

# Inverzna metoda za određivanje opterećenja konstrukcijskih elemenata s pukotinom

---

Cukor, Ivica

Doctoral thesis / Disertacija

2021

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:014007>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Ivica Cukor

**INVERZNA METODA ZA ODREĐIVANJE  
OPTEREĆENJA KONSTRUKCIJSKIH  
ELEMENTA S PUKOTINOM**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2021.





Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Ivica Cukor

**INVERZNA METODA ZA ODREĐIVANJE  
OPTEREĆENJA KONSTRUKCIJSKIH  
ELEMENTA S PUKOTINOM**

DOKTORSKI RAD

Mentor: prof. dr. sc. Zdenko Tonković

Zagreb, 2021.





University of Zagreb

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
AND NAVAL ARCHITECTURE

Ivica Cukor

**INVERSE METHOD FOR LOAD  
IDENTIFICATION OF STRUCTURAL  
ELEMENTS WITH A CRACK**

DOCTORAL THESIS

Mentor: prof. dr. sc. Zdenko Tonković

Zagreb, 2021.



## PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

**UDK:** 62-11:620.19:621.548

**Ključne riječi:** Inverzno modeliranje, identifikacija opterećenja, pukotina

**Znanstveno područje:** Tehničke znanosti

**Znanstveno polje:** Strojarsvo

**Institucija u kojoj je rad izrađen:** Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje

**Mentor rada:** Prof.dr.sc. Zdenko Tonković

**Broj stranica:** 157

**Broj slika:** 99

**Broj tablica:** 36

**Broj bibliografskih jedinica:** 111

**Datum obrane:**

**Povjerenstvo:**

Dr. sc. Jurica Sorić, professor emeritus, predsjednik

Dr. sc. Zdenko Tonković, redoviti profesor

Dr. sc. Ivica Kožar, redoviti profesor, Građevinski fakultet, Sveučilište u Rijeci

**Institucija u kojoj je rad pohranjen:** Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje





## ZAHVALA

Na samom početku htio bih se zahvaliti mentoru, prof. dr. sc. Zdenku Tonoviću na povjerenju te na savjetima, trudu, bezrezervnoj pomoći i mentorskim satima uložnim u izradu ovog doktorskog rada.

Zahvaljujem se članovima povjerenstva, profesoru Jurici Soriću i profesoru Ivici Kožaru na vremenu uložnom u čitanje i ocjenu doktorskog rada te na korisnim savjetima i sugestijama pri konačnom oblikovanju rada.

Nadalje, zahvaljujem se kolegi dr.sc. Karlu Selešu na ustupljenim podacima, modelima i pomoći oko metode faznog polja. Zahvaljujem se i profesoru Nenadu Gubeljaku s Fakulteta strojarstva Sveučilišta u Mariboru za eksperimentalna ispitivanja provedena u Laboratoriju za strojne elemente i konstrukcije. Docentu Ivici Galiću se zahvaljujem za pomoć oko proširene metode konačnih elemenata.

Posebno zahvaljujem mojoj obitelji, majci i sestri, koje su mi uvijek pružale podršku tijekom moga školovanja i svakodnevno me motivirale na rad. Hvala im na razumijevanju, strpljenju, savjetima i potpori koju sam imao svih ovih godina.

Najtoplije zahvaljujem prijateljima te kolegama i kolegicama na prijateljstvu, korisnim savjetima i podršci tijekom izrade doktorskog rada.



## Sadržaj

<b>Sadržaj</b> .....	<b>III</b>
<b>Popis slika</b> .....	<b>XIII</b>
<b>Popis tablica</b> .....	<b>XVII</b>
<b>Sažetak</b> .....	<b>XIX</b>
<b>Summary</b> .....	<b>XX</b>
<b>1. Uvod</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1. Motivacija</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja</b> .....	<b>2</b>
<b>1.3. Cilj i hipoteza istraživanja</b> .....	<b>5</b>
<b>1.4. Očekivani znanstveni doprinos</b> .....	<b>6</b>
<b>1.5. Struktura rada</b> .....	<b>6</b>
<b>2. Određivanje opterećenja inverznim modeliranjem</b> .....	<b>8</b>
<b>2.1. Statički pristup</b> .....	<b>8</b>
2.1.1. Linearni inverzni problem.....	10
2.1.2. Identifikacija statičkog opterećenja.....	11
2.1.2.1. Rješenje inverznog diskretnog problema .....	15
2.1.2.2. Matrica razlučivosti podataka.....	15
2.1.2.3. Matrica razlučivosti modela .....	16
2.1.2.4. Matrica kovarijance .....	17
2.1.2.5. Određivanje matrice D.....	17
2.1.2.6. Položaj tenzometarskih traka.....	21
<b>2.2. Dinamički pristup</b> .....	<b>21</b>
2.2.1. Metode u frekvencijskom području.....	22
2.2.2. Metode koje se temelje na modalnoj analizi .....	23
2.2.3. Metode u vremenskom području.....	25
<b>2.3. Tenzometarske trake</b> .....	<b>25</b>
2.3.1. Wheatstoneov most .....	26
<b>2.4. Optička metoda određivanja deformacija</b> .....	<b>30</b>
<b>3. Numeričke Metode za modeliranje rasta pukotina</b> .....	<b>32</b>
<b>3.1. Proširena metoda konačnih elemenata</b> .....	<b>32</b>
<b>3.2. Metoda faznog polja</b> .....	<b>36</b>
3.2.1. Model faznog polja za slučaj monotonog opterećenja .....	36

---

3.2.2.	Model faznog polja za slučaj zamornog opterećenja .....	40
<b>4.</b>	<b>Postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja iz mjenjenih deformacija na konstrukciji s pukotinama .....</b>	<b>41</b>
4.1.	Postupak određivanja opterećenja konstrukcija s pukotinom .....	41
4.2.	D-optimizacijski postupak.....	46
<b>5.</b>	<b>Verifikacija izvedenog postupka inverznog modeliranja.....</b>	<b>49</b>
5.1.	Epruveta za savijanje u tri točke .....	49
5.1.1.	Rezultati eksperimentalnih mjerenja .....	51
5.1.2.	Inverzno modeliranje.....	53
5.2.	SENB epruveta .....	55
5.2.1.	Eksperimentalna mjerenja ne SENB epruveti .....	57
5.2.2.	Izračun deformacija primjenom X-FEM metode .....	58
5.2.3.	Inverzno modeliranje.....	60
5.3.	Epruveta opterećena na smik.....	61
5.3.1.	Inverzno modeliranje.....	66
5.3.2.	Regresijska analiza rezultata izračunatih opterećenja .....	76
5.4.	L-epruveta.....	80
5.4.1.	Inverzno modeliranje.....	83
5.5.	Kompaktna vlačna CT epruveta .....	86
5.5.1.	Inverzno modeliranje.....	91
5.6.	Ploča s otvorom .....	93
5.6.1.	Inverzno modeliranje.....	95
<b>6.</b>	<b>Postupak inverznog modeliranja za slučaj neproporcionalnih opterećenja .....</b>	<b>98</b>
6.1.	Greda sa zarezom za savijanje u tri i četiri točke .....	98
6.1.1.	Greda sa zarezom za savijanje u tri točke .....	100
6.1.2.	Greda sa zarezom za savijanje u četiri točke.....	101
6.1.3.	Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata .....	103
6.1.4.	Inverzno modeliranje.....	104
<b>7.</b>	<b>Postupak inverzno modeliranja za slučaj cikličkog opterećenja.....</b>	<b>108</b>
7.1.	Osnovni principi zamora materijala i konstrukcija .....	108
7.2.	CT epruveta .....	115
7.2.1.	Inverzno modeliranje.....	117

<b>8.</b>	<b>Verifikacija inverznog postupka na realnoj konstrukcijskoj komponenti.....</b>	<b>122</b>
<b>8.1.</b>	<b>Vjetroagregati.....</b>	<b>124</b>
<b>8.2.</b>	<b>Osovinski rukavac.....</b>	<b>127</b>
<b>8.3.</b>	<b>Smještaj tenzometarskih mjernih traka .....</b>	<b>130</b>
<b>8.4.</b>	<b>Postupak inverznog modeliranja.....</b>	<b>134</b>
<b>9.</b>	<b>Zaključak.....</b>	<b>143</b>
<b>10.</b>	<b>Literatura.....</b>	<b>148</b>

## **Ključne riječi**

- inverzno modeliranje
- identifikacija opterećenja
- tenzometarske trake
- krhki lom
- pukotina
- metoda konačnih elemenata
- metoda faznog polja
- proširena metoda konačnih elemenata
- korelacija digitalne slike

## **Keywords**

- inverse modelling;
  - load identification
  - strain gauges;
  - brittle fracture;
  - crack;
  - finite element method
  - phase-field method
  - extended finite element method
  - digital image correlation
-





## **POPIS OZNAKA**

- CAE - Računalno potpomognuto inženjerstvo (*eng. Computer-Aided Engineering*)
- CMOD - otvaranje usta pukotine (*eng. Crack Mouth Opening Displacement*)
- CT epruveta – kompaktna vlačna epruveta (*eng. Compact Tension*)
- DOF - stupnjevi slobode (*eng. degrees of freedom*)
- DIC - korelacija digitalne slike (*eng. Digital Image Correlation*)
- FEM - metoda konačnih elemenata (*eng. Finite Element Method*)
- IRF - funkcija impulsnog odziva (*eng. Impulse Response Function - IRF*)
- ISF - inverzni konstrukcijski filter (*eng. Inverse Structural Filter - ISF*)
- MS - srednji kvadrat odstupanja (*eng. mean square*)
- PMMA - termoplastični polimer polimetakrilat (*eng. polymethyl methacrylate*)
- SE – standardna greška (*eng. standard error*)
- SE Coef – standardna greška koeficijenta (*eng. standard error of the coefficient*)
- SENB – epruveta sa zarezom za savijanje u tri točke (*eng. Single Edge Notched Specimen*)
- SHM – praćenje cjelovitosti konstrukcije (*eng. Structural health monitoring*)
- SS – suma kvadrata odstupanja (*eng. sum of squares*)
- SWAT - zbroj težinskih akceleracija (*eng. Sum of Weighted Acceleration Technique - SWAT*)
- TT – tenzometarska traka (*eng. strain gauge*)
- VIF - faktori varijacije inflacije (*eng. variance inflation factors*)
- X-FEM - proširena metoda konačnih elemenata (*eng. eXtended Finite Element Method*)
-



## POPIS KRATICA

$a$  – dimenzija

$b$  – dimenzija

$l$  – duljina

$B(x)$  – asimptotske funkcije pomaka oko vrha pukotine

$B$  – granice promatrane domene

$B_t$  – granice promatrane domene na koje se nameću rubni uvjeti sila

$B_u$  – granice promatrane domene na koje se nameću rubni uvjeti pomaka

$c$  – matrica prigušenja

$c_{11}$  -  $c_{32}$  osjetljivost tenzometarske trake

$D$  – matrica elastičnosti

$D$  – matrica proporcionalnosti ili korelacijska matrica

$d_i$  – podaci u inverznoj teoriji

$d^{pre}$  – predviđeni podaci

$e_i$  – procijenjene greške tenzometarske trake  $i$

$e_i$  – reziudal

$E$  – modul elastičnosti

$F, F_a, F_B$  – opterećenja

$F$  – matrice opterećenja

$\hat{F}(\bar{\psi})$  – funkcija degradacije zamorne čvrstoće

$f(\tau), F(\omega)$  – vektor uzbudnog opterećenja

$g(\Phi)$  – degradacijska funkcija gustoće energije deformiranja

$G$  – brzina oslobađanje energije deformiranja

$G$  – jezgra (baza) podataka

$G_c$  – Griffithova energija otvaranja pukotine

$G^g$  – generalizirani inverz

$H(x)$  – generalizirana Heveisadeova funkcija

$h(t)$  – matrica funkcije impulsnog odziva (IRF)

$H(\omega)$  – frekvencijska odzivna funkcija

$k$  – matrica krutosti

$l_0$  – širina difuznog polja

- 
- m** – matrica mase  
 $m^{\text{est}}$  – procjena parametara modela  
 $m$  – model u inverznom problemu  
 $n$  – jedinična vanjska normala  
 $P$  – potencijal vanjskih sila  
 $P$  – vrijednost testa  
**R** - Matrica razlučivosti modela  
 $R1, R2$  i  $R3$  – napon električnih otpora  
 $R_{p0,2}$  – granica tečenja  
 $R_m$  – vlačna čvrstoća  
 $\mathbf{r}(t)$  – uzbudna sila  
cov **F** – matrica varijance-kovarijance  
 $T$  – vrijednost t-testa  
 $u^h$  – standardna interpolacijska funkcija pomaka  
 $\mathbf{v}$  – vektor pomaka  
 $V_{ul}$   $V_{iz}$  – Napon napajanja Wheatstoneovog mosta  
 $x$  – odabrana točka  
 $x'$  – točka sjecišta pukotine s mrežom konačnih elemenata  
 $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{X}(\omega)$  – vektor odziva  
 $Z$  – model višestruke regresije  
 $z_i$  – promatrane vrijednosti regresije  
 $\hat{z}_i$  procijenjene vrijednosti regresije  
 $\varepsilon_G, \varepsilon_D, \varepsilon_{GFa}, \varepsilon_{DFa}, \varepsilon_{GFv}, \varepsilon_{DFv}$  – odzivne defomacije za svaku pojedinu ulaznu komponentu opterećenja  
 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  – regresijski koeficijenti  
 $\gamma$  – funkcija gustoće površine pukotine  
 $\Delta R$  – promijene otpora  
 $\varepsilon$  – deformacija  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – mjerena deformacija sa tenzometarskih traka  
 $\boldsymbol{\varepsilon}$  – tenzor deformacije  
 $\lambda$  – Lagrangeov multiplicator  
 $\nu$  – Poissonov faktor  
 $\sigma^2$  – varijanca  
 $\Gamma$  – ploha pukotine
-

$\phi_0$  – vrijednost faznog polja iz prethodno promatranog trenutka

$\psi$  – gustoća energije deformiranja

$\psi_d$  – ukupna elastična energija deformiranja

$\psi_f$  – disipacijska energija loma

$\bar{\psi}(t)$  – akumulirana lokalna energija

$\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$  – ponavljajuća elastična energija deformiranja

$\Omega$  – razmatrani volumen

## Popis slika

Slika 1. Konzolna greda opterećena osnom (aksijalnom) silom $F_a$ i na savijanje vertikalnom silom $F_v$	13
Slika 2. Tri tenzometarske trake na tijelu proizvoljnog oblika opterećenom s dvije sile	14
Slika 3. Tenzometarska traka	26
Slika 4. Polovična konfiguracija Wheatstoneovog mosta	27
Slika 5. Puna konfiguracija Wheatstoneovog mosta	28
Slika 6. Stohastički uzorak i mreža faceta	30
Slika 7. Definicija Heaviside-ove funkcije	34
Slika 8. Definicija asimptotske funkcije na vrhu pukotine	34
Slika 9. Selekcija obogaćenih čvorova 2D problema s pukotinom	35
Slika 10. Klasifikacija elemenata koji su određeni pozicioniranjem pukotine	35
Slika 11. Dijagram toka postupka određivanja opterećenja konstrukcije s pukotinom	45
Slika 12. Dijagram toka algoritma sekvencijalne izmjene	48
Slika 13. Geometrija i rubni uvjeti na epruveti za savijanje u tri točke bez zareza	50
Slika 14. Diskretizacija epruvete mrežom konačnih elemenata	50
Slika 15. Eksperimentalni rezultati pomaka epruvete u smjeru osi $x$	51
Slika 16. Eksperimentalni rezultati pomaka epruvete u smjeru osi $y$	52
Slika 17. SEB epruveta prikaz pozicija tenzometarskih traka	53
Slika 18. Utjecaj orijentacije tenzometarske trake na određivanje opterećenja	55
Slika 19. Geometrija i rubni uvjeti SENB epruvete	56
Slika 20. Prikaz mreže konačnih elemenata za SENB epruvetu	56
Slika 21. Ispitna konfiguracija: SENB epruveta	57
Slika 22. Praćenje deformiranja epruvete optičkim sustavom Aramis	58
Slika 23. Model SENB epruvete s definiranom ravninom pukotine	59
Slika 24. SEB epruveta s pukotinom na sredini: a) za početnu duljinu pukotine, b) za 60 % duljine pukotine, c) za 80 % duljine pukotine i d) 90% duljine pukotine	59
Slika 25. Prikaz pozicija tenzometarskih traka na SENB epruveta	61
Slika 26. Dimenzije epruvete opterećene na odrez s rubnim uvjetima	62
Slika 27. Putanja pukotine dobivena primjenom metode faznog polja za epruvetu sa zarezom	63
Slika 28. Krivulja opterećenje - pomak dobivena metodom faznog polja za epruvetu sa zarezom opterećenu na smik	64
Slika 29. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na epruveti opterećenoj na odrez	67
Slika 30. Optimalni položaji tenzometarskih traka na epruveti opterećenoj na odrez	68
Slika 31. Izračunata opterećenja za jednu tenzometarsku traku na epruveti opterećenoj na smik	69
Slika 32. Izračunata opterećenja za dvije tenzometarske trake na epruveti opterećenoj na smik	70
Slika 33. Izračunata opterećenja za tri tenzometarske trake na epruveti opterećenoj na smik	71
Slika 34. Izračunata opterećenja za četiri tenzometarske trake na epruveti opterećenoj na odrez	72

Slika 35. Optimalni položaji i orijentacije tenzometarskih traka na epruveti sa zarezom opterećenoj na smik.....	75
Slika 36. Odnos opterećenja (N) i regresijskih varijabli, duljina pukotine (mm) i orijentacije tenzometarskih traka ( $^{\circ}$ ) .....	77
Slika 37. Dijagram vjerojatnosti ostataka.....	79
Slika 38. Kontura izračuna opterećenja u ovisnosti o duljini pukotine (mm) i orijentaciji tenzometarske trake ( $^{\circ}$ ).....	80
Slika 39. L-epruveta, dimenzije (u milimetrima) i rubni uvjeti .....	81
Slika 40. Putanja pukotine u L-epruveti dobivena primjenom modela faznog polja uslijed opterećenja: a) $F=104$ N, b) $F=42$ N i c) $F=9$ N u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima iz [81] .....	82
Slika 41. Krivulja opterećenje - pomak za L-epruvetu izračunata primjenom modela faznog polja [82] .....	83
Slika 42. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na L-epruveti.....	85
Slika 43. Položaji i orijentacije tenzometarskih traka na L-epruveti.....	86
Slika 44. Geometrija CT epruvete.....	87
Slika 45. Prikaz mreže konačnih elemenata na CT epruveti .....	87
Slika 46. Epruveta za ispitivanje jednoosnog vlačnog testa PMMA materijala.....	89
Slika 47. Tipična krivulja opterećenje - stvaranje usta pukotine .....	89
Slika 48. CT epruvete od PMMA materijala.....	90
Slika 49. Položaji i orijentacije tenzometarskih traka na kompaktnoj epruveti .....	92
Slika 50. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na kompaktnoj vlačnoj epruveti .....	93
Slika 51. Geometrija i rubni uvjeti ploče s otvorom .....	94
Slika 52. Prikaz mreže konačnih elemenata na ploči s otvorom .....	94
Slika 53. Mjerene vrijednosti krivulje opterećenje - pomak za ploču s otvorom sa zarezom prema [84] .....	95
Slika 54. Položaji i orijentacije tenzometarskih traka na ploči s otvorom za slučaj: a) jedne, b) dvije, c) tri i d) četiri trake.....	96
Slika 55. Usporedba izmjerenih i izračunatih (određenih) opterećenja za ploču s otvorom .....	97
Slika 56. Dimenzije epruvete sa zarezom za savijanje u tri točke prema [86]. .....	99
Slika 57. Greda za savijanje u tri točke sa zarezom (proporcionalno opterećenje).....	100
Slika 58. Greda za savijanje u tri točke sa zarezom opterećena proporcionalnim opterećenjem. Pukotina duljine: a) 10% , b) 50%, c) 70% i d) 90% vrijednosti duljine zareza .....	101
Slika 59. Greda za savijanje u četiri točke sa zarezom (neproporcionalno opterećenje) .....	102
Slika 60. Greda za savijanje u četiri točke sa zarezom opterećena neproporcionalnim opterećenjem. Pukotina duljine: a) 10% , b) 50%, c) 70% i d) 90% vrijednosti duljine zareza .....	103
Slika 61. Greda za savijanje u tri točke sa zarezom (proporcionalno opterećenje): a) putanja pukotine dobivena eksperimentalno u [86], b) putanja pukotine dobivena numeričkom simulacijom.....	103
Slika 62. Greda za savijanje u četiri točke sa zarezom (neproporcionalno opterećenje): a) putanja pukotine dobivena eksperimentalno u [86], b) putanja pukotine dobivena numeričkom simulacijom.....	104
Slika 63. Eksperimentalno dobivena krivulja opterećenje - pomak za gredu za savijanje u tri točke sa zarezom za slučaj proporcionalnog opterećenja [86] .....	105

Slika 64. a) Optimalni položaj tenzometarski traka za gredu za savijanje u tri točke sa zarezom i proporcionalnim opterećenjem, b) mreža konačnih elemenata .....	106
Slika 65. Usporedba izmjerenih i izračunatih (određenih) opterećenja za različita otvaranja usta pukotine CMOD za slučaj neproporcionalnog opterećenja.....	106
Slika 66. Faze nastanka i rasta pukotine.....	109
Slika 67. Prikaz rasta pukotine pri cikličkom opterećenju [91] .....	109
Slika 68. Vrste opterećenja: a) statičko, b) cikličko, c) stohastičko .....	110
Slika 69. Istosmjerno promjenjivo cikličko opterećenje .....	110
Slika 70. Wohlerova ( <i>S-N</i> ) krivulja.....	111
Slika 71. Faktor koncentracije naprezanja oko provrta.....	112
Slika 72. Cikličko opterećivanje s promjenjivim amplitudama .....	113
Slika 73. Rainflow metoda za brojenje ciklusa .....	114
Slika 74. Geometrija kompaktne epruvete .....	115
Slika 75. CT epruveta prikaz pozicija tenzometarskih traka za: a) jednu, b) dvije, c) tri i d) četiri tenzometarske trake.....	118
Slika 76. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na ciklički opterećenoj epruveti za 1 ciklus opterećenja .....	119
Slika 77. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na ciklički opterećenoj epruveti za 11482 ciklusa opterećenja.....	119
Slika 78. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na ciklički opterećenoj epruveti za 17789 ciklusa opterećenja.....	120
Slika 79. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na ciklički opterećenoj epruveti za 22598 ciklusa opterećenja.....	120
Slika 80. Končar vjetroagregat K80, nazivne snage 2,5 MW .....	123
Slika 81. Končar vjetro-park na Pometenom brdu kod Splita.....	124
Slika 82. Glavni dijelovi vjetroagregata.....	126
Slika 83. Geometrija osovinskog rukavca.....	128
Slika 84. Tipična mreža konačnih elemenata.....	129
Slika 85. Površine osovinskog rukavca podobne za smještaj tenzometarskih traka .....	130
Slika 86. Mjerno mjesto na osovinskom rukavcu s prikazom postavljenih tenzometarskih traka .....	130
Slika 87. Shema spajanja polovičnog mosta na pojačalo .....	131
Slika 88. Mjerna mjesta na osovinskom rukavcu na unutarnjem promjeru .....	132
Slika 89. Korištene tenzometarske trake proizvođača HBM.....	133
Slika 90. Izmjerene deformacije na osovinskom rukavcu na mjernom mjestu OR_01 .....	134
Slika 91. Geometrija hipotetske polueliptičke pukotine na osovinskom rukavcu.....	135
Slika 92. Oblik i položaj pukotine na osovinskom rukavcu, a) za 10% debljine stjenke, a) za 50% debljine stjenke, a) za 90% debljine stjenke.....	136
Slika 93. Položaji tenzometarskih traka na osovinskom rukavcu .....	138
Slika 94. Komponente opterećenja na osovinskom rukavcu.....	138
Slika 95. Izračunata vrijednost sile $F_a$ za različite dimenzije pukotine .....	139
Slika 96. Izračunata vrijednost sile $F_{y1}$ za različite dimenzije pukotine.....	140



## Popis slika

---

Slika 97. Izračunata vrijednost sile $F_{z1}$ za različite dimenzije pukotine.....	140
Slika 98. Izračunata vrijednost sile $F_{y2}$ za različite dimenzije pukotine.....	141
Slika 99. Izračunata vrijednost sile $F_{z2}$ za različite dimenzije pukotine.....	141

---

## Popis tablica

Tablica 1. Uvjetovanost matrice proporcionalnosti D [54] .....	20
Tablica 2. Svojstva materijala epruvete prema [74].....	50
Tablica 3. Izmjerene deformacije na epruveti .....	52
Tablica 4. Određene veličine opterećenja SEB epruvete .....	54
Tablica 5. Orijehtacije tenzometarskih traka na SEB epruveti.....	54
Tablica 6. Utjecaj orijentacije tenzometarske trake na izračunatu (određenu) vrijednost opterećenja .	55
Tablica 7. Izmjerene deformacije SENB epruveta.....	60
Tablica 8. Izračunate vrijednosti opterećenja SENB epruvete.....	61
Tablica 9. Karakteristike materijala epruvete opterećene na odrez.....	62
Tablica 10. Izmjerene deformacije na epruveti opterećenoj na smik.....	64
Tablica 11. Položaji i orijentacije s jednom tenzometarskom trakom.....	68
Tablica 12. Položaji i orijentacije s dvije tenzometarske trake .....	69
Tablica 13. Položaji i orijentacije s tri tenzometarske trake.....	70
Tablica 14. Položaji i orijentacije s četiri tenzometarske trake .....	71
Tablica 15. Izračunate vrijednosti opterećenja za jednu tenzometarsku traku .....	73
Tablica 16. Izračunate vrijednosti opterećenja za dvije tenzometarske trake .....	73
Tablica 17. Izračunate vrijednosti opterećenja za tri tenzometarske trake.....	74
Tablica 18. Izračunate vrijednosti opterećenja za četiri tenzometarske trake .....	74
Tablica 19. Ulazni podaci za regresijsku analizu .....	76
Tablica 20. Značaj pojedinih koeficijenata .....	78
Tablica 21. Analiza varijance.....	79
Tablica 22. Karakteristike materijala L-epruvete.....	81
Tablica 23. Očitane deformacije na L-epruveti.....	84
Tablica 24. Mehaničke karakteristike materijala dobivene od dobavljača Nova forma d.o.o. iz Zagreba .....	88
Tablica 25. Mehaničke karakteristike PMMA materijala .....	88
Tablica 26. Izmjerene deformacije na CT epruveti.....	90
Tablica 27. Orijehtacija tenzometarskih traka.....	92
Tablica 28. Karakteristike PMMA materijala, prema [83].....	94
Tablica 29. Karakteristike materijala grede opterećene proporcionalno i neproporcionalno.....	99
Tablica 30. Karakteristike materijala kompaktne epruvete.....	116
Tablica 31. Očitane vrijednosti deformacija na kompaktnoj CT epruveti .....	116
Tablica 32. Tehnički podaci Končar vjetroagregat K80 .....	127
Tablica 33. Popis mjernih mjesta na osovinskom rukavcu .....	131
Tablica 34. Dimenzije analiziranih hipotetskih pukotina na osovinskom rukavcu.....	135
Tablica 35. Promjena krutosti osovinskog rukavca s rastom dubine pukotine .....	136
Tablica 36. Uvjetovanost matrice proporcionalnosti D za različite brojeve tenzometarskih traka.....	142



## Sažetak

Za procjenu cjelovitosti konstrukcije neophodno je poznavanje opterećenja njenih komponenata i parametara pukotine. Kako se nosivost konstrukcije smanjuje tijekom njenog radnog vijeka, prisutnost pukotina može narušiti cjelovitost konstrukcije. Za praćenje rasta pukotine i stanja konstrukcije tijekom njenog radnog vijeka u radu je predložen postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja konstrukcije s pukotinom. Primjenom optičke metode korelacije digitalne slike (DIC) za praćenje deformacija na vanjskim plohama komponente, metode faznog polja (*eng. phase-field method*) i proširene metode konačnih elemenata (*eng. eXtended Finite Element Method – X-FEM*) razvijen je i validiran postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja konstrukcija s pukotinama koji omogućuje praćenje stanja konstrukcije tijekom njenog cjelokupnog radnog vijeka, što uključuje proces nastanka pukotine te njenog stabilnog rasta do kritične duljine. Postupak je primjenjiv na linearno-elastično ponašanje materijala i konstrukcije uslijed monotonog opterećenja, kao i cikličkog opterećenja s konstantnim amplitudama.

Cilj je bio definirati optimalni broj, razmještaj i orijentaciju tenzometarskih mjernih traka na konstrukcijskoj komponenti koji će za različite veličine i orijentacije pukotina omogućiti što točnije određivanje opterećenja. Analizirane su pukotine različitih dimenzija na različitim ispitnim uzorcima, najprije za slučaj određivanja monotonih opterećenja uz pretpostavku linearno-elastičnog ponašanja materijala, zatim za složen rast pukotina na uzorcima s proporcionalnim i neproporcionalnim načinom opterećivanja i na kraju na ciklički opterećenom uzorku. Verifikacija postupka inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja iz mjerenih deformacija na konstrukciji s pukotinom provedena je na realnoj konstrukcijskoj komponenti, osovinskom rukavcu vjetroagregata, gdje su optimalni broj, razmještaj i orijentacija tenzometarskih traka uspoređena s postavljenim tenzometarskim trakama na osovinskom rukavcu za vrijeme razvoja prototipa vjetroagregata.

U odnosu na postojeće pristupe novi postupak za identifikaciju monotonog i cikličkog opterećenja konstrukcije s pukotinama omogućuje točnije definiranje broja, položaja i orijentacije tenzometarskih mjernih traka na realnoj konstrukciji što je od presudne važnosti za unapređenje postojećih monitoring sustava i zaštitu cjelovitosti konstrukcije. Osim toga, točnije definiranje sigurnih režima rada konstrukcije je ulazni podatak za učinkoviti sustav upravljanja, što isto tako može dovesti do produljena radnog vijeka konstrukcije.

## Summary

To assess the integrity of the structure, it is necessary to know the load of its components and crack parameters. The presence of cracks can further reduce integrity of structure, as the load capacity of the structure decreases during its service life. In order to be able to monitor the condition of the structure and crack path, an inverse method procedure has been proposed to identify unknown load on structure with a crack. Using the optical Digital Image Correlation (DIC) method to monitor deformations on the outer surfaces of a structural component, the phase-field modelling and eXtended Finite Element Method (X-FEM), an inverse modeling procedure is developed and validated to identify unknown loads of the structure with cracks. This will enable the monitoring of the condition of the structure throughout its entire service life, including the process of crack initiation and its stable growth to a critical length. This procedure is applicable to the brittle behaviour of the structural material due to monotonic loading as well as cyclic loading with constant amplitudes.

The aim was to define the optimal number, positions and orientation of strain gauges on the structural component, which will enable the most accurate determination of the load for different sizes and orientations of cracks. To verify inverse approach, cracks with different dimensions were analysed on different test specimens, first for certain monotonic loads with assumption of the brittle material behaviour, than complex cracks on specimens with proportional and nonproportional loading mode and finally on the sample with variable cyclic load. Verification of the inverse modelling procedure for identification of unknown loads from measured deformations on the structure-containing crack like defect was performed on a real structural component, wind turbine axle pin, where the optimal number, position and orientation of strain gauges were compared with the strain gauges placed on the wind turbine axle pin prototype.

The new procedure for identifying the monotonic and cyclic load of the structure with cracks allows more accurate definition of the number, position and orientation of strain gauges on a real structure, which is crucial for improving existing monitoring systems and protecting the integrity of the structure. In addition, a more precise definition of safe modes of operation of the structure according to identified loads is the input for an efficient control system, which can also lead to extended structural life.

# 1. UVOD

## 1.1. Motivacija

U novije vrijeme, moderne konstrukcije postaju sve složenije, a zahtjevi za sigurnost, pouzdanost, održavanje, učinkovitost i optimalno upravljanje postavljaju sve veći izazov za znanstvenu i inženjersku zajednicu. Osim toga, nosivost konstrukcija se smanjuje tijekom radnog vijeka zbog raznih mikrostrukturnih procesa, kao što su korozija, zamor i oštećenje materijala. Prisutnost pukotina u kritičnim komponentama može narušiti cjelovitost (integritet) konstrukcije, odnosno dovesti do loma i havarije s katastrofalnim posljedicama. Na taj je način ugrožena sigurna eksploatacija i funkcionalnost konstrukcije te je skraćen njen vijek trajanja. Pojavom pukotine smanjuje se lokalna krutost konstrukcijske komponente što za posljedicu ima promjenu dinamičkog odziva, odnosno smanjenje vlastite frekvencije i promjenu prigušenja. Promjene vlastite frekvencije uslijed pojave oštećenja i pukotina u konstrukciji moguće je odrediti vibracijskim odzivom na čemu se temelje vibracijske metode detektiranja oštećenja. Ove metode dijele se na direktne i inverzne metode [1]. Kod direktnih metoda, na temelju poznatih parametara pukotine određuje se dinamički odziv konstrukcije. Nasuprot tome, kod inverznih metoda, nepoznati parametri pukotine identificiraju se na temelju dinamičkog odziva konstrukcije.

Da bi se konstrukciji opterećenoj promjenjivim opterećenjem osigurao radni vijek potrebno je provesti analizu zamora njenih kritičnih dijelova. Mjerenjem deformacija i akceleracija na konstrukcijskoj komponenti u eksploataciji vrše se laboratorijska ispitivanja zamora materijala primjenom realnih stohastičkih opterećenja. Međutim, određivanje opterećenja iz izmjerenih akceleracija i deformacija na dijelovima konstrukcije koji su u eksploataciji je područje koje je još uvijek nedovoljno istraženo. Nadalje, na taj način izračunata opterećenja na neku konstrukciju mogu služiti kao osnova za provođenje daljnje analize optimiranja, zamora, i dopuštenih režima rada konstrukcije. Mjesta i iznose vanjskih opterećenja poželjno je poznavati u fazi projektiranja konstrukcije. Ova opterećenja konstrukcije mogu biti statička ili vremenski promjenjiva dinamička. Poznavanjem opterećenja konstrukcije može se pristupiti provođenju analize zamornog iniciranja i rasta pukotine te određivanju dopuštenih režima rada konstrukcije što doprinosi pouzdanosti i sigurnosti konstrukcije. Stoga je razvoj naprednih numeričkih i eksperimentalnih metoda za određivanje opterećenja konstrukcija posljednjih godina zaokupio

pažnju velikog broja znanstvenika. Kao i kod većine drugih problema, numeričke simulacije sve više zamjenjuju, odnosno nadopunjuju mnogo skuplji eksperiment.

## 1.2. Pregled dosadašnjih istraživanja

U posljednje vrijeme predložen je velik broj inverznih metoda koje se temelje na analitičkom, eksperimentalnom i numeričkom pristupu. Pritom se najveći broj istraživanja odnosi na identifikaciju pukotina u grednim nosačima i pločama [2], [3]. Pokazano je da se za slučaj jednostavnijih problema, primjenom inverznog modeliranja može dosta točno identificirati pozicija pukotina i njihova dubina [4]–[6]. Analiza osjetljivosti je pokazala da pozicije tenzometarskih traka nemaju značajniji utjecaj na rješenje inverznog problema, sve dok su tenzometarske trake dovoljno udaljene od pukotina [7].

Na opisanim vibracijskim metodama detektiranja oštećenja temelji se većina sustava za nadzor (monitoring) cjelovitosti modernih konstrukcija. Ovi sustavi doprinose sigurnosti i pouzdanosti konstrukcije, smanjenju troškova održavanja i produljenju njenog radnog vijeka [8]. Razvoj tzv. pametnih konstrukcija [9]–[11] i materijala [12]–[14], kao i pametnih SHM (*eng. Structural Health Monitoring*) sustava [15]–[17] postao je jedno od glavnih područja istraživanja u posljednjih nekoliko godina. Pritom naziv „pametna“ ili „inteligentna“ konstrukcija podrazumijeva da konstrukcija sama može odgovoriti na vanjske utjecaje zadržavajući se u sigurnom režimu rada i bez značajnijih promjena izvornih funkcionalnosti. Za nadzor i upravljanje pametne konstrukcije primjenjuju se tzv. pametni SHM sustavi koji za razliku od klasičnih sustava omogućavaju nadzor cjelovitosti konstrukcije pomoću aktivnog i pasivnog načina prikupljanja informacija, koristeći pri tome sposobnost pametnih materijala kao što su piezoelektrični elementi da rade kao aktuatori i senzori [18], [19], nadopunjuju klasične sustave upravljanja. Takav sustav je lako prilagodljiv za razne vrste primjene, kao što je globalni nadzor konstrukcije za detekciju udara ili lokalni nadzor za detekciju oštećenja na pojedinom dijelu konstrukcije. Kao što je rečeno, ovdje se detektiranje oštećenja u materijalu primjenom vibracijske metode dovodi u korelaciju s promjenom u dinamičkom odzivu budući da s akumuliranjem oštećenja pada krutost konstrukcije što uzrokuje promjenu njenih vlastitih frekvencija, prigušenja i vlastitih modova [16], [20]–[22].

Monitoring konstrukcije može biti lokalni i globalni. Statički lokalni monitoring služi za praćenje ponašanja materijala te veličina pukotina i njihovog rasta, dok se dinamički globalni

monitoring koristi za određivanje vlastitih frekvencija i prigušenja. Osim poznavanja parametara oštećenja, odnosno pukotina, potrebno je poznavati opterećenja koja djeluju na konstrukciju. U praksi su konstrukcije često podvrgnute režimima opterećenja koji nisu unaprijed poznati ili zadani. Stoga je potrebno procijeniti opterećenje na temelju odziva konstrukcije kako bi se nakon toga mogla provesti pouzdana procjena cjelovitosti i vijeka trajanja konstrukcije. Poznato je da se za zadano opterećenje odziv linearno-elastične konstrukcije (pomaci, akceleracije i deformacije) može jednostavno odrediti primjenom statičkih, odnosno dinamičkih jednadžbi te principa mehanike deformabilnih tijela. Ovaj problem poznat je pod nazivom unaprijedni problem (eng. „*forward problem*“). Nasuprot tome, za određivanje opterećenja konstrukcije na temelju mjerenja njenog odziva primjenjuje se postupak inverznog modeliranja (eng. „*inverse modelling*“). Rješavanje inverznog problema predstavlja složen zadatak i veliki istraživački izazov. Jedan od razloga za to je općenito loša uvjetovanost inverznog problema, tj. vrlo male varijacije u mjerenom odzivu mogu uzrokovati velike greške u procjeni opterećenja. Nadalje, kombinacija različitih opterećenja na različitim mjestima može rezultirati istom razinom odziva pa rješenja inverznog problema ne moraju biti jedinstvena. Osim toga, inverzni problem se može razmatrati kao loše postavljen ako nema jedinstveno rješenje. Inverzni problem može imati višestruko rješenje. Razlog tome je što su ovdje nepoznanice i mjesto opterećenja i iznos opterećenja tako da broj senzora mora biti odgovarajući za dobivanje jedinstvenog rješenja. U unaprijednom problemu, uzbudne sile su skoncentrirane na nekoliko mjesta na konstrukciji tako da su informacije o opterećenju poznate po cijeloj konstrukciji. Međutim, u inverznom problemu, iako je odziv različit od nule prisutan na većini konstrukcije, pomaci, deformacije i akceleracije mogu se mjeriti samo na konačnom broju odabranih lokacija, dok odziv na preostalim lokacijama ne ulazi u proračun. Nadalje, kombinacija različitih opterećenja na različitim mjestima mogu rezultirati istom razinom odziva, dok rješenja inverznog problema ne moraju biti jedinstvena. Stoga broj senzora mora biti odgovarajući za dobivanje jedinstvenog rješenja, pri čemu su nepoznanice mjesto i iznos opterećenja. Ovisno o načinu promjene opterećenja, u literaturi su razvijeni inverzni postupci za određivanje, odnosno identifikaciju statičkog, odnosno dinamičkog opterećenja konstrukcije.

Statički pristupi određivanja opterećenja primjenjuju se na probleme kod kojih se opterećenja ne mijenjaju tijekom vremena. Pristupi su ograničeni na linearno-elastično ponašanje konstrukcije, a nepoznata opterećenja se određuju iz izmjerenih deformacija na određenom broju mjesta na konstrukciji primjenom metode utjecajnih koeficijenata i numeričkih metoda.



Ova metoda matematički opisuje vezu između poznatih i nepoznatih veličina, odnosno parametara. Utjecajni koeficijenti se određuju na način da opisuju vezu između nepoznatih opterećenja i izmjerenog odziva konstrukcije. Odziv sustava mjeri se mjernim trakama ili akcelerometrima, a nepoznata opterećenja određuju se numeričkim metodama, najčešće primjenom metode konačnih elemenata.

Točnost određivanja opterećenja ne ovisi samo o broju mjernih traka, njihovom razmještaju i orijentaciji na konstrukciji, već i o vrsti konstrukcije i vrsti opterećenja [23]. Iz tog razloga su razvijeni različiti postupci za optimizaciju smještaja mjernih traka na konstrukciji [24]–[26]. Međutim, ovi postupci su većinom primijenjeni na određivanje opterećenja u geometrijski jednostavnijim konstrukcijama s jednostavnim opterećenjima. Za slučaj složenih trodimenzijskih konstrukcija i složenih opterećenja smještaj mjernih traka još više utječe na procjenu vanjskog opterećenja te je potrebno više mjernih traka kako bi se bolje opisalo stanje deformacije [27]. Iz tog razloga se u novijim radovima za određivanje pomaka i izračun deformacija na cijeloj plohi uzorka primjenjuju optički sustavi koji se temelje na metodi korelacije digitalne slike (*eng. Digital Image Correlation - DIC*) [28]. U radu [28] *DIC* metoda je primijenjena za identifikaciju kontinuiranih površinskih opterećenja.

Dinamički pristupi određivanja opterećenja primjenjuju se za slučaj opterećenja koja se mijenjaju tijekom vremena. Pritom se razlikuju metode u frekvencijskom području i metode u vremenskom području. Metode u frekvencijskom području primjenjuju linearnu vezu između narinutih opterećenja i mjerenih odziva iskazanu kao funkcija frekvencije [29]. Funkcija frekvencijskog odziva konstrukcije može se izračunati kao integral opterećenja. Verifikacija postupka inverznog određivanja opterećenja pomoću programskog paketa FAST provedena je u radu [30] na primjeru testnog vjetroagregata instaliranog na kopnu. Ovdje je proveden izračun samo jedne komponente opterećenja i to aksijalne sile na rotoru vjetroagregata. Teorijske vrijednosti uspoređene su s izračunatim te je zaključeno da se postupkom inverznog modeliranja mogu dobiti dosta točni rezultati. Međutim, matrica funkcije frekvencijskog odziva mora biti inverzno određena za svaki raspon frekvencija, što zahtjeva značajne računalne resurse i čini ovu metodu neučinkovitom.

U novije vrijeme za određivanje dinamičkih opterećenja razvijaju se metode u vremenskom području gdje se nepoznata opterećenja određuju iz dinamičke jednadžbe ravnoteže i mjerenih odziva [31], [32]. U odnosu na metode u frekvencijskom području, primjenom ovih metoda

mogu se identificirati različite vrste opterećenja s dosta većom točnošću [33]. Dobar pregled inverznih metoda za identifikaciju opterećenja dan je u [34], [35].

U zadnje vrijeme započelo se s istraživanjima u području identifikacije dinamičkog opterećenja uslijed vjetra [33], [36], [37]. Međutim, broj publikacija u ovom području je vrlo mali u usporedbi s brojnim istraživanjima koja se općenito provode u području identifikacije dinamičkog opterećenja. Rezultati identifikacije opterećenja vjetra na mjernim stupovima dani u radovima [33], [38] prikazuju da se postupak inverznog modeliranja može primijeniti i na druge složenije vjetrom opterećene konstrukcije.

Na temelju pregleda dosadašnjih istraživanja vidljivo je da su za procjenu cjelovitosti i radnog vijeka konstrukcije prisutna dva bitna problema, detekcija i karakterizacija oštećenja te određivanje nepoznatog opterećenja.

U okviru disertacije težište će biti na rješavanju problema određivanja opterećenja mehaničkih konstrukcija s pukotinama što je nedovoljno istraženo u literaturi [39]. Prema najboljem znanju, samo se jedan noviji rad bavi ovim problemom [40]. U ovom radu autori su predložili iterativni pristup inverznog modeliranja za identifikaciju primijenjenih statičkih opterećenja komponente s pukotinom. Za predviđanje širenja pukotine u krhkim materijalima korištena je bezmrežna metoda. Inverzni pristup se primjenjuje za analizu dva geometrijski jednostavna referentna problema s jednostavnim opterećenjima. Osnovni problem ovdje je odrediti smještaj mjernih tenzometarskih traka za opisivanje procesa deformiranja realnih komponenti s pukotinama uslijed složenih opterećenja, kao što su ciklička opterećenja [7], [41], [42]. Pri tome se javljaju problemi stabilnosti i točnosti numeričkih postupaka. Postoje različiti pristupi za rješavanje spomenutog problema, ali nijedan od njih još uvijek ne nudi dovoljnu točnost i numeričku učinkovitost. Zbog toga postoji značajna potreba za novim pristupima za optimiranjem smještaja senzora u svrhu točne identifikacije opterećenja konstrukcija.

### **1.3. Cilj i hipoteza istraživanja**

Pregledom trenutnog stanja razvoja predmetnog područja evidentno je da postoji potreba za daljnjim razvojem i unapređenjem metoda za određivanje nepoznatih opterećenja složenih dinamički opterećenih konstrukcija i strojeva s pukotinom. Iz navedenih razloga cilj je predloženog istraživanja razviti postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih

opterećenja iz mjerenih deformacija na konstrukciji s pukotinama u različitim statičkim te cikličkim uvjetima rada. Namjera je verificirati i validirati postupak na ispitnim uzorcima, kao i na realnoj konstrukcijskoj komponenti.

Istraživanje se temelji na sljedećim hipotezama:

- Optimalni broj, razmještaj i orijentacija tenzometarskih mjernih traka omogućit će pouzdanu identifikaciju opterećenja konstrukcije s različitim veličinama i orijentacijama pukotina.
- Postupak će biti primjenjiv na linearno-elastično ponašanje materijala konstrukcije uslijed monotonog opterećenja, kao i cikličkog opterećenja s konstantnim amplitudama.
- Za razliku od postojećih pristupa, postupak će omogućiti praćenje nastanka i stabilnog rasta pukotine u konstrukciji tijekom njenog cjelokupnog radnog vijeka.

#### **1.4. Očekivani znanstveni doprinos**

Očekivani znanstveni doprinosi su:

- Razvoj novog postupka inverznog modeliranja verificiranog i validiranog na ispitnim uzorcima, kao i na realnoj konstrukcijskoj komponenti omogućit će novi način i pristup identifikaciji nepoznatih opterećenja iz mjerenih deformacija na konstrukciji s pukotinama.
- U odnosu na postojeće postupke omogućit će se točnije definiranje broja, položaja i orijentacije tenzometarskih mjernih traka na realnoj konstrukciji što je od presudne važnosti za unapređenje postojećih monitoring sustava i zaštitu cjelovitosti konstrukcije.
- Novi postupak omogućit će točnije definiranje sigurnih režima rada monotono, odnosno ciklički opterećene konstrukcije s pukotinama što je ulazni podatak za učinkoviti sustav upravljanja.

#### **1.5. Struktura rada**

Rad je podijeljen u devet poglavlja. U uvodnom poglavlju opisana je motivacija koja je bila poticaj za izradu ovog rada. Napravljen je pregled dosadašnjih istraživanja na primjeni inverznih metoda za određivanje opterećenja na konstrukcijama sa i bez pukotine, te je objašnjena hipoteza rada i očekivani znanstveni doprinos novog postupka za identifikaciju nepoznatih opterećenja iz izmjerenih deformacija na konstrukciji s pukotinama. Nakon

uvodnog poglavlja, u drugom poglavlju dan je prikaz inverznih metoda za određivanje nepoznatih opterećenja iz mjerenih odziva konstrukcije za statičke i dinamičke probleme. U trećem poglavlju opisane su danas jedne od najzastupljenijih numeričkih metoda za modeliranje i računalnu simulaciju rasta pukotina: proširena metoda konačnih elemenata i metoda faznog polja.

Novi postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja iz mjerenih deformacija na konstrukciji s pukotinama, predložen u ovom radu detaljno je opisan i grafički prezentiran u četvrtom poglavlju. U petom poglavlju prikazani su rezultati verifikacije i validacije predloženog postupka inverznog modeliranja na ispitnim uzorcima s monotonim opterećenjem, na epruvetama sa i bez zareza. Primjeri s proporcionalnim i neproporcionalnim načinom opterećenja na gredi opterećenoj u tri ili četiri točke prikazani su u šestom poglavlju, dok je primjer s cikličkim promjenjivim opterećenjem prezentiran u sedmom poglavlju. Provedena je usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata inverznog postupka. Primjena postupka na realnoj konstrukcijskoj komponenti - osovinskom rukavcu vjetroagregata prikazana je u osmom poglavlju. Zaključci rada dani su u devetom poglavlju, te je procijenjena primjenjivost novog postupka na realne konstrukcije s pukotinama.

## 2. ODREĐIVANJE OPTEREĆENJA INVERZNYM MODELIRANJEM

Određivanje opterećenja inverznom metodom nije lak i jednostavan zadatak. U postupku određivanja inverznog opterećenja, od dva poznata parametra "odziv" i "sustav" potrebno je pronaći nepoznati parametar "opterećenje". Postupak se temelji na inverziji koraka izračuna deformacije, naprezanja i direktnog problema. Kao što je rečeno, loše uvjetovano ponašanje matematičkog problema uzrokuje proces inverzije, a male promjene u mjerenju deformacija mogu rezultirati velikim greškama u procjeni opterećenja. U unaprijednom problemu vrijednosti, orijentacije i položaj opterećenja poznati su na cijeloj konstrukciji te je dobro definiran problem onaj koji ima jedinstveno i stabilno numeričko rješenje. S druge strane, inverzni problem je loše uvjetovan, a dobivanje točnog rješenja je dosta zahtjevno. Stoga se u znanstvenoj literaturi provode opsežna eksperimentalna i numerička istraživanja u cilju određivanja nepoznatih opterećenja koja djeluju na konstrukciju za što realniju procjenu ponašanja materijala i konstrukcije u eksploataciji. Pritom se za određivanje opterećenja na konstrukciju iz mjerenja odziva konstrukcije istražuju različiti pristupi inverznog modeliranja s ciljem postizanja točnijih i učinkovitijih rješenja. Ovisno o načinu promjene opterećenja, u literaturi su razvijeni inverzni postupci za statičko, odnosno dinamičko opterećenje konstrukcija.

### 2.1. Statički pristup

Statički pristupi određivanja opterećenja primjenjuju se na probleme kod kojih su opterećenja statička i ne mijenjaju se tijekom vremena. Pristupi su ograničeni na linearno-elastično ponašanje konstrukcije gdje se opterećenja određuju iz izmjerenih deformacija na određenom broju mjesta na konstrukciji primjenom principa superpozicije. Kompletna konstrukcija se ponaša kao prijenosnik signala, a mjerne točke mogu se postaviti na konačan broj mjernih mjesta. Kao što je ranije rečeno, točnost određivanja opterećenja ne ovisi samo o broju mjernih traka, njihovom razmještaju i orijentaciji na konstrukciji već i o vrsti opterećenja i samoj konstrukciji [23]. Pritom se mjerne trake ne postavljaju na mjesta na kojima opterećenja, koja se određuju, nemaju znatnijeg utjecaja na deformiranje konstrukcije. Statički pristupi određivanja opterećenja temelje se na metodi utjecajnih koeficijenata. Ova metoda matematički opisuje vezu između poznatih i nepoznatih veličina, odnosno parametara. Utjecajni koeficijenti se određuju na način da opisuju vezu između nepoznatih opterećenja i izmjerenog odziva

konstrukcije. Odziv sustava mjeri se tenzometarskim mjernim trakama ili akcelerometrima, a nepoznata opterećenja određuju se numeričkim metodama, najčešće primjenom metode konačnih elemenata.

U radu [43] razvijena je metoda za određivanje statičkih opterećenja konstrukcije iz izmjerenih deformacija. Analizirani su broj i položaj mjernih traka u linearno-elastičnim konstrukcijama uz pretpostavku malih deformacija i primjenom principa superpozicije. Definiran je parametar osjetljivosti, kao varijacija u mjerenom odzivu koja uzrokuje greške u procjeni opterećenja, te je zaključeno da je varijanca određenih opterećenja direktno proporcionalna osjetljivosti. Osim toga, zaključeno je da točnost određivanja opterećenja ovisi o više faktora kao što su broj mjernih traka, pozicija mjernih traka, tip konstrukcije, vrsta opterećenja i sama provedena analiza. Budući da u navedenom radu nije analiziran veći broj različitih pozicija i orijentacija mjernih traka, smještaj mjernih traka nije bio optimalan, što dovodi do grešaka u određivanju opterećenja. Poboljšanje metode prikazane u [43] predloženo je u radu [44]. Razvijena je tehnika minimiziranja parametra osjetljivosti raspoređivanjem pozicija mjernih traka. Raspored pozicija mjernih traka analiziran je kao problem optimiranja koji određuje optimalnu poziciju mjernih traka. U literaturi [45] predložen je računalni postupak za metodu razvijenu u [44]. Postupak objedinjuje optimalni dizajn eksperimenta za odabir broja, pozicije i orijentacije mjernih traka koja rezultira izračunatim opterećenjima s vrlo točnim vrijednostima. Postupak omogućuje određivanje opterećenja dvodimenzijskih i složenih trodimenzijskih konstrukcija. U radu [46] primijenjena je metoda utjecajnih koeficijenata za određivanje opterećenja za slučaj složenih opterećenja. Eksperimentalno je određena matrica utjecajnih koeficijenata te su dobivena opterećenja s vrlo malom greškom, približno 1%. Radijalna pozicija mjernih traka na tankostjenim konstrukcijama nije imala utjecaja na određivanje opterećenja, dok broj mjernih traka jest. Zaključeno je da je za slučaj višeosnih deformacija potrebno više mjernih traka kako bi se bolje opisalo stanje deformacije. Metoda se može koristiti i za slučajeve s kontinuiranim opterećenjima, ali se pritom greška može povećati. Metoda je primijenjena samo za statičke slučajeve opterećenja te je cilj provesti proširenje na analizu dinamičkih opterećenja. Za određivanje kontinuiranih opterećenja na aerodinamičnoj konstrukciji u [47]–[49] je primijenjena metoda konačnih elemenata. Položaji mjernih traka nisu bili optimalno određeni, dok je broj mjernih traka postavljenih na konstrukciji bio jednak broju mjesta s ulaznim opterećenjima.

Nadalje je dan opis linearnog inverznog problema koji je rješavan u prethodno navedenoj literaturi.

### 2.1.1. Linearni inverzni problem

Opisujući razne tehničke probleme matematičkim relacijama, parametri problema i izmjereni podaci moraju biti na neki način povezani. Iz tog razloga je potrebno odabrati parametre problema smisljeno, na način da se prepoznaju osnovne karakteristike procesa [50]. Pritom se javlja problem određivanja nepoznatih parametara modela na temelju izmjerenih podataka. Ovaj problem predstavlja inverzni problem. Najjednostavniji primjer za inverzni problem je onaj problem koji se u skladu s [51] može prikazati eksplicitnom linearnom jednažbom

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \mathbf{m} , \quad (2.1)$$

gdje je  $\mathbf{d}$  matrica izmjerenih podataka (analozi podataka, *eng. analogs of data*),  $\mathbf{G}$  je matrica proporcionalnosti (jezgra (baza) podataka, *eng. data kernel*), a  $\mathbf{m}$  predstavlja matricu nepoznatih parametara modela (*eng. model parameters*). Izraz (2.1) predstavlja temeljnu jednažbu za proučavanje diskretne inverzne teorije. Ovdje matrica  $\mathbf{G}$  predstavlja odnos između dvije općenito kontinuirane funkcije  $\mathbf{d}(x)$  i  $\mathbf{m}(x)$ , gdje je  $x$  neovisna varijabla. Inverzna teorija zasniva se na sljedećim relacijama [51]

*Diskretna inverzna teorija:*

$$d_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} m_j . \quad (2.2)$$

*Kontinuirano inverzna teorija:*

$$d_i = \int G_i(x) m(x) dx . \quad (2.3)$$

*Integralna teorija:*

$$d(y) = \int G(y, x) m(x) dx . \quad (2.4)$$

Glavna razlika između ovih teorija je što se izmjereni podaci  $d$  i nepoznati parametri modela  $m$  mogu tretirati kao kontinuirane funkcije ili diskretni parametri. Izmjereni podaci  $d$  u inverznoj teoriji su nužno diskretni tako da se kontinuirani inverzni problem i integralne jednažbe mogu pretvoriti u diskretni inverzni problem aproksimacijom parametara modela  $m$  kao vektora vlastitih vrijednosti u skupu s  $M$  točaka na način da je

$$\mathbf{m} = [m(x_1) \ m(x_2) \ m(x_3) \ \dots \ m(x_M)]^T. \quad (2.5).$$

U ovom radu istraživana je identifikacija statičkog opterećenja primjenom prethodno opisane linearne inverzne teorije.

### 2.1.2. Identifikacija statičkog opterećenja

Primjena metode konačnih elemenata za izračun nepoznatih statičkih, odnosno kvazistatičkih opterećenja inverznim modeliranjem ograničena je na linearno-elastične konstrukcije, gdje se pod linearnim smatra proporcionalni odziv pomaka (deformacije) konstrukcije s narinutim opterećenjem. Stvarna opterećenja koja djeluju na realne konstrukcije u eksploataciji ne mogu se uvijek dovoljno točno opisati teorijskim, pretpostavljenim opterećenjima generiranim u laboratorijskim uvjetima ili numeričkim metodama. Nasuprot tome, inverzno modeliranje omogućava dobivanje stvarnih vrijednosti opterećenja na konstrukciji kroz rezultate mjerenja deformacija konstrukcije u eksploataciji.

Nepoznata opterećenja na konstrukciju procjenjuju se iz izmjerenih deformacija na fiksnom broju mjesta. Kompletna konstrukcija se ponaša kao prijenosnik s konačnim brojem postavljenih mjernih točaka. Stoga je od velike važnosti pravilno odabrati optimalna mjesta za mjerne točke. Kao što je ranije rečeno, točnost utvrđenih opterećenja ovisi o broju, položaju i orijentaciji tenzometarskih traka, kao i o tipu konstrukcije i vrstama opterećenja. Stvaranje unaprijednog modela za promatranu konstrukciju je prvi korak. Ovo podrazumijeva izradu točnog analitičkog ili numeričkog modela konstrukcije koristeći metodu konačnih elemenata koji će poslužiti za određivanje matrice krutosti, tako da se postave i koriste ispravni rubni uvjeti, kako bi se u danjim koracima mogla točno odrediti ulazna opterećenja. Izmjerene vrijednosti deformacija na površini konstrukcije koriste se za izračun nepoznatih opterećenja primjenom metode superpozicije gdje su izmjerene deformacije proporcionalne ulaznim opterećenjima. Poznato je da metoda superpozicije vrijedi za linearno-elastičnu konstrukciju koja je izrađena iz linearno-elastičnog materijala te pomaci njenih točaka linearno ovise o primijenjenom opterećenju. Pritom treba biti zadovoljena pretpostavka o malim deformacijama. Za takvu konstrukciju vrijedi linearna veza između deformacija  $\varepsilon$  mjerenih na vanjskim plohama konstrukcije  $\varepsilon$  i djelujućih opterećenja  $\mathbf{F}$  prema izrazu [52]

$$\varepsilon = \mathbf{DF}, \quad (2.6)$$



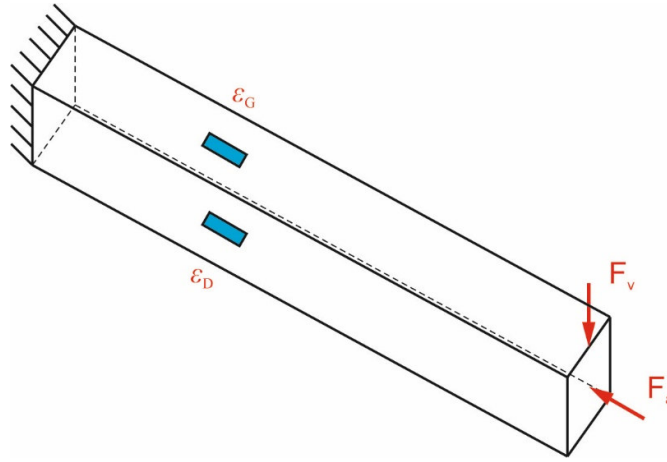
gdje je  $\mathbf{D}$  matrica proporcionalnosti ili korelacijska matrica (matrica osjetljivosti, *eng. sensitivity matrix*). Uspoređujući izraz (2.1) za opći linearni inverzni problem i izraz (2.6) za inverzno određivanje nepoznatih statičkih opterećenja vidljivo je da matrici  $\mathbf{G}$  sada odgovara matrica proporcionalnosti  $\mathbf{D}$ , matrici  $\mathbf{m}$  koja predstavlja matricu parametara modela odgovara matrica opterećenja  $\mathbf{F}$ , a matrici  $\mathbf{d}$  izmjerenih podataka odgovara matrica deformacije  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Izraz (2.6) napisan za više mjernih mjesta tenzometarskih traka i više nepoznatih opterećenja ima oblik

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{1,2} & \cdots & \varepsilon_{1,m} \\ \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{2,2} & \cdots & \varepsilon_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n,1} & \varepsilon_{n,2} & \cdots & \varepsilon_{n,m} \end{bmatrix} = [\mathbf{D}] \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_n \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

gdje je  $\varepsilon_{n,m}$  predstavlja deformaciju uslijed opterećenja  $n$  na mjernom mjestu  $m$ . Pritom dimenzije matrice deformacije i matrice opterećenja ovise o broju mjernih mjesta tenzometara,  $m$ , i broju komponenata opterećenjima,  $n$ . Matrica deformacije stoga ima dimenziju  $n$  (opterećenja) redaka sa  $m$  (tenzometarskih traka) stupaca, odnosno  $(n \times m)$ , dok s druge strane matrica opterećenja ima kvadratni oblik s dimenzijama  $n \times n$ . Na taj način matrica proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  ima dimenziju  $m$  (tenzometarskih traka) redaka s  $n$  (opterećenja) stupaca, odnosno  $(m \times n)$ . Pritom za dobivanje jedinstvenog rješenja za opterećenja treba vrijediti da je  $m \geq n$  [25].

Na primjeru sa slike 1 objasnit će se postupak dobivanja koeficijenata matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  što predstavlja temelj statičkog inverznog modeliranja. Konzola ima pravokutni presjek visine  $h$  i širine  $b$  te duljinu  $l$ . Na udaljenosti  $l_1$  od slobodnog kraja konzole postavljene su dvije tenzometarske trake, jedna na gornjoj, a druga na donjoj plohi. Konzola je opterećena osnom (aksijalnom) silom  $F_a$  i na savijanje vertikalnom silom  $F_v$ . Za linearno elastično ponašanje materijala s modulom elastičnosti  $E$  veza između opterećenja koja djeluju na konstrukciju i odziva svake pojedine tenzometarske trake može se dobiti iz poznatih relacija mehanike deformabilnih tijela za slučaj osnog opterećenja, odnosno opterećenja na savijanje.



Slika 1. Konzolna greda opterećena osnom (aksijalnom) silom  $F_a$  i na savijanje vertikalnom silom  $F_v$

Odzivne deformacije na gornjoj i donjoj plohi konzole za svaku pojedinu komponentu primijenjenog opterećenja mogu se zapisati u obliku

$$\varepsilon_{GF_a} = -\frac{1}{E} \frac{F_a}{bh}, \quad \varepsilon_{DF_a} = -\frac{1}{E} \frac{F_a}{bh}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{GF_v} = \frac{1}{E} \frac{F_v l_1 \cdot \frac{h}{2}}{bh^3}, \quad \varepsilon_{DF_v} = -\frac{1}{E} \frac{F_v l_1 \cdot \frac{h}{2}}{bh^3}, \quad (2.9)$$

gdje  $\varepsilon_G$  i  $\varepsilon_D$  označavaju deformacije na gornjoj i donjoj plohi ukliještene konzole (slika 1), a  $E$  je modul elastičnosti materijala. Primjenom metode superpozicije i jednadžbi (2.8) i (2.9) dobivaju se deformacije na tenzometarskim trakama na gornjoj i donjoj plohi konzole u obliku

$$\begin{aligned} \varepsilon_G &= \varepsilon_{GF_a} + \varepsilon_{GF_v} = -\frac{1}{E} \frac{F_a}{bh} + \frac{6F_v l_1}{Ebh^2}, \\ \varepsilon_D &= \varepsilon_{DF_a} + \varepsilon_{DF_v} = -\frac{1}{E} \frac{F_a}{bh} - \frac{6F_v l_1}{Ebh^2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

kao sustav linearnih jednadžbi koji matrično zapisan glasi

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_G \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{E} & \frac{1}{bh} & \frac{6l_1}{Ebh^2} \\ -\frac{1}{E} & \frac{1}{bh} & -\frac{6l_1}{Ebh^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_v \end{bmatrix} = \mathbf{DF}. \quad (2.11)$$

Za analizirani problem iz izraza (2.11) slijedi:

- matrica deformacije:  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_G \quad \varepsilon_D]$ ,
- matrica proporcionalnosti:  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Ebh} & \frac{1}{Ebh} & \frac{6l_1}{Ebh^2} \\ -\frac{1}{Ebh} & -\frac{1}{Ebh} & -\frac{6l_1}{Ebh^2} \end{bmatrix}$ ,
- matrica opterećenja:  $\mathbf{F}^T = [F_a \quad F_v]$ .

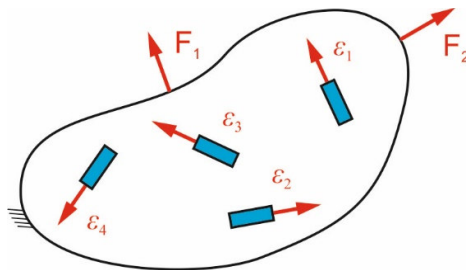
Za slučaj tijela proizvoljne geometrije sa slike 2, veza između izmjerenih deformacija s četiri tenzometarske trake i dvije nepoznate sile može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= d_{11}F_1 + d_{12}F_2, \\ \varepsilon_2 &= d_{21}F_1 + d_{22}F_2, \\ \varepsilon_3 &= d_{31}F_1 + d_{32}F_2, \\ \varepsilon_4 &= d_{41}F_1 + d_{42}F_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Prethodni izrazi zapisani matrično imaju oblik

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \\ d_{41} & d_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{F}, \quad (2.13)$$

gdje koeficijenti  $d_{ij}$  u matrici  $\mathbf{D}$  označava osjetljivost tenzometarske trake  $i$  prema nepoznatom opterećenju  $j$ . Drugim riječima,  $d_{ij}$  predstavlja izmjerenu deformaciju na mjestu  $i$  uslijed jediničnog opterećenja na mjestu  $j$ . Na taj način koeficijent  $d_{ij}$  možemo poistovjetiti s utjecajnim koeficijentom. Način određivanja koeficijenata u matrici  $\mathbf{D}$  prikazan je u poglavlju 2.1.2.5.



Slika 2. Četiri tenzometarske trake na tijelu proizvoljnog oblika opterećenom s dvije sile

### 2.1.2.1. Rješenje inverznog diskretnog problema

Kada se odrede svi koeficijenti matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$ , mogu se pomoću eksperimentalno mjerenih deformacija ili numerički izračunatim deformacijama na određenim mjestima na konstrukciji odrediti nepoznata ulazna opterećenja. Iz izraza (2.13) je vidljivo da matrica  $\mathbf{D}$  općenito nije kvadratna pa njen inverz ne možemo odrediti na način kao što to radimo za običnu kvadratnu matricu. Na primjer, za sustav linearnih algebarskih jednadžbi zapisan matrično u obliku  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , gdje su  $\mathbf{A}$  (kvadratna matrica) i  $\mathbf{B}$  matrice poznate, a  $\mathbf{X}$  je nepoznata matrica, rješenje dobivamo korištenjem inverzne matrice  $\mathbf{A}^{-1}$  u obliku  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ . Međutim, za određivanje matrice sila iz izraza (2.13) potrebno je koristiti generalizirani (pseudo) inverz matrice  $\mathbf{D}$  koji se označava s  $\mathbf{D}^{-g}$  i prema [50] je jednak

$$\mathbf{D}^{-g} = [\mathbf{D}^T \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{D}^T. \quad (2.14)$$

Kako je prethodni izraz određen primjenom metode najmanjih kvadrata [50], rješenje inverznog problema definiranog izrazom (2.6) je

$$\mathbf{F}^{\text{est}} = \mathbf{D}^{-g} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.15)$$

gdje je  $\mathbf{F}^{\text{est}}$  matrica procijenjenog (estimiranog) opterećenja. Uspoređujući prethodni izraz i prethodno opisano rješenje sustava linearnih algebarskih jednadžbi  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  možemo zaključiti da je generalizirani inverz na neki način analogan inverzu obične kvadratne matrice. Međutim, analogija je vrlo ograničena jer generalizirani inverz u doslovnom smislu nije inverz matrice, nije kvadratni, a  $\mathbf{D}^{-g} \mathbf{D} \neq \mathbf{D} \mathbf{D}^{-g}$ .

### 2.1.2.2. Matrica razlučivosti podataka

Koliko se dobro procjena opterećenja (parametara modela)  $\mathbf{F}^{\text{est}}$  dobivena rješavanjem inverznog problema uklapa u izmjerene podatke (deformacije) možemo odrediti uvrštavanjem izraza (2.15) u jednadžbu (2.6),  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{F}$ , pa prema [51] dobivamo

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pre}} = \mathbf{D} \mathbf{F}^{\text{est}} = \mathbf{D} (\mathbf{D}^{-g} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{obs}}) = (\mathbf{D} \mathbf{D}^{-g}) \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{obs}} = \mathbf{N} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{obs}}, \quad (2.16)$$

gdje simboli „pre“ i „obs“ označavaju predviđene (*eng. predicted*) i promatrane (*eng. observed*) (izmjerene) podatke. U prethodnom izrazu kvadratna matrica  $\mathbf{N} = \mathbf{D} \mathbf{D}^{-g}$  reda  $m \times m$  naziva se matrica razlučivosti podataka (*eng. data resolution matrix*). Ova matrica opisuje koliko se dobro predviđene vrijednosti deformacija poklapaju s izmjerenim deformacijama. Ako je

matrica razlučivosti podataka jedinična matrica,  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$ , tada se predviđene vrijednosti podataka poklapaju s izmjerenim vrijednostima,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pre}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{obs}}$  te je greška predviđanja jednaka nuli. Nasuprot tome, za slučaj da matrica razlučivosti podataka nije jednaka jediničnoj matrici, greška predviđanja različita je do nule [51]. Matrica razlučivosti podataka nije funkcija izmjerenih deformacija već je funkcija samo matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  koja sadrži podatke o modelu i geometriji eksperimentalnog postava (vidi izraz (2.11)). Na taj način se matrica razlučivosti podataka može izračunati i analizirati bez prethodne provedbe stvarnog eksperimenta i može poslužiti za projektiranje eksperimenta.

### 2.1.2.3. Matrica razlučivosti modela

Značaj pojedine izmjerene deformacije (točke podataka) u danom skupu izmjerenih podataka može se procijeniti iz matrice razlučivosti podataka. Analogno tome može se analizirati značaj parametara modela. Za to je potrebno pretpostaviti da postoji stvarni, ali nepoznati skup parametara modela (nepoznato opterećenje)  $\mathbf{F}^{\text{true}}$  koji rješava jednadžbu

$$\mathbf{D} \mathbf{F}^{\text{true}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{obs}}. \quad (2.17)$$

Da bi se odredilo koliko je točno određena procjena parametara modela  $\mathbf{F}^{\text{est}}$  blizu točnog rješenja primjenjuje se jednadžba iz [51]

$$\mathbf{F}^{\text{est}} = \mathbf{D}^{-g} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{obs}} = \mathbf{D}^{-g} (\mathbf{D} \mathbf{F}^{\text{true}}) = (\mathbf{D}^{-g} \mathbf{D}) \mathbf{F}^{\text{true}} = \mathbf{R} \mathbf{F}^{\text{true}}. \quad (2.18)$$

U prethodnom izrazu kvadratna matrica  $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-g} \mathbf{D}$  reda  $n \times n$  naziva se matrica razlučivosti modela (eng. *model resolution matrix*). Analogno kao i za matricu razlučivosti podataka, ako je matrica razlučivosti modela jednaka jediničnoj matrici,  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , svaki parametar modela je jedinstveno određen. Nadalje, ako se matrica razlučivosti modela  $\mathbf{R}$  razlikuje od jedinične matrice, tada su procjene parametara modela (nepoznata opterećenja) zapravo ponderirani prosjeci pravih parametara modela. Kao i matrica razlučivosti podataka, tako i matrica razlučivosti modela nije funkcija izmjerenih deformacija već je funkcija samo matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$ . Na taj način se i matrica razlučivosti modela može izračunati i analizirati bez prethodne provedbe stvarnog eksperimenta te je isto tako može poslužiti za projektiranje eksperimenta.

#### 2.1.2.4. Matrica kovarijance

U inženjerskoj praksi mjerenje deformacija uključuje greške. Ako su greške u mjerenjima deformacija neovisno i jednoliko raspoređene, a standardna devijacija svake od njih je  $\sigma$ , tada se matrica kovarijance za procjenu opterećenja [43] može dobiti na način

$$\text{cov } \mathbf{F} = \sigma^2 (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}. \quad (2.19)$$

Dijagonalni elementi matrice kovarijance su varijance. Oni su mjera raspršenosti u mjerenim podacima. Van dijagonalni elementi su kovarijance. Oni ukazuju na stupanj u kojem su parovi podataka povezani. U izrazu (2.14), odnosno (2.19)  $(\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1}$  je matrica poznata kao matrica osjetljivosti matrice  $\mathbf{D}$  [24]. Za danu varijancu u mjerenjima deformacija  $\sigma^2$ , minimizacija osjetljivosti matrice  $\mathbf{D}$  vodi povećanoj točnosti u procjeni opterećenja. Pritom osjetljivost matrice  $\mathbf{D}$  ovisi o broju, položajima i kutnim orijentacijama tenzometarskih traka postavljenih na konstrukciju. Na taj način optimalan odabir broja, položaja i kutnih orijentacija tenzometarskih traka može dovesti do smanjenja varijacija u procjenama opterećenja. Optimizacijski postupak za preciznu procjenu opterećenja koja djeluju na konstrukciju iz mjerenih deformacija prikazan je u tekstu koji slijedi.

Nadalje ovdje je potrebno naglasiti da kovarijanca parametara modela (nepoznato opterećenje) ovisi o kovarijanci podataka (izmjerene deformacije) i načinu na koji se greška preslikava iz podataka u parametre modela [51]. Ovo preslikavanje nije funkcija izmjerenih deformacija već je funkcija samo matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  i generaliziranog inverza. Za karakterizaciju stupnja greške preslikavanja uvodi se matrica jedinične kovarijance za procjenu opterećenja pa se izraz (2.19) može zapisati u obliku [51]

$$\text{cov}_u \mathbf{F} = \sigma^{-2} \mathbf{D}^{-g} (\text{cov } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{D}^{-gT} = \mathbf{D}^{-g} \mathbf{D}^{-gT}. \quad (2.20)$$

Kao i prethodno opisane matrice (matrica razlučivosti podataka i matrica razlučivosti modela) matrica kovarijance isto tako može poslužiti za projektiranje eksperimenta.

#### 2.1.2.5. Određivanje matrice $\mathbf{D}$

U ovom poglavlju bit će objašnjeno kako se određuje odnos između mjerenih deformacija i nepoznatih opterećenja, odnosno matrica proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  u modelu konačnih elemenata gdje svaki konačni element na površini tijela je potencijalno mjesto koje u realnosti odgovara lokaciji ugradnje tenzometarskih traka s različitim orijentacijama. Pritom model konačnih elemenata mora biti pripremljen tako da informacije o površinskim deformacijama budu

dostupne za sva područja koja će biti uzeta u obzir kao potencijalni položaji za lokacije tenzometarskih traka. Površinske deformacije podrazumijevaju primjenu ljuskastih elemenata u modelu, tako da ako je model diskretiziran s trodimenzijskim elementima potrebno je na površinama komponente povezivati ljuskaste i trodimenzijske elemente. Nadalje, iz numeričkog modela očitavaju se deformacije za konačni element, a ne čvorne deformacije. Naime, čvorne deformacije predstavljaju uprosječenu vrijednost deformacija u čvoru u kojem se sastaje više elemenata. Osim toga, za usmjerenost, odnosno orijentaciju tenzometarskih traka primjenjuje se lokalni koordinatni sustav elementa koji je smješten u središtu elementa, a ne u čvorovima. Koeficijenti u matrici proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  određuju se za jedinična opterećenja pa u tom slučaju jednadžba (2.12) poprima oblik

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{1,2} & \cdots & \varepsilon_{1,m} \\ \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{2,2} & \cdots & \varepsilon_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n,1} & \varepsilon_{n,2} & \cdots & \varepsilon_{n,m} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{I}, \quad (2.21)$$

gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica. Jedinično opterećenje dodjeljuje se na mjesto gdje djeluje nepoznato opterećenje koje treba odrediti. Za zorniji prikaz formiranja matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  prethodni izraz se može raspisati na način da se pokaže kako se vektor jediničnog opterećenja  $F_j = 1$  koristi za sastavljanje matrice  $\mathbf{D}$ . To je pokazano sljedećom relacijom

$$\begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,j} & \cdots & d_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \\ d_{l,1} & & & d_{l,n} \\ \cdots & & & \vdots \\ d_{i+1,1} & & & \vdots \\ \cdots & d_{i,j} & \ddots & \\ d_{2l,1} & & & d_{2l,n} \\ \cdots & & & \vdots \\ \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \cdots & & & \vdots \\ d_{(kl-1),1} & d_{(kl-1),j} & \ddots & d_{(kl-1),n} \\ d_{kl,1} & d_{kl,j} & \cdots & d_{kl,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_j = 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \cdots + d_{1,j} \cdots + 0 \\ 0 + \cdots + d_{2,j} \cdots + 0 \\ \vdots \\ 0 + \cdots + d_{i,j} \cdots + 0 \\ \vdots \\ 0 + \cdots + d_{kl,j} \cdots + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,j} \\ \varepsilon_{2,j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{i,j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kl,j} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Potencijalni kandidat
Jedinično opterećenje

Iz prethodnog izraza je vidljivo da u matrici deformacije vrijednosti u svakom retku predstavljaju vrijednost deformacije uslijed odgovarajuće komponente jediničnog opterećenja. Pritom za odgovarajuće jedinično opterećenje koeficijent u matrici  $\mathbf{D}$  je jednak pripadnoj deformaciji. U prethodnom izrazu  $l$  predstavlja lokaciju (položaj) tenzometarske trake, a  $k$  kut orijentacije trake. Pritom se svaka traka može zalijepiti pod  $k$  kuteva. Na taj način se prethodni izraz može proširiti na sve položaje i sve orijentacije tenzometarskih traka postavljenih na konstrukciju. Na primjer, ako postoji  $l$  lokacija (u modelu konačnih elemenata to je  $l$  konačnih elemenata) i svaka se traka može zalijepiti pod  $k$  kutova, onda će se prošireni skup kandidata (*eng. candidate set*) za postavljanje tenzometarskih traka sastojati iz  $l \times k$  kandidacijskih točaka (*eng. candidate point*). Prvi  $l$  redovi (kandidacijske točke) u matrici  $\mathbf{D}$  izraza (2.22) odnose se na orijentaciju tenzometarskih traka  $\alpha_1$ , dok se sljedeći  $l$  redovi odnose na orijentaciju traka  $\alpha_2$  itd. Sve potencijalne kombinacije pozicije i orijentacije tenzometarske trake predstavljaju potencijalnog kandidata u redu matrice deformacije. Također, sve moguće potencijalne pozicije tvore skup potencijalnih kandidata za optimalni položaj i orijentaciju tenzometarskih traka.

Matrica proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  je optimalna i najstabilnija kada determinanta matrice deformacija poprima maksimalnu vrijednost [53]. Ako u inverznom problemu koristimo deformacije očitane iz numeričkog modela, onda vrijednosti u svakom redu matrice deformacije odgovaraju vrijednostima deformacije s odgovarajuće pozicije i orijentacije mjerne trake. Izraz (2.15) napisan za sve položaje i sve orijentacije tenzometarskih traka ima oblik

$$\begin{bmatrix} F_{t1,1} & F_{t1,2} & \cdots & F_{t1,n} \\ F_{t2,1} & F_{t2,2} & \cdots & F_{t2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{tk,1} & F_{tk,2} & \cdots & F_{tk,n} \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-g} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t1,1} & \varepsilon_{t1,2} & \cdots & \varepsilon_{t1,m} \\ \varepsilon_{t2,1} & \varepsilon_{t2,2} & \cdots & \varepsilon_{t2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{tm,1} & \varepsilon_{tm,2} & \cdots & \varepsilon_{tm,m} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Zbog prirode inverznog problema postoji puno mogućih kombinacija, odnosno konfiguracija matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$ , ovisno o broju i položaju tenzometra. Međutim, samo nekoliko kombinacija matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  bit će stabilno i tolerantno na šum signala. Kao što je ranije rečeno, broj opterećenja koja djeluju na konstrukciju mora biti manji ili jednak broju postavljenih tenzometarskih traka za određivanje nepoznatih opterećenja, kako sustav jednadžbi ne bi bio neodređen ( $m \geq n$ ).



Provjera uvjetovanosti matrice, odnosno kondicijskog broja matrice (*eng. condition number of a matrix*) proporcionalnosti **D** prikazuje odnos između matrice proporcionalnosti **D** i svojstva analiziranog sustava jednadžbi. Faktor uvjetovanosti matrice proporcionalnosti **D** važan je podatak na koji treba obratiti pozornost pri određivanju položaja i orijentacija tenzometarskih traka za pripadnu konstrukciju i slučajeve opterećenja. U tablici 1 prikazana su svojstva sustava za različite faktore uvjetovanosti matrice **D**. Uvjetovanost matrice funkcija je broja, položaja i orijentacije tenzometarskih traka. Smještajući tenzometarsku traku na dio konstrukcijske komponente s malom osjetljivošću tenzometarske trake na ulazno opterećenje, može dovesti do povećane varijacije u određivanju vrijednosti opterećenja. Uvjetovanost matrice proporcionalnosti **D** zasniva se na linearnoj algebri koji je u osnovi mjera omjera najveće vrijednosti u matrici i najmanje vrijednosti u matrici. Ovo je mjera linearne stabilnosti sustava jednadžbi. Dobra uvjetovanost matrice proporcionalnosti **D** postiže se s čim manjom vrijednošću uvjetovanosti. Praktična gornja granica vrijednosti uvjetovanosti matrice **D** je 50, što je još uvijek prihvatljivo u pogledu stabilnosti sustava i pojačanja šuma [39].

**Tablica 1. Uvjetovanost matrice proporcionalnosti **D** [54]**

Uvjetovanost matrice (faktor uvjetovanosti matrice) proporcionalnosti <b>D</b> ,	Svojstvo sustava
< 10	Vrlo stabilan sustav. Sustav bi trebao biti vrlo tolerantan prema šumu.
< 50	Dobar sustav. Može doći do pojačanja šuma.
< 100	Uvjetno stabilan sustav. Potrebno je eventualno povećati broj elemenata kandidata za postavljanje tenzometarskih traka i/ili provjeriti sličnost opterećenja.
> 100	Neprihvatljivo. Mora se povećati broj elemenata kandidata za postavljanje tenzometarskih traka i provjeriti sličnost opterećenja.

### 2.1.2.6. Položaj tenzometarskih traka

Kao što je ranije rečeno, potencijalna mjesta za mjerenje deformacija može biti cijela površina konstrukcije s velikim brojem kombinacija položaja i orijentacije tenzometarskih traka. Međutim, važno je postaviti tenzometarske trake na pozicije koje će omogućiti što točnije određivanje opterećenja koja djeluju na konstrukciju. Svaka kombinacija položaja i orijentacije tenzometarske trake je potencijalni kandidat za mjerno mjesto, odnosno kandidacijsku točku s koje mjerene deformacije mogu biti uvrštene u matricu deformacije  $\varepsilon$ . Područja s geometrijskim diskontinuitetima, kao što su različiti otvori, zavareni spojevi, vijčani spojevi, itd., kao i nedostupna područja te mjesta djelovanja opterećenja trebaju se isključiti kao potencijalna mjerna mjesta. Pritom treba voditi računa da broj opterećenja  $n$  koja djeluju na konstrukciju mora biti manji ili jednak od broja postavljenih tenzometarskih traka,  $m$  ( $n \leq m$ ) [25]. Optimalni broj tenzometarskih traka može se odrediti iz maksimalno dopuštene varijance greške mjerenja deformacija prema izrazu:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m e_i^2 / (m - n), \quad (2.24)$$

gdje je  $e_i = \varepsilon_i^{\text{obs}} - \varepsilon_i^{\text{pre}}$  procjena greške tenzometarske trake  $i$ . Ovdje  $\varepsilon_i^{\text{obs}}$  i  $\varepsilon_i^{\text{pre}}$  predstavljaju promatrane (*eng. observed*) (eksperimentalno mjerene deformacije) i predviđene (*eng. predicted*) deformacije.

Trenutno jedan od vrlo često korištenih algoritama za određivanje optimalnih mjesta tenzometara je D-optimizacijski postupak [25]. Navedeni postupak je primijenjen u ovom radu te je opisan u 4. poglavlju. U istraživanjima provedenim u okviru ove doktorske disertacije analizirana su statička i ciklička opterećenja za što su korišteni prethodno opisani postupci. Pri tome, kod analize cikličkih opterećenja inercijske sile i sile prigušenja u konstrukcijskoj komponenti nisu uzete u obzir. Radi potpunosti pregleda postupka inverznog modeliranja za određivanje nepoznatog opterećenja u nastavku je opisan dinamički pristup.

## 2.2. Dinamički pristup

Za razliku od statičkih, dinamički pristupi određivanja opterećenja primjenjuju se za slučaj opterećenja koja se mijenjaju tijekom vremena. Pritom se razlikuju metode u frekvencijskom području, metode u vremenskom području i metode koje se temelje na modalnoj analizi.

### 2.2.1. Metode u frekvencijskom području

Metode u frekvencijskom području upotrebljavaju linearnu vezu između narinutih opterećenja i mjerenih odziva kao funkcija frekvencije, tj. funkcija frekvencijskog odziva. Funkcija frekvencijskog odziva konstrukcije može se izračunati kao integral opterećenja. Verifikacija postupka inverznog određivanja opterećenja pomoću programskog paketa FAST provedena je u radu [30] na primjeru testnog vjetroagregata instaliranog na kopnu. Ovdje je proveden izračun samo jedne komponente opterećenja i to aksijalne sile na rotoru vjetroagregata. Teorijske vrijednosti uspoređene su s izračunatim te je zaključeno da se postupkom inverznog modeliranja mogu dobiti dosta točni rezultati. Međutim, matrica funkcije frekvencijskog odziva mora biti inverzno određena za svaki raspon frekvencija, što zahtjeva značajne računalne resurse i čini ovu metodu neučinkovitom. Problem se svodi na rješavanje konvolucijskog integrala za određivanje nepoznatih opterećenja uz poznate funkcije impulsnog odziva i mjerene odzive.

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t [\mathbf{h}(t - \tau)] \mathbf{F}(\tau) d\tau, \quad (2.25)$$

gdje su:

$\mathbf{x}(t)$  – vremenski ovisan vektor odziva,

$\mathbf{F}(\tau)$  – vremenski ovisan vektor uzbudnih sila,

$\mathbf{h}(t)$  – matrica funkcije impulsnog odziva (*eng. impulse response function (IRF) matrix*).

Primjenjujući Fourierovu transformaciju u jednadžbi (2.25), relacija se može zapisati u frekvencijskom području u obliku

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \quad (2.26)$$

gdje su.

$\mathbf{X}(\omega)$  – vektor odziva,

$\mathbf{F}(\omega)$  – vektor uzbudnog opterećenja,

$\mathbf{H}(\omega)$  – funkcija frekvencijskog odziva (*eng. Frequency Response Function (FRF) matrix*).

FRF se može odrediti iz eksperimentalno izmjerenih podataka, ili se može rekonstruirati iz modalnog modela sustava, a isto tako se može dobiti numerički primjenom npr. metode

konačnih elemenata. FRF potpuno definira dinamičke karakteristike sustava.  $\mathbf{X}(\omega)$  se može izmjeriti eksperimentalno kao bilo koja od fizikalnih veličina - pomak, brzina, ubrzanje ili deformacija. Odnos između funkcije frekvencijskog odziva napreznja i frekvencijskog odziva pomaka je istraživalo više autora [55], [56]. Nakon što se odrede vektor odziva  $\mathbf{X}(\omega)$  i frekvencijska odzivna funkcija  $\mathbf{H}(\omega)$  problem se nadalje svodi na određivanje vektora uzbudnog opterećenja  $\mathbf{F}(\omega)$  i izračunavanje vremenski ovisnog vanjskog opterećenja  $\mathbf{F}(t)$  primjenom inverzne Fourierove transformacije. Za kvadratnu i nesingularnu matricu  $\mathbf{H}(\omega)$  izraz (2.26) može se invertirati u obliku

$$\mathbf{F}(\omega) = [\mathbf{H}(\omega)]^{-1} \mathbf{X}(\omega). \quad (2.27)$$

Nažalost prikazani inverzni problem u frekvencijskom području nije jednostavno za riješiti. Kao što je prikazano u [57], [58], na bilo kojoj određenoj frekvenciji, osobito blizu rezonancije, u odzivu dominira nekoliko modova pa se stoga matrica  $\mathbf{H}(\omega)$  sastoji od nekoliko dominantnih elemenata koji odgovaraju rezonantnim vrhovima i mnogo malih elemenata koji odgovaraju području dalje od rezonancije. To dovodi do loše uvjetovanosti matrice  $\mathbf{H}(\omega)$ , odnosno vrlo male varijacije u mjernom odzivu  $\mathbf{X}(\omega)$  mogu uzrokovati velike varijacije u procijenjenom vanjskom opterećenju.

### 2.2.2. Metode koje se temelje na modalnoj analizi

Inverzne metode koje se temelje na modalnoj analizi definirane su s modalnim parametrima, tj. vlastitom frekvencijom, odgovarajućim modalnim oblicima i modalnim faktorom prigušenja. Parametri se procjenjuju eksperimentalno iz mjernih vrijednosti, analitički za jednostavnije probleme ili pomoću numeričkih metoda. U radu [59], [60] predložene su metode koje se temelje na modalnoj analizi u vremenskom području. Predloženi pristup zasniva se na standardnoj jednadžbi dinamičke ravnoteže u modalnim koordinatama. Metoda koja se temelji na modalnoj analizi isto tako može biti definirana i u frekvencijskom području [61], [62], gdje se nepoznato opterećenje određuje transformacijom odziva u modalne koordinate. U radu [33] metoda je korištena za inverzno izračunavanje opterećenja od vjetra na rešetkastom stupu na temelju mjernih podataka odziva konstrukcije. Verifikacijom rezultata je pokazano da se prvi modovi vlastitih frekvencija sustava dobro poklapaju s numeričkim simulacijama. Ovdje su za mjerenje nižih frekvencija korišteni akcelerometri te je pokazano da se veće greške kod

određivanja opterećenja vjetra na stupu javljaju pri višim frekvencijama. Određivanje statičkih i dinamičkih opterećenja primjenom više različitih metoda prikazano je u [32]. Statička opterećenja određena su metodom najmanjih kvadrata i težinskim najmanjim kvadratima, dok su dinamička opterećenja izračunata inverznom modalnom metodom u nekoliko koraka. Prvi korak je određivanje modalnih pomaka, brzina i ubrzanja iz izmjerenih vrijednosti. U drugom koraku određuju se modalna opterećenja, a u trećem se globalna opterećenja određuju iz modalnih opterećenja. Pritom se javlja problem šuma, odnosno nečistog signala. Modalna metoda pokazuje prednosti u odnosu na metodu u frekvencijskom području, ali problem i dalje predstavlja loša uvjetovanost inverznog postupka. Postupak se temelji na jednadžbi dinamičke ravnoteže

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{r}(t) \quad (2.28)$$

gdje su:

$\mathbf{m}$  – matrica masa,

$\mathbf{c}$  – matrica prigušenja,

$\mathbf{k}$  – matrica krutosti,

$\mathbf{v}$  – vektor čvornih pomaka,

$\mathbf{r}(t)$  – vremenski ovisna uzbudna sila.

Transformacija spregnutog sustava dinamičkih jednadžbi u modalne koordinate, odnosno u raspregnuti sustav jednadžbi provodi se primjenom poznatih karakteristika vlastitih modova te uvođenjem modalne i spektralne matrice, kao i dijagonalne matrice prigušenja. Na taj način izraz (2.25) poprima oblik

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{c}_\phi \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Omega} \mathbf{z} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{r}(t), \quad (2.29)$$

gdje su:

$\mathbf{z}(t)$  – vektor modalnih koordinata ( $\mathbf{v} = \mathbf{\Phi}\mathbf{z}$ ),

$\mathbf{c}_\phi = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{c} \mathbf{\Phi}$  – dijagonalna matrica prigušenja,

$\mathbf{\Phi}$  – modalna matrica (čije su kolone vlastiti modovi),

$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{k} \mathbf{\Phi}$  – spektralna matrica (dijagonalna matrica kvadrata vlastitih frekvencija).

### 2.2.3. Metode u vremenskom području

Metode u vremenskom području su najnovije razvijene inverzne metode kojima se određuju nepoznata opterećenja iz mjerenih odziva u vremenskom području. Odziv konstrukcije u obliku funkcije impulsnog odziva (*eng. Impulse Response Function - IRF*) i sila koje djeluju na konstrukciju dan je u obliku konvolucijskog integrala prikazanog jednadžbom (2.25).

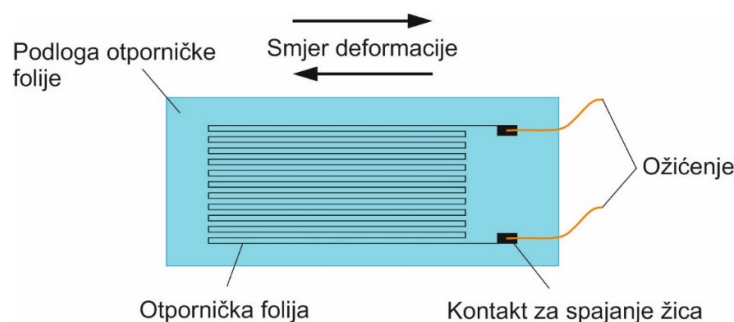
U radu [63] predložena je tehnika za određivanje opterećenja korištenjem inverznog konstrukcijskog filtera (*eng. Inverse Structural Filter - ISF*) koji procesira podatke odziva konstrukcije za procjenu ulaznih opterećenja. Metoda je uspješno primijenjena za određivanje sila spajanja između svemirske letjelice i svemirske postaje MIR koristeći podatke dobivene numerički simuliranim odzivom. Autori ističu slučajeve u kojima metoda ne daje pouzdana rješenja. Inoue i ostali [64] su dali pregled različitih tehnika koje su razvijene za indirektnu procjenu veličine udarne sile, zajedno s njenom lokacijom i smjerom. U radu [65] dan je pregled i usporedba dviju tehnika vremenskog pristupa, inverznog konstrukcijskog filtera (*eng. Inverse Structural Filter - ISF*) i zbroja težinskih akceleracija (*eng. Sum of Weighted Acceleration Technique - SWAT*), te je dan prikaz nedostataka navedenih metoda. Osim toga, dan je prikaz mogućih poboljšanja *ISF* tehnike. U radovima Gupte i ostalih [23], [25], [53] predložene su tehnike vremenskog pristupa u kojima je deformacija mjerena na konačnom broju optimalno smještenih mjernih traka na konstrukciji. Za dobivanje što točnije procjene opterećenja primijenjena je tehnika redukcije modela. Osim toga, u radu [26] predložena je tehnika inverznog modeliranja koja se temelji na mjerenim akceleracijama i metode u vremenskom području. Dobar pregled inverznih metoda za identifikaciju opterećenja dan je u [66].

U tekstu koji slijedi opisan je princip mjerenja deformacija primjenom tenzometarskih traka koje su primijenjene u ovom radu.

## 2.3. Tenzometarske trake

Tenzometarska traka prikazana na slici 3 je senzor čiji izmjereni električni otpor varira s promjenama u deformaciji ili deformiranju materijala koja nastaje zbog primijenjenog opterećenja, konvertirajući silu, pritisak, odnosno masu u promijene u električnom otporu koje se mogu mjeriti. Tenzometarske trake pretvaraju primijenjenu silu, tlak, zakretni moment itd. u

električni signal koji se može izmjeriti. Sila uzrokuje deformacije, koje se zatim mogu mjeriti pomoću tenzometarskih traka promjenom električnog otpora.



Slika 3. Tenzometarska traka

Tenzometarske trake pričvršćuju se na podlogu posebnim ljepilima. Ovisno o potrebnom vijeku trajanja mjernog sustava koriste se različite vrste ljepila. Za kratkotrajna mjerenja prikladno je ljepilo na bazi cijanoakrilata, dok za dugotrajnu ugradnju potrebna su ljepila na bazi epoksida. Velika pažnja potrebna je za pripremu površine na koju će se zalijepiti tenzometarske trake. Površina mora biti glatka, pripremljena obradom s finim brusnim papirom i očišćena otapalima. U kratkom vremenu potrebno je zalijepiti tenzometarsku traku kako bi se izbjegla oksidacija ili kontaminacija pripremljenog područja, a time i nepouzdana pričvršćenje tenzometarskih traka za površinu što može dovesti do greške u mjerenju.

Postoje različite vrste tenzometarskih traka ovisno o namjeni, kao što su :

- Linearne tenzometarske trake,
- Membranske tenzometarske trake,
- Dvostruke linearne tenzometarske trake,
- Tenzometarske trake punog mosta,,
- Smične tenzometarske trake,
- Tenzometarske trake pola mostova,
- Stupčane tenzometarske trake,
- 45 ° - Rozeta (deformacija se mjeri u tri smjera),
- 90° - Rozeta (deformacija se mjeri u dva smjera).

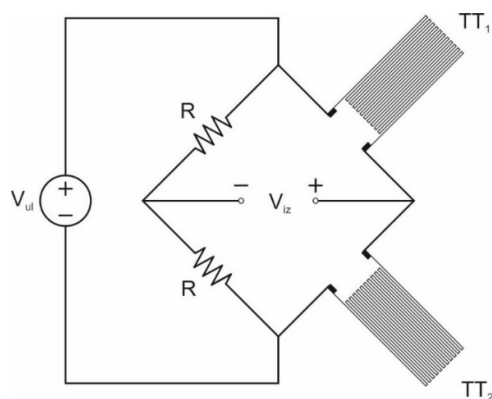
### 2.3.1. Wheatstoneov most

Nakon uspostavljenog postupaka mjerenja deformacija, sljedeći korak pri korištenju tenzometra je dobivanje korisnih podataka iz izmjerenih električnih otpora. Tenzometarska

traka mora biti povezana s električnim krugom koji može precizno reagirati na promjene otpora povezanih s deformacijom. Višestruke tenzometarske trake mogu se koristiti u podijeljenom krugu mosta za mjerenje malih promjena u električnom otporu, poznatom kao Wheatstoneov most. Wheatstoneov most može biti u različitim konfiguracijama:

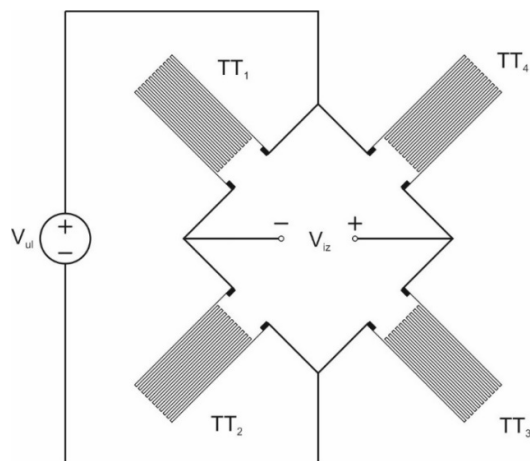
1. Četvrtinska konfiguracija
2. Polovična konfiguracija (slika 4)
3. Puna konfiguracija (slika 5)

Prednosti pune konfiguracije i polovične konfiguracije Wheatstonovog mosta su veća osjetljivost u odnosu prema konfiguraciji četvrtinskog mosta. Linearnu karakteristiku ovisnosti promjene otpora s promjenom deformacije čini punu konfiguraciju Wheatstoneovog mosta optimalnom za primjenu, u odnosu na polovične i četvrtmosne konfiguracije, koje daju izlaznu karakteristiku samo približno proporcionalnu.



**Slika 4. Polovična konfiguracija Wheatstoneovog mosta**





Slika 5. Puna konfiguracija Wheatstoneovog mosta

Napon napajanja Wheatstoneovog mosta  $V_{ul}$  je konstantan i poznat, dok je jedina nepoznata vrijednost koja se i mjeri, izlazni napon  $V_{iz}$ . Ako most nije u ravnoteži (tj. napon dijagonale mosta  $V_{iz}$  različit od nule), to je uzrokovano razlikom napona električnih otpora  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ ,  $R_4$ . Tada se izlazni napon računa pomoću jednadžbe

$$V_{iz} = V_{ul} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right). \quad (2.30)$$

Wheatstoneov most može biti u ravnoteži dok je izlazni napon jednak nuli, te se izraz može zapisati u obliku jednadžbe

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}. \quad (2.31)$$

Promjena opterećenja koja prouzrokuje promjenu deformacije mijenja otpor tenzometarske trake za  $\Delta R$ , te se izraz može zapisati u obliku jednadžbe

$$V_{iz} = V_{ul} \left( \frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2} - \frac{R_4 + \Delta R_4}{R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4} \right). \quad (2.32)$$

Da bi se mogle mjeriti deformacije, otpor na otpornicima  $R_1$  i  $R_2$  moraju biti jednake vrijednosti u Wheatstoneovu mostu. Isto pravilo vrijedi i za otpornike  $R_3$  i  $R_4$ . Koristeći se tim pravilom i zanemarivanjem faktora ( $\Delta R_x \cdot \Delta R_y$ ) zbog malih vrijednosti, jednadžba (2.33) se može skratiti i izraziti u slijedećem obliku:

$$\frac{V_{iz}}{V_{ul}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right). \quad (2.33)$$

Te se odnos promijene otpora  $\Delta R/R$  može zamijeniti s:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon, \quad (2.34)$$

gdje je  $k$  veličina koja označava faktor tenzometarske trake i konstantna je vrijednost, a  $\varepsilon$  je veličina deformacije koja može biti pozitivna u slučaju vlačnog naprezanja i negativna u slučaju tlačnog naprezanja.

Uvrštavanjem izraza (2.35) u izraz (2.34) dolazi se do konačne jednadžbe:

$$\frac{V_{iz}}{V_{ul}} = \frac{k}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4). \quad (2.35)$$

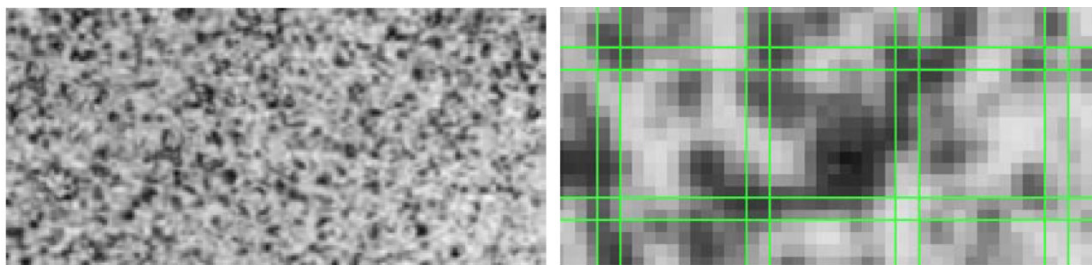
Neuravnoteženom Wheatstoneovom mostu izlazni napon je proporcionalan mjerenoj deformaciji, te se koristi za mjerenje otpora tenzometarske trake. Na slikama 4 i 5 prikazane su dvije osnovne konfiguracije mosta s tenzometarskim trakama: polumost i puni most. Što je više tenzometarskih traka u mostu to je veća osjetljivost mjernog sklopa.

U konfiguraciji Wheatstonovog mosta napon pobude primjenjuje se na krug, a izlazni napon mjeri se na dvije točke u sredini mosta. Kada na konfiguraciji Wheatstonovog mosta ne djeluje opterećenje, Wheatstoneov most je uravnotežen i izlazni napon je nula. Svaka manja promjena u materijalu ispod tenzometarskih traka rezultira promjenom otpora tenzometarskih traka dok se deformira s materijalom. To dovodi do izbacivanja mosta iz ravnoteže, što rezultira promjenom izlaznog napona. Kao što je ranije rečeno, promjena otpora je trenutna, što znači da je pojačanje signala često potrebno za pravilno određivanje promjena. Proces pojačanja pojačava promjene signala tenzometarskih traka; međutim to također dovodi do otkrivanja više neželjenih šumova u signalu te filtrira višak buke signala osiguravajući točne i razumljive podatke.

U tekstu koji slijedi opisan je princip mjerenja pomaka na plohi mjernog uzorka primjenom metode korelacije digitalne slike koja je primijenjena u ovom radu.

## 2.4. Optička metoda određivanja deformacija

ARAMIS 4M koji je korišten u ovom radu je optički mjerni sustav baziran na principu postupka objektnog rastera, fotogrametrije, za bezkontaktno trodimenzijsko nerazorno mjerenje pomaka i analizu deformacija na vanjskim plohama komponenata statički ili dinamički opterećenih konstrukcija. Optički sustav ARAMIS korišten u ovom radu instaliran je u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku Sveučilišta u Zagrebu te na Fakultetu za strojništvo Univerze v Mariboru gdje su provedeni eksperimenti. Sustav omogućuje mjerenje raspodjele pomaka po čitavome mjernom uzorku, za razliku od kontaktnih metoda poput tenzometarskih traka koje pružaju podatke o pomacima samo na konačnom broju točaka konstrukcije na kojima su postavljeni. Primjena ARAMIS-a je široka u analizi čvrstoće konstrukcija, verifikaciji numeričkih proračuna te kalibriranju parametara materijalnog modela. Prilagodba ARAMIS-a za određivanje nepoznatih svojstava materijala daje rezultate koji se mogu koristiti za optimiranje proizvoda, povećanje pouzdanosti numeričkih proračuna i na kraju njihovu validaciju s izmjerenim vrijednostima. Brzina primjene optičkog mjernog sustava, za razliku od konvencionalnih metoda, kao što su tenzometarske trake, akcelerometri i ekstenzometri smanjuje troškove za pripremu i kalibraciju mjernih uređaja te ubrzava vrijeme potrebno za mjerenje i obradu mjernih podataka. Optički mjerni sustav ARAMIS se sastoji od stativa, osvjetljenja i kućišta u kojem se nalaze dvije kamere visoke brzine i rezolucije koje su unaprijed podešene i kalibrirane za određeni položaj u prostoru, uvjetovan veličinom mjernog objekta, koji može varirati u rasponu veličina od  $\text{mm}^2$  do više  $\text{m}^2$ , te računala za obradu i prikaz podataka s pripadajućim programskim paketima. ARAMIS prepoznaje mjerni objekt pomoću stohastički nanesenog rastera (slika 6). Na tom rasteru se bira početna točka iz koje se izvodi mreža faceta, koje svaka kamera vidi pod drugim kutom, te ih računalo uspoređuje, kao i promjenu položaja i oblika uzorka te iz tih pomaka izračunava tražene podatke.



Slika 6. Stohastički uzorak i mreža faceta

U koracima mjerenja DIC metode, prvo treba navesti ili definirati područje mjerenja na referentnoj slici koja se dalje dijeli na ravnomjerno raspoređene virtualne mreže. U svakoj točki virtualnih mreža prilikom opterećivanja se izračunavaju pomaci kako bi se mogla odrediti raspodjela deformacija na cijeloj mjernoj plohi uzorka. Osnovni princip DIC-a je praćenje i usklađivanje istih točaka (ili piksela) između dviju slika snimljenih prije i nakon deformiranja. Da bi se izračunao pomak neke točke T, odabire se kvadratni referentni podskup od određenog broja piksela usredotočenih u točki T iz referentne slike i koristi se za praćenje odgovarajućeg mjesta na deformiranoj slici. Razlog zašto je kvadratni podskup, a ne pojedinačni piksel odabran za podudaranje je taj što se podskup koji obuhvaća širu varijaciju razina sive boje razlikuje od ostalih podskupina i stoga se može jedinstvenije identificirati na deformiranoj slici. Da bi se procijenio stupanj sličnosti između referentnog podskupa i deformiranog podskupa, kriterij unakrsne korelacije ili kriterij korelacije zbroja kvadrata mora biti unaprijed definiran. Postupak podudaranja dovršen je pretragom vršnog položaja raspodjele koeficijenta korelacije. Jednom kada se detektira koeficijent korelacije, određuje se položaj deformirane podskupine. Razlike u položajima središta referentne podskupine i ciljane podskupine daju vektor pomaka u nekoj točki.

### 3. NUMERICKE METODE ZA MODELIRANJE RASTA PUKOTINA

Numeričko modeliranje iniciranja i rasta pukotine vrlo je zahtjevan problem. U skladu s tim, predloženi su različiti numerički pristupi. Za modeliranje rasta pukotina u krhkim materijalima dostupno je više različitih metoda koje se temelje na Griffithovoj teoriji linearno elastične mehanike loma, gdje razvoj pukotine ovisi o svojstvima materijala kao što su kritično naprezanje i lomna žilavost materijala. Pritom se formiranje pukotine određuje pomoću energije površinske napetosti, odnosno energije potrebne za stvaranje dviju novih površina loma. Najviše su u primjeni diskretne metode kod kojih je rast pukotine kao geometrijskog diskontinuiteta definiran kriterijem loma za razdvajanje čvorova u mreži konačnih elemenata. Nedostatak diskretnih metoda temeljenih na klasičnoj formulaciji MKE je što se rast pukotine odvija samo duž rubova konačnih elemenata te su rezultati ovisni o gustoći i usmjerenosti mreže. U ovom poglavlju ukratko su dane osnove formulacije proširene metode konačnih elemenata (X-FEM) i metode faznog polja koje su korištene u radu za numeričko modeliranje i računalnu simulaciju procesa iniciranja i rasta pukotina.

#### 3.1. Proširena metoda konačnih elemenata

Proširena metoda konačnih elemenata (X-FEM) koristi se za modeliranje rasta pukotina u jednostavnim i složenim trodimenzijskim modelima [67]. Primjena X-FEM-a za opisivanje diskontinuiteta polja pomaka na slobodnim površinama pukotine i singularnosti naprezanja i deformacija u vrhu pukotine, bez potrebe za novom diskretizacijom modela kod prirasta pukotine, omogućuje učinkovitu simulaciju rasta pukotine. Diskretizacija modela postiže se dodavanjem dodatnih uvjeta, odnosno proširenjem klasične metode konačnih elemenata (MKE). Simuliranje rasta pukotina proširenjem MKE formulacije prvi su uveli Belytschko i Black [68], obuhvaćajući tri glavne cjeline: opis pukotine, diskretizaciju pukotine i kriterije za rast pukotine. Primjenom metode obogaćivanja elementa u blizini vrha pukotine asimptotskim poljem pomaka smanjuje se potrebni broj konačnih elemenata za opisivanje singularnosti u vrhu pukotine u odnosu na klasičnu formulaciju MKE. Jednostavniji i lakši postupak za uvođenje diskontinuiranog polja pomaka na mjestu pukotine uveli su Moës, Dolbow i Belytschko [69], prilagođavanjem generalizirane Heaviside funkcije. Razvijena su jednostavna pravila za kontinuirano proširivanje funkcije pomaka u vršku pukotine. Daux i sur. [70] metodu

su nazvali proširenom metodom konačnih elemenata (X-FEM) te su ju verificirali na modelima složenih geometrija pukotine.

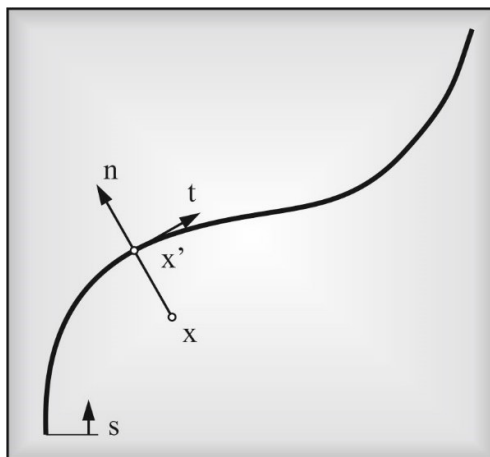
X-FEM ne koristi mrežu koja odgovara pukotinama, prazninama ili nehomogenosti kao što je to slučaj s klasičnom metodom konačnih elemenata. U X-FEM-u, za problem s pukotinom, prvo se stvara standardna mreža konačnih elemenata bez uključivanja geometrijskog diskontinuiteta. Prisutnost pukotina, praznina ili nehomogenosti se zatim prikazuje neovisno o mreži obogaćujući aproksimaciju standardnog polja pomaka s dodatnim funkcijama. Generaliziranim Hevisade-ovim funkcijama  $H(x)$  i asimptotskim funkcijama pomaka oko vrha pukotine  $B(x)$  proširuju (obogaćuju) se standardne interpolacijske funkcije pomaka [71]:

$$u^h(x) = \sum_{I \in N} N_I(x)u_I + \sum_{J \in N_{cr}} \tilde{N}_J(x)(H(x) - H(x_J))a_J + \sum_{K \in N_{ip}} \tilde{N}_K(x) \sum_{\alpha=1}^4 (B_\alpha(x) - B_\alpha(x_K))b_{\alpha K}. \quad (3.1)$$

Na taj način, za modeliranje pukotine u X-FEM-u standardne interpolacijske funkcije za pomake “obogaćuju” se generaliziranim Hevisade-ovim funkcijama  $H(x)$  i asimptotskim funkcijama pomaka oko vrha pukotine  $B(x)$ , gdje se funkcija oblika obogaćenog čvora može razlikovati od funkcije oblika običnog čvora. Diskontinuitet u pomaku nastaje tamo gdje se pomak s jedne strane pukotine potpuno razlikuje od polja pomaka suprotne strane pukotine. Kinematika pukotine može se definirati na temelju Hevisade-ove funkcije. Heviside funkcija jedna je od najpopularnijih funkcija koja se koristi za modeliranje diskontinuiteta pukotina u proširenim formulacijama MKE. Hevisade-ova funkcija definira se na način da je

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{ako } x < 0 \text{ (ispod pukotine),} \\ +1 & \text{ako } x > 0 \text{ (iznad pukotine).} \end{cases} \quad (3.2)$$

Heviside-ovoj funkciji  $H(x)$  definira se vrijednost (+1) ako se određena promatrana točka nalazi iznad putanje pukotine, a ako se određena promatrana točka nalazi ispod putanje pukotine poprima vrijednost (-1). Definiranje Heviside-ove funkcije  $H(x)$  ispod pukotine i iznad pukotine odnosi se na promatranu vanjsku normalu, gdje je pravilo da je vanjska normala usmjerena iznad pukotine. Na slici 7 je prikazana putanja pukotine s definiranom vrijednosti (+1). Ovdje je  $n$  jedinična vanjska normala,  $x$  predstavlja odabranu točku, a  $x'$  je točka sjecišta pukotine s mrežom konačnih elemenata.

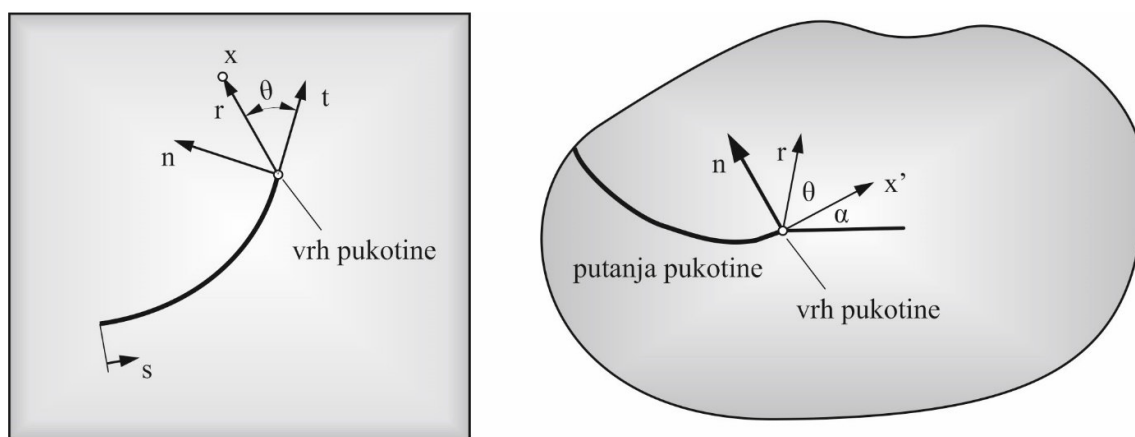


Slika 7. Definicija normale na pukotinu

U blizini vrha pukotine za polje pomaka koristi se asimptotska funkcija pomaka  $B(x)$ :

$$B \equiv [B_1, B_2, B_3, B_4] = \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta \right]. \quad (3.3)$$

Lokalni polarni koordinatni sustav s ishodištem u vrhu pukotine prikazan je na slici 8.



Slika 8. Lokalni polarni koordinatni sustav s ishodištem u vrhu pukotine

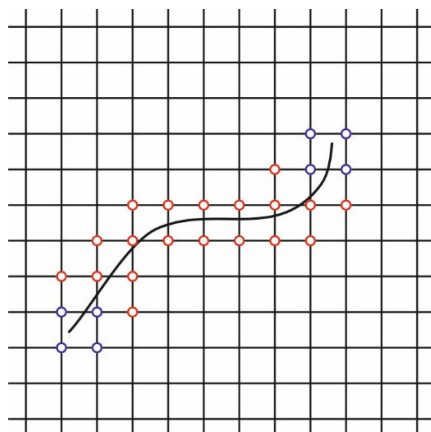
Obogaćivanjem klasične metode konačnih elemenata dodatnim uvjetima ističu se prednosti X-FEM-a u odnosu na klasičnu MKE kao što su:

1. pojednostavljuje generiranje mreže bez pukotine ,
2. upotreba konačnih elemenata bez značajnih promjena u formulaciji,
3. praćenje pukotine bez potrebe za generiranjem nove mreže konačnih elemenata kod napredovanja pukotine,
4. prikazivanje nezavisnih polja deformacija s obje strane pukotine,

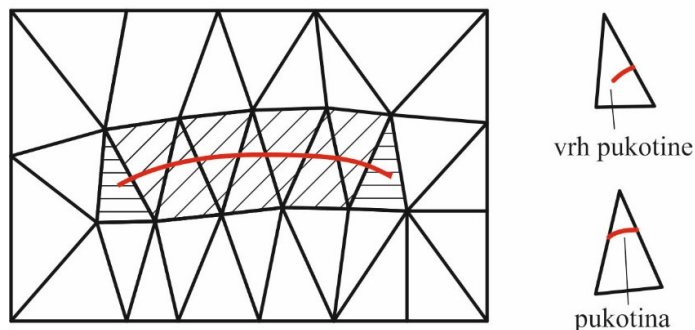
5. robusna i popularna metoda koja se koristi za industrijske probleme i implementirana je u komercijalne CAE programe.

U proširenoj formulaciji metode konačnih elemenata za modeliranje pukotina koriste se tri tipa čvorova:

1. Klasični čvorovi, za konačne elemente u modelu gdje elementi nisu presječeni s pukotinom,
2. H-čvorovi, za koje je funkcija pomaka proširena s Heveisade-ovom funkcijom  $H(x)$ . Za konačne elemente kod kojih su elementi presječeni pukotinom. Funkcije pomaka proširuju se s  $H(x)$  funkcijom ukoliko je element presječen pukotinom, ali vrh pukotine se ne smije nalaziti u jednom od pripadajućih elemenata/čvorova (Slika 9).
3. NT-čvorovi, poboljšani s funkcijama asimptotskog polja pomaka oko vrha pukotine. Funkcija pomaka se proširuje s NT funkcijom ukoliko se na barem jednom pripadajućem elementu nalazi vrh pukotine (Slika 10).



Slika 9. Selekcija obogaćenih čvorova 2D problema s pukotinom



Slika 10. Klasifikacija elemenata koji su određeni pozicioniranjem pukotine



Mada X-FEM predstavlja snažan alat za modeliranje rasta pukotina, ipak metoda ne daje uvijek dobre rezultate. Pogotovo se to odnosi na slučaj trodimenzijskih problema i složenog rasta pukotine uslijed složenih načina opterećivanja konstrukcijske komponente.

### 3.2. Metoda faznog polja

Trenutno jedna od najpopularnijih metoda za numeričku simulaciju oštećenja i loma materijala je teorija faznog polja. Najnovija istraživanja su pokazala da metoda faznog polja (eng. *phase-field method*) ima veliki potencijal u modeliranju složenih procesa loma na relativno jednostavan način pa čak i za slučaj trodimenzijskih problema. Navedena metoda je varijacijska te se može klasificirati kao difuzna jer aproksimira oštar diskontinuitet pukotine unutar nekog volumena pomoću parametra duljinske skale. Metoda uvodi parametar oštećenja koji se kontinuirano mijenja unutar domene definirajući tako oštećene i neoštećene dijelove materijala, odnosno njegove faze, te se tako izbjegava potreba za numeričkim praćenjem diskontinuiteta polja pomaka. Na taj način se teorija faznog polja može svrstati u kontinuumске metode modeliranja rasta pukotina. To ima značajne prednosti nad diskretnim opisom pukotine čija numerička implementacija zahtijeva eksplicitno (u klasičnoj MKE) ili implicitno (u proširenoj MKE, X-FEM) rješavanje problema diskontinuiteta.

U tekstu koji slijedi dan je sažeti prikaz modela faznog polja koji je razvijen u Laboratoriju za numeričku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu u okviru doktorske disertacije autora Karla Seleša [72]. U sklopu rada [72] razvijena je poopćena numerička metoda rješavanja krhkog, duktilnog te zamornog oštećenja i loma temeljena na teoriji faznog polja. Metoda je implementirana u komercijalni MKE softver Abaqus [71].

#### 3.2.1. Model faznog polja za slučaj monotonog opterećenja

Metoda faznog polja za opisivanje problema kvazi-krhkog oštećenja materijala temelji se na proširenju Helmholtzove slobodne energije dodatnim članom koji se odnosi na energiju pukotine

$$\Psi = \Psi^b + \Psi^s = \int_{\Omega/\Gamma} \psi(\varepsilon) d\Omega + \int_{\Gamma} G_c d\Gamma. \quad (3.4)$$

U prethodnoj jednadžbi koja opisuje ukupnu potencijalnu energiju  $\Psi$ ,  $\Psi^b$  predstavlja slobodnu energiju cjelovitog materijala, dok se  $\Psi^s$  odnosi na pukotinu. Ovdje je  $\psi(\varepsilon)$  gustoća energije elastičnog deformiranja,  $\varepsilon$  je tenzor malih deformacija,  $\Omega$  je razmatrani volumen,  $\Gamma$  površina pukotine, a  $G_c$  je Griffithova energija otvaranja pukotine. Regularizacijom pukotine preko cijelog volumena gubi se nepoznanica površine pukotine te izraz (3.4) poprima oblik

$$\Psi = \int_{\Omega} g(\phi) \psi(\varepsilon) d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(\phi) d\Omega. \quad (3.5)$$

U prethodnom izrazu podintegralna funkcija u prvom članu proširuje s degradacijskom funkcijom  $g(\phi)$ , a drugi član se zamjenjuje s  $\gamma(\phi)$  što predstavlja funkciju gustoće površinske energije pukotine. Na taj način se diskretni opis pukotine zamjenjuje kontinuumskim pristupom, čime se izbjegava eksplicitno praćenje površine pukotine. Uobičajena forma degradacijske funkcije koja množi energiju deformiranja  $\psi(\varepsilon)$  i na taj način smanjuje krutost materijala uslijed pojave oštećenja ima oblik

$$g(\phi) = (1 - \phi)^2. \quad (3.6)$$

Nadalje, funkcija  $\gamma(\phi)$  je izvedena iz 1D primjera, gdje je diskretna, oštra pukotina zamijenjena eksponencijalnom funkcijom

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow 0 \text{ za } x \rightarrow \pm\infty, \\ \phi(x) &= \exp\left(\frac{-|x|}{\ell}\right), \quad \phi(x) \rightarrow 1 \text{ za } x = 0, \\ \phi'(x) &\rightarrow 0 \text{ za } x \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdje je  $x$  udaljenost od fronte pukotine, a  $\ell$  parametar duljinske skale koji regulira širinu aproksimirane pukotine. Iz izraza (3.7) je vidljivo da je u modelu faznog polja diskretna geometrija pukotine aproksimirana skalarnim parametrom faznog polja  $\phi \in [0,1]$ , koji poprima vrijednosti 1 za potpuno oštećeno i 0 za neoštećeno stanje materijala. Za jednodimenzijski slučaj vrijedi da je

$$\Psi^s = G_c \int_{\Omega} \gamma(\phi) dx dA = G_c A. \quad (3.8)$$

pa je gustoća površinske energije pukotine jednaka

$$\gamma(\phi) = \frac{1}{2} \left[ \ell (\phi')^2 + \frac{1}{\ell} \phi^2 \right], \quad (3.9)$$

odnosno u općem slučaju ima oblik

$$\gamma(\phi) = \frac{1}{2} \left[ \ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\ell} \phi^2 \right]. \quad (3.10)$$

Uvrštavanjem izraza (3.6) i (3.10) u jednadžbu (3.5), dobivamo proširenu funkciju slobodne energije koja glasi

$$\Psi(\phi) = \int_{\Omega} \left[ (1-\phi)^2 \right] \psi(\varepsilon) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{G_c}{2} \left[ \ell \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{\ell} \phi^2 \right] d\Omega. \quad (3.11)$$

Primjenom principa virtualnog rada

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}, \quad (3.12)$$

dobivamo

$$\delta \Psi = \int_{\Omega} b_j \delta u_j d\Omega + \int_{\partial \Omega} h_j \delta u_j d\partial \Omega, \quad (3.13)$$

na temelju čega se dolazi do konstitutivnih relacija teorije faznog polja koje u potpunosti određuju nastanak i rast pukotine

$$\begin{aligned} & \left[ (1-\phi)^2 + k \right] \partial \sigma_{ij} / \partial x_i + b_j = 0 \quad \text{na } \Omega, \\ & \left[ (1-\phi)^2 + k \right] n_i \sigma_{ij} = h_j \quad \text{na } \partial \Omega_h, \\ & u_j = \bar{u}_j \quad \text{na } \partial \Omega_u, \\ & -G_c \ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} + \left[ \frac{G_c}{\ell} + 2\psi(\varepsilon) \right] \phi = 2\psi(\varepsilon) \quad \text{na } \Omega, \\ & \partial \phi / \partial x_i n_i = 0 \quad \text{na } \partial \Omega, \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdje  $u$  označava polje pomaka. Iz jednadžbe (3.14) vidljivo je kako  $\psi(\varepsilon)$  upravlja iniciranjem i rastom pukotine. Kako bi se spriječilo smanjivanje oštećenja, uvodi se parametar povijesti deformiranja

$$H(x, t) = \max_{\tau \in [0, t]} \psi(\varepsilon(x, \tau)), \quad (3.15)$$

koji zamjenjuje  $\psi(\varepsilon)$  u jednadžbi (3.14) i sprječava smanjenje oštećenja tijekom deformiranja. Osim toga, da bi model davao fizikalna rješenja za slučaj rasta pukotine potrebno je provesti dekompozicije energije deformiranja.

Iz mehanike loma je poznato da vlačna naprezanja otvaraju pukotine, dok ih tlačna zatvaraju. Kako bi se za računanje razvoja pukotina u obzir uzela samo vlačna naprezanja potrebno je razložiti energiju deformiranja na dio koji se odnosi na vlačna, odnosno tlačna naprezanja. Dva načina razdvajanja energije deformiranja koja su najčešća u literaturi su spektralna dekompozicija

$$\Psi^{\pm} = \lambda / 2 \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_{\pm}^2 + \mu \text{tr}(\varepsilon_{\pm}^2), \quad (3.16)$$

gdje su vlačna i tlačna deformacija definirane kao  $\varepsilon_{\pm} := \sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i^* \rangle n_i \otimes n_i$  i sferno – devijatorska dekompozicija koja definirana u obliku

$$\begin{aligned} \Psi^+ &= \frac{\lambda + 2/3\mu}{2} \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_+^2 + \mu \text{tr}(\varepsilon^{dev} : \varepsilon^{dev}), \\ \Psi^- &= \frac{\lambda + 2/3\mu}{2} \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_-^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

U jednadžbama (3.16) i (3.17)  $\lambda$  i  $\mu$  su Laméove konstante, simbol  $\langle \cdot \rangle$  predstavlja Macaulayovu zagradu, a  $\{\varepsilon_i^*\}_{i=1}^n$  i  $\{\mathbf{n}_i\}_{i=1}^n$  predstavljaju glavne vrijednosti tenzora deformacije i odgovarajuće vlastite vektore. Primjenom neke od prikazanih dekompozicija energije deformiranja, osnovna jednadžba faznog modeliranja (3.5) poprima oblik

$$\Psi = \int_{\Omega} \{g(\phi)\psi^+ + \psi^-\} d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(\phi) d\Omega. \quad (3.18)$$

Iz izraza (3.18) je očito kako degradacijska funkcija djeluje samo na pozitivni dio energije deformiranja koji se odnosi na vlačna naprezanja, dok negativni dio energije koji se odnosi na tlačna naprezanja ostaje nedegradiran. Nadalje, primjenom izraza (3.18) za izvod jednadžbi razvoja pukotine (3.14),  $\psi$  je potrebno zamijeniti s  $\psi^+$ . Korištenjem prikazanih dekompozicija energije deformiranja uvodi se anizotropnost zbog čega matrice krutosti postaju nesimetrične.

Formulacija modela faznog polja razvijena u doktorskoj disertaciji [72] implementirana je u programski paket Abaqus. Primjenom korisničkih rutina UEL i UMAT razvijeni su novi konačni elementi: linearni četverkutni element za ravninsko stanje deformacije i linearni heksaedarski 3D element. Čvorni stupnjevi slobode ovih elemenata su pomaci i parametar faznog polja  $\phi$ . Oba polja, pomak  $\mathbf{u}$  i fazno polje  $\phi$  interpolirana su istim funkcijama oblika, a za rješavanje ta dva polja u [73] je razvijen učinkovit „staggered“ algoritam s kriterijem konvergencije temeljenom na provjeri norme reziduala, čime se poboljšava brzina

konvergencije. Time je također riješen problem ne-konveksnosti osnovnog funkcionala slobodne energije, koji često dovodi do numeričkih nestabilnosti. Nakon varijacije izraza (3.11) s obzirom na fazno polje  $\phi$  i pomak  $\mathbf{u}$  te diskretizacije ovih polja dobiva se odvojeni sustav jednačbi u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\phi\phi}\phi &= \mathbf{R}^{\phi}(\mathbf{u},\phi), \\ \mathbf{K}^{uu}\mathbf{u} &= \mathbf{R}^u(\mathbf{u},\phi), \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdje su  $\mathbf{K}^{\phi\phi}$ ,  $\mathbf{K}^{uu}$  matrice krutosti, a  $\mathbf{R}^{\phi}(\mathbf{u},\phi)$ ,  $\mathbf{R}^u(\mathbf{u},\phi)$  su vektori rezidualnih sila.

### 3.2.2. Model faznog polja za slučaj zamornog opterećenja

Za slučaj zamornog opterećenja funkcional slobodne energije ima oblik

$$\Psi = \Psi^b + \Psi^s = \int_{\Omega/\Gamma} \psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega + \hat{F}(\bar{\psi}) \int_{\Gamma} G_c d\Gamma. \quad (3.20)$$

Na taj način je formulacija faznog polja za slučaj monotonog opterećenja temeljena na jednačbi (3.4) proširena na probleme zamornog loma. Ovdje je uvedena zamorna funkcija  $\hat{F} \in [1,0]$  koja degradira energiju loma, odnosno lomna materijalna svojstva, tijekom cikličkog opterećenja konstrukcije. Zamorna funkcija se definira pomoću akumulirane lokalne energije  $\bar{\psi}(t)$  pomoću koje se određuje povijest cikličkog deformiranja. Pritom lokalna energija  $\bar{\psi}(t)$  može povećavati svoju vrijednost samo u dijelu ciklusa rasterećenja na način da opisuje akumuliranje oštećenja materijala mijenjajući, odnosno smanjujući zamorna svojstva materijala. Ovdje mehanizam smanjenja zamornog svojstva materijala ovisi samo o cikličkoj, ponavljajućoj energiji deformiranja  $\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon})$ . Prikazani model razvijen je pod pretpostavkom elastičnog ponašanja materijala što odgovara takozvanom visokocikličkom zamornom režimu.

Više detalja o implementaciji modela faznog polja u programski paket Abaqus može se naći u [73] i [74].

#### **4. POSTUPAK INVERZNOG MODELIRANJA ZA IDENTIFIKACIJU NEPOZNATIH OPTEREĆENJA IZ MJERENIH DEFORMACIJA NA KONSTRUKCIJI S PUKOTINAMA**

Uobičajeni kriterij za definiranje smještaja tenzometarskih traka na konstrukciju bez pukotine je onaj koji se temelji na rezultatima analize čvrstoće (naprezanja i deformacija) konstrukcije. Međutim, nove smjernice projektiranja modernih konstrukcija, osim kriterija čvrstoće, krutosti, stabilnosti te vlastitih i uzbudnih frekvencija (da ne dođe do rezonancije), nalažu primjenu kriterija mehanike loma i zamora konstrukcija. Pritom je u fazi projektiranja na konstrukciji potrebno definirati kritična mjesta na kojima se u eksploataciji konstrukcije potencijalno mogu pojaviti pukotine. Na takva mjesta postavljaju se u numeričkom, analitičkom ili rijetko eksperimentalnom modelu hipotetske pukotine. Na taj način, kod definiranja razmještaja mjernih traka sustava za nadzor cjelovitosti konstrukcija potrebno je uzeti u obzir potencijalni nastanak i rast pukotina u toku eksploatacije konstrukcije. Cilj je da razmještaj mjernih traka na konstrukciji bude upravo takav da čim bolje omogući identifikaciju pukotine, a da se iz rezultata numeričkih simulacija odrede dopušteni režimi rada tako da upravljanje i održavanje konstrukcije tijekom njenog cijelog radnog vijeka bude što učinkovitije. Pojavom pukotine smanjuje se krutost konstrukcije, a samim time potrebno je procijeniti je li potrebno umanjiti režim rada konstrukcije, odnosno opterećenje konstrukcijskih komponenata s pukotinama. Na taj način je od velike važnosti učinkovita identifikacija opterećenja oštećene konstrukcije. U tekstu koji slijedi je opisan novi postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja iz mjerenih deformacija na konstrukciji s pukotinama predložen u ovom radu.

##### **4.1. Postupak određivanja opterećenja konstrukcija s pukotinom**

Postupak za identifikaciju nepoznatih opterećenja temelji se na određivanju optimalnog položaja tenzometarskih traka koristeći se optičkim mjernim metodama za mjerenje pomaka i analizu deformacija na površini konstrukcije. Pritom je složeni rast pukotina, koji je posljedica postojanja geometrijskih diskontinuiteta u konstrukciji i složenih načina opterećivanja, modeliran primjenom metode faznog polja, odnosno proširene metode konačnih elemenata (X-FEM) koje su danas jedne od najzastupljenijih metoda za rješavanje problema povezanih s nastankom i rastom pukotina. Za numeričko modeliranje primijenjen je programski paket

Abaqus, a za izračun nepoznatih opterećenja inverznim modeliranjem primijenjen je program True Load, koji je dio programskog paketa FeSafe za analizu zamora materijala i konstrukcija. Analiziranjem pukotina različitih dimenzija i orijentacija u ispitnim uzorcima najprije je razvijen postupak za identifikaciju monotonih opterećenja uz pretpostavku linearno-elastičnog ponašanja materijala. Cilj je ovdje bio definirati optimalni broj, razmještaj i orijentaciju tenzometarskih mjernih traka na konstrukcijskoj komponenti koji će za različite veličine pukotina omogućiti što točnije određivanje opterećenja. Na taj način postavljanje mjernih traka na ovako definirana mjesta osigurava učinkovito praćenje stanja konstrukcijske komponente tijekom njenog cjelokupnog radnog vijeka, što uključuje proces nastanka pukotine te njenog stabilnog rasta do kritične duljine. Kao i za konstrukcijske komponente bez pukotina i ovdje su za slučaj postojanja pukotina analizirani različiti slučajevi proporcionalnih i neproporcionalnih načina opterećivanja. Nakon toga, verifikacija postupka je provedena za slučaj cikličkih opterećenja. Osim toga, postupak je verificiran na realnoj konstrukcijskoj komponenti, osovinskom rukavcu vjetroagregata. U tekstu koji slijedi dan je opis novog postupka inverznog modeliranja predloženog u ovom radu. Dijagram toka postupka određivanja opterećenja konstrukcija s pukotinom dan je na slici 12. U skladu s dijagramom toka postupak se sastoji iz sljedećih koraka:

1. U prvom koraku potrebno je analizirati čvrstoću konstrukcijske komponente bez pukotine te definirati kritična mjesta na kojima se u eksploataciji konstrukcije potencijalno mogu pojaviti pukotine. Primjenom numeričkih metoda (metoda faznog polja, X-FEM, ...) odrediti putanju pukotine (*eng. crack path*) u komponenti, od faze iniciranja do njene kritične duljine.
2. U drugom koraku definira se veza između ulaznih opterećenja i deformacija za konstrukcijsku komponentu s različitim duljinama pukotine. Postupak je analogan i za komponentu bez pukotine u kojoj se pukotina još nije inicirala. Duljina pukotine se dijeli na inkremente (priraste) tako da se može slijediti njen složeni rast i kako bi se za različite duljine pukotine u idućim koracima mogao odrediti optimalan broj, položaj i orijentacija tenzometarskih traka za određivanje nepoznatog opterećenja. Za određivanje veze između opterećenja i deformacija na mjesto gdje djeluje nepoznato opterećenje koje treba odrediti dodjeljuje se jedinično opterećenje.
3. U trećem koraku se određuju površine na konstrukcijskoj komponenti na kojima se definiraju potencijalna mjesta za postavljanje mjernih traka, odnosno potencijalne točke u kojima se iz numeričkog modela očitavaju deformacije. Područja s geometrijskim

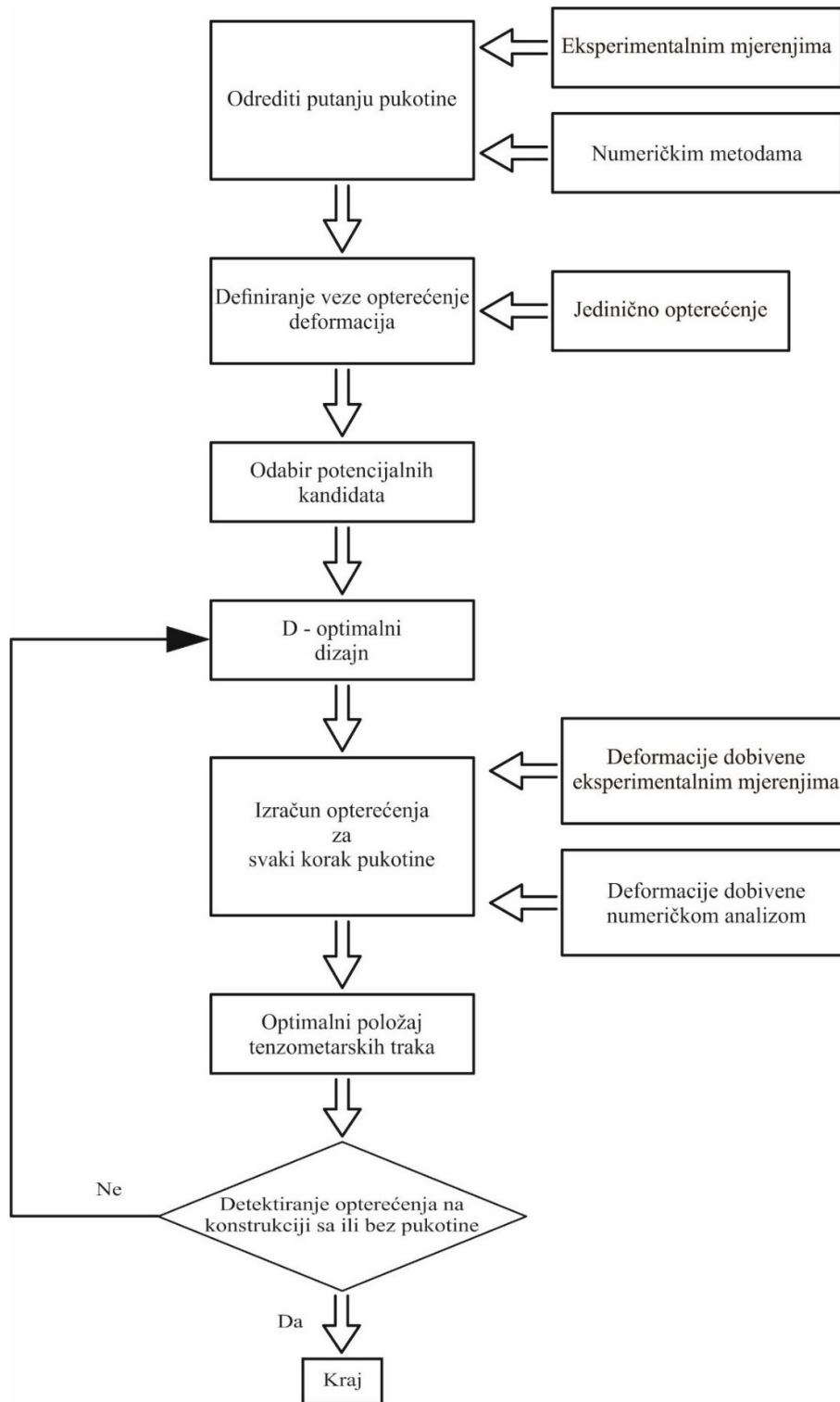
diskontinuitetima (različiti otvori, zavareni spojevi, vijčani spojevi, itd.), nedostupna područja, mjesta djelovanja opterećenja, potencijalna mjesta nastanka i rasta pukotine, površine potrebne za montažu, nedostupne površine te dosjedne površine trebaju se isključiti kao potencijalne površine.

4. U četvrtom koraku se primjenom D-optimizacijskog postupka (dijagram toka na slici 12) određuje optimalni broj, položaj i orijentacija tenzometarskih traka na konstrukcijskoj komponenti s različitim duljinama pukotine. Ovo se provodi za svaki inkrement (prirast) duljine pukotine. Za definirane položaje i orijentacije traka definira se matrica proporcionalnosti **D** kao veza između ulaznih opterećenja i izmjerenih, odnosno u numeričkom modelu očitanih deformacija.
5. U petom koraku, za sve inkremente duljine pukotine u konstrukcijskoj komponenti potrebno je provesti izračun nepoznatih opterećenja za optimalan broj, položaj i orijentaciju tenzometarskih traka.
6. U šestom koraku, primjenom metode najmanjih kvadrata i na temelju određenih položaja i orijentacije tenzometarskih traka za sve pojedine inkremente duljine pukotine određuje se položaj i orijentacija tenzometarskih traka koja daje najmanju grešku za cijelu duljinu i putanju pukotine, od njene inicijacije do kritične duljine, odnosno do maksimalne dopuštene duljine kod koje konstrukcija može raditi, a da ne dođe do loma konstrukcije.

Vrlo važnu ulogu u predloženom postupku imaju numeričke metode za modeliranje i računalnu simulaciju procesa iniciranja i rasta pukotina u konstrukciji, kao i optičke metode za mjerenje pomaka i analizu deformacija na plohama uzoraka koje se temelje na korelaciji digitalne slike (DIC). Naime, za što točnije određivanje nepoznatog opterećenja komponente s pukotinom potrebno je imati što bolje ulazne podatke, a to su putanja pukotine u komponenti te vrijednosti deformacija na mjestima tenzometarskih traka. Predikcija rasta pukotine u trodimenzijskoj konstrukcijskoj komponenti još uvijek je veliki izazov za znanstvenu zajednicu tako da trenutno potencijala za to imaju metoda faznog polja i X-FEM metoda koje su korištene u ovom radu. Najveći problem metode faznog polja je što zahtjeva vrlo gustu mrežu konačnih elemenata na mjestu pukotine tako da za realnu primjenu ju je neophodno kombinirati s metodom adaptivnog umrežavanja. S druge strane, X-FEM metoda općenito ne daje pouzdane rezultate za slučaj trodimenzijskih problema. Daljnji razvoj ovih metoda neophodan je za čim točniju predikciju rasta pukotine u realnim inženjerskim komponentama. Nadalje za validaciju ovih metoda te za mjerenje deformacija na plohama komponenti neophodna je primjena optičkih metoda. Kako se optičkom DIC metodom iz izmjerenih pomaka dobiva raspodjela deformacija na cijeloj plohi



ispitnog uzorka to omogućuje točnije definiranje broja, položaja i orijentacije tenzometarskih mjernih traka, u odnosu na slučaj kada se kao ulazni podaci za inverzno modeliranje koriste deformacije izmjerene primjenom tenzometarskih traka na ograničenom broju mjesta na konstrukciji, što je većinom slučaj u dosadašnjoj literaturi.



Slika 11. Dijagram toka postupka određivanja opterećenja konstrukcije s pukotinom

## 4.2. D-optimizacijski postupak

Kao što je ranije rečeno, cijela površina konstrukcije ima velik broj potencijalnih mjesta za postavljanje tenzometara. Za definiranje optimalnog broja, položaja i orijentacija tenzometarskih traka na konstrukcijskoj komponenti s različitim duljinama pukotine u radu je korišten D-optimizacijski postupak [75] koji je vrlo učinkovit algoritam za rješavanje navedenih problema. U ovom postupku rješava se optimizacijski problem gdje se minimalizira osjetljivost korelacijske matrice s pripadnim kriterijima prilagođenim za problem optimiranja. Za definirani broj tenzometarskih traka traže se optimalni položaji tako da položaj i orijentacija tenzometarskih traka osiguraju najmanju varijancu u procijeni opterećenja. Kriterij za minimiziranje osjetljivosti matrice zasniva se na maksimiziranju determinante od  $|\mathbf{D}^T \mathbf{D}|$  ( $\det(\mathbf{D}^T \mathbf{D})$ ). Takav način maksimiziranja determinante se naziva D-optimalni dizajn, gdje "D" u nazivu označava determinantu od  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$ . D-optimalni kriterij maksimiziranja determinante koristi se za odabir optimalnih položaja tenzometarskih traka od mogućih potencijalnih položaja koji će osigurati najveću moguću točnost određivanja opterećenja. Kako bi se greška u određivanju opterećenja svela na minimum, vrlo je poželjno smanjenje osjetljivosti matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$ .

Da bi se mogao provesti postupak D-optimalnog optimiranja, prvo se moraju odrediti pozicije i orijentacija tenzometarskih traka koje maksimiziraju matricu osjetljivosti  $\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  iz skupa potencijalnih položaja. Pritom se uobičajeno primjenjuju algoritmi bazirani na principima optimalnog povećavanja i smanjivanja broja trenutnih položaja i orijentacija tenzometarskih traka. S optimalnim povećanjem, mogući položaj s maksimalnom predviđenom varijancom dodaje se u red matrice  $\mathbf{D}$ . Isto tako s optimalnim smanjenjem, mogući položaj s minimalnom predviđenom varijancom izbacuje se iz reda matrice. Proces nadodavanja i uklanjanja mogućih položaja tenzometarskih traka na optimalan način provodi se do trenutka kada više nije moguće poboljšanje. Takva procedura se naziva algoritam sekvencijalne izmjene.

D-optimalni postupak koji se temelji na algoritmu sekvencijalne izmjene za dobivanje optimalnih položaja i orijentacije tenzometarskih traka iz skupa kandidata, prikazan na slici 12, može se podijeliti u nekoliko koraka:

1. Odrediti: broj mjernih tenzometarskih traka  $m$  koji će se postaviti na konstrukciju, broj primijenjenih opterećenja  $n$  i skup potencijalnih položaja traka.

2. Kreirati inicijalnu matricu  $\mathbf{D}$  reda  $m \times n$ , nasumičnim odabirom  $m$  različitih kandidata za postavljanje mjernih traka iz skupa svih kandidata.

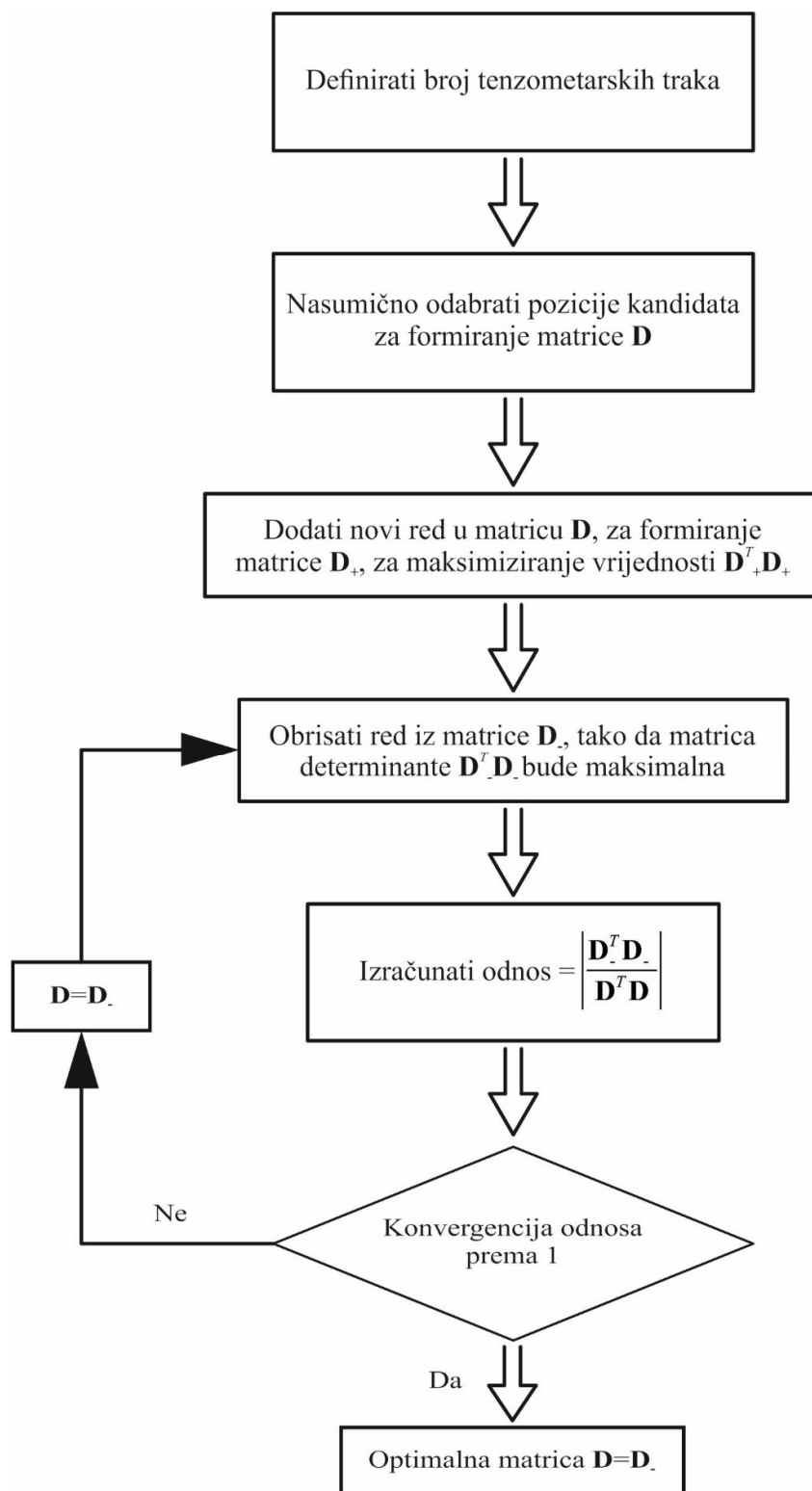
3. Od preostalih potencijalnih kandidata odabrati dodatnog kandidata za postavljanje mjerne trake te dodati pripadni redak u matricu  $\mathbf{D}$  za formiranje nove matrice  $\mathbf{D}^+$  tako da je determinanta od  $|\mathbf{D}^T + \mathbf{D}^+|$  maksimalna.

4. Iz nove povećane matrice  $\mathbf{D}^+$  obrisati jedan redak  $m + 1$  (redak s minimalnom varijancom predviđanja) kako bi se došlo do matrice  $\mathbf{D}$ . takve da determinanta matrice  $|\mathbf{D}^T \mathbf{D}|$  bude maksimalna.

5. Nastaviti proces pridodavanja i brisanja redaka u matrici  $\mathbf{D}$  sve dok se ne izvrši daljnje poboljšanje vrijednost determinante matrice  $|\mathbf{D}^T \mathbf{D}|$ .

6. Ako se daljnje poboljšanje vrijednosti determinante matrice  $|\mathbf{D}^T \mathbf{D}|$  ne može postići postupak je završen.

Na opisani način dobivena matrica  $\mathbf{D}$  sadrži informacije o optimalnim položajima i orijentacijama tenzometarskih traka.



Slika 12. Dijagram toka algoritma sekvencijalne izmjene [25]

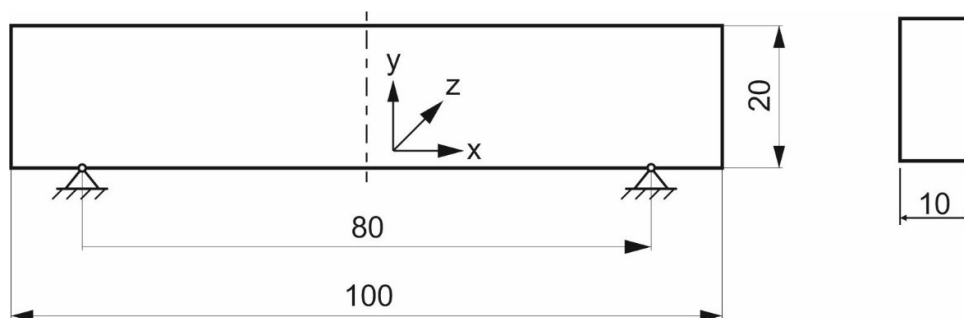
## **5. VERIFIKACIJA IZVEDENOG POSTUPKA INVERZNOG MODELIRANJA**

Novi postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja iz mjerenih deformacija, temeljen na određivanju optimalnog položaja tenzometarskih traka, izveden je na primjerima bez pukotine, s jednostavnim oblikom pukotine i sa složenom putanjom pukotine, kako bi se procijenila učinkovitost inverznog postupka. Pritom pod pojmom „jednostavni oblik pukotine“ se podrazumijeva pukotina čija putanja je pravolinijska, a površine pukotine su ravne. Analiziranjem uzoraka bez pukotine i s jednostavnim oblikom pukotine potvrdila se pretpostavka o ovisnost broja, položaja i orijentacije tenzometarskih traka na krajnji rezultat identifikacije opterećenja. Analiziranjem složenih putanja pukotina različitih dimenzija i orijentacija na različitim ispitnim uzorcima, s proporcionalnim opterećenjem, najprije su određena monotona opterećenja uz pretpostavku linearno-elastičnog ponašanja materijala. Cilj je pri tome bilo definiranje optimalnog broja, pozicije i orijentacije tenzometarskih mjernih traka na konstrukcijskoj komponenti koji će za različite veličine pukotina omogućiti što točnije određivanje opterećenja. Za procjenu novog postupka, prvi korišteni primjer sa složenom putanjom pukotine bila je epruveta s jednim zarezom opterećena silom smicanja, u drugom primjeru je određeno opterećenje na uzorku oblika slova L. Uzorak u obliku CT epruvete, standardnoj kompaktnoj epruveti kod koje se pratio napredak pukotine preko dijagrama opterećenje - otvaranje vrška pukotine (CMOD) korišten je i za slučaj cikličkog opterećenja kako bi se algoritam postupka ispitao i verificirao i za promjenjiva ciklička opterećenja. Optimalan broj, položaj i orijentacija tenzometarskih traka za sve navedene primjere utvrđeni su za različite veličine pukotina, od inicirane pukotine do pukotine kritične duljine.

### **5.1. Epruveta za savijanje u tri točke**

Primjer određivanja optimalnog položaja tenzometarskih traka prikazan je na epruveti bez zareza za savijanje u tri točke. Geometrija epruvete prikazana je na slici 13. Prilikom diskretizacije modela korišteni su heksaedarski elementi prvog reda C3D8 koji su pogodni za inverzno modeliranje. Ovaj tip elemenata ima 8 čvorova u vrhovima elementa. Analizirano je više različitih mreža, a mreža za koju su u daljnjem tekstu dana rješenja prikazana je na slici 14. Spajanje nekompatibilnih mreža elemenata ostvareno je primjenom kinematskih ograničenja što je u programskom paketu Abaqus opcija „tie“. Prikazana mreža konačnih elemenata sadrži 30025 trodimenzijskih elemenata i 44954 čvora. Svojstva materijala

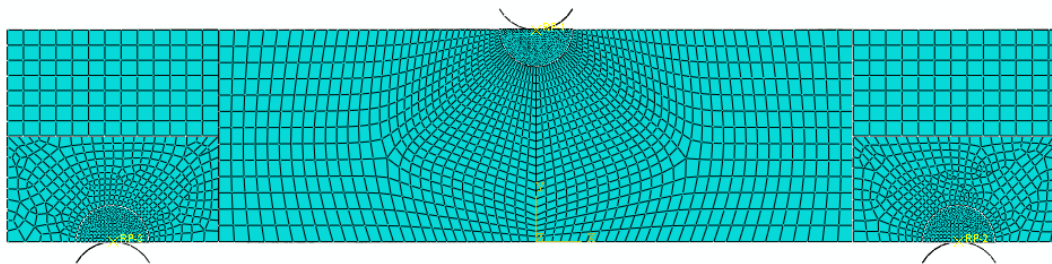
korištenog za epruvetu su: modul elastičnosti  $E$ , Poissonov faktor  $\nu$ , vlačna čvrstoća  $R_m$ , granica tečenja  $R_{p0,2}$  i deformacija kod loma  $\varepsilon$ . Navedeni podaci prikazani su u tablici 2.



Slika 13. Geometrija i rubni uvjeti na epruveti za savijanje u tri točke bez zarez

Tablica 2. Svojstva materijala epruvete prema [76]

Materijal	$E$ (MPa)	$\nu$ (-)	$R_{p0,2}$ (MPa)	$R_m$ (MPa)	$\varepsilon$ (%)
EN-GJS-400-18-LT	179 000	0,275	240	400	18



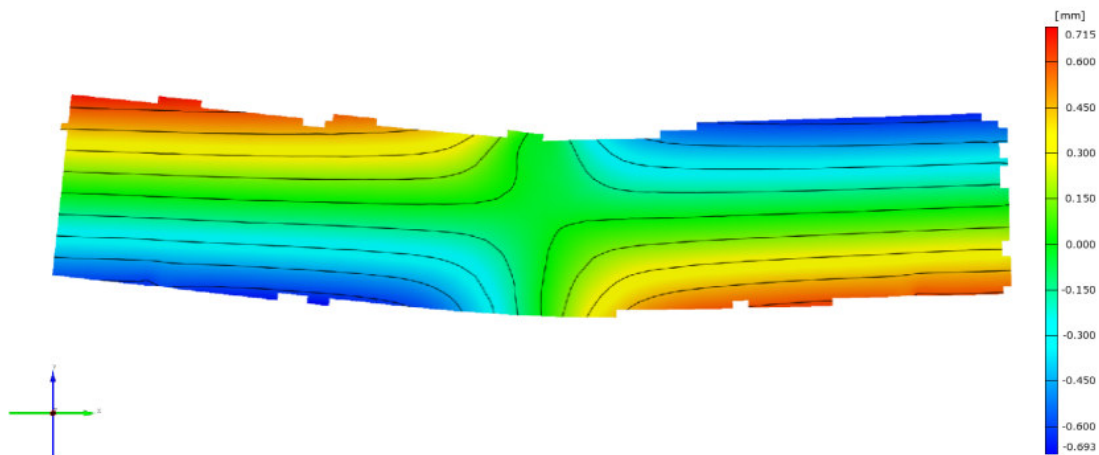
Slika 14. Diskretizacija epruvete mrežom konačnih elemenata

Osim same geometrije epruvete, valjci kidalice modelirani su kao kruta tijela povezana kinematskim vezama s referentnim točkama postavljenima u njihovom središtu (slika 14). Između valjaka i epruvete definiran je kontakt s trenjem pri čemu faktor trenja iznosi 0,3. U referentnim točkama donjih valjaka dodijeljeni su rubni uvjeti pomaka kojima se ograničava pomak u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  čime se simuliraju nepomični valjci. U referentnoj točki gornjeg valjka dodijeljen je rubni uvjet kojim je ograničen pomak u smjeru osi  $x$  i  $z$ , a potom se u smjeru osi  $y$  dodijelila sila.

Za određivanje nepoznatog opterećenja epruvete primijenjene su deformacije izmjerene optičkim mjernim sustavom ARAMIS na prednjoj plohi epruvete. Za dodjeljivanje površinskih deformacija u modelu diskretiziranom s trodimenzijskim elementima primijenjeni su ljuskasti konačni elementi. Pritom su ljuskasti i trodimenzijski konačni elementi na prednjoj površini epruvete povezani pomoću opcije „Skin“. Kako je cijela prednja površina epruvete prekrivena ljuskastim konačnim elementima koji sada mogu poslužiti kao potencijalna mjesta za postavljanje tenzometarskih traka, moći će se provesti prethodno opisani D-optimizacijski postupak određivanja optimalnih položaja i orijentacija tenzometarskih traka.

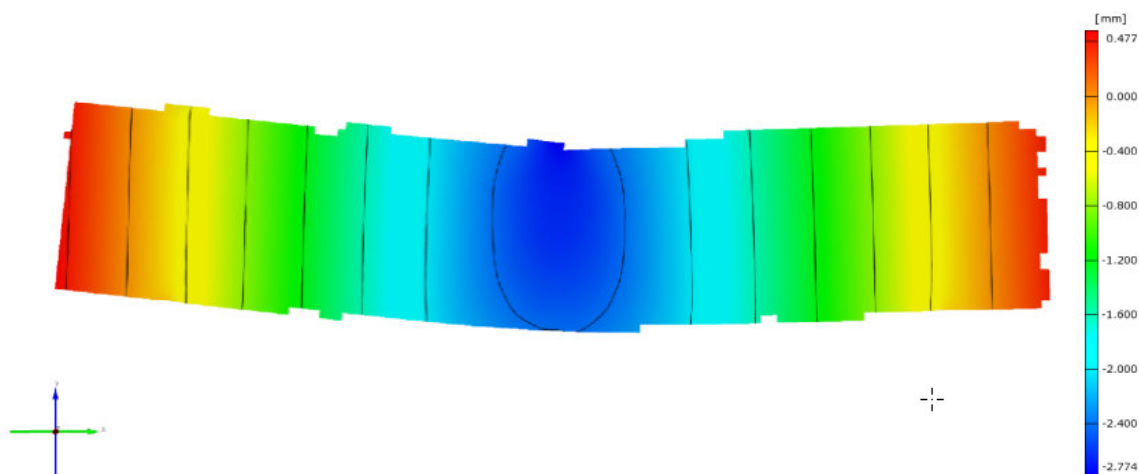
### 5.1.1. Rezultati eksperimentalnih mjerenja

Mjerenje pomaka na površini epruvete provedeno je optičkim mjernim sustavom ARAMIS za određivanje pomaka i raspodjele deformacija na cijeloj prednjoj plohi epruvete primjenom korelacije digitalne slike [77], [78]. Slike 15 i 16 prikazuju raspodjele pomaka u smjeru horizontalne i vertikalne osi. Vrijednosti pomaka mjerene na površini epruvete uspoređeni su s numeričkim rezultatima metode konačnih elemenata. Ovdje se rezultati za mjerene pomake odlično preklapaju s numeričkim rezultatima. Kao referenta veličina površine za očitavanje pomaka pomoću optičkog mjernog sustava koristila se površina i položaj koji su približno jednaki kao veličina konačnog elementa u numeričkom modelu. U tablici 3 dane su deformacije izmjerene na epruveti u 7 točka koje su prikazane na slici 17. Ovdje je E11 duljinska deformacija u pravcu osi  $x$ , E22 duljinska deformacija u pravcu osi  $y$ , E12 je posmična deformacija, dok TT1 i TT2 označavaju tenzometarske trake 1 i 2.



Slika 15. Eksperimentalni rezultati pomaka epruvete u smjeru osi  $x$





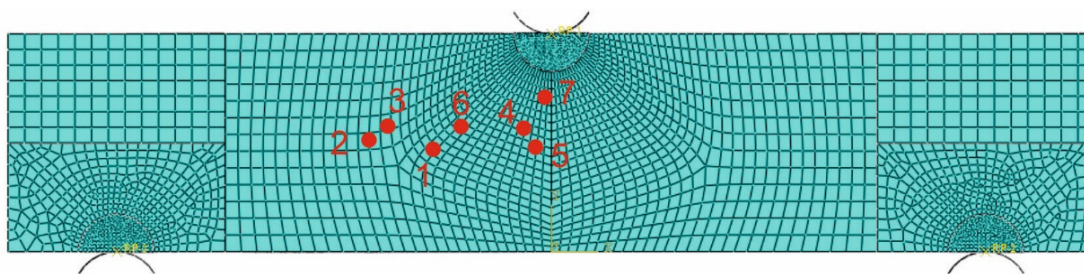
Slika 16. Eksperimentalni rezultati pomaka epruvete u smjeru osi y

Tablica 3. Izmjerene deformacije na epruveti

Pozicija	Izmjerene vrijednosti deformacije	TT1	TT2
1	E11	-4,21E-06	-3,35E-06
	E22	1,85E-06	1,61E-06
	E12	-4,45E-05	-4,44E-05
2	E11	-2,58E-06	-2,40E-06
	E22	1,39E-06	1,30E-06
	E12	-4,43E-05	-4,43E-05
3	E11	-1,35E-05	-2,87E-06
	E22	4,43E-06	1,48E-06
	E12	-4,28E-05	-4,43E-05
4	E11	-1,26E-05	-6,45E-06
	E22	-2,02E-05	-1,89E-05
	E12	-3,39E-05	-3,22E-05
5	E11	-6,45E-06	-2,90E-06
	E22	-1,89E-05	-2,11E-05
	E12	-3,22E-05	-2,57E-05
6	E11	-5,88E-06	-4,21E-06
	E22	2,21E-06	1,85E-06
	E12	-4,41E-05	-4,45E-05
7	E11	-2,43E-05	-1,95E-05
	E22	-3,96E-05	-3,45E-05
	E12	-5,47E-06	-4,87E-06

### 5.1.2. Inverzno modeliranje

Nakon provedenih eksperimentalnih mjerenja pomaka i izračuna deformacija na prednjoj površini epruvete optičkim mjernim sustavom ARAMIS određeni su optimalni položaji i orijentacije tenzometarskih traka korištenjem D-optimizacijskog postupka. Pomoću programskog paketa True Load izvršio se izračun nepoznatih opterećenja primjenom postupka inverznog modeliranja. Kao što je već rečeno, na slici 17 su prikazani različiti položaji tenzometarskih traka za koje su u tablici 3 dane deformacije. Pozicije tenzometarskih traka 1 do 6 su odabrane proizvoljno, dok je pozicija tenzometarskih traka broj 7 dobivena korištenjem D-optimizacijskog postupka izračuna optimalnog položaja i orijentacije tenzometarskih traka. Na svih sedam pozicija korištene su po dvije tenzometarske trake (TT1 i TT2), te su se na svim pozicijama koristile optimalne orijentacije tenzometarskih traka, određene D-optimalnim postupkom.



Slika 17. SEB epruveta prikaz pozicija tenzometarskih traka

U tablici 4 dani su rezultati za izračunatu silu inverznom metodom za svaki od sedam pojedinačnih položaja. Narinuta sila prilikom eksperimentalnih mjerenja bila je 850 N. Položaj broj 7 je dao vrijednost izračunate sile inverznom metodom 848,9 N, što je najmanje odstupanje od zadane vrijednosti. U tablici 4 također se može vidjeti kako odabir pravilnog položaja i orijentacije tenzometarskih traka može utjecati na rezultat određivanja opterećenja iz izmjerenih deformacija. Za optimalni položaj i orijentaciju tenzometarskih traka, za poziciju 7, greška određenog opterećenja manja je od 0,13%.

Tablica 4. Određene veličine opterećenja SEB epruvete

Pozicija	Izračunata sila (N)
1	1602,2
2	1350
3	1135,6
4	390,3
5	817
6	818,5
7	848,9

U tablici 5 navedene su optimalne orijentacije mjernih traka za svih sedam mjernih položaja, i za odabrane položaje 1-6 i za položaj 7 određen D-optimalnim postupkom. Treba napomenuti da su vrijednosti kuta orijentacija tenzometarskih traka odnose na horizontalnu os  $x$ .

Tablica 5. Orijetacije tenzometarskih traka na SEB epruveti

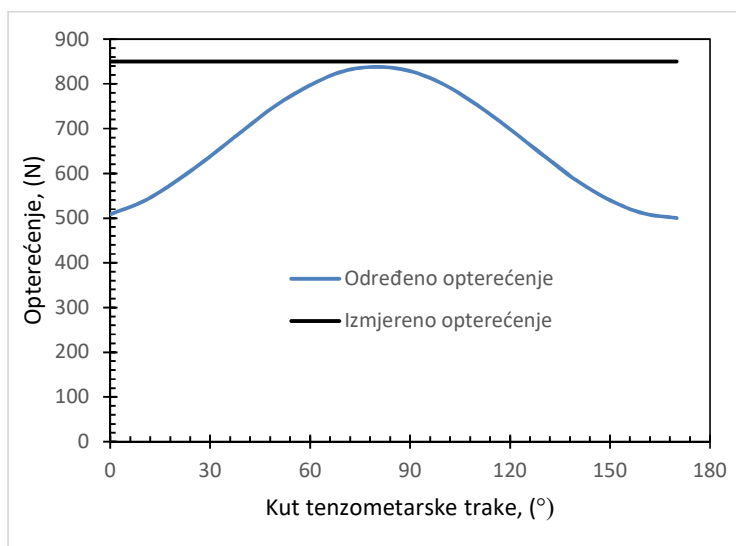
Pozicija	Orijentacija TT 1 (°)	Orijentacija TT 2 (°)
1	0°	0°
2	0°	90°
3	0°	90°
4	0°	90°
5	90°	0°
6	40°	40°
7	90°	0°

Kako bi se bolje istražio utjecaj orijentacije mjerne tenzometarske trake za poziciju broj 7 provedena je analiza izračunatih vrijednosti inverznom metodom s korakom kuta od 10°. U tablici 6 i na slici 18 dani su rezultati za izračunato opterećenje za svaku promjenu kuta od 10°. Ovdje se je koristila samo jedna tenzometarska traka, kako bi se lakše odredio utjecaj orijentacije tenzometarske trake na točnost određivanja opterećenja inverznim metodom. Rezultati prikazuju da se pretpostavka o utjecaju orijentacije tenzometarskih mjernih traka pokazala točnom te da ona ima veliki utjecaj na rezultat određivanja opterećenja inverznom

metodom pomoću metode konačnih elemenata. Vrijednosti opterećenja, odnosno izračunate sile kreću se od 500 do 838,1 N ovisno o orijentaciji tenzometarske trake, a narinuta sila prilikom eksperimentalnih mjerenja je bila 850 N.

**Tablica 6. Utjecaj orijentacije tenzometarske trake na izračunatu vrijednost opterećenja**

Kut TT (°)	Izračunata sila (N)	Kut TT (°)	Izračunata sila (N)
0	508,4	90	828,5
10	537,7	100	799,2
20	583,7	110	753,2
30	638,1	120	698,8
40	696,7	130	640,2
50	753,2	140	583,7
60	797,1	150	539,8
70	828,5	160	510,5
80	838,1	170	500

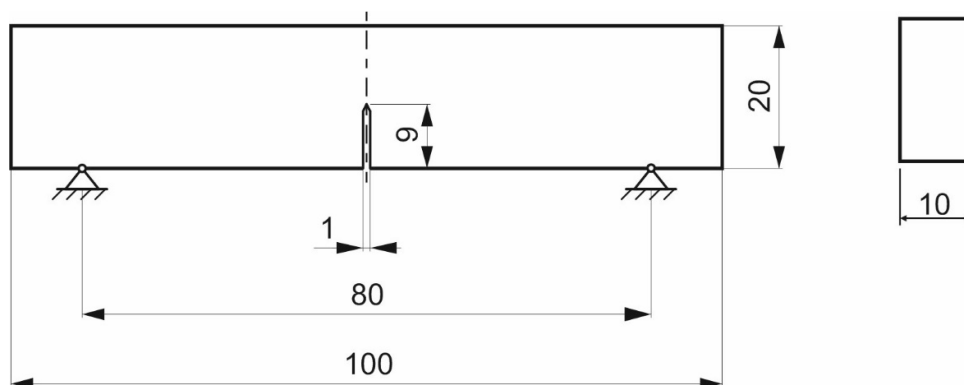


**Slika 18. Utjecaj orijentacije tenzometarske trake na određivanje opterećenja**

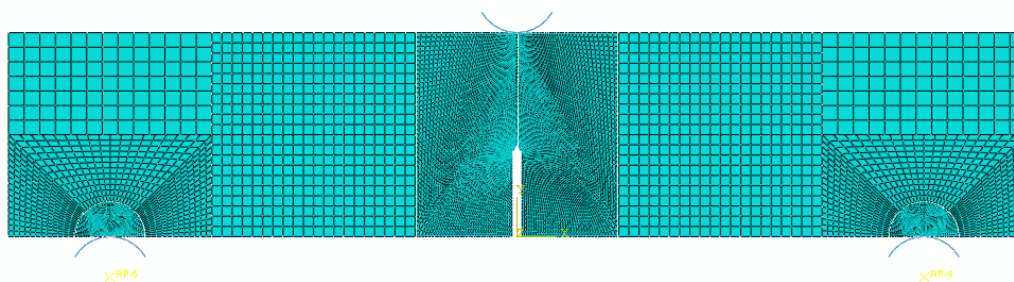
## 5.2. Epruveta sa zarezom za savijanje u tri točke

U drugom primjeru za verifikaciju postupka inverznog modeliranja za određivanje opterećenja za slučaj s jednostavnim oblikom pukotine korištena je geometrija epruvete za ispitivanje

savijanjem u tri točke sa zarezom (SENB – eng. Single Edge Notched Band Specimen). Slika 19 prikazuje dimenzije epruvete. Epruveta je modelirana u programskom paketu Abaqus te diskretizirana konačnim elementima. Prilikom diskretizacije modela korišteni su heksaedarski elementi prvog reda C3D8 koji su pogodni za inverzno modeliranje. Prikazana mreža konačnih elemenata na slici 20 sadrži 32 025 heksaedarskih elemenata. Kao što je navedeno u prethodnom primjeru, spajanje nekompatibilnih mreža elemenata ostvareno je u programskom paketu Abaqus primjenom kinematskog ograničenja „tie“. Kako bi se u numeričkom modelu mogle postaviti tenzometarske trake za mjerenje deformacija na prednjoj površini SENB epruvete definirani su ljuskasti konačni elementi pomoću opcije „Skin“, kao i u prethodnom primjeru s epruvetom za ispitivanje savijanjem u tri točke. I ovdje je cijela prednja ploha epruvete modelirana ljuskastim konačnim elementima poslužila za potencijalna mjesta za postavljanje tenzometarskih traka. Upotrebom D-optimizacijskog postupka određen je optimalni položaj i orijentacija tenzometarskih traka za model s početnom duljinom zarez, odnosno za slučaj prije rasta pukotine. Svojstva materijala prikazana u tablici 2 preuzeta su iz prethodnog primjera.



Slika 19. Geometrija i rubni uvjeti SENB epruvete

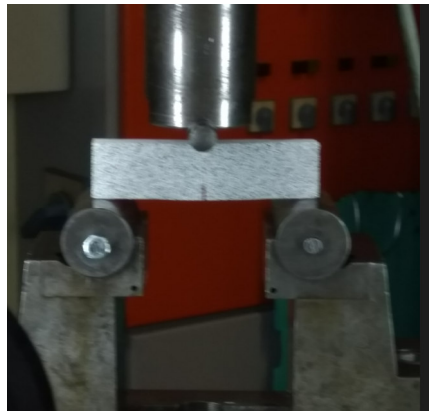


Slika 20. Prikaz mreže konačnih elemenata za SENB epruvetu

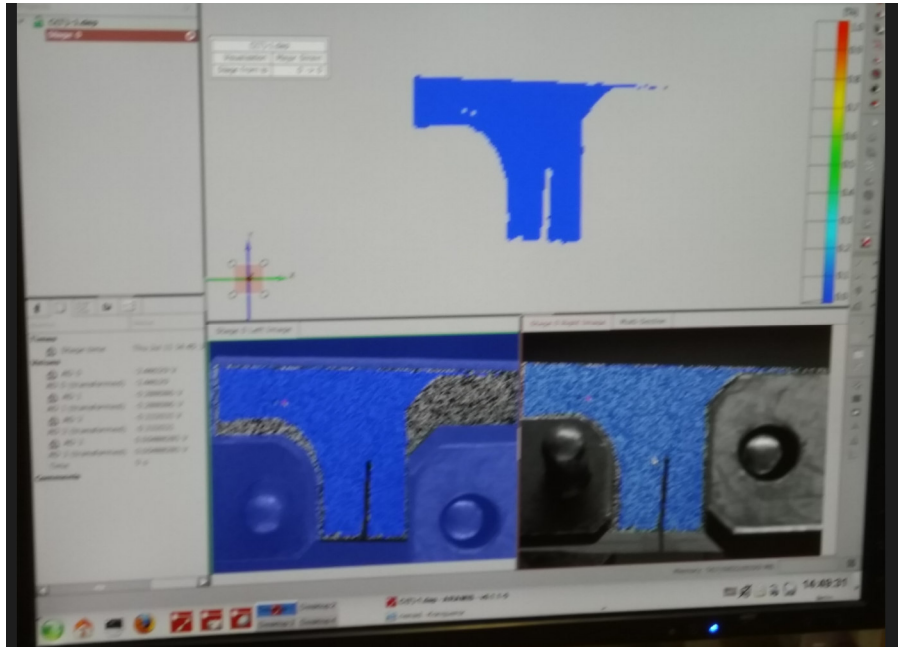
Kao i u prethodnom primjeru, valjci kidalice modelirani su kao kruta tijela povezana kinematskim vezama s referentnim točkama postavljenima u njihovom središtu. Između valjaka i epruvete definiran je kontakt s trenjem. U referentnim točkama donjih valjaka dodijeljeni su rubni uvjeti pomaka kojima se ograničava pomak u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  čime se simuliraju nepomični valjci. U referentnoj točki gornjeg valjka dodijeljen je rubni uvjet kojim je ograničen pomak u smjeru osi  $x$  i  $z$ , a potom se u smjeru osi  $y$  dodijelila sila na sredini epruvete.

### 5.2.1. Eksperimentalna mjerenja na SENB epruveti

Mjerenje pomaka i analiza deformacija na prednjoj plohi SENB epruvete provedeno je optičkim mjernim sustavom ARAMIS. Konfiguracija ispitivanja prikazana je na slici 21, dok je praćenje procesa deformiranja epruvete optičkim sustavom ARAMIS prikazano na slici 22. Primjena optičke metode korelacije digitalne slike omogućuje detaljnu usporedbu rezultata numeričkih simulacija i eksperimentalnih mjerenja. Očitane vrijednosti deformacija za točke 1 do 5 koje su korištene za verifikaciju inverzne metode na SENB epruveti prikazane su u tablici 7.



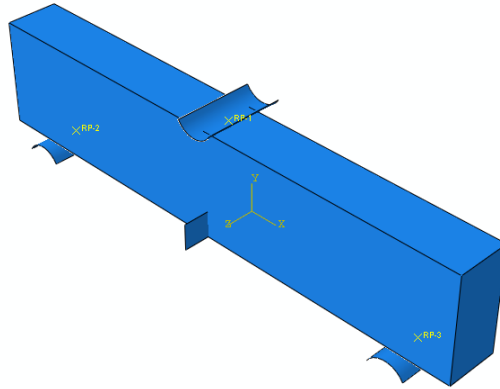
Slika 21 Ispitna konfiguracija: SENB epruveta



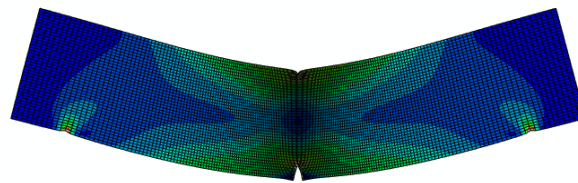
Slika 22. Praćenje deformiranja epruvete optičkim sustavom Aramis

### 5.2.2. Izračun deformacija primjenom X-FEM metode

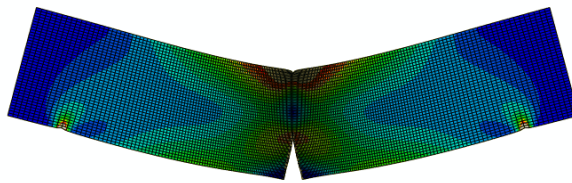
Mjerenjima pomaka i deformacija na prednjoj plohi epruvete optičkim mjernim sustavom nije bila obuhvaćena cijela površina, te za ovaj primjer nema dostupne raspodjele deformacija na cijeloj prednjoj plohi epruvete. Iz tog razloga je za simulaciju rasta pukotine u epruveti i izračun raspodjele deformacija za različite duljine pukotine korištena proširena metoda konačnih elemenata (X-FEM). Geometrija epruvete za ispitivanje savijanjem u tri točke s početnim zarezom na sredini prikazana je na slici 23. Prilikom diskretizacije modela korišteni su trodimenzijski elementi prvog reda C3D8. Pri modeliranju rasta pukotine korištenjem X-FEM-a na homogenom modelu potrebno je modelirati ravninu koja će definirati pukotinu oko koje će se izvršiti obogaćivanje elemenata (slika 23). Prikazana mreža konačnih elemenata sadrži 30025 trodimenzijskih elemenata i 44954 čvora. Slika 24 prikazuje nastanak i rast pukotine u 4 koraka: a) prikazuje prvi korak obogaćivanja mreže ispred vrška pukotine prije početka rasta pukotine, b) kada pukotina dostigne 60% visine epruvete, c) napredovanje pukotine kroz epruvetu i dostizanje 80% visine epruvete i d) pukotina iznosa 90% visine epruvete i končani lom epruvete uslijed rasta pukotine.



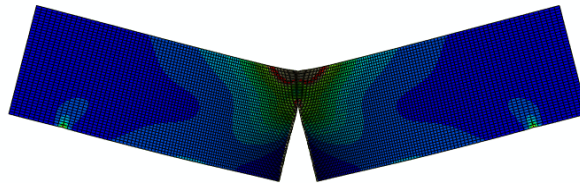
Slika 23. Model SENB epruvete s definiranom ravninom pukotine



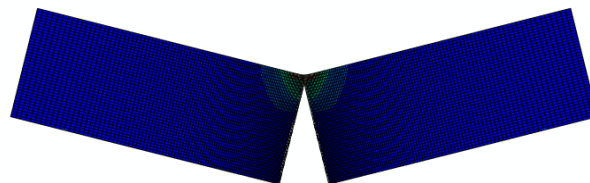
a)



b)



c)



d)

Slika 24. SEB epruveta s pukotinom na sredini: a) za početnu duljinu pukotine, b) za 60 % duljine pukotine, c) za 80 % duljine pukotine i d) 90% duljine pukotine

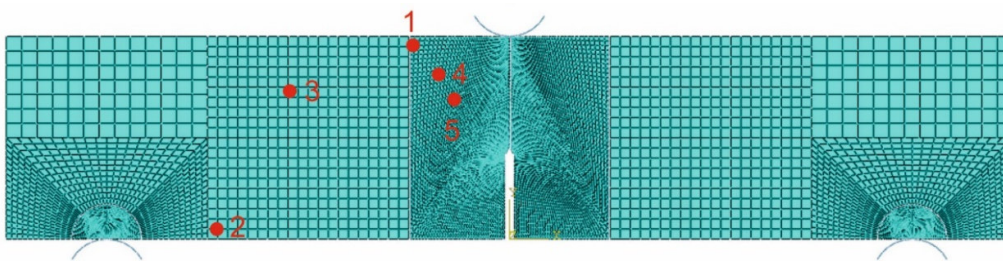


Tablica 7. Izmjerene deformacije SENB epruveta

Pozicija	Izmjerene vrijednosti deformacije	Tenzometarska traka 1	Tenzometarska traka 2
1	E11	-1,6E-04	-1,4E-04
	E22	4,0E-05	3,1E-05
	E12	-1,6E-05	-6,9E-05
2	E11	3,2E-05	2,7E-05
	E22	-8,9E-06	-7,5E-06
	E12	-4,1E-06	-1,2E-05
3	E11	-3,2E-05	-2,6E-05
	E22	7,9E-06	5,9E-06
	E12	-3,5E-05	-4,0E-05
4	E11	-7,2E-05	-2,7E-05
	E22	5,7E-06	-1,2E-05
	E12	-1,7E-04	-1,8E-04
5	E11	-8,7E-05	-5,2E-05
	E22	1,4E-05	-4,3E-06
	E12	-1,4E-04	-1,6E-04

### 5.2.3. Inveržno modeliranje

Određivanje optimalnog položaja tenzometarskih traka na epruveti za savijanje u tri točke sa zarezom, kao i u prethodnom primjeru provedeno je inverznom metodom pomoću metode konačnih elemenata. Korištenjem eksperimentalnih mjerenja pomaka i raspodjele deformacija iz tablice 7 na plohi epruvete dobivenih optičkim mjernim sustavom ARAMIS, pomoću programskog paketa True Load proveden je izračun nepoznatog opterećenja primjenom postupka inverznog modeliranja. Slika 25 prikazuje različite pozicije tenzometarskih traka na epruveti. Pozicije tenzometarskih traka 1 do 4 odabrane su proizvoljno, dok je pozicija tenzometarske trake 5 dobivena korištenjem D-optimizacijskog algoritma za izračun optimalnog položaja i orijentacije tenzometarskih traka. Na svih pet pozicija korištene su po dvije tenzometarske trake s optimalnom orijentacijom tenzometarskih traka.



Slika 25. Prikaz pozicija tenzometarskih traka na SENB epruveta

U tablici 8 navedeni su rezultati za inverzno izračunatu silu za svaku pojedinačnu poziciju tenzometarske trake. Narinuta vrijednost opterećenja na SENB epruveti za vrijeme eksperimenta je bila 850 N. U položaju broj 5 vrijednost izračunate sile inverznom metodom iznosi 828,5 N, što je najmanje odstupanje od zadane vrijednosti.

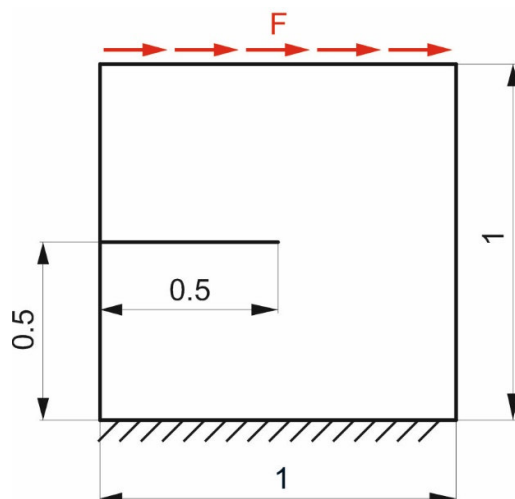
Tablica 8. Izračunate vrijednosti opterećenja SENB epruvete

Pozicija	Izračunata sila (N)
1	825,5
2	776,9
3	810,56
4	827,4
5	828,5

Za optimalni položaj i orijentaciju tenzometarskih traka, za poziciju 5, greška određenog opterećenja manja je od 2,5 %, u odnosu na vrijednost narinutoj na kidalici u toku eksperimenta.

### 5.3. Epruveta opterećena na smik

Kao prvi primjer sa složenom geometrijom, odnosno putanjom pukotine koji je korišten za verifikaciju postupka inverznog modeliranja za određivanje nepoznatog opterećenja, poslužila je epruveta sa zarezom opterećena na odrez koja je analizirana u doktorskoj disertaciji [73]. Geometrija, rubni uvjeti i opterećenje epruvete prikazani su na slici 26. Kao što se može vidjeti, epruveta opterećena na odrez je na gornjoj plohi opterećena horizontalnom silom, a na donjem rubu je ukliještena.

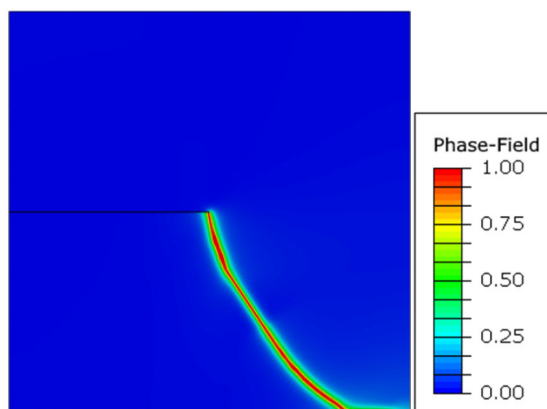


Slika 26. Dimenzije epruvete opterećene na odrez s rubnim uvjetima

Svojstva materijala korištena u numeričkom modelu (modul elastičnosti  $E$ , Poissonov faktor  $\nu$ , lomna žilavost  $G_c$  i duljinski parametar  $l$ ) su preuzeta iz [73] te su prikazana u tablici 9. Za simulaciju rasta pukotine u epruveti i izračun raspodjele deformacija za različite duljine pukotine korištena je metoda faznog polja. Epruveta je diskretizirana s 18868 konačnih elemenata koji kao dodatan stupanj slobode, osim pomaka imaju varijablu faznog polja. Putanja pukotine na uzorku prikazana na slici 27 dobivena je primjenom sferno-devijatorske dekompozicije deformacijske energije. Numerički postupak izračuna proveden je u doktorskom radu [72] te su rezultati za raspodjelu deformacija u ovisnosti o opterećenju za različite duljine pukotine ovdje iskorišteni za identifikaciju nepoznatog opterećenja iz „izmjerenih“ deformacija primjenom inverznog modeliranja.

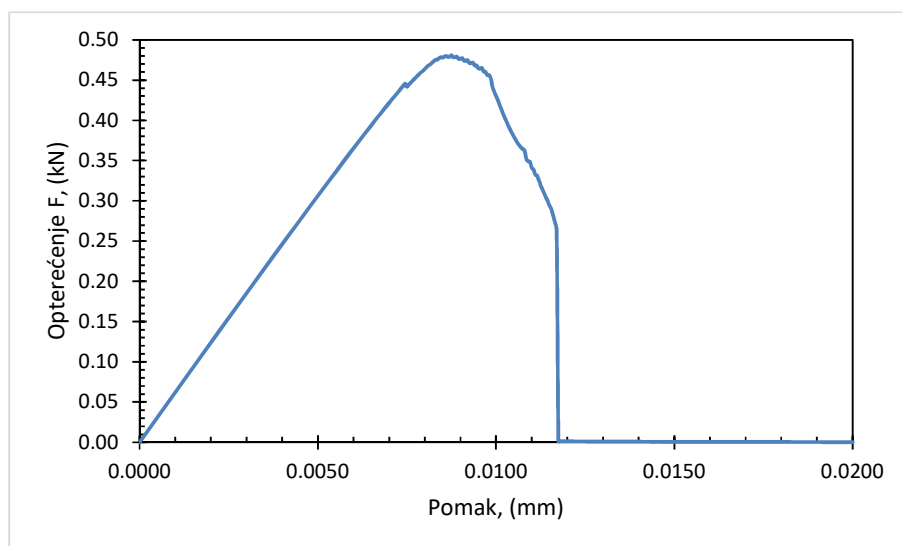
Tablica 9. Karakteristike materijala epruvete opterećene na odrez

Materijal	$E$ (MPa)	$\nu$ (-)	$G_c$ (kN/mm)	$l$ (mm)
Čelik	210 000	0,3	$2,7 \times 10^{-3}$	0,0075



Slika 27. Putanja pukotine dobivena primjenom metode faznog polja za epruvetu sa zarezom

Krivulja opterećenje-pomak za uzorak sa zarezom prikazana je na slici 28. Iz krivulje se može vidjeti da je veza opterećenje-pomak linearna skoro do vrijednosti maksimalnog opterećenja te je zatim praćena naglim padom krutosti uzorka do potpunog loma. Rast pukotine s povećanjem pomaka jednostavno se identificira s popuštanjem materijala nakon maksimalnog opterećenja. Kako za ovaj primjer nisu bile dostupne mjerene deformacije na površini epruvete, za identifikaciju opterećenja inverznom metodom vrijednosti deformacija na vanjskoj plohi uzorka očitane su iz rezultata modela faznog polja. Iako su deformacije određene numeričkom metodom, u tekstu koji slijedi koristi se pojam „tenzometarske trake“ te one u numeričkom modelu predstavljaju integracijske točke u kojima su očitane deformacije. Vrijednosti navedenih deformacija navedene su u tablici 10. Korištenje pojmova „narinuto opterećenje“ i „mjereno opterećenje“ koristi se za razlikovanje opterećenja u metodi faznog polja. Mjereno opterećenje će se koristiti za vrijednosti opterećenja koje su dobivene, odnosno očitane korištenjem metode faznog polja.



Slika 28. Krivulja opterećenje - pomak dobivena metodom faznog polja za epruvetu sa zarezom opterećenu na smik

Za određivanje opterećenja uzorka sa zarezom biti će u idućim koracima korištene različite točke s dijagrama na slici 28, u trenucima prije i nakon početka rasta pukotine. Očitane deformacije na četiri tenzometarske trake korištene u inverznom postupku prikazane su u tablici 10.

Tablica 10. Izmjerene deformacije na epruveti opterećenoj na smik

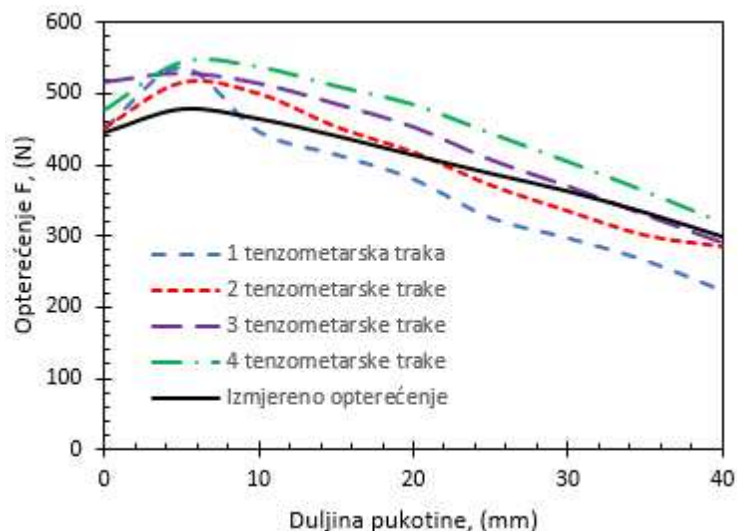
Duljina pukotine (mm)	Izmjerene vrijednosti deformacije	TT1	TT2	TT3	TT4
0	E11	-2,08E-05	-1,88E-05	-8,76E-04	-1,74E-03
	E22	-8,29E-04	-7,00E-04	-3,40E-04	3,37E-04
	E12	5,37E-03	5,47E-03	5,48E-03	6,27E-03
5	E11	-1,56E-06	-1,15E-04	-9,03E-04	-2,20E-03
	E22	-1,33E-03	-1,25E-03	-1,01E-03	-3,12E-04
	E12	5,77E-03	5,85E-03	5,63E-03	5,73E-03
10	E11	1,89E-05	-1,11E-05	-7,31E-04	-2,04E-03
	E22	-1,65E-03	-1,63E-03	-1,56E-03	-1,08E-03
	E12	5,56E-03	5,63E-03	5,37E-03	5,11E-03
15	E11	3,81E-05	9,37E-05	-5,21E-04	-1,75E-03
	E22	-1,88E-03	-1,93E-03	-2,01E-03	-1,73E-03
	E12	5,25E-03	5,31E-03	5,12E-03	4,78E-03
20	E11	5,50E-05	1,90E-04	-3,14E-04	-1,45E-03
	E22	-2,05E-03	-2,16E-03	-2,36E-03	-2,23E-03
	E12	4,90E-03	4,96E-03	4,87E-03	4,57E-03

25	E11	6,88E-05	2,72E-04	-1,34E-04	-1,20E-03
	E22	-2,18E-03	-2,34E-03	-2,63E-03	-2,60E-03
	E12	4,58E-03	4,64E-03	4,66E-03	4,46E-03
30	E11	8,31E-05	3,56E-04	5,03E-05	-9,46E-04
	E22	-2,30E-03	-2,51E-03	-2,90E-03	-2,95E-03
	E12	4,27E-03	4,32E-03	4,48E-03	4,37E-03
35	E11	9,49E-05	4,29E-04	2,23E-04	-6,95E-04
	E22	-2,38E-03	-2,63E-03	-3,09E-03	-3,23E-03
	E12	3,89E-03	3,95E-03	4,23E-03	4,23E-03
40	E11	1,05E-04	4,95E-04	3,91E-04	-4,39E-04
	E22	-2,41E-03	-2,71E-03	-3,24E-03	-3,45E-03
	E12	3,48E-03	3,53E-03	3,92E-03	4,04E-03
45	E11	1,10E-04	5,33E-04	5,17E-04	-2,14E-04
	E22	3,02E-03	3,08E-03	3,55E-03	3,74E-03
	E12	-2,36E-03	-2,68E-03	-3,25E-03	-3,51E-03

Sam postupak inverznog modeliranja proveden je u nekoliko koraka. U ovom primjeru, kao što je navedeno, u prvom koraku postupka izračuna nepoznatog opterećenja inverznom metodom korištena je raspodjela deformacija iz numeričkog modela faznog polja. U drugom koraku definirala se je veza između ulaznih opterećenja i deformacija za različite duljine, odnosno priraste pukotine. Za to je pukotina podijeljena na inkremente (priraste) te je njen rast modeliran u programskom paketu Abaqus primjenom opcije „seam crack“, koja predstavlja rub ili površinu s preklapajućim točkama, koje se mogu razdvojiti tijekom numeričke analize. Putanja rasta pukotine modelirana za identifikaciju opterećenja s različitim duljinama pukotine temelji se na rezultatima analize iz modela metode faznog polja. Za inverzno modeliranje nije bila potrebna tako gusta mreža koja se koristila za simulaciju rasta pukotine metodom faznog polja, te je stoga u području rasta pukotine korištena puno grublja mreža konačnih elemenata čime je smanjeno vrijeme potrebno za numeričke operacije. Diskretizacija modela za postupak inverznog modeliranja provedena je s 10581 konačnih elementa, korištenjem kvadratnih CPE4 konačnih elemenata za ravninsko stanje deformacije iz Abaqusove baze konačnih elemenata. Progušćivanje mreže provedeno je u očekivanom području rasta pukotine. U trećem koraku postupka inverznog modeliranja potrebnog za definiranje potencijalnih pozicija tenzometarskih traka za mjerenje deformacija na prednjoj površini epruvete, u programskom paketu Abaqus postavljeni su ljuskasti konačni elementi pomoću opcije „Skin“, koji su pogodni za očitavanje deformacija u ravnini.

### 5.3.1. Inverzno modeliranje

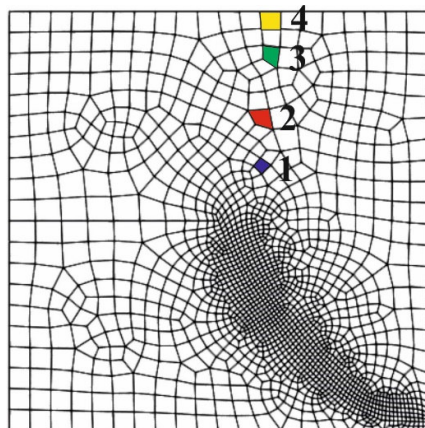
Kao što se navodi u literaturi, točnost određivanja opterećenja inverznom metodom ovisi o broju tenzometarskih traka kao i o njihovom položaju i orijentaciji. Međutim, ovdje se pokazuje da za slučaj rasta pukotine u komponenti ova točnost ovisi i o duljini pukotine, kao i o složenosti putanje pukotine. Određivanje opterećenja je zbog toga provedeno s različitim brojem tenzometarskih traka za slučajeve s početnom pukotinom i s različitim duljinama pukotine. Analizirane su različite kombinacije broja tenzometarskih traka, od jedne do četiri tenzometarske trake prije iniciranja pukotine i za svaki korak rasta pukotine. Za područje potencijalnih pozicija tenzometarskih traka odabrano je područje cijele prednje plohe uzorka, osim oko očekivanog, numerički izračunatog područja rasta pukotine iz modela faznog polja te isto tako u blizini područja koje nije primjereno, kao što je područje na kojem su narinute sile. U sljedećem koraku postupka inverznog modeliranja D-optimalnim postupkom odredili su se optimalni položaji i orijentacije jedne do četiri tenzometarske trake, nakon kojeg se u sljedećem koraku proveo izračun nepoznatih opterećenja primjenom postupka inverznog modeliranja u programskom paketu True Load. Deformacije određene za različite duljine pukotine korištene za izračun nepoznatog opterećenja inverznom metodom prikazane su u tablici 10. Pritom, za kontrolu i usporedbu rezultata izračuna nepoznatog opterećenja inverznom metodom korišteni su rezultati numeričke analize metodom faznog polja. Izračunate vrijednosti opterećenja za različite duljine pukotine u ovisnosti o broju tenzometarskih traka prikazane su na slici 29. Iz dijagrama na slici 29 vidi se dobra procjena opterećenja za različite vrijednosti duljina pukotine. Određivanje opterećenja s jednom ili dvije tenzometarske trake ima tendenciju izračuna manjih vrijednosti opterećenja od zadanih kako pukotina raste, a s druge strane za male pukotine i za slučajeve bez pukotina vrijednosti su veće od zadanih. U slučaju s tri tenzometarske trake za pukotinu i bez pukotine, određeno opterećenje je veće u odnosu na zadano s tendencijom smanjenja procijenjene greške kako pukotina raste. S četiri tenzometarske trake, nakon početka rasta pukotine utvrđeno je povećanje greške opterećenja do određene duljine pukotine. Preko te vrijednosti greške imaju tendenciju smanjenja, slično kao u slučajevima za jednu i dvije tenzometarske trake.



Slika 29. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na epruveti opterećenoj na odrez

Iz rezultata je vidljivo da za ovaj slučaj u kojem je epruveta opterećena na smik, zbog složene putanje pukotine pozicija i orijentacija tenzometarskih traka se mijenja kako pukotina raste. Da bi se dobile vrijednosti sa slike 29, u praksi bi bilo potrebno analizirati veliki broj kombinacija položaja i orijentacija tenzometarskih traka, što je je vrlo nepraktično i skupo. Stoga se nameće sljedeći korak postupka inverznog modeliranja u kojem je potrebno pronaći jedinstveni optimalni položaj i orijentaciju tenzometarskih traka za cijelu putanju pukotine, a iz podataka o optimalnom položaju za svaki korak duljine pukotine. Za to je provedena analiza metodom najmanjih kvadrata kako bi dobili odgovor na pitanje koji položaj, orijentacija i broj tenzometarskih traka mogu optimalno slijediti pukotinu od njenog nastanka, preko stabilnog rasta pukotine i na kraju do njene kritične duljine. Četiri optimalna položaja tenzometarskih traka koja će se u sljedećem koraku koristiti u analizi metodom najmanjih kvadrata prikazana su na slici 30. Prvi položaj je označen plavom bojom (TT1), drugi crvenom bojom (TT2), treći zelenom bojom (TT3) i četvrti žutom bojom (TT4).





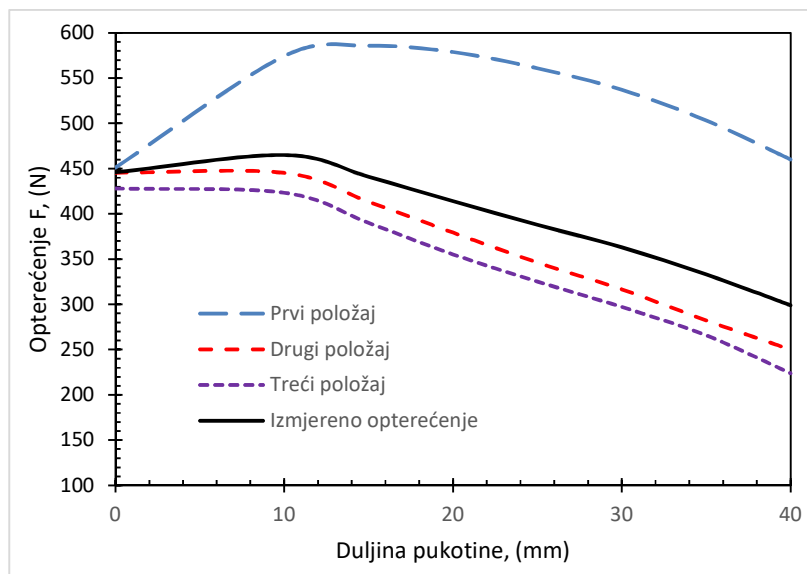
Slika 30. Optimalni položaji tenzometarskih traka na epruveti opterećenoj na odrez

Optimalni položaji za jednu tenzometarsku traku dobiveni za svaki korak duljine pukotine i prema deformacijama danim u tablici 10, prikazani su u tablici 11. Tijekom procesa rasta pukotine promijenile su se dvije pozicije tenzometarskih traka (TT1 i TT4), a na poziciji 4 došlo je do razlike i u orijentaciji tenzometarske trake s rastom pukotine ( $110^\circ$  i  $119^\circ$ ). Zaključak je da za jednu tenzometarsku traku postoje tri kombinacije položaja i orijentacije (pravac mjerene duljinske deformacije) koje mogu dati optimalan položaj i orijentaciju tenzometarske trake.

Tablica 11. Položaji i orijentacije s jednom tenzometarskom trakom

Slučaj	1	2	3
Položaj	TT1	TT4	TT4
Orijentacija	$150^\circ$	$119^\circ$	$110^\circ$

Prema slučajevima (uvjetima) prikazanim u tablici 11 izračunata su opterećenja s jednom tenzometarskom trakom i prikazana na slici 31. Može se vidjeti da prvi položaj ima tendenciju precjenjivanja vrijednosti izračunatog opterećenja kako pukotina raste, s druge strane za malu pukotinu i za slučaj bez pukotine vrijednosti su malo precijenjene. U drugom slučaju za pukotinu i bez pukotine, izračunato opterećenje je podcijenjeno s tendencijom povećanja procijenjene greške kako pukotina raste. U trećem slučaju s jednom tenzometarskom trakom, nakon početka rasta pukotine utvrđeno je povećanje greške izračuna opterećenja kako pukotina raste, kao i u drugom slučaju samo s većom greškom podcijenjenog izračunatog opterećenja.



Slika 31. Izračunata opterećenja za jednu tenzometarsku traku na epruveti opterećenoj na smik

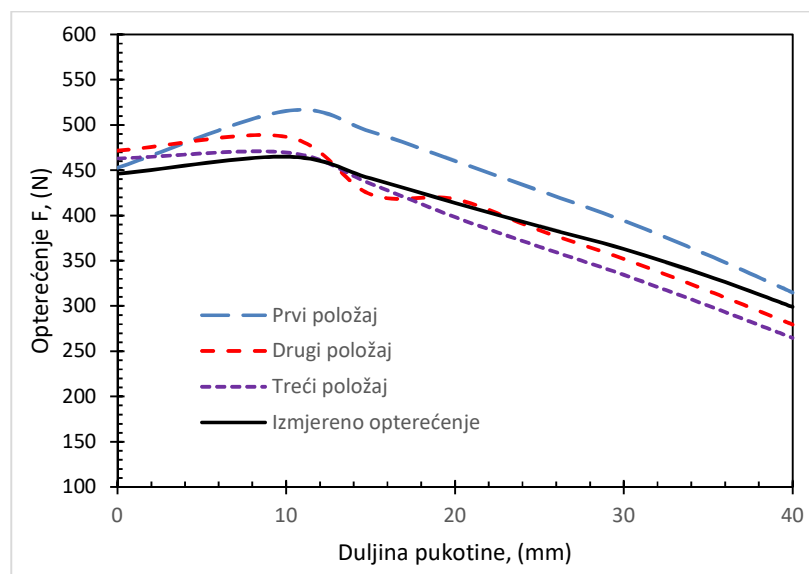
U slučaju s dvije tenzometarske trake dobiveni optimalni položaji za svaki korak duljine pukotine prikazani su u tablici 12. Tijekom cijelog procesa rasta pukotine promijenile su se tri pozicije tenzometarskih traka (TT1, TT3 i TT4), a na pozicijama 3 i 4 došlo je i do razlike u orijentaciji tenzometarskih traka s napredovanjem pukotine. Kod položaja TT3 dobiveni su kutevi  $110^\circ$  i  $119^\circ$ , a kod TT4  $110^\circ$ ,  $130^\circ$  i  $119^\circ$ . Zaključak je da za dvije kombinacije tenzometarskih traka postoje tri kombinacije položaja i orijentacije koje mogu dati optimalan položaj i orijentaciju tenzometarskih traka.

Tablica 12. Položaji i orijentacije s dvije tenzometarske trake

Slučaj	1		2		3	
Položaj	TT1	TT4	TT4	TT3	TT4	TT3
Orijentacija	$150^\circ$	$130^\circ$	$119^\circ$	$119^\circ$	$110^\circ$	$110^\circ$

Opterećenja izračunata u slučaju s dvije tenzometarske trake, a za sva tri slučaja iz tablice 12, prikazana su na slici 32. Može se vidjeti da prvi položaj ima tendenciju precjenjivanja vrijednosti izračunatog opterećenja kako pukotina raste do 10 mm duljine, a nakon toga greška se smanjuje. U drugom slučaju za pukotinu i bez pukotine, određeno opterećenje je precijenjeno za duljine pukotine do 10 mm, dok je za ostatak duljine pukotine podcijenjena vrijednost izračunatog opterećenja. Za treći slučaj s jednom tenzometarskom trakom, nakon početka rasta

pukotine utvrđeno je smanjenje greške izračuna opterećenja kako pukotina raste do duljine 10 mm, a nakon toga greška izračunatog opterećenja raste i manja je od izmjerеноg opterećenja.



Slika 32. Izračunata opterećenja za dvije tenzometarske trake na epruveti opterećenoj na smik

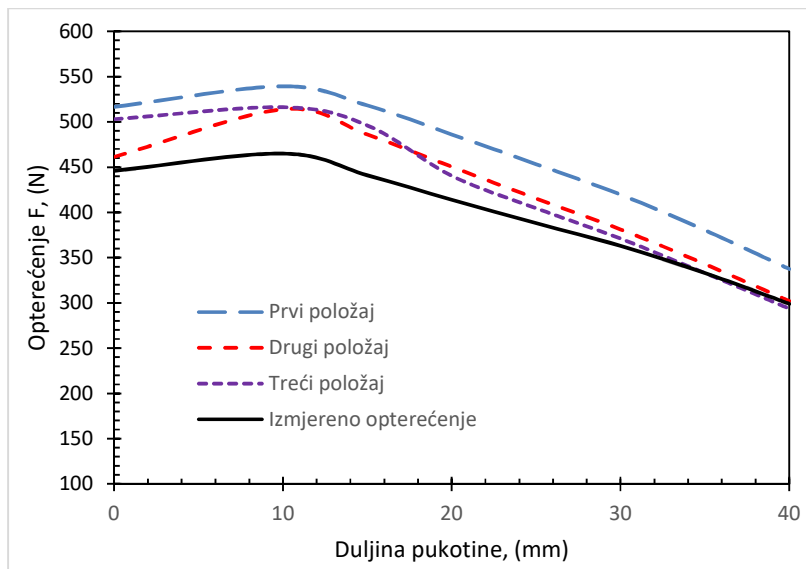
Kod opcije s tri tenzometarske trake dobiveni optimalni položaji za svaki korak duljine pukotine prikazani su u tablici 13. Tijekom cijelog procesa rasta pukotine promijenile su se četiri pozicije tenzometarskih traka s različitim orijentacijama tenzometarskih traka ovisno o veličini prirasta duljine pukotine. Zaključak je da za tri razne kombinacije tenzometarskih traka postoje četiri kombinacije položaja i orijentacije koje mogu dati optimalan položaj i orijentaciju tenzometarskih traka.

Tablica 13. Položaji i orijentacije s tri tenzometarske trake

Slučaj	1			2			3		
Položaj	TT4	TT2	TT1	TT4	TT3	TT1	TT4	TT3	TT2
Orijentacija	130°	140°	150°	119°	119°	150°	110°	110°	119°

Kod izračunatog opterećenja u slučaju s tri tenzometarske trake, za sva tri slučaja izračunato opterećenje je precijenjeno za sve duljine pukotine. Rezultati su grafički prikazani na slici 33. Za prvi položaj bez pukotine i za pukotine do 10 mm, greška je konstantna, dok se za ostatak duljine pukotine vrijednost greške izračunatog opterećenja polagano smanjuje. Drugi slučaj ima tendenciju precjenjivanja vrijednosti izračunatog opterećenja kako pukotina raste do 10 mm

duljine, a nakon toga se greška smanjuje. Za treći slučaj s tri tenzometarske trake, nakon početka rasta pukotine greška određivanja opterećenja ne raste kako pukotina raste do duljine 10 mm, a nakon toga greška izračunatog opterećenja se smanjuje kako pukotina raste.



Slika 33. Izračunata opterećenja za tri tenzometarske trake na epruveti opterećenoj na smik

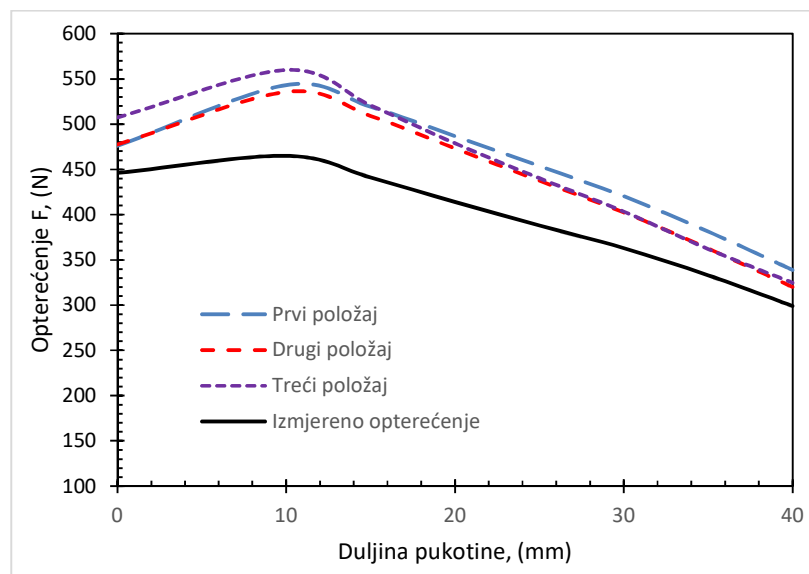
Varijanta s četiri tenzometarske trake korištena za različite korake duljine pukotine prikazana je u tablici 14. Kako pukotina napreduje mijenjaju se orijentacije tenzometarskih traka, te za tri različite kombinacije tenzometarskih traka, prisutni su svi položaji TT1 do TT4. Također su i prisutne sve orijentacije koje su dobivene za optimalne položaje i orijentacije tenzometarskih traka sa slike 29.

Tablica 14. Položaji i orijentacije s četiri tenzometarske trake

Slučaj	1		2		3	
Položaj	TT1	TT4	TT4	TT3	TT4	TT3
	TT2	TT3	TT1	TT2	TT2	TT1
Orijentacija	150°	130°	119°	119°	110°	110°
	140°	130°	150°	130°	119°	130°

Opterećenje izračunato s četiri tenzometarske trake za sva tri slučaja ima tendenciju precjenjivanja vrijednosti izračunatog opterećenja kako pukotina raste do 10 mm duljine, što je

grafički prikazano na slici 34, dok se za ostatak duljine pukotine i za sva tri slučaja vrijednost greške izračunatog opterećenja polagano smanjuje.



Slika 34. Izračunata opterećenja za četiri tenzometarske trake na epruveti opterećenoj na odrez

Izračunom optimalnih položaja i orijentacija za različiti broj tenzometarskih traka, za cijeli proces rasta pukotine, došlo se do više različitih optimalnih položaja i orijentacija. Na kraju je potrebno odrediti optimalni položaj i orijentaciju tenzometarskih traka za sve duljine pukotina uz različiti broj tenzometarskih traka. Zato je provedena analiza metodom najmanjih kvadrata te su rezultati za različiti broj tenzometarskih traka dani u tablicama 15 do 18.

Metoda najmanjih kvadrata zasniva se na načelu da su najbolji oni parametri za koje je suma kvadrata razlika (odstupanja) između izmjerenih vrijednosti i izračunatih vrijednosti minimalna. Tablica 15 prikazuje izračunate vrijednosti opterećenja za različite duljine pukotine te izmjerenu vrijednost. Vrijednosti u zadnjem redu tablice su suma kvadrata odstupanja za slučajeve pozicije i orijentacije tenzometarskih traka.

Izračun sume kvadrata odstupanja za preostale primjere s različitim brojem tenzometarskih traka nećemo prikazivati pošto je izračun jednako jednostavan. Prema tablicama 15 do 18, minimalna suma kvadrata odstupanja (2243,2 N) postignuta je kod mjerenja s dvije tenzometarske trake, za drugi slučaj položaja i orijentacije te stoga zaključujem da je navedeno i optimalno rješenje.

**Tablica 15. Izračunate vrijednosti opterećenja za jednu tenzometarsku traku**

Duljina pukotine (mm)	Izračunate vrijednosti za slučaj (N)			Stvarna (izmjerena) vrijednost (N)
	1	2	3	
0	451,1	445,5	428,1	446
10	574,4	445,3	423,3	465
15	585,7	413,4	390	441
20	578,8	379,3	355,2	414
25	560,9	346,2	325,2	388
30	537	316,6	297,1	363
35	503,2	282,3	265,8	333
40	460,1	250	223,8	299
Suma kvadrata odstupanja	175183,16	11225,88	26575,27	

**Tablica 16. Izračunate vrijednosti opterećenja za dvije tenzometarske trake**

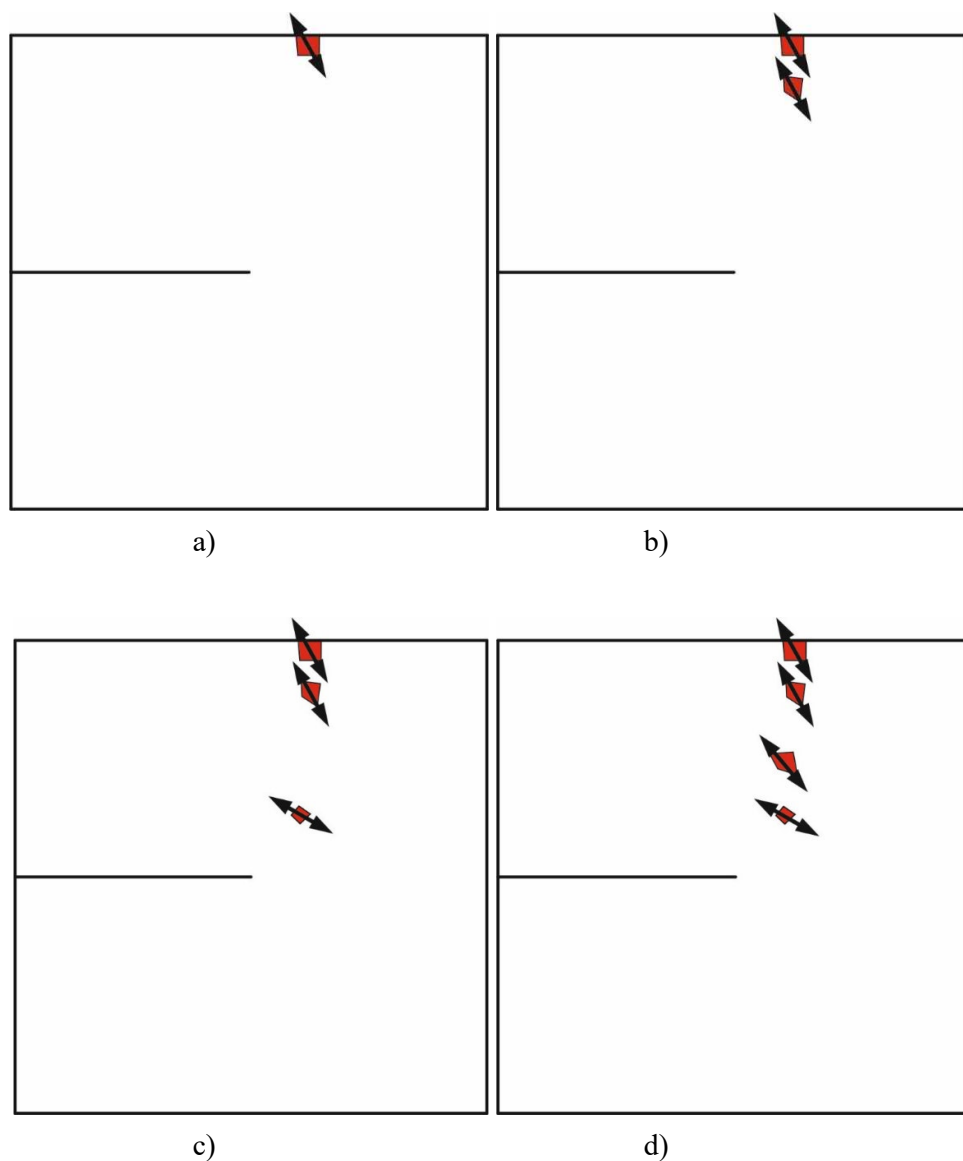
Duljina pukotine (mm)	Izračunate vrijednosti za slučaj (N)			Stvarna (izmjerena) vrijednost (N)
	1	2	3	
0	452,7	471,6	463	446
10	515,5	486,9	469,6	465
15	492,7	423,4	435,1	441
20	460,3	418,1	398,2	414
25	427,5	383,7	365,5	388
30	394,2	352	334,5	363
35	356,2	316,8	300,3	333
40	314,9	279,5	264,8	299
Suma kvadrata odstupanja	10736,46	2243,72	4152,04	

**Tablica 17. Izračunate vrijednosti opterećenja za tri tenzometarske trake**

Duljina pukotine (mm)	Izračunate vrijednosti za slučaj (N)			Stvarna (izmjerena) vrijednost (N)
	1	2	3	
0	516,6	461,4	503	446
10	539,3	513,9	516,2	465
15	518,1	485,9	496,1	441
20	486,2	450,4	440,4	414
25	453,3	415,3	404,6	388
30	419,6	381,2	371	363
35	380,3	342,9	333	333
40	337,4	302	293,6	299
Suma kvadrata odstupanja	32841,60	7152,88	9972,13	

**Tablica 18. Izračunate vrijednosti opterećenja za četiri tenzometarske trake**

Duljina pukotine, [mm]	Izračunate vrijednosti za slučaj [N]			Stvarna (izmjerena) vrijednost, [N]
	1	2	3	
0	476	477,5	507,4	446
10	543,1	535,6	559,8	465
15	519,1	509	520,7	441
20	486,7	473,1	478,8	414
25	453,7	437,4	440,2	388
30	420,3	402,4	403,4	363
35	381,3	362,6	361,9	333
40	338,8	320	324,7	299
Suma kvadrata odstupanja	29901,22	19403,3	29160,83	



**Slika 35. Optimalni položaji i orijentacije tenzometarskih traka na epruveti sa zarezom opterećenoj na smik za: a) jednu , b) dvije, c) tri i d) četiri trake**

Na slici 35 prikazani su optimalni položaji i orijentacija tenzometarskih traka na mreži konačnih elemenata za epruvetu sa zarezom opterećenoj na smik za različit broj tenzometarskih traka, a prema rezultatima iz tablica 15 do 18. Konačni elementi označeni crvenom bojom predstavljaju optimalne položaje za različiti broj tenzometarskih traka, dok crna strelica pokazuje optimalnu orijentaciju za svaki položaj tenzometarskih traka. Priložene tablice 15 do 18 prikazuju da se najmanja greška pri izračunu opterećenja inverznom metodom postiže s dvije tenzometarske trake, za sve duljine pukotina, od početne duljine pukotine do njene kritične duljine kada nastupa lom. S jednom tenzometarskom trakom nije moguće precizno odrediti nepoznato



opterećenje, dok je u slučaju s dvije tenzometarske trake greška izračuna opterećenja najmanja. Međutim, u slučaju kada duljina pukotine prijeđe 25 mm, najmanje odstupanje se postiže s tri tenzometarske trake, dok je greška izračunatog opterećenja s četiri tenzometarske trake veća nego za slučaj s dvije ili tri tenzometarske trake.

### 5.3.2. Regresijska analiza rezultata izračunatih opterećenja

Mnogi problemi u inženjerstvu i znanosti uključuju istraživanje odnosa između dvije ili više varijabli. Regresijska analiza statistička je tehnika koja je vrlo korisna za ove vrste problema. Regresijska analiza može se koristiti za kreiranje modela za predviđanje ili modela koji se također može koristiti za optimizaciju procesa [79]–[81]. Mnoge primjene regresijske analize uključuju situacije u kojima postoji više od jedne regresijske varijable. Regresijski model koji sadrži više od jedne regresijske varijable naziva se model višestruke regresije. U istraživanju važnom za ovaj doktorski rad pretpostavlja se da određivanje opterećenja ovisi o duljini pukotine i orijentaciji tenzometarske trake. Model višestruke regresije koji bi mogao opisati ovaj odnos je prema [82]

$$z = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon, \quad (5.1)$$

gdje  $z$  predstavlja izračunato opterećenje,  $x_1$  predstavlja duljinu pukotine,  $x_2$  predstavlja orijentaciju tenzometarske trake, a  $\varepsilon$  je slučajna varijabla. Ovo je model višestruke linearne regresije s dvije regresijske varijable. Pojam „linearni“ koristi se jer je jednadžba (5.1) linearna funkcija nepoznatih parametara  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , i  $\beta_2$  koji se nazivaju i regresijski koeficijenti. Regresijski model u jednadžbi (5.1) opisuje ravninu u trodimenzijskom prostoru  $z$ ,  $x_1$  i  $x_2$ . Za procjenu koeficijenata regresije u modelu višestruke regresije koristi se metoda najmanjih kvadrata.

Tablica 19. Ulazni podaci za regresijsku analizu

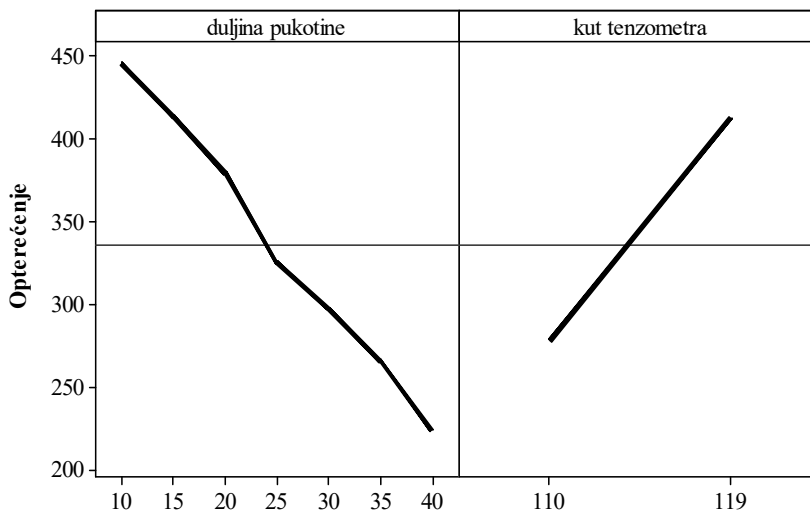
Izračunato opterećenje ( $z$ ) (N)	Duljina pukotine (mm)	Orijentacija tenzometarske trake (°)
445,5	10	119
413,4	15	119
379,3	20	119

325,2	25	110
297,1	30	110
265,8	35	110
223,8	40	110

Nadalje će se upotrijebiti podaci navedeni u tablici 19 te će se prikazati detalji procjene parametara modela. Iz podataka u tablici 19 dobivamo procijenjenu regresijsku jednadžbu

$$\hat{z} = 265 - 6.62 x_1 + 2.08 x_2 . \quad (5.2)$$

Ova se jednadžba može koristiti za predviđanje izračuna opterećenja za parove vrijednosti regresijskih varijabli: duljina pukotine ( $x_1$ ) i orijentacija tenzometarskih traka ( $x_2$ ). Slika 36 prikazuje odnose izračunatog opterećenja i duljine pukotine ( $x_1$ ) te opterećenja i orijentacija tenzometarskih traka ( $x_2$ ). Kao što je vidljivo sa slike, opterećenje pada porastom duljine pukotine te raste porastom orijentacije tenzometarskih traka. Razlika između stvarne promatrane vrijednosti  $z_i$  i procijenjene vrijednosti  $\hat{z}_i$  je rezidual koji je definiran kao:  $e_i = z_i - \hat{z}_i$ .



Slika 36. Odnos opterećenja (N) i regresijskih varijabli, duljina pukotine (mm) i orijentacije tenzometarskih traka (°)

Test značaja pojedinačnog koeficijenta regresije je test kojim se utvrđuje doprinose li značajno modelu varijable duljina pukotine i orijentacija tenzometarskih traka (tzv. t-test). Utjecaj pojedinačnih koeficijenata prikazanih u tablici 20 imaju značenje kako slijedi, *Coef* je

koeficijent regresije, *SE Coef* označava standardnu grešku regresijskog koeficijenta, *T* je statistički test, *P* predstavlja standardnu grešku i *VIF* predstavlja faktor varijacije inflacije. Prema tablici 20, budući da je P-vrijednost znatno manja od razine značaja  $\alpha = 0,05$ , zaključujemo da obje varijable: duljina pukotine ( $P = 0,000 < \alpha = 0,05$ ) i orijentacija tenzometarskih traka ( $P = 0,019 < \alpha = 0,05$ ) značajno doprinose modelu. Nadalje, faktori varijacije inflacije (*eng. variance inflation factors*) nisu veći od 5 pa kažemo da postoji multikolinearnost, ali u maloj mjeri.

Tablica 20. Značaj pojedinih koeficijenata

Prediktor	<i>Coef</i>	<i>SE Coef</i>	<i>T</i>	<i>P</i>	<i>VIF</i>
Konstanta	264,66	68,1	3,89	0,018	0
Duljina pukotine (mm)	-6,6211	0,2528	-26,19	0,00	4,123
Orijentacija tenzometarskih traka (°)	2,0783	0,5492	3,78	0,019	4,123

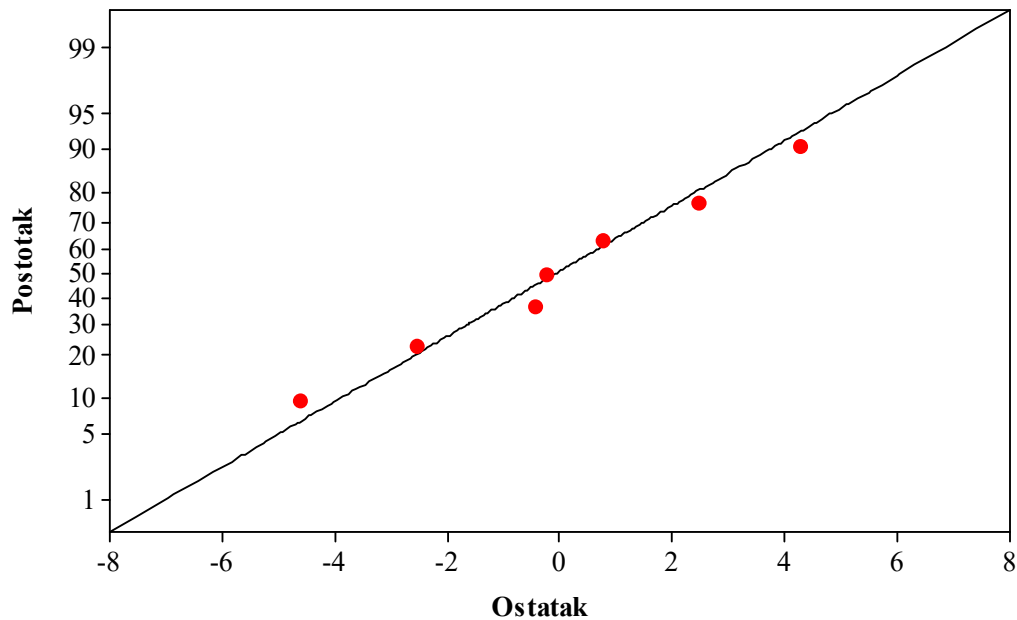
Nadalje je proveden test značaja regresije. Ovo je test kojim se utvrđuje postoji li linearna veza između varijable odziva *z* (izračunato opterećenje) i regresijskih varijabli  $x_1$  (duljina pukotine) i  $x_2$  (orijentacija tenzometarskih traka) (F-test). Prema tablici 21, budući da je P-vrijednost znatno manja od  $\alpha = 0,05$  ( $P = 0,000 < \alpha = 0,05$ ), zaključujemo da je izračunavanje opterećenja linearno povezano bilo s duljinom pukotine ili s orijentacijom tenzometarskih traka, bilo s obje. Međutim, napominjemo da to ne znači nužno da je pronađena veza prikladan model za izračun opterećenja u funkciji duljine pukotine i orijentacije tenzometarskih traka. Potrebni su daljnji testovi adekvatnosti modela prije nego što ćemo moći sigurno koristiti ovaj model u inženjerskoj praksi.

Za podatke o izračunu opterećenja nalazimo da statistička veličina  $R^2$  iznosi 99,8%. Stoga model pokriva oko 99,8% varijabilnosti u izračunu opterećenja što je dobar rezultat.

Tablica 21. Analiza varijance

Izvor	DF	SS	MS	F	P
Regresija	2	12485663	6242831	1798.55	0.000
Greška reziduala	4	13884	3471	-	-
Ukupno	6	12499547	-	-	-

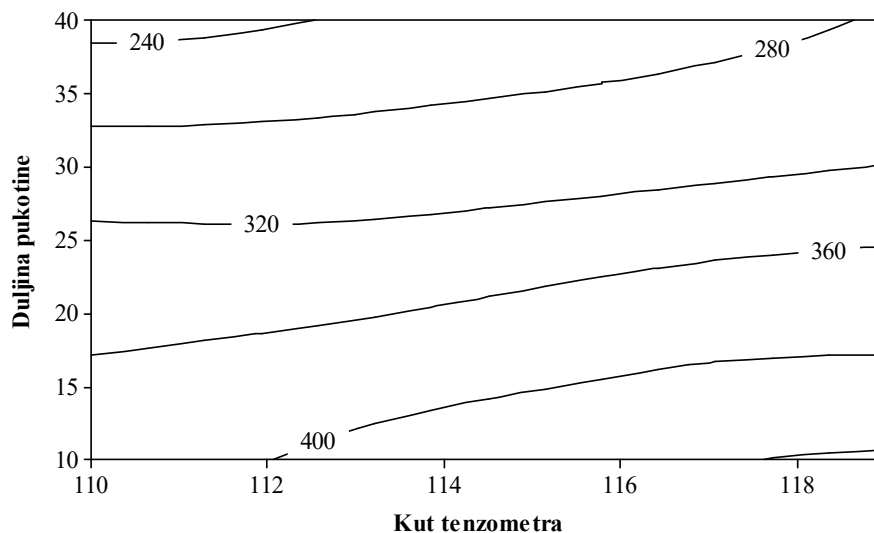
Analiza ostataka (reziduala) često je korisna u provjeri pretpostavke da su greške približno normalno raspodijeljene s konstantnom varijancom i u izračunu opterećenja bi li dodatne varijable u modelu bile korisne? Za provjeru normalnosti, konstruira se dijagram vjerojatnosti ostataka prikazan na slici 37. Budući da ostaci padaju približno po ravnoj liniji na slici, zaključujemo da nema ozbiljnog odstupanja od normalnosti.



Slika 37. Dijagram vjerojatnosti ostataka

Na slici 38 prikazan je konturni prikaz regresijskog modela, odnosno linije izračuna opterećenja u funkciji duljine pukotine i orijentacije tenzometarskih traka. Iako linije nisu potpuno linearne, prema regresijskom modelu interakcija između dvije varijable - duljina pukotine i orijentacija

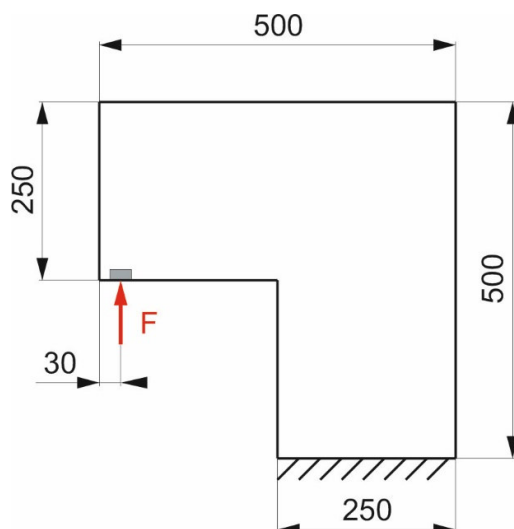
tenzometarskih traka nije vidljiva iz konturnog prikaza regresijskog modela te se može zaključiti da regresijska jednadžba dobro opisuje model.



Slika 38. Kontura izračuna opterećenja u ovisnosti o duljini pukotine (mm) i orijentaciji tenzometarske trake (°)

#### 5.4. L-epruveta

Kao drugi primjer sa složenom geometrijom, odnosno putanjom pukotine koji je korišten za verifikaciju postupka inverznog modeliranja za određivanje nepoznatog opterećenja, analizirana je epruveta u obliku slova L, koja je također analizirana u doktorskoj disertaciji [73]. L-epruveta je klasični primjer za verifikaciju numeričkih modela za propagaciju pukotine. Slika 39 prikazuje geometriju, rubne uvjete te opterećenje epruvete. L-epruveta je opterećena vertikalnom koncentriranom silom, dok je donji rubu epruvete ukliješten.

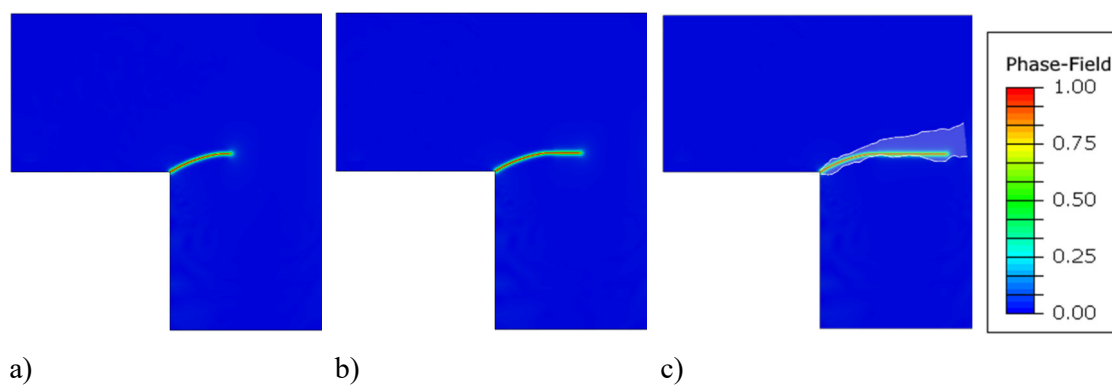


Slika 39. L-epruveta, dimenzije (u milimetrima) i rubni uvjeti

Svojstva materijala korištena u numeričkom modelu (modul elastičnosti  $E$ , Poissonov faktor  $\nu$ , lomna žilavost  $G_c$  i duljinski parametar  $l$ ) su preuzeta iz [73] te su prikazana u tablici 22. Kao i u prethodnom primjeru, za simulaciju rasta pukotine u epruveti i izračun raspodjele deformacija za različite duljine pukotine korištena je metoda faznog polja. Uzorak je diskretiziran s 62 659 konačnih elemenata koji kao dodatan stupanj slobode, osim pomaka imaju varijablu faznog polja. Putanja pukotine na uzorku prikazana na slici 40 dobivena je primjenom sferno-devijatorske dekompozicije deformacijske energije. Numerički postupak izračuna proveden je u doktorskom radu [73] te su rezultati za raspodjelu deformacija u ovisnosti o opterećenju za različite duljine pukotine ovdje iskorišteni za identifikaciju nepoznatog opterećenja iz „izmjerenih“ deformacija primjenom inverznog modeliranja.

Tablica 22. Karakteristike materijala L-epruvete

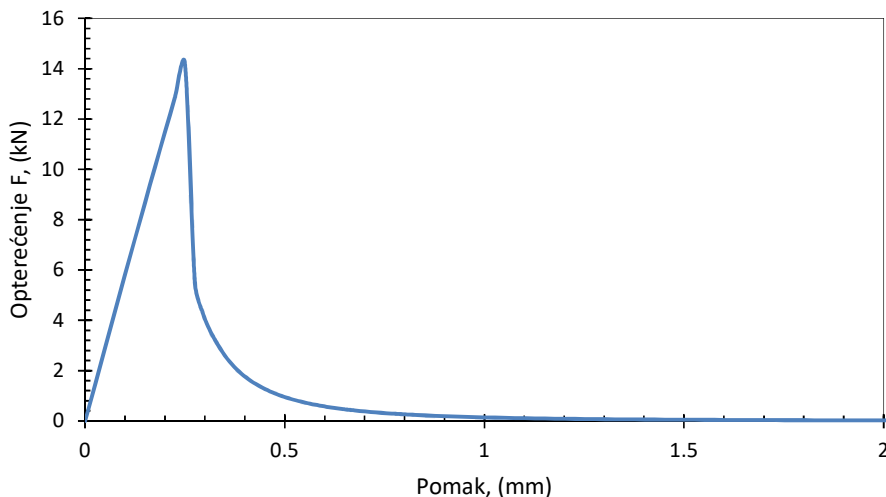
Materijal	$E$ (MPa)	$\nu$ (-)	$G_c$ (kN/mm)	$l$ (mm)
Beton	25850	0,18	$8,9 \times 10^{-5}$	1,1875



**Slika 40. Putanja pukotine u L-epruveti dobivena primjenom modela faznog polja uslijed opterećenja: a)  $F=104$  N, b)  $F=42$  N i c)  $F=9$  N u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima iz [83]**

Rezultati modela faznog polja uspoređeni s eksperimentalnim mjerenjima iz [83] prikazani su na slici 40c) iz koje se vidi dobro poklapanje rezultata numeričke simulacije metodom faznog polja i eksperimentalnih rezultata. Dobro preklapanje eksperimentalnih rezultata i numeričke simulacije metodom faznog polja omogućuje korištenje putanje pukotine u postupku inverznog modeliranja nepoznatog opterećenja. Krivulja opterećenje-pomak za L-epruvetu prikazana je na slici 41 iz koje se uočava ponašanje slično kao i na prethodnom primjeru s epruvetom sa zarezom.

Kako i za ovaj primjer nisu bile dostupne mjerene deformacije na površini epruvete, za izračun opterećenja inverznom metodom vrijednosti deformacija na vanjskoj plohi uzorka za različite duljine pukotine očitane su iz rezultata modela faznog polja. Pritom u prethodnom primjeru uvedena terminologija za pojmove „tenzometarska traka“, „narinuto opterećenje“ i „mjereno opterećenje“ vrijedi i ovdje.



Slika 41. Krivulja opterećenje - pomak za L-epruvetu izračunata primjenom modela faznog polja [72]

Kao i u prethodnom primjeru, za definiranje veze između ulaznih opterećenja i deformacija za različite duljine pukotine, pukotina čija je složena putanja dobivena primjenom modela faznog polja je za potrebe inverznog modeliranja podijeljena na inkremente te je njen rast modeliran u programskom paketu Abaqus primjenom opcije „seam crack“. Nadalje je gusta mreža koja se koristila za simulaciju rasta pukotine metodom faznog polja sada zamijenjena s puno grubljom mrežom konačnih elemenata. Diskretizacija modela za postupak inverznog modeliranja provedena je s 16064 heksaedarskih konačnih elementa prvog reda C3D8 iz Abaqusove baze konačnih elemenata. Progušćivanje mreže provedeno je u očekivanom području rasta pukotine. Zatim su za definiranje potencijalnih pozicija tenzometarskih traka za mjerenje deformacija na prednjoj plohi L-epruvete, u numerički model uvedeni ljuskasti konačni elementi pomoću opcije „Skin“.

#### 5.4.1. Inverzno modeliranje

Za različiti broj tenzometarskih traka za slučajeve L-epruvete bez pukotine i s različitom duljinom pukotine, provedeno je određivanje nepoznatog opterećenja primjenom inverznog postupka. Optimalni broj, položaj i orijentacija tenzometarskih traka određen je primjenom D-optimalnog postupka. Za izračun nepoznatog opterećenja inverznim postupkom u sljedećem koraku su iz numeričkog modela faznog polja očitane vrijednosti deformacija na optimalnim

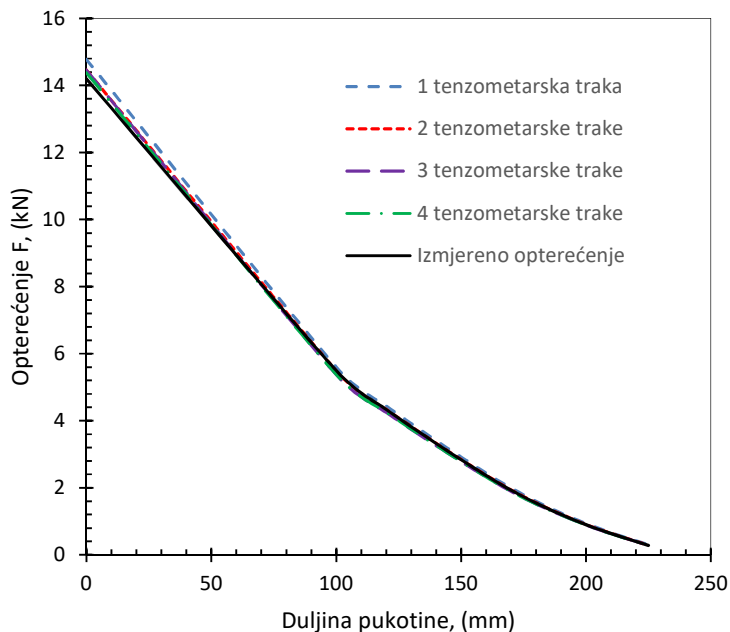


položajima. Deformacije određene za različite duljine pukotine korištene za izračun nepoznatog opterećenja inverznom metodom prikazane su u tablici 23.

Tablica 23. Očitane deformacije na L-epruveti

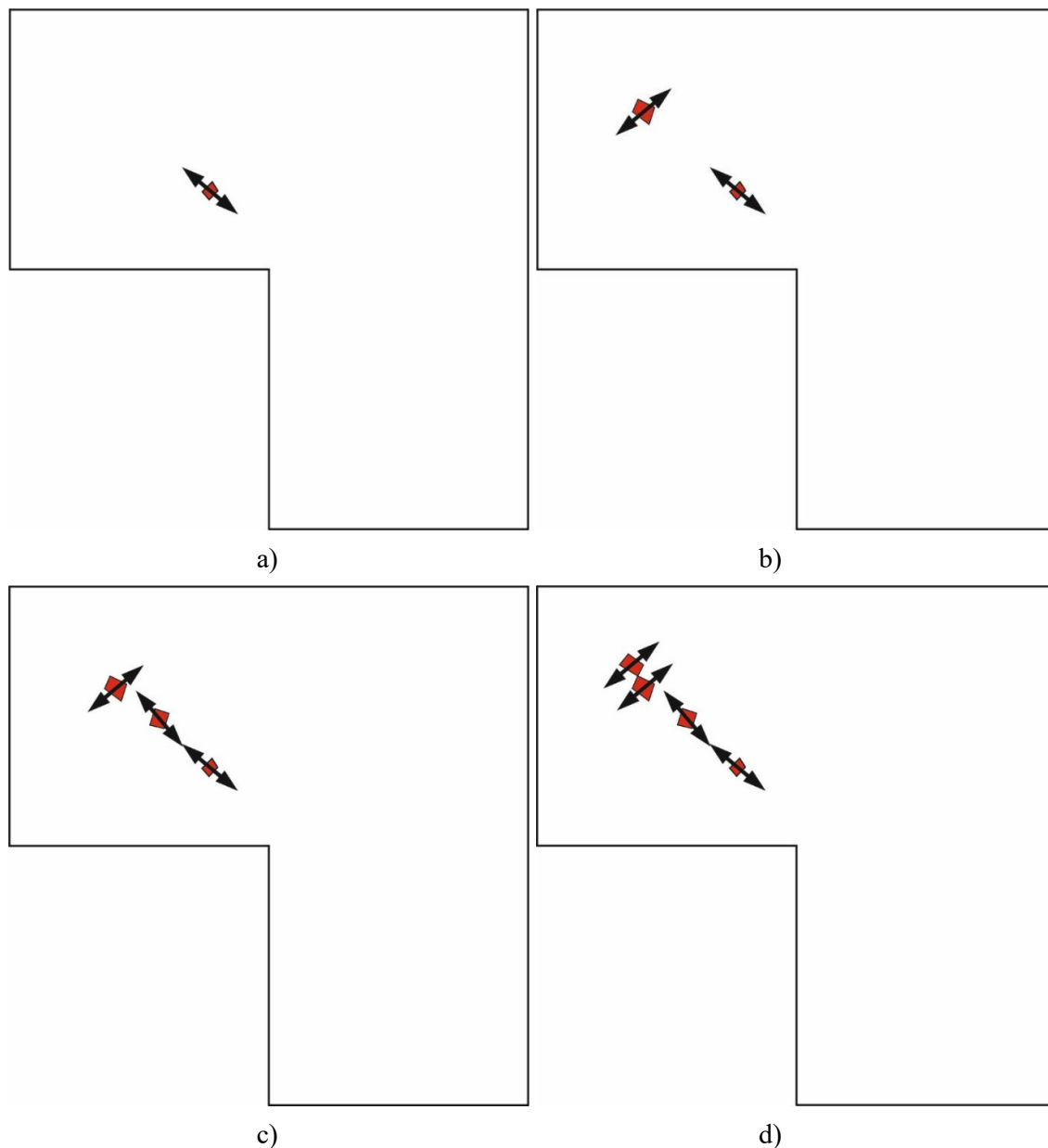
Duljina pukotine (mm)	Izmjerene vrijednosti deformacije	TT1	TT2	TT3	TT4
0	E11	3,4E-05	-1,1E-05	1,5E-07	-10,0E-06
	E22	1,6E-05	-3,1E-06	6,3E-06	-5,9E-06
	E12	-8,1E-05	-7,3E-05	-8,0E-05	-6,5E-05
100	E11	1,8E-05	-3,8E-06	3,2E-06	-3,7E-06
	E22	-6,5E-06	-3,0E-06	-3,8E-06	-3,3E-06
	E12	-1,4E-05	-3,0E-05	-3,0E-05	-2,6E-05
120	E11	1,4E-05	-3,1E-06	2,3E-06	-3,0E-06
	E22	-5,2E-06	-2,3E-06	-2,9E-06	-2,6E-06
	E12	-1,1E-05	-2,3E-05	-2,4E-05	-2,0E-05
152	E11	9,0E-06	-2,0E-06	1,3E-06	-1,9E-06
	E22	-3,3E-06	-1,4E-06	-1,7E-06	-1,8E-06
	E12	-7,2E-06	-1,5E-05	-1,5E-05	-1,7E-05
175	E11	5,6E-06	-1,3E-06	7,9E-07	-1,2E-06
	E22	-2,1E-06	-8,5E-07	-1,1E-06	-9,8E-07
	E12	-4,6E-06	-9,1E-06	-9,5E-06	-8,0E-06
200	E11	2,9E-06	-6,7E-07	4,0E-07	-6,4E-07
	E22	-1,1E-06	-4,4E-07	-5,3E-07	-5,0E-07
	E12	-2,5E-06	-4,8E-06	-5,0E-06	-4,2E-06
225	E11	9,2E-07	-2,1E-07	1,2E-07	-2,0E-07
	E22	-3,3E-07	-1,4E-07	-1,6E-07	-1,6E-07
	E12	-7,8E-07	-1,5E-06	-1,6E-06	-1,3E-06

Kao i u prethodnom primjeru, za kontrolu i usporedbu rezultata izračuna nepoznatog opterećenja inverznom metodom korišteni su rezultati numeričke analize metodom faznog polja. Izračunate vrijednosti opterećenja za različite duljine pukotine u ovisnosti o broju tenzometarskih traka prikazane su na slici 42. Iz dijagrama sa slike se vidi dobra procjena opterećenja za različite vrijednosti duljina pukotine. Iz rezultata se može zaključiti da je u slučaju velike pukotine na L-epruveti, dovoljna i jedna tenzometarska traka za određivanje opterećenja, dok u slučaju malih pukotina je ipak potrebno više tenzometarskih traka za određivanje opterećenja za različite duljine pukotine.



Slika 42. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na L-epruveti

Prikazani konačni elementi označeni crvenom bojom na slici 43 odgovaraju optimalnim položajima tenzometarskih traka. Traženje optimalnih pozicija i orijentacija tenzometarskih traka iz optimalnih položaja za svaki prirast pukotine, uz praćenje promijene opterećenja kroz rast pukotine, nije proveden kao u prethodnom primjeru. Za sve duljine pukotine ostala je ista orijentacija tenzometarskih traka. Optimalni kut tenzometarskih traka za svaki pojedini položaj označen je crnom strelicom. U ovom slučaju nije bilo promijene orijentacije ili položaja mjernih traka s promjenom duljine pukotine, stoga nije bilo potrebno provesti analize za različite duljine pukotina te različite položaje i orijentacije tenzometarskih traka. Iz prikazanih optimalnih položaja i orijentacija tenzometarskih traka za različit broj traka može se zaključiti kako su optimalni položaji udaljeni od pukotine s jedne strane i područja narinutog opterećenja s druge strane. Izračunata opterećenja s dvije, tri ili četiri tenzometarske trake pokazuju malo odstupanje od izmjereno opterećenja, dok se jedino u slučaju s jednom tenzometarskom trakom, dok se nije inicirala pukotina, vrijednost izračunatog opterećenja odstupala od izmjerene vrijednosti.

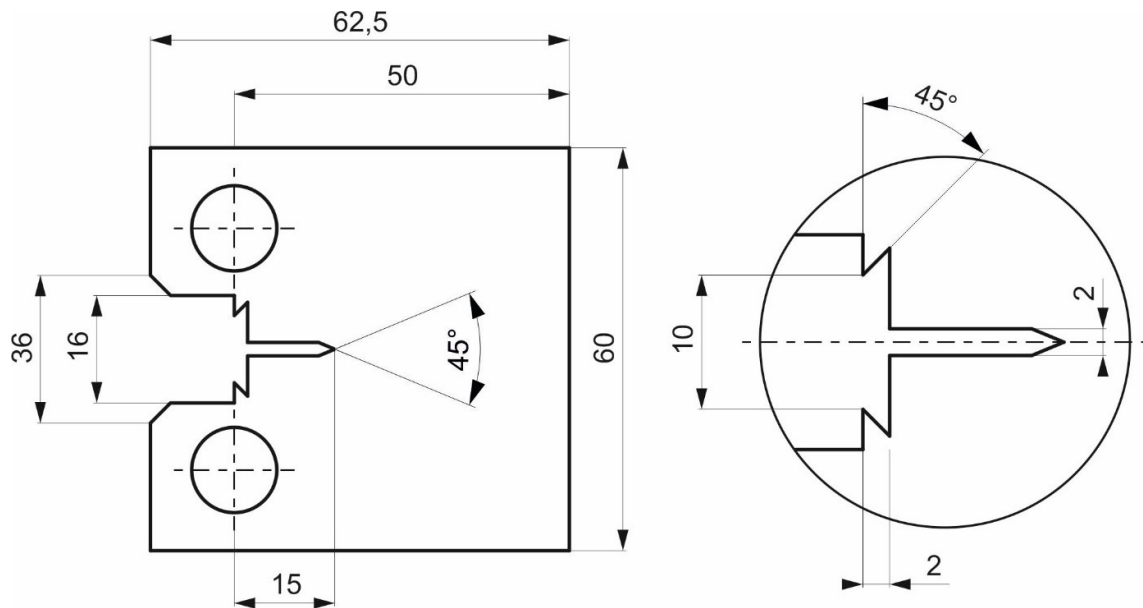


Slika 43. Položaji i orijentacije tenzometarskih traka na L-epruveti za: a) jednu , b) dvije, c) tri i d) četiri trake

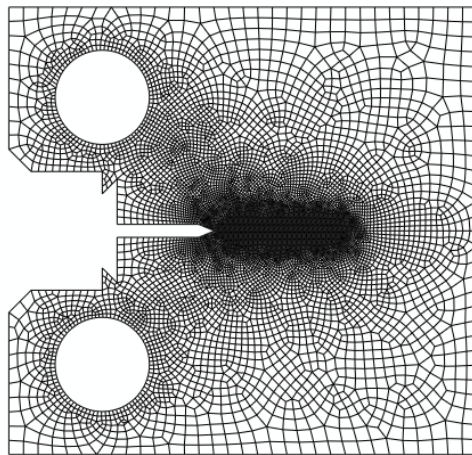
### 5.5. Kompaktna vlačna CT epruveta

Nadalje je postupak inverznog modeliranja verificiran na kompaktnoj vlačnoj epruveti (*eng. CT - Compact tension*) za ispitivanje prvog moda otvaranja pukotine. Za potrebe inverznog modeliranja geometrija epruvete prikazana na slici 44 diskretizirana je heksaedarskim elementima prvog reda C3D8 u kombinaciji s ljuskastim elementima i opcijom „Skin“ za

dodjeljivanje mjerenih deformacija u numeričkom modelu. Prikazana mreža konačnih elemenata na slici 45 sadrži 9739 heksaedarskih elemenata i 49135 čvora.



Slika 44. Geometrija CT epruvete



Slika 45. Prikaz mreže konačnih elemenata na CT epruveti

Epruvete su izrađene od krhkog homogenog izotropnog materijala PMMA (termoplastični polimer polimetakrilat) za kojeg su mehanička svojstva materijala dobivena od dobavljača Nova forma d.o.o. Zagreb te su prikazana u tablici 24.

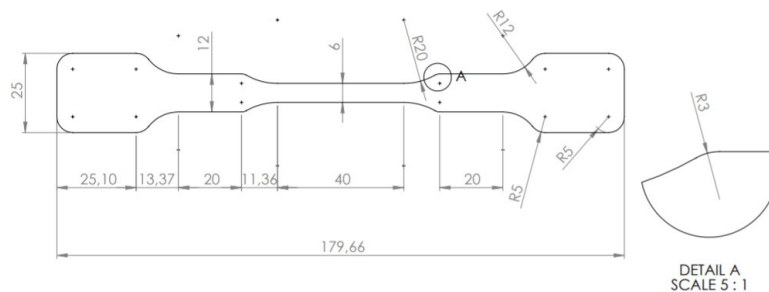
**Tablica 24. Mehaničke karakteristike materijala dobivene od dobavljača Nova forma d.o.o. iz Zagreba**

Parametar	Jedinične mjere	Metoda	Vrijednost
Modul elastičnosti	MPa	DIN53457	3000
Savojna čvrstoća	MPa	DIN53452	120
Vlačna čvrstoća	MPa	DIN53455	70
Tlačna čvrstoća	MPa	DIN53454	120
Gustoća	g/ cm <sup>3</sup>	DIN53479	1,18
Istezanje	%	DIN53455	4

Kako bi se provjerila mehanička svojstva materijala dobivena od dobavljača provedena su ispitivanja monotonim vlačnim testom za određivanje modula elastičnosti  $E$ , Poissonovog faktora  $\nu$ , granicu tečenja  $R_{p0,2}$  i vlačnu čvrstoću  $R_m$  prema standardu ASTM D638. Osim toga, provedeni su testovi lomne žilavosti materijala. Ispitivanja se provedena na servo-hidrauličkoj dinamičkoj kidalici INSTRON 1255 u Laboratoriju za strojne elemente i konstrukcije, Fakulteta za strojništvo, Univerze v Mariboru. Jednoosni vlačni testovi provodili su se do pojave loma kako bi se dobio odnos naprezanja i deformacije te lomna svojstva u smislu kritičnog naprezanja i deformacije pri lomu. Pritom je analizirano 5 epruveta prikazanih na slici 46. Samo kod dvije epruvete je lom bio u mjernom području, a kod preostale tri je lom bio na prijelaznim radijusima tako da rezultati njihovih mjerenja nisu uzeti u obzir. Razlog tome je što i najmanje zarezno djelovanje kod ovog izrazito krhkog materijala izaziva nastanak pukotine i njen brzi rast do loma. Rezultati mehaničkih karakteristika materijala dobiveni iz dva valjana uzorka dani su u tablici 25. Kao što je vidljivo, dobiveni eksperimentalni rezultati se relativno dobro poklapaju s rezultatima od dobavljača materijala prikazanih u tablici 24.

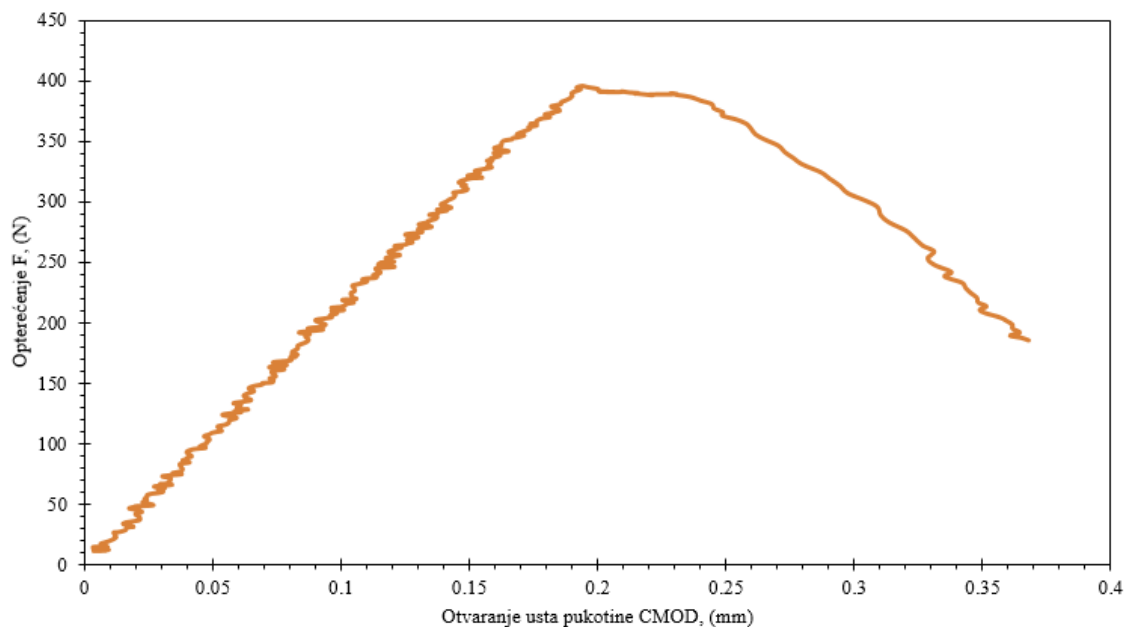
**Tablica 25. Mehaničke karakteristike PMMA materijala**

Parametar		Uzorak 1	Uzorak 2	Prosječna vrijednost
Modul elastičnosti	$E$ (MPa)	3309,8	3231	3270,4
Poissonov faktor	$\nu$ (-)	0,369	0,379	0,374
Granica tečenja	$R_{p0,2}$ (MPa)	63,8	56,8	60,3
Vlačna čvrstoća	$R_m$ (MPa)	63,8	56,8	60,3
Omjer	$R_{p0,2} / R_m$	1	1	1

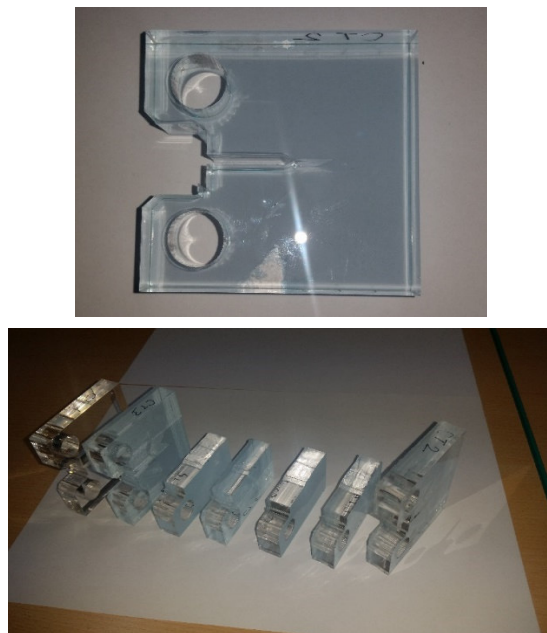


Slika 46. Epruveta za ispitivanje jednoosnog vlačnog testa PMMA materijala

Rezultat provedenog testa ispitivanja lomne žilavosti PMMA materijala prikazan je na slici 47, u obliku tipičnog dijagrama opterećenje - otvaranje usta pukotine (*eng. Crack Mouth Opening Displacement, CMOD*) dobivenog na CT epruveti čija geometrija je prikazana na slici 44. Epruvete korištene prilikom testa prikazane su na slici 48. Rezultati ispitivanja korišteni su za određivanje lomne žilavost materijala prema normi ASTM E399. Lomna žilavost dobivena je u iznosu od  $K_{IC} = 1,207 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} = 38,16 \text{ N/mm}^{3/2}$  te se iz dobivene vrijednosti može zaključiti da se radi o izrazito krhkom materijalu.



Slika 47. Tipična krivulja opterećenje - otvaranje usta pukotine



Slika 48. CT epruvete od PMMA materijala

Tablica 26. Izmjerene deformacije na CT epruveti

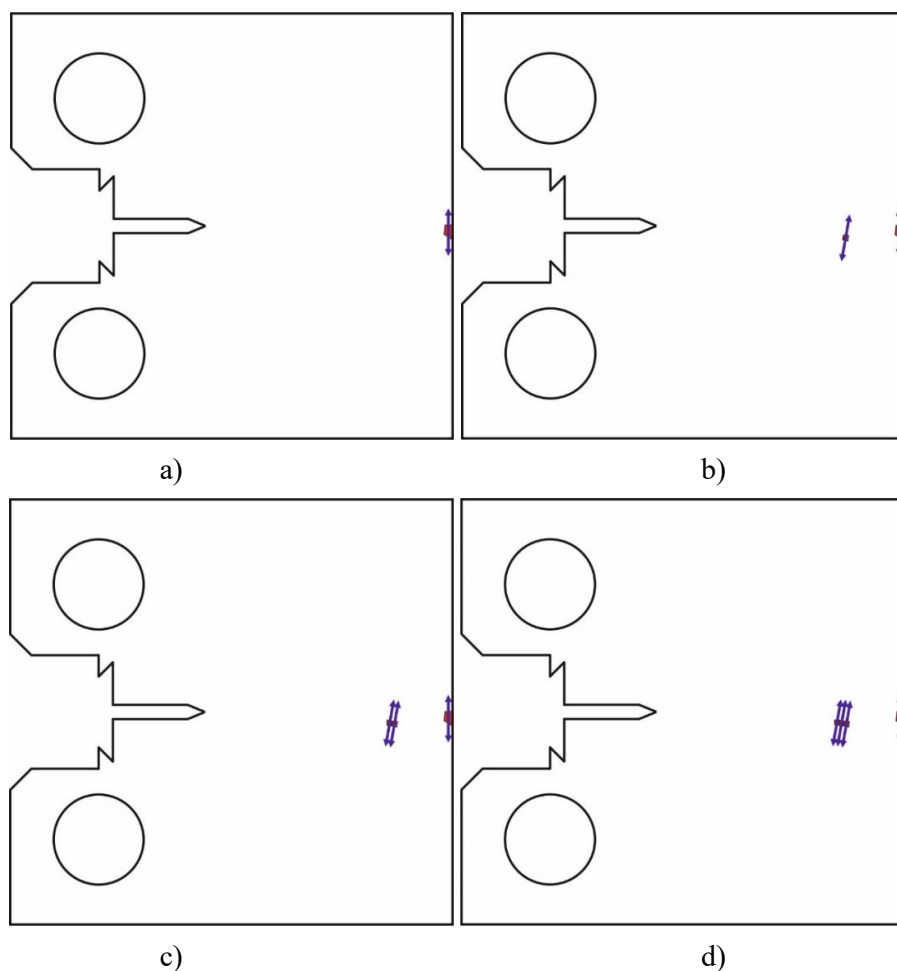
Duljina pukotine (mm)	Izmjerene vrijednosti deformacije	TT1	TT2	TT3	TT4
0	E11	3,60E-04	3,07E-04	3,17E-04	3,28E-04
	E22	-9,53E-04	-4,95E-04	-4,73E-04	-4,53E-04
	E12	-7,67E-06	-1,46E-04	-1,45E-04	-1,45E-04
18	E11	5,75E-04	4,78E-04	4,92E-04	5,09E-04
	E22	-1,52E-03	-7,45E-04	-7,06E-04	-6,70E-04
	E12	-1,26E-05	-2,39E-04	-2,38E-04	-2,37E-04
21	E11	7,35E-04	6,03E-04	6,24E-04	6,48E-04
	E22	-1,94E-03	-7,98E-04	-7,46E-04	-6,97E-04
	E12	-1,62E-05	-3,15E-04	-3,14E-04	-3,13E-04
25	E11	8,58E-04	6,61E-04	6,82E-04	7,07E-04
	E22	-2,26E-03	-9,01E-04	-8,25E-04	-7,56E-04
	E12	-2,12E-05	-3,97E-04	-3,99E-04	-4,00E-04
28	E11	9,81E-04	7,38E-04	7,96E-04	7,60E-04
	E22	-2,58E-03	-8,76E-04	-6,75E-04	-7,73E-04
	E12	-2,67E-05	-5,57E-04	-5,73E-04	-5,69E-04

### 5.5.1. Inverzno modeliranje

Određivanje optimalnog položaja tenzometarskih traka na kompaktnoj vlačnoj epruveti provedeno je primjenom postupka D-optimalnog dizajna i inverzne metode. Postupak izračuna nepoznatog opterećenja epruvete s različitom duljinom pukotine proveden je na temelju rezultata testa lomne žilavosti materijala sa slike 44. Za simulaciju rasta pukotine u CT epruveti i izračun raspodjele deformacija za različite duljine pukotine korištena je metoda faznog polja. Putanja pukotine na epruveti dobivena je primjenom sferno-devijatorske dekompozicije deformacijske energije. Vrijednosti deformacija za različite duljine pukotine i za optimalno određene položaje tenzometarskih traka, korištene u postupku inverznog modeliranja za određivanje opterećenja, prikazane su u tablici 26.

Kao i u prethodnim primjerima, za definiranje veze između ulaznih opterećenja i deformacija za različite duljine pukotine, pukotina je za potrebe inverznog modeliranja podijeljena na inkremente te je njen rast modeliran u programskom paketu Abaqus primjenom opcije „seam crack“. Za definiranje potencijalnih pozicija tenzometarskih traka za mjerenje deformacija na prednjoj plohi CT epruvete, u numerički model su dodijeljeni ljuskasti konačni elementi pomoću opcije „Skin“. Odabrano područje potencijalnih pozicija tenzometarskih traka je područje cijele prednje plohe CT epruvete, osim oko očekivanog, eksperimentalno dobivenog područja rasta pukotine i u blizini područja otvora na kojem su narinute sile. Na slici 49 prikazan je optimalni položaj tenzometarskih traka na mreži konačnih elemenata za kompaktnu epruvetu. Upotrijebljene su različite kombinacije od jedne do četiri tenzometarske trake u trenutku prije početka rasta pukotine te za određeni korak rasta pukotine. Sljedeći je korak pronaći optimalni položaj i orijentaciju tenzometarskih traka za cijelu putanju pukotine iz optimalnog položaja za svaku pojedinu duljinu pukotine (tablica 27). U ovom primjeru s CT epruvetom optimalni položaj tenzometarskih traka nalazi se u zoni rasta pukotine, što se kosi s preporukom koja područja bi trebalo izbjegavati za smještaj tenzometarskih traka. Postavljanje optimalnih položaja u očekivano područje rasta pukotine u ovom slučaju nije problem. Naime, zbog izrazite krhkosti materijala dolazi do loma epruvete prije nego pukotina dostigne veličinu kojom bi se dovoljno približila optimalnom položaju, tj. preostali dio epruvete ne može više nositi narinuto opterećenje.





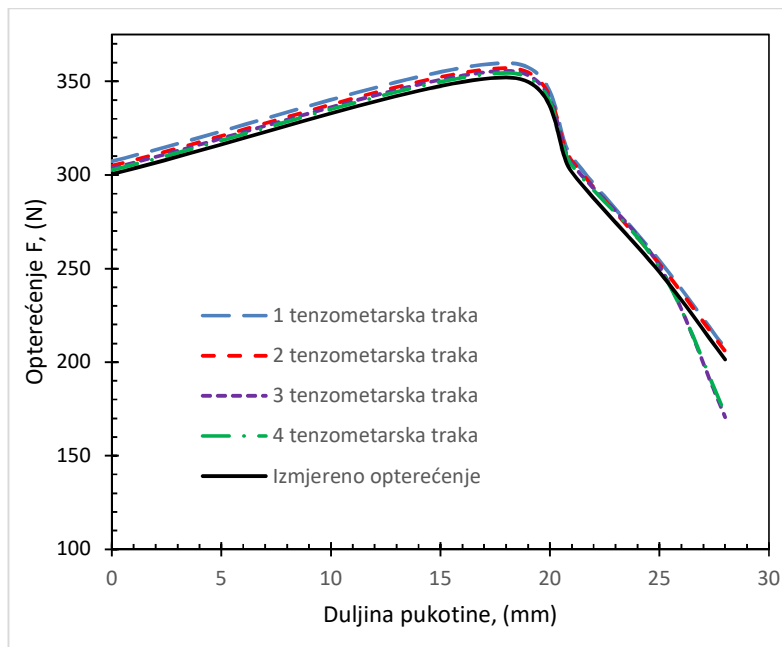
Slika 49. Položaji i orijentacije tenzometarskih traka na kompaktnoj epruveti za:  
a) jednu , b) dvije, c) tri i d) četiri trake

Pukotina	1 TT	2 TT	3 TT	4 TT
0	90	80	80	80
18	90	80	80	80
21	90	80	80	80
25	90	80	80	80
28	90	80	80	80

Tablica 27. Orijentacija tenzometarskih traka

Rezultati prikazani na slici 50 za različiti broj tenzometarskih traka za određivanje opterećenja pokazuju da je u ovom primjeru potrebno više tenzometarskih traka kako bi se moglo pratiti napredovanje pukotine. Vidi se dobra procjena opterećenja za različitu duljinu pukotine. Određivanje opterećenja s jednom i dvije tenzometarske trake ima tendenciju određivanja veće vrijednosti opterećenja za cijelu duljinu pukotine. U slučaju s tri i četiri tenzometarske trake za

rast pukotine do određene vrijednosti, 25mm, izračunato opterećenje je precijenjeno kao i kod slučaja s jednom ili dvije tenzometarske trake, dok s pukotinom duljom od 25 mm, dolazi do povećanja greške izračuna opterećenja, s naglašenom tendencijom podcjenjivanja vrijednosti opterećenja kako pukotina raste.

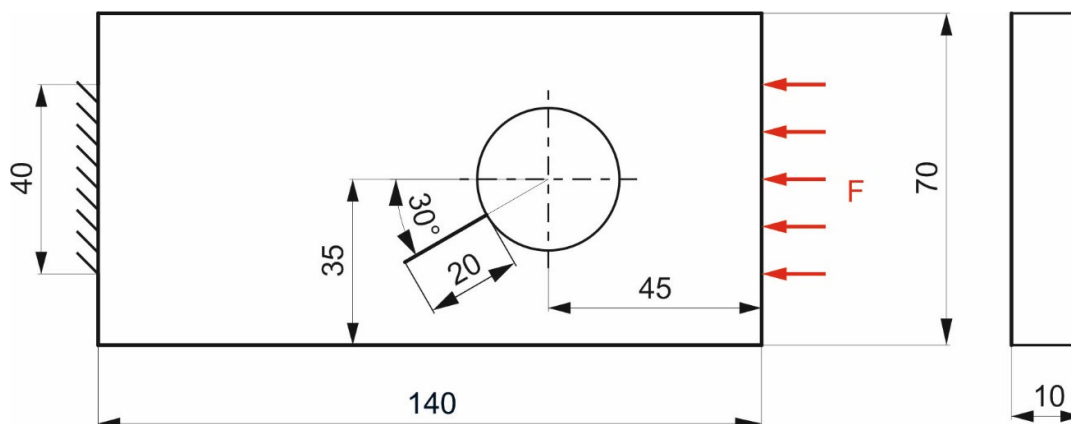


Slika 50. Izračunata opterećenja za različite broj tenzometarskih traka na kompaktnoj vlačnoj epruveti

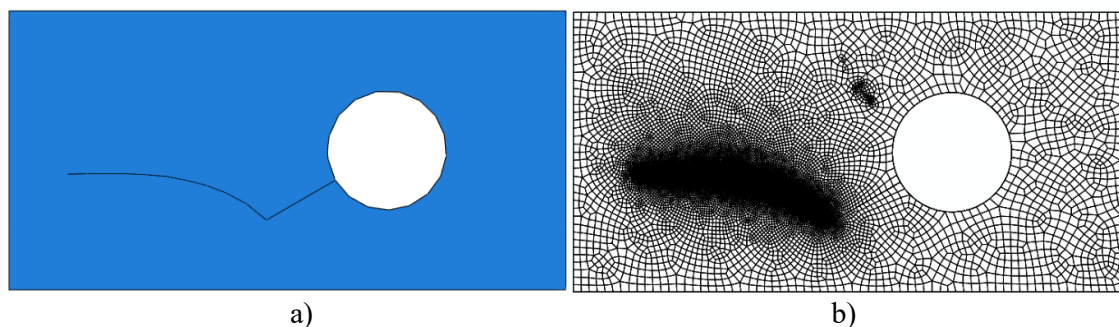
## 5.6. Ploča s otvorom

Kao primjer za provjeru u ovom radu predloženog postupka inverznog modeliranja za određivanje nepoznatog opterećenja komponente s pukotinom korištena je ploča s otvorom koja sadrži inicijalnu pukotinu te je prikazana na slici 51. Ovaj primjer u kojem se rast pukotine odvija uslijed mješovitog moda otvaranja pukotine, za kojeg su u [84] dani eksperimentalni rezultati, se vrlo često analizira u literaturi kao *benchmark* primjer za validaciju numeričkih algoritama za modeliranje rasta pukotina. Ploča dimenzija  $140 \times 70 \times 10$  mm sadrži otvor promjera 30 mm te na otvoru inicijalnu pukotinu duljine 20 mm pod kutem od  $30^\circ$  u odnosu na horizontalnu os ploče. Ploča je opterećena tlačno na desnom rubu i uklještena na lijevom rubu. Za potrebe provedbe inverznog modeliranja ploča je diskretizirana s heksaedarskim elementima prvog reda C3D8 koji su kombinirani s opcijom „Skin“ iz programskog paketa Abaqus za dodjeljivanje mjerenih deformacija u numerički model. Očekivana putanja rasta pukotine prikazana je na slici 52 a). Prikazana mreža konačnih elemenata na slici 52 b) sadrži 93732

heksaedraskih elemenata i 94663 čvora. Progušćivanje mreže konačnih elemenata provedeno je u očekivanom području rasta pukotine.



Slika 51. Geometrija i rubni uvjeti ploče s otvorom



Slika 52. Prikaz ploče s otvorom za: a) putanju pukotine i b) prikaz mreže konačnih elemenata

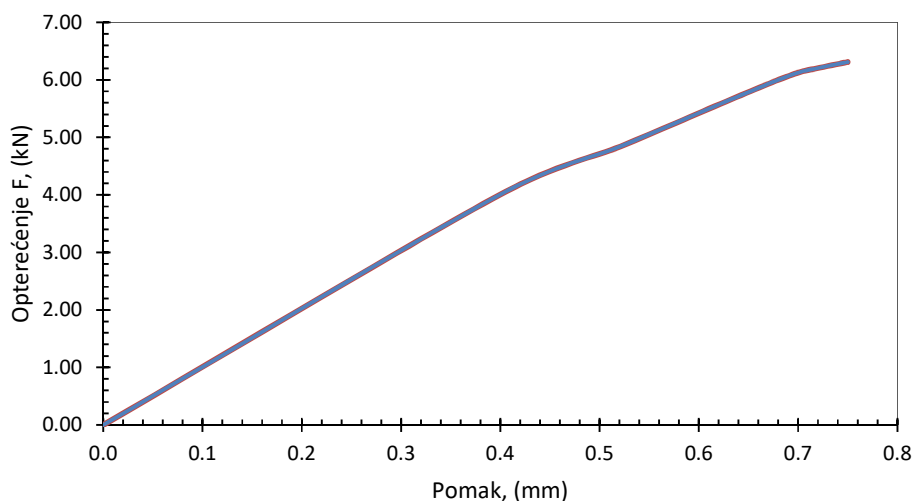
Kao i u prethodnom primjeru, i ovdje je ploča izrađena od krhkog homogenog izotropnog materijala PMMA (termoplastični polimer polimetakrilat). Mehanička svojstva materijala korištena za inverzno modeliranje preuzeta su iz [84] i prikazana u tablici 28.

Tablica 28. Karakteristike PMMA materijala, prema [84]

Parametar		Vrijednost
Modul elastičnosti	$E$ (MPa)	3090
Poissonov faktor	$\nu$ (-)	0,37
Granica tečenja	$R_{p0,2}$ (MPa)	62,5
Vlačna čvrstoća	$R_m$ (MPa)	62,5
Omjer	$R_{p0,2}/ R_m$ (-)	1

Eksperimentalno dobivena krivulja opterećenje - pomak (desnog ruba) za ploču s otvorom s inicijalnom pukotinom preuzeta je iz [84] te je prikazana na slici 53. Na krivulji je teško procijeniti trenutak kada pukotina počinje rasti s povećanjem pomaka. U prijašnjim slučajevima s porastom duljine pukotine, dolazilo je do znatnijeg pada opterećenja, dok u ovom slučaju opterećenje skoro pa linearno i dalje raste. Razlog tome je što se rast pukotine u ploči odvija uslijed mješovitog moda otvaranja pukotine, kao što je ranije već rečeno.

Kako za ovaj primjer nije bila dostupna eksperimentalno dobivena raspodjela deformacija na vanjskoj plohi ploče, primijenjena je proširena metoda končanih elemanta (X-FEM) kako bi se iz dostupnih podataka ovisnosti promjene opterećenja s duljinom pukotine dobila ova raspodjela deformacija za različite duljine pukotine. Kao i u prijašnjim primjerima, različite točke prije i nakon početka rasta pukotine, uz različite duljine pukotine, korištene su za određivanje optimalnih mjesta i orijentacije tenzometarskih traka.

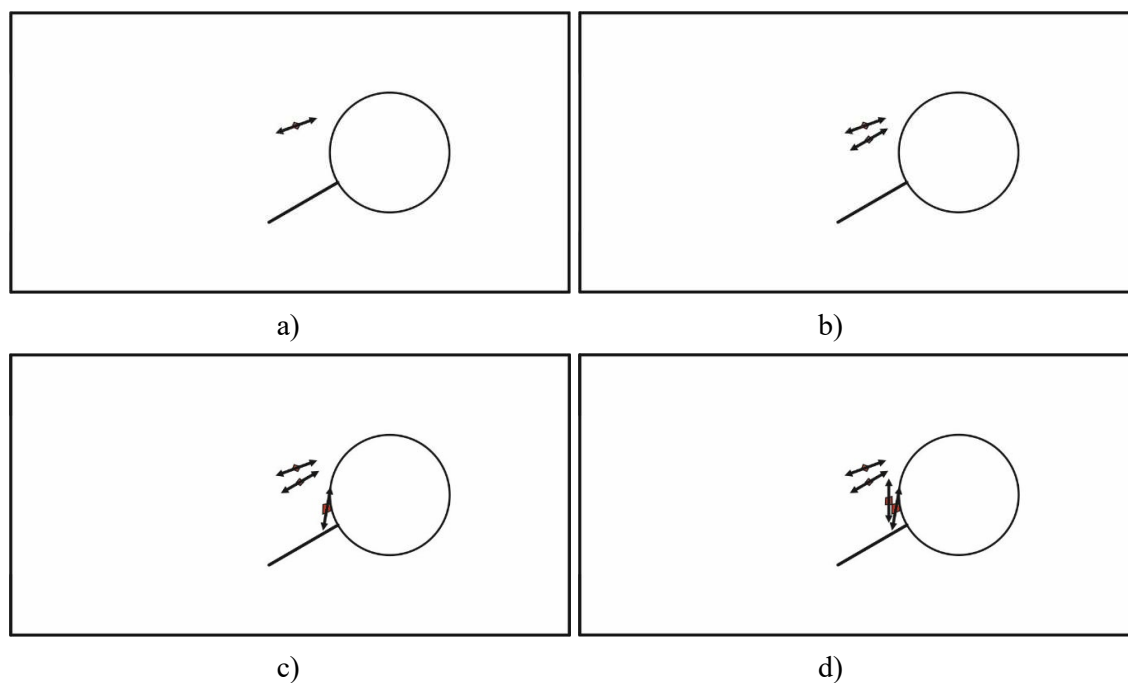


Slika 53. Mjerene vrijednosti krivulje opterećenje - pomak za ploču s otvorom prema [84]

### 5.6.1. Inveržno modeliranje

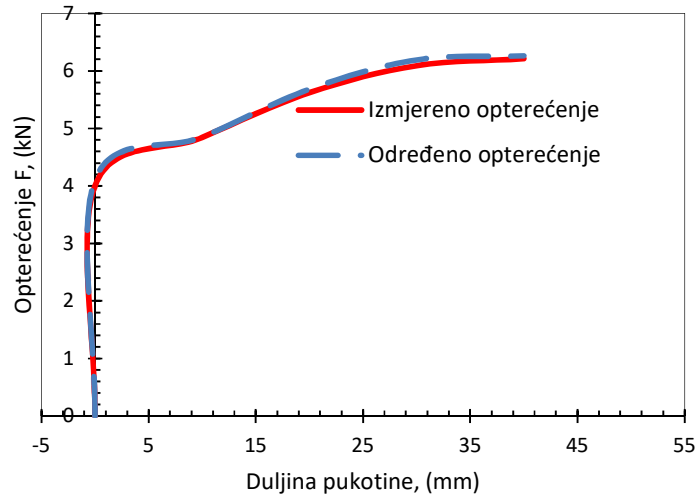
Optimalni položaji tenzometarskih traka određeni na ploči s otvorom provedeni su primjenom inverznog postupka. Primjenom D-optimalnog postupka određen je optimalni broj, položaj i orijentacija tenzometarskih traka. Za izračun nepoznatog opterećenja inverznim postupkom u sljedećem koraku su iz numeričkog X-FEM modela očitane vrijednosti deformacija na optimalnim položajima. Na slici 54 prikazani su optimalni položaji tenzometarskih traka za

ploču s otvorom. Upotrijebljene su različite kombinacije od jedne do četiri tenzometarske trake prije početka rasta pukotine te za određeni korak rasta pukotine. Usporedba eksperimentalno izmjenog opterećenja i inverznim postupkom izračunatih opterećenja za ploču s otvorom u ovisnosti o duljini pukotine prikazana je na slici 55. Sa slike je vidljiva dobra procjena opterećenja za različite duljine pukotine.



Slika 54. Položaji i orijentacije tenzometarskih traka na ploči s otvorom za slučaj: a) jedne, b) dvije, c) tri i d) četiri trake

Nadalje je iz rezultata sa slike 55 vidljivo da je u ovom primjeru za izračun nepoznatog opterećenja inverznim postupkom za različite duljine pukotine dovoljna samo jedna tenzometarska traka. Izračunata opterećenja za više tenzometarskih traka daju gotovo identične rezultate kao i za samo jednu tenzometarsku traku te stoga ovi rezultati nisu prikazani na slici 55. Razlog tome je što je analizirana pukotina koja ima relativno jednostavnu putanju. Osim toga, vidljivo je da određivanje opterećenja s jednom tenzometarskom trakom ima tendenciju izračuna nešto malo veće vrijednosti opterećenja za cijelu duljinu pukotine. Međutim, daljnjim povećanjem opterećenja dolazi do složenijeg rasta pukotine što u ovom radu nije razmatrano.



Slika 55. Usporedba izmjerenih i izračunatih (određenih) opterećenja za ploču s otvorom

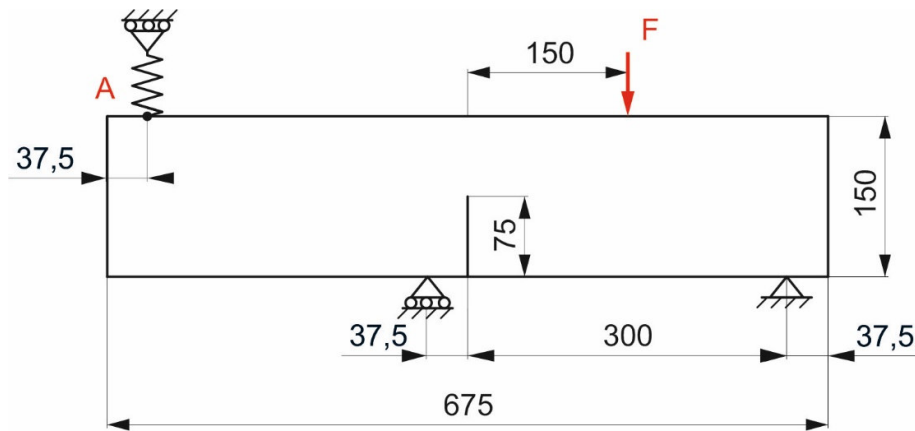
## 6. POSTUPAK INVERZNOG MODELIRANJA ZA SLUČAJ NEPROPORCIONALNIH OPTEREĆENJA

Novi postupak za identifikaciju opterećenja nadalje je verificiran na gredi sa zarezom opterećenoj s proporcionalnim i neproporcionalnim opterećenjem. Pritom proporcionalno opterećenje predstavlja opterećenje konstrukcijske komponente kod kojeg pravci glavnih naprezanja ne mijenjaju omjere niti smjer tijekom procesa deformiranja. Nasuprot tome, za slučaj složenih opterećenja, kada postoji više komponenata naprezanja te se pravci glavnih naprezanja i njihovi omjeri mijenjaju tijekom procesa deformiranja govorimo o neproporcionalnom opterećenju [85]. U ovom poglavlju istražen je utjecaj proporcionalnog i neproporcionalnog načina opterećivanja na optimalni položaj i orijentaciju tenzometarskih traka. Pritom je bio cilj istražiti mogu li optimalno postavljene tenzometarske trake za slučaj proporcionalnog opterećenja poslužiti za određivanje i neproporcionalnog opterećenja u slučaju promijene načina opterećivanja.

### 6.1. Greda sa zarezom za savijanje u tri i četiri točke

Kao primjer za verifikaciju inverzne metode za određivanje opterećenja elemenata s pukotinom i različitim uvjetima opterećenja, proporcionalnim i neproporcionalnim opterećenjem, korištena je epruveta, odnosno greda sa zarezom za savijanje u tri točke. Ovaj primjer za kojeg su u [86] dani eksperimentalni rezultati se vrlo često analizira u literaturi kao *benchmark* primjer za validaciju numeričkih algoritama za modeliranje složenog rasta pukotine. Najprije je analizirano proporcionalno opterećenje gdje se orijentacija glavnih naprezanja ne mijena tijekom procesa opterećivanja, za razliku od neproporcionalnog opterećenja gdje nije moguće zadržati proporcionalnost između komponenata naprezanja. Slika 56 prikazuje dimenzije, rubne uvijete i pozicije opterećenja kod epruvete koja je korištena za savijanje u tri točke sa zarezom prikazane u [86]. Način opterećenja ovisi o krutosti opruge,  $k$ , spojene na lijevom gornjoj strani epruvete u točki A. Pritom razlikujemo dvije vrste opterećenja. U slučaju kada je krutost opruge  $k=0$ , riječ je o testu savijanja grede u tri točke s proporcionalnim načinom opterećivanja. Drugi slučaj opisuje stanje kada je krutost opruge  $k=\infty$  što predstavlja test savijanja u četiri točke ili neproporcionalno opterećenje. Pritom rast pukotine u gredi uzrokuje neproporcionalni način opterećivanja. Optimalan položaj i orijentacija tenzometarskih traka iz proporcionalnog

opterećenja korišten je za provjeru mogu li optimalni položaji i orijentacije definirani za proporcionalno opterećenje slijediti putanju pukotine za slučaj neproporcionalnog opterećivanja.



Slika 56. Dimenzije epruvete sa zarezom za savijanje u tri točke prema [86].

Svojstva materijala: Youngov modul elastičnosti  $E$ , Poissonov faktor  $\nu$  i lomna žilavost  $G_c$ , korištena u numeričkom modelu su preuzeta iz [73] i [87], te su prikazana u tablici 29.

Tablica 29. Karakteristike materijala grede opterećene proporcionalno i neproporcionalno

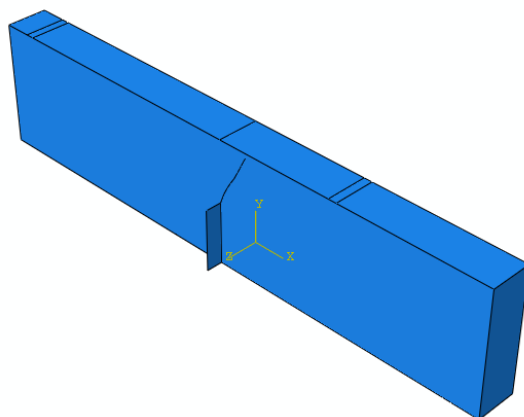
Materijal	$E$ (MPa)	$\nu$ (-)	$G_c$ (kN/mm)
Beton	38000	0,18	$6,9 \times 10^{-5}$

Numerička analiza provedena je na dvodimenzijskom modelu za ravninsko stanje deformacije. Prema prikazanim rubnim uvjetima sa slike 56 za gredu sa zarezom opterećenu na savijanje u tri točke spriječeni su vertikalni i horizontalni pomaci u desnom osloncu, dok je u lijevom osloncu onemogućen vertikalni pomak. U slučaju neproporcionalnog opterećenja gredi je dodatno onemogućen vertikalni stupanj slobode gibanja na lijevoj gornjoj strani grede u točki A ( $k=\infty$ ), dok u slučaju proporcionalnog opterećenja u točki A nisu zadani rubni uvjeti. Pošto za ovaj primjer nema dostupne raspodjele deformacija na vanjskoj plohi grede u analiziranim primjerima korištena je proširena metoda konačnih elemenata (X-FEM) kako bi se iz dostupnih podataka ovisnosti promjena opterećenja u odnosu na duljinu pukotine, dobile raspodjele deformacija na prednjoj plohi epruvete za različite duljine pukotine. Najprije je analizirano savijanje grede u tri točke s proporcionalnim opterećenjem, a zatim savijanje grede u četiri točke s neproporcionalnim opterećenjem.

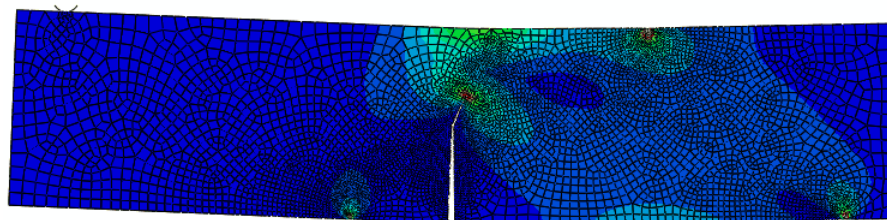


### 6.1.1. Greda sa zarezom za savijanje u tri točke

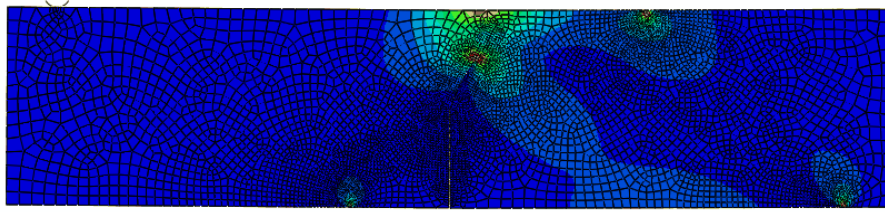
Greda sa zarezom za savijanje u tri točke, što u ovom primjeru predstavlja proporcionalni način opterećivanja prikazana je na slici 57. Greda je diskretizirana s heksaedarskim elementima prvog reda C3D8 koji su korišteni i za inverzno modeliranje opterećenja. Prikazana mreža konačnih elemenata sadrži 35065 heksaedarskih elemenata i 52453 čvorova (slika 58). Duljina zareza je pola visine grede i iznosi 75 mm, kao što je prikazano na slici 56. Kod modeliranja rasta pukotine korištenjem X-FEM-a potrebno je modelirati ravninu koja će definirati pukotinu oko koje će se izvršiti obogaćivanje elemenata (slika 57). Slika 58 prikazuje četiri koraka rasta pukotine. Na slici 58a) prikazan je prvi korak obogaćivanja mreže na mjestu ispred vrška pukotine za pukotinu duljine 10% od vrijednosti duljine zareza. Nadalje je na slikama 58b) i c) prikaza na greda s pukotinom duljine 50%, odnosno 70% duljine zareza. Greda s pukotinom duljine 90% vrijednosti duljine zareza nakon koje nastupa nestabilni lom grede uslijed rasta pukotine prikazana je na slici 58d).



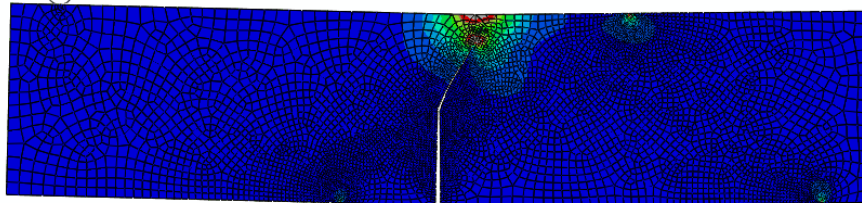
Slika 57. Greda sa zarezom za savijanje u tri točke (proporcionalno opterećenje)



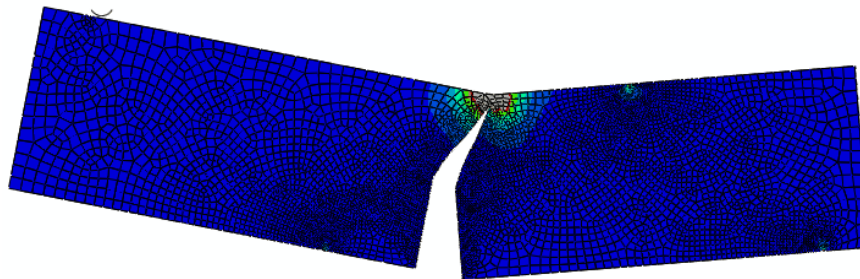
a)



b)



c)

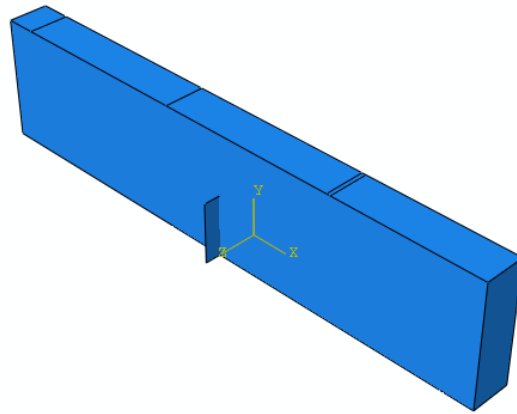


d)

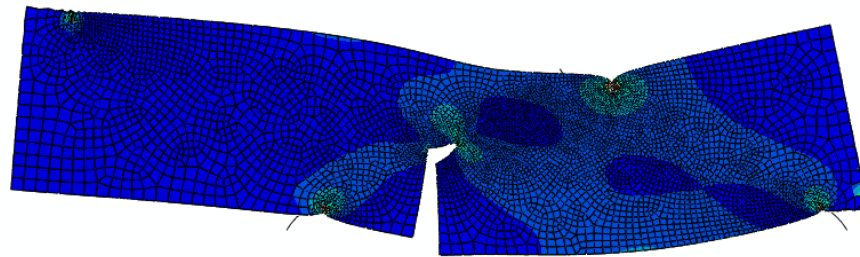
Slika 58. Greda sa zarezom za savijanje u tri točke opterećena proporcionalnim opterećenjem. Pukotina duljine: a) 10% , b) 50%, c) 70% i d) 90% vrijednosti duljine zareza

### 6.1.2. Greda sa zarezom za savijanje u četiri točke

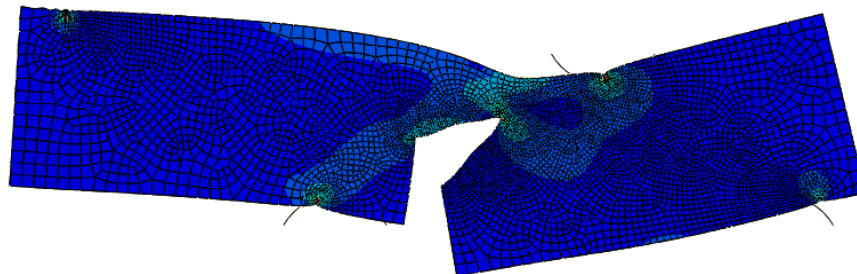
Greda sa zarezom za savijanje u četiri točke, što u ovom primjeru predstavlja neproporcionalni način opterećivanja prikazana je na slici 59. Kao i u prethodno razmatranom slučaju proporcionalnog opterećenja i ovdje su prikazana četiri koraka rasta pukotine (slika 60). Na slici 60a) prikazan je deformirani oblik grede za pukotinu duljine 10% od vrijednosti duljine zareza. Nadalje je na slikama 60b) i c) prikazana greda s pukotinom duljine 50%, odnosno 70% duljine zareza. Greda s pukotinom duljine 90% vrijednosti duljine zareza nakon koje nastupa nestabilni lom grede uslijed rasta pukotine prikazana je na slici 60d).



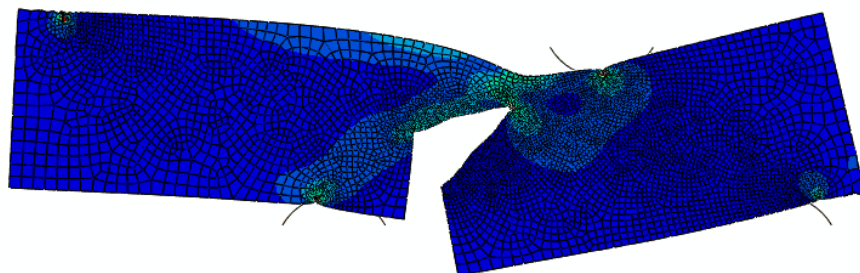
Slika 59. Greda sa zarezom za savijanje u četiri točke (neproporcionalno opterećenje)



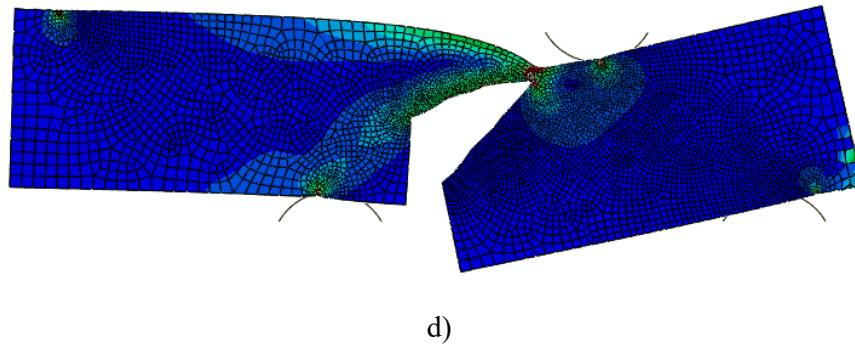
a)



b)



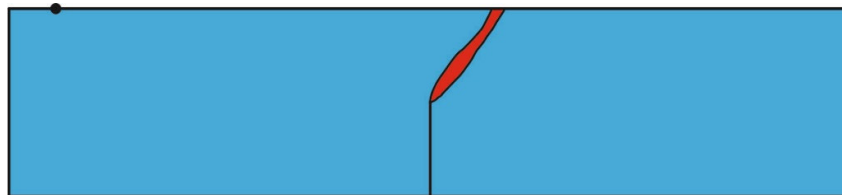
c)



Slika 60. Greda sa zarezom za savijanje u četiri točke opterećena neproporcionalnim opterećenjem. Pukotina duljine: a) 10% , b) 50%, c) 70% i d) 90% vrijednosti duljine zareza

### 6.1.3. Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata

Usporedba eksperimentalno dobivene putanje pukotine prema [86] i putanje pukotine dobivene numeričkom simulacijom pomoću X-FEM metode za slučaj proporcionalnog opterećenja prikazana je na slici 61. Za slučaj kada je opterećenje neproporcionalno rezultati su prikazani na slici 62. Usporedbom eksperimentalno dobivenih putanja pukotine i putanja dobivenih numeričkom simulacijom uočava se jako dobro poklapanje rezultata.

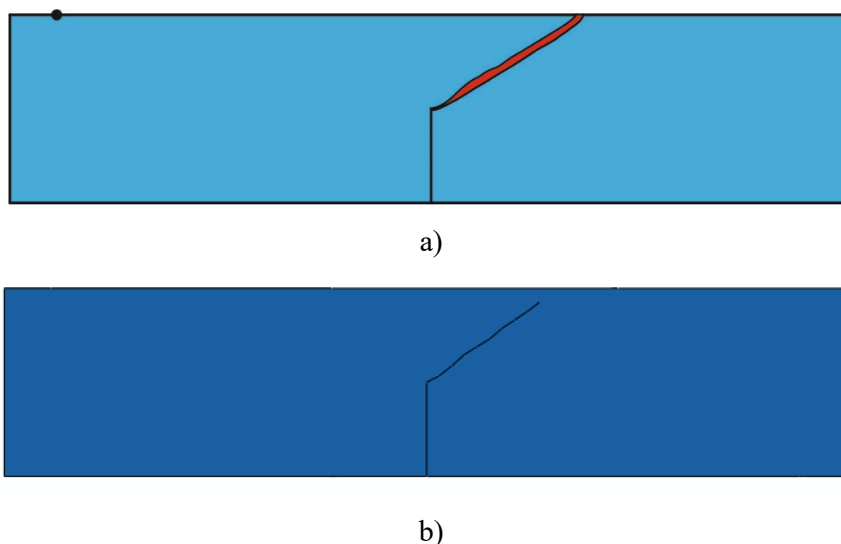


a)



b)

Slika 61. Greda sa zarezom za savijanje u tri točke (proporcionalno opterećenje): a) putanja pukotine dobivena eksperimentalno u [86], b) putanja pukotine dobivena numeričkom simulacijom



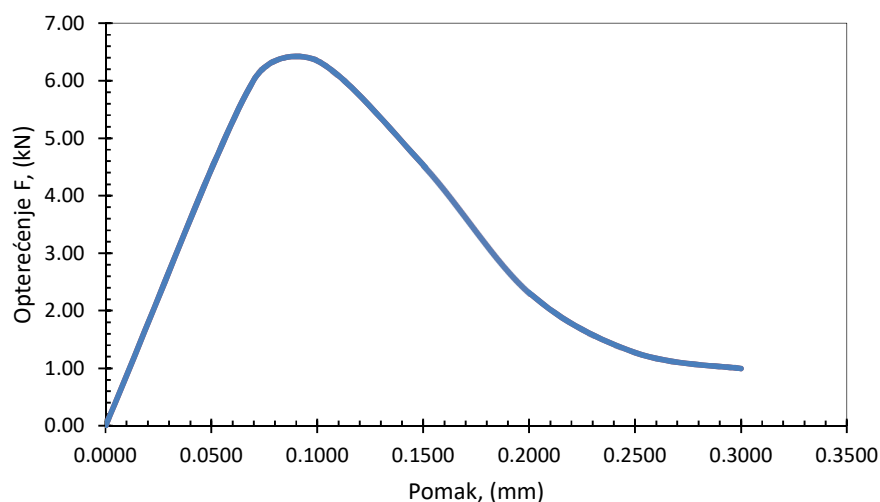
**Slika 62. Greda sa zarezom za savijanje u četiri točke (neproporcionalno opterećenje): a) putanja pukotine dobivena eksperimentalno u [86], b) putanja pukotine dobivena numeričkom simulacijom**

#### 6.1.4. Inverzno modeliranje

Za potrebe inverznog modeliranja bilo je nadalje potrebno odrediti vezu između ulaznih opterećenja i deformacija. Kao i u prethodnim primjerima, podjela pukotine vrši se na inkremente, dok je modeliranje pukotine u programskom paketu Abaqus provedeno korištenjem funkcije „seam crack“, koja predstavlja rub ili površinu s preklapajućim točkama, koje se mogu razdvojiti tijekom numeričke analize. Eksperimentalno dobivena krivulja opterećenje-pomak za gredu za savijanje u tri točke sa zarezom za proporcionalno opterećenje prikazana je na slici 63. Na krivulji je vidljiv trenutak kada je pukotina naglo počela rasti sa sve većim pomakom. Različite točke sa krivulje, prije i nakon početka rasta pukotine, uz različite duljine pukotine korištene su za određivanje optimalnih mjesta i orijentacije tenzometarskih traka na gredi. Pritom je ista mreža konačnih elemenata korištena u analizi primjenom proširene metode konačnih elemenata primijenjena za postupak inverznog modeliranja. Kako bi se moglo izvršiti očitavanje ravninskih deformacija na vanjskoj plohi epruvete i odabrati u sljedećem koraku potencijalne pozicije tenzometarskih traka, na površini predviđenoj za postavljanje tenzometarskih traka korištena je opcija „Skin“ iz programskog paketa Abaqus.

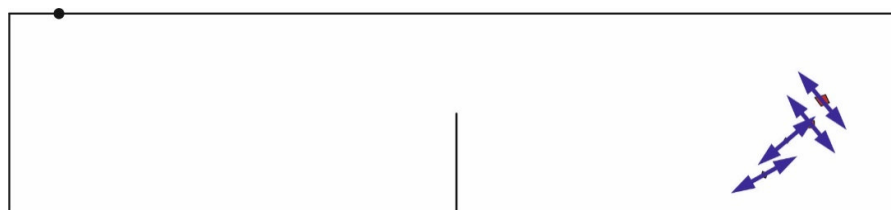
Kao i u prethodnim primjerima, odabir područja pogodnih za mjesto potencijalnih tenzometarskih traka bila je kompletna površina uzorka, osim područja oko očekivanog rasta

pukotina za proporcionalni i neproporcionalni način opterećivanja. D-optimalnim postupkom u sljedećem koraku postupka inverznog modeliranja odredili su se optimalni položaji i orijentacije i to za jednu do četiri tenzometarske trake, za gredu za savijanje u tri točke sa zarezom. Definirani optimalni položaji i orijentacije tenzometarskih traka, koji su korišteni za slučaj proporcionalnog opterećenja, primijenjeni su i za slučaj kada se greda savija u četiri točke te se opterećenje mijenja u neproporcionalno.

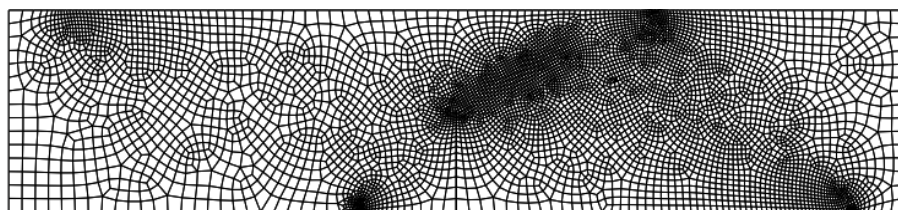


Slika 63. Eksperimentalno dobivena krivulja opterećenje - pomak za gredu za savijanje u tri točke sa zarezom za slučaj proporcionalnog opterećenja [86]

Za proporcionalno opterećenje, gdje u točki A nisu zadani rubni uvjeti, na slici 64a) prikazani su optimalni položaji i orijentacije tenzometarskih traka za potpuni rast pukotine do trenutka loma grede (slika 61). Crvenom bojom označeni konačni elementi predstavljaju optimalne položaje za optimalno postavljene tenzometarske trake. Ljubičasta strelica pokazuje optimalnu orijentaciju za svaki položaj tenzometarskih traka.



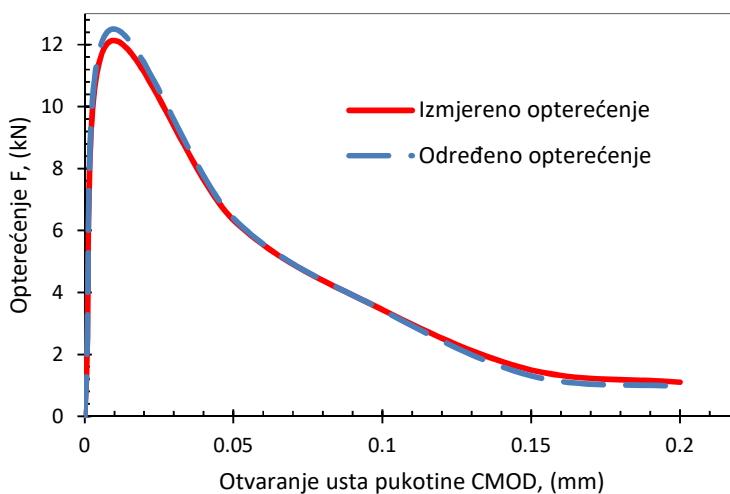
a)



b)

Slika 64. a) Optimalni položaj tenzometarskih traka za gredu za savijanje u tri točke sa zarezom i proporcionalnim opterećenjem, b) mreža konačnih elemenata

Promjena stanja opterećenja iz proporcionalnog u neproporcionalno te posljedično promjena omjera i orijentacije glavnih napreznja ima utjecaj na položaj i orijentaciju tenzometarskih traka. Provedeno je određivanje iznosa neproporcionalnog opterećenja za različite duljine pukotine, a pritom, kao što je rečeno, korišteni su s položaji i orijentacije tenzometarskim traka za slučaj proporcionalnog opterećenja te su rezultati prikazani na slici 65. Može se zaključiti da je u razmatranom primjeru moguće slijediti putanju pukotine i izračunati opterećenje s malom pogreškom čak i ako se promjene uvjeti opterećenja. U početku rasta pukotine izračunata sila bila je precijenjena, za vrijednost CMOD iznad 0,09 mm izračunata sila rasta pukotine počela je biti podcijenjena.



Slika 65. Usporedba izmjerenih i izračunatih (određenih) opterećenja za različita otvaranja usta pukotine CMOD za slučaj neproporcionalnog opterećenja

Na temelju rezultata može se zaključiti da se za analizirane slučajeve s dovoljnom točnošću može primijeniti optimalan broj, položaj i orijentacija mjernih traka određen za slučaj

proporcionalnog opterećenja za procjenu primijenjenih sila i za slučaj neproporcionalnog opterećenja, mada se uvjeti opterećenja pritom mijenjaju, a u skladu s tim i putanja pukotine.



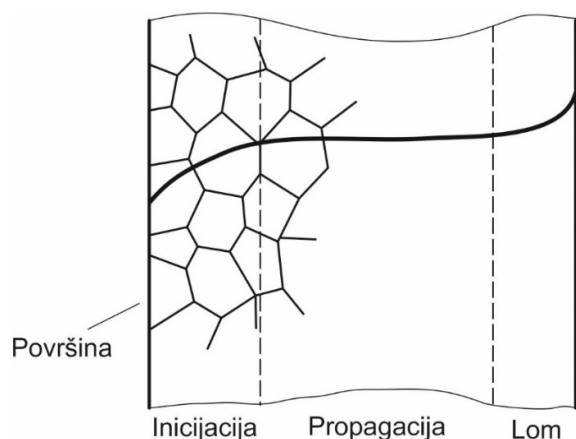
## 7. POSTUPAK INVERZNOG MODELIRANJA ZA SLUČAJ CIKLIČKOG OPTEREĆENJA

Prije no što se prikaže učinkovitost predloženog postupka inverznog modeliranja za slučaj cikličkih opterećenja dat će se opis mehanizma nastanka i rasta zamorne pukotine, kao i osnovni principi zamora materijala i konstrukcija.

### 7.1. Osnovni principi zamora materijala i konstrukcija

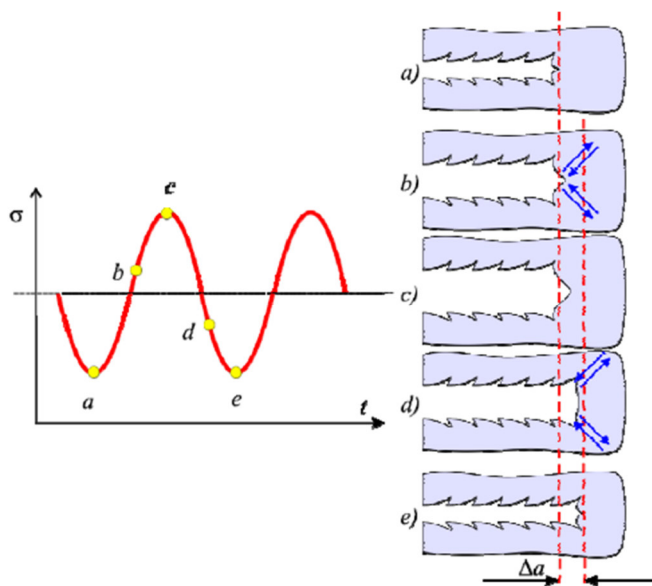
Vremenski promjenjivo opterećenje koje opterećuje konstrukciju tijekom njenog radnog vijeka može dovesti do pojave zamornih pukotina. Pukotina uglavnom nastaje na površini komponente te nakon toga raste okomito na glavno naprezanje. Kada akumulirano oštećenje dosegne kritičnu razinu, odnosno preostali dio više ne može nositi opterećenje, dolazi do loma komponente, te može doći i do loma cijele konstrukcije.

Većina teorija zamornog iniciranja pukotine temelji se na pretpostavci da zamorne pukotine uzrokuju lokalne deformacije i naprezanja na vanjskoj površini komponente [88]–[90]. Zamorni rast pukotina većina teorija povezuje s naprezanjima u komponenti, te se može podijeliti u tri faze kao što je prikazano na slici 66. U prvoj fazi inicira se pukotina na slobodnoj površini u kliznom pojasu u smjeru primarnih ploha klizanja, odnosno u smjeru maksimalnog posmičnog naprezanja, a oblikuju se za vrijeme cikličkih opterećenja kao posljedica akumuliranja dislokacija. Ravnine klizanja su početna mjesta gdje pukotina ili više njih mogu započeti svoj rast zbog doprinosa mikrostrukturne nehomogenosti između kristalnih rešetki. Svojom napredovanjem, pukotine u materijalu postaju novi koncentratori naprezanja, i na taj način dolazi do daljnjeg rasta pukotina. Stvaranjem kliznih ravnina očituje se postojanje pukotina koje rastu u smjeru ravnina klizanja. Nakon početnog rasta pukotine, sve se teže održava napredovanje pukotine u početnom smjeru ravnine klizanja te pukotina lagano počinje odstupati od smjera težeći rastu okomito na smjer glavnih naprezanja kao što je to prikazano na slici 66.



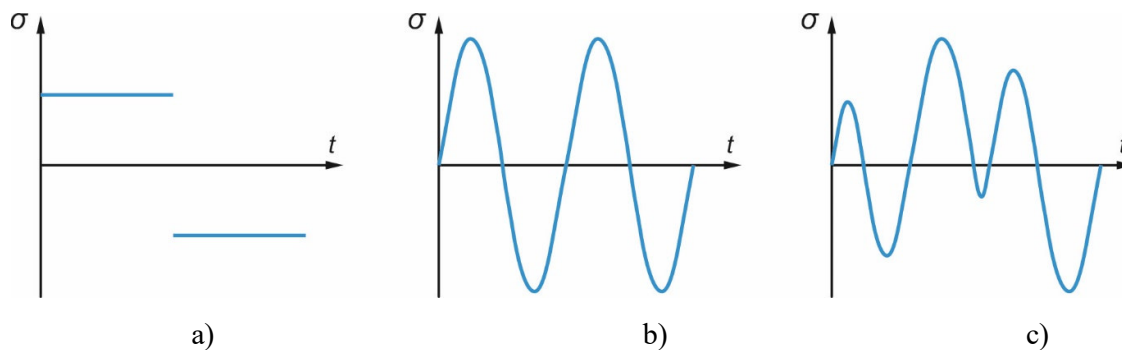
Slika 66. Faze nastanka i rasta pukotine

Druga faza rasta pukotine očituje se u skretanju pukotine okomito na smjer maksimalnog glavnog naprežanja. Glavna karakteristika rasta pukotine pri cikličkom opterećenju u drugoj fazi rasta, je da pukotina napreduje konačnim prirastima, ostavljajući nakon svakog novog ciklusa urez u obliku brazde u materijalu. Na slici 67 prikazan je način rasta pukotine s porastom opterećenja [91]–[93]. Zbog otvaranja pukotine vrh pukotine se zatupljuje te se oko vrha pukotine širi zona plastične deformacije. Kod maksimalnog opterećenja, odnosno naprežanja u jednom ciklusu opterećenja, nastupa daljnji rast pukotine. Kako se opterećenje smanjuje u ciklusu, dolazi do zatvaranja pukotine i zaoštavanja vrha pukotine, rastegnuti dio pukotine sada se komprimira i stvara novu brazdu na površini pukotine. Praćenje tijeka rasta pukotine omogućuje nam brojenje brazdi na površini pukotine. Pritom svaka brazda odgovara jednom ciklusu opterećenja.



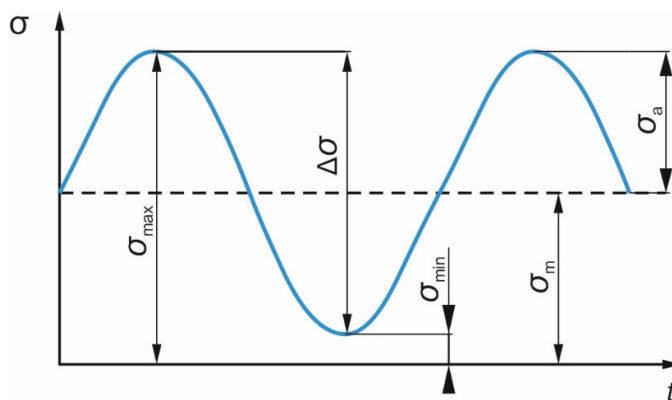
Slika 67. Prikaz rasta pukotine pri cikličkom opterećenju [91]

Treću fazu označava nagli rast pukotine do konačnog nestabilnog loma komponente. Pritom se rastom pukotine smanjio nosivi dio komponente te naprezanja koja su do tada bila u granicama dozvoljenog za određeni materijal sada postaju veće nego što komponenta može podnijeti te dolazi do konačnog loma. Kao što je već navedeno, opterećenja mogu biti statička i dinamički promjenjiva opterećenja što je prikazano na slici 68.



Slika 68. Vrste opterećenja: a) statičko, b) cikličko, c) stohastičko

Za ciklička zamorna opterećenja s konstantnom amplitudom na slici 69 prikazane su osnovne veličine.



Slika 69. Istosmjerno promjenjivo cikličko opterećenje

Definicija osnovnih veličina cikličkog opterećenja je kako slijedi:

raspon naprezanja:  $\sigma_r = \Delta\sigma = |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = 2\sigma_a$ ,

amplituda naprezanja:  $\sigma_a = |(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2| = \sigma_r/2$ ,

srednje naprezanje:  $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$ ,

omjer naprezanja:  $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ ,

gdje su  $\sigma_{\max}$  i  $\sigma_{\min}$  maksimalno i minimalno naprezanje.

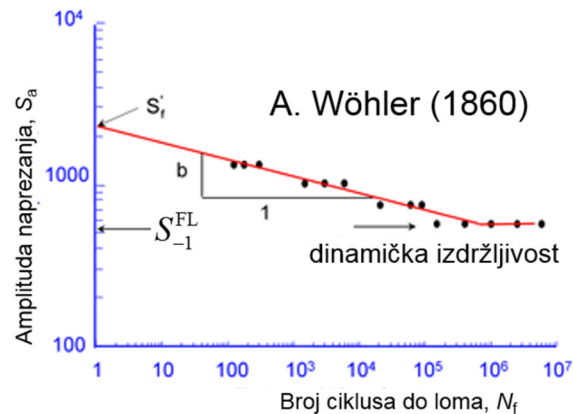
Za slučaj visokocikličkog zamora (*eng. high-cycle fatigue*) koji se analizira u ovom radu, pretpostavka je da su naprezanja i deformacije u elastičnom području. Ovdje se ovisnost broja ciklusa do loma  $N_f$  o amplitudi naprezanja  $S_a$  prikazuje u dvostrukom logaritamskom mjerilu poznatom Wöhlerovom, odnosno  $S-N$  krivuljom, koja je prikazana na slici 70 [94]–[96]. Ova krivulja je izražena jednadžbom:

$$S_a = S'_f (N_f)^b, \quad (7.1)$$

odnosno nakon logaritmiranja

$$\log S_a = \log S'_f + b \log N_f. \quad (7.2)$$

gdje je  $S'_f$  koeficijent zamorne čvrstoće, a  $b$  eksponent zamorne čvrstoće. Pritom je dinamička izdržljivost materijala konstrukcijske komponente  $S_{-1}^{FL}$  prikazana na slici definirana kao naprezanje koje materijal izdrži bez pojave loma, nakon teorijski beskonačnog broja ciklusa. Ovdje indeks -1 označava da je dijagram konstruiran za omjer naprezanja  $R = -1$ .

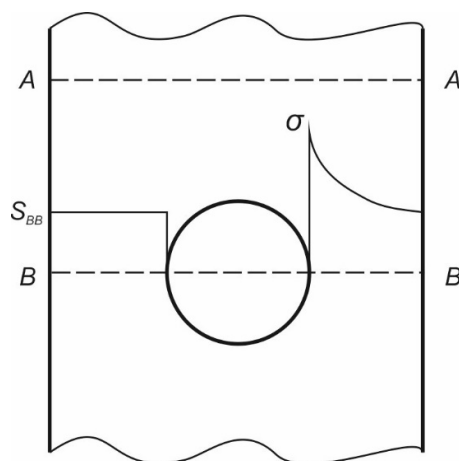


Slika 70. Wöhlerova ( $S-N$ ) krivulja

Dobivanje  $S-N$  krivulja za različite materijale je dugotrajan i skup proces. Određivanje krivulja vrši se eksperimentalno na normom propisanim uzorcima, podvrgnutih cikličkim dinamičkim opterećenjem konstantne amplitude, uglavnom za omjer naprezanja  $R=-1$ . Da bi se izmjereni podaci mogli primijeniti na realne konstrukcijske komponente razvijene su pripadne metode

koje uzimaju u obzir stanje površine komponente, vrstu promjenjivih opterećenja, koncentracije naprezanja komponente i slično.

Konstrukcije u primjeni često sadrže različite provrte, utore, radijuse zbog same tehnologije izrade kao i drugih zahtjeva koji se nameću na samu konstrukciju te na taj način utječu na pojavu koncentracija naprezanja. Područja s pojavom koncentracije naprezanja zbog drukčije raspodjele naprezanja oko geometrijskih diskontinuiteta predstavljaju pogodna mjesta za pojavu pukotine i na kraju zamor same konstrukcije (slika 71).



Slika 71. Faktor koncentracije naprezanja oko provrta

Uzimajući za primjer ploču koja sadrži kružni otvor, jednostavnom analizom naprezanja principima mehanike deformabilnih tijela mogu se izračunati nominalna naprezanja na presjeku A-A koji je udaljen od geometrijskog diskontinuiteta. Isto tako, ako se u obzir uzme smanjenje površine presjeka ploče na mjestu otvora, može se odrediti lokalno naprezanje koje se javlja na presjeku B-B (slika 71). Raspodjela naprezanja u presjeku B-B zapravo je puno složenija od nominalne ili prosječne vrijednosti izračunate jednostavnom analizom naprezanja, a na rubu provrta vrijednost naprezanja bit će mnogo veća (tri puta veća ako nema utjecaja rubova ploče na stanje naprezanja na otvoru). Koncentracija naprezanja koju stvara otvor,  $K_t$ , može se izračunati prema izrazu:

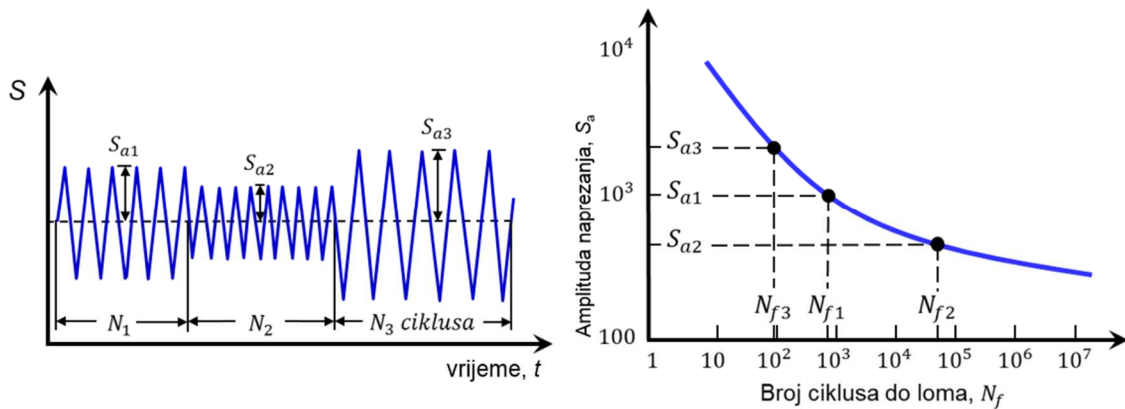
$$K_t = \frac{\text{lokalno naprezanje na provrtu}}{\text{nominalno naprezanje u presjeku B-B}} = \frac{\sigma}{S_{BB}}, \quad (7.3)$$

Opterećenja s konstantnom amplitudom rijetko se javljaju u stvarnim inženjerskim konstrukcijama. Stoga praktična analiza zamora zahtijeva proračun zamornog vijeka za komponente koje su podvrgnute cikličkom opterećenju promjenjivih amplituda. Slika 72 prikazuje primjer za opterećenje s promjenjivim amplitudama. Najčešće primjenjivan način određivanja akumuliranja oštećenja za prikazani slučaj opterećenja s promjenjivim amplitudama temelji se na Palmgren-Minerovom pravilu [94]–[96]. Koristeći ovo pravilo linearnog akumuliranja oštećenja za izračunavanje oštećenja od zamora za naprezanja s promjenjivom amplitudom može se izračunati preostali vijek konstrukcije. Ovdje oštećenje od svakog pojedinog ciklusa raspona naprezanja  $\Delta S_{ai}$  iznosi  $1/N_{fi}$ , gdje se  $N_{fi}$  definira kao zamorni vijek kod konstantne amplitude raspona naprezanja  $\Delta S_{ai}$  iz  $S$ - $N$  krivulje. Ukupno oštećenje  $D$  uzrokovano različitim rasponima naprezanja  $\Delta S_{a1}$ ,  $\Delta S_{a2}$ , ...,  $\Delta S_{an}$  izvršeno u  $n_1$ ,  $n_2$ , ...  $n_n$  ciklusa može se odrediti superpozicijom svih ciklusa opterećenja prema jednadžbi

$$D = \frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} + \dots + \frac{n_n}{N_{fn}} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}}. \quad (7.4)$$

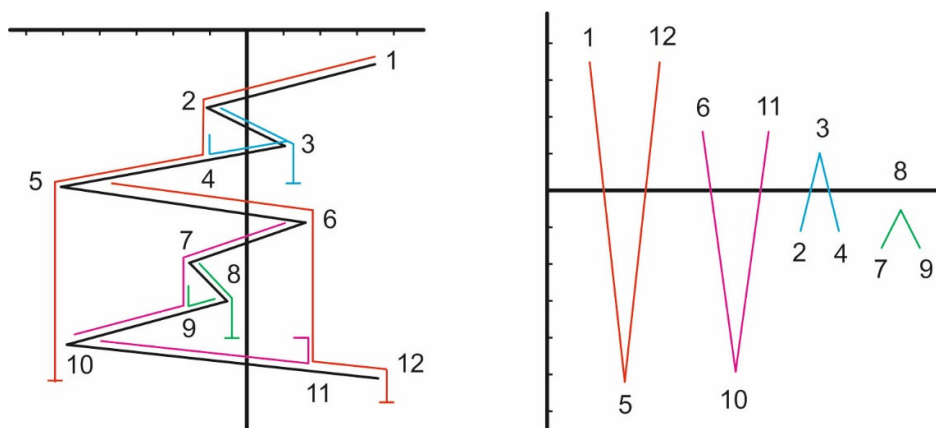
Na taj način Palmgren-Minerovo pravilo linearnog akumuliranja oštećenja pretpostavlja nezavisnost zamornog vijeka o redosljedu opterećivanja konstrukcijske komponente. Pretpostavlja se da će do gubitka cjelovitosti konstrukcijske komponente doći kada je

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} \geq 1. \quad (7.5)$$



Slika 72. Cikličko opterećivanje s promjenjivim amplitudama

Za slučaj opterećenja konstrukcije s varijabilnim amplitudama, odnosno stohastičkim opterećenjem (slika 68c), povijest naprezanja potrebno je svesti na ekvivalentne cikluse s konstantnim amplitudama, kako bi se analiza zamora kod promjenjivih amplituda naprezanja mogla provesti po istim procedurama kao i za slučaj konstantnih amplituda. Kako bi se Palmgren-Minerovo pravilo moglo primijeniti na takve složene cikluse opterećenja, potrebno je odrediti broj jednostavnih ciklusa konstantne amplitude kojima se isti mogu zamijeniti. Najčešće korištena metoda brojanja ciklusa je metoda toka kiše (*eng. rainflow method*) [97]. *Rainflow* metodom identificiraju se spektri naprezanja uređeni: a) po razlikama naprezanja, b) po veličini srednjeg naprezanja i c) uz poznavanje broja ciklusa. Brojanje ciklusa naziva se jednoparametarsko, ako se kod brojanja bilježe samo razlike naprezanja. Ako se ciklusi razvrstavaju po razlikama naprezanja i po srednjem naprezanju, brojanje se naziva dvoparametarskim[97], [98]. Na slici 73 prikazan je princip toka kiše za brojanje ciklusa.



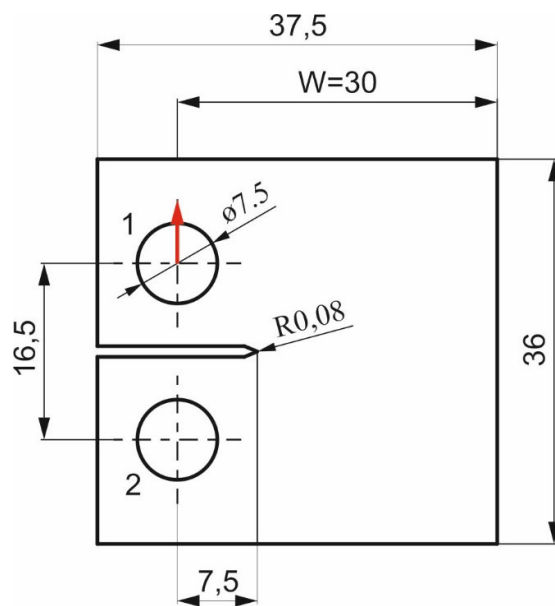
Slika 73. Rainflow metoda za brojenje ciklusa

Na taj način kod varijabilnih amplituda naprezanja (opterećenja, deformacija) analiza zamora zasniva se na istim procedurama kao i za slučaj konstantnih amplituda, na način da se povijest naprezanja svodi na ekvivalentne cikluse s konstantnim amplitudama.

U ovom radu, nakon provedene verifikacije i validacije predloženog postupka inverznog modeliranja za slučaj monotonih opterećenja, cilj je bio provesti njegovu verifikaciju za slučaj cikličkog opterećenja s konstantnim amplitudama.

## 7.2. CT epruveta

Verifikacija predloženog postupka inverznog modeliranja za određivanje opterećenja za slučaj cikličkih opterećenja provedena je na kompaktnoj epruveti sa zarezom (*eng. CT – Compact Tension specimen*). Geometrija kompaktne vlačne epruvete za ispitivanje prvog moda otvaranja pukotine prikazana je na slici 74. Kao i u primjeru s monotonim opterećenjem epruveta je opterećena vertikalnom silom u točki 1, dok su u točki 2 dodijeljeni rubni uvjeti pomaka s kojima se ograničava pomak u horizontalnoj i vertikalnoj osi. Pošto za ovaj primjer nije bila na raspolaganju eksperimentalno određena raspodjela deformacija na vanjskoj plohi epruvete, u analiziranim primjerima za simulaciju rasta zamorne pukotine korištena je metoda faznog polja. Diskretizacija modela provedena je korištenjem četverokutnih CPE4 konačnih elemenata za ravninsko stanje deformacije.



Slika 74. Geometrija kompaktne epruvete

Svojstva materijala kompaktne epruvete korištena u numeričkom modelu prikazana su u tablici 30. Kao i u prethodno analiziranim primjerima i ovdje je putanja zamorne pukotine na epruveti dobivena iz modela faznog polja primjenom sferno-devijatorske dekompozicije deformacijske energije. Pritom je u izrazu (3.20) korištena zamorna funkcija  $\hat{F} \in [1, 0]$  koja degradira energiju loma, odnosno lomna materijalna svojstva, tijekom cikličkog opterećenja u obliku



$$\hat{F} = \left(1 - \frac{\bar{\psi}}{\bar{\psi}_\infty}\right)^2 \quad \text{za } \bar{\psi} \in [0, \bar{\psi}_\infty], \quad (7.6)$$

koja je predložena u radu [72]. Karakteristike ove funkcije vezano za opisivanje Wöhlerove krivulje, Parisovog zakona i utjecaja srednjeg napreznja na zamornu čvrstoću detaljno su istražene u navedenom radu. U ovom primjeru je za konstantu materijala uzeto  $\bar{\psi}_\infty = 50$  MPa. Analiziran je slučaj opterećivanja s omjerom  $R = F_{\min} / F_{\max} = 0$  i amplitudom sile u iznosu od 20 N. Rezultati analize dobiveni modelom faznog polja predstavljali su osnovu za identifikaciju cikličkog opterećenja CT epruvete s različitim duljinama zamorne pukotine ovisno o broju ciklusa opterećenja.

Tablica 30. Karakteristike materijala kompaktne epruvete

Materijal	$E$ (MPa)	$\nu$ (-)	$G_c$ (kN/mm)	$l$ (mm)
Čelik	210 000	0,3	5	0,5

Iako su deformacije određene numeričkom metodom, u tekstu koji slijedi kako se i ranije navelo za druge primjere, koristi se pojam „tenzometarskih traka“, te se pod tim smatraju integracijske točke numeričkog modela, gdje su očitane deformacije. Korištene izmjerene vrijednosti deformacija odnose se kako slijedi: E11 označava deformacije u horizontalnom smjeru epruvete prikazane na slici 74, E22 označava izmjerene deformacije u vertikalnom smjeru i E12 označava vrijednosti tangencijalnih deformacija. U tablici 31 prikazane su očitane vrijednosti deformacija iz modela faznog polja na četiri tenzometarske trake. Ovdje se duljine pukotine dane za određeni broj ciklusa opterećenja.

Tablica 31. Očitane vrijednosti deformacija na kompaktnoj CT epruveti

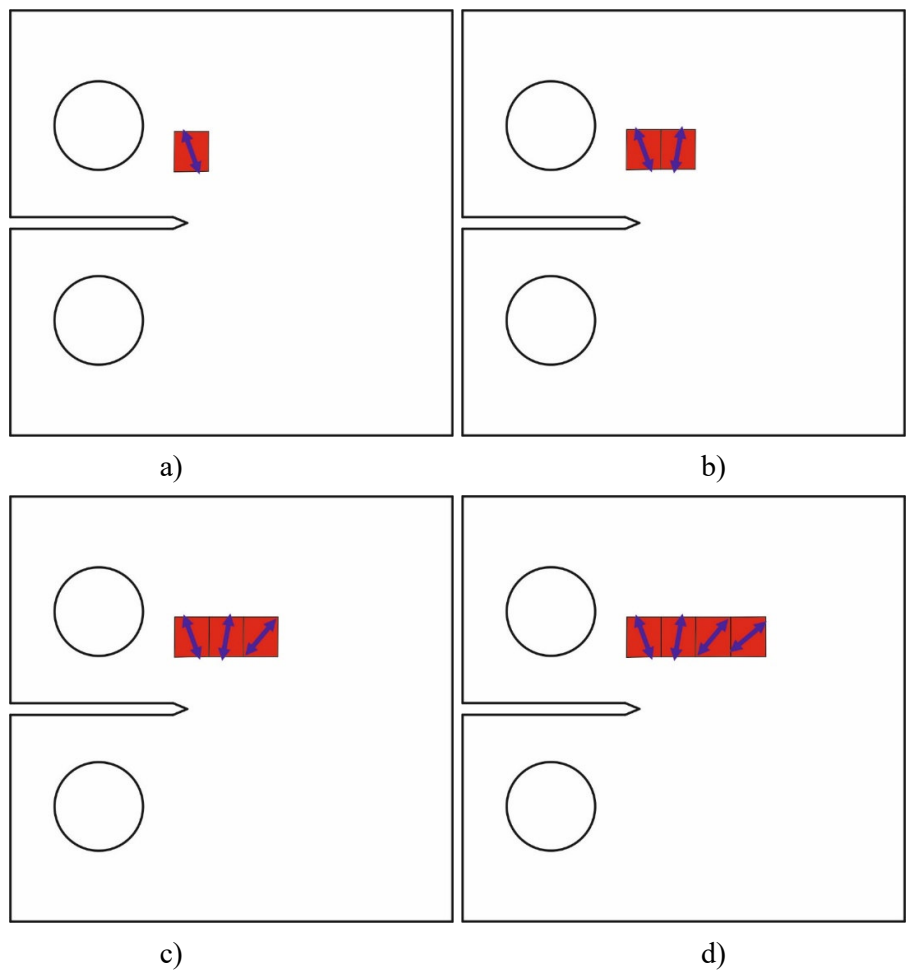
Duljina pukotine (mm)	Broj ciklusa	Očitane vrijednosti deformacije	TT1	TT2	TT3	TT4
0	1	E11	-3,4E-04	-2,8E-04	1,2E-04	3,2E-04
		E22	1,3E-03	1,2E-03	5,7E-04	6,9E-05
		E12	-1,3E-03	7,0E-04	1,6E-03	1,6E-03
2,1	11482	E11	6,5E-06	-4,9E-04	-1,6E-04	2,6E-04
		E22	9,6E-04	1,6E-03	1,2E-03	3,9E-04
		E12	-2,6E-03	-5,2E-04	1,6E-03	2,2E-03
5,0	17789	E11	6,5E-04	-7,5E-05	-6,5E-04	-2,1E-04
		E22	1,6E-04	1,3E-03	2,1E-03	1,4E-03

		E12	-3,1E-03	-2,8E-03	-5,4E-05	2,5E-03
10,0	22598	E11	9,6E-04	9,9E-04	5,4E-04	-8,5E-04
		E22	-4,0E-04	-1,3E-04	9,3E-04	2,8E-03
		E12	-2,6E-03	-3,0E-03	-3,7E-03	-2,2E-03

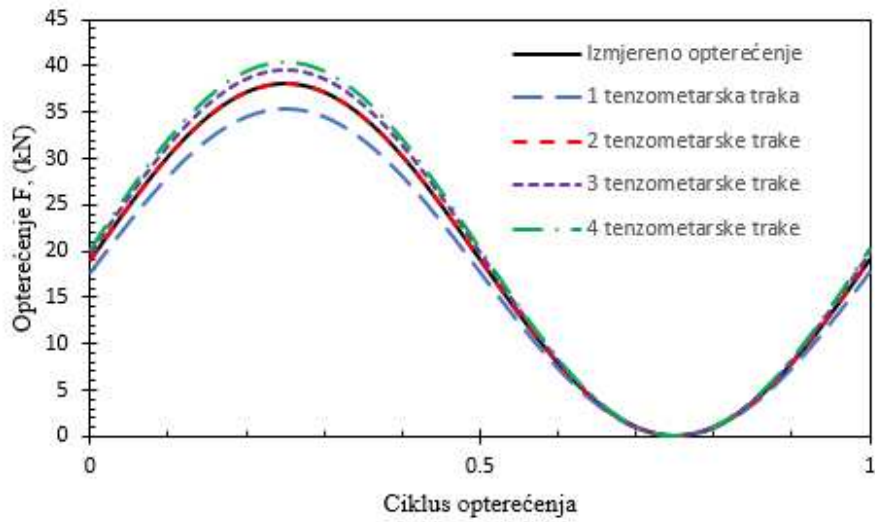
### 7.2.1. Inveržno modeliranje

Za identifikaciju cikličkog opterećenja proveden je postupak inverznog modeliranja s različitim brojem, položajem i orijentacijom tenzometarskih traka, za različit broj ciklusa opterećenja te pripadnom duljinom pukotine. Na slici 75 prikazana je mreža konačnih elemenata koja sadrži 32025 elemenata. Modeliranje pukotine provedeno je korištenjem funkcije „seam crack“, s preklapajućim točkama, koje se po potrebi mogu razdvojiti tijekom numeričke analize. Nakon što je u prvom koraku postupka određivanja nepoznatog cikličkog opterećenja iz modela faznog polja dobivena raspodjela deformacija na plohi CT epruvete, u drugom koraku definira je veza između ulaznih opterećenja i deformacija. Podjela pukotine na inkremente vršena je u skladu s ciklusima opterećenja, dok je modeliranje pukotine u programskom paketu Abaqus provedeno korištenjem funkcije „seam crack“. Upotrijebljeno je više različitih kombinacija tenzometarskih traka za različiti broj ciklusa opterećenja, izbjegavajući pritom područja oko očekivanog, određenog područja rasta pukotine iz modela faznog polja, te područja oko mjesta narinutog promjenjivog opterećenja.

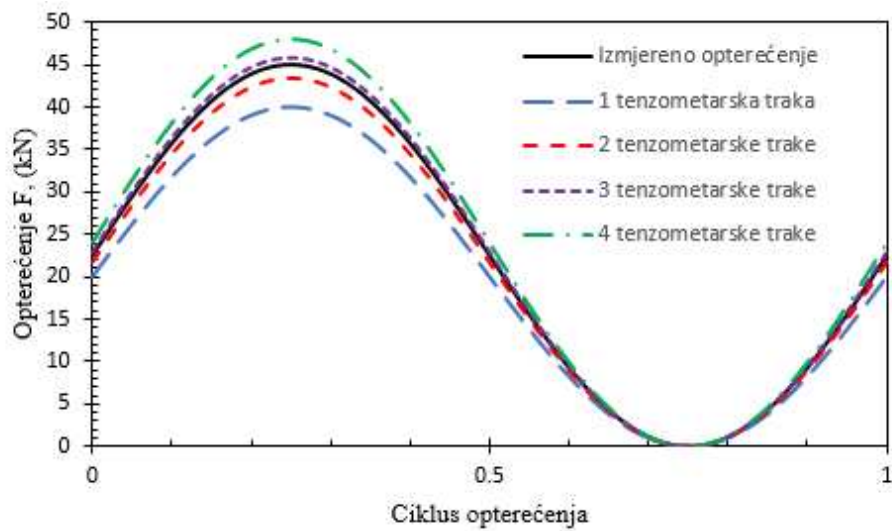
U sljedećem koraku provedeno je određivanje optimalnog položaja tenzometarskih traka na kompaktnoj vlačnoj epruveti. Na slici 75 prikazan je optimalni položaj tenzometarskih traka za različite duljine pukotina i broj ciklusa opterećenja koji je bio potreban za određenu duljinu pukotine.



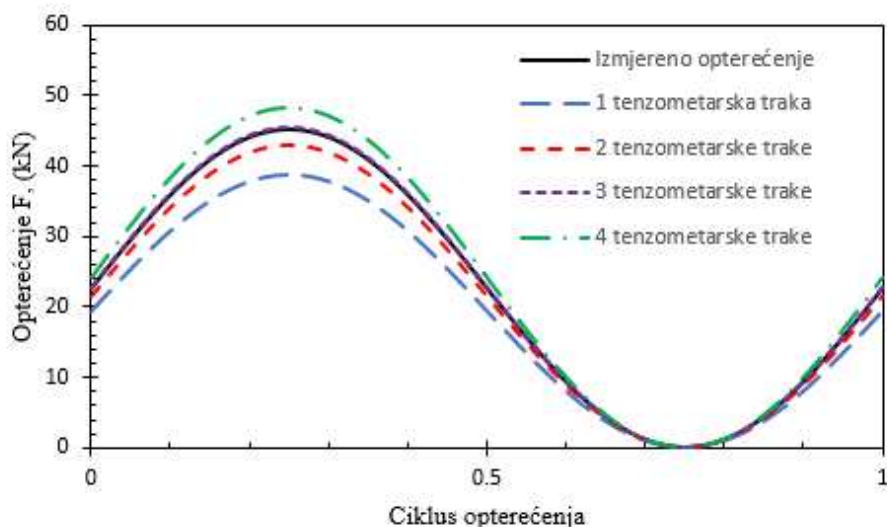
Slika 75. CT epruveta prikaz pozicija tenzometarskih traka za: a) jednu, b) dvije, c) tri i d) četiri tenzometarske trake



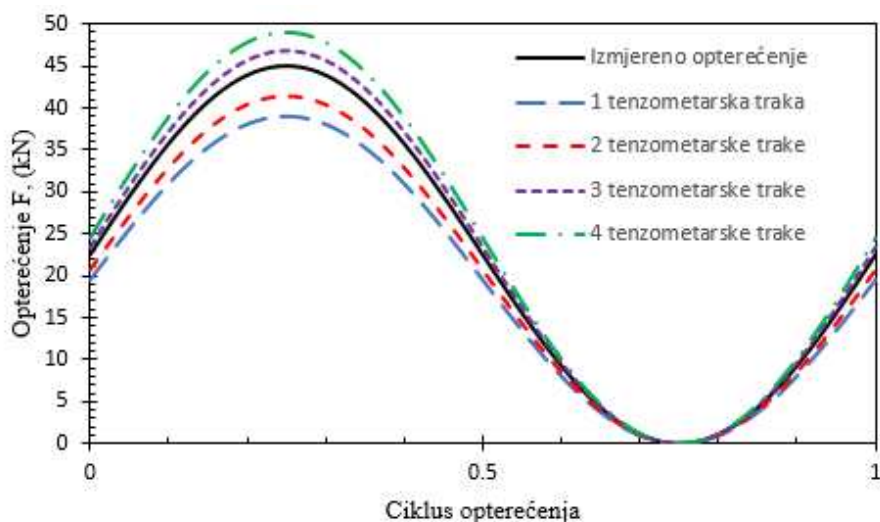
Slika 76. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na ciklički opterećenoj epruveti za 1 ciklus opterećenja



Slika 77. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na ciklički opterećenoj epruveti za 11482 ciklusa opterećenja



Slika 78. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na ciklički opterećenju epruveti za 17789 ciklusa opterećenja



Slika 79. Izračunata opterećenja za različit broj tenzometarskih traka na ciklički opterećenju epruveti za 22598 ciklusa opterećenja

Izračunata ciklička opterećenja postupkom inverznog modeliranja iz očitanih deformacija na kompaktnoj epruveti s omjerom naprezanja  $R=0$  prikazana su na slikama 76 do 79. Slika 76 prikazuje rezultate za prvi ciklus opterećenja s početnom duljinom pukotine, slika 77 za 11482 ciklusa i prirast pukotine od 2,1 mm, slika 78 za 17789 ciklusa i prirast pukotine od 5,0 mm i na slika 79 za 22598 ciklusa i prirast pukotine od 10,0 mm. Iz svih dijagrama se može primijetiti očiti trend povećavanja greške s povećanjem broja ciklusa i duljine pukotine. Izračun opterećenja s jednom tenzometarskom trakom ima tendenciju podcjenjivanja vrijednosti

opterećenja za cijelu duljinu pukotine i sve cikluse opterećenja. Dvije tenzometarske trake u slučaju s početnom duljinom pukotine za prvi ciklus opterećenja daju poklapanje izračunatog opterećenja s narinutim, dok se kod rasta pukotine s brojem ciklusa povećava i greška, te dolazi do podejnjivanja vrijednosti opterećenja. Za ovaj slučaj cikličkog opterećenja na kompaktnoj epruveti optimalno se pokazao slučaj s tri tenzometarske trake s malom greškom izračunate vrijednosti cikličkog opterećenja za različite duljine pukotina i pripadnih ciklusa opterećenja. Četiri tenzometarske trake za sve cikluse opterećenja precjenjuju narinuto opterećenje s trendom povećanja greške kako broj ciklusa i pukotina raste.

## **8. VERIFIKACIJA INVERZNOG POSTUPKA NA REALNOJ KONSTRUKCIJSKOJ KOMONENTI**

U zadnjoj fazi istraživanja, razvijeni postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja iz izračunatih deformacija na konstrukciji s pukotinama verificiran je na realnoj konstrukcijskoj komponenti, osovinskom rukavcu vjetroagregata. Za kritične komponente vjetroagregata, kao što je i osovinski rukavac, dostupni su rezultati mjerenja monitoring sustava za pomake, deformacije, brzine i ubrzanja za karakteristične režime rada konstrukcije u stvarnim radnim uvjetima. Na temelju obrađenih rezultata mjerenja deformacija, numeričkog modeliranja iniciranja i rasta pukotina te primjenom metode inverznog modeliranja cilj je ove faze istraživanja bio odrediti optimalni smještaj tenzometarskih mjernih traka sustava za monitoring koji će za različite veličine i orijentacije pukotina omogućiti što točnije određivanje opterećenja.

Rezultati mjerenja i zaključci istraživanja proizašli u okviru IPA IIIC projekta „Centre of Excellence for Structural Health“ (CEEStructHealth) koji je proveden u razdoblju od 2013. do 2016. godine i sufinanciran iz EU sredstava (*Science and Innovation Investment Fund – SIIF*), u okviru Operativnog programa Regionalna konkurentnost (ugovor IPA2007/HR/16IPO/001-040513) poslužili su kao podloga za verifikaciju inverznog postupka na realnoj konstrukcijskoj komponenti, osovinskom rukavcu vjetroagregata. Tijekom istraživanja provedenih u okviru projekta identificirani su brojni problemi i nedostaci na postojećem sustavu za monitoring i upravljanje KONČAR-vjetroagregata VA K80 snage 2,5 MW, prikazanog na slici 80.



**Slika 80. Končar vjetroagregat K80, nazivne snage 2,5 MW**

Pomoću ugrađenog monitoring sustava dobiveni su podaci o smjeru i brzini vjetra, brzini vrtnje rotora, pomacima i deformacijama (na glavčini, glavnom nosaču, osovinskom rukavcu i tornju) te ubrzanjima (na glavčini i tornju) za nepoznata opterećenja od vjetra pri različitim režimima rada vjetroagregata. Navedeni rezultati predstavljaju ulazne podatke za verifikaciju inverznog postupka modeliranja za određivanje opterećenja kritičnih komponenata vjetroagregata optimalnim smještajem tenzometarskih traka i akcelerometara vibracija sustava za monitoring. Končar vjetroagregat K80 instaliran je u sklopu vjetroelektrane VE Pometeno brdo u blizini Splita 2012. godine (slika 81). Obrada i filtriranje rezultata mjerenja deformacija i vibracija provedena je primjenom statističkih metoda. Nakon obrade izrađena je baza podataka za standardizirane slučajeve opterećenja što je omogućilo analizu ponašanja vjetroagregata pri različitim režimima rada. Težište je bilo na analizi podataka za osovinski rukavac vjetroagregata koji je zbog svoje jednostavne osnosimetrične geometrije najprikladniji za validaciju numeričkih modela. Prije no što se prikaže provedeni postupak izračuna nepoznatih opterećenja osovinskog rukavca dat će se kratki prikaz konstrukcije Končar-vjetroagregata.





Slika 81. Končar vjetro-park na Pometenom brdu kod Splita

## 8.1. Vjetroagregati

Rastuća potražnja za proizvodnjom električne energije iz obnovljivih izvora, poput energije vjetra, zahtijeva složene konstrukcije u konstrukcijskom i tehnološkom pogledu, kao što su vjetroagregati. Vjetar kao energija nije konstantan tijekom vremena, priroda vjetra je vrlo stohastička, što postavlja stroge zahtjeve u pogledu sigurnosti, pouzdanosti, učinkovitosti i izdržljivosti na takav tip konstrukcije. Zbog toga je vjetroagregat vrlo zahtjevna konstrukcija za čije očuvanje integriteta je potrebna provedba naprednih eksperimentalnih i numeričkih analiza. Uslijed stohastičke prirode vjetra, komponente vjetroagregata podvrgnute su velikom broju ciklusa zamornih opterećenja tijekom njihovog nominalnog radnog vijeka od 20 godina.

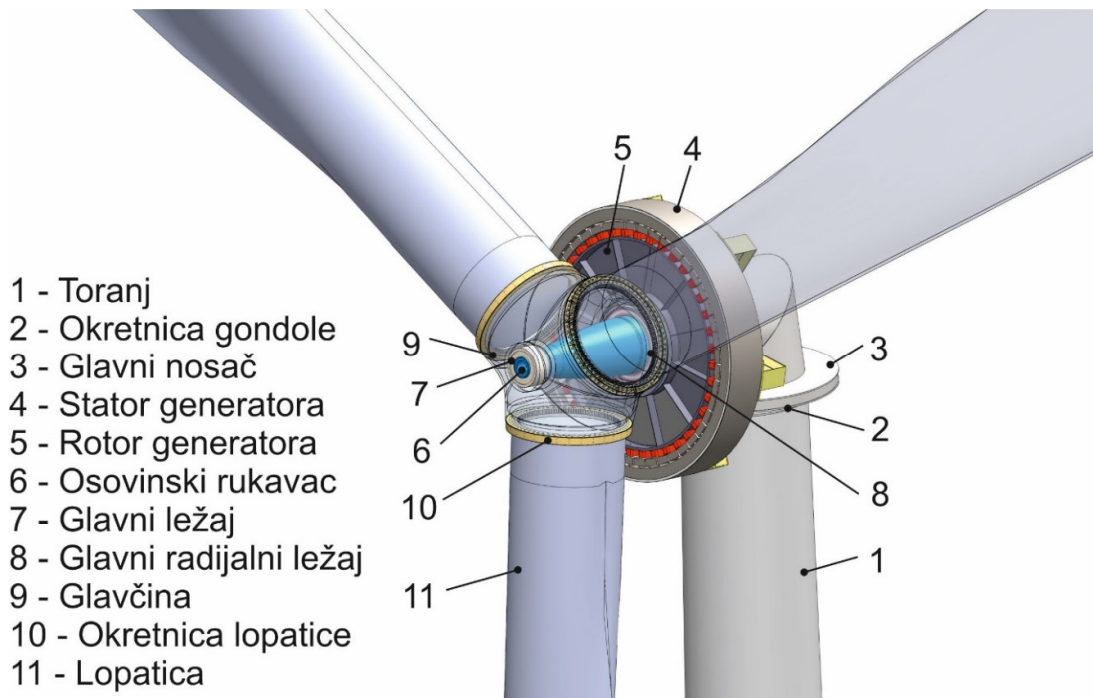
U novije vrijeme razvijaju se programski paketi za simulaciju opterećenja i analizu naprezanja vjetroagregata [99], [100] u skladu s međunarodnim standardima [101]–[103]. Navedene proračune potrebno je validirati na način da se provedu mjerenja na realnom vjetroagregatu. Pritom, za usporedbu mjerenih i izračunatih naprezanja i deformacija potrebno je definirati standardizirane slučajeve opterećenja što omogućuje analizu dinamičkog ponašanja vjetroagregata pri različitim režimima rada. Osim toga, prilikom postupka certificiranja vjetroagregata zahtijevaju se između ostaloga i mjerenja na instaliranom prototipu vjetroagregata u radu kako bi se verificirala opterećenja prema međunarodnim standardima.

Poznavanje opterećenja koja djeluju na konstrukciju vjetroagregata neophodno je za verifikaciju pretpostavljenih (teorijskih) opterećenja, optimiranje konstrukcije, određivanje dopuštenih režima rada i izračun radnog vijeka konstrukcije što doprinosi učinkovitom sustavu nadzora i upravljanju konstrukcije. Kako bi se vjetroagregatu osigurao radni vijek potrebno je

provesti analizu zamora njegovih kritičnih dijelova. Mjerenjem deformacija i akceleracija na konstrukcijskoj komponenti u eksploataciji vrše se laboratorijska ispitivanja zamora materijala primjenom realnih stohastičkih opterećenja. Međutim, određivanje opterećenja iz izmjerenih akceleracija i deformacija na dijelovima vjetroagregata koji su u eksploataciji je područje koje još uvijek nije dovoljno istraženo. Nadalje, na taj način izračunata opterećenja na neku konstrukciju mogu služiti kao osnova za provođenje daljnje analize optimiranja, zamora, i dopuštenih režima rada konstrukcije, kao i u postupku certificiranja vjetroagregata prema međunarodno priznatim standardima. Osim toga, u fazi projektiranja konstrukcije poželjno je poznavati mjesta i iznose vanjskih opterećenja. Provjera opterećenja u fazi ispitivanja novo razvijene vjetroturbine može potvrditi pretpostavljena djelujuća opterećenja koja se koriste za proračun mehaničke čvrstoće i zamora.

Akumuliranje oštećenja u kritičnim komponentama vjetroagregata može narušiti cjelovitost (integritet) konstrukcije, odnosno dovesti do loma i havarije s katastrofalnim posljedicama. Na taj je način ugrožena sigurna eksploatacija i funkcionalnost konstrukcije te je skraćen njen vijek trajanja. Osim toga, u slučaju nepovoljnih uvjeta strujanja vjetra vjetroagregat se zaustavlja, a kada se opet steknu povoljni uvjeti vjetra vjetroagregat se ponovo pokreće i proizvodi električnu energiju. Zamjena za proizvodnju električne energije u trenucima nepovoljnog vjetra ili manjka vjetra, može biti plinska turbina. Česta puštanja u pogon i zaustavljanja plinske turbine, ali isto tako i vjetroagregata, kao nestacionarni režimi rada, predstavljaju posebno osjetljiva pogonska stanja. Analize režima rada suvremenih plinskih turbina pokazale su nedvojbenu uzročnu vezu učestalih ne stacionarnih režima rada s pojavama pukotina u kućištima turbina, ventila i ostalim kritičnim komponentama, zatim s promjenom strukturnog stanja materijala, povećanim trošenjem ležajeva, kao i drugim neželjenim posljedicama.

Aerodinamička opterećenja uslijed vjetra prenose se preko lopatica i okretnica lopatica na glavčinu, s glavčine preko glavnih ležaja vjetroagregata na osovinski rukavac. Osovinski rukavac prenosi opterećenje dalje na glavni nosač, koji preko okretnice gondole prenosi opterećenja na stup vjetroagregata. Iz prethodno opisanog prijenosa opterećenja vjetroagregata, mogu se navesti glavni konstrukcijski dijelovi, kao što su toranj, glavni nosač, generator, osovinski rukavac, glavčina i lopatice, prikazani na modelu vjetroagregata na slici 82.



Slika 82. Glavni dijelovi vjetroagregata

Prema načinu prijenosa opterećenja između lopatica i generatora, pogon vjetroagregata može biti direktni ili indirektni preko multiplikatora. Kod direktnih vjetroagregata, lopatice i rotor generatora spojeni su na glavčinu oslonjenu na osovinskom rukavcu preko radijalnog i radijalno-aksijalnog glavnog ležaja. Osovinski rukavac je montiran kao konzolna greda povezana vijcima sa statorom generatora i glavnog nosača. Montirani glavni ležaji na osovinskom rukavcu pružaju pouzdanu potporu rotaciji glavčine i proizvodnji energije. Kod pogona preko multiplikatora glavčinu i rotor generatora povezuje multiplikator. Osovinski rukavac je mehanički jedan od najkritičnijih dijelova cijelog vjetroagregata, opterećen aksijalnim i radijalnim silama koje stvaraju moment savijanja i posmična opterećenja.

Upravljanje snagom vjetroagregata vrši se zakretanjem lopatica u trenutku kada brzina vjetra prijeđe nazivnu brzinu, a do nazivne brzine vjetra upravljanje snagom vrši se momentom generatora. Proizvedena električna energija u generatoru odvodi se preko frekvencijskog pretvarača u električnu mrežu. U tablici 32 navedeni su tehnički podaci za Končar vjetroagregat VA K80. Podaci prikazani u tablici preuzeti su iz promidžbenih letaka od tvrtke Končar-KET.

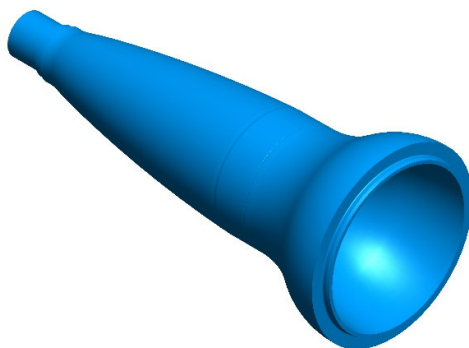
Tablica 32. Tehnički podaci Končar vjetroagregat K80

Nazivna snaga	2500 kW
Visina osi rotacije	80 m
Regulacija snage	Zakretanjem lopatica (pitch)
Brzina vjetra za uključenje	2,5 m/s
Nazivna brzina vjetra	12,5 m/s
Brzina vjetra za isključenje	25 m/s
<b>Generator</b>	Sinkroni višepolni s direktnim pogonom i promjenjivom brzinom vrtnje 2500 kW, 690 V
<b>Toranj</b>	Čelični, konusni
<b>Sustav za kočenje</b>	Tri nezavisna sustava za zakretanje lopatica i elektromehanička disk kočnica
<b>Vjetroagregat</b>	
Položaj	Prema vjetru
Broj lopatica	3
Materijal lopatica	Epoksidna smola ojačana staklenim vlaknima s integriranom gromobranskom zaštitom
Promjer rotora	91 m
Površina rotora	6526 m <sup>2</sup>
Brzina vrtnje	5-16 o/min
Smjer vrtnje	Desni, u smjeru kazaljke na satu
Upravljanje zakretnom lopatica	Tri sustava za zakretanje lopatica s pomoćnim baterijskim napajanjem
<b>Priključak na mrežu</b>	Pretvarač frekvencije (AC-DC-AC)
<b>Upravljanje</b>	Mikroprocesorski sustav
<b>Sustav zakreta gondole</b>	Aktivni s prigušenjem

## 8.2. Osovinski rukavac

Složena geometrija osovinskog rukavca korištena je kao primjer za provjeru inverzne metode za određivanje opterećenja elemenata s pukotinom na realnoj konstrukciji. Geometrija osovinskog rukavca prikazana je na slici 83. Zbog povjerljivosti podataka tvrtke Končar geometrija osovinskog rukavca ne može se detaljnije prikazati. Podaci potrebni za provedbu analiza u ovom projektu korišteni su iz prethodnog projekta istraživačkog tima pod nazivom "*Center of Excellence for Structural Health*" (*CEEStructHealth*). U fazi razvoja vjetroagregata

odabrano je osam mjesta za mjerenje deformacija koja se koriste u monitoring sustavu, odnosno sustavu za nadzor stanja konstrukcije. Mjesta su bila odabrana iskustveno u očekivanim zonama maksimalnih opterećenja, pri tome uzimajući u obzir samo da se izbjegnu područja koncentracije naprezanja i područja potrebna za montažu ostalih dijelova vjetroagregata. Zbog svoje relativno jednostavne geometrije i načina opterećenja osovinski rukavac predstavlja idealni primjer realne konstrukcijske komponente vjetroagregata za provjeru broja, položaja i orijentacije tenzometarskih traka upotrijebljenih za provjeru opterećenja postupkom inverznog modeliranja. Provjera može li se pomoću postojećeg broja, položaja i orijentacije tenzometarskih traka odrediti nepoznata opterećenja sa i bez prisustva pukotine, pomoći će u definiranju optimalnog broja, položaja i orijentacije tenzometarskih traka korištenjem predloženog postupka inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja.

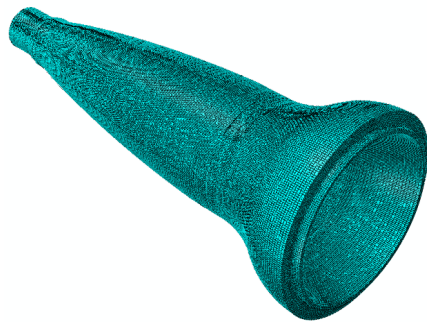


**Slika 83. Geometrija osovinskog rukavca**

Najčešće korišteni materijal za proizvodnju osovinskog rukavca je nodularni lijev, materijal koji se široko primjenjuje u dinamički opterećenim konstrukcijama, kako zbog svojih mehaničkih karakteristika, tehnološkičnosti, jednostavnije proizvodnje, prigušenja vibracija tako i zbog cijene gotovog proizvoda. Zahvaljujući izraženoj duktilnosti i visokoj zamornoj čvrstoći [104]–[106], kao i dobrim ljevačkim svojstvima, nodularni lijev koristi se za izradu komponenti modernih konstrukcija koje su izložene dinamičkom opterećenju [107]–[109]. U radovima [76], [110] detaljnije je istražen utjecaj broja, veličine i oblika nodula, kao i udjela perlitne faze u feritnoj matrici na statičko vlačno ponašanje, simetrično i asimetrično cikličko ponašanje, lomnu žilavost te proces zamornog iniciranja i rasta pukotine u duktilnom nodularnom lijevu EN–GJS–400–18–LT. Pokazano je da veličina, oblik i raspodjela grafitnih nodula nema značajan utjecaj na ponašanje materijala uslijed kvazistatičkog opterećenja, ali

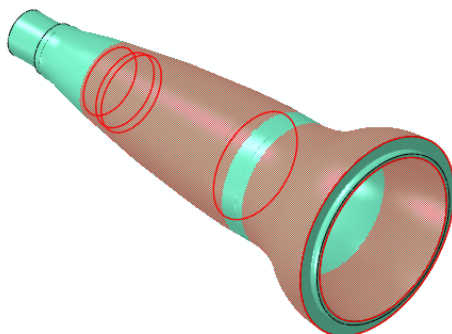
ima veliku ulogu u procesima zamornog iniciranja i rasta pukotina [77], [110], [111]. Iz tog razloga je vrlo bitno poznavati stvarno opterećenje osovinskog rukavca u eksploataciji.

Svojstva materijala nodularnog lijeva korištena u numeričkom modelu su:  $E = 215,9 \text{ kN/mm}^2$  i  $\nu = 0,28$ . Diskretizacija geometrije rukavca provedena je pomoću C3D8 heksaedarskih konačnih elemenata. Tipična mreža koja se sastoji od 340 692 konačnih elemenata prikazana je na slici 84. Progušćivanje mreže elemenata provedeno je u očekivanom području nastanka pukotina i geometrijskih diskontinuiteta kao što su mjesta na prijelazima debljine stjenki te je provedena analiza konvergencije rezultata.



Slika 84. Tipična mreža konačnih elemenata

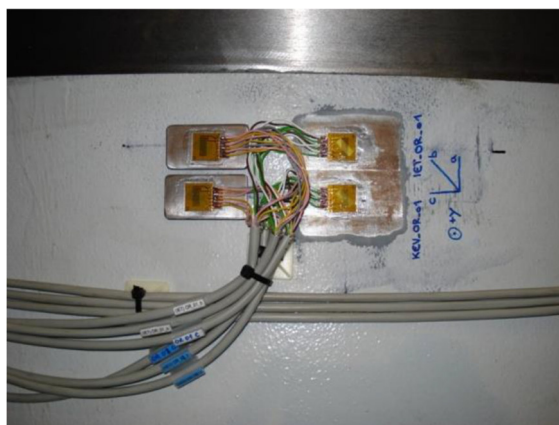
Osovinskom rukavcu onemogućeni su svi stupnjevi slobode gibanja na desnoj prirubničkoj strani. Kao što je rečeno, kompletna površina osovinskog rukavca nije prikladna za moguće položaje tenzometarski traka za određivanje opterećenja. Potencijalno područje za smještaj tenzometarskih traka predstavlja cijela površina osovinskog rukavca, osim područja oko očekivanog nastanka i rasta pukotine, položaja ležaja, fiksnog područja za montažu na glavni nosač i unutarnjeg područja pod manjim ležajem. Slika 85 prikazuje unutarnje i vanjske površine na osovinskom rukavcu koje su prikladne za moguće položaje tenzometarskih traka na osovinskom rukavcu te su navedene površine označene crvenom bojom. Površine predviđene za glavni ležaj korištene su kao područja za dodjeljivanje opterećenja.



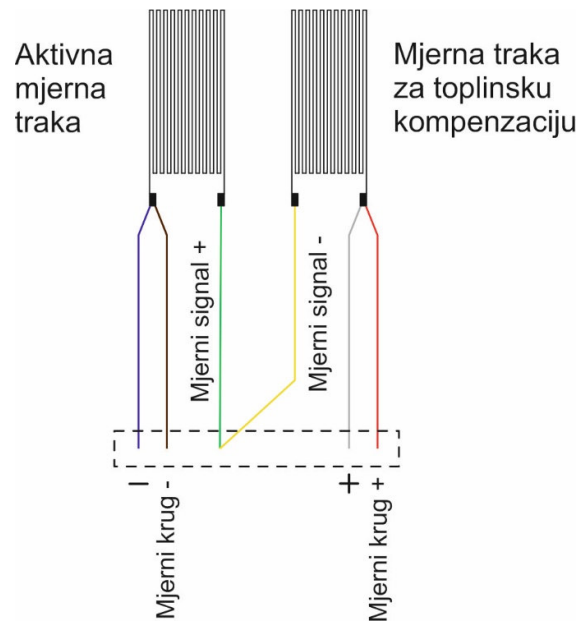
Slika 85. Površine osovinskog rukavca podobne za smještaj tenzometarskih traka

### 8.3. Smještaj tenzometarskih mjernih traka

Sustav za mjerenje i prikupljanje podataka mjerenih deformacija i akceleracija sastoji se od dva sustava: mjernog sustava za monitoring napreznja u eksploataciji i mjernog sustava za kontrolu i umjeravanje. Sustavi su prikazani na slici 86, tj. na jednom mjernom mjestu na osovinskom rukavcu, gdje je lijeva strana sustav za umjeravanje, a desna strana sustav za mjerenje deformacija. Mjerna mjesta su spojena Wheatstone-ovim polumostom te se sastoje od aktivne tenzometarske mjerne trake koja mjeri deformaciju i tenzometarske mjerne trake za toplinsku kompenzaciju što je prikazano na shemi spajanja Wheatstone-ovog polumosta na pojačalo na slici 87.



Slika 86. Mjerno mjesto na osovinskom rukavcu s prikazom postavljenih tenzometarskih traka



Slika 87. Shema spajanja polovičnog mosta na pojačalo

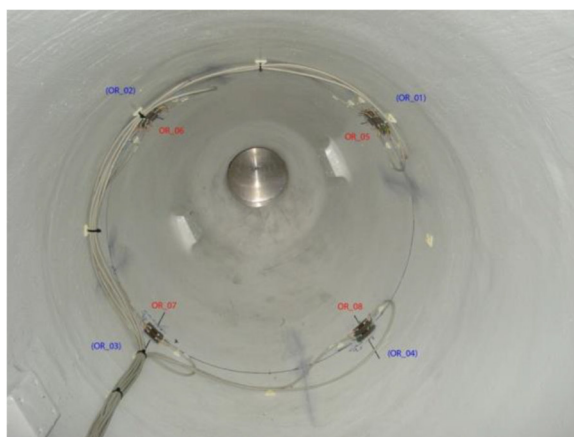
Tablica 33. Popis mjernih mjesta na osovinskom rukavcu

Broj TT	Mjerno mjesto	Vrsta TT	Os TT	Smjer TT	Oznaka
1	OR_01	Troosna	a	0	OR_01_a
2			b	45	OR_01_b
3			c	90	OR_01_c
4	OR_02	Troosna	a	0	OR_01_a
5			b	45	OR_01_b
6			c	90	OR_01_c
7	OR_03	Troosna	a	0	OR_01_a
8			b	45	OR_01_b
9			c	90	OR_01_c
10	OR_04	Troosna	a	0	OR_01_a
11			b	45	OR_01_b
12			c	90	OR_01_c
13	OR_05	Dvoosna	a	0	OR_01_a
14			b	90	OR_01_b
15	OR_06	Dvoosna	a	0	OR_01_a



16			b	90	OR_01_b
17	OR_07	Dvoosna	a	0	OR_01_a
18			b	90	OR_01_b
19	OR_08	Dvoosna	a	0	OR_01_a
20			b	90	OR_01_b

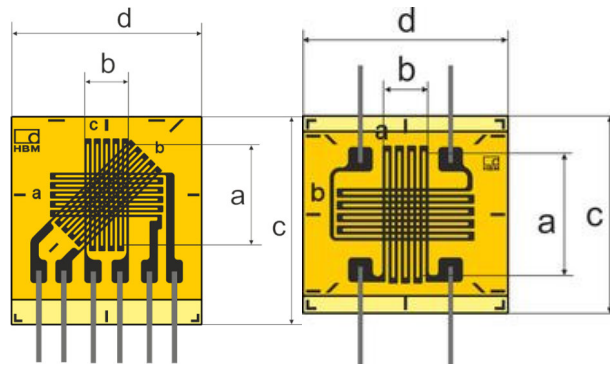
Tablica 33 prikazuje popis mjernih mjesta na osovinskom rukavcu, s opisom vrste tenzometarskih mjernih rešetki, s oznakama osi i orijentaciji u odnosu na uzdužnu os osovinskog rukavca. Slika 87 prikazuje raspored montiranih tenzometarskih mjernih traka na unutarnjem promjeru osovinskog rukavca. Prilikom postavljanja i montaže tenzometarskih mjernih traka, površina osovinskog rukavca je pripremljena prema uputama proizvođača mjernih traka. Nakon postavljanja sve pozicije su zaštićene lakom, silikonskim punilom, vodonepropusnim punilom i završnim punilom te je na kraju postavljena aluminijska folija. Kablovi su fiksirani s čvrstim ljepilom kako bi se spriječilo eventualno pomicanje kablova u blizini mjerni tenzometarskih traka i osiguralo dugi rad mjernog sustava.



**Slika 88. Mjerna mjesta na osovinskom rukavcu na unutarnjem promjeru**

Za mjerenje deformacija na osovinskom rukavcu pomoću tenzometarskih mjernih traka koristila su se dva tipa mjernih traka otpora  $120 \Omega$ , prikazanih na slici 89:

1. Troosna tenzometarska mjerna traka HBM 10/120 RY91 (1-RY91-10/120)
2. Dvoosna tenzometarska mjerna traka HBM 10/120 XY91 (1-XY91-10/120)

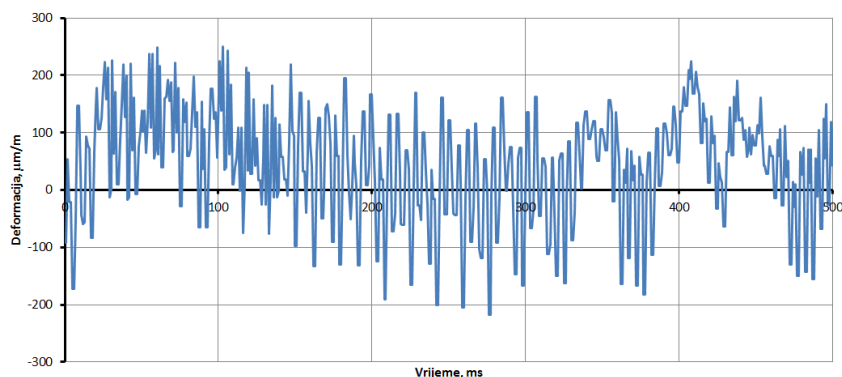


Slika 89. Korištene tenzometarske trake proizvođača HBM

Postupak mjerenja i umjeravanja sustava podijeljen je u nekoliko faza:

1. Nulto stanje naprezanja elemenata
2. Stanje naprezanja nakon tvorničke montaže sklopa glavčine
3. Stanje naprezanja nakon tvorničke montaže na ispitnom postolju
4. Stanje naprezanja montiranog vjetroagregata na VE Pometeno brdo
5. Stanje naprezanja montiranog vjetroagregata na VE Pometeno brdo s pobudom

Nulto stanje naprezanja osovinskog rukavca zabilježeno je u tvornici nakon postavljanja tenzometarskih mjernih traka. Prilikom snimanja nultog stanja os osovinskog rukavca je postavljena u vertikalni položaj, oslonjen je u tri točke, bez montiranih drugih dijelova. Nakon provedenih snimanja nultog stanja osovinskog rukavca, izvršena je tvornička montaža sklopa glavčine s osovinskim rukavcem. Sklop je postavljen u vertikalni položaj, kao i u slučaju samog osovinskog rukavca. Os glavčine je u vertikalnom položaju i oslonjena je na prirubnicu osovinskog rukavca. Snimljeno je stanje naprezanja za sklop glavčine. Sklop glavčine montiran je na sklop glavnog nosača, sa svom ostalom pripadajućom opremom, nosačima oplata, oplatom i na način da je sklop glavčine postavljen u referenti položaj lopatice 1. Nakon montaže vjetroagregata na VE Pometeno brdo i spajanja tenzometarskih mjernih traka na sustav monitoringa deformacija i naprezanja, provedena su mjerenja za stanja deformacija u mirovanju i stanje deformacija s pobudom. Snimanje stanja deformacija u mirovanju provedena su pri mirnom vremenu bez vjetra, u slučajevima kada se lopatica 1 nalazi u referentnom položaju okrenuta prema dolje i kada se lopatice 2 i 3, nalaze okrenute prema dolje, tj. uz toranj. Snimanje stanje naprezanja s pobudom izvršeno je u praznom hodu vjetroagregata, tj. rotor vjetroagregata se vrti bez proizvodnje električne energije. Primjer s izmjerenim deformacijama u smjeru osi osovinskog rukavca na mjernom mjestu 1 prikazan je na slici 90.

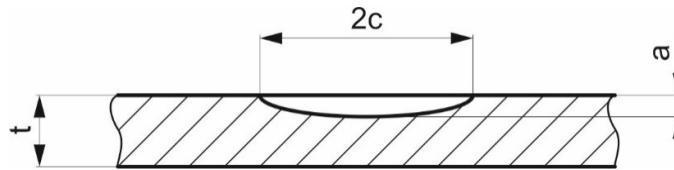


Slika 90. Izmjerene deformacije na osovinskom rukavcu na mjernom mjestu OR\_01

#### 8.4. Postupak inverznog modeliranja

Određivanje optimalnog položaja tenzometarskih traka na osovinskom rukavcu provedeno je predloženim postupkom inverznog modeliranja. Na površinama osovinskog rukavca podobnim za smještaj tenzometarskih traka sa slike 85 dodijeljena je opcija „Skin“ iz programskog paketa Abaqus, kako bi se mogle očitati površinske ravninske deformacije, koje će se upotrijebiti kasnije za izračun narinutih opterećenja.

Osim geometrije osovinskog rukavca koja ne sadrži pukotine, analizirane su i geometrije rukavca s hipotetskim pukotinama. Polueliptička pukotina s pripadnim dimenzijama korištenim u numeričkom modelu za izračun opterećenja opisanim postupkom inverznog modeliranja osovinskog rukavca prikazana je na slici 91, a u tablici 34 su dane dimenzije analiziranih pukotina. Ovdje  $t$  predstavlja debljinu stjenke rukavca,  $a$  dubinu pukotine, a  $c$  poluduljinu pukotine. Razmatrano je dvanaest različitih omjera dubine pukotine i debljine stjenke,  $a/t$ , s konstantnim omjerom poluduljine pukotine  $c$  i dubine pukotine  $a$  ( $c/a$ ) u iznosu od 5. Razlog tome je što su kod manjih omjera  $c/a$  promjene krutosti u odnosu na neoštećeni rukavac bile ne zamjetne, a kod većih omjera  $c/a$  pukotina je bila prevelika.

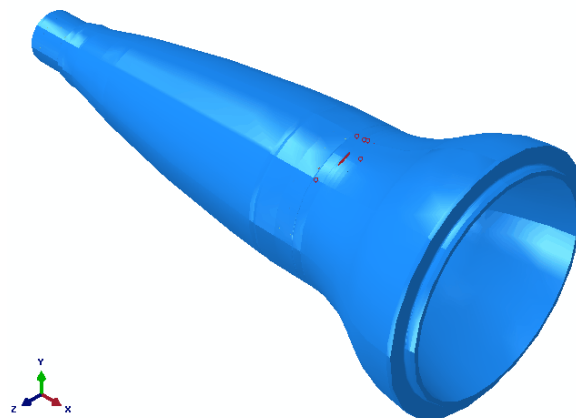


Slika 91. Geometrija hipotetske polueliptičke pukotine na osovinskom rukavcu

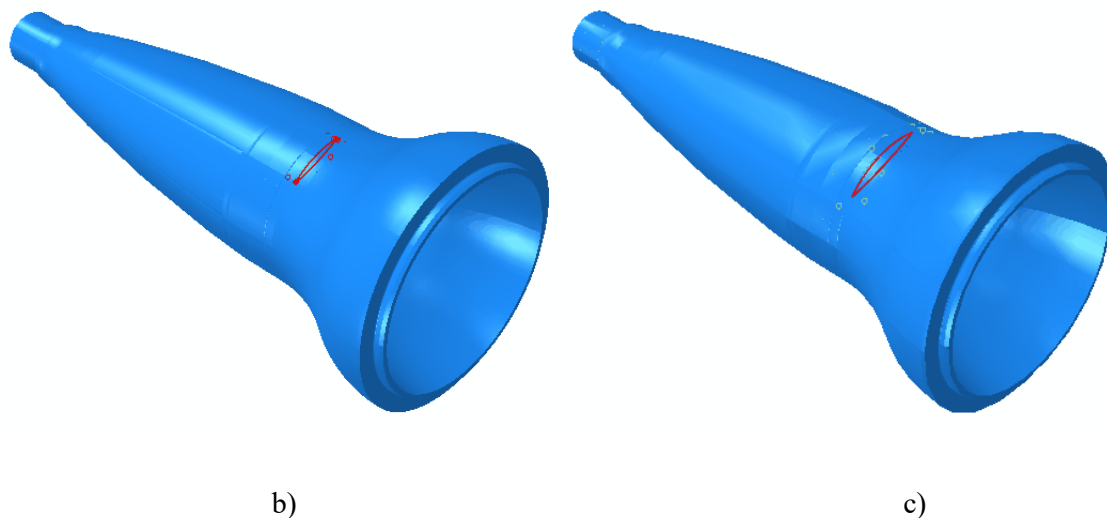
Tablica 34. Dimenzije analiziranih hipotetskih pukotina na osovinskom rukavcu

$c/a$	$a/t$	$a$ (mm)	$c$ (mm)
5	0,05	6,1	30,5
	0,1	12,2	61
	0,15	18,3	91,5
	0,2	24,4	122
	0,3	36,6	183
	0,4	48,8	244
	0,5	61	305
	0,6	73,2	366
	0,7	85,4	427
	0,8	97,6	488
	0,9	109,8	549
	1	122	610

Položaj i orijentacija pukotina različitih dimenzija prikazani su na slici 92 za dubinu pukotine u odnos na debljinu stjenke: a) 10%, b) 50% i c) 90%. Kod dubine pukotine od 90% debljine stjenke sa slike 92c) može se zamijetiti da se radi o velikoj pukotini koja na vanjskom promjeru rukavca zauzima velik dio opsega rukavca.



a)



Slika 92. Oblik i položaj pukotine na osovinskom rukavcu, a) za 10% debljine stjenke, a) za 50% debljine stjenke, a) za 90% debljine stjenke

Kao što je već opisano, s rastom pukotine krutost konstrukcije se smanjuje. Kao primjer za to izračunata je promjena krutosti osovinskog rukavca s različitim dubinama pukotina kako bi se prikazao utjecaj veličine pukotine na krutost osovinskog rukavca. U tablici 35 prikazani su rezultati za izračunate promjene krutosti s rastom dubine pukotine. Promjena krutosti izračunata je na način da se za svaku duljinu pukotine kao pripadno opterećenje zadavao pomak (progib) rukavca tako da djeluje okomito na uzdužnu os rukavca i maksimalno otvara pukotinu. Kako bi se dobila najmanja sila reakcije u osloncu, pomak je zadan na prednjem osloncu umjesto vertikalne komponente opterećenja  $Fz1$  (slika 94). Zbog male promjene u krutosti, metode određivanja opterećenja koje se temelje na mjerenju akceleracija ne mogu pouzdano detektirati pukotinu u konstrukciji i trenutno stanje tehnologije nameće primjenu tenzometarskih traka kao primjenjivu metodu koja može detektirati male promjene u odzivu konstrukcije, tj. promjene deformacija i naprezanja zbog nastanka i rasta pukotine.

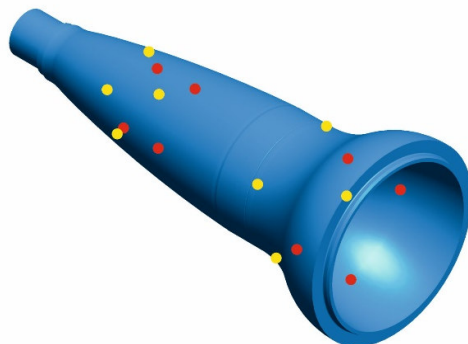
Tablica 35. Promjena krutosti osovinskog rukavca s rastom dubine pukotine

Omjer dubine pukotine s debljinom stjenke, $a/t$	Krutost, (N/mm)	Razlika, (%)
0	323062	0,00
0,05	323060	0,00
0,1	323035	0,01
0,15	322968	0,03

0,2	322848	0,07
0,3	322402	0,20
0,4	321613	0,45
0,5	320409	0,82
0,6	318709	1,35
0,7	316461	2,04
0,8	313640	2,92
0,9	310235	3,97

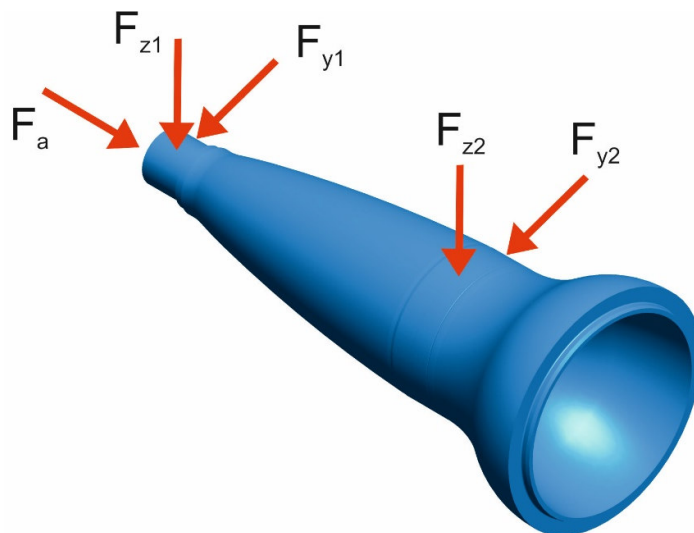
Koristeći se u ovom radu predloženim postupkom inverznog modeliranja za određivanje opterećenja konstrukcija s pukotinom i spoznajama kako se različiti tipovi opterećenja, proporcionalno i neproporcionalno opterećenje, ponašaju na različitim tipovima ispitnih epruveta provedena je analiza opterećenja na osovinskom rukavcu za različit broj tenzometarskih traka, kao i za postojeći raspored montiranih tenzometarskih traka na osovinskom rukavcu prototipa Končar-vjetroagregata oznake K80.

U prvom koraku postupka određivanja nepoznatog opterećenja osovinskog rukavca s pukotinom, numeričkom analizom određena je raspodjela deformacija u modelu. Za definiranje veze između ulaznih opterećenja i deformacija, u drugom koraku napravljena je podjela pukotina na inkremente, odnosno priraste s različitim omjerom dubine pukotine s debljinom stjenke, dok je za modeliranje pukotine u programskom paketu Abaqus korištena opcija „seam crack“, kao i u prethodnim primjerima. U trećem koraku odabrane su površine pogodne za potencijalne pozicije tenzometarskih traka koje su prikazane slici 85. U četvrtom koraku postupka inverznog modeliranja D-optimalnim postupkom određeni su optimalni položaji i orijentacije za 12, 16, 20 i 24 tenzometarske trake. Na slici 93 mjesta označena crvenom bojom su određena inverznim modeliranjem i prikazuju optimalne položaje tenzometarskih traka za različite veličine i orijentacije pukotina, dok su mjesta prikazana sa žutom bojom ona koja su odabrana u fazi razvoja vjetroagregata. Kao što je ranije rečeno, u fazi razvoja vjetroagregata odabrano je osam mjesta za mjerenje deformacija. Sa slike 93 se može zaključiti da mjesta za tenzometarske trake odabrana u fazi razvoja vjetroagregata (žute točke) se dosta razlikuju od mjesta određenih inverznom metodom (crvene točke). Cilj je ovdje istražiti mogu li se pomoću ovih postojećih osam tenzometarskih traka identificirati nepoznata opterećenja rukavca sa i bez prisustva pukotina različitih dimenzija? U petom koraku proveo se je izračun nepoznatih opterećenja primjenom postupka inverznog modeliranja korištenjem tenzometarskih traka, pomoću programskog paketa True Load.



Slika 93. Položaji tenzometarskih traka na osovinskom rukavcu

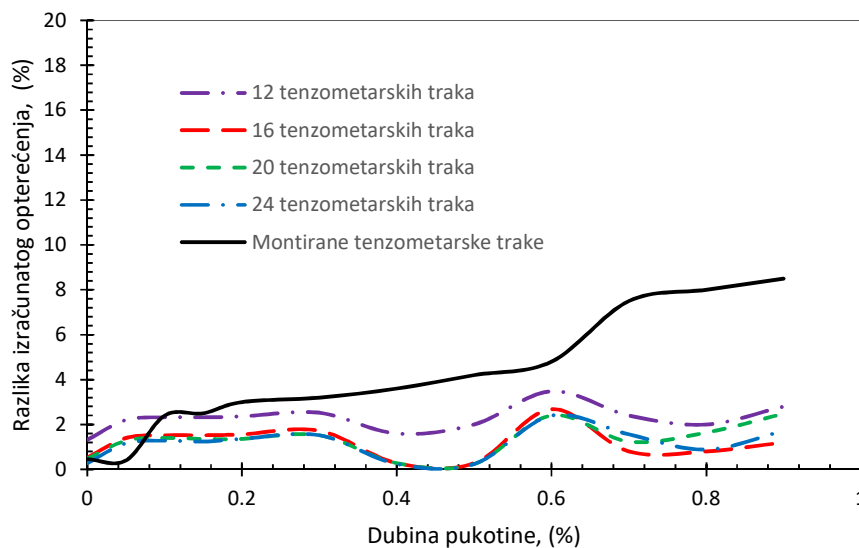
Pet komponenata opterećenja koja djeluju na osovinski rukavac, aksijalna sila  $F_a$ , horizontalna radijalna sila na prednjem aksijalno-radijalnom ležaju  $F_{y1}$ , vertikalna radijalna sila na prednjem aksijalno-radijalnom ležaju  $F_{z1}$ , horizontalna radijalna sila na stražnjem radijalnom ležaju  $F_{y2}$  i vertikalna radijalna sila na stražnjem radijalnom ležaju  $F_{z2}$  prikazane su na slici 94.



Slika 94. Komponente opterećenja na osovinskom rukavcu

Deformacije korištene na pozicijama tenzometarskih traka dobivene numeričkom simulacijom nisu određivane samo kako bi se izračunala svaka pojedina komponenta opterećenja, već da bi se koristile kao referentna rješenja za procjenu greške inverznog postupka. Nakon provedenog postupka izračuna opterećenja, iz rezultata prikazanih na slikama 95 do 99 vidljivo je da odabrana mjesta u fazi razvoja vjetroagregata (mjesta označena sa žutom bojom na slici 93) mogu poslužiti za određivanje opterećenja za osovinski rukavac bez oštećenja, odnosno pukotina i to s relativno velikom točnošću. Međutim, u slučaju nastanka i rasta pukotine u

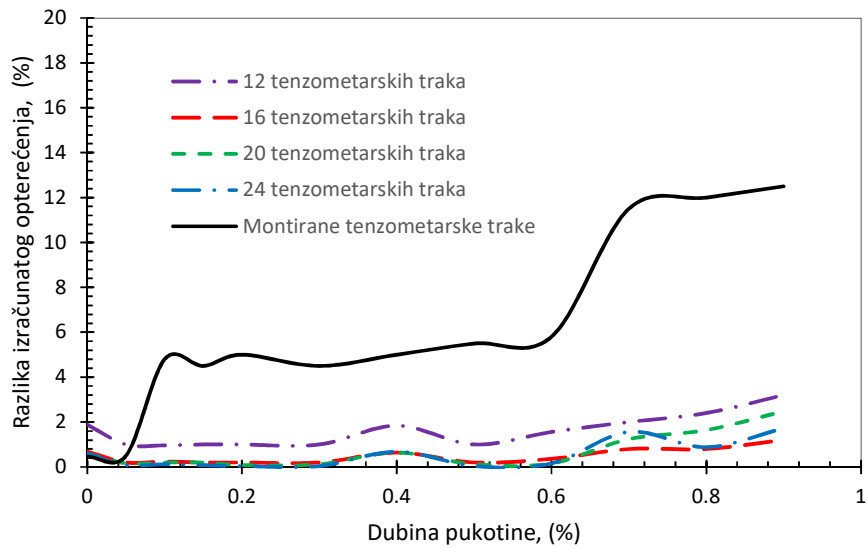
osovinskom rukavcu greška izračunatog opterećenja inverznom metodom primjenom tenzometarskih traka na žuto označenim mjestima sve više se povećava kako raste pukotina, u odnosu na rješenja koja se dobivena primjenom tenzometarskih traka na crveno označenim mjestima, a koja predstavljaju optimalna mjesta. Jedan od razloga povećanja greške s rastom pukotine, pogotovo kada vrijednost dubine pukotine prijeđe 50% debljine stijenke osovinskog rukavca, može biti u položaju tenzometarskih traka, koje su za mjerno mjesto OR\_08 u tom slučaju blizu pukotini. Slučajevi s optimalnim položajem i orijentacijom tenzometarskih traka, za 12, 16, 20 i 24 tenzometarskih traka, za svih pet komponenata opterećenja pokazuju da greška određivanja pojedine komponente opterećenja varira s dubinom pukotine. Rezultati prikazani na slici 95 za silu u smjeru osi osovinskog rukavca  $F_a$  pokazuju da odabrana mjesta u fazi razvoja vjetroagregata (mjesta označena sa žutom bojom na slici 93) mogu poslužiti za određivanje ovog opterećenja, ali samo u početnoj fazi nastanka pukotine i njenog početnog rasta.



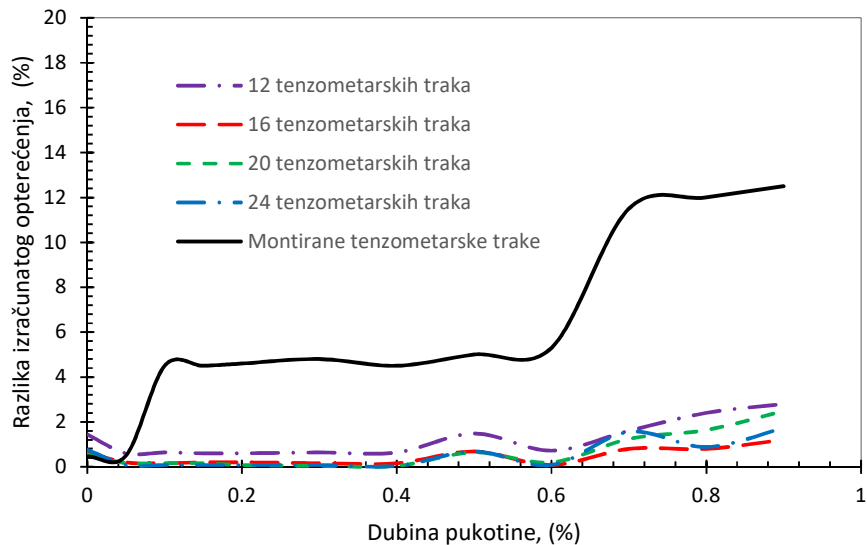
Slika 95. Izračunata vrijednost sile  $F_a$  za različite dimenzije pukotine

Rezultati prikazani na slici 96 za horizontalnu radijalnu silu na prednjem aksijalno-radijalnom ležaju  $F_{y1}$  pokazuju da odabrana mjesta u fazi razvoja vjetroagregata (mjesta označena sa žutom bojom na slici 93) mogu poslužiti za određivanje ovog opterećenja, ali također samo u početnoj fazi nastanka pukotine i njenog početnog rasta. Isto pokazuju i rezultati prikazani na slici 97 za za vertikalnu radijalnu silu na prednjem aksijalno-radijalnom ležaju  $F_{z1}$ .





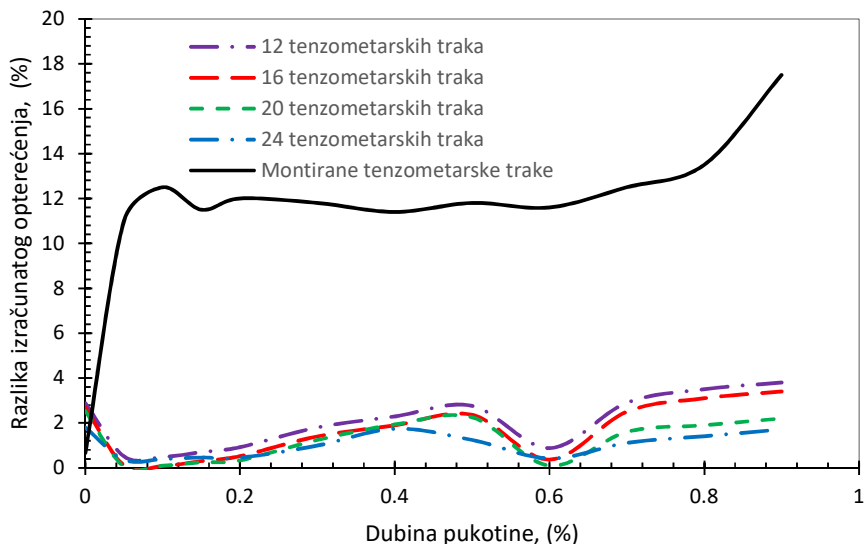
Slika 96. Izračunata vrijednost sile  $F_{y1}$  za različite dimenzije pukotine



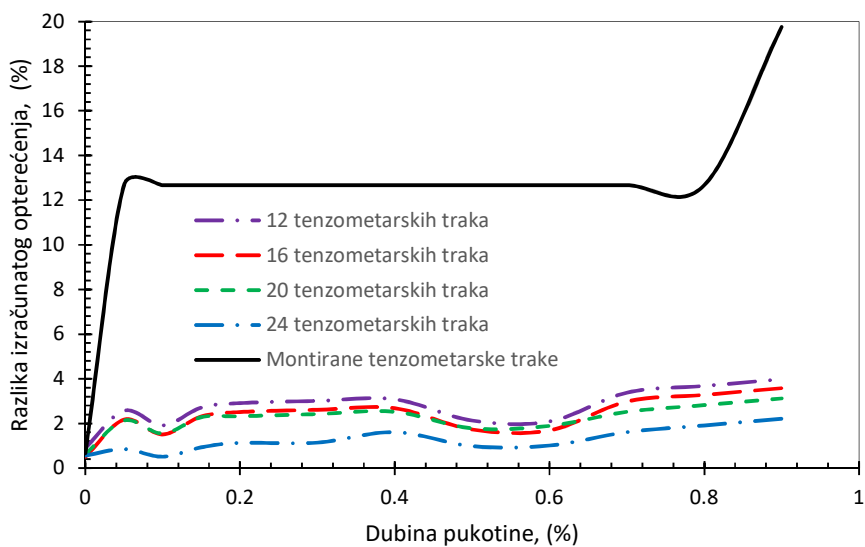
Slika 97. Izračunata vrijednost sile  $F_{z1}$  za različite dimenzije pukotine

Rezultati za horizontalnu radijalnu silu na stražnjem radijalnom ležaju  $F_{y2}$  i za vertikalnu radijalnu silu na stražnjem radijalnom ležaju  $F_{z2}$ , prikazani na slikama 98 i 99 pokazuju da i za ove komponente opterećenja, kao i prethodne komponente opterećenja, odabrana mjesta u fazi razvoja vjetroagregata (mjesta označena sa žutom bojom na slici 93 mogu poslužiti za

određivanje ovog opterećenja samo u slučaju rukavca bez pukotine, dok s pojavom pukotine greška izračunate sile inverznim postupkom naglo raste.



Slika 98. Izračunata vrijednost sile  $F_{y2}$  za različite dimenzije pukotine



Slika 99. Izračunata vrijednost sile  $F_{z2}$  za različite dimenzije pukotine

Na kraju je provedena provjera uvjetovanosti matrice proporcionalnosti  $\mathbf{D}$  kako bi se provjerilo da je sustav linearnih jednadžbi stabilan. Kao što je to prikazano u tablici 36, uvjetovanost matrice proporcionalnosti je za sve analizirane kombinacije tenzometarskih traka definiranih

primjenom inverzne metode, kao i za mjesta tenzometarskih traka odabranih u fazi razvoja vjetroagregata, dobra. Vrijednosti su malo veće od 1, što znači da se radi o vrlo stabilnom sustavu linearnih jednadžbi.

**Tablica 36. Uvjetovanost matrice proporcionalnosti D za različite brojeve tenzometarskih traka**

Omjer dubine pukotine s debljinom stjenke, $a/t$	12 TT	16 TT	20 TT	24 TT	Tenzometarske trake postavljene na prototipu vjetroagregata
0	1,858	1,832	1,838	1,483	1,943
0,05	1,858	1,827	1,837	1,466	1,857
0,1	1,855	1,827	1,837	1,466	1,857
0,15	1,855	1,827	1,837	1,466	1,857
0,2	1,856	1,828	1,838	1,466	1,858
0,3	1,859	1,829	1,839	1,467	1,859
0,4	1,857	1,832	1,841	1,467	1,859
0,5	1,857	1,836	1,847	1,469	1,872
0,6	1,845	1,793	1,8	1,446	1,866
0,7	1,848	1,798	1,806	1,449	1,867
0,8	1,850	1,805	1,814	1,452	1,869
0,9	1,813	1,813	1,824	1,456	1,87

## 9. ZAKLJUČAK

Poznavanje opterećenja koja djeluju na konstrukcijsku komponentu od velike je važnosti u predviđanju radnog vijeka konstrukcije kao i u praćenju njezinog rada kroz sustav za nadzor cjelovitosti (integriteta). Nastanak i rast pukotina u kritičnim komponentama konstrukcije može dovesti do smanjenja radnog vijeka, a posljedično i do gubitka cjelovitosti konstrukcije, odnosno loma i havarije sa štetnim posljedicama i pripadnim troškovima. Postojanje oštećenja ili pukotine u konstrukcijskoj komponenti ima za posljedicu smanjenje krutosti komponente što se dovodi u korelaciju s promjenom dinamičkog odziva. Pod promjenom dinamičkog odziva podrazumijeva se smanjenje vlastite frekvencije komponente te promjena vlastitih oblika i prigušenja. Na taj način je oštećenje, odnosno pukotinu moguće identificirati praćenjem odziva konstrukcije. Osim identifikacije parametara oštećenja, odnosno pukotina, potrebno je identificirati opterećenja koja djeluju na konstrukciju. Inženjerske konstrukcije su često podvrgnute složenim režimima opterećenja koje nije jednostavno procijeniti. Stoga je potrebno odrediti opterećenje konstrukcije na temelju mjerenja njenog odziva primjenom različitih senzora i aktuatora što je osnova za pouzdanu procjenu cjelovitosti i vijeka trajanja konstrukcije. Za određivanje opterećenja konstrukcije na temelju mjerenja njenog odziva razvijene su metode inverznog modeliranja. Inverzni problem je općenito loše uvjetovan, što znači da male promjene u mjerenom odzivu mogu uzrokovati velike greške u izračunu opterećenja. Osim toga, ovdje se javlja problem jedinstvenosti rješenja jer kombinacija različitih opterećenja na različitim mjestima može rezultirati gotovo istim odzivom. Nadalje, kako su ovdje nepoznanice i mjesto opterećenja i iznos opterećenja rješavanje inverznog problema može dovesti do višestrukog rješenja pa broj senzora mora biti odgovarajući za dobivanje jedinstvenog rješenja.

U ovom radu predložen je postupak inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih statičkih opterećenja konstrukcijske komponente s pukotinom. Postupak se temelji na inverznom numeričkom modeliranju za identifikaciju nepoznatih opterećenja iz mjerenih deformacija na konstrukciji s pukotinama, optimiranju smještaja tenzometarskih mjernih traka na konstrukciji te na validaciji numeričkih modela eksperimentalnim mjerenjima. Za određivanje optimalnog broja, položaja i orijentacija tenzometarskih traka na konstrukcijskoj komponenti s različitim duljinama pukotine primijenjen je D-optimizacijski postupak. Za numeričko modeliranje primijenjen je programski paket Abaqus koji se temelji na metodi konačnih elemenata, dok je za izračun nepoznatih opterećenja inverznim modeliranjem

primijenjen program True Load, koji je dio programskog paketa FeSafe za analizu zamora materijala i konstrukcija. Pritom je složeni rast pukotina, koji je posljedica postojanja geometrijskih diskontinuiteta u konstrukciji i složenih načina opterećivanja modeliran primjenom proširene metode konačnih elemenata (X-FEM) i modela faznog polja koji je razvijen u Laboratoriju za numeričku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Pristup je ograničen na linearno elastično ponašanje materijala i konstrukcije te na monotona opterećenja i ciklička opterećenja s konstantnim amplitudama. Poznavanjem izmjerenih deformacija na konačnom broju optimalnih položaja postupak omogućuje identifikaciju nepoznatih opterećenja konstrukcijske komponente s pukotinom za vrijeme procesa nastanka pukotine pa sve do njenog stabilnog rasta do kritične duljine.

U prvoj fazi istraživanja primjenom inverznog modeliranja i numeričkih simulacija procesa deformiranja ispitnih uzoraka sa i bez geometrijskih diskontinuiteta provedena je identifikacija monotonih opterećenja. Pritom je najprije analizirano proporcionalno opterećenje uzoraka kod kojeg glavna naprezanja za vrijeme procesa deformiranja ne mijenjaju omjere niti smjer. Kao ulazni podaci za određivanje nepoznatih opterećenja korištene su izmjerene deformacije. Nadalje se je inverznim modeliranjem provela identifikacija složenijih opterećenja, kao što je slučaj neproporcionalnog opterećenja. Analizirani su slučajevi kombiniranih opterećenja koja u kombinaciji s rastom pukotine u komponenti uzrokuju složena stanja naprezanja gdje pravci glavnih naprezanja za vrijeme procesa deformiranja mijenjaju omjere i smjer. Ovdje je istražen utjecaj proporcionalnog i neproporcionalnog načina opterećivanja na optimalni položaj i orijentaciju tenzometarskih traka. Pritom je bio cilj istražiti mogu li optimalno postavljene tenzometarske trake za proporcionalno opterećenje poslužiti za određivanje i neproporcionalnog opterećenja u slučaju promijene načina opterećivanja. Osim toga, inverznim modeliranjem provela se je identifikacija cikličkog opterećenja s konstantnim amplitudama.

U zadnjoj fazi istraživanja, predloženi postupak verificiran je na realnoj konstrukcijskoj komponenti kao što je osovinski rukavac vjetroagregata. Za ovu komponentu bili su dostupni rezultati mjerenja iz monitoring sustava za pomake, deformacije, brzine i ubrzanja za karakteristične režime rada konstrukcije u stvarnim radnim uvjetima. Na temelju obrađenih rezultata mjerenja deformacija, numeričkog modeliranja rasta pukotina te primjenom metode inverznog modeliranja određen je optimalni broj, mjesto i orijentacija tenzometarskih mjernih traka koji za različite veličine i orijentacije pukotina omogućuje što točnije određivanje opterećenja. To je omogućilo ocjenu točnosti novo razvijenog postupka za optimizaciju

---

smještaja mjernih traka sustava za monitoring u usporedbi s postojećim monitoring sustavom vjetroagregata.

U sklopu eksperimentalnih istraživanja ispitane su epruvete za statička vlačna ispitivanja, epruvete sa zarezom za savijanje u tri točke (engl. *Single Edged Notched Bend*, SENB) te kompaktne vlačne epruvete (engl. *Compact Tension*, CT). Ispitne epruvete su bile izrađene iz krhkog materijala, kao što je termoplastični polimer polimetakrilat (PMMA) koji ima izrazito linearno-elastično ponašanje. Nakon jednoosnih statičkih vlačnih ispitivanja, provedena su ispitivanja loma na uzorcima sa zarezom za dobivanje ovisnosti sile i pomaka o duljini pukotine. Tijekom provedbe eksperimenata, raspodjela pomaka i deformacija na površini uzorka analizirana je optičkim mjernim sustavom za korelaciju digitalne slike (DIC) Aramis.

Nakon provedene verifikacije postupka inverznog modeliranja na numeričkim modelima s različitim geometrijama i vrstama opterećenja te na osovinskom rukavcu vjetroagregata mogu se sažeti sljedeći zaključci:

- Predloženi postupak inverznog modeliranja u kombinaciji s modelom faznog polja ili proširenom metodom konačnih elemenata (X-FEM) za simulaciju složenog rasta pukotina može se učinkovito koristiti za identifikaciju nepoznatih opterećenja konstrukcijske komponente s pukotinom tijekom cijelog vijeka trajanja komponente, što uključuje nastanak pukotine i njezin stabilan rast do kritične duljine. Prema saznanjima autora u ovom radu po prvi puta je primijenjena metoda faznog polja u kombinaciji s postupkom inverznog modeliranja za identifikaciju nepoznatih opterećenja konstrukcije.
- Kao što se navodi u literaturi, točnost određivanja opterećenja inverznom metodom ovisi o broju tenzometarskih traka, kao i o njihovom položaju i orijentaciji. Međutim, ovdje se pokazuje da za slučaj rasta pukotine u konstrukcijskoj komponenti ova točnost ovisi i o duljini pukotine, o složenosti putanje pukotine te o načinu opterećenja i samoj geometriji komponente. Na taj način, da bi se izbjegla loša uvjetovanost inverznog problema potrebno je odrediti optimalan broj, položaj i orijentaciju tenzometarskih mjernih traka koje pružaju što točnije procjene nepoznatih opterećenja za različite veličine i orijentacije pukotina na kritičnim mjestima na konstrukciji.
- Za razvoj i validaciju postupka inverznog modeliranja primijenjen je sustav za korelaciju digitalne slike (DIC). Kako se ovom optičkom metodom iz izmjerenih pomaka dobiva raspodjela deformacija na cijeloj plohi ispitnog uzorka to je omogućilo točnije definiranje broja, položaja i orijentacije tenzometarskih mjernih traka, u odnosu na slučaj kada se kao

ulazni podaci za inverzno modeliranje koriste deformacije izmjerene primjenom tenzometarskih traka na ograničenom broju mjesta na konstrukciji, što je većinom slučaj u literaturi.

- Verifikacija postupka inverznog modeliranja za slučaj proporcionalnog načina opterećivanja provedena je na primjerima epruvete bez pukotine (epruveta za savijanje u tri točke bez zareza), epruvete s jednostavnom putanjom pukotine (epruveta za savijanje u tri točke sa zarezom, kompaktna vlačna epruveta sa zarezom), epruvete sa složenom putanjom pukotine (epruveta sa zarezom opterećena na smik, L-epruveta) i epruvete sa mješovitim modom otvaranja pukotine (ploča s otvorom). Pokazano je da se nepoznata opterećenja za različite duljine pukotine mogu odrediti s velikom točnošću. Zaključeno je da broj, položaj i orijentacija tenzometarskih mjernih traka ima veliki utjecaj na izračun nepoznatog opterećenja inverznim postupkom posebno za slučaj većih pukotina koje imaju složenu putanju. U takvim slučajevima potreban je općenito veći broj mjernih traka s optimalno odabranim položajima i orijentacijama.
- Verifikacija postupka inverznog modeliranja za slučaj proporcionalnog, odnosno neproporcionalnog načina opterećivanja provedena je na primjeru grede sa zarezom za savijanje u tri, odnosno četiri točke. Pokazano je da se u analiziranom primjeru s dovoljnom točnošću može primijeniti optimalan broj, položaj i orijentacija mjernih traka određen za slučaj proporcionalnog opterećenja za procjenu primijenjenih sila i za slučaj neproporcionalnog opterećenja, mada se uvjeti opterećenja pritom mijenjaju, a u skladu s tim uslijed promjene pravaca i omjera glavnih naprezanja mijenja se i putanja pukotine. Pritom je zaključeno da su za razmatrani slučaj određivanja neproporcionalnog opterećenja potrebne minimalno četiri tenzometarske trake.
- Verifikacija postupka inverznog modeliranja za slučaj cikličkih opterećenja s konstantnim amplitudama provedena je na primjeru kompaktne vlačne epruvete sa zarezom. Pritom je zamorni rast pukotine u epruveti modeliran s nedavno razvijenim modelom faznog polja. Iz rezultata istraživanja vidljiv je trend povećanja greške u izračunatom cikličkom opterećenju s povećanjem broja ciklusa i duljine pukotine. Pritom je zaključeno da su za razmatrani slučaj određivanja cikličkog opterećenja dovoljne dvije tenzometarske trake kod manjeg broja ciklusa i manje duljine pukotine, ali za veće pukotine i veći broj ciklusa opterećenja pokazano je da su ipak potrebne tri tenzometarske trake.

- Primjenjivost predloženog postupka inverznog modeliranja na stvarne inženjerske konstrukcije pokazan je na primjeru osovinskog rukavca vjetroagregata koji ima složenu geometriju i izložen je složenim opterećenjima. Pokazano je da iskustveno odabrana mjesta tenzometarskih traka u fazi razvoja vjetroagregata mogu poslužiti za određivanje opterećenja za osovinski rukavac bez oštećenja, odnosno pukotina i to s relativno velikom točnošću. Međutim, u slučaju nastanka i rasta pukotine u osovinskom rukavcu greška izračunatog opterećenja inverznom metodom primjenom tenzometarskih traka na mjestima iskustveno definiranim u fazi razvoja vjetroagregata sve više se povećava kako pukotina raste, u odnosu na rješenja koja se dobivaju primjenom optimalno smještenih tenzometarskih traka određenih primjenom, u ovom radu predloženog postupka inverznog modeliranja. Na taj način, predloženi inverzni postupak omogućit će točnije definiranje sigurnih režima rada konstrukcije što je ulazni podatak za učinkoviti sustav upravljanja.

Primjenjivost predloženog postupka inverznog modeliranja u kombinaciji s modelom faznog polja za identifikaciju nepoznatih statičkih opterećenja konstrukcijske komponente s pukotinom potrebno je dodatno validirati eksperimentalnim istraživanjima u laboratorijskim uvjetima i realnim uvjetima, a što predstavlja smjernice budućih istraživanja. Konačno, treba naglasiti da predloženi postupak inverznog modeliranja predstavlja dobru osnovu za buduće proširenje na identifikaciju cikličkih opterećenja s varijabilnim amplitudama na kritičnim komponentama vjetroagregata. Osim toga, jedan od slijedećih koraka mogla bi biti implementacija inverznog pristupa praćenja rasta pukotina u monitoring sustav konstrukcije kako bi se mogao testirati u realnim radnim uvjetima. Samo proširenje postojećih monitoring sustava kako je već naglašeno dodatno bi podiglo razinu pouzdanosti konstrukcija, s pravovremenom detekcijom nastanka i rasta pukotina u konstrukcijskim komponentama.



## Literatura

- [1] A. Banerjee, B. Panigrahi, and G. Pohit, “Crack modelling and detection in Timoshenko FGM beam under transverse vibration using frequency contour and response surface model with GA,” *Nondestruct. Test. Eval.*, vol. 31, no. 2, pp. 142–164, 2016, doi: 10.1080/10589759.2015.1071812.
- [2] W. Fan and P. Qiao, “Vibration-based damage identification methods: A review and comparative study,” *Struct. Heal. Monit.*, vol. 10, no. 1, pp. 83–111, 2011, doi: 10.1177/1475921710365419.
- [3] S. Das, P. Saha, and S. K. Patro, “Vibration-based damage detection techniques used for health monitoring of structures: a review,” *J. Civ. Struct. Heal. Monit.*, vol. 6, no. 3, pp. 477–507, 2016, doi: 10.1007/s13349-016-0168-5.
- [4] P. R. A. Patil and S. L. Gombi, “Review on Determination of Forces using Inverse Techniques,” no. April, pp. 1–7, 2017, doi: 10.13140/RG.2.2.11850.88005.
- [5] M. Chajdi, A. Adri, K. El Bikri, and R. Benamar, “Linear and geometrically nonlinear free and forced vibrations of multi-cracked beams,” *Diagnostyka*, vol. 20, no. 1, pp. 111–125, 2019, doi: 10.29354/diag/103125.
- [6] S. Teidj, A. Khamlichi, and A. Driouach, “Identification of Beam Cracks by Solution of an Inverse Problem,” *Procedia Technol.*, vol. 22, no. October 2015, pp. 86–93, 2016, doi: 10.1016/j.protcy.2016.01.014.
- [7] R. Boukellif and A. Ricoeur, “Identification of crack positions and crack loading quantities from strain gauge data by inverse problem solution,” *Procedia Struct. Integr.*, vol. 13, pp. 85–90, 2018, doi: 10.1016/j.prostr.2018.12.015.
- [8] M. Martinez-Luengo, A. Kolios, and L. Wang, “Structural health monitoring of offshore wind turbines: A review through the Statistical Pattern Recognition Paradigm,” *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 64, pp. 91–105, 2016, doi: 10.1016/j.rser.2016.05.085.
- [9] J. Min, S. Park, C. B. Yun, C. G. Lee, and C. Lee, “Impedance-based structural health monitoring incorporating neural network technique for identification of damage type and severity,” *Eng. Struct.*, vol. 39, pp. 210–220, 2012, doi: 10.1016/j.engstruct.2012.01.012.
- [10] *An Introduction to the Theory of Piezoelectricity*. 2005.
- [11] J. Yang, *The Mechanics of Piezoelectric Structures*. 2010.
- [12] I. Giorgio, L. Galantucci, A. Della Corte, and D. Del Vescovo, “Piezo-

- electromechanical smart materials with distributed arrays of piezoelectric transducers: Current and upcoming applications,” *Int. J. Appl. Electromagn. Mech.*, vol. 47, no. 4, pp. 1051–1084, 2015, doi: 10.3233/JAE-140148.
- [13] R. C. Smith, *Smart Material Systems: Model development*. 2005.
- [14] E. Carrera, S. Brischetto, and P. Nali, *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*. 2011.
- [15] Y. Yan, X. Mao, X. Wang, X. Yu, and L. Fang, “Design and Implementation of a Structural Health Monitoring System for a Large Sea-Crossing Project with Bridges and Tunnel,” *Shock Vib.*, vol. 2019, 2019, doi: 10.1155/2019/2832089.
- [16] J. Lei, H. Wang, C. Zhang, T. Q. Bui, and F. Garcia-Sanchez, “Comparison of several BEM-based approaches in evaluating crack-tip field intensity factors in piezoelectric materials,” *Int. J. Fract.*, vol. 189, no. 1, pp. 111–120, 2014, doi: 10.1007/s10704-014-9964-2.
- [17] N. Zhong and W. Post, “Self-repair of structural and functional composites with intrinsically self-healing polymer matrices: A review,” *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol. 69. 2015, doi: 10.1016/j.compositesa.2014.11.028.
- [18] J. L. Daining Fang, *Fracture Mechanics of Piezoelectric and Ferroelectric Solids*. Tsinghua University Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013, 2013.
- [19] M. Kuna, “Fracture mechanics of piezoelectric materials - Where are we right now?,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 77, no. 2, 2010, doi: 10.1016/j.engfracmech.2009.03.016.
- [20] J. L. Pérez-Aparicio, H. Sosa, and R. Palma, “Numerical investigations of field-defect interactions in piezoelectric ceramics,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 44, no. 14–15, 2007, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.12.010.
- [21] M. Kuna, “Finite element analyses of cracks in piezoelectric structures: A survey,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 76, no. 11–12, 2006, doi: 10.1007/s00419-006-0059-z.
- [22] Z. C. H. W. M. Sladek J., Sladek V., “Crack analysis in piezoelectric solids with energetically consistent boundary conditions by the MLPG.,” *C. - Comput. Model. Eng. Sci.*, vol. 68, pp. 185–220, 2010.
- [23] D. K. Gupta, “Inverse Methods for Load Identification Augmented By Optimal Sensor Placement and Model Order Reduction,” University of Wisconsin Milwaukee, 2013.
- [24] N. J. Bertola, M. Papadopoulou, D. Vernay, and I. F. C. Smith, “Optimal multi-type sensor placement for structural identification by static-load testing,” *Sensors (Switzerland)*, vol. 17, no. 12, 2017, doi: 10.3390/s17122904.
- [25] D. K. Gupta and A. K. Dhingra, “Load reconstruction technique using D-optimal

- design and markov parameters,” *Shock Vib.*, vol. 2015, 2015, doi: 10.1155/2015/605695.
- [26] D. K. Gupta and A. K. Dhingra, “A reduced modal parameter based algorithm to estimate excitation forces from optimally placed accelerometers,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, vol. 25, no. 3, pp. 397–417, 2017, doi: 10.1080/17415977.2016.1169276.
- [27] T. Pahn, R. Rolfes, and J. Jonkman, “Inverse load calculation procedure for offshore wind turbines and application to a 5-MW wind turbine support structure,” *Wind Energy*, vol. 20, no. 7, 2017, doi: 10.1002/we.2088.
- [28] S. Xu, X. Deng, V. Tiwari, M. A. Sutton, W. L. Fourney, and D. Bretall, “An inverse approach for pressure load identification,” *Int. J. Impact Eng.*, vol. 37, no. 7, pp. 865–877, 2010, doi: 10.1016/j.ijimpeng.2009.10.007.
- [29] C. Wang and J. Gou, “Equivalent load identification algorithm based on least-squares in frequency domain,” *Appl. Mech. Mater.*, vol. 275–277, pp. 2677–2680, 2013, doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.275-277.2677.
- [30] T. Pahn, J. Jonkman, R. Rolfes, and A. Robertson, “Inverse load calculation of wind turbine support structures - A numerical verification using the comprehensive simulation code FAST,” 2012, doi: 10.2514/6.2012-1735.
- [31] J. Liu, X. Sun, X. Han, C. Jiang, and D. Yu, “A novel computational inverse technique for load identification using the shape function method of moving least square fitting,” *Comput. Struct.*, vol. 144, pp. 127–137, 2014, doi: 10.1016/j.compstruc.2014.08.002.
- [32] I. Kožar, “Relating structure and model,” in *Computational Methods in Applied Sciences*, 2016, vol. 41, doi: 10.1007/978-3-319-27996-1\_7.
- [33] A. Kazemi Amiri and C. Bucher, “A procedure for in situ wind load reconstruction from structural response only based on field testing data,” *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, vol. 167, no. June 2016, pp. 75–86, 2017, doi: 10.1016/j.jweia.2017.04.009.
- [34] K. Mendrok and Z. Dworakowski, “A review of methods for excitation force reconstruction,” *Diagnostyka*, vol. 20, no. 3, pp. 1–9, 2019, doi: 10.29354/diag/110241.
- [35] A. Kazemi Amiri, C. Bucher, and R. Hoeffler, “A practical procedure for inverse wind load reconstruction from different response types for large degrees of freedom structures,” 2016.
- [36] J. S. Hwang, A. Kareem, and H. Kim, “Wind load identification using wind tunnel test data by inverse analysis,” *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, vol. 99, no. 1, 2011, doi: 10.1016/j.jweia.2010.10.004.
- [37] E. Lourens, E. Reynders, G. De Roeck, G. Degrande, and G. Lombaert, “An

- augmented Kalman filter for force identification in structural dynamics,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 27, no. 1, 2012, doi: 10.1016/j.ymsp.2011.09.025.
- [38] S. S. Law, J. Q. Bu, and X. Q. Zhu, “Time-varying wind load identification from structural responses,” *Eng. Struct.*, vol. 27, no. 10, 2005, doi: 10.1016/j.engstruct.2005.05.007.
- [39] D. S. Sharma, M. J. Mungla, and K. H. Barad, “Vibration-based non-destructive technique to detect crack in multi-span beam,” *Nondestruct. Test. Eval.*, vol. 30, no. 4, 2015, doi: 10.1080/10589759.2015.1029475.
- [40] F. Liaghat, A. Khosravifard, M. R. Hematiyan, and T. Rabczuk, “An inverse procedure for identification of loads applied to a fractured component using a meshfree method,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 122, no. 7, 2021, doi: 10.1002/nme.6595.
- [41] T. Uhl, “Inverse problem in structural damage identification,” *Comput. Methods Mech.*, no. May 2011, pp. 9–12, 2011.
- [42] J. Ožbolt, Z. Tonković, and L. Lacković, “Microplane Model for Steel and Application on Static and Dynamic Fracture,” *J. Eng. Mech.*, vol. 142, no. 2, 2016, doi: 10.1061/(asce)em.1943-7889.0000993.
- [43] S. A. Masroor and L. W. Zachary, “Designing an all-purpose force transducer,” *Exp. Mech.*, vol. 31, no. 1, 1991, doi: 10.1007/BF02325720.
- [44] M. J. Wickham and C. J. Nachtsheim, “Integrating optimal experimental design into the design of a multi-axis load transducer,” *J. Manuf. Sci. Eng. Trans. ASME*, vol. 117, no. 3, 1995, doi: 10.1115/1.2804346.
- [45] A. K. Dhingra, T. G. Hunter, and D. K. Gupta, “Load recovery in components based on dynamic strain measurements,” *J. Vib. Acoust. Trans. ASME*, vol. 135, no. 5, 2013, doi: 10.1115/1.4024384.
- [46] A. J. Romppanen, E. Keskinen, J. Miettinen, and V. Järvinen, “Line load determination of press rolls by inverse sensing method,” 2005.
- [47] T. Nakamura, H. Igawa, and A. Kanda, “Inverse identification of continuously distributed loads using strain data,” in *Aerospace Science and Technology*, 2012, vol. 23, no. 1, doi: 10.1016/j.ast.2011.06.012.
- [48] C. W. Coates and P. Thamburaj, “Inverse method using finite strain measurements to determine flight load distribution functions,” *J. Aircr.*, vol. 45, no. 2, 2008, doi: 10.2514/1.21905.
- [49] S. L. Vazquez, A. Tessler, C. C. Quach, E. G. Cooper, J. Parks, and J. L. Spangler, “Structural Health Monitoring Using High-Density Fiber Optic Strain Sensor and

- Inverse Finite Element Methods,” *Nasa*, no. May, 2005.
- [50] A. G. Ramm, *Inverse problems: Mathematical and analytical techniques with applications to engineering*. 2005.
- [51] W. Menke, *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*. 2018.
- [52] J. Sorić, *Metoda konačnih elemenata*. Zagreb: Golden Marketing, 2004.
- [53] D. K. Gupta and A. K. Dhingra, “Input load identification from optimally placed strain gages using D-optimal design and model reduction,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 40, no. 2, 2013, doi: 10.1016/j.ymsp.2013.06.011.
- [54] C. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. 2000.
- [55] B. Li, D., Zhuge, H., & Wang, “The Principle and Technique of Experimental Strain Modal Analysis,” in *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1989, pp. 1285–1289.
- [56] W. F. Tsang, “Use of Dynamic Strain Measurements for the Modeling of Structures,” in *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1990, pp. 1246–1251.
- [57] G. Desanghere, “Identification of External Forces Based on Transferfunction Measurements: Frequency Response Method,” in *Proceedings of the 8th International Seminar on Modal Analysis*, 1983, pp. 1–28.
- [58] K. K. . Stevens, “Force identification problems—an overview,” 1987.
- [59] G. Genaro and D. A. Rade, “Input force identification in the time domain,” in *Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC*, 1998, vol. 1.
- [60] B. Qiu, M. Zhang, X. Li, X. Qu, and F. Tong, “Unknown impact force localisation and reconstruction in experimental plate structure using time-series analysis and pattern recognition,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 166, 2020, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2019.105231.
- [61] G. Desanghere and R. Snoeys, “INDIRECT IDENTIFICATION OF EXCITATION FORCES BY MODAL COORDINATE TRANSFORMATION.,” in *Proceedings of the International Modal Analysis Conference & Exhibit*, 1985, vol. 1.
- [62] Y. R. Kim and K. J. Kim, “Indirect input identification by modal filter technique,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 13, no. 6, 1999, doi: 10.1006/mssp.1999.1240.
- [63] A. D. Steltzner and D. C. Kammer, “Input force estimation using an inverse structural filter,” *Shock Vib. Dig.*, vol. 32, no. 1, 2000.
- [64] H. Inoue, J. J. Harrigan, and S. R. Reid, “Review of inverse analysis for indirect measurement of impact force,” *Appl. Mech. Rev.*, vol. 54, no. 6, 2001, doi: 10.1115/1.1420194.

- 
- [65] M. S. Allen and T. G. Carne, "Comparison of inverse structural filter (ISF) and Sum of Weighted Accelerations Technique (SWAT) time domain force identification methods," in *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 2006, vol. 5, doi: 10.2514/6.2006-1885.
- [66] J. Sanchez and H. Benaroya, "Review of force reconstruction techniques," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, 2014, doi: 10.1016/j.jsv.2014.02.025.
- [67] A. R. Khoei, *Extended Finite Element Method: Theory and Applications*. 2014.
- [68] T. Black and T. Belytschko, "Convergence of corrected derivative methods for second-order linear partial differential equations," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 44, no. 2, 1999, doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990120)44:2<177::AID-NME498>3.0.CO;2-1.
- [69] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 46, no. 1, 1999, doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J.
- [70] C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko, "Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 48, no. 12, 2000, doi: 10.1002/1097-0207(20000830)48:12<1741::AID-NME956>3.0.CO;2-L.
- [71] Dassault Systemes Simulia Corp, *Abaqus 6.14-1*. Providence, RI, USA, 2014.
- [72] K. Seleš, "NUMERICAL PHASE-FIELD MODELING OF DAMAGE IN HETEROGENEOUS MATERIALS," UNIVERSITY OF ZAGREB, 2020.
- [73] K. Seleš, T. Lesičar, Z. Tonković, and J. Sorić, "A residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 205, 2019, doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.09.027.
- [74] K. Seleš, "Abaqus code for a residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture." 2018, [Online]. Available: <https://data.mendeley.com/datasets/p77tsyrbx2/4>.
- [75] D. K. Gupta and A. Dhingra, "Inverse Methods for Load Identification Augmented By Optimal Sensor Placement and Model Order Reduction," no. December, p. 169, 2013.
- [76] Č. Predrag, "Eksperimentalno i numeričko modeliranje zamornog ponašanja nodularnog lijeva," 2012.
- [77] P. Čanžar, Z. Tonković, and J. Kodvanj, "Microstructure influence on fatigue behaviour of nodular cast iron," *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 556, 2012, doi: 10.1016/j.msea.2012.06.062.
-

- [78] L. Krstulović-Opara, M. Surjak, M. Vesenjāk, Z. Tonković, J. Kodvanj, and Ž. Domazet, "Comparison of infrared and 3D digital image correlation techniques applied for mechanical testing of materials," *Infrared Phys. Technol.*, vol. 73, 2015, doi: 10.1016/j.infrared.2015.09.014.
- [79] D. Voss, A. Dean, and D. Draguljic, *Design and Analysis of Experiments Springer Texts in Statistics*. 2017.
- [80] K. Hinkelmann, *Design and Analysis of Experiments*, vol. 3. 2012.
- [81] D. C. Montgomery, *Design and Analysis of Experiments Eighth Edition*. 2012.
- [82] G. C. R. Douglas C. Montgomery, *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 2014.
- [83] B. Winkler, G. Hofstetter, and G. Niederwanger, "Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part L J. Mater. Des. Appl.*, vol. 215, no. 2, 2001, doi: 10.1177/146442070121500202.
- [84] B. Gee, M. Parchei-Esfahani, and R. Gracie, "XFEM simulation of a mixed-mode fracture experiment in PMMA," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 229, 2020, doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.106945.
- [85] D. F. Marquis, G.B., Socie, "Multiaxial Fatigue," *Compr. Struct. Integr.*, vol. Vol 4, pp. 221–252, 2003.
- [86] J. C. Gálvez, M. Elices, G. V. Guinea, and J. Planas, "Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading," *Int. J. Fract.*, vol. 94, no. 3, 1998, doi: 10.1023/A:1007578814070.
- [87] P. M. A. Areias and T. Belytschko, "Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 63, no. 5, 2005, doi: 10.1002/nme.1305.
- [88] T. Kundu, *Fundamentals of fracture mechanics*. 2008.
- [89] R. I. Stephens, A. Fatemi, R. R. STEPHENS, and H. O. FUCHS, *Metal Fatigue in Engineering (second Edition)*, vol. 103, no. 4. 2001.
- [90] L. Lawson, "Metal Fatigue," <http://www.larrylawson.net/fatigue.htm>, 2014.  
<http://www.larrylawson.net/fatigue.htm>.
- [91] M. Husnjak, *Mehanika loma – Bilješke s predavanja*. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2009.
- [92] J. Schijve, *Fatigue of structures and materials*. 2009.
- [93] C. Bathias and A. Pineau, *Fatigue of Materials and Structures: Application to Design and Damage*. 2013.

- 
- [94] J. Barsom and S. Rolfe, *Fracture and Fatigue Control in Structures: Applications of Fracture Mechanics, Third Edition*. 1999.
- [95] K. A. Macdonald, *Fracture and fatigue of welded joints and structures*. 2011.
- [96] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, Fourth Edition*, vol. 76. 2017.
- [97] C. Amzallag, J. P. Gerey, J. L. Robert, and J. Bahuaud, “Standardization of the rainflow counting method for fatigue analysis,” *Int. J. Fatigue*, vol. 16, no. 4, 1994, doi: 10.1016/0142-1123(94)90343-3.
- [98] K. Al-Adily, M. Abdulrazzaq, and M. A. Hassan, “Fatigue life prediction under variable loading using rainflow counting method,” *J. Mech. Eng. Res. Dev.*, vol. 44, no. 5, 2021.
- [99] G. Hassan, “GH Bladed Theory manual.” 2014.
- [100] J. M. . M. L. B. J. Jonkman, “FAST User’s Guide,” 2005.
- [101] IEC, *IEC 61400-1 Windturbines Part 1: Design requirements*. 1998.
- [102] Germanischer Lloyd, *Guidline for the Certification of WindTurbines, IV Rules and Regulations*,. 2010.
- [103] Eurocode, *Eurocode 3 Design of steel structures*. 1993.
- [104] Č. P. Lesičar T., Tonković Z., Sorić J., “Multiscale modelling of deformation processes of nodular cast iron,” 2012.
- [105] F. Rabold and M. Kuna, “Cell model simulation of void growth in nodular cast iron under cyclic loading,” in *Computational Materials Science*, 2005, vol. 32, no. 3–4, doi: 10.1016/j.commatsci.2004.09.016.
- [106] L. Collini, “Micromechanical modeling of the elasto-plastic behavior of heterogeneous nodular cast iron,” *Universita’ Degli Studi di Parma*, 2004.
- [107] J. Herrmann, T. Rauert, P. Dalhoff, and M. Sander, “Fatigue and fracture mechanical behaviour of a wind turbine rotor shaft made of cast iron and forged steel,” in *Procedia Structural Integrity*, 2016, vol. 2, doi: 10.1016/j.prostr.2016.06.369.
- [108] H. J. Sutherland, “On the Fatigue Analysis of Wind Turbines,” 1999. doi: AC04-94AL85000.
- [109] P. Hübner, H. Schlosser, G. Pusch, and H. Biermann, “Load history effects in ductile cast iron for wind turbine components,” *Int. J. Fatigue*, vol. 29, no. 9–11, 2007, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2007.01.012.
- [110] P. Čanžar and Z. Tonković, “Nodular cast iron - Fatigue crack measurement and simulation,” in *Key Engineering Materials*, 2014, vol. 577–578, doi:
-



10.4028/www.scientific.net/KEM.577-578.473.

- [111] P. Čanžar, Z. Tonković, A. Bakić, and J. Kodvanj, “Experimental and numerical investigation of fatigue behaviour of nodular cast iron,” in *Key Engineering Materials*, 2012, vol. 488–489, doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.488-489.182.

## ŽIVOTOPIS

Ivica Cukor rođen je 6. studenog 1983. godine u Zagrebu, gdje je završio osnovnu školu „Ive Andrića“ i I. tehničku školu Nikola Tesla. Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu upisuje 2002. godine, a diplomirao je 2008. godine na Konstrukcijskom smjeru, usmjerenje Strojarske konstrukcije. Tijekom studija bio je stipendist tvrtke Končar-KET d.d., stoga je i odabrana tema diplomskog rada bila Proračun čvrstoće i stabilnosti stupa vjetroagregata.

Nakon završetka studija, 2009. godine zapošljava se u tvrtki Končar – KET d.d., kao projektant vjetroagregata, gdje radi do kraja 2015. Od 2016. radi u tvrtki Weidmann Izo-produ kao dizajner izolacijskih sustava na provodnim dijelovima transformatora. Dio radnog vremena provodi u Švicarskoj, kao dio projekta preseljenju dijela odjela dizajna, razvoja Weidmanna iz Švicarske u Hrvatsku.

Godine 2010. upisuje doktorske studije na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu, pod mentorstvom profesora Zdenka Tonkovića. Kao djelatnik tvrtke Končar aktivno je sudjelovao u istraživanjima u okviru IRI projekta "Center of Excellence for Structural Health", 2013. - 2016., financiranog iz EU sredstava (ERDF) u suradnji s Fakultetom elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, Građevinskim fakultetom Sveučilišta u Rijeci i Končar-Institutom za elektrotehniku iz Zagreba. Doktorski rad je izradio u sklopu IRI projekta "Zaštita cjelovitosti konstrukcija u energetici i transportu", 2020.-2023., KK.01.1.1.04.0056, financiranog iz EU sredstava (ESIFa).