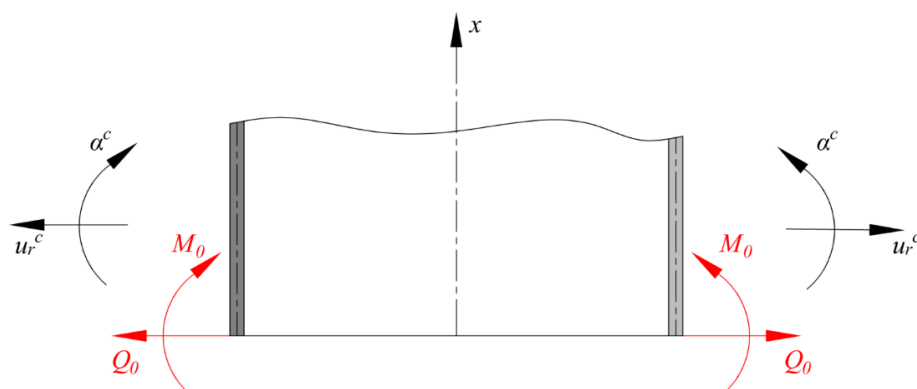
3.1.2 Savijanje

Kako bi se odredilo lokalno savijanje na mjestu spoja cilindrične ljuske i podloge potrebno je postaviti rubne uvjete. Kako je cilindrična ljuska uklještena za podlogu onda vrijede sljedeći rubni uvjeti:

$$u_r^c = 0, \quad (3.8)$$

$$\alpha^c = 0. \quad (3.9)$$

Na [Slika 22] prikazan je presjek ljuske sa ucrtanim poopćenim silama.



Slika 22. Spoj cilindra i podloge

Ukupni radialni pomak cilindrične ljuske glasi:

$$u_r^c = \alpha_{11}Q_0 + \alpha_{12}M_0 + u_{r,m}^c. \quad (3.10)$$

Ukupni zakret cilindrične ljuske glasi:

$$\alpha^c = \alpha_{21}Q_0 + \alpha_{22}M_0 + \alpha_m^c. \quad (3.11)$$

U izrazima (3.10) i (3.11) koeficijenti α_{11} , α_{12} , α_{21} i α_{22} su uplivni koeficijenti i računaju se na sljedeći način:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2D_c\beta_c^3}, \quad (3.12)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2D_c\beta_c^2}, \quad (3.13)$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{D_c\beta_c}. \quad (3.14)$$

U izrazima (3.12), (3.13) i (3.14) D_c je fleksijska krutost cilindra, a β_c je geometrijsko-materijalna značajka cilindrične ljuske i računaju se kao:

$$D_c = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (3.15)$$

$$\beta_c = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2h^2}}. \quad (3.16)$$

Uvrštavanjem svih potrebnih izraza u izraze (3.8) i (3.9) dobije se sustav jednažbi iz kojeg se može odrediti Q_0 i M_0 :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2D_c\beta_c^3} & \frac{1}{2D_c\beta_c^2} \\ \frac{1}{2D_c\beta_c^2} & \frac{1}{D_c\beta_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{r,m}^c \\ -\alpha_m^c \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Rješavanjem sustava jednačbi (3.17) dobiju se vrijednosti Q_0 i M_0 :

$$Q_0 = -4,9203 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (3.18)$$

$$M_0 = 60,5228 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}. \quad (3.19)$$

Kada su određeni sila i moment može se odrediti raspodjela radijalnog pomaka cilindra po duljini cilindrične ljuske. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini cilindrične ljuske određuje se primjenom eksponencijalno-trigonometrijskih funkcija koje za cilindrične ljuske glase:

$$f_1(\beta_c x) = e^{-\beta_c x} (\cos(\beta_c x) + \sin(\beta_c x)), \quad (3.20)$$

$$f_2(\beta_c x) = e^{-\beta_c x} \sin(\beta_c x), \quad (3.21)$$

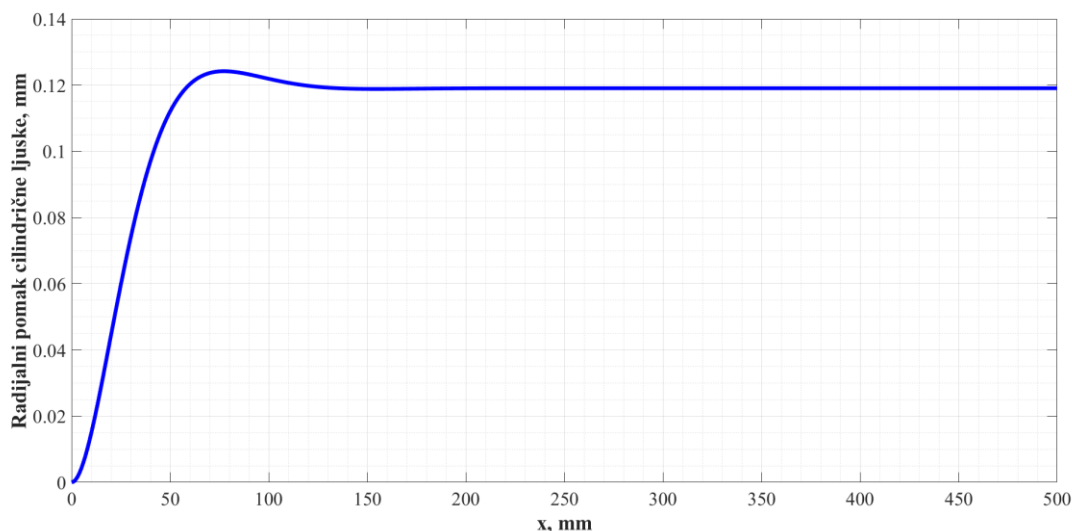
$$f_3(\beta_c x) = e^{-\beta_c x} (\cos(\beta_c x) - \sin(\beta_c x)), \quad (3.22)$$

$$f_4(\beta_c x) = e^{-\beta_c x} \cos(\beta_c x). \quad (3.23)$$

Raspodjela radijalnog pomaka cilindrične ljuske onda se određuje iz sljedećeg izraza:

$$u_r^c = \frac{Q_0}{2D_c \beta_c^3} f_4 + \frac{M_0}{2D_c \beta_c^2} f_3 + u_{r,m}^c. \quad (3.24)$$

Ako se uzmu vrijednosti koordinate x od 0 do 500 mm, uvrste u izraze za eksponencijalno-trigonometrijske funkcije te sve zajedno uvrsti u izraz za raspodjelu radijalnog pomaka dobije se raspodjela radijalnog pomaka prikazana na [Slika 23].



Slika 23. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini cilindrične ljuske

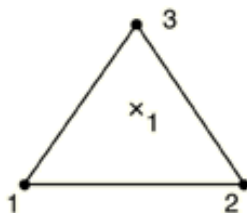
Iz podataka dobivenih iz izraza (3.24) dobije se da je najveći radijalni pomak na udaljenosti $x = 78$ mm i iznosi $(u_r^c)_{\max} = 0,124$ mm. Taj najveći izračunati radijalni pomak ljuske usporedit će se s najvećim radijalnim pomacima iste te ljuske izračunatim u programskom paketu Abaqus za različitu gustoću mreže i za različite vrste konačnih elemenata.

3.2 Konačni elementi korišteni za verifikaciju

U Abaqusu je problem riješen pomoću linearnih trokutastih i pravokutnih ljuskastih konačnih elemenata (S3 i S4R) te pomoću kvadratnih trokutastih i pravokutnih konačnih elemenata (S8R i STRI65).

3.2.1 Linearni ljuskasti trokutasti konačni element (S3)

Na [Slika 24] prikazan je linearni trokutasti konačni element sa pripadnim čvorovima.

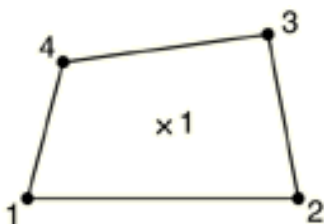


Slika 24. Linearni ljuskasti trokutasti konačni element (S3) [10]

Linearni trokutasti konačni element ili trokutni element prvog reda jest konačni element za analizu ljuskastih konstrukcija s čvorovima samo u vrhovima elementa.

3.2.2 Linearni ljuskasti četverokutni konačni element (S4R)

Na [Slika 25] prikazan je linearni četverokutni konačni element sa pripadnim čvorovima.

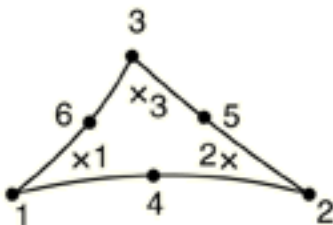


Slika 25. Linearni ljuskasti četverokutni konačni element (S4R) [10]

Linearni četverokutni konačni element ili četverokutni element prvog reda jest konačni element za analizu ljuskastih konstrukcija s čvorovima samo u vrhovima elementa.

3.2.3 Kvadratni ljuskasti trokutasti konačni element (STRI65)

Na [Slika 26] prikazan je kvadratni trokutasti konačni element sa pripadnim čvorovima.

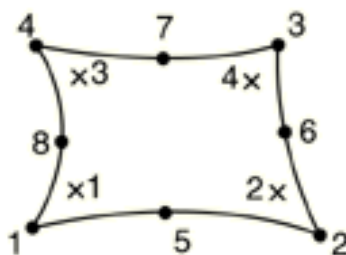


Slika 26. Kvadratni ljuskasti trokutasti konačni element (STRI65) [10]

Kvadratni trokutasti konačni element ili trokutni element drugog reda jest konačni element za analizu ljuskastih konstrukcija s čvorovima u vrhovima elementa i po sredini stranica elemenata.

3.2.4 Kvadratni ljuskasti četverokutni konačni element (S8R)

Na [Slika 27] prikazan je kvadratni četverokutni konačni element sa pripadnim čvorovima.

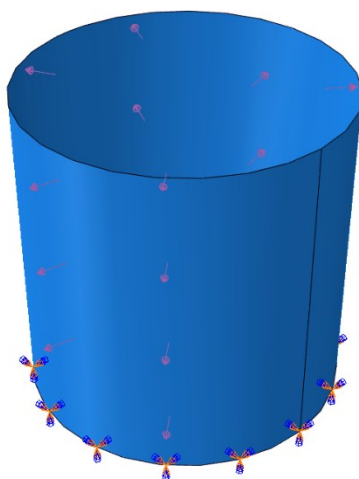


Slika 27. Kvadratni ljuskasti četverokutni konačni element (S8R) [10]

Kvadratni četverokutni konačni element ili četverokutni element drugog reda jest konačni element za analizu ljuskastih konstrukcija s čvorovima u vrhovima elementa i po sredini stranica elemenata.

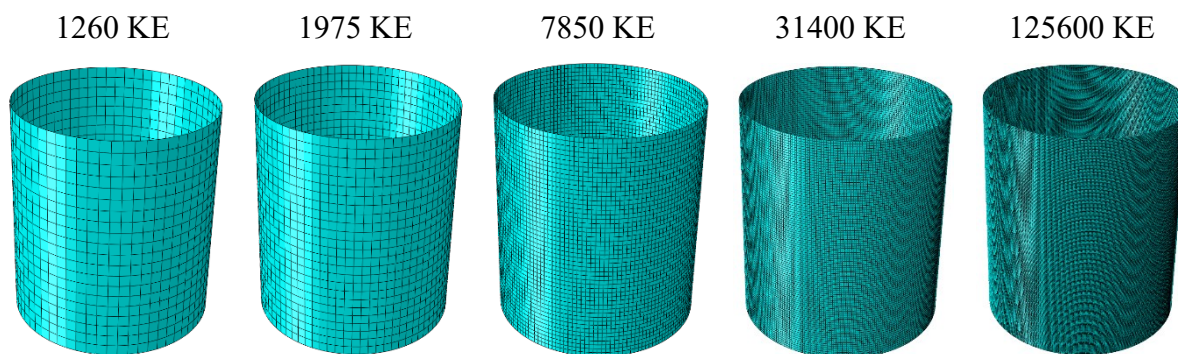
3.3 Verifikacija

Za potrebe verifikacije rezultata u Abaqusu je izrađena cilindrična ljuska ukliještena na dnu te opterećena konstantnim tlakom p . Na [Slika 28] prikazana je izrađena cilindrična ljuska s definiranim rubnim uvjetima i tlakom.



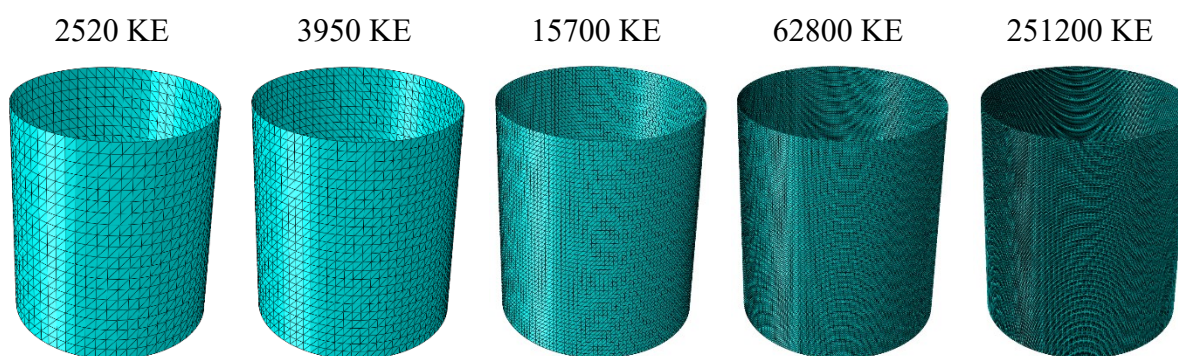
Slika 28. Cilindrična ljuska sa definiranim rubnim uvjetima i tlakom

Za tako izrađenu cilindričnu ljusku definirane su različite gustoće mreže trokutastih i četverokutnih konačnih elemenata. Na [Slika 29] prikazana je mreža četverokutnih konačnih elemenata različitih gustoća.



Slika 29. Mreža četverokutnih konačnih elemenata različitih gustoća

Na [Slika 30] prikazana je mreža trokutastih konačnih elemenata različitih gustoća.



Slika 30. Mreža trokutastih konačnih elemenata različitih gustoća

U [Tablica 3] prikazani su rezultati dobiveni sa različitim elementima i različitim gustoćama mreže.

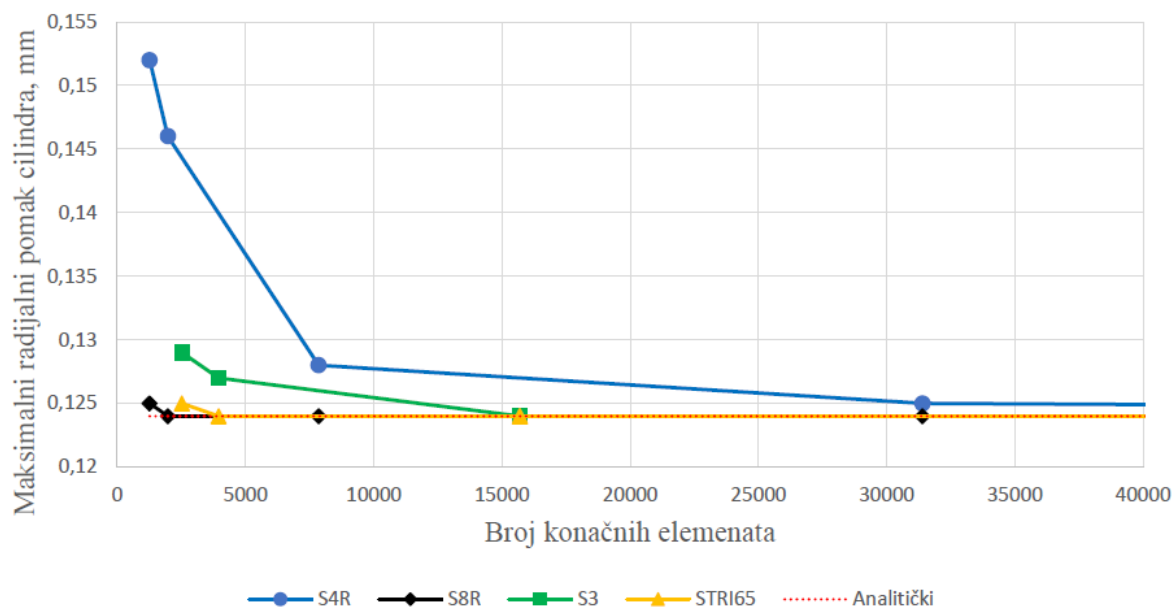
Tablica 3. Rezultati sa različitim elementima i gustoćama mreže

ČETVEROKUTNI ELEMENTI			TROKUTASTI ELEMENTI		
Broj elemenata	Radijalni pomak, mm (S4R)	Radijalni pomak, mm (S8R)	Broj elemenata	Radijalni pomak, mm (S3)	Radijalni pomak, mm (STR165)
1260	0,152	0,126	2520	0,129	0,125
1975	0,146	0,124	3950	0,127	0,124
7850	0,128	0,124	15700	0,124	0,124
31400	0,125	0,124	62800	0,124	0,124
125600	0,124	0,124	251200	0,124	0,124

Na temelju podataka iz [Tablica 3] izrađen je grafički prikaz konvergencije rješenja. Taj graf je prikazan na [Slika 31]. Iz [Tablica 3] i [Slika 31] može se vidjeti kako elementi drugog reda

(S8R) i (STRI65) najbrže konvergiraju, a četverokutni element drugog reda (S8R) dolazi do točnog rješenja za manji broj konačnih elemenata nego trokutni element drugog reda (STRI65). Na temelju te činjenice za daljnji proračun izabranog fermentacijskog spremnika koristit će se četverokutni konačni element drugog reda (S8R) i trokutni konačni element drugog reda (STRI65).

KONVERGENCIJA RJEŠENJA



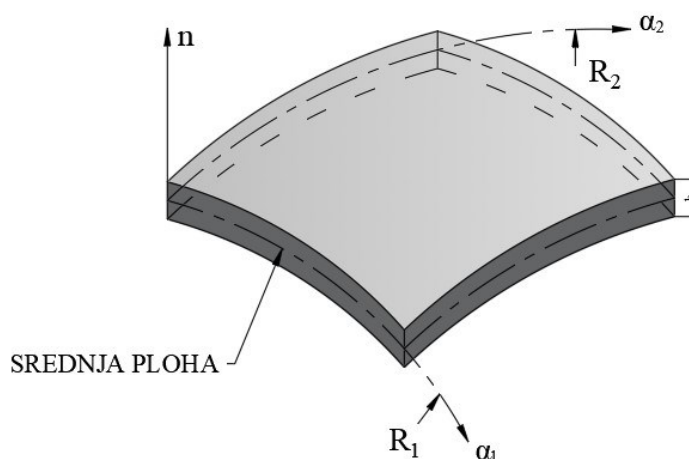
Slika 31. Konvergencija rješenja

4 ANALITIČKI PRORAČUN

Analitički proračun čvrstoće provodi se po jednačbama izvedenim iz teorije ljusaka za cilindrični, konusni i sferni dio spremnika te po jednačbama izvedenim za savijanje tankih kružnih ploča za poklopac na vrhu spremnika. Pored analize spremnika i ploče provjerit će se i nosivost triju nogu postolja u najnepovoljnijem slučaju tj. u slučaju kada je spremnik napunjen tekućinom do najvećeg mogućeg volumena.

4.1 Osnovno o teoriji ljusaka

Ljuska je dio kontinuuma koji je omeđen s dvije zakrivljene plohe, a razmak između ploha je mali u odnosu na ostale dimenzije. Geometrija ljuske je potpuno određena ako je poznat oblik srednje plohe i debljina ljuske u svakoj njenoj točki. Svaka ljuska može biti zatvorena ili omeđena rubom. Na [Slika 32] prikazan je ljuskasti kontinuum.



Slika 32. Ljuskasti kontinuum

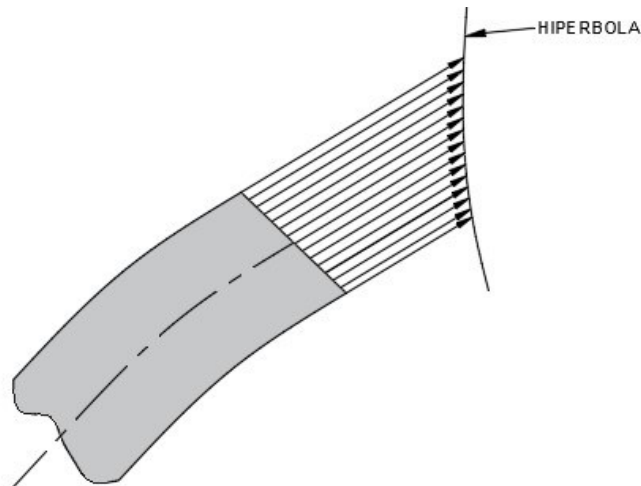
Općenito raspodjela naprezanja po debljini ljuske slijedi zakon hiperbole. Ako se radi o tankoj ljusci tada hiperbola neznatno odstupa od pravca, pa se može aproksimirati pravcem. Da bi ljuska bila tanka mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\frac{h}{r_1} \leq \frac{1}{20} \quad i \quad \frac{h}{r_2} \leq \frac{1}{20}. \quad (4.1)$$

Za slučaj tanke ljuske naprezanje se može rastaviti na dva dijela:

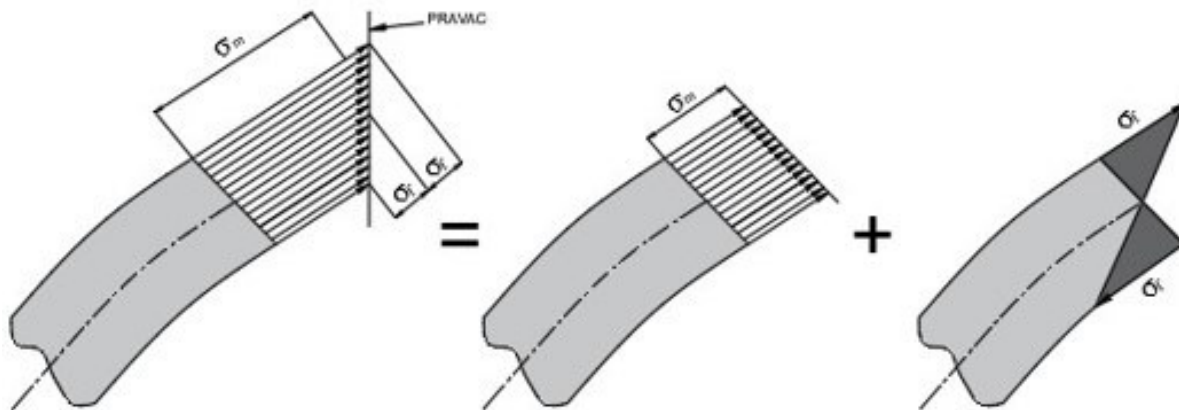
- membransko naprezanje σ_m koje je jednoliko raspodijeljeno po debljini
- fleksijsko naprezanje σ_f koje se mijenja po linearnom zakonu tako da je na srednjoj plohi jednako nuli.

Na [Slika 33] prikazana je općenita raspodjela naprezanja po debljini ljuske.



Slika 33. Općenita raspodjela naprezanja po debljini ljuske

Na [Slika 34] raspodjela naprezanja po debljini tanke ljuske.

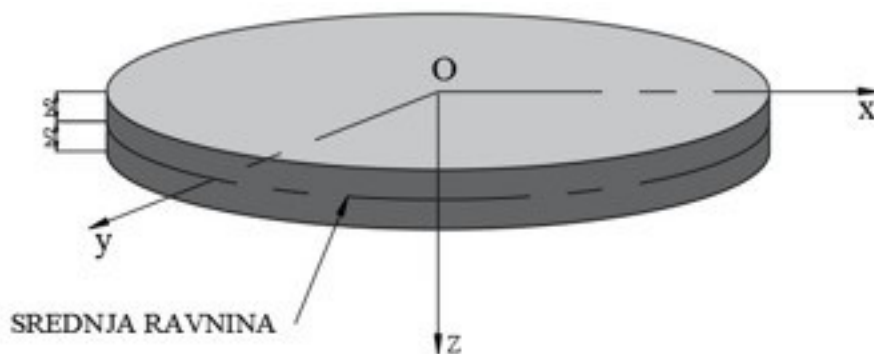


Slika 34. Raspodjela naprezanja u tankim ljuskama

Naprezanje σ_f potječe od momenta savijanja M , a membransko naprezanje σ_m od membranske ili normalne sile N [12].

4.2 Osnovno o tankim kružnim pločama

Na [Slika 35] prikazana je jedna tanka kružna ploča.



Slika 35. Tanki kružna ploča

Ploča je plosnato tijelo koje je ograničeno dvjema plohama čija je međusobna udaljenost mala u usporedbi s ostalim dimenzijama. Srednja ploha je ploha koja je jednako udaljena od vanjskih površina i ona je kod ploča uvijek ravna. Da bi se ploča mogla promatrati kao tanka mora biti zadovoljen uvjet:

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{10}. \quad (4.2)$$

4.3 Visina maksimalnog volumena piva

Prije početka samog proračuna spremnika potrebno je odrediti do koje visine se maksimalno može spremnik napuniti pivom. Maksimalni volumen piva je 1000 l tj. 1000000000 mm³. Visina stošca h_k odredi se odnosa radijusa baze stošca i kuta stošca i ona iznosi $h_k = 866$ mm. Volumen stošca je:

$$V_k = \frac{R^2 \pi h_k}{3}. \quad (4.3)$$

Potrebni volumen cilindra je:

$$V_{\text{cpotr}} = R^2 \pi h_{\text{cpotr}}. \quad (4.4)$$

Ako se oduzme ukupni volumen piva i volumen stošca dobijemo ostatak volumena koji se treba popuniti u cilindru.

$$V_{\text{cpotr}} = V_{\text{uk}} - V_k, \quad (4.5)$$

$$h_{\text{cpotr}} = \frac{\left(V_{\text{uk}} - \frac{R^2 \pi h_k}{3} \right)}{R^2 \pi}, \quad (4.6)$$

$$h_{\text{cpotr}} \approx 985 \text{ mm}. \quad (4.7)$$

Kada je poznata maksimalna visina piva u cilindru može se odrediti ukupna visina piva od dna stošca:

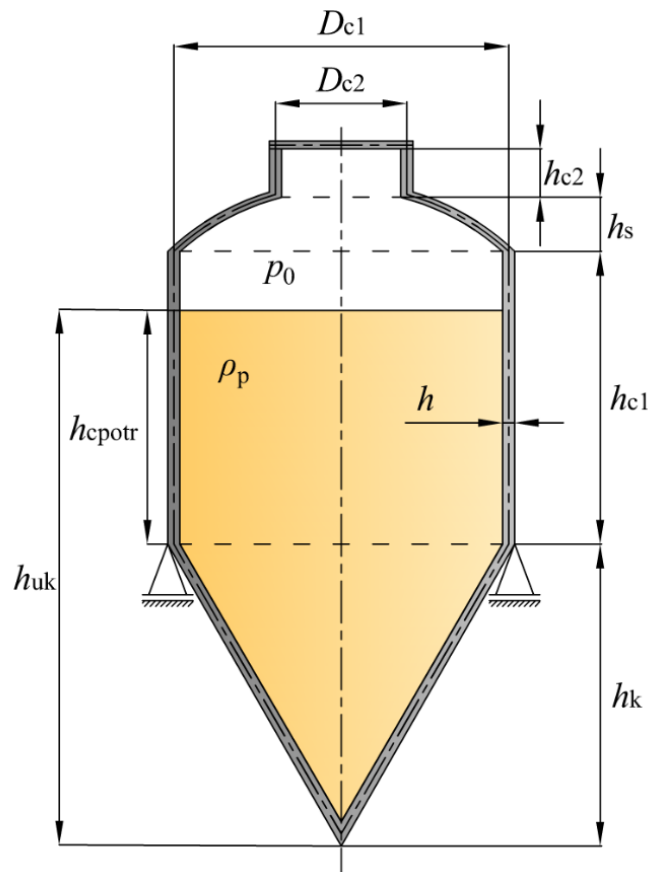
$$h_{\text{uk}} = h_k + h_{\text{cpotr}}, \quad (4.8)$$

$$h_{\text{uk}} = 1851 \text{ mm}. \quad (4.9)$$

Ta visina koristit će se za određivanje težine piva te za određivanje hidrostatskog tlaka piva.

4.4 Membransko stanje u ljuskama

Na [Slika 36] prikazana je skica odabranog spremnika s ucrtanom vezom s okolinom.



Slika 36. Skica spremnika

4.4.1 Konusna ljuska

Konusna ljuska do vrha je ispunjena pivom pa stoga na nju djeluje hidrostatski tlak po cijeloj unutrašnjoj površini. Osim hidrostatskog tlaka kojeg treba odrediti u spremniku neovisno o hidrostatskom tlaku po cijeloj površini djeluje nadtlak p_0 iznosa $p_0 = 0,25$ MPa. Meridijalni glavni polumjer konusne ljuske je:

$$r_1^k = \infty, \quad (4.10)$$

dok se cirkularni glavni polumjer r_2^k treba odrediti. Pomoćna skica za određivanje cirkularnog glavnog polumjera prikazana je na [Slika 37]. Prema skici se može odrediti glavni cirkularni polumjer u ovisnosti o x :

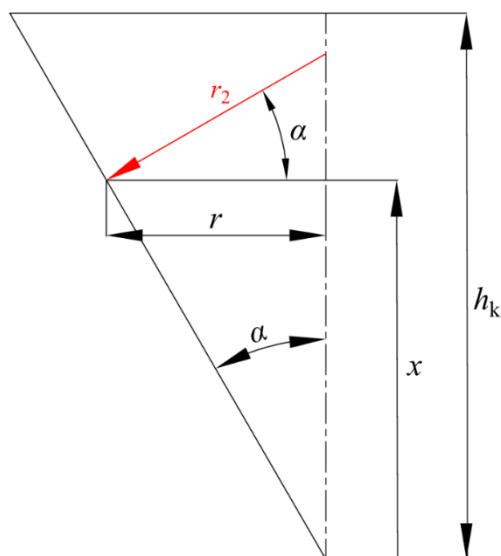
$$r_2^k = \frac{r}{\cos(\alpha)}, \quad (4.11)$$

$$r = x \tan(\alpha). \quad (4.12)$$

Kombinacijom zadnja dva izraza dobije se cirkularni glavni polumjer u ovisnosti o x :

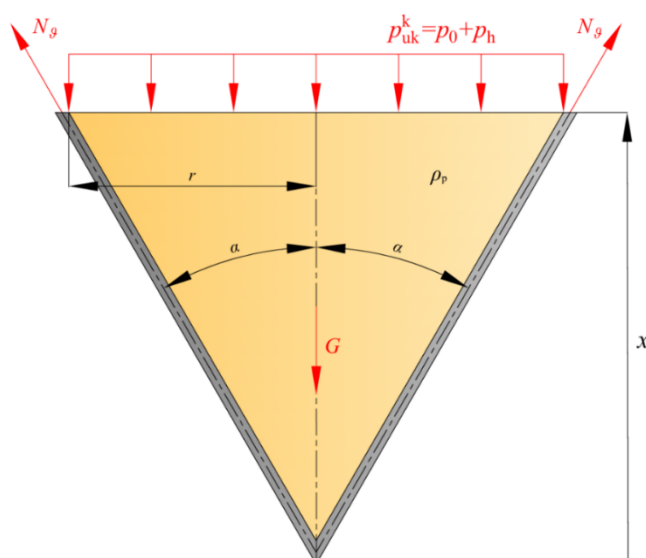
$$r_2^k = x \frac{\tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}. \quad (4.13)$$

U ovom slučaju kut $\alpha = 30^\circ$.



Slika 37. Pomoćna skica za određivanje cirkularnog glavnog polumjera

Da bi se odredila meridijalna sila u konusnom dijelu spremnika potrebno je napraviti odgovarajući presjek s ucrtanim svim opterećenjima na ljusci te zbrojiti sve sile u smjeru osi x ljuske. Na [Slika 38] prikazan je takav presjek.



Slika 38. Presjek konusa

Hidrostatski tlak koji djeluje na konusnu ljusku je:

$$p_h^k = \rho_p g (h_{cpotr} + h_k - x). \quad (4.14)$$

Pored hidrostatskog tlaka na ljusku djeluje i konstantni nadtlak p_0 , pa je onda ukupni tlak koji djeluje na ljusku:

$$p_{uk}^k = p_0 + p_h^k, \quad (4.15)$$

$$p_{\text{uk}}^k = p_0 + \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k - x). \quad (4.16)$$

Težina tekućine određuje se iz izraza:

$$G = \rho_p g V. \quad (4.17)$$

Volumen stošca je:

$$V = \frac{r^2 \pi x}{3}. \quad (4.18)$$

Kombinirajući zadnje dvije jednačbe dobije se:

$$G = \rho_p g \frac{r^2 \pi x}{3}. \quad (4.19)$$

Kada je poznata težina tekućine iz sume svih sila u smjeru x osi može se odrediti meridijalna sila konusne ljuske:

$$\sum F_x = 0, \quad (4.20)$$

$$2N_{\vartheta}^k \cos(\alpha) r \pi - p_{\text{uk}}^k r^2 \pi - G = 0, \quad (4.21)$$

$$2N_{\vartheta}^k \cos(\alpha) r \pi = p_{\text{uk}}^k r^2 \pi + G. \quad (4.22)$$

Kada se uvrste izračunate veličine ukupnog tlaka i težine tekućine, uvrsti r u ovisnosti o x i sredi dobije se meridijalna sila konusne ljuske:

$$N_{\vartheta}^k = \frac{p_0 x}{3} + \frac{1}{3} \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k) x - \frac{2}{9} \rho_p g x^2. \quad (4.23)$$

Kada je poznata meridijalna sila iz jednačbe ravnoteže ljuske može se izračunati i cirkularna sila konusne ljuske:

$$\frac{N_{\vartheta}^k}{r_1^k} + \frac{N_{\varphi}^k}{r_2^k} = p_n. \quad (4.24)$$

Tlak u smjeru normale jednak je:

$$p_n = p_{\text{uk}}^k = p_0 + \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k - x). \quad (4.25)$$

Iz uvjeta (4.10) i (4.13) dobije se:

$$N_{\varphi}^k = p_n r_2^k, \quad (4.26)$$

$$N_{\varphi}^k = [p_0 + \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k - x)] \frac{\tan(\alpha)}{\cos(\alpha)} x. \quad (4.27)$$

Kada se zadnji izraz sredi dobije se cirkularna sila u konusnoj ljusci:

$$N_{\varphi}^k = \frac{2}{3}p_0x + \frac{2}{3}\rho_p g(h_{\text{cpotr}} + h_k)x - \frac{2}{3}\rho_p gx^2 \quad (4.28)$$

4.4.2 Cilindrična ljuska – Veća

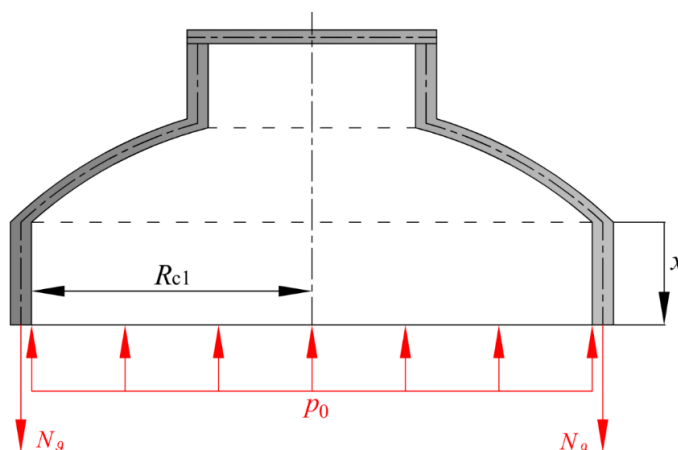
Da bi se definiralo membransko stanje unutar veće cilindrične ljuske prema [Slika 36] potrebno je provesti proračun u dva područja. Prvo u području gdje na ljusku djeluje samo nadtlak p_0 , a drugu u području gdje na ljusku djeluje i nadtlak i hidrostatski tlak. Za cilindričnu ljusku vrijedi:

$$r_1^{c1} = \infty, \quad (4.29)$$

$$r_2^{c1} = R_{c1}. \quad (4.30)$$

4.4.2.1 Područje u kojem djeluje samo nadtlak $0 \leq x \leq (h_{c1} - h_{\text{cpotr}})$

Na [Slika 39] prikazano je prvo područje proračuna veće cilindrične ljuske.



Slika 39. Presjek prvog područja većeg cilindra

Meridijalna sila u ljusci može jednostavno odrediti iz sume svih sila u smjeru x osi cilindra:

$$\sum F_x = 0, \quad (4.31)$$

$$2(N_{\vartheta}^{c1})_1 R_{c1} \pi - p_0 R_{c1}^2 \pi = 0, \quad (4.32)$$

$$(N_{\vartheta}^{c1})_1 = \frac{p_0 R_{c1}}{2}. \quad (4.33)$$

Kada je poznata meridijalna sila iz jednadžbe ravnoteže ljuske može se izračunati i cirkularna sila cilindrične ljuske:

$$\frac{(N_{\vartheta}^{c1})_1}{r_1^{c1}} + \frac{(N_{\varphi}^{c1})_1}{r_2^{c1}} = p_n. \quad (4.34)$$

Tlak u smjeru normale jednak je:

$$p_n = p_0. \quad (4.35)$$

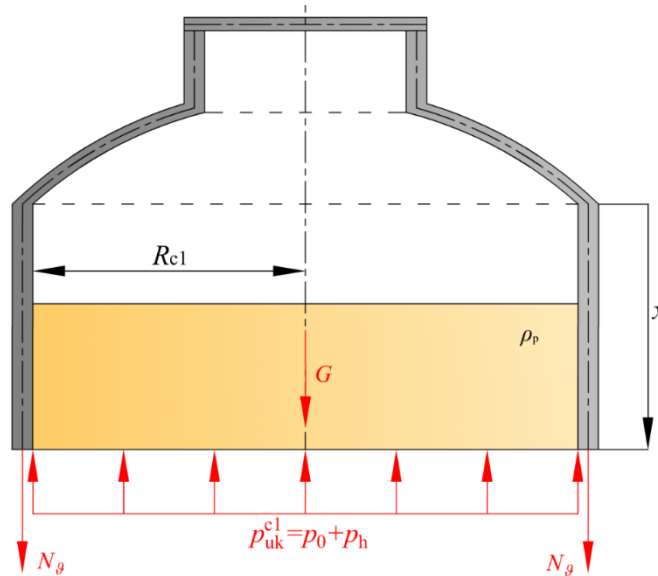
Iz uvjeta (4.29) i (4.30) dobije se:

$$(N_{\varphi}^{c1})_1 = p_n r_2^{c1}, \quad (4.36)$$

$$(N_{\varphi}^{c1})_1 = p_0 R_{c1}. \quad (4.37)$$

4.4.2.2 Područje u kojem djeluje i nadtlak i hidrostatski tlak ($h_{c1} - h_{cpotr}) \leq x \leq h_{c1}$

Na [Slika 40] prikazano je drugo područje proračuna većeg cilindrične ljuske.



Slika 40. Presjek drugog područja većeg cilindra

Kao i za prethodno područje meridijalna sila u ljusci može se odrediti iz jednadžbe ravnoteže u smjeru osi x . Za razliku od prethodnog područja na ovom uz nadtlak djeluje i hidrostatski tlak. Također tu se javlja i težina tekućine. Hidrostatski tlak jednak je:

$$p_h^{c1} = \rho_p g (x - (h_{c1} - h_{cpotr})). \quad (4.38)$$

Ukupni tlak je onda:

$$p_{uk}^{c1} = p_0 + p_h^{c1}, \quad (4.39)$$

$$p_{uk}^{c1} = p_0 + \rho_p g (x - (h_{c1} - h_{cpotr})). \quad (4.40)$$

Težina tekućine jednaka je:

$$G = \rho_p g V. \quad (4.41)$$

Volumen tekućine je jednak:

$$V = R_{c1}^2 \pi (x - (h_{c1} - h_{cpotr})). \quad (4.42)$$

Kada se prethodna dva izraza kombiniraju dobije se težina tekućine:

$$G = \rho_p g R_{c1}^2 \pi (x - (h_{c1} - h_{cpotr})). \quad (4.43)$$

Sada se može napraviti suma svih sila u smjeru x osi:

$$\sum F_x = 0, \quad (4.44)$$

$$2(N_{\vartheta}^{c1})_2 R_{c1} \pi - p_{uk}^{c1} R_{c1}^2 \pi + G = 0, \quad (4.45)$$

$$2(N_{\vartheta}^{c1})_2 R_{c1} \pi = p_{uk}^{c1} R_{c1}^2 \pi - G. \quad (4.46)$$

Kada se uvrste izračunate vrijednosti i sredi dobije se meridijalna sila u ljusci:

$$(N_{\vartheta}^{c1})_2 = \frac{p_0 R_{c1}}{2}. \quad (4.47)$$

Kada je poznata meridijalna sila iz jednadžbe ravnoteže ljuske može se izračunati i cirkularna sila cilindrične ljuske:

$$\frac{(N_{\vartheta}^{c1})_2}{r_1^{c1}} + \frac{(N_{\varphi}^{c1})_2}{r_2^{c1}} = p_n. \quad (4.48)$$

Tlak u smjeru normale jednak je:

$$p_n = p_{uk}^{c1} = p_0 + \rho_p g (x - (h_{c1} - h_{cpotr})). \quad (4.49)$$

Iz uvjeta (4.29) i (4.30) dobije se:

$$(N_{\varphi}^{c1})_2 = p_n r_2^{c1}, \quad (4.50)$$

$$(N_{\varphi}^{c1})_2 = (p_0 + \rho_p g (x - (h_{c1} - h_{cpotr}))) R_{c1}. \quad (4.51)$$

Kada se zadnji izraz sredi dobije se cirkularna sila u cilindričnoj ljusci:

$$(N_{\varphi}^{c1})_2 = p_0 R_{c1} + \rho_p g R_{c1} (x - (h_{c1} - h_{cpotr})). \quad (4.52)$$

4.4.3 Sferna ljuska

Na dijelu sferne ljuske djeluje samo nadtlak p_0 . Općenito za sferu vrijedi:

$$r_1^s = R_s, \quad (4.53)$$

$$r_2^s = R_s. \quad (4.54)$$

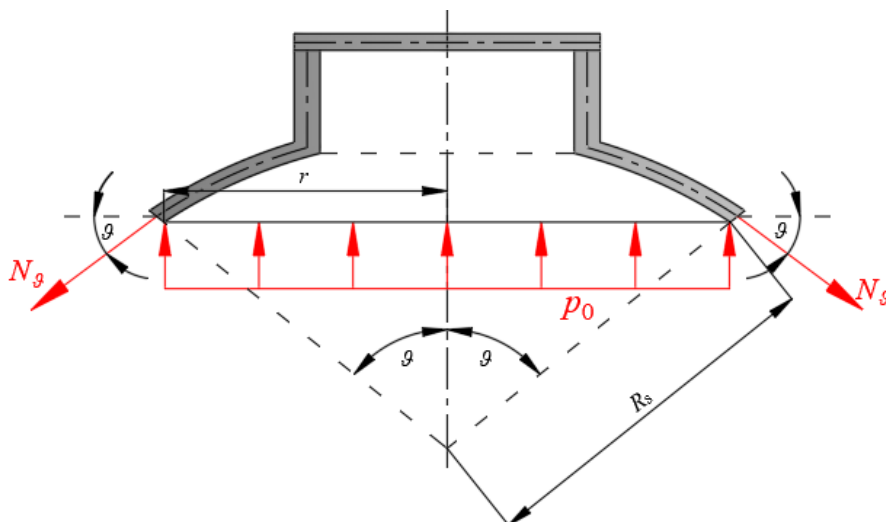
Skica presjeka sfere potrebna za izračun membranskih sila prikazana je na [Slika 41]. Iz jednadžbe ravnoteže za ljuske uz uvjete (4.53) i (4.54) dobije se:

$$\frac{N_{\vartheta}^s}{r_1^s} + \frac{N_{\varphi}^s}{r_2^s} = p_n, \quad (4.55)$$

$$N_{\vartheta}^s + N_{\varphi}^s = p_n R_s. \quad (4.56)$$

Tlak u smjeru normale jednak je:

$$p_n = p_0. \quad (4.57)$$



Slika 41. Presjek sfere

Postavljanjem jednadžbe ravnoteže u smjeru x osi dobije se meridijalna sila sferne ljuske:

$$\sum F_x = 0, \quad (4.58)$$

$$2N_\vartheta^s r \pi \sin(\vartheta) - p_0 r^2 \pi = 0, \quad (4.59)$$

$$2N_\vartheta^s r \pi \sin(\vartheta) = p_0 r^2 \pi. \quad (4.60)$$

Radijus r za sfernu ljusku jednak je:

$$r = R_s \sin(\vartheta). \quad (4.61)$$

Kada se izraz (4.71) uvrsti u izraz (4.70) i sredi dobije se meridijalna sila sferne ljuske:

$$N_\vartheta^s = \frac{p_0 R_s}{2}. \quad (4.62)$$

Kada je poznata meridijalna sila iz izraza (4.66) može se dobiti i cirkularna sila u sfernoj ljusci:

$$N_\varphi^s = p_0 R_s - N_\vartheta^s, \quad (4.63)$$

$$N_\varphi^s = \frac{p_0 R_s}{2}. \quad (4.64)$$

4.4.4 Cilindrična ljuska – Manja

Za cilindričnu ljusku vrijedi:

$$r_1^{c2} = \infty, \quad (4.65)$$

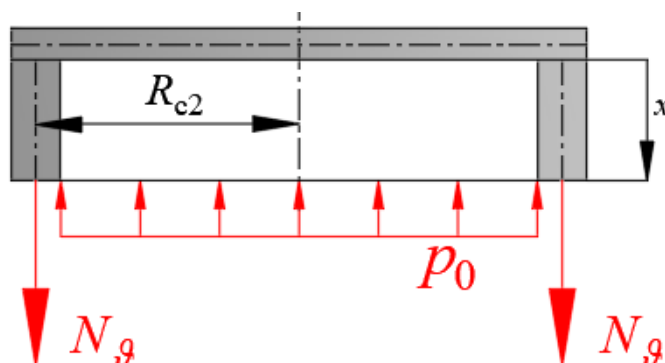
$$r_2^{c2} = R_{c2}. \quad (4.66)$$

Na [Slika 42] prikazano je prvo područje proračuna veće cilindrične ljuske. Meridijalna sila u ljusci može jednostavno odrediti iz sume svih sila u smjeru x osi cilindra:

$$\sum F_x = 0, \quad (4.67)$$

$$2N_{\theta}^{c2}R_{c2}\pi - p_0R_{c2}^2\pi = 0, \quad (4.68)$$

$$N_{\theta}^{c2} = \frac{p_0R_{c2}}{2}. \quad (4.69)$$



Slika 42. Presjek manjeg cilindra

Kada je poznata meridijalna sila iz jednadžbe ravnoteže ljuske može se izračunati i cirkularna sila cilindrične ljuske:

$$\frac{N_{\theta}^{c2}}{r_1^{c2}} + \frac{N_{\varphi}^{c2}}{r_2^{c2}} = p_n. \quad (4.70)$$

Tlak u smjeru normale jednak je:

$$p_n = p_0. \quad (4.71)$$

Iz uvjeta (4.29) i (4.30) dobije se:

$$N_{\varphi}^{c2} = p_n r_2^{c2}, \quad (4.72)$$

$$N_{\theta}^{c2} = p_0 R_{c2}. \quad (4.73)$$

4.5 Lokalno savijanje

Lokalno savijanje javlja se na mjestima gdje dolazi do spoja dijelova konstrukcije. Kako se udaljavamo od mjesta spoja tako se smanjuje utjecaj savijanja i u ljuskama vlada samo membransko stanje naprezanja. Da bi se odredila maksimalna naprezanja u konstrukciji potrebno je utvrditi na kojem spoju se javlja najveća unutarnja sila, a time i naprezanje. U daljnjem proračunu izvest će se analiza svakog spoja. Prije samog proračuna spojeva potrebno je odrediti jesu li sve ljuske duge te je li kružna ploča tanka. Uvjet duge ljuske je:

$$\int \beta(s) ds > 3. \quad (4.74)$$

Da bi se taj uvjet mogao riješiti potrebno je poznavati geometrijsko-materijalna značajka za ljuske. Geometrijsko-materijalna značajka za veću cilindričnu ljusku je:

$$\beta_{c1} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_{c1}^2 h^2}}. \quad (4.75)$$

Geometrijsko-materijalna značajka za manju cilindričnu ljusku je:

$$\beta_{c2} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_{c2}^2 h^2}}. \quad (4.76)$$

Geometrijsko-materijalna značajka za sfernu ljusku je:

$$\beta_s = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_s^2 h^2}}. \quad (4.77)$$

Geometrijsko-materijalna značajka za konusnu ljusku je:

$$\beta_k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r_{2,k}^2 h^2}}. \quad (4.78)$$

Ako se riješi integral (4.74) za cilindrične ljuske dobije se izraz:

$$\beta l > 3. \quad (4.79)$$

Za veću cilindričnu ljusku $l = h_{c1}$, a za manju cilindričnu ljusku $l = h_{c2}$, pa vrijedi:

$$\beta h_{c1} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_{c1}^2 h^2}} h_{c1} = 40,291 > 3, \quad (4.80)$$

$$\beta h_{c2} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_{c2}^2 h^2}} h_{c2} = 11,375 > 3. \quad (4.81)$$

Na temelju dobivenih vrijednosti da se zaključiti da su obje cilindrične ljuske duge. Za konusnu ljusku integral (4.74) glasi:

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta(s) ds > 3. \quad (4.82)$$

Granice integracije određuju se prema [Slika 43]. Prema skici se dobije:

$$\int_0^{\frac{R_{c1}}{\cos(\vartheta_0)}} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{\left(\frac{s}{\tan(\vartheta_0)}\right)^2 h^2}} ds = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\tan(\vartheta_0)}}{\sqrt{h}} \int_0^{\frac{R_{c1}}{\cos(\vartheta_0)}} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 68,173 > 3. \quad (4.83)$$

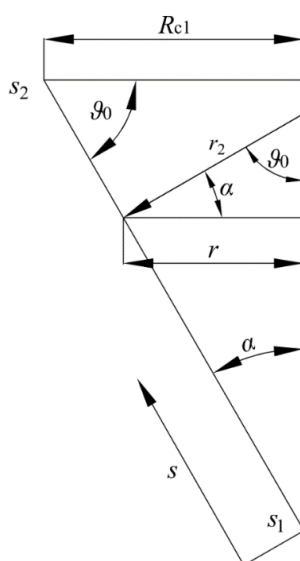
Sukladno dobivenoj vrijednosti može se zaključiti da je konusna ljuska duga. Za sfernu ljusku integral (4.74) glasi:

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta(s) ds > 3. \quad (4.84)$$

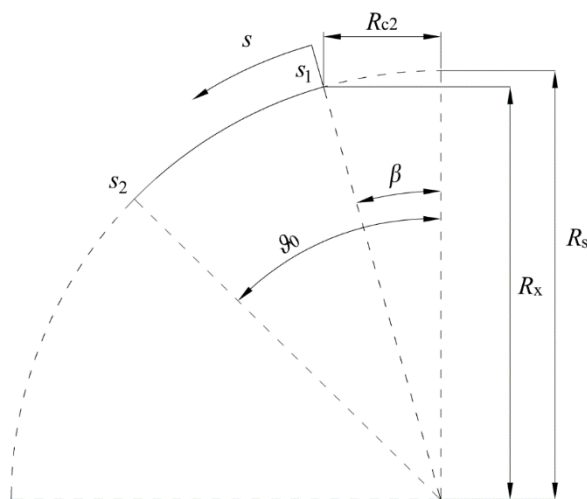
Granice integracije određuju se iz [Slika 44]. Prema skici iz modela u SolidWorksu se dobije kut β koji je u radianima jednak $\beta = 0,351$. Kad je poznat kut β mogu se dobiti granice integracije:

$$s_1 = R_s \beta \Rightarrow s_1 = 224,64, \quad (4.85)$$

$$s_2 = R_s \vartheta_0 \Rightarrow s_2 = 574,08. \quad (4.86)$$



Slika 43. Pomoćna skica za određivanje granica integracije kod sferne ljuske



Slika 44. Pomoćna skica za određivanje granica integracije kod sferne ljuske

Kad se dobivene konstante integracije uvrste u izraz (4.84) dobije se:

$$\int_{224,64}^{574,08} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_s^2 h^2}} ds = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_s^2 h^2}} s \Big|_{224,64}^{574,08} = 11,313 > 3 \quad (4.87)$$

Iz dobivene vrijednosti može se zaključiti da se radi o dugoj sfernoj ljusci. Kružna ploča je tanka ako vrijedi:

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{10}. \quad (4.88)$$

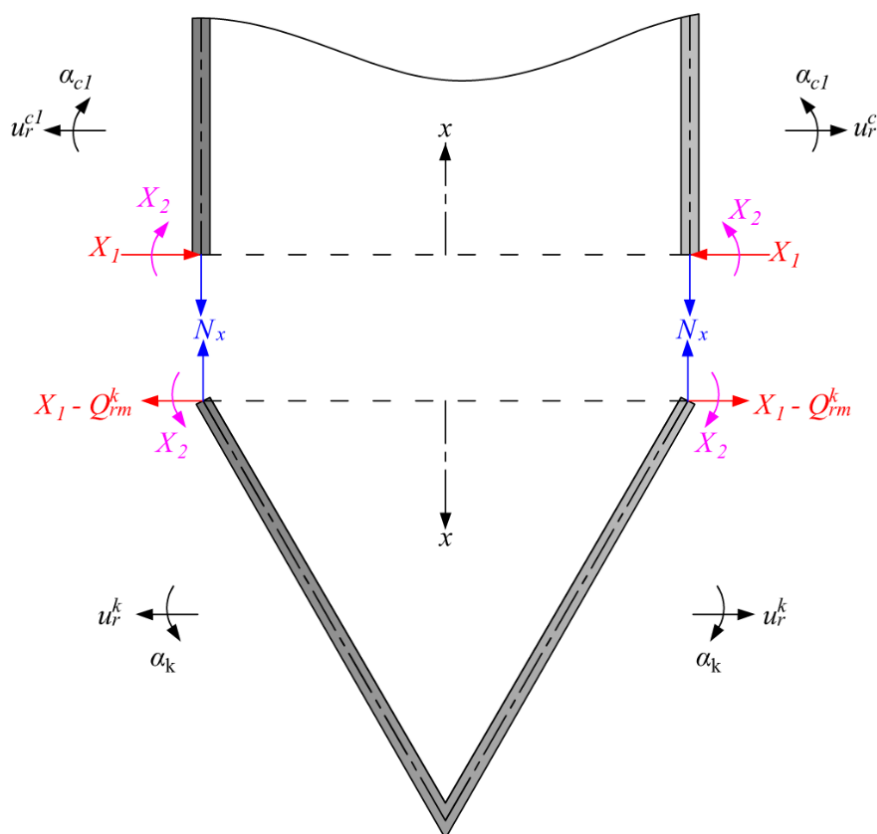
U ovom slučaju taj je omjer jednak:

$$\frac{h_p}{R_{c2}} = \frac{1}{22} < \frac{1}{10}. \quad (4.89)$$

Iz dobivene vrijednosti može se zaključiti kako je kružna ploča tanka i može se kao takva proračunavati.

4.5.1 Spoj konusne ljuske i veće cilindrične ljuske

Na [Slika 45] prikazan je spoj konusne ljuske i krute okoline oslobođen veza s ucrtanim poopcenim silama.



Slika 45. Spoj konusa i cilindra

Da bi se pronašle nepoznate poopcene sile na mjestu spoja potrebno je postaviti uvjete kompatibilnosti na mjestu spoja. Za ovakav spoj vrijede sljedeći uvjeti kompatibilnosti na mjestu spoja:

$$u_r^k = u_r^{c1}, \quad (4.90)$$

$$\alpha_k = -\alpha_{c1}. \quad (4.91)$$

Radijalni pomak konusa definiran je kao:

$$u_r^k = \alpha_{11}^k (X_1 - Q_{r,m}^k) + \alpha_{12}^k X_2 + u_{r,m}^k. \quad (4.92)$$

Zakret konusa definiran je kao:

$$\alpha_k = \alpha_{21}^k (X_1 - Q_{r,m}^k) + \alpha_{22}^k X_2 + \alpha_m^k. \quad (4.93)$$

Radijalni pomak cilindra definiran je kao:

$$u_r^{c1} = -\alpha_{11}^{c1} X_1 + \alpha_{12}^{c1} X_2 + u_{r,m}^{c1}. \quad (4.94)$$

Zakret cilindra je definiran kao:

$$\alpha_{c1} = -\alpha_{21}^{c1} X_1 + \alpha_{22}^{c1} X_2 + \alpha_m^{c1}. \quad (4.95)$$

Kada se izrazi (4.92), (4.93), (4.94) i (4.95) uvrste u izraze (4.90) i (4.91) dobije se sustav jednadžbi:

$$\alpha_{11}^k (X_1 - Q_{r,m}^k) + \alpha_{12}^k X_2 + u_{r,m}^k = -\alpha_{11}^{c1} X_1 + \alpha_{12}^{c1} X_2 + u_{r,m}^{c1}, \quad (4.96)$$

$$\alpha_{21}^k (X_1 - Q_{r,m}^k) + \alpha_{22}^k X_2 + \alpha_m^k = -(-\alpha_{21}^{c1} X_1 + \alpha_{22}^{c1} X_2 + \alpha_m^{c1}). \quad (4.97)$$

Da bi se prethodni sustav mogao riješiti potrebno je pronaći membranske pomake $u_{r,m}^k$ i $u_{r,m}^{c1}$ te membranske zakrete α_m^k i α_m^{c1} , uplivne koeficijente na mjestu spoja za konus i veći cilindar, geometrijsko-materijalne karakteristike konusa i većeg cilindra na mjestu spoja te fleksijske krutosti konusa i većeg cilindra. Radijalni membranski pomak konusne ljuske na mjestu spoja definiran je kao:

$$u_{r,m}^k = \frac{r}{Eh} (N_{\varphi,m}^k - \nu N_{\vartheta,m}^k). \quad (4.98)$$

Da bi se dobile vrijednosti $N_{\varphi,m}^k$ i $N_{\vartheta,m}^k$ na mjestu spoja potrebno je u ranije već izračunate vrijednosti uvrstiti vrijednosti na mjestu spoja. Primjenom supstitucija prema [Slika 43]:

$$x = s \sin(\vartheta_0), \quad (4.99)$$

$$s = \frac{r}{\cos(\vartheta_0)}, \quad (4.100)$$

dobije se meridijalna membranska sila u ovisnosti o s :

$$N_{\vartheta,m}^k = \frac{\sqrt{3}}{6} p_0 s + \frac{\sqrt{3}}{6} \rho_p g (h_{cpotr} + h_k) s - \frac{1}{6} \rho_p g s^2. \quad (4.101)$$

Ako se u zadnji izraz uvrsti supstitucija (4.100) i vrijednost $r = R_{c1}$ dobije se:

$$N_{\vartheta,m}^k = \frac{\sqrt{3}}{3} p_0 R_{c1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \rho_p g (h_{cpotr} + h_k) R_{c1} - \frac{2}{3} \rho_p g R_{c1}^2. \quad (4.102)$$

Na isti način dobije se cirkularna membranska sila na mjestu spoja:

$$N_{\varphi,m}^k = \frac{\sqrt{3}}{3} p_0 s + \frac{\sqrt{3}}{3} \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k) s - \frac{1}{2} \rho_p g s^2, \quad (4.103)$$

$$N_{\varphi,m}^k = \frac{2\sqrt{3}}{3} p_0 R_{c1} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k) R_{c1} - 2\rho_p g R_{c1}^2. \quad (4.104)$$

Kada su poznate meridijalna i cirkularna sila može se dobiti membranski radijalni pomak:

$$u_{r,m}^k = \frac{1}{Eh} \left[\frac{\sqrt{3}}{12} (2 - \nu) (p_0 + \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k)) s^2 - \frac{1}{12} (3 - \nu) \rho_p g s^3 \right]. \quad (4.105)$$

Ako se uvrste vrijednosti na mjestu spoja se dobije:

$$u_{r,m}^k = \frac{1}{Eh} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} (2 - \nu) (p_0 + \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k)) R_{c1}^2 - \frac{2}{3} (3 - \nu) \rho_p g R_{c1}^3 \right]. \quad (4.106)$$

Membranski zakret konusne ljuske definiran je kao:

$$\alpha_m^k = \frac{du_{r,m}^k}{ds}. \quad (4.107)$$

Rješavanjem prethodnog izraza dobije se:

$$\alpha_m^k = \frac{1}{Eh} \left[\frac{\sqrt{3}}{6} (2 - \nu) (p_0 + \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k)) s - \frac{1}{4} (3 - \nu) \rho_p g s^2 \right]. \quad (4.108)$$

Kada se uvrste vrijednosti na mjestu spoja dobije se:

$$\alpha_m^k = \frac{1}{Eh} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} (2 - \nu) (p_0 + \rho_p g (h_{\text{cpotr}} + h_k)) R_{c1} - (3 - \nu) \rho_p g R_{c1}^2 \right]. \quad (4.109)$$

Geometrijsko-materijalna značajka konusne ljuske na mjestu spoja je:

$$\beta_k = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{\frac{4}{3} R_{c1}^2 h^2}}. \quad (4.110)$$

Fleksijska krutost konusne ljuske je:

$$D_k = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (4.111)$$

Uplivni koeficijenti za konusnu ljusku su:

$$\alpha_{11}^k = \frac{\sin^2(\vartheta_0)}{2D_k \beta_k^3}, \quad (4.112)$$

$$\alpha_{12}^k = \alpha_{21}^k = \frac{\sin(\vartheta_0)}{2D_k \beta_k^2}, \quad (4.113)$$

$$\alpha_{22}^k = \frac{1}{D_k \beta_k}. \quad (4.114)$$

Još je potrebno odrediti silu $Q_{r,m}^k$, a ona glasi:

$$Q_{r,m}^k = N_{\vartheta,m}^k \cos(\vartheta_0), \quad (4.115)$$

$$Q_{r,m}^k = \frac{\sqrt{3}}{6} p_0 R_{c1} + \frac{\sqrt{3}}{6} \rho_p g (h_{cpotr} + h_k) R_{c1} - \frac{1}{3} \rho_p g R_{c1}^2. \quad (4.116)$$

Membranski pomak većeg cilindra na mjestu spoja određuje se iz izraza:

$$u_{r,m}^{c1} = \frac{R_{c1}}{Eh} (N_{\varphi,m}^{c1} - \nu N_{\vartheta,m}^{c1}). \quad (4.117)$$

Već ranije su izračunate veličine membranske meridijalne i cirkularne sile:

$$N_{\vartheta,m}^{c1} = \frac{p_0 R_{c1}}{2}, \quad (4.118)$$

$$N_{\varphi,m}^{c1} = p_0 R_{c1} + \rho_p g R_{c1} (x - (h_{c1} - h_{cpotr})). \quad (4.119)$$

Uvrštavanjem izraza (4.118) i (4.119) u izraz (4.117) te uvrštavanjem vrijednosti $x = h_{c1}$ dobije se radijalni membranski pomak veće cilindrične ljuske na mjestu spoja:

$$u_{r,m}^{c1} = \frac{R_{c1}}{Eh} \left(p_0 R_{c1} + \rho_p g R_{c1} (x - (h_{c1} - h_{cpotr})) - \nu \frac{p_0 R_{c1}}{2} \right), \quad (4.120)$$

$$u_{r,m}^{c1} = \frac{R_{c1}^2}{Eh} \left[p_0 \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) + \rho_p g h_{cpotr} \right]. \quad (4.121)$$

Zakret većeg cilindra određuje se iz izraza:

$$\alpha_m^{c1} = \frac{du_{r,m}^{c1}}{dx}. \quad (4.122)$$

Deriviranjem izraza (4.120) dobije se zakret većeg cilindra:

$$\alpha_m^{c1} = \frac{\rho_p g R_{c1}^2}{Eh}. \quad (4.123)$$

Geometrijsko-materijalna značajka veće cilindrične ljuske na mjestu spoja je:

$$\beta_{c1} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_{c1}^2 h^2}}. \quad (4.124)$$

Fleksijska krutost veće cilindrične ljuske je:

$$D_{c1} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.125)$$

Uplivni koeficijenti za veću cilindričnu ljusku su:

$$\alpha_{11}^{c1} = \frac{1}{2D_{c1}\beta_{c1}^3}, \quad (4.126)$$

$$\alpha_{12}^{c1} = \alpha_{21}^{c1} = \frac{1}{2D_{c1}\beta_{c1}^2}, \quad (4.127)$$

$$\alpha_{22}^{c1} = \frac{1}{D_{c1}\beta_{c1}}. \quad (4.128)$$

Ako se sustav (4.96) i (4.97) zapiše kao matrična jednadžba i riješi pomoću programskog paketa Matlab dobije se:

$$\begin{bmatrix} (\alpha_{11}^k + \alpha_{11}^{c1}) & (\alpha_{12}^k - \alpha_{12}^{c1}) \\ (\alpha_{21}^k - \alpha_{21}^{c1}) & (\alpha_{22}^k + \alpha_{22}^{c1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{r,m}^{c1} - u_{r,m}^k + \alpha_{11}^k Q_{r,m}^k) \\ (-\alpha_m^{c1} - \alpha_m^k + \alpha_{21}^k Q_{r,m}^k) \end{bmatrix}, \quad (4.129)$$

$$X_1 = 18,0641 \frac{N}{mm}, \quad (4.130)$$

$$X_2 = 274,2029 \frac{Nmm}{mm}. \quad (4.131)$$

Kada su izračunate vrijednosti poopćenih sila primjenom eksponencijalno-trigonometrijskih funkcija mogu se prikazati raspodjele različitih radijalnih pomaka i zakreta. Eksponencijalno-trigonometrijske funkcije su:

$$f_1(\xi) = e^{-\xi}(\cos(\xi) + \sin(\xi)), \quad (4.132)$$

$$f_2(\xi) = e^{-\xi} \sin(\xi), \quad (4.133)$$

$$f_3(\xi) = e^{-\xi}(\cos(\xi) - \sin(\xi)), \quad (4.134)$$

$$f_4(\xi) = e^{-\xi} \cos(\xi). \quad (4.135)$$

Vrijednost ξ za konusnu ljusku je $\xi = \beta_k s$, a za cilindričnu ljusku je $\xi = \beta_{c1} x$. Uzimanjem vrijednosti s do polovice duljine izvodnice konusa i x do polovine duljine cilindra mogu se prikazati raspodjele. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice konusne ljuske računa se kao:

$$u_r^k = \alpha_{11}^k (X_1 - Q_{r,m}^k) f_4(\xi) + \alpha_{12}^k X_2 f_3(\xi) + u_{r,m}^k. \quad (4.136)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela radijalnog pomaka konusne ljuske koja je prikazana na [Slika 46]. Raspodjela zakreta po duljini izvodnice konusne ljuske računa se kao:

$$\alpha_k = \alpha_{21}^k (X_1 - Q_{r,m}^k) f_1(\xi) + \alpha_{22}^k X_2 f_4(\xi) + \alpha_m^k. \quad (4.137)$$

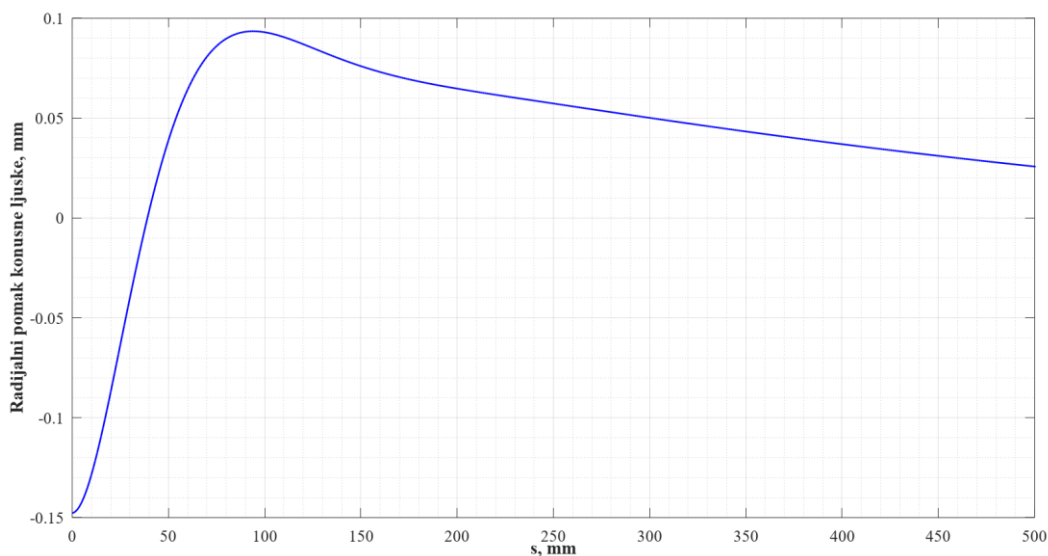
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela zakreta konusne ljuske koja je prikazana na [Slika 47]. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini cilindrične ljuske računa se kao:

$$u_r^{c1} = -\alpha_{11}^{c1} X_1 f_4(\xi) + \alpha_{12}^{c1} X_2 f_3(\xi) + u_{r,m}^{c1}. \quad (4.138)$$

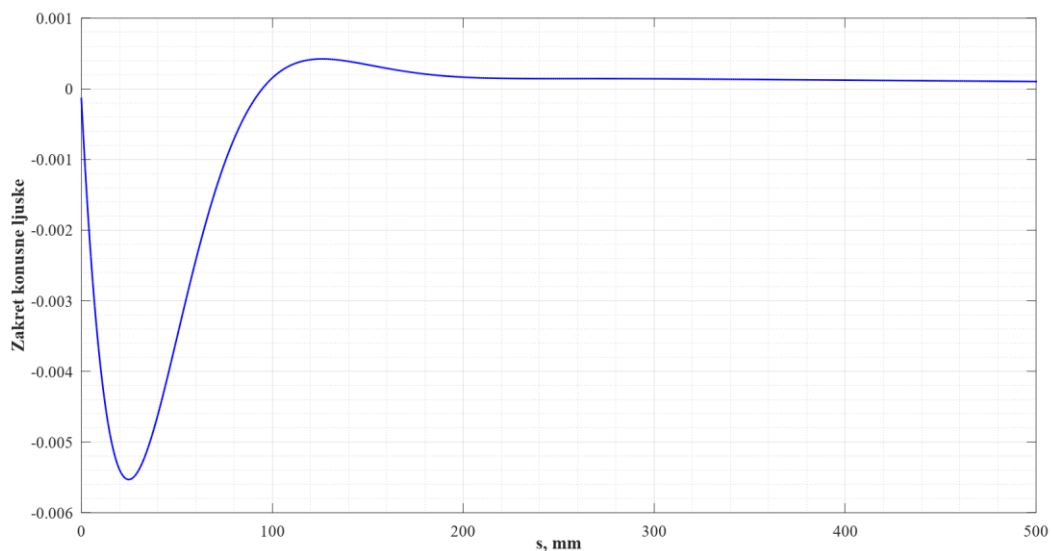
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela radijalnog pomaka veće cilindrične ljuske koja je prikazana na [Slika 48]. Raspodjela zakreta po duljini cilindrične ljuske računa se kao:

$$\alpha_{c1} = -\alpha_{21}^{c1} X_1 f_1(\xi) + \alpha_{22}^{c1} X_2 f_4(\xi) + \alpha_m^{c1}. \quad (4.139)$$

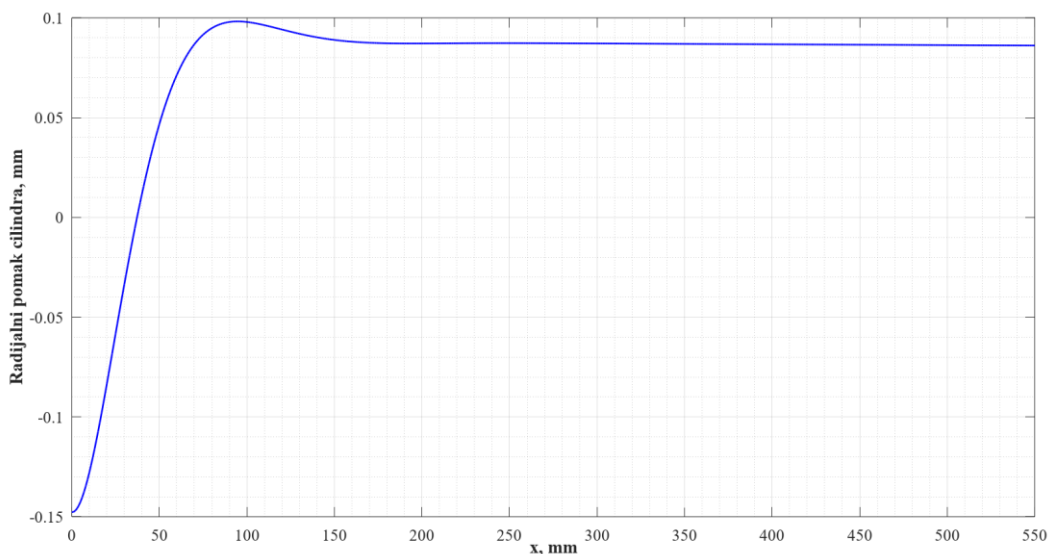
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela zakreta veće cilindrične ljuske koja je prikazana na [Slika 49].



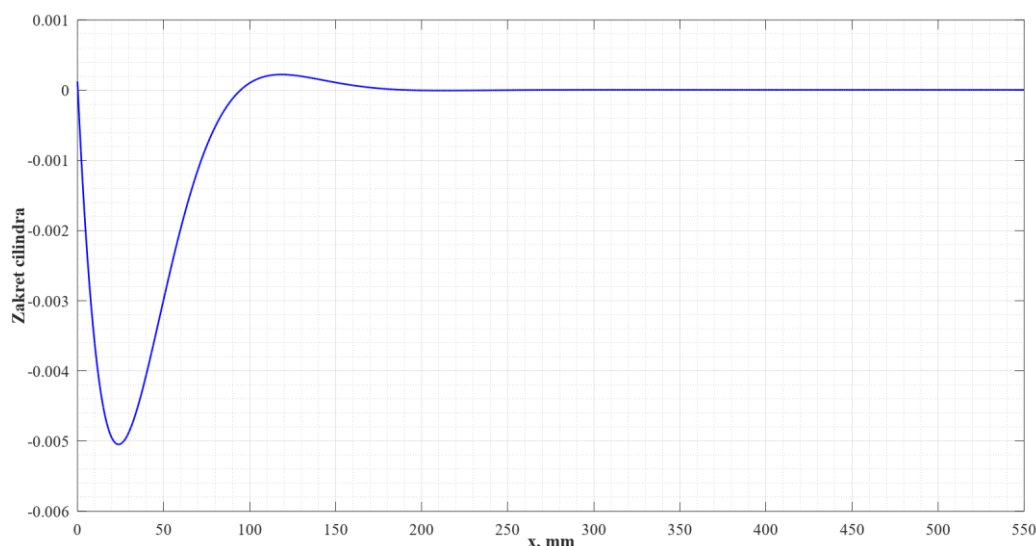
Slika 46. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice konusne ljuske



Slika 47. Raspodjela zakreta po duljini izvodnice konusne ljuske



Slika 48. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusa



Slika 49. Raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusa

4.5.2 Spoj veće cilindrične ljuske i sferne ljuske

Na [Slika 50] prikazan je spoj veće cilindrične ljuske i sferne ljuske oslobođen veza sa ucrtanim poopćenim silama. Da bi se pronašle nepoznate poopćene sile na mjestu spoja sfere i cilindra potrebno je postaviti uvjete kompatibilnosti na mjestu spoja. Uvjeti kompatibilnosti postavljaju se primjenom uplivnih koeficijenata. Uvjeti kompatibilnosti za prikazani spoj su:

$$u_r^s = u_r^{c1}, \quad (4.140)$$

$$\alpha_s = -\alpha_{c1}. \quad (4.141)$$

Radijalni pomak sfere definiran je kao:

$$u_r^s = \alpha_{11}^s (X_3 - Q_{r,m}^s) + \alpha_{12}^s X_4 + u_{r,m}^s. \quad (4.142)$$

Radijalni pomak većeg cilindra definiran je kao:

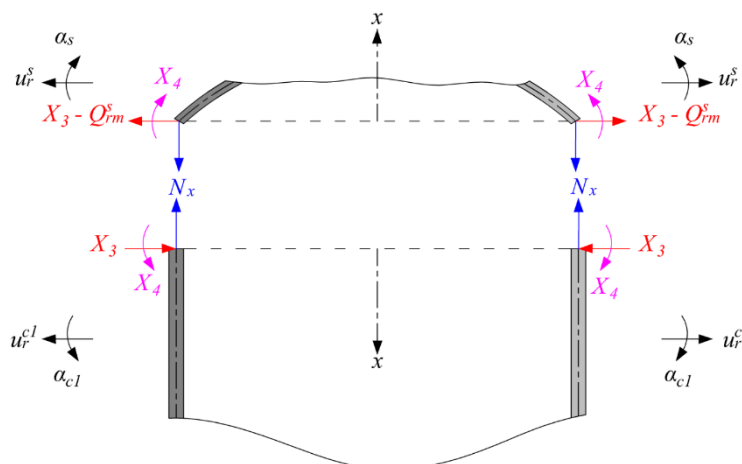
$$u_r^{c1} = -\alpha_{11}^{c1}X_3 + \alpha_{12}^{c1}X_4 + u_{r,m}^{c1}. \quad (4.143)$$

Zakret sfere definiran je kao:

$$\alpha_s = \alpha_{21}^s(X_3 - Q_{r,m}^s) + \alpha_{22}^sX_4 + \alpha_m^s. \quad (4.144)$$

Zakret većeg cilindra definiran je kao:

$$\alpha_{c1} = -\alpha_{21}^{c1}X_3 + \alpha_{22}^{c1}X_4 + \alpha_m^{c1}. \quad (4.145)$$



Slika 50. Spoj većeg cilindra i sfere

Kada se izrazi (4.142), (4.143), (4.144) i (4.145) uvrste u izraze (4.140) i (4.141) dobije se sustav jednažbi:

$$\alpha_{11}^s(X_3 - Q_{r,m}^s) + \alpha_{12}^sX_4 + u_{r,m}^s = -\alpha_{11}^{c1}X_3 + \alpha_{12}^{c1}X_4 + u_{r,m}^{c1}, \quad (4.146)$$

$$\alpha_{21}^s(X_3 - Q_{r,m}^s) + \alpha_{22}^sX_4 + \alpha_m^s = -(-\alpha_{21}^{c1}X_3 + \alpha_{22}^{c1}X_4 + \alpha_m^{c1}). \quad (4.147)$$

Da bi se prethodni sustav mogao riješiti potrebno je pronaći membranske pomake $u_{r,m}^s$ i $u_{r,m}^{c1}$, membranske zakrete α_m^s i α_m^{c1} , uplívne koeficijente na mjestu spoja za cilindar i za sferu, geometrijsko-materijalne karakteristike ljsaka na mjestu spoja te fleksijsku krutost ljsaka. Membranski pomak većeg cilindra na mjestu spoja određuje se iz izraza:

$$u_{r,m}^{c1} = \frac{R_{c1}}{Eh} (N_{\varphi,m}^{c1} - \nu N_{\vartheta,m}^{c1}). \quad (4.148)$$

Već ranije su izračunate veličine membranske meridijalne i cirkularne sile:

$$N_{\vartheta,m}^{c1} = \frac{p_0 R_{c1}}{2}, \quad (4.149)$$

$$N_{\varphi,m}^{c1} = p_0 R_{c1}. \quad (4.150)$$

Uvrštavanjem izraza (4.149) i (4.150) u izraz (4.148) radijalni membranski pomak veće cilindrične ljsuke na mjestu spoja:

$$u_{r,m}^{c1} = \frac{R_{c1}^2 p_0}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \quad (4.151)$$

Zakret većeg cilindra određuje se iz izraza:

$$\alpha_m^{c1} = \frac{du_{r,m}^{c1}}{dx}. \quad (4.152)$$

Deriviranjem izraza (4.151) dobije se zakret većeg cilindra:

$$\alpha_m^{c1} = 0. \quad (4.153)$$

Geometrijsko-materijalna značajka veće cilindrične ljuske na mjestu spoja je:

$$\beta_{c1} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_{c1}^2 h^2}}. \quad (4.154)$$

Fleksijska krutost veće cilindrične ljuske je:

$$D_{c1} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.155)$$

Uplivni koeficijenti za veću cilindričnu ljusku su:

$$\alpha_{11}^{c1} = \frac{1}{2D_{c1}\beta_{c1}^3}, \quad (4.156)$$

$$\alpha_{12}^{c1} = \alpha_{21}^{c1} = \frac{1}{2D_{c1}\beta_{c1}^2}, \quad (4.157)$$

$$\alpha_{22}^{c1} = \frac{1}{D_{c1}\beta_{c1}}. \quad (4.158)$$

Sada su poznati svi potrebni podaci za veću cilindričnu ljusku. Ostaju još podaci za sfernu ljusku. Radijalni membranski pomak sferne ljuske na mjestu spoja definiran je kao:

$$u_{r,m}^s = \frac{R_{c1}}{Eh} (N_{\varphi,m}^s - \nu N_{\vartheta,m}^s). \quad (4.159)$$

Da bi se dobile vrijednosti $N_{\varphi,m}^s$ i $N_{\vartheta,m}^s$ na mjestu spoja potrebno je u ranije već izračunate vrijednosti uvrstiti vrijednosti na mjestu spoja. Već ranije su izračunate veličine membranske meridijalne i cirkularne sile:

$$N_{\vartheta,m}^s = \frac{p_0 R_s}{2}, \quad (4.160)$$

$$N_{\varphi,m}^s = \frac{p_0 R_s}{2}. \quad (4.161)$$

Uvrštavanjem izraza (4.160) i (4.161) u izraz (4.159) dobije se radijalni membranski pomak sferne ljuske na mjestu spoja:

$$u_{r,m}^s = \frac{p_0 R_s R_{c1}}{2Eh} (1 - \nu). \quad (4.162)$$

Zakret sferne ljuske određuje se iz izraza:

$$\alpha_m^s = \frac{du_{r,m}^s}{dx}. \quad (4.163)$$

Deriviranjem izraza (4.162) dobije se zakret sferne ljuske:

$$\alpha_m^s = 0. \quad (4.164)$$

Geometrijsko-materijalna značajka sferne ljuske na mjestu spoja je:

$$\beta_s = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{R_s^2 h^2}}. \quad (4.165)$$

Fleksijska krutost sferne ljuske je:

$$D_s = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (4.166)$$

Uplivni koeficijenti za sfernu ljusku su:

$$\alpha_{11}^s = \frac{\sin^2(\vartheta_0)}{2D_s \beta_s^3}, \quad (4.167)$$

$$\alpha_{12}^s = \alpha_{21}^s = \frac{\sin(\vartheta_0)}{2D_s \beta_s^2}, \quad (4.168)$$

$$\alpha_{22}^s = \frac{1}{D_s \beta_s}. \quad (4.169)$$

Još je potrebno odrediti silu $Q_{r,m}^s$, a ona glasi:

$$Q_{r,m}^s = N_{\vartheta,m}^s \cos(\vartheta_0), \quad (4.170)$$

$$Q_{r,m}^s = 0,6242 \frac{p_0 R_s}{2}. \quad (4.171)$$

Sada su poznate sve vrijednosti potrebne za rješavanje sustava jednačbi. Ako se sustav zapiše kao matrična jednačba i riješi pomoću programskog paketa Matlab dobije se:

$$\begin{bmatrix} (\alpha_{11}^s + \alpha_{11}^{c1}) & (\alpha_{12}^s - \alpha_{12}^{c1}) \\ (\alpha_{21}^s - \alpha_{21}^{c1}) & (\alpha_{22}^s + \alpha_{22}^{c1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{r,m}^{c1} - u_{r,m}^s + \alpha_{11}^s Q_{r,m}^s) \\ (-\alpha_m^s - \alpha_m^{c1} + \alpha_{21}^s Q_{r,m}^s) \end{bmatrix}, \quad (4.172)$$

$$X_3 = 24,2333 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.173)$$

$$X_4 = 352,9750 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}. \quad (4.174)$$

Kada su izračunate vrijednosti poopćenih sila primjenom eksponencijalno-trigonometrijskih funkcija može se prikazati raspodjela različitih radijalnog pomaka i zakreta. Eksponencijalno-trigonometrijske funkcije su:

$$f_1(\xi) = e^{-\xi}(\cos(\xi) + \sin(\xi)), \quad (4.175)$$

$$f_2(\xi) = e^{-\xi} \sin(\xi), \quad (4.176)$$

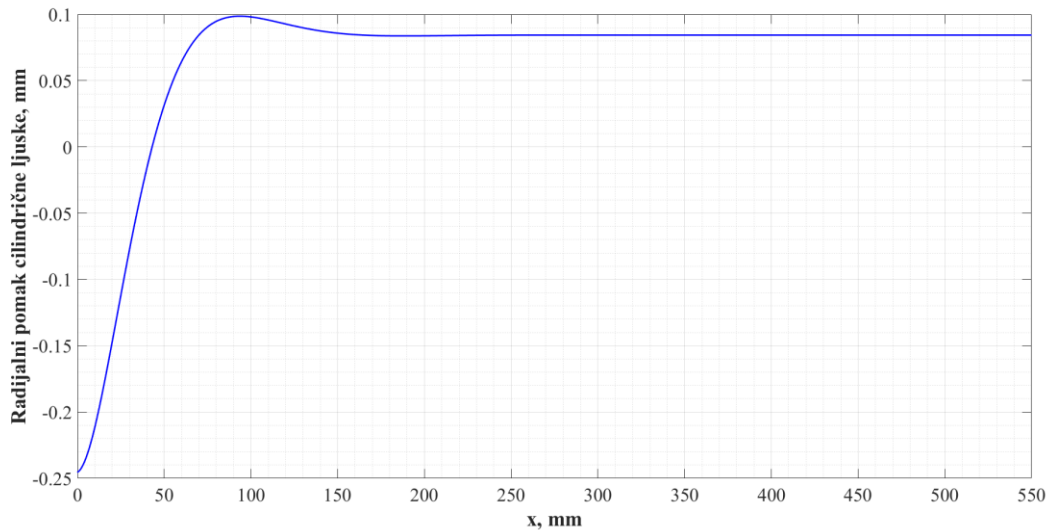
$$f_3(\xi) = e^{-\xi}(\cos(\xi) - \sin(\xi)), \quad (4.177)$$

$$f_4(\xi) = e^{-\xi} \cos(\xi). \quad (4.178)$$

Vrijednost ξ za cilindričnu ljusku je $\xi = \beta_{c1}x$, a za sfernu ljusku $\xi = \beta_s s$. Uzimanjem vrijednosti x i s do polovice duljine cilindrične ljuske odnosno do polovice duljine luka sfere mogu se prikazati raspodjele. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini cilindrične ljuske računa se kao:

$$u_r^{c1} = -\alpha_{11}^{c1} X_3 f_4(\xi) + \alpha_{12}^{c1} X_4 f_3(\xi) + u_{r,m}^{c1}. \quad (4.179)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela radijalnog pomaka veće cilindrične ljuske koja je prikazana na [Slika 51].



Slika 51. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuske sa strane sfere

Raspodjela radijalnog pomaka po duljini luka sferne ljuske računa se kao:

$$u_r^s = \alpha_{11}^s (X_3 - Q_{r,m}^s) f_4(\xi) + \alpha_{12}^s X_4 f_3(\xi) + u_{r,m}^s. \quad (4.180)$$

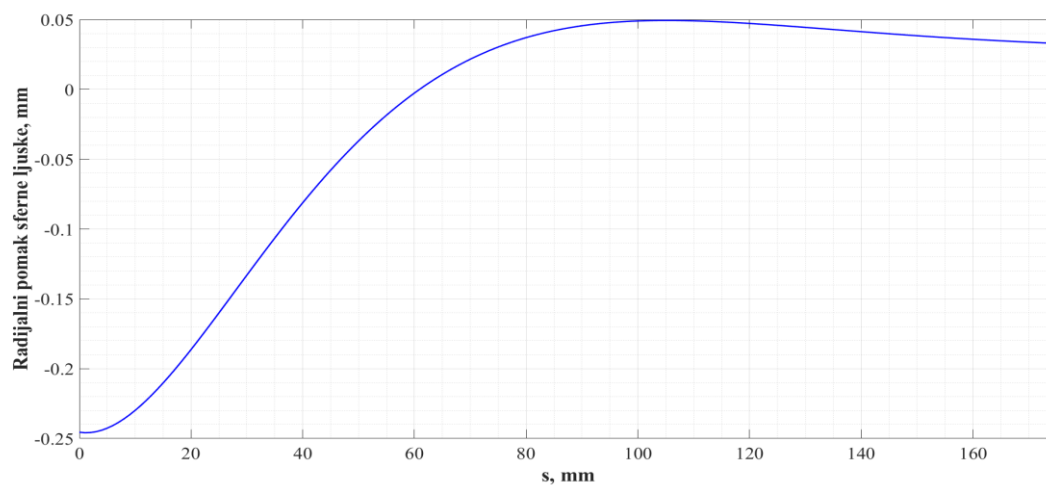
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela radijalnog pomaka sferne ljuske koja je prikazana na [Slika 52]. Raspodjela zakreta po duljini cilindrične ljuske računa se kao:

$$\alpha_{c1} = -\alpha_{21}^{c1} X_3 f_1(\xi) + \alpha_{22}^{c1} X_4 f_4(\xi) + \alpha_m^{c1}. \quad (4.181)$$

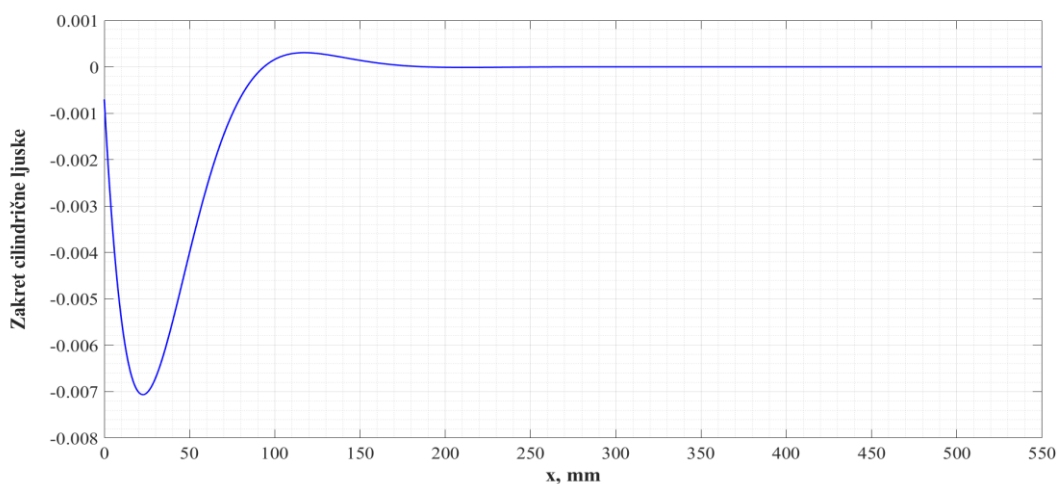
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela zakreta veće cilindrične ljuske koja je prikazana na [Slika 53]. Raspodjela zakreta po duljini luka sferne ljuske računa se kao:

$$\alpha_s = \alpha_{21}^s (X_3 - Q_{r,m}^s) f_1(\xi) + \alpha_{22}^s X_4 f_4(\xi) + \alpha_m^s. \quad (4.182)$$

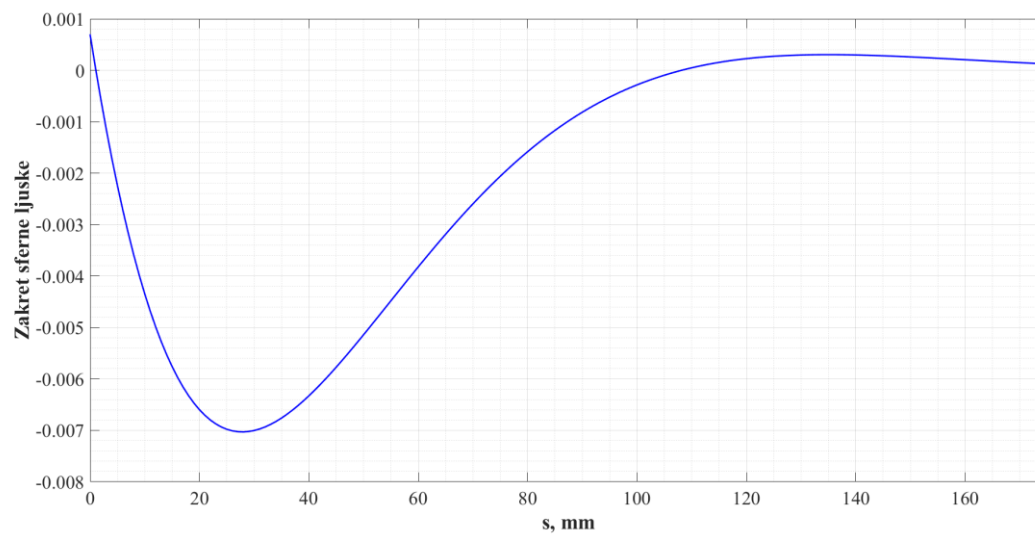
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela zakreta sferne ljuske koja je prikazana na [Slika 54].



Slika 52. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini luka sferne ljuske



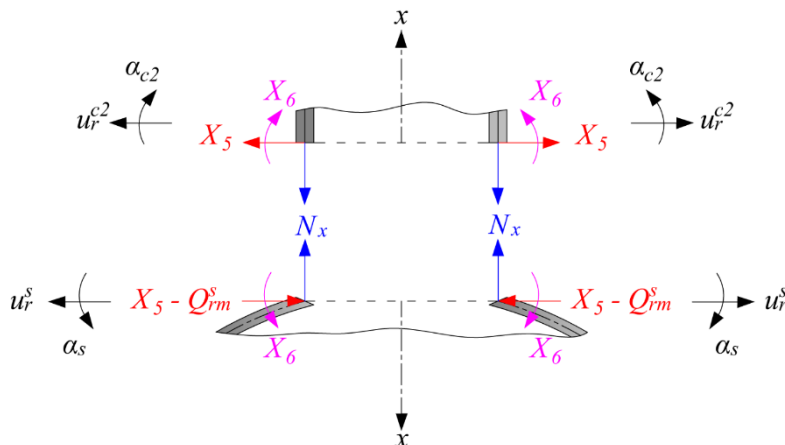
Slika 53. Raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane sfere



Slika 54. Raspodjela zakreta po duljini luka sferne ljuske

4.5.3 Spoj sferne ljuske i manje cilindrične ljuske

Na [Slika 55] prikazan je spoj manje cilindrične ljuske i sferne ljuske oslobođen veza sa ucrtanim poopćenim silama.



Slika 55. Spoj manjeg cilindra i sfere

Da bi se pronašle nepoznate poopćene sile na mjestu spoja sfere i cilindra potrebno je postaviti uvjete kompatibilnosti na mjestu spoja. Uvjeti kompatibilnosti postavljaju se primjenom uplivnih koeficijenata. Uvjeti kompatibilnosti za prikazani spoj su:

$$u_r^s = u_r^{c2}, \quad (4.183)$$

$$\alpha_s = -\alpha_{c2}. \quad (4.184)$$

Radijalni pomak sfere definiran je kao:

$$u_r^s = -\alpha_{11}^s (X_5 - Q_{r,m}^s) + \alpha_{12}^s X_6 + u_{r,m}^s. \quad (4.185)$$

Radijalni pomak manjeg cilindra definiran je kao:

$$u_r^{c2} = \alpha_{11}^{c2} X_5 + \alpha_{12}^{c2} X_6 + u_{r,m}^{c2}. \quad (4.186)$$

Zakret sfere definiran je kao:

$$\alpha_s = -\alpha_{21}^s (X_5 - Q_{r,m}^s) + \alpha_{22}^s X_6 + \alpha_m^s. \quad (4.187)$$

Zakret manjeg cilindra definiran je kao:

$$\alpha_{c2} = \alpha_{21}^{c2} X_5 + \alpha_{22}^{c2} X_6 + \alpha_m^{c2}. \quad (4.188)$$

Kada se izrazi (4.185), (4.186), (4.187) i (4.188) uvrste u izraze (4.183) i (4.184) dobije se sustav jednažbi:

$$-\alpha_{11}^s (X_5 - Q_{r,m}^s) + \alpha_{12}^s X_6 + u_{r,m}^s = \alpha_{11}^{c2} X_5 + \alpha_{12}^{c2} X_6 + u_{r,m}^{c2}, \quad (4.189)$$

$$-\alpha_{21}^s (X_5 - Q_{r,m}^s) + \alpha_{22}^s X_6 + \alpha_m^s = -(\alpha_{21}^{c2} X_5 + \alpha_{22}^{c2} X_6 + \alpha_m^{c2}). \quad (4.190)$$

Da bi se prethodni sustav mogao riješiti potrebno je pronaći membranske pomake $u_{r,m}^s$ i $u_{r,m}^{c2}$, membranske zakrete α_m^s i α_m^{c2} , uplivne koeficijente na mjestu spoja za cilindar i za sferu,

geometrijsko-materijalne karakteristike ljsaka na mjestu spoja te fleksijsku krutost ljsaka. Membranski pomak manjeg cilindra na mjestu spoja određuje se iz izraza:

$$u_{r,m}^{c2} = \frac{R_{c2}}{Eh} (N_{\varphi,m}^{c2} - \nu N_{\vartheta,m}^{c2}). \quad (4.191)$$

Već ranije su izračunate veličine membranske meridijalne i cirkularne sile:

$$N_{\vartheta,m}^{c2} = \frac{p_0 R_{c2}}{2}, \quad (4.192)$$

$$N_{\varphi,m}^{c2} = p_0 R_{c2}. \quad (4.193)$$

Uvrštavanjem izraza (4.192) i (4.193) u izraz (4.191) radijalni membranski pomak manje cilindrične ljsuke na mjestu spoja:

$$u_{r,m}^{c2} = \frac{R_{c2}^2 p_0}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \quad (4.194)$$

Zakret manjeg cilindra određuje se iz izraza:

$$\alpha_m^{c2} = \frac{du_{r,m}^{c2}}{dx}. \quad (4.195)$$

Deriviranjem izraza (4.194) dobije se zakret manjeg cilindra:

$$\alpha_m^{c2} = 0. \quad (4.196)$$

Geometrijsko-materijalna značajka manje cilindrične ljsuke na mjestu spoja je:

$$\beta_{c2} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_{c2}^2 h^2}}. \quad (4.197)$$

Fleksijska krutost manje cilindrične ljsuke je:

$$D_{c2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.198)$$

Uplivni koeficijenti za manju cilindričnu ljsuku su:

$$\alpha_{11}^{c2} = \frac{1}{2D_{c2}\beta_{c2}^3}, \quad (4.199)$$

$$\alpha_{12}^{c2} = \alpha_{21}^{c2} = \frac{1}{2D_{c2}\beta_{c2}^2}, \quad (4.200)$$

$$\alpha_{22}^{c2} = \frac{1}{D_{c2}\beta_{c2}}. \quad (4.201)$$

Sada su poznati svi potrebni podaci za manju cilindričnu ljsuku. Ostaju još podaci za sfernu ljsuku. Radijalni membranski pomak sferne ljsuke na mjestu spoja definiran je kao:

$$u_{r,m}^s = \frac{R_{c2}}{Eh} (N_{\varphi,m}^s - \nu N_{\vartheta,m}^s). \quad (4.202)$$

Da bi se dobile vrijednosti $N_{\varphi,m}^s$ i $N_{\vartheta,m}^s$ na mjestu spoja potrebno je u ranije već izračunate vrijednosti uvrstiti vrijednosti na mjestu spoja. Već ranije su izračunate veličine membranske meridijalne i cirkularne sile:

$$N_{\vartheta,m}^s = \frac{p_0 R_s}{2}, \quad (4.203)$$

$$N_{\varphi,m}^s = \frac{p_0 R_s}{2}. \quad (4.204)$$

Uvrštavanjem izraza (4.203) i (4.204) u izraz (4.202) dobije se radijalni membranski pomak sferne ljuske na mjestu spoja:

$$u_{r,m}^s = \frac{p_0 R_s R_{c2}}{2Eh} (1 - \nu). \quad (4.205)$$

Zakret sferne ljuske određuje se iz izraza:

$$\alpha_m^s = \frac{du_{r,m}^s}{dx}. \quad (4.206)$$

Deriviranjem izraza (4.205) dobije se zakret sferne ljuske:

$$\alpha_m^s = 0. \quad (4.207)$$

Geometrijsko-materijalna značajka sferne ljuske na mjestu spoja je:

$$\beta_s = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)}{R_s^2 h^2}}. \quad (4.208)$$

Fleksijska krutost sferne ljuske je:

$$D_s = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (4.209)$$

Uplivni koeficijenti za sfernu ljusku su:

$$\alpha_{11}^s = \frac{\sin^2(\beta)}{2D_s \beta_s^3}, \quad (4.210)$$

$$\alpha_{12}^s = \alpha_{21}^s = \frac{\sin(\beta)}{2D_s \beta_s^2}, \quad (4.211)$$

$$\alpha_{22}^s = \frac{1}{D_s \beta_s}. \quad (4.212)$$

Još je potrebno odrediti silu $Q_{r,m}^s$, a ona glasi:

$$Q_{r,m}^s = N_{\vartheta,m}^s \cos(\beta), \quad (4.213)$$

$$Q_{r,m}^s = 0,939 \frac{p_0 R_s}{2}. \quad (4.214)$$

Vrijednost kuta $\beta = 20,11^\circ$ određena je uz pomoć modela u SolidWorksu i taj kut je prikazan na [Slika 44]. Sada su poznate sve vrijednosti potrebne za rješavanje sustava jednadžbi. Ako se sustav zapiše kao matrična jednadžba i riješi pomoću programskog paketa Matlab dobije se:

$$\begin{bmatrix} (-\alpha_{11}^s - \alpha_{11}^{c2}) & (\alpha_{12}^s - \alpha_{12}^{c2}) \\ (-\alpha_{21}^s + \alpha_{21}^{c2}) & (\alpha_{22}^s + \alpha_{22}^{c2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{r,m}^{c2} - u_{r,m}^s - \alpha_{11}^s Q_{r,m}^s) \\ (-\alpha_m^s - \alpha_m^{c2} - \alpha_{21}^s Q_{r,m}^s) \end{bmatrix}, \quad (4.215)$$

$$X_5 = 28,0335 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.216)$$

$$X_6 = -277,4802 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}. \quad (4.217)$$

Kada su izračunate vrijednosti poopćenih sila primjenom eksponencijalno-trigonometrijskih funkcija može se prikazati raspodjela različitih radijalnog pomaka i zakreta. Eksponencijalno-trigonometrijske funkcije su:

$$f_1(\xi) = e^{-\xi}(\cos(\xi) + \sin(\xi)), \quad (4.218)$$

$$f_2(\xi) = e^{-\xi} \sin(\xi), \quad (4.219)$$

$$f_3(\xi) = e^{-\xi}(\cos(\xi) - \sin(\xi)), \quad (4.220)$$

$$f_4(\xi) = e^{-\xi} \cos(\xi). \quad (4.221)$$

Vrijednost ξ za cilindričnu ljusku je $\xi = \beta_{c2}x$, a za sfernu ljusku $\xi = \beta_s s$. Uzimanjem vrijednosti x i s do polovice duljine cilindrične ljuske odnosno do polovice duljine luka sfere mogu se prikazati raspodjele. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini cilindrične ljuske računa se kao:

$$u_r^{c2} = \alpha_{11}^{c2} X_5 f_4(\xi) + \alpha_{12}^{c2} X_6 f_3(\xi) + u_{r,m}^{c2}. \quad (4.222)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela radijalnog pomaka manje cilindrične ljuske koja je prikazana na [Slika 56]. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini luka sferne ljuske računa se kao:

$$u_r^s = -\alpha_{11}^s (X_5 - Q_{r,m}^s) f_4(\xi) + \alpha_{12}^s X_6 f_3(\xi) + u_{r,m}^s. \quad (4.223)$$

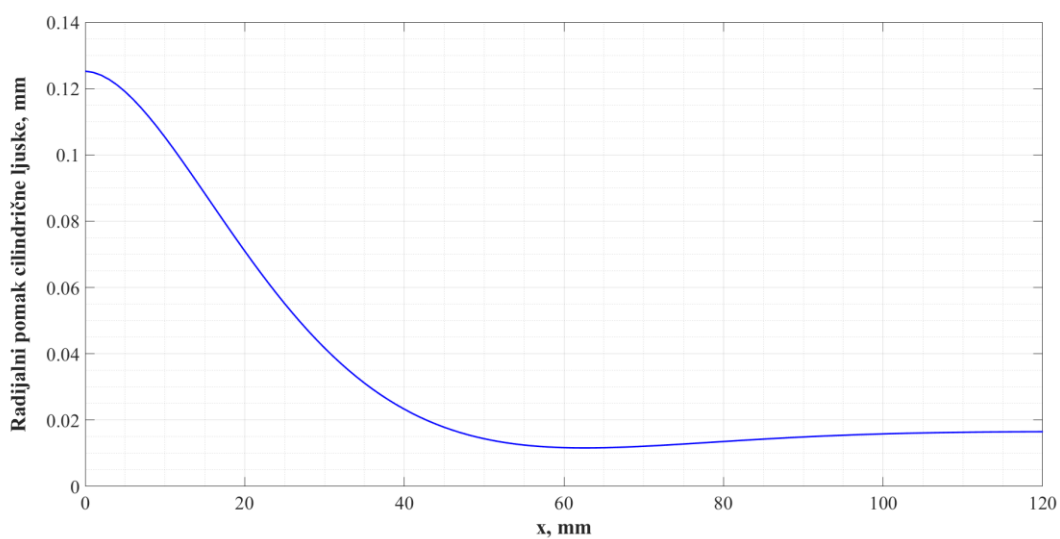
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela radijalnog pomaka sferne ljuske koja je prikazana na [Slika 57]. Raspodjela zakreta po duljini cilindrične ljuske računa se kao:

$$\alpha_{c2} = \alpha_{21}^{c2} X_5 f_1(\xi) + \alpha_{22}^{c2} X_6 f_4(\xi) + \alpha_m^{c2}. \quad (4.224)$$

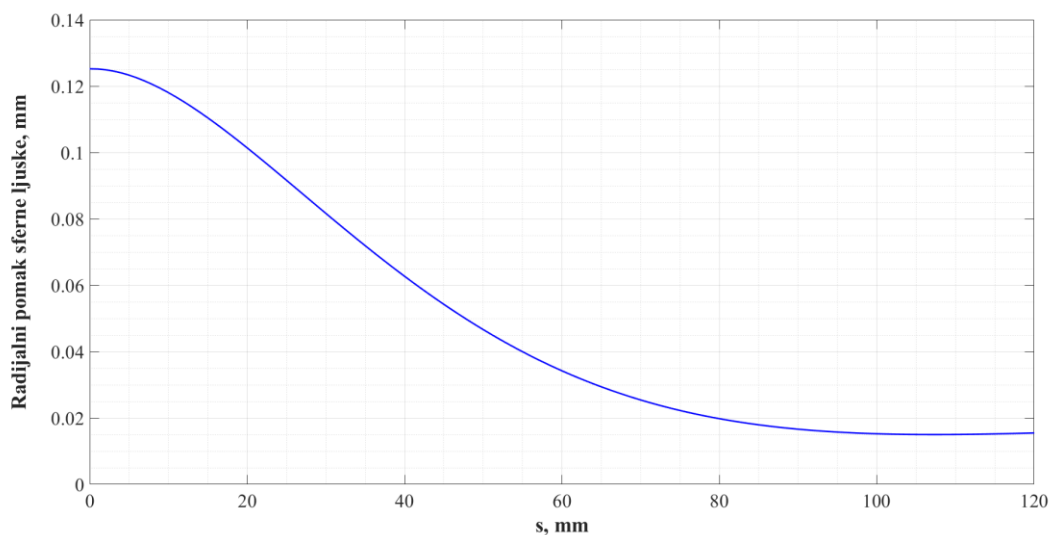
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela zakreta manje cilindrične ljuske koja je prikazana na [Slika 58]. Raspodjela zakreta po duljini luka sferne ljuske računa se kao:

$$\alpha_s = -\alpha_{21}^s (X_5 - Q_{r,m}^s) f_1(\xi) + \alpha_{22}^s X_6 f_4(\xi) + \alpha_m^s. \quad (4.225)$$

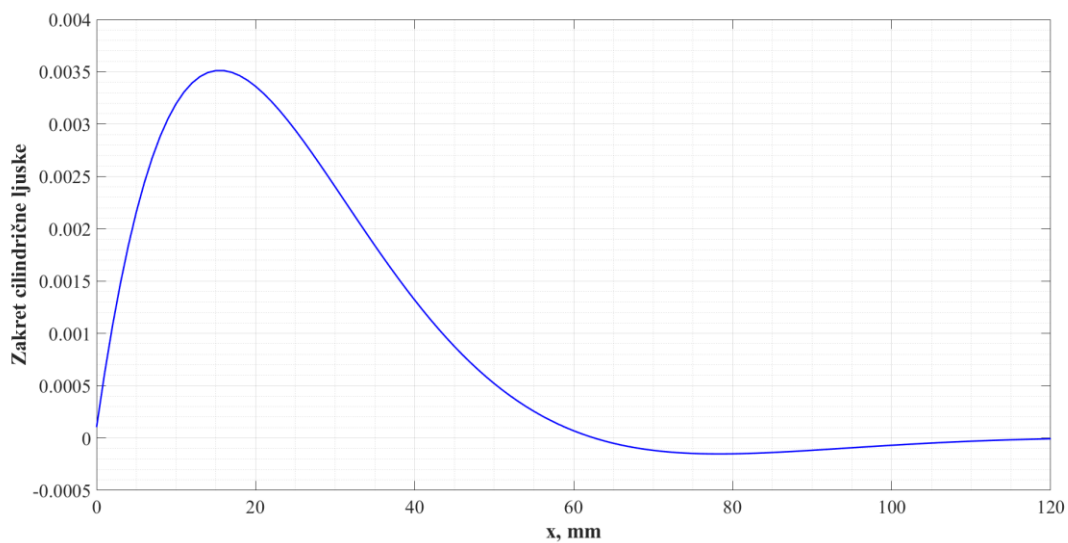
Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela zakreta sferne ljuske koja je prikazana na [Slika 59].



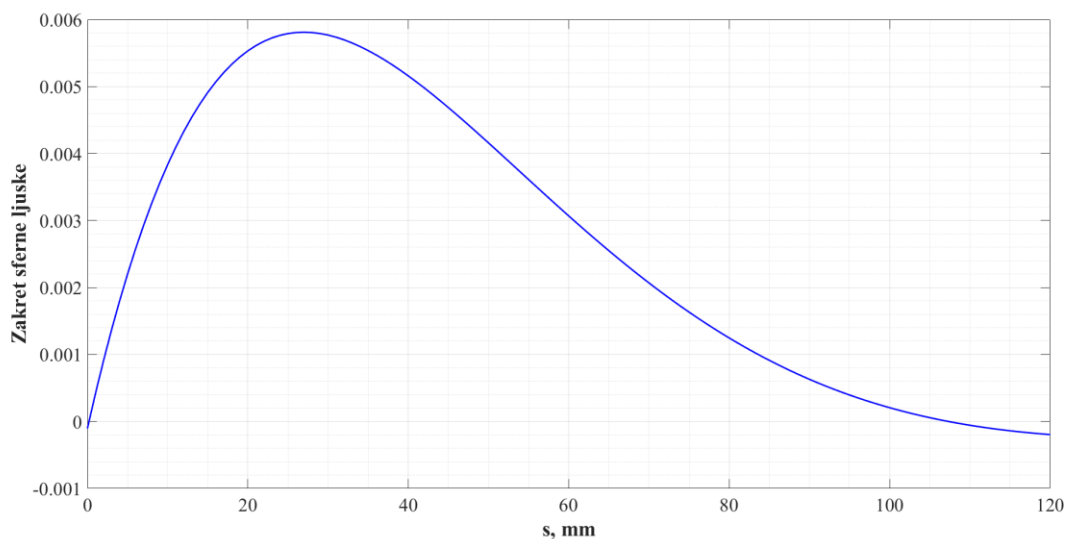
Slika 56. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske



Slika 57. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini luka sferne ljuske



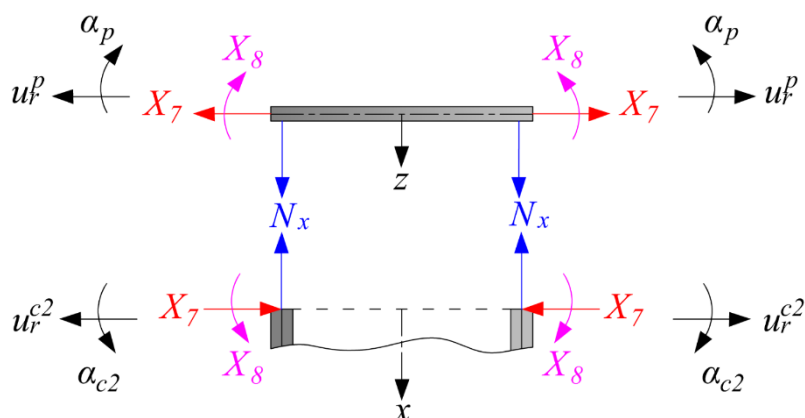
Slika 58. Raspodjela zakreta po duljini manje cilindrične ljuske



Slika 59. Raspodjela zakreta po duljini luka sferne ljuske

4.5.4 Spoj manje cilindrične ljuske i kružne ploče

Na [Slika 60] prikazan je spoj manje cilindrične ljuske i kružne ploče oslobođen veza sa ucrtanim poopćenim silama.



Slika 60. Spoj manjeg cilindra i kružne ploče

Da bi se pronašle nepoznate poopćene sile na mjestu spoja ploče i cilindra potrebno je postaviti uvjete kompatibilnosti na mjestu spoja. Uvjeti kompatibilnosti postavljaju se primjenom uplivnih koeficijenata. Uvjeti kompatibilnosti za prikazani spoj su:

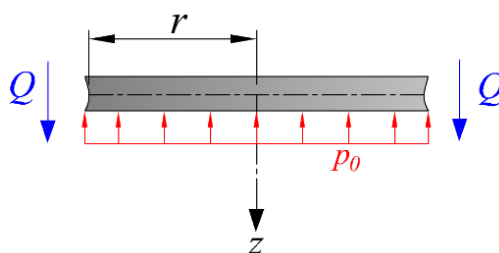
$$u_r^p = u_r^{c2}, \quad (4.226)$$

$$\alpha_p = -\alpha_{c2}. \quad (4.227)$$

Da bi se mogli riješiti prethodno prikazani uvjeti kompatibilnosti potrebno je prvo odrediti radijalni pomak ploče i zakret ploče. Zakret ploče zadan je preko jednadžbe:

$$\alpha_p = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{D_p r} \int \left[r \int Q dr \right] dr. \quad (4.228)$$

Da bi se riješila jednačba (4.228) potrebno je odrediti Q , a Q se određuje iz ravnoteže sila u smjeru osi z ploče, prema [Slika 61].



Slika 61. Presjek ploče

$$\sum F_z = 0, \quad (4.229)$$

$$2Qr\pi - p_0r^2\pi = 0, \quad (4.230)$$

$$Q = \frac{p_0r}{2}. \quad (4.231)$$

Kada je poznat Q može se riješiti jednačba (4.228):

$$\alpha_p = C_1r + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{D_p r} \int \left[r \int \frac{p_0r}{2} dr \right] dr, \quad (4.232)$$

$$\alpha_p = C_1r + \frac{C_2}{r} + \frac{1}{D_p r} \int \left[\frac{p_0r^3}{4} \right] dr, \quad (4.233)$$

$$\alpha_p = C_1r + \frac{C_2}{r} + \frac{p_0r^3}{16D_p}. \quad (4.234)$$

Dobiveni izraz je opće rješenje za zakret kružne ploče. Da bi se dobilo partikularno rješenje potrebno je u taj izraz uvrstiti rubne uvjete ploče. Za ovako opterećenu punu ploču vrijedi:

$$\alpha_p(r = 0) = 0. \quad (4.235)$$

Iz tog rubnog uvjeta slijedi:

$$C_2 = 0. \quad (4.236)$$

Primjenom te vrijednosti dobije se:

$$\alpha_p = C_1r + \frac{p_0r^3}{16D_p}. \quad (4.237)$$

Drugi rubni uvjet za ovu ploču glasi:

$$M_r = X_8. \quad (4.238)$$

Radijalni moment ploče je jednak:

$$M_r = D_p \left(\frac{d\alpha_p}{dr} + \nu \frac{\alpha_p}{r} \right). \quad (4.239)$$

Izjednačavanjem izraza (4.238) i (4.239), rješavanjem istog i uvrštavanjem $r = R_{c2}$ dobije se:

$$\left(C_1 + \frac{3p_0 R_{c2}^2}{16D_p} + \nu \left(C_1 + \frac{p_0 R_{c2}^2}{16D_p} \right) \right) = \frac{X_8}{D_p}, \quad (4.240)$$

$$C_1 = \frac{X_8}{D_p(1+\nu)} - \frac{p_0 R_{c2}^2(3+\nu)}{16D_p(1+\nu)}. \quad (4.241)$$

Kad se dobiveni C_1 vrati u jednadžbu (4.237) i sredi dobije se:

$$\alpha_p = \frac{X_8 r}{D_p(1+\nu)} - \frac{p_0(R_{c2}^2(3+\nu)r - r^3(1+\nu))}{16D_p(1+\nu)}. \quad (4.242)$$

Kad se uvrsti vrijednost $r = R_{c2}$ u zadnji izraz dobije se zakret ploče na mjestu spoja ploče i manjeg cilindra:

$$\alpha_p = \frac{X_8 R_{c2}}{D_p(1+\nu)} - \frac{p_0 R_{c2}^3}{8D_p(1+\nu)}. \quad (4.243)$$

Radijalni pomak ploče definiran je kao:

$$u_r^p = \frac{X_7 R_{c2}}{E h_p} (1 - \nu). \quad (4.244)$$

Radijalni pomak manjeg cilindra definiran je kao:

$$u_r^{c2} = -\alpha_{11}^{c2} X_7 + \alpha_{12}^{c2} X_8 + u_{r,m}^{c2}. \quad (4.245)$$

Zakret manjeg cilindra definiran je kao:

$$\alpha_{c2} = -\alpha_{21}^{c2} X_7 + \alpha_{22}^{c2} X_8 + \alpha_m^{c2}. \quad (4.246)$$

Kada se izrazi (4.243), (4.244), (4.245) i (4.246) uvrste u izraze (4.226) i (4.227) dobije se sustav jednadžbi:

$$\frac{X_7 R_{c2}}{E h_p} (1 - \nu) = -\alpha_{11}^{c2} X_7 + \alpha_{12}^{c2} X_8 + u_{r,m}^{c2}, \quad (4.247)$$

$$\frac{X_8 R_{c2}}{D_p(1+\nu)} - \frac{p_0 R_{c2}^3}{8D_p(1+\nu)} = \alpha_{21}^{c2} X_7 - \alpha_{22}^{c2} X_8 - \alpha_m^{c2}. \quad (4.248)$$

Da bi se prethodni sustav mogao riješiti potrebno je pronaći membranski pomak $u_{r,m}^{c2}$, membranski zakret α_m^{c2} , uplivne koeficijente na mjestu spoja za cilindar, geometrijsko-materijalnu karakteristiku cilindrične ljuske na mjestu spoja te fleksijsku krutost ljuske i ploče. Membranski pomak manjeg cilindra na mjestu spoja određuje se iz izraza:

$$u_{r,m}^{c2} = \frac{R_{c2}}{E h} (N_{\varphi,m}^{c2} - \nu N_{\vartheta,m}^{c2}). \quad (4.249)$$

Već ranije su izračunate veličine membranske meridijalne i cirkularne sile:

$$N_{\theta,m}^{c2} = \frac{p_0 R_{c2}}{2}, \quad (4.250)$$

$$N_{\varphi,m}^{c2} = p_0 R_{c2}. \quad (4.251)$$

Uvrštavanjem izraza (4.250) i (4.251) u izraz (4.249) radijalni membranski pomak manje cilindrične ljuske na mjestu spoja:

$$u_{r,m}^{c2} = \frac{R_{c2}^2 p_0}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \quad (4.252)$$

Zakret manjeg cilindra određuje se iz izraza:

$$\alpha_m^{c2} = \frac{du_{r,m}^{c2}}{dx}. \quad (4.253)$$

Deriviranjem izraza (4.252) dobije se zakret manjeg cilindra:

$$\alpha_m^{c2} = 0. \quad (4.254)$$

Geometrijsko-materijalna značajka manje cilindrične ljuske na mjestu spoja je:

$$\beta_{c2} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_{c2}^2 h^2}}. \quad (4.255)$$

Fleksijska krutost manje cilindrične ljuske je:

$$D_{c2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.256)$$

Fleksijska krutost ploče je:

$$D_p = \frac{Eh_p^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (4.257)$$

Uplivni koeficijenti za manju cilindričnu ljusku su:

$$\alpha_{11}^{c2} = \frac{1}{2D_{c2}\beta_{c2}^3}, \quad (4.258)$$

$$\alpha_{12}^{c2} = \alpha_{21}^{c2} = \frac{1}{2D_{c2}\beta_{c2}^2}, \quad (4.259)$$

$$\alpha_{22}^{c2} = \frac{1}{D_{c2}\beta_{c2}}. \quad (4.260)$$

Sada su poznate sve vrijednosti potrebne za rješavanje sustava jednažbi. Ako se sustav zapiše kao matricna jednažba i riješi pomoću programskog paketa Matlab dobije se:

$$\begin{bmatrix} \left(\alpha_{11}^{c2} + \frac{R_{c2}}{Eh_p}(1-\nu)\right) & (-\alpha_{12}^{c2}) \\ (-\alpha_{21}^{c2}) & \left(\frac{R_{c2}}{D_p(1+\nu)} + \alpha_{22}^{c2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_7 \\ X_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{r,m}^{c2} \\ \left(\frac{p_0 R_{c2}^3}{8D_p(1+\nu)} - \alpha_m^{c2}\right) \end{bmatrix}, \quad (4.261)$$

$$X_7 = 26,8934 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.262)$$

$$X_8 = 500,1835 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}. \quad (4.263)$$

Kada su izračunate vrijednosti poopćenih sila primjenom eksponencijalno-trigonometrijskih funkcija može se prikazati raspodjela različitih radijalnog pomaka i zakreta. Eksponencijalno-trigonometrijske funkcije su:

$$f_1(\xi) = e^{-\xi}(\cos(\xi) + \sin(\xi)), \quad (4.264)$$

$$f_2(\xi) = e^{-\xi} \sin(\xi), \quad (4.265)$$

$$f_3(\xi) = e^{-\xi}(\cos(\xi) - \sin(\xi)), \quad (4.266)$$

$$f_4(\xi) = e^{-\xi} \cos(\xi). \quad (4.267)$$

Raspodjela radijalnog pomaka po duljini cilindrične ljuske računa se kao:

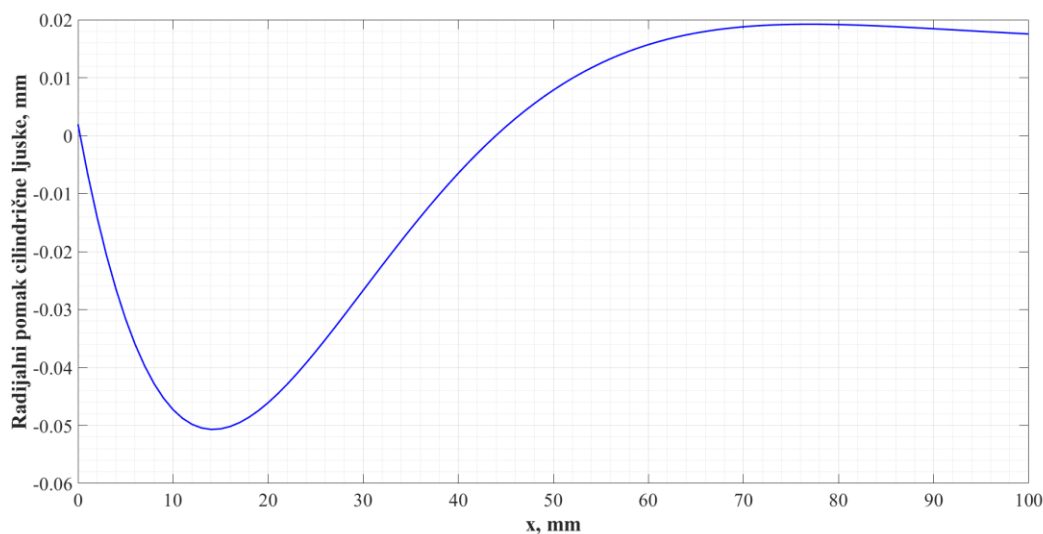
$$u_r^{c2} = -\alpha_{11}^{c2} X_7 f_4(\xi) + \alpha_{12}^{c2} X_8 f_3(\xi) + u_{r,m}^{c2}. \quad (4.268)$$

Vrijednost ξ za cilindričnu ljusku je $\xi = \beta_{c2} x$. Uzimanjem vrijednosti x do polovice duljine cilindrične ljuske mogu se prikazati raspodjele. Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela radijalnog pomaka manje cilindrične ljuske koja je prikazana na [Slika 62].

Raspodjela zakreta po duljini cilindrične ljuske računa se kao:

$$\alpha_{c2} = -\alpha_{21}^{c2} X_7 f_1(\xi) + \alpha_{22}^{c2} X_8 f_4(\xi) + \alpha_m^{c2}. \quad (4.269)$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti dobije se raspodjela zakreta manje cilindrične ljuske koja je prikazana na [Slika 63].

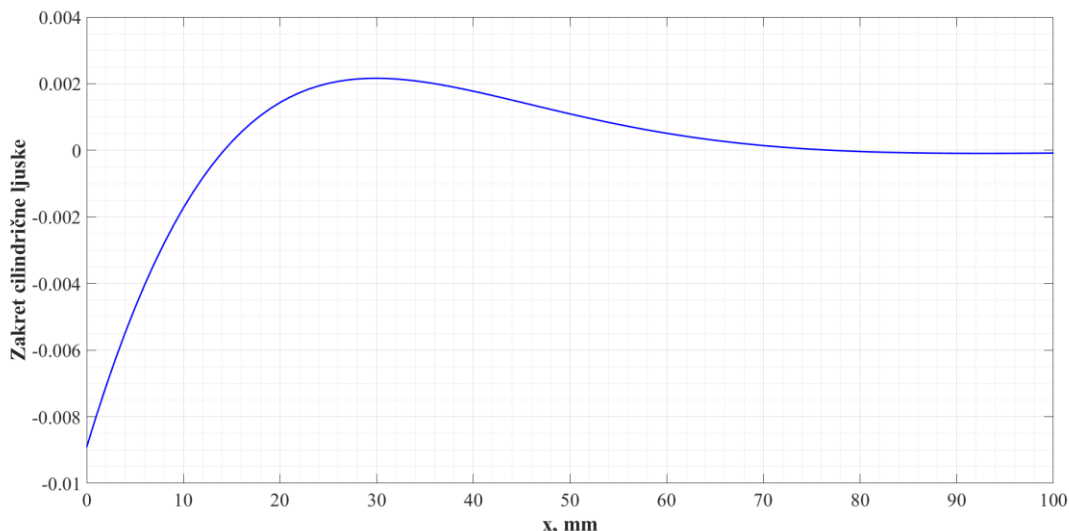


Slika 62. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske

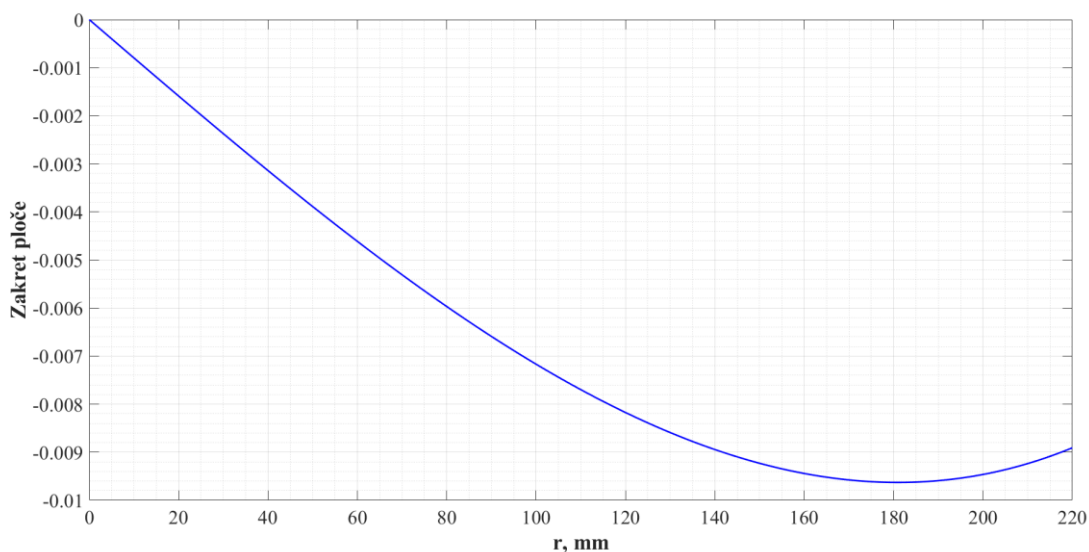
Raspodjela zakreta po polumjeru ploče može se izračunati iz:

$$\alpha_p = \frac{X_8 r}{D_p(1 + \nu)} - \frac{p_0(R_{c2}^2(3 + \nu)r - r^3(1 + \nu))}{16D_p(1 + \nu)}. \quad (4.270)$$

Kada se uvrste vrijednosti dobije se raspodjela zakreta ploče prikazana na [Slika 64].



Slika 63. Raspodjela zakreta po duljini manje cilindrične ljuske



Slika 64. Raspodjela zakreta po radijusu ploče

4.6 Čvrstoća konstrukcije

Da bi se provjerila čvrstoća konstrukcije potrebno je pronaći maksimalno naprezanje koje se može pojaviti unutar ljusaka. Kritična mjesta koja treba provjeriti su mjesta spojeva između ljusaka. Da bi se utvrdila najveća naprezanja provjerit će se svaki spoj i za onaj gdje je naprezanje najveće provjerit će se je li to naprezanje u dozvoljenim granicama. Općenito se maksimalno naprezanje u ljuskama određuje iz izraza:

$$\sigma_{\vartheta\max} = \frac{N_{\vartheta}}{h} \mp \frac{6M_{\vartheta}}{h^2}, \quad (4.271)$$

$$\sigma_{\varphi\max} = \frac{N_{\varphi}}{h} \mp \frac{6M_{\varphi}}{h^2}. \quad (4.272)$$

4.6.1 Spoj konusne ljske i veće cilindrične ljske

Na mjestu spoja određuju se veličine meridijalne i cirkularne sile te meridijalnog i cirkularnog momenta:

$$(N_{\vartheta})_1 = 75,99 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.273)$$

$$(N_{\varphi})_1 = 150,25 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.274)$$

$$(M_{\vartheta})_1 = X_2 = 274,2029 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}, \quad (4.275)$$

$$(M_{\varphi})_1 = \nu M_{\vartheta} = \nu X_2 = 82,2609 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}. \quad (4.276)$$

Uvrštavanjem prethodno dobivenih vrijednosti u izraze (4.271) i (4.272) dobiju se naprezanja:

$$(\sigma_{\vartheta\max})_1 = \frac{(N_{\vartheta})_1}{h} \mp \frac{6(M_{\vartheta})_1}{h^2} \Rightarrow (\sigma_{\vartheta\max})_1 = 208,1319 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (4.277)$$

$$(\sigma_{\varphi\max})_1 = \frac{(N_{\varphi})_1}{h} \mp \frac{6(M_{\varphi})_1}{h^2} \Rightarrow (\sigma_{\varphi\max})_1 = 104,9239 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.278)$$

Prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja slijedi:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_1 = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}, \quad (4.279)$$

$$(\sigma_{\text{ekv}})_1 = 208,1319 - 0, \quad (4.280)$$

$$(\sigma_{\text{ekv}})_1 = 208,1319 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.281)$$

4.6.2 Spoj veće cilindrične ljske i sferne ljske

Na mjestu spoju ovih dvaju ljsaka određuju se veličine meridijalne i cirkularne sile te meridijalnog i cirkularnog momenta:

$$(N_{\vartheta})_2 = 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.282)$$

$$(N_{\varphi})_2 = 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.283)$$

$$(M_{\vartheta})_2 = X_4 = 353,1556 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}, \quad (4.284)$$

$$(M_{\varphi})_2 = \nu M_{\vartheta} = \nu X_4 = 105,9467 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}. \quad (4.285)$$

Uvrštavanjem prethodno dobivenih vrijednosti u izraze (4.271) i (4.272) dobiju se naprezanja:

$$(\sigma_{\vartheta\max})_2 = \frac{(N_{\vartheta})_2}{h} \mp \frac{6(M_{\vartheta})_2}{h^2} \Rightarrow (\sigma_{\vartheta\max})_2 = 262,1037 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (4.286)$$

$$(\sigma_{\varphi\max})_2 = \frac{(N_{\varphi})_2}{h} \mp \frac{6(M_{\varphi})_2}{h^2} \Rightarrow (\sigma_{\varphi\max})_2 = 97,2978 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.287)$$

Prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja slijedi:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_2 = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}, \quad (4.288)$$

$$(\sigma_{\text{ekv}})_2 = 262,1037 - 0, \quad (4.289)$$

$$(\sigma_{\text{ekv}})_2 = 262,1037 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.290)$$

4.6.3 Spoj sferne ljske i manje cilindrične ljske

Na mjestu svoju ovih dvaju ljsaka određuju se veličine meridijalne i cirkularne sile te meridijalnog i cirkularnog momenta:

$$(N_{\vartheta})_3 = 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.291)$$

$$(N_{\varphi})_3 = 80 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.292)$$

$$(M_{\vartheta})_3 = X_6 = -277,4802 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}, \quad (4.293)$$

$$(M_{\varphi})_3 = \nu M_{\vartheta} = \nu X_6 = -83,2441 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}. \quad (4.294)$$

Uvrštavanjem prethodno dobivenih vrijednosti u izraze (4.271) i (4.272) dobiju se naprezanja:

$$(\sigma_{\vartheta\max})_3 = \frac{(N_{\vartheta})_3}{h} \mp \frac{6(M_{\vartheta})_3}{h^2} \Rightarrow (\sigma_{\vartheta\max})_3 = 211,6535 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (4.295)$$

$$(\sigma_{\varphi\max})_3 = \frac{(N_{\varphi})_3}{h} \mp \frac{6(M_{\varphi})_3}{h^2} \Rightarrow (\sigma_{\varphi\max})_3 = 82,1627 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.296)$$

Prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja slijedi:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_3 = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}, \quad (4.297)$$

$$(\sigma_{\text{ekv}})_3 = 211,6535 - 0, \quad (4.298)$$

$$(\sigma_{\text{ekv}})_3 = 211,6535 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.299)$$

4.6.4 Spoj manje cilindrične ljske i kružne ploče

Na mjestu svoju ovih dvaju ljsaka određuju se veličine meridijalne i cirkularne sile te meridijalnog i cirkularnog momenta:

$$(N_{\vartheta})_4 = 27,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.300)$$

$$(N_{\varphi})_4 = 55 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.301)$$

$$(M_{\vartheta})_4 = X_8 = 500,1835 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}, \quad (4.302)$$

$$(M_{\varphi})_4 = \nu M_{\vartheta} = \nu X_8 = 150,0551 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}. \quad (4.303)$$

Uvrštavanjem prethodno dobivenih vrijednosti u izraze (4.271) i (4.272) dobiju se naprezanja:

$$(\sigma_{\vartheta\text{max}})_4 = \frac{(N_{\vartheta})_4}{h} \mp \frac{6(M_{\vartheta})_4}{h^2} \Rightarrow (\sigma_{\vartheta\text{max}})_4 = 342,6223 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (4.304)$$

$$(\sigma_{\varphi\text{max}})_4 = \frac{(N_{\varphi})_4}{h} \mp \frac{6(M_{\varphi})_4}{h^2} \Rightarrow (\sigma_{\varphi\text{max}})_4 = 118,3367 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.305)$$

Prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja slijedi:

$$(\sigma_{\text{ekv}})_4 = \sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}, \quad (4.306)$$

$$(\sigma_{\text{ekv}})_4 = 342,6223 - 0, \quad (4.307)$$

$$(\sigma_{\text{ekv}})_4 = 342,6223 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.308)$$

Može se vidjeti da se najveće naprezanje javlja na mjestu spoja veće cilindrične ljuske i sferne ljuske, pa se za to mjesto provjerava čvrstoća. Čvrstoća se provjerava u odnosu na granicu elastičnosti odabranog materijala, koja iznosi [15]:

$$R_e = 420 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.309)$$

Kako je na ovoj konstrukciji najveće naprezanje jednako:

$$\sigma_{\text{max}} = 342,6223 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.310)$$

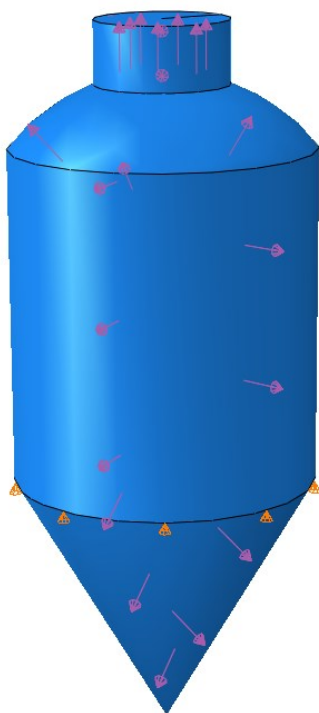
, čvrstoća zadovoljava i to sa faktorom sigurnosti:

$$S = \frac{R_e}{\sigma_{\text{max}}} \Rightarrow S = 1,2258. \quad (4.311)$$

5 NUMERIČKA ANALIZA

5.1 Postavke analize

Da bi se provela numerička analiza u programskom paketu Abaqus® prvo je potrebno izraditi model. Kako su dijelovi konstrukcije ljuske i ploča geometrijski model se može izraditi kao trodimenzijska deformabilna ljuska. Da bi izrađeni geometrijski model dobio svojstva potrebna za analizu, dodjeljuju mu se materijal i presjek. Za materijal su dodani modul elastičnosti i Poissonov faktor. Također, dodana su dva presjeka, jedan za kružnu ploču i jedan za ostatak spremnika. Razlika između tih dvaju presjeka je u debljini stijenke ljuske. Za kružnu ploču je dodan 10 mm, a za ostatak 3 mm. Za tako dobiveni model postavljen je statički korak, te su mu dodani rubni uvjeti i opterećenja. Za rubni uvjet je postavljeno uklještenje na mjestu spoja konusa i većeg cilindra, a za opterećenja su dodani konstantni tlak po cijeloj unutrašnjoj površini spremnika te hidrostatski tlak uzrokovan stupcem tekućine do visine maksimalnog volumena tekućine. Na [Slika 65] prikazan je izrađeni model sa dodanim rubnim uvjetima i opterećenjem:



Slika 65. Model spremnika u Abaqusu sa dodanim rubnim uvjetima i opterećenjem

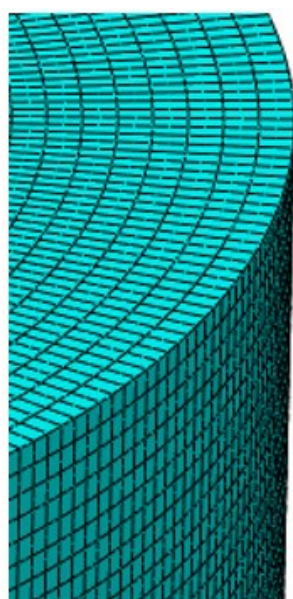
Zbog kompleksnosti geometrije mreža konačnih elemenata je izrađena kombinacijom kvadratnih četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata (S8R) i kvadratnih trokutastih ljuskastih konačnih elemenata (STRI65). Ukupno je mreža načinjena od 127190 konačnih

elemenata, od čega je 126546 konačnih elemenata tipa S8R, a 644 konačna elementa tipa STRI65. Na [Slika 66] prikazan je model spremnika sa dodanom mrežom konačnih elemenata.

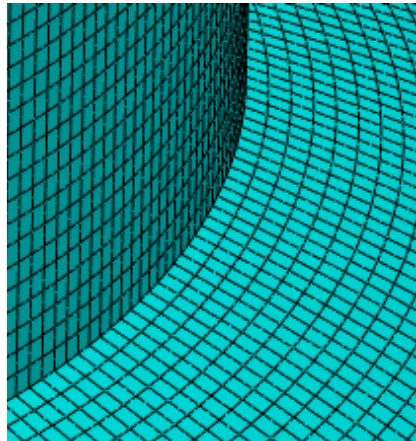


Slika 66. Model spremnika sa definiranom mrežom konačnih elemenata

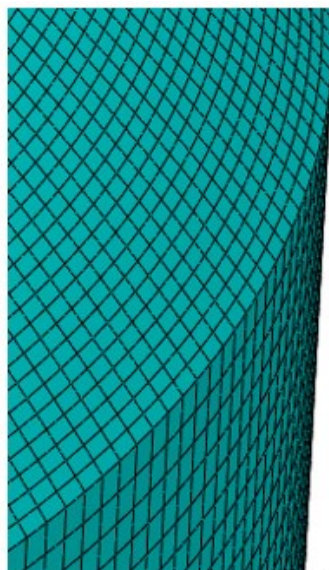
Dalje su redom za detalje A, B, C i D prema [Slika 66] prikazane definirane gustoće mreže na [Slika 67], [Slika 68], [Slika 69] i [Slika 70].



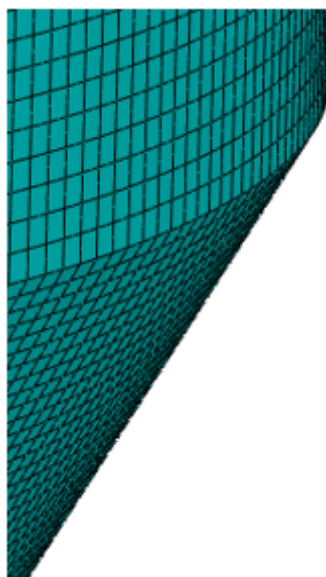
Slika 67. Gustoća mreže za detalj A



Slika 68. Gustoća mreže za detalj B



Slika 69. Gustoća mreže za detalj C

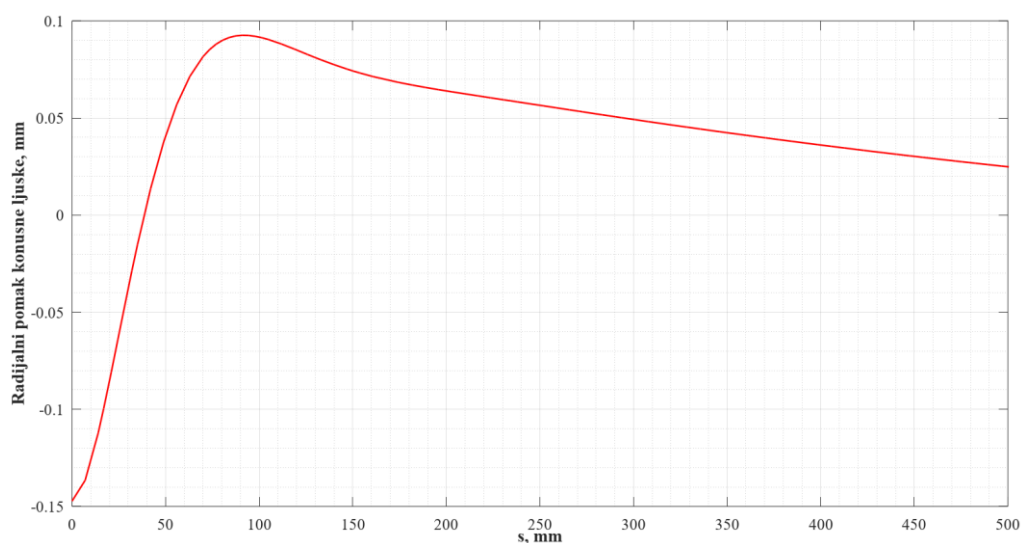


Slika 70. Gustoća mreže za detalj D

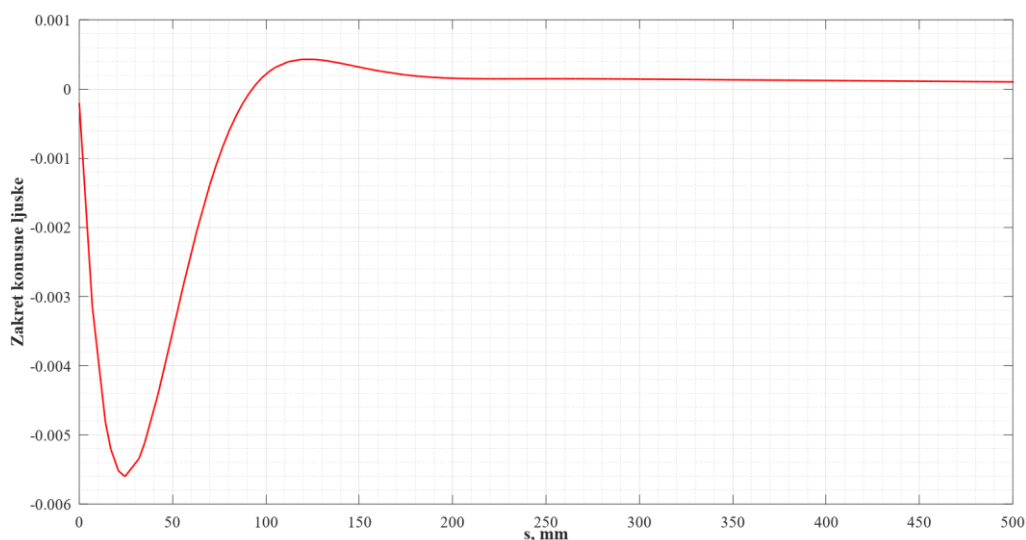
5.2 Rezultati analize

5.2.1 Raspodjele radijalnih pomaka i zakreta

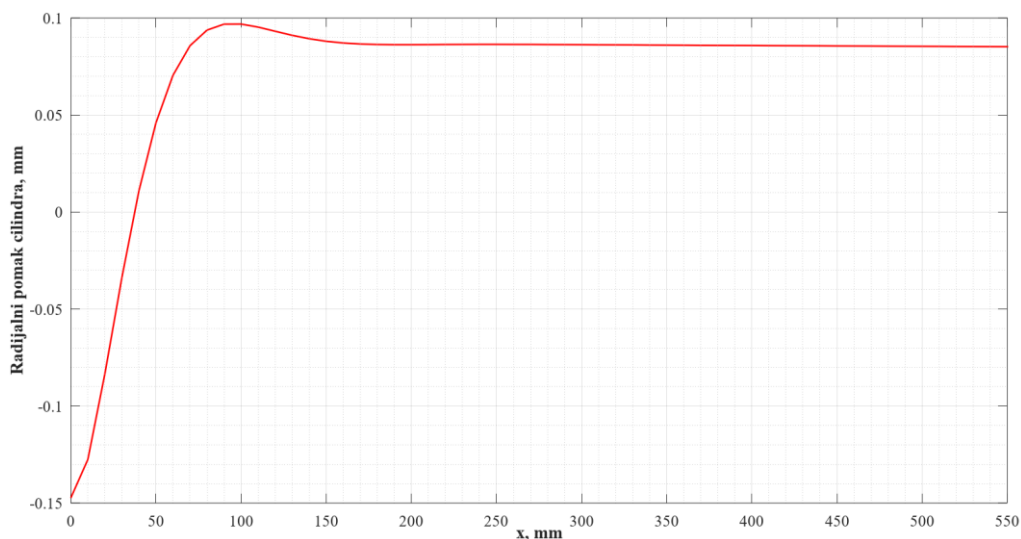
Na [Slika 71] prikazana je raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice konusne ljuske, raspodjela zakreta po duljini izvodnice konusne ljuske prikazana je na [Slika 72]. Radijalni pomak po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusne ljuske prikazana je na [Slika 73], a na [Slika 74] je prikazana raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusne ljuske.



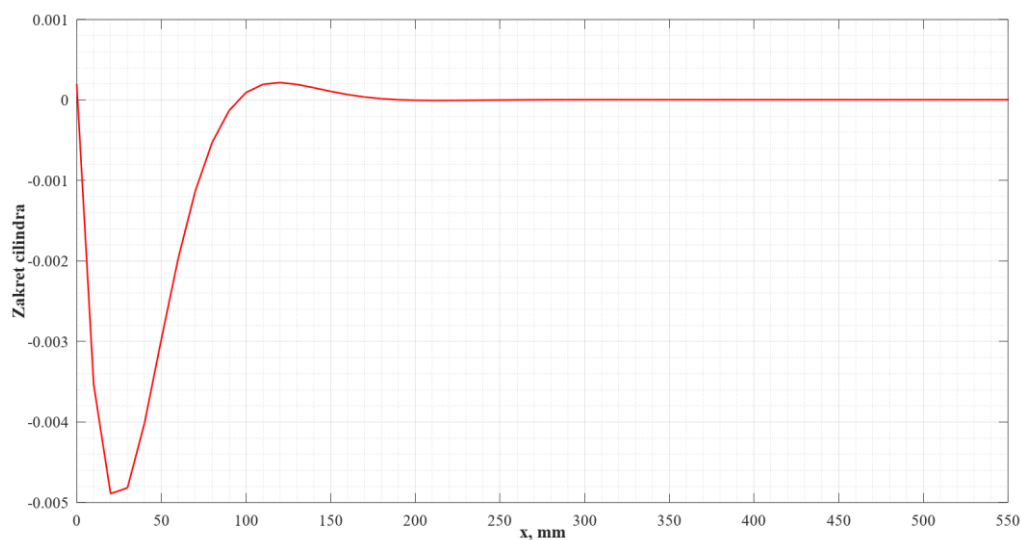
Slika 71. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice konusne ljuske



Slika 72. Raspodjela zakreta po duljini izvodnice konusne ljuske

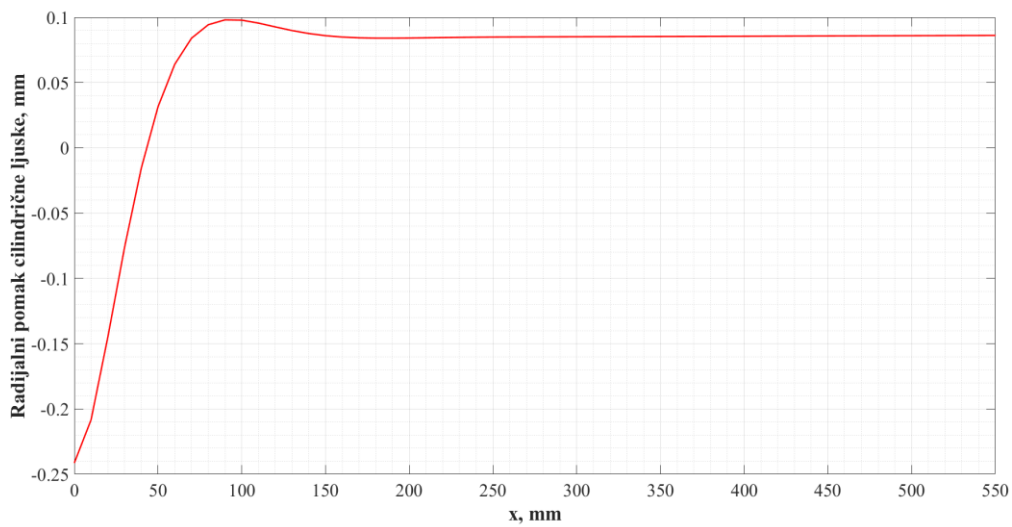


Slika 73. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusne ljuske

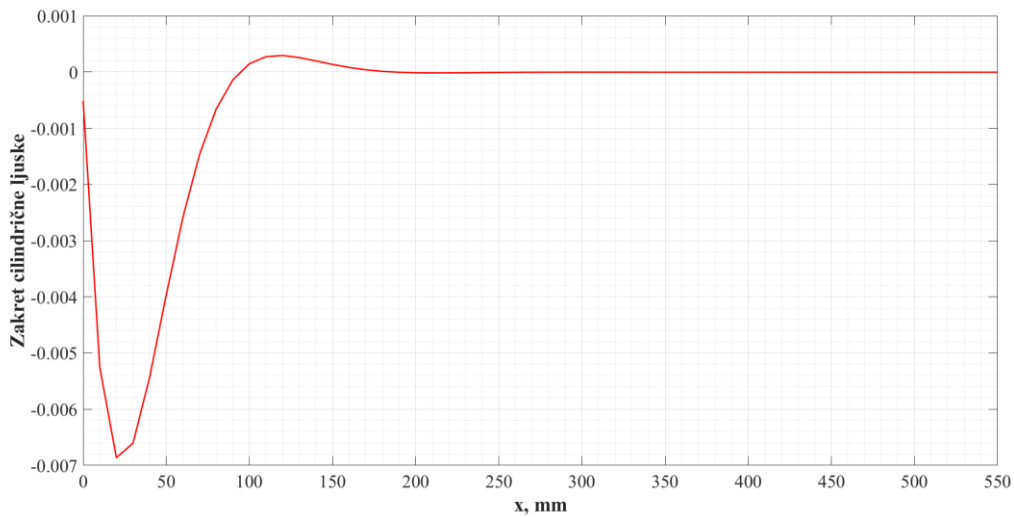


Slika 74. Raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane konusne ljuske

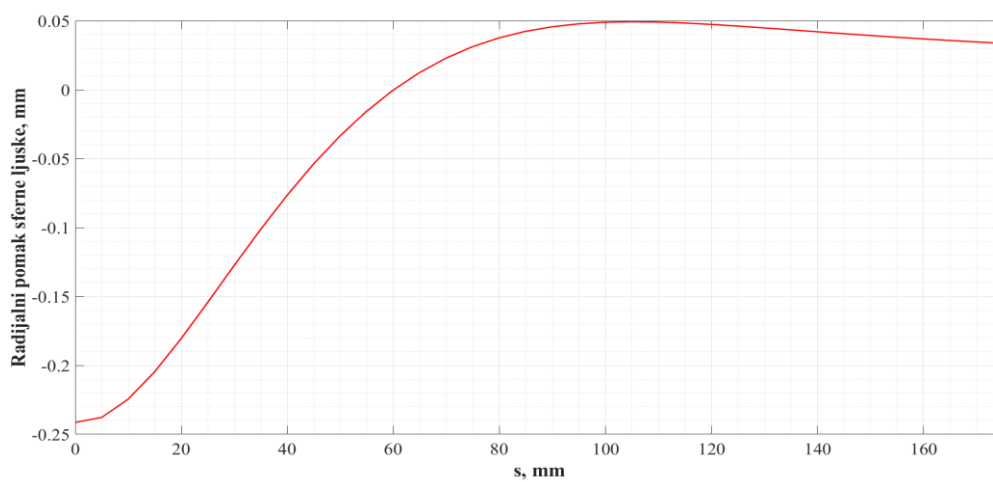
Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske prikazana je na [Slika 75], a na [Slika 76] je prikazana je raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske. Radijalni pomak po duljini izvodnice sferne ljuske sa strane veće cilindrične ljuske prikazan je na [Slika 77], dok je raspodjela zakreta po duljini izvodnice sferne ljuske sa strane veće cilindrične ljuske prikazana na [Slika 78]. Za sfernu ljusku sa strane manje cilindrične ljuske raspodjela radijalnog pomaka dana je na [Slika 79], dok je zakret po duljini izvodnice za isti dio sferne ljuske prikazan na [Slika 80].



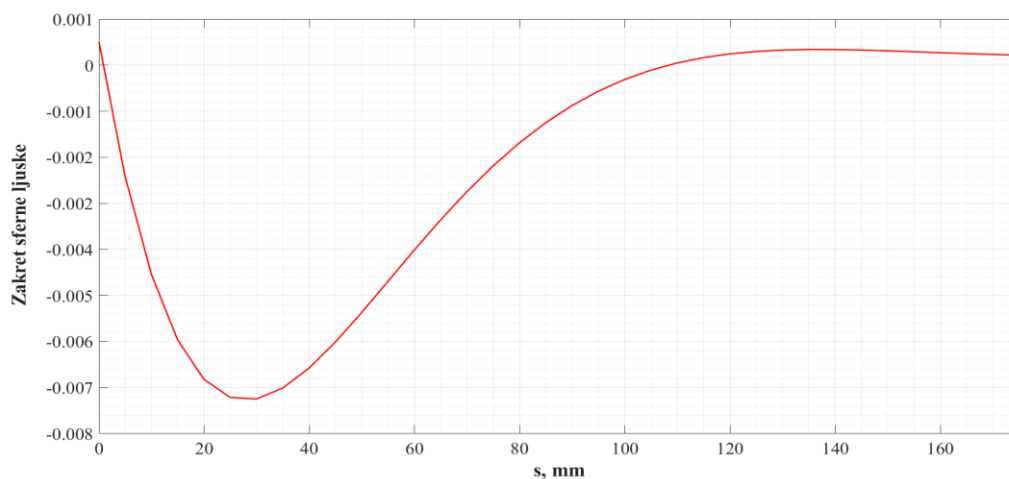
Slika 75. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini veće cilindrične ljuške sa strane sferne ljuške



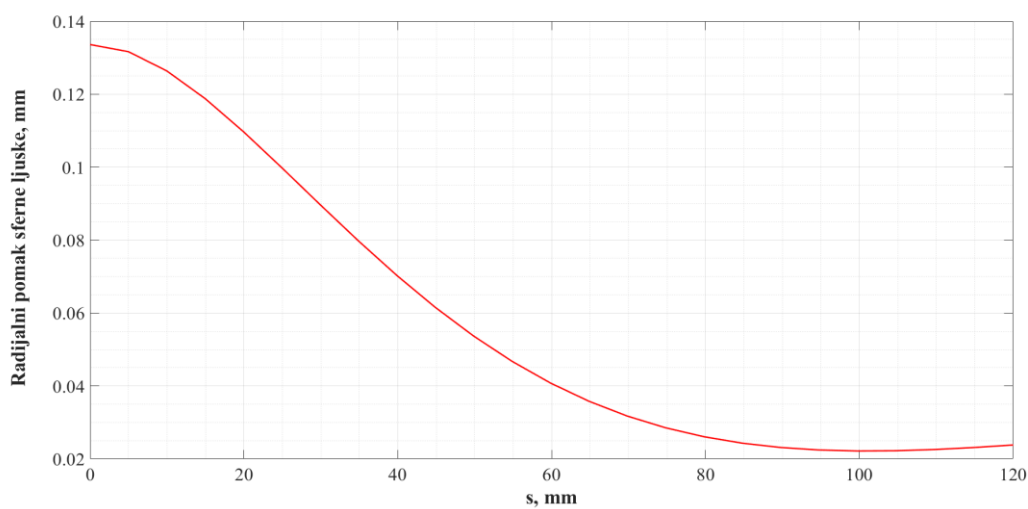
Slika 76. Raspodjela zakreta po duljini veće cilindrične ljuške sa strane sferne ljuške



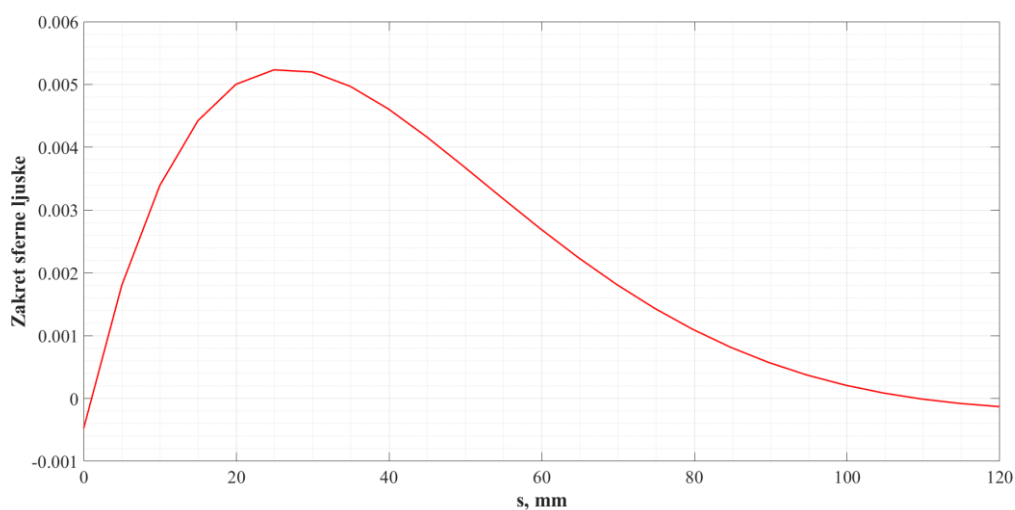
Slika 77. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice sferne ljuške sa strane veće cilindrične ljuške



Slika 78. Raspodjela zakreta po duljini izvodnice sferne ljuške sa strane veće cilindrične ljuške

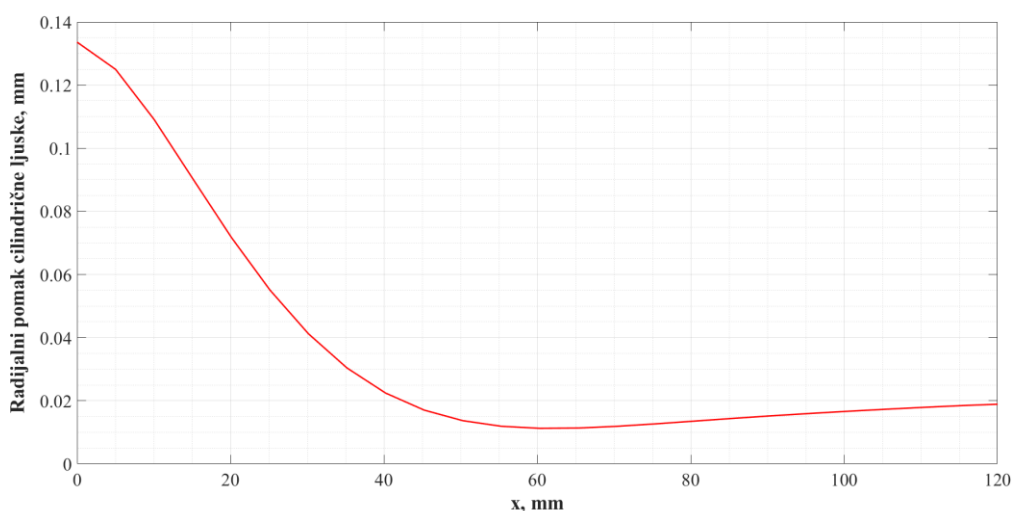


Slika 79. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini izvodnice sferne ljuške sa strane manje cilindrične ljuške

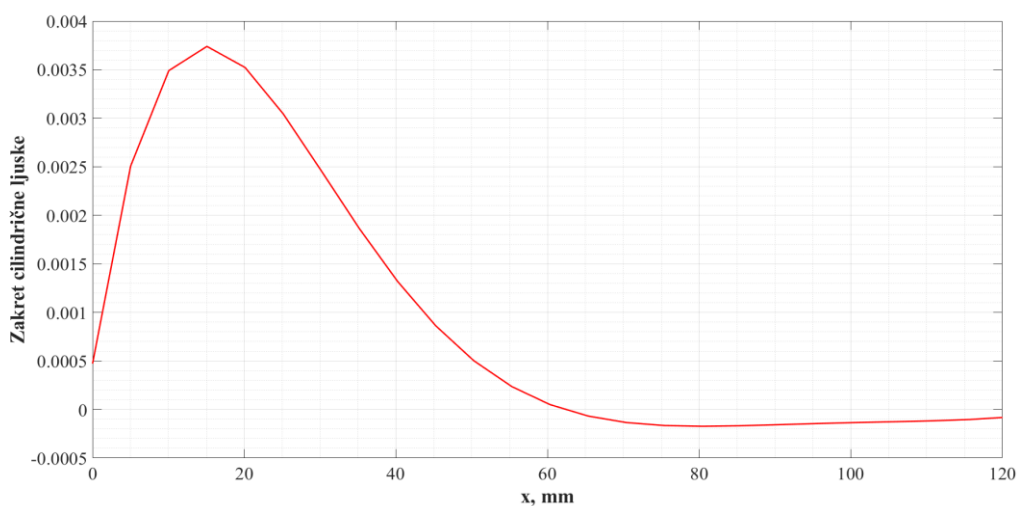


Slika 80. Raspodjela zakreta po duljini izvodnice sferne ljuške sa strane manje cilindrične ljuške

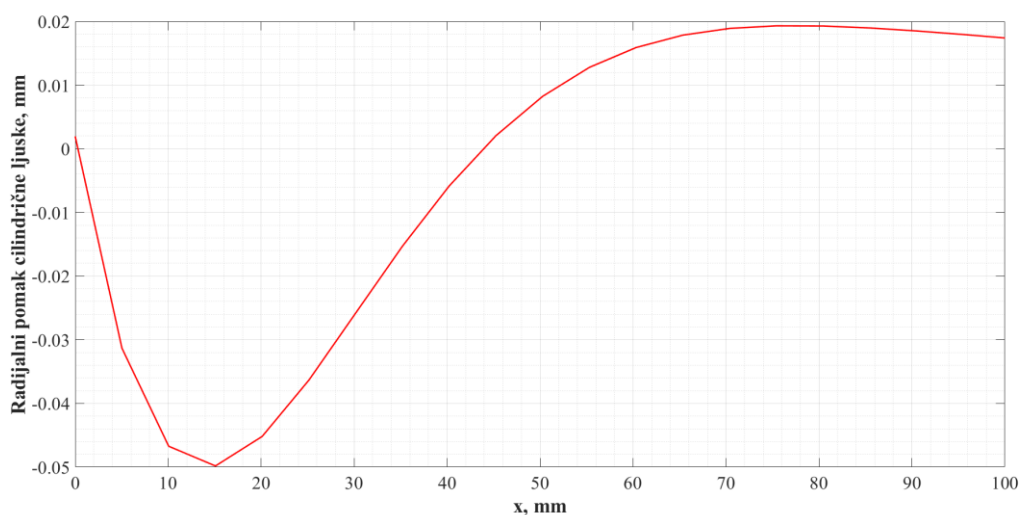
Na [Slika 81] prikazana je raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske, dok je raspodjela zakreta po duljini istog dijela manje cilindrične ljuske prikazana na [Slika 82]. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske sa strane kružne ploče prikazana je na [Slika 83], a zakreta tog dijela manje cilindrične ljuske dan je na [Slika 84]. Na [Slika 85] prikazana je raspodjela zakreta po duljini polumjera kružne ploče.



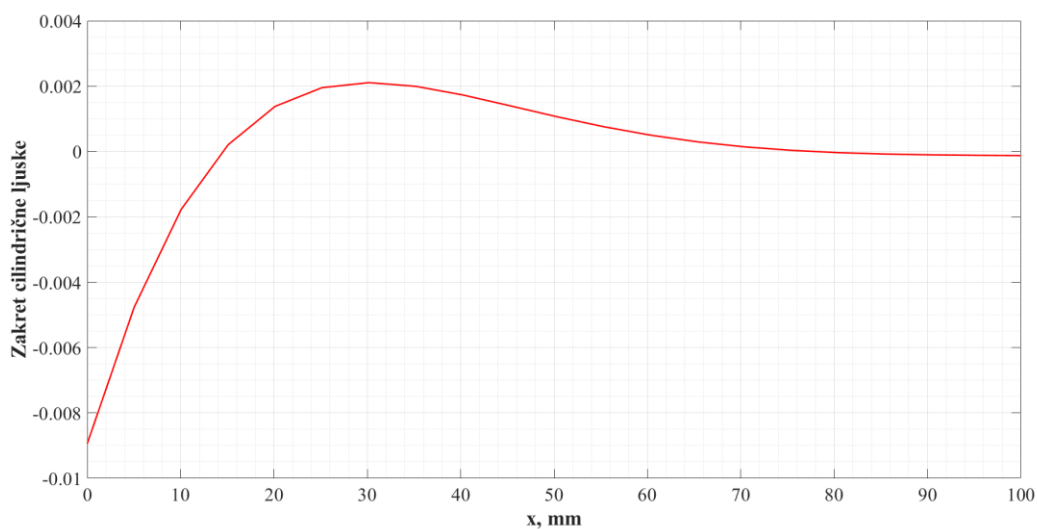
Slika 81. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske



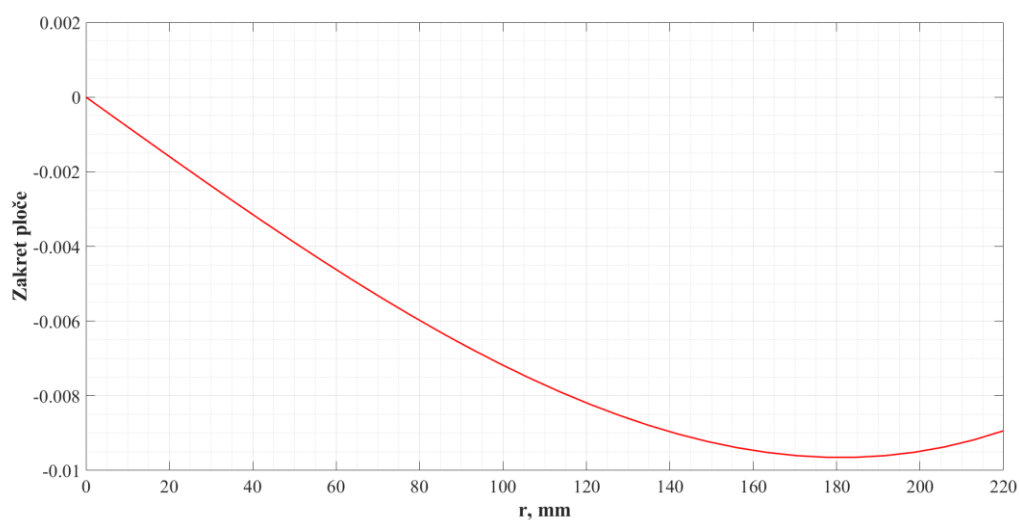
Slika 82. Raspodjela zakreta po duljini manje cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske



Slika 83. Raspodjela radijalnog pomaka po duljini manje cilindrične ljuske sa strane kružne ploče



Slika 84. Raspodjela zakreta po duljini manje cilindrične ljuske sa strane kružne ploče



Slika 85. Raspodjela zakreta po duljini polumjera kružne ploče

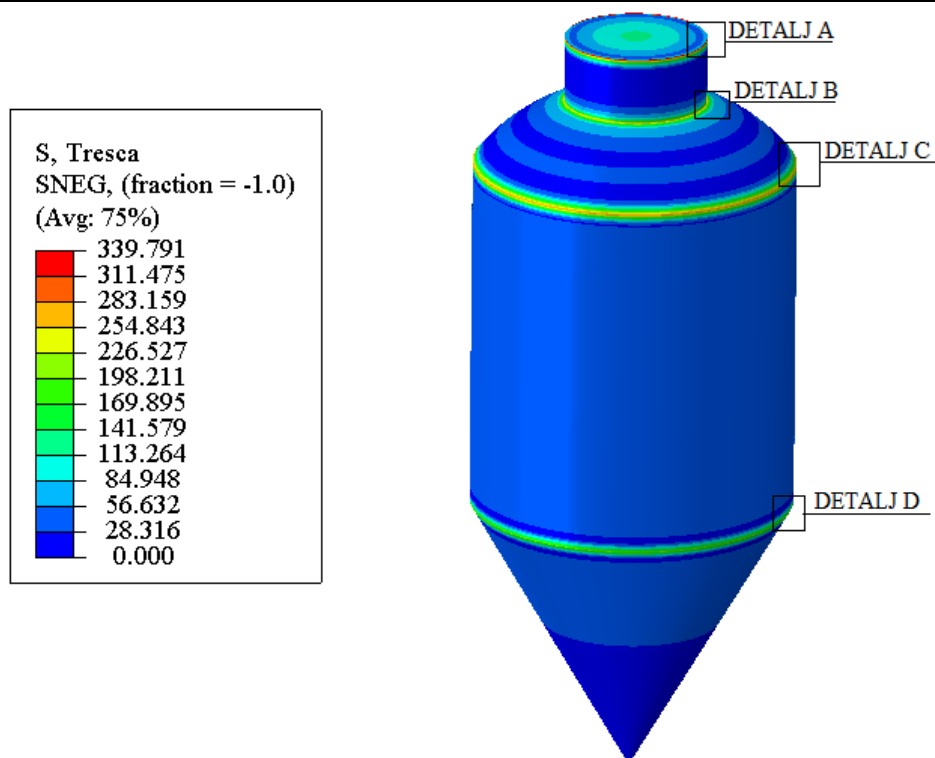
5.2.2 Naprezanja na mjestima spojeva

Na [Slika 86] prikazana su ekvivalentna naprezanja, u N/mm^2 , prema Trescinoj teoriji čvrstoće na cijelom spremniku sa ucrtanim detaljima. Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće na mjestima spojeva dobivena u Abaqusu prikazana su u [Tablica 4]. Prema dobivenim podacima može se vidjeti da je najveće naprezanje na mjestu poja kružne ploče i manje cilindrične ljuske, te je ono vrlo blisko rješenju dobivenom analitičkim putem. Ako se to naprezanje usporedi sa granicom elastičnosti materijala kao i u analitičkom rješenju dobije se da čvrstoća zadovoljava i to sa faktorom sigurnosti:

$$S_{\text{num}} = \frac{R_e}{(\sigma_{\text{max}})_{\text{num}}} \Rightarrow S_{\text{num}} = 1,2361. \quad (5.1)$$

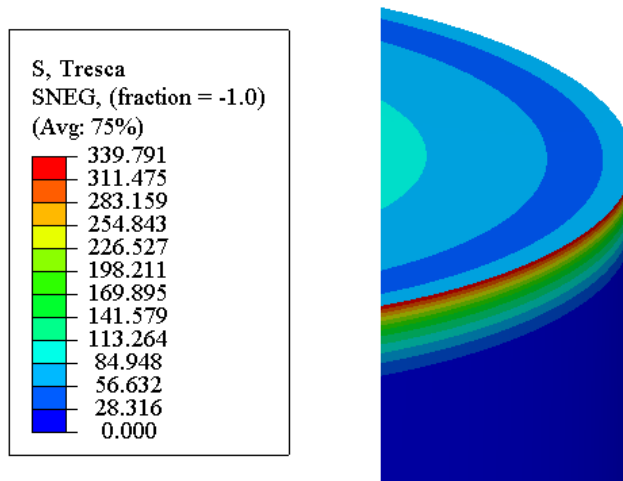
Tablica 4. Ekvivalentna naprezanja na mjestima spojeva u Abaqusu

EKVIVALENTNA NAPREZANJA NA MJESTIMA SPOJEVA, $\sigma_{\text{ekv}}, \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	
SPOJ KONUSA I CILINDRA	208,1
SPOJ VEĆEG CILINDRA I SFERE	280,7
SPOJ SFERE I MANJEG CILINDRA	249,6
SPOJ MANJEG CILINDRA I KRUŽNE PLOČE	339,8

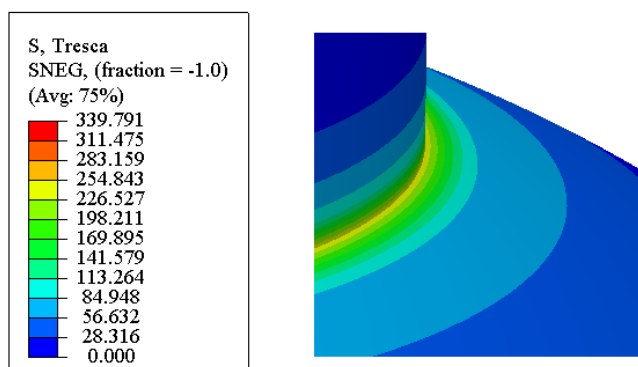


Slika 86. Ekvivalentna naprezanja na cijelom spremniku prema Trescinoj teoriji čvrstoće

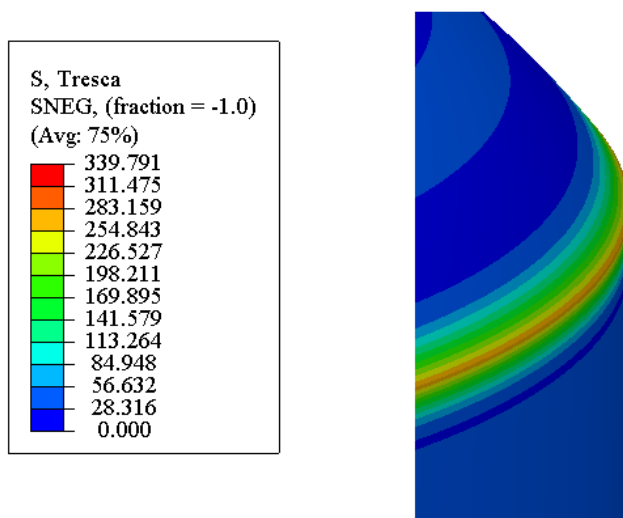
Na sljedećim slikama prikazana su ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalje prikazane na [Slika 86]. [Slika 87] prikazuje naprezanja za detalj A. Naprezanja na detalju B prikazana su na [Slika 88]. Na [Slika 89] prikazana su naprezanja na detalju C. Naprezanja za detalj D prikazana su na [Slika 90]. Sva naprezanja na slikama su u N/mm^2 .



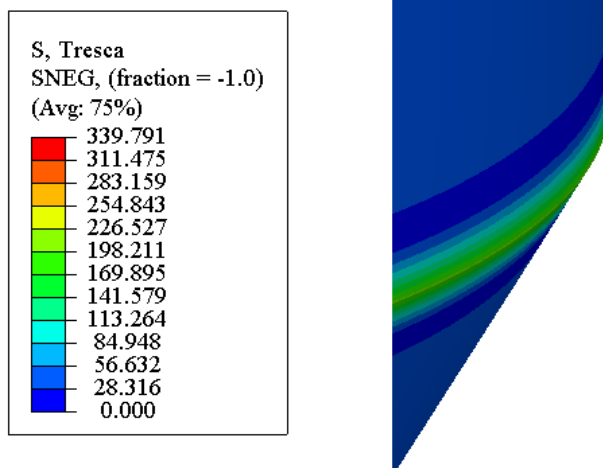
Slika 87. Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalj A



Slika 88. Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalj B

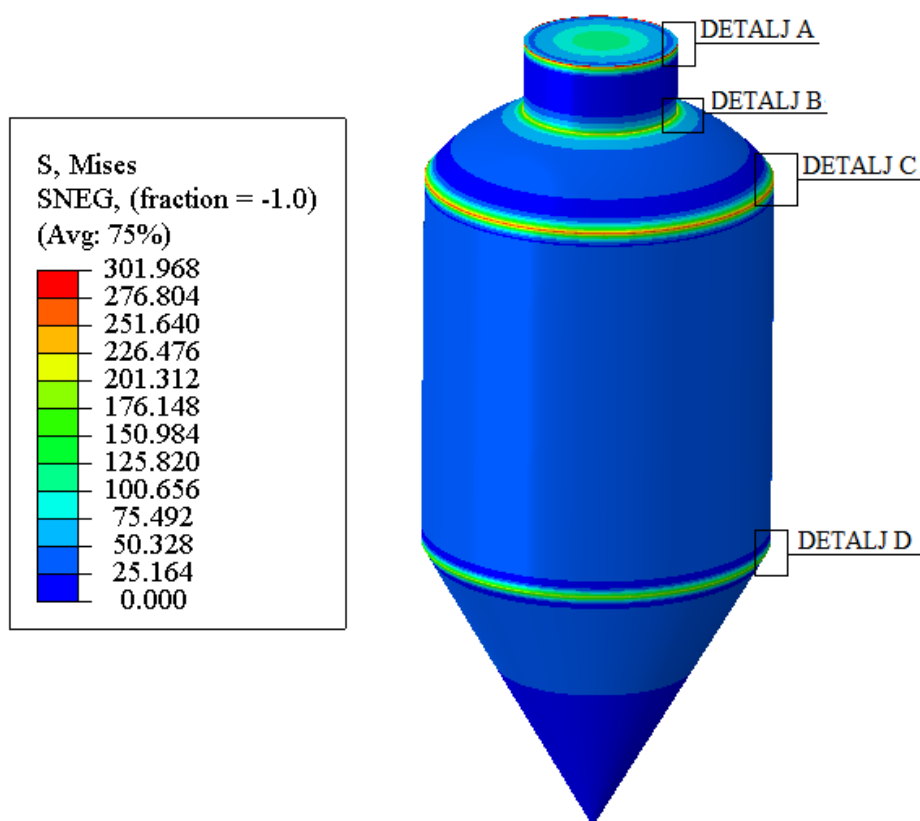


Slika 89. Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalj C



Slika 90. Ekvivalentna naprezanja prema Trescinoj teoriji čvrstoće za detalj D

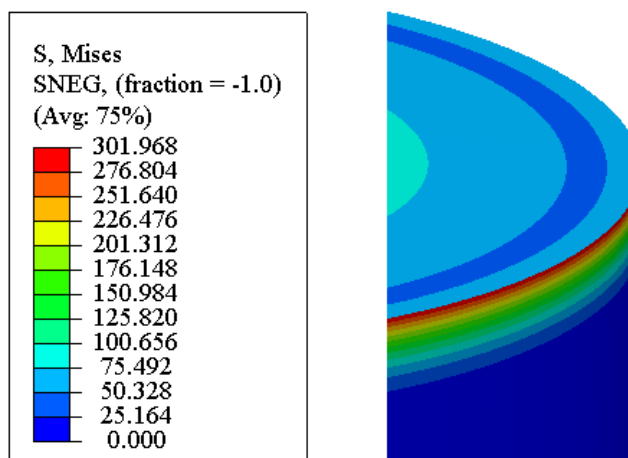
Na [Slika 91] prikazana su ekvivalentna naprezanja, u N/mm², prema von Misesovoj teoriji čvrstoće na cijelom spremniku sa ucrtanim detaljima.



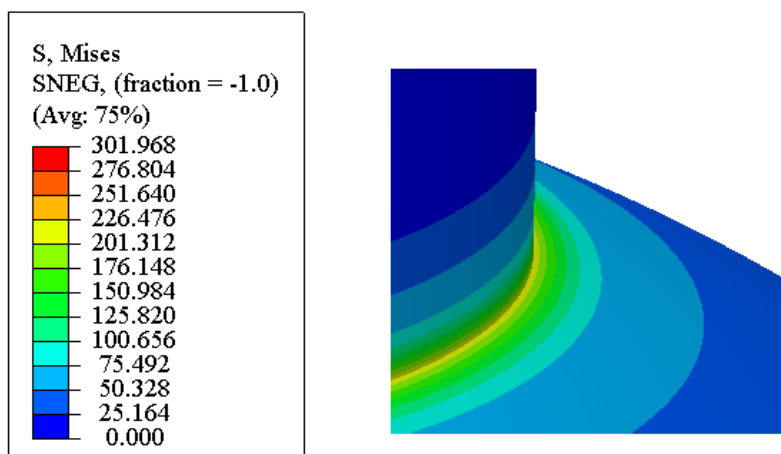
Slika 91. Ekvivalentna naprezanja na cijelom spremniku prema von Misesovoj teoriji čvrstoće

Kao i prethodno kod Trescine teorije čvrstoće i ovdje su na sljedećim slikama prikazana naprezanja za detalje označene na [Slika 91]. [Slika 92] prikazuje naprezanja za detalj A. Naprezanja na detalju B prikazana su na [Slika 93]. Na [Slika 94] prikazana su naprezanja na

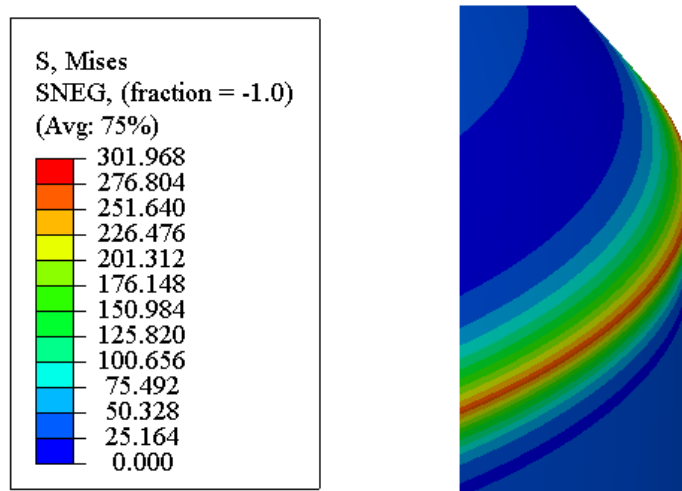
detalju C. Naprezanja za detalj D prikazana su na [Slika 95]. Sva naprezanja na slikama su u N/mm^2 .



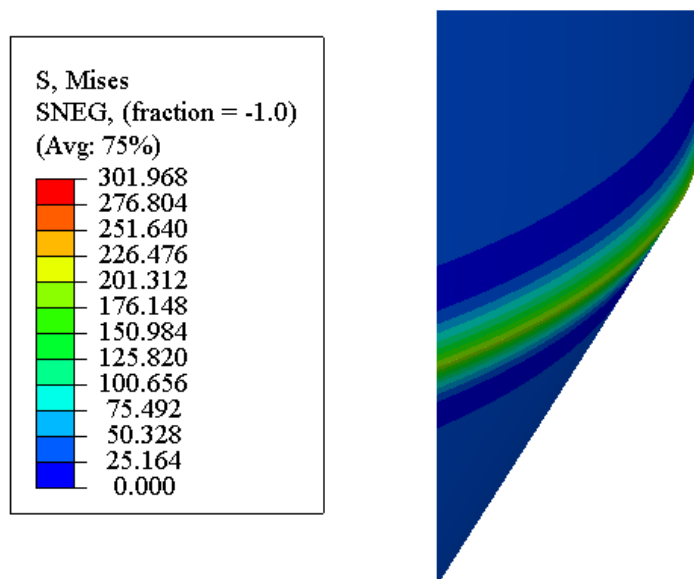
Slika 92. Ekvivalentna naprezanja prema von Misesovoj teoriji čvrstoće za detalj A



Slika 93. Ekvivalentna naprezanja prema von Misesovoj teoriji čvrstoće za detalj B



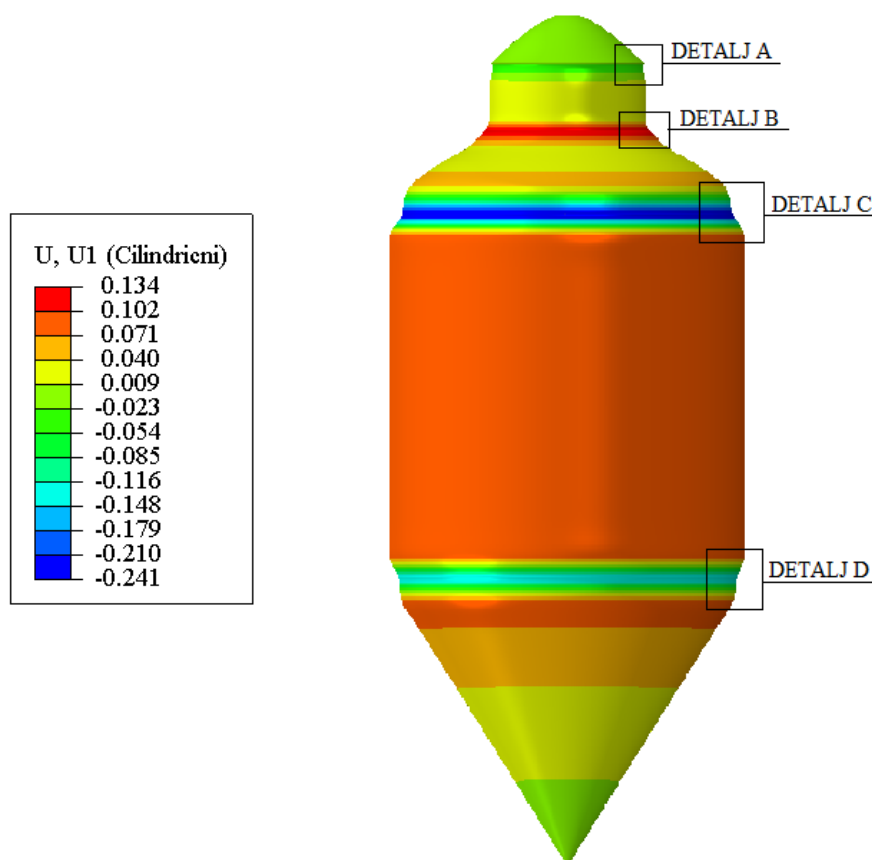
Slika 94. Ekvivalentna naprezanja prema von Misesovoj teoriji čvrstoće za detalj C



Slika 95. Ekvivalentna naprezanja prema von Misesovoj teoriji čvrstoće za detalj D

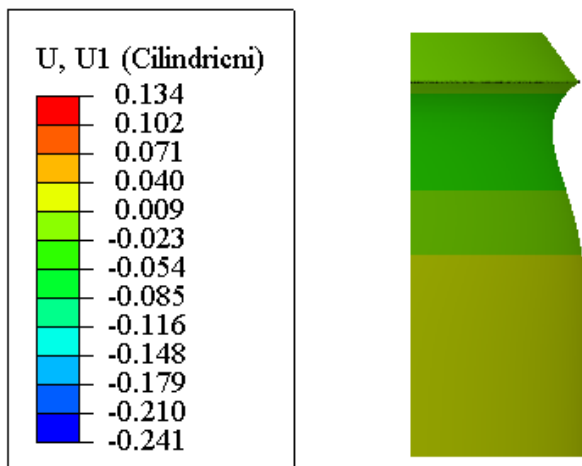
5.2.3 Grafički prikazi pomaka na spremniku

Na [Slika 96] prikazan je radijalni pomak za cijeli spremnik, u mm. Svi pomaci su zbog boljeg prikaza uvećani 150 puta.

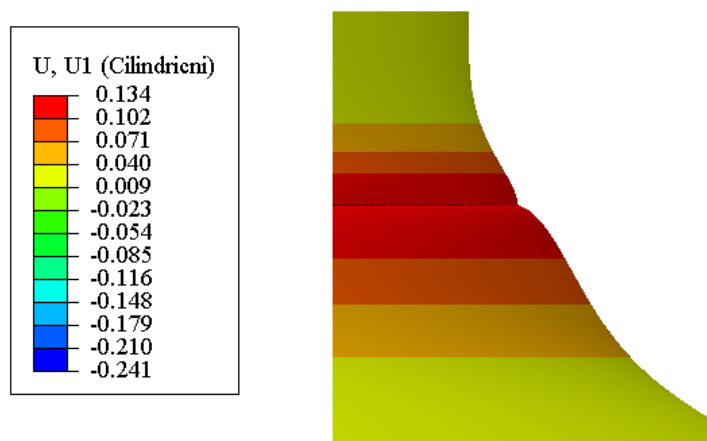


Slika 96. Radijalni pomak za cijeli spremnik

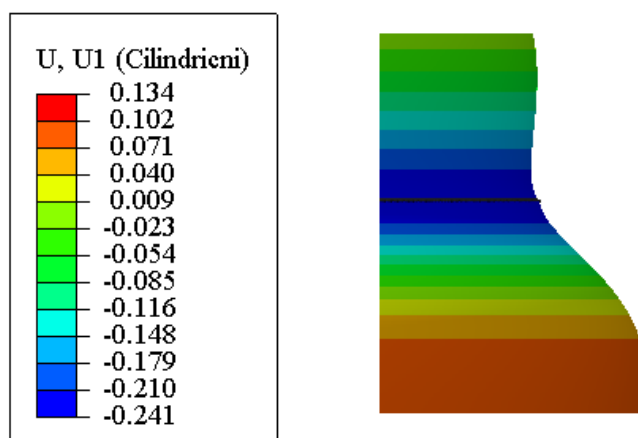
Za detalje A, B, C i D su redom na [Slika 97], [Slika 98], [Slika 99] i [Slika 100] prikazani radijalni pomaci, a progib tanke kružne ploče je prikazan na [Slika 101]. Sve vrijednosti pomaka na slikama su u mm. Zbog boljeg prikaza i ovdje su svi pomaci uvećani 150 puta.



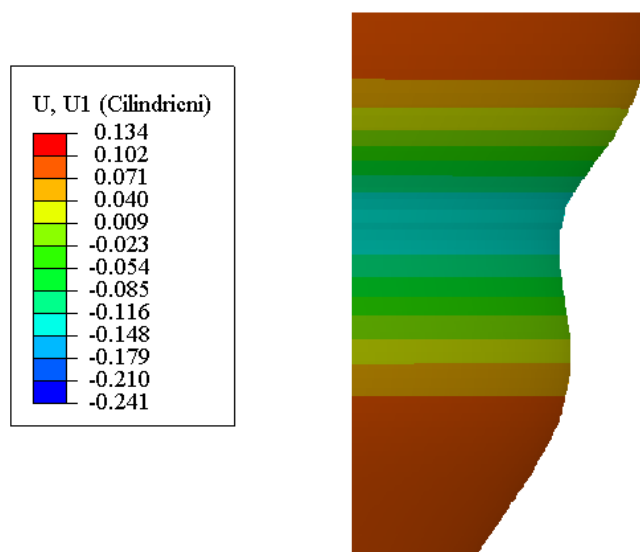
Slika 97. Radijalni pomak za detalj A



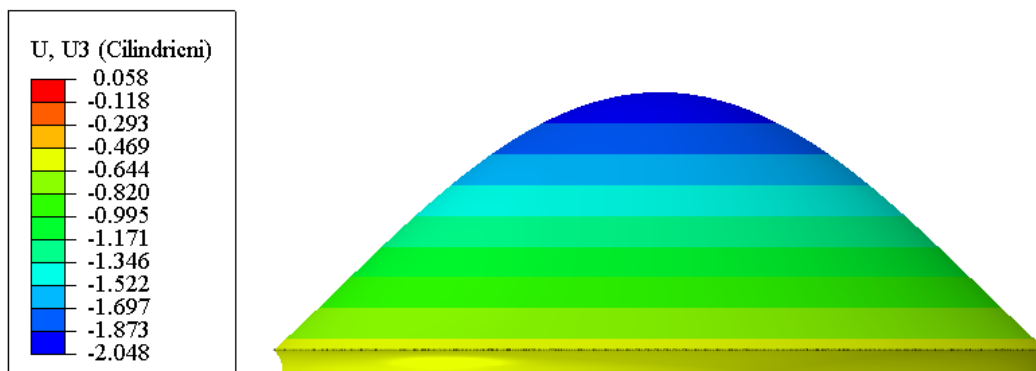
Slika 98. Radijalni pomak za detalj B



Slika 99. Radijalni pomak za detalj C



Slika 100. Radijalni pomak za detalj D



Slika 101. Progib tanke kružne ploče

6 USPOREDBA ANALITIČKIH I NUMERIČKIH REZULTATA

Da bi se ocijenila valjanost numeričke metode potrebno je takve rezultate usporediti sa analitičkim rješenjima. U nastavku su dane grafičke usporedbe pomaka i zakreta za sve dijelove spremnika te tablična usporedba naprezanja sa pripadnim relativnim greškama. Relativne greške izračunate su iz izraza:

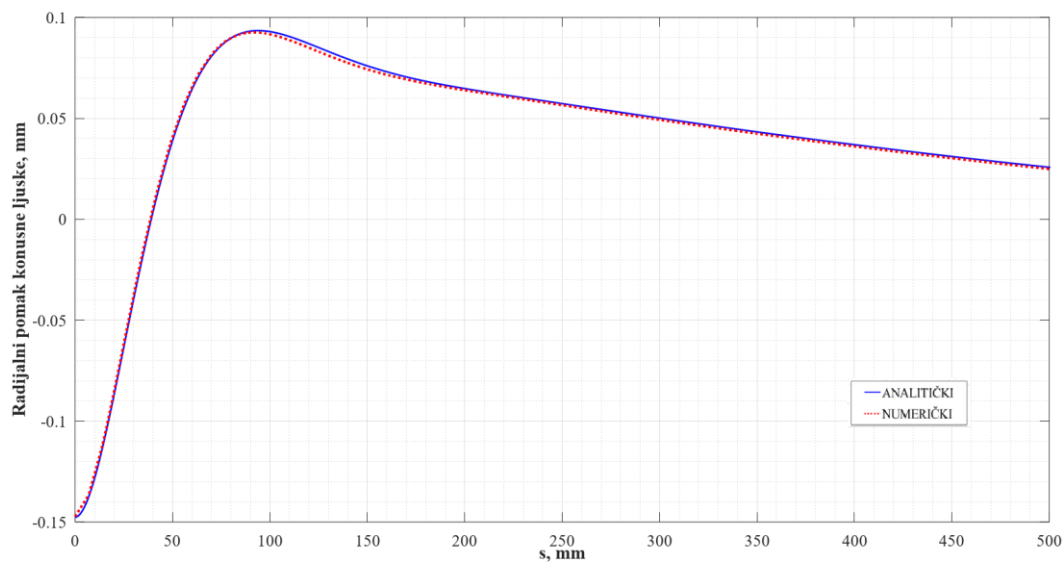
$$e = \frac{\sigma_{\text{veće}} - \sigma_{\text{manje}}}{\sigma_{\text{veće}}} \cdot 100. \quad (6.1)$$

U [Tablica 5] prikazana je usporedba analitičkih i numeričkih ekvivalentnih naprezanja na mjestima spojeva.

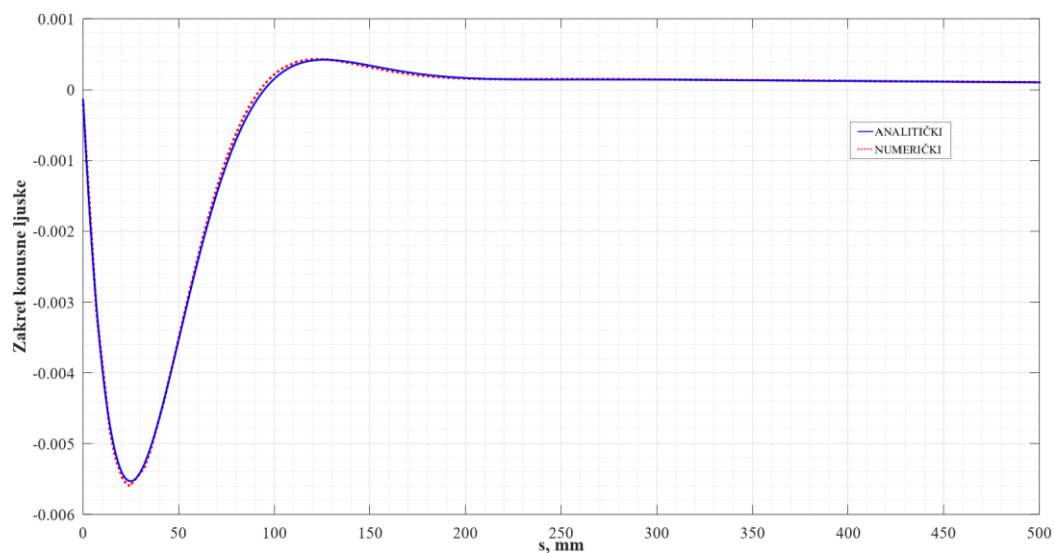
Tablica 5. Usporedba ekvivalentnih naprezanja

	ANALITIČKI $\sigma_{\text{ekv}}, \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	NUMERIČKI $\sigma_{\text{ekv}}, \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	RELATIVNA GREŠKA $e, \%$
SPOJ KONUSA I KRUTE OKOLINE	208,1	202,9	2,5
SPOJ VEĆEG CILINDRA I SFERE	262,1	280,7	6,63
SPOJ SFERE I MANJEG CILINDRA	211,7	249,6	15,18
SPOJ MANJEG CILINDRA I KRUŽNE PLOČE	342,6	339,8	0,82

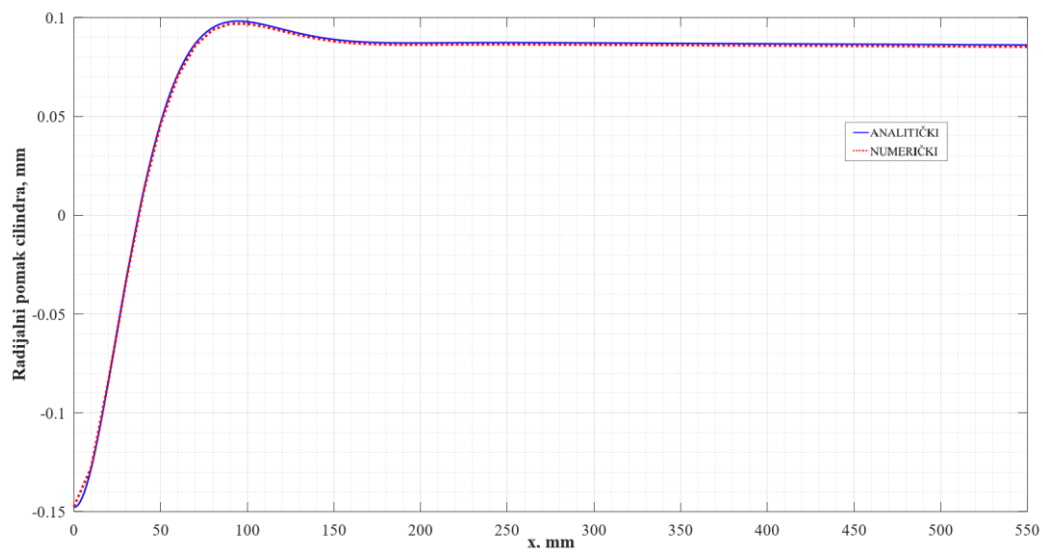
Iz izračunatih relativnih pogrešaka može se zaključiti kako je na mjestu spoja cilindra sa kružnom pločom relativna greška zanemarivo mala, na mjestu spoja većeg cilindra i sfere te većeg cilindra i konusa prihvatljiva dok je na mjestu spoja sfere i manjeg cilindra već manje prihvatljiva. Na [Slika 102] prikazana je usporedba radijalnog pomaka konusne ljuske dobivenog analitički i numerički, a na [Slika 103] je prikazana usporedba zakreta konusne ljuske dobivenog analitički i numerički. Usporedba radijalnog pomaka veće cilindrične ljuske sa strane konusne ljuske dobivenog analitički i numerički prikazana je na [Slika 104], dok je na [Slika 105] prikazana usporedba zakreta veće cilindrične ljuske sa strane konusne ljuske dobivenog analitički i numerički.



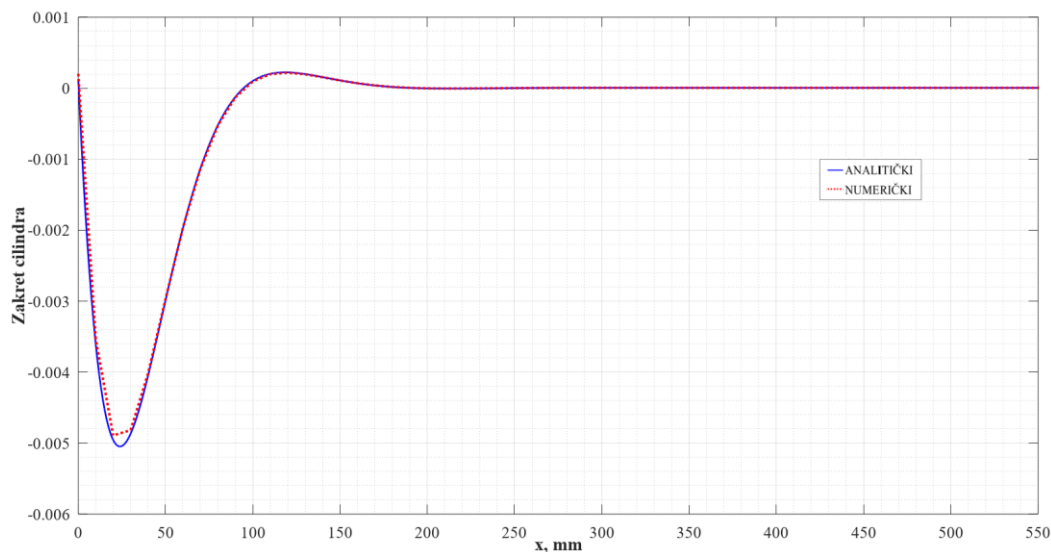
Slika 102. Usporedba radijalnog pomaka konusa



Slika 103. Usporedba zakreta konusa

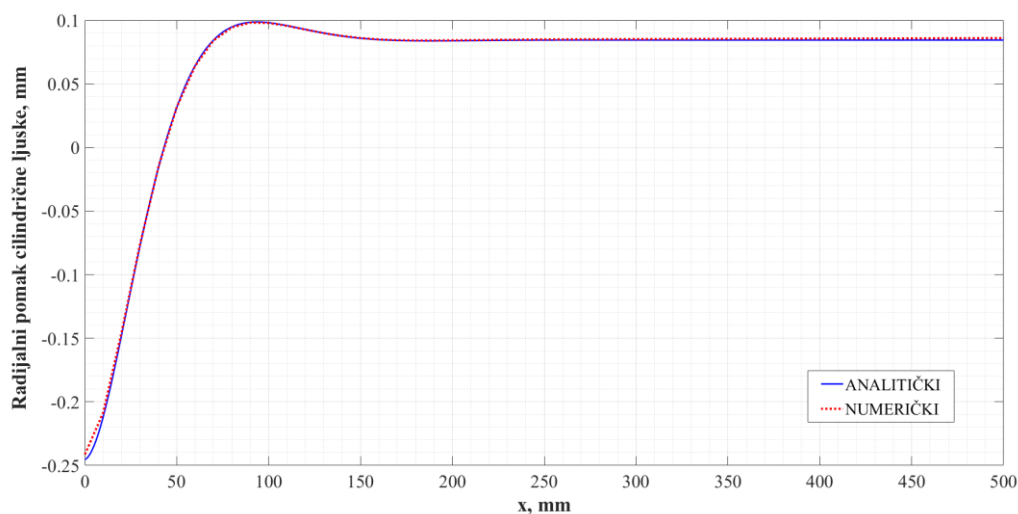


Slika 104. Usporedba radijalnog pomaka većeg cilindra sa strane konusa

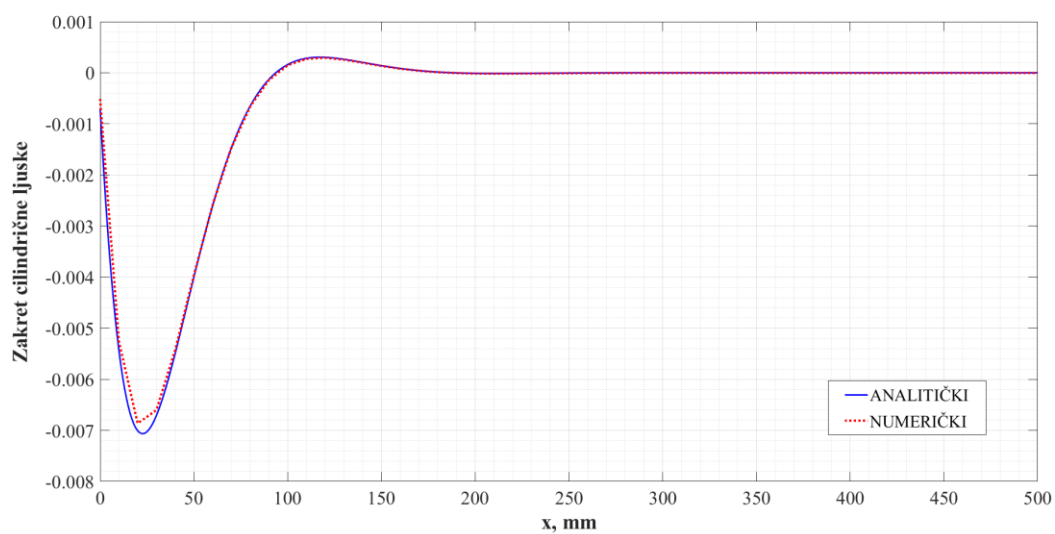
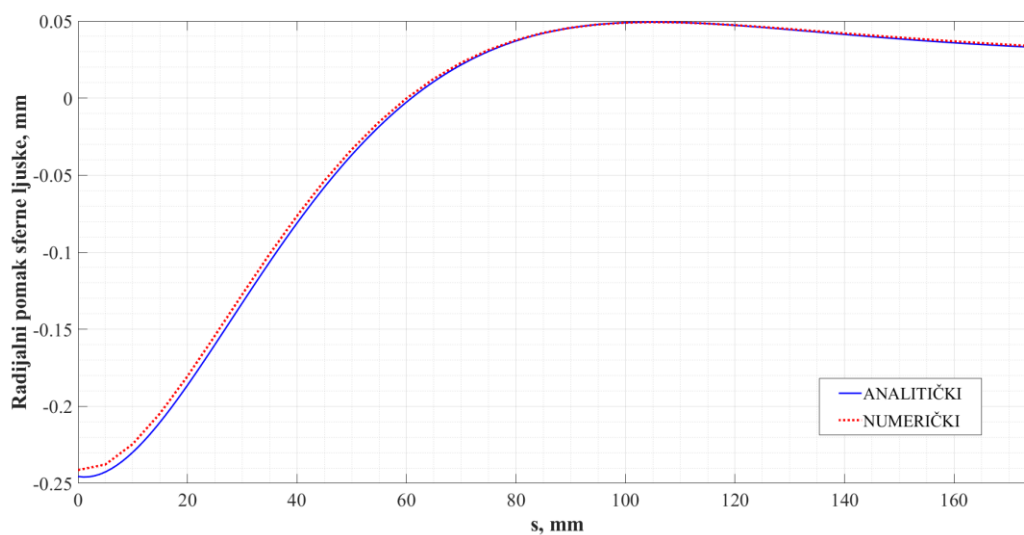
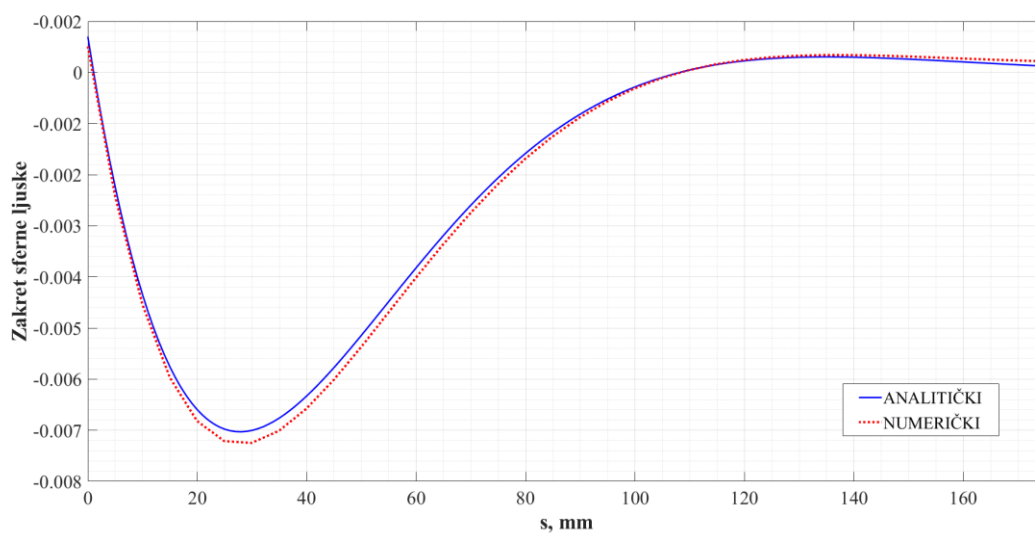


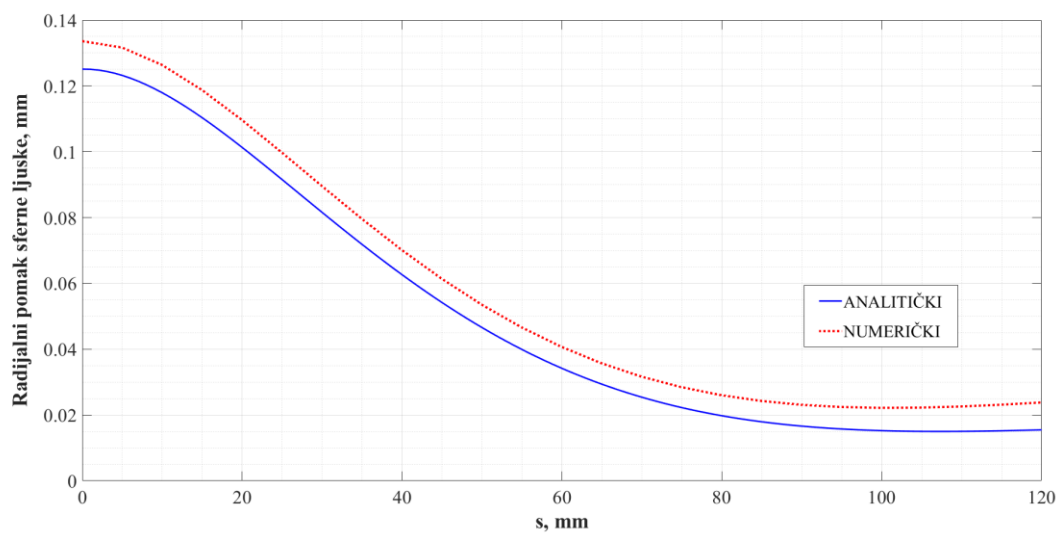
Slika 105. Usporedba zakreta većeg cilindra sa strane konusa

Na [Slika 106] prikazana je usporedba radijalnog pomaka veće cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske dobivenog analitički i numerički, a na [Slika 107] je prikazana usporedba zakreta veće cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske dobivenog analitički i numerički. Na [Slika 108] dana je dobivena usporedba radijalnog pomaka sferne ljuske sa strane veće cilindrične ljuske dobivenog analitički i numerički, dok je na [Slika 109] prikazana usporedba zakreta sferne ljuske sa strane veće cilindrične ljuske dobivenog analitički i numerički. [Slika 110] prikazuje usporedbu radijalnog pomaka sferne ljuske sa strane manje cilindrične ljuske dobivenog analitički i numerički, a [Slika 111] daje usporedbu zakreta sferne ljuske sa strane manje cilindrične ljuske dobivenog analitički i numerički. Na [Slika 112] dan je usporedni prikaz radijalnog pomaka manje cilindrične ljuske sa strane sferne ljuske dobivenog analitički i numerički.

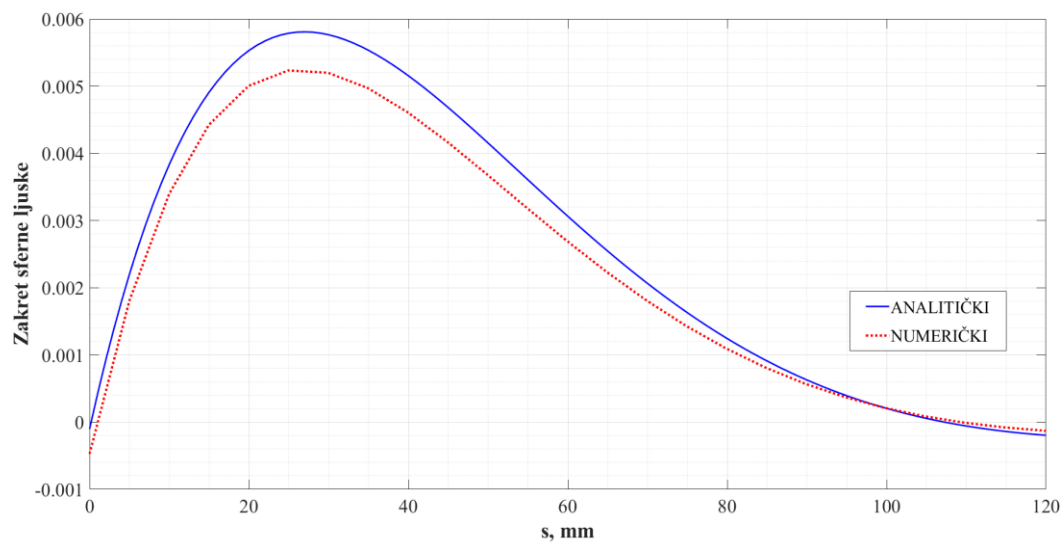


Slika 106. Usporedba radijalnog pomaka većeg cilindra sa strane sfere

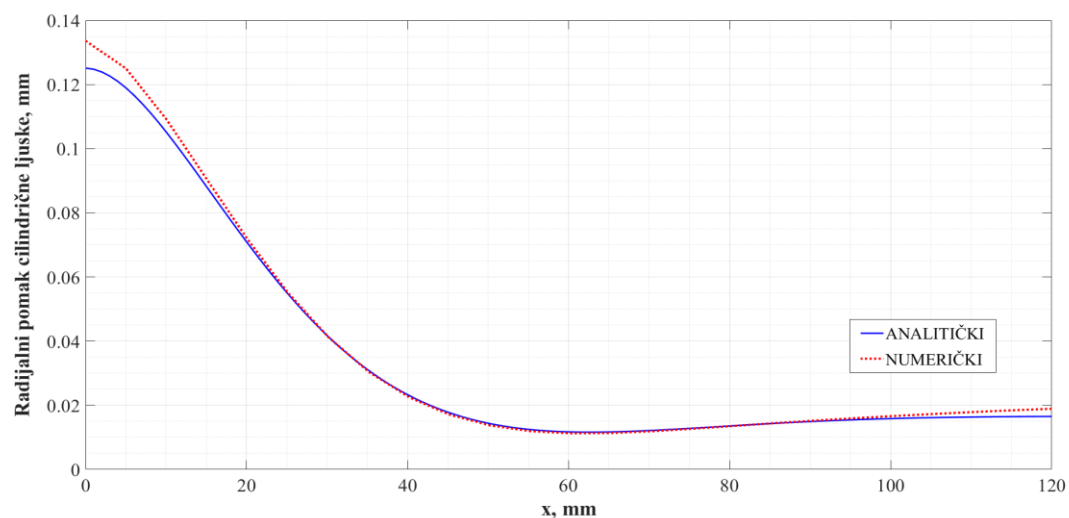
**Slika 107. Usporedba zakreta većeg cilindra sa strane sfere****Slika 108. Usporedba radijalnog pomaka sfere sa strane većeg cilindra****Slika 109. Usporedba zakreta sfere sa strane većeg cilindra**



Slika 110. Usporedba radijalnog pomaka sfere sa strane manjeg cilindra

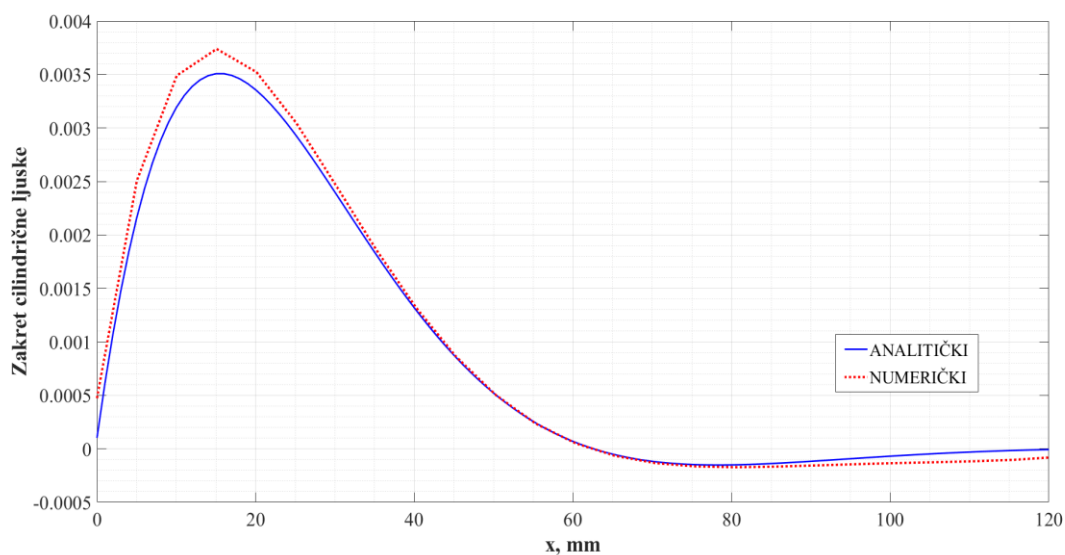


Slika 111. Usporedba zakreta sfere sa strane manjeg cilindra



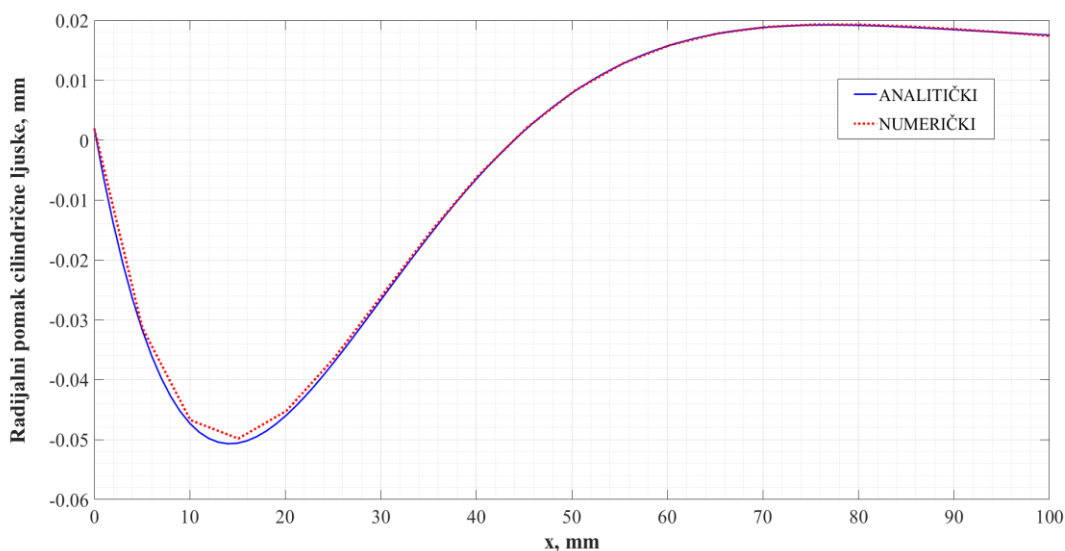
Slika 112. Usporedba radijalnog pomaka manjeg cilindra sa strane sfere

Na [Slika 113] prikazuje se usporedba zakreta manje cilindrične ljsuske sa strane sferne ljsuske dobivenog analitički i numerički.

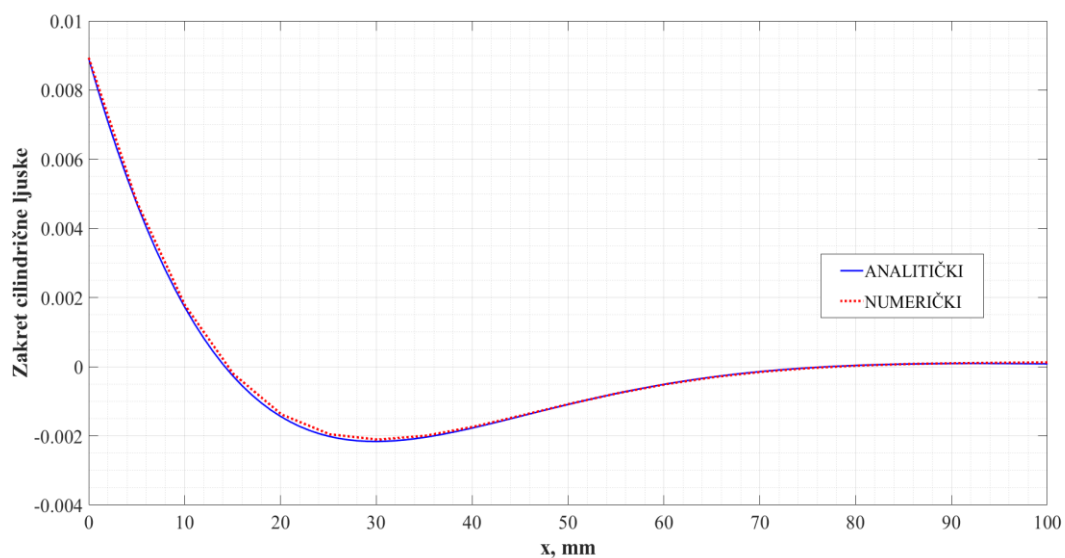


Slika 113. Usporedba zakreta manjeg cilindra sa strane sfere

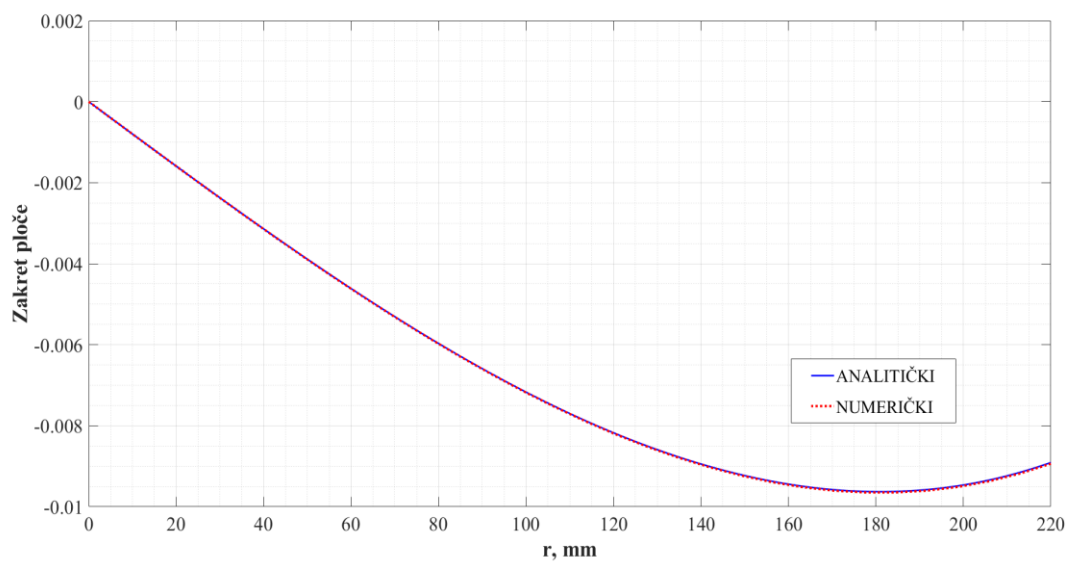
[Slika 114] daje usporedbu radijalnog pomaka manje cilindrične ljsuske sa strane kružne ploče dobivenog analitički i numerički, dok [Slika 115] prikazuje usporedbu zakreta manje cilindrične ljsuske sa strane kružne ploče dobivenog analitički i numerički. Na [Slika 116] dan je usporedni prikaz zakreta kružne ploče dobivenog analitički i numerički.



Slika 114. Usporedba radijalnog pomaka manjeg cilindra sa strane ploče



Slika 115. Usporedba zakreta manjeg cilindra sa strane ploče



Slika 116. Usporedba zakreta kružne ploče

7 ZAKLJUČAK

Tema ovog rada je numerička analiza fermentacijskog spremnika za proizvodnju piva. Na početku rada dan je kratki uvod o proizvodnji piva te o spremnicima za fermentaciju istog. Za odabrani spremnik iskoristivog volumena 1000 l i ukupnog volumena 1200 l izvršen je analitički i numerički proračun. Geometrija odabranog spremnika sastavljena je od konusne, sferne i dvije cilindrične ljuske te od tanke kružne ploče. Prije samog proračuna dan je kratki teorijski uvod o tankim kružnim pločama i ljuskama te o metodi konačnih elemenata (MKE). Analitički proračun proveden je primjenom jednadžbi izvedenih iz teorije tankih kružnih ploča i ljuski. Za svaki dio spremnika određeni su i u dijagramu prikazani radijalni pomaci i zakreti. Također, određena su naprezanja na kritičnim mjestima spremnika. Primjenom Trescine teorije čvrstoće na tim mjestima određena su ekvivalentna naprezanja te je na osnovu najvećeg dobivenog naprezanja provjerena čvrstoća spremnika u odnosu na granicu elastičnosti odabranog materijala spremnika. Pokazano je kako se najveće naprezanje javlja na mjestu spoja tanke kružne ploče i manje cilindrične ljuske. Za tako određeno naprezanje pokazano je kako čvrstoća zadovoljava. Numerički proračun izveden je primjenom programskog paketa Abaqus® utemeljenom na metodi konačnih elemenata (MKE). Verifikacija konačnih elemenata za ovu analizu napravljena je na primjeru jedne cilindrične ljuske opterećene konstantnim tlakom. Različitim vrstama konačnih elemenata i različitim gustoćama mreže prikazana je konvergencija rješenja te je na taj način opravdana upotreba konačnih elemenata za glavni proračun. Na temelju konvergencije rješenja pokazano je kako su za ovakav tip problema najbolji četverokutni i trokutni ljuskasti elementi drugog reda (S8R i STRI65) te je kombinacijom istih izvršen glavni proračun. Provedbom glavnog proračuna određeni su radijalni pomaci i zakreti svakog dijela spremnika te ekvivalentna naprezanja na kritičnim mjestima. Radijalni pomaci i zakreti prikazani su u dijagramima te grafički na cijelom spremniku i u detaljnijem pogledu u blizini spojeva. Ekvivalentna naprezanja određena su primjenom Trescine i von Misesove teorije čvrstoće te su ista prikazana grafički na cijelom spremniku i u detaljnijem pogledu za svako kritično mjesto. Za najveće naprezanje dobiveno Trescinom teorijom čvrstoće provjerena je čvrstoća spremnika u odnosu na granicu elastičnosti odabranog materijala spremnika. Za tako dobiveno naprezanje je također utvrđeno kako čvrstoća zadovoljava. Rezultati dobiveni primjenom obje metode uspoređeni su. Radijalni pomaci i zakreti uspoređeni su u preklapljenim dijagramima, a ekvivalentna naprezanja dobivena primjenom Trescine teorije čvrstoće uspoređena su tablično te je prikazan relativna

pogreška numeričkog rješenja. Pogledom na dobivene usporedne dijagrame pokazano je dobro poklapanje numeričkih i analitičkih rješenja na svim spojevima osim na spoju sferne ljuske i manje cilindrične ljuske gdje je prisutna relativno veća pogreška. Slično kao za pomake i zakrete iz dobivene usporedne tablice za naprezanja je utvrđeno kako se jako dobro poklapaju numerički i analitički rezultati na svim spojevima osim na spojevima sa sferom gdje postoji relativno veća greška.

LITERATURA

- [1] <https://www.tehnologijahrane.com/enciklopedija/tehnologija-proizvodnje-piva#toc-istorijat-proizvodnje-piva>, 04.11.2021.
- [2] <https://pivnica.net/tipovi-i-vrste-piva/107/>, 04.11.2021.
- [3] https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUK Ewja67OTo_zzAhWLhf0HHfheDZwQFnoECCgQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.routledgehandbooks.com%2Fpdf%2Fdoi%2F10.1201%2F9781351228336-3&usg=AOvVaw1Yjj20gRv01zyIb67unws6, 04.11.2021.
- [4] https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUK Ewj7qbHWrov0AhWFhP0HHZvvChE4ChAWegQIGBAB&url=https%3A%2F%2Fnas.tava.asoo.hr%2Fwp-content%2Fuploads%2F2020%2F03%2FKUHAR_PROCES-PROIZVODNJE-PIVA_3-RAZRED.ppsx&usg=AOvVaw1qnasZy8YfjadTTksCLKVt, 04.11.2021.
- [5] <https://hocupivo.com/fermentacija/>, 04.11.2021.
- [6] <https://www.czechminibreweries.com/hr/beer-production-technology/beer-fermentation-systems/>, 08.11.2021.
- [7] <https://eshop.czechminibreweries.com/product/cct-shp-1000de/>, 08.11.2021.
- [8] <https://hypertextbook.com/facts/2000/BlairElefant.shtml>, 08.11.2021.
- [9] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [10] https://help.3ds.com/2021/English/DSSIMULIA_Established/SIMULIA_Established_FrontmatterMap/HelpViewerDS.aspx?version=2021&prod=DSSIMULIA_Established&lang=English&path=SIMULIA_Established_FrontmatterMap%2fsim-r-DSDocAbaqus.htm&ContextScope=all&id=eea4e1f7a38d4ec1af45718d73912ddf, 10.01.2022.
- [11] Sorić, J.: Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
- [12] Alfirević, I.: Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2018.
- [13] Materijali za predavanja iz kolegija Čvrstoća konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
- [14] Materijali za vježbe iz kolegija Čvrstoća konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb
- [15] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Sajema d.o.o., Zagreb, 2009.

PRILOZI

I. CD-R disc