

Aerodinamička svojstva NACA laminarnih aeroprofila

Ćorić, Domagoj

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:275562>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-14**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Aerodinamička svojstva NACA laminarnih aeroprofila

Mentor:
doc.dr.sc.Dubravko Matijašević

Student:
Domagoj Čorić

ZAGREB, 2021.



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: Domagoj Ćorić

Mat. br.: 0035210708

Naslov rada na
hrvatskom jeziku: **Aerodinamička svojstva NACA laminarnih aeroprofila**

Naslov rada na
engleskom jeziku: **Aerodynamic properties of NACA laminar airfoils**

Opis zadatka:

Aeroprofil iz NACA laminarne serije primjer su dobrog aerodinamičkog oblikovanja. Aerodinamička svojstva koja prikazuju pri Reynoldsovima brojevima za koje su namijenjeni, svrstavaju se među najbolje aeroprofile za primjenu tipičnu za generalnu avijaciju. Razlog tome je što pokazuju karakteristično smanjenje otpora u nominalnom režimu rada (tzv. „drag bucket“). Inherentni problem pri analizi predmetnih aeroprofila je što se to smanjenje otpora, oko koeficijenta uzgona za koji su konstruirani, dogodi kao posljedica odgađanja prelaska strujanja u turbulentni režim na relativno visoke Reynoldsove brojeve, a modeliranje turbulentnog strujanja težak je problem, čak i oko aerodinamički oblikovanih tijela.

U ovom radu potrebno je numerički odrediti aerodinamička svojstva nekoliko aeroprofila iz laminarne NACA serije, te ispitati postojanje veze nominalnog koeficijenta uzgona s koeficijentom uzgona koji se ostvaruje pri idealnom napadnom kutu. U tu svrhu, potrebno je usvojiti numeričke metode koje omogućuju procjenu aerodinamičkih svojstava laminarnih aeroprofila te pomoću usvojenih metoda odrediti ih za neke odabrane profile iz predmetne serije. S druge strane, u svrhu određivanja idealnog napadnog kuta, potrebno je debele aeroprofile svesti na srednju liniju. Numeričke rezultate aerodinamičkih svojstava odabranih profila usporediti s dostupnim rezultatima pokusa u naravi.

U okviru rada potrebno je prezentirati problem i korištene metode, komentirati dobivene rezultate te navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
30. studenoga 2020.

Datum predaje rada:
1. rok: 18 veljače 2021.
2. rok (izvanredni): 5. srpnja 2021.
3. rok: 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 22.2. – 26.2.2021.
2. rok (izvanredni): 9.7.2021.
3. rok: 27.9. – 1.10.2021.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Dr.sc. Dubravko Matijašević

Prof. dr.sc. Milan Vrdoljak

*Zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc.
Dubravku Matijaševiću na stručnoj pomoći,
strpljenju i prenesenom znanju pri izradi
ovog završnog rada.*

Sadržaj

Sadržaj	IV
Sažetak	VI
Summary	VII
Popis oznaka	VIII
Popis slika	X
Popis tablica	XII
1. Uvod	1
2. Matematički model	2
2.1. Aeroprofil NACA serije 6	2
2.1.1. Nomenklatura	2
2.1.2. Srednja linija	3
2.1.3. Distribucija debljine	5
2.2. Metoda konačnih volumena	8
2.2.1. Numeričke sheme	11
2.3. 2D panelna metoda	12
2.4. Interpolacija radijalnim baznim funkcijama (RBFi)	15
2.4.1. Tipovi radijalnih baznih funkcija	16

2.5. Linearna regresija	20
2.5.1. Metoda najmanjih kvadrata	21
2.5.2. Koeficijent determinacije r^2	23
2.5.3. Višestruka linearna regresija i polinomijalna linearna regresija . .	23
3. Rezultati	25
3.1. Metoda konačnih volumena	25
3.1.1. Postavke proračuna	25
3.1.2. Rezultati	25
3.2. XFOIL	27
3.2.1. Postavke proračuna	27
3.2.2. Rezultati	29
3.3. Implementacija RBFi i linearne regresije	34
3.3.1. RBFi	35
3.3.2. Linearna regresija	40
4. Zaključak	45
Literatura	45

Sažetak

U ovom radu prikazana je numerička analiza NACA laminarnih aeroprofila. Svođenjem debelih aeroprofila na srednju liniju pomoću teorije tankih aeroprofila određena je vrijednost idealnog napadnog kuta. Zatim, koristeći metodu kontrolnih volumena i 2D panelnu metodu implementiranu u XFOIL-u, određena su aerodinamička svojstva ispitnih aeroprofila s naglaskom na *drag bucket*. Konačno, numerička rješenja svojstava aeroprofila uspoređena su s dostupnim eksperimentima, a interpolacijom radijalnim baznim funkcijama i polinomijalnom linearnom regresijom obrađeni su prikupljeni podaci.

Ključne riječi: NACA laminarni aeroprofili, idealni napadni kut, metoda konačnih volumena, panelna metoda, drag bucket, interpolacija radijalnim baznim funkcijama, polinomijalna linearna regresija

Summary

This thesis focuses on numerical analysis of NACA laminar airfoils. First of all, thick airfoils are reduced to main line by thin airfoil theory in order to analytically determine the ideal angle of attack. Aerodynamic properties of airfoils are determined using Finite Volume Method and 2D panel method implemented in XFOIL with emphasis on *drag bucket* analysis. Finally, numerical solutions of aerodynamic properties are compared to available measurements and gathered data is processed by means of radial basis function interpolation and polynomial linear regression.

Keywords: NACA laminar airfoils, ideal angle of attack, Finite Volume Method, panel method, drag bucket, radial basis function interpolation, polynomial linear regression

Popis oznaka

ae^ψ	radijalna koordinata funkcije z'	5
α_0	napadni kut sekcije, [°]	7
α_i	idealni napadni kut, [°]	4
C	koeficijent proporcionalnosti	7
C_d	koeficijent otpora	27
c_l	koeficijent uzgona	3
c_{l_i}	nominalni koeficijent uzgona aeroprofila	4
C_l	koeficijent uzgona	29
DB	širina <i>drag bucketa</i>	38
D_ϕ	Difuzivnost svojstava ϕ , [kg/ms]	8
d	dimenzija prostora	18
ϵ	parametar skaliranja radijalnog kernela	16
ϵ_{TE}	vrijednost funkcije ϵ na izlaznom bridu	7
γ	gustoća vrtloga, [m ² /s]	12
γ_{TE}	gustoća vrtloga panela izlaznoga brida, [m ² /s]	13
θ	vektorski kut, [rad]	12
Ω_P	kontrolni volumen, [m ³]	8
ψ_0	prosječna vrijednost ψ	7
Ψ	strujna funkcija	12
r^2	koeficijent determinacije	23
Re	Reynoldsov broj	28
σ	jakost izvora, [m ² /s]	12

σ_{TE}	jakost izvora panela izlaznoga brida, [m ² /s]	13
SSE	eng. <i>Sum of Squares of Errors</i>	22
SSR	eng. <i>Sum of Squares due to Regression</i>	23
SST	eng. <i>Sum of Squares Total</i>	23
\vec{s}	jedinični vektor koji presijeca kut izlaznog brida	13
Θ	kutna koordinata funkcije z'	5
\vec{t}	jedinični vektor duž panela izlaznog brida	13
u_∞	x-komponenta brzine neporemećene struje, [m/s]	12
v	lokalna brzina opstrujavanja, [m/s]	7
V	brzina neporemećene struje, [m/s]	7
v_∞	y-komponenta brzine neporemećene struje, [m/s]	12
y_c	ordinata aeroprofila	3
y^+	bezdimenzijska udaljenost ćelije	25
z	kompleksna funkcija vezana za kružnicu	5
z'	kompleksna funkcija vezana za proizvoljnu kružnicu	5

Popis slika

2.1	Korišteno preslikavanje za dobivanje proizvoljnog aeroprofila i rasporeda tlaka	6
2.2	Vrijednosti funkcija ϵ i ψ u ovisnosti o ϕ za <i>NACA</i> 64 ₃ – 018	8
2.3	Geometrija heksaedarskog elemenata	10
2.4	Geometrija panela aeroprofila i vrtložnog traga s detaljem izlaznog ruba	12
2.5	Lokalne koordinate panela	14
2.6	Prikaz najpopularnijih RBF u ovisnosti o parametru ϵ	17
2.7	Wendlandove funkcije C^0, C^2, C^4 za $d \leq 3$	19
2.8	Primjer linearne regresije za zadani skup podataka	21
2.9	Primjer višestruke linearne regresije koja predviđa vokalni razvoj djece u ovisnosti o starosti	24
3.1	Usporedba polare dobivene eksperimentalno i <i>openFoam-om</i> za aeroprofil <i>NACA</i> 65 – 206	26
3.2	Usporedba polare dobivene eksperimentalno i <i>openFoam-om</i> za aeroprofil <i>NACA</i> 65 ₄ – 021	27
3.3	Raspored panela na različitim aeroprofilima	28
3.4	Polara <i>NACA</i> 65 – 006	29
3.5	Polara <i>NACA</i> 65 – 009	30
3.6	Polara <i>NACA</i> 65 ₁ – 012	30
3.7	Polara <i>NACA</i> 65 ₂ – 015	31
3.8	Polara <i>NACA</i> 65 ₄ – 021	31

3.9	Polara NACA 65 – 206	32
3.10	Polara NACA 65 ₁ – 212, $a = 0.6$	32
3.11	Polara NACA 65 – 215	33
3.12	Polara NACA 65 – 410	33
3.13	Polara NACA 65,3 – 618	34
3.14	Koeficijenti otpora aeroprofila za $C_l = 0$	42
3.15	Parametri $\frac{DB}{C_d}$ aeroprofila za $C_l = 0$	42
3.16	Koeficijenti otpora aeroprofila za $C_l = 0, 2, 3$	43
3.17	Parametri $\frac{DB}{C_d}$ aeroprofila za $C_l = 0, 2, 3$	44

Popis tablica

2.1	Tablica odnosa vrste srednje linije a i osnovnog idealnog napadnog kuta α_i funkcije za $c_l = 1$	4
2.2	Tablica koeficijenata polinoma za dobivanje faktora proporcionalnosti C	7
2.3	Tablica najpopularnijih radijalnih baznih funkcija	16
2.4	Wendlandove radijalne bazne funkcije [1]	19
3.1	Skup podataka za interpolaciju	36
3.2	Filtrirani skup podataka za interpolaciju	37
3.3	Greška interpolacije	38
3.4	Interpolanti širine DB za polinom 3.1	38
3.5	Dvostruko filtrirani skup podataka za interpolaciju	39
3.6	Greška interpolacije dvostruko filtriranog skupa podataka	39
3.7	Interpolanti širine DB za dvostruko filtrirani skup podataka	39
3.8	Interpolanti širine DB za polinom 3.2	40
3.9	Koeficijenti determinacije nakon predviđanja	40
3.10	Predviđene vrijednosti DB linearnom regresijom	41
3.11	Koeficijenti determinacije nakon predviđanja za 13 aeroprofila	41

1 | Uvod

Tijekom 30-ih i 40-ih godina prošlog stoljeća vodila su se značajna istraživanja u području aerodinamike. Koeficijente niskog otpora tadašnjih letjelica karakterizirao je pretežito turbulentni granični sloj, a kako su koeficijenti otpora trenja veći kod turbulentnog strujanja od koeficijenta uslijed laminarnog strujanja, pretpostavljalo se da bi se laminarnim opstrujavanjem značajno smanjio otpor [2]. Na temelju toga javljaju se prvi laminarni aeroprofil.

Laminarna serija NACA aeroprofila projektirana je tako da minimizira otpor trenja, pri Reynoldsovima brojevima koji se sreću u generalnoj avijaciji, odnosno projektirana je da radi pod idealnim napadnim kutem α_i . U 3D prostoru to znači da će tipično, dobro projektirana letjelica imati određeni dijapazon oko idealnog napadnog kuta gdje se može naći prije nego joj sekcije dožive "skok u viskoznom otporu". Takvo svojstvo naziva se još i *drag bucket*.

Različiti problemi javljaju se prilikom spajanja prednjeg brida aeroprofila s krivuljama koje opisuju gornjaku i donjaku. Povijesno gledano, to se rješavalo na nekoliko različitih načina [3] [4] [5].

U praksi, analiza *drag bucketa* rijetko je pokriven problem, no njegovom uspješnom evaluacijom dobivamo sjajan uvid u ponašanje laminarnih aeroprofila. U tu svrhu primjenjuju se numerički proračuni, a ideja je pokušati razviti metodu za ocjenu laminarnih aeroprofila NACA serije. Tu nastupaju analize podataka radijalnim baznim funkcijama (*RBF*) te regresijske metode koje bi mogle pomoći pri pronalaženju svojstava laminarnih aeroprofila za koja ne posjedujemo eksperimentalna mjerenja.

2 Matematički model

2.1. Aeroprofil NACA serije 6

Svi aeroprofilu bilo koje NACA serije dobivaju se kombinacijom srednje linije i distribucijom debljine okomito na srednju liniju. Kompletna geometrija i detaljan postupak dobivanja koordinata aeroprofila opisani su u [3].

2.1.1. Nomenklatura

Aeroprofilu NACA serije 6 najčešće su opisani pomoću 6 brojeva te dodatkom koji predstavlja tip korištene srednje linije. Različite podserije navedenih aeroprofila različito se označavaju te će se u nastavku pokriti neke od najčešćih nomenklatura.

Za prvi primjer uzima se aeroprofil *NACA 65,3-418*, $a=0,5$. Prva oznaka "6" označava seriju NACA aeroprofila. Znamenka "5" označava položaj minimalnog tlaka, u desetinama tetive iza prednjeg brida, za jednostavnu simetričnu sekciju pri nultom uzgonu. Broj "3", nakon zareza, predstavlja raspon povoljnog otpora iznad i ispod nominalnog koeficijenta uzgona C_l u desetinama.. Znamenka "4", nakon crtice, predstavlja nazivni koeficijent uzgona C_l u desetinama. Posljednje dvije znamenke, koje su u ovom slučaju "18", predstavlja debljinu aeroprofila u postotku tetive. Dodatak "a=0,5" predstavlja oblik korištene srednje linije. Kada uz osnovnih 6 znamenki ne postoji dodatak za srednju liniju, pretpostavlja se da se koristi oblik srednje linije $a=1,0$.

U najčešćim slučajevima koriste se aeroprofilu poput *NACA 65₃-418*, $a=0,5$ koji imaju jednostavan odnos između konformnog preslikavanja za različite debljine pri čemu

položaj minimalnog tlaka ostaje isti. Takvi aeroprofil razlikuju se od prije navedenih po broju koji se nalazi u indeksu, a on označava područje niskog otpora, odnosno platô u polari aeroprofila. U slučaju takvih tipova aeroprofila, ali debljine manje od 12 % tetive, broj koji označava raspon niskog otpora bio bi manji od 1. Da bi se izbjeglo pisanje razlomaka u indeksu, dogovoreno je izostavljanje samog indeksa. Primjer jednog aeroprofila debljine 0.10 tetive je *NACA 65-410*.

Aeroprofil čija je distribucija debljine dobivena linearnim skaliranjem ordinata jedne originalne distribucije označavaju se kao *NACA 65(318)-417*, $a=0,5$. Prva znamenka u zagradi označava raspon niskog otpora, dok druga znamenka predstavlja debljinu originalne distribucije debljine, u desetinama tetive. Ostale znamenke ostaju nepromijenjene.

2.1.2. Srednja linija

Oblici srednjih linija u NACA 6 aeroprofilima, kada su opstrujavani pod idealnim napadnim kutem, rezultiraju uniformnim rasporedom opterećenja duž tetive, od prednjeg brida do položaja $\frac{x}{c} = a$, nakon čega dolazi do linearnog smanjivanja opterećenja sve do izlaznog brida [3].

Ordinate srednje linije dobivaju se prema izrazima [6]

$$y_c = \frac{c_l}{2\pi(a+b)} \left[\frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{2}(a-x)^2 \ln|a-x| - \frac{1}{2}(b-x)^2 \ln|b-x| \right) + \frac{1}{4}(b-x)^2 - \frac{1}{4}(a-x)^2 \right] - x \ln(x) + g - hx \quad (2.1)$$

gdje su $b \in [0, 1]$ te

$$g = -\frac{1}{b-a} \left[a^2 \left(\frac{1}{2} \ln(a) - \frac{1}{4} \right) - b^2 \left(\frac{1}{2} \ln(b) - \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$h = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2}(1-a)^2 \ln(1-a) - \frac{1}{2}(1-b)^2 \ln(1-b) + \frac{1}{4}(1-b)^2 - \frac{1}{4}(1-a)^2 \right] + g$$

Najčešće korišteni oblici srednje linije su: $a = 0,0$, $a = 0,1$, $a = 0,2$, $a = 0,3$, $a = 0,4$, $a = 0,5$, $a = 0,6$, $a = 0,7$, $a = 0,8$, $a = 0,9$ i $a = 1,0$, dok su vrijednosti $b = 1$.

Idealni napadni kut, α_i , prema teoriji tankih aeroprofila [4], koji odgovara nazivnom

koeficijentu uzgona za NACA laminarnu seriju definiran je izrazom [3]

$$\alpha_i = -h \frac{c_{l_i}}{2\pi(a+1)} \quad (2.2)$$

gdje je c_{l_i} nominalni koeficijent uzgona aeroprofila.

Ako se pretpostavi da su vrijednosti b i c_{l_i} jednaki jedinici, tada izraz (2.2) ovisi samo o vrsti srednje linije a i on postaje konstantan za svaku vrstu srednje linije, neovisno o nominalnom koeficijentu uzgona aeroprofila c_{l_i} . Za sve aeroprofile laminarne serije vrijedi $c_{l_i} = c_l(\alpha_i)$, stoga će se u daljnjem tekstu koristiti c_{l_i} . Kako bi se dobio pravi idealni napadni kut aeroprofila, osnovnu vrijednost kuta koji je vezan jedino za srednju liniju potrebno je pomnožiti s nominalnim koeficijentom uzgona c_{l_i} . Osnovne vrijednosti idealnog napadnog kuta u ovisnosti samo o vrsti srednje linije a prikazuje se tablicom 2.1.

VRSTA SREDNJE LINIJE a	VRIJEDNOST IDEALNOG NAPADNOG KUTA α_i
$a = 0.0$	4.56°
$a = 0.1$	4.43°
$a = 0.2$	4.17°
$a = 0.3$	3.84°
$a = 0.4$	3.46°
$a = 0.5$	3.04°
$a = 0.6$	2.58°
$a = 0.7$	2.09°
$a = 0.8$	1.54°
$a = 0.9$	0.90°
$a = 1.0$	0.00°

Tablica 2.1: Tablica odnosa vrste srednje linije a i osnovnog idealnog napadnog kuta α_i funkcije za $c_l = 1$

2.1.3. Distribucija debljine

Kao što je objašnjeno u [3], simetrične distribucije debljine NACA serija 6 i 7 dobivene su pomoću konformnog preslikavanja metodom Theodorsena [4]. Pomoću metode Theodorsena strujanje oko kružnice se nizom konformnih preslikavanja pretvori u strujanje oko proizvoljnog aeroprofila.

Središte kružnice oko koje je originalno izračunato strujanje nalazi se u ishodištu te ima radijus ae^{ψ_0} . Jednadžba kružnice u kompleksnoj ravnini je

$$z = ae^{\psi_0 + i\phi} \quad (2.3)$$

Prava kružnica preslikava se u određenu, koja je samo nalik kružnoj krivulji, jednadžba

$$\frac{z'}{z} = e^{(\psi - \psi_0 + i(\theta - \psi))} \quad (2.4)$$

gdje je jednadžba kružnice slične krivulje

$$z' = ae^{\psi + i\theta} \quad (2.5)$$

Kako bi preslikavanje (2.4) bilo konformno, vrijednost $(\theta - \phi) = -\epsilon$ mora biti konjugirano kompleksna funkcija od $(\psi - \psi_0)$ [4]. Ova tvrdnja može se matematički prikazati, ako se ϵ zapiše pomoću Fourierovog reda

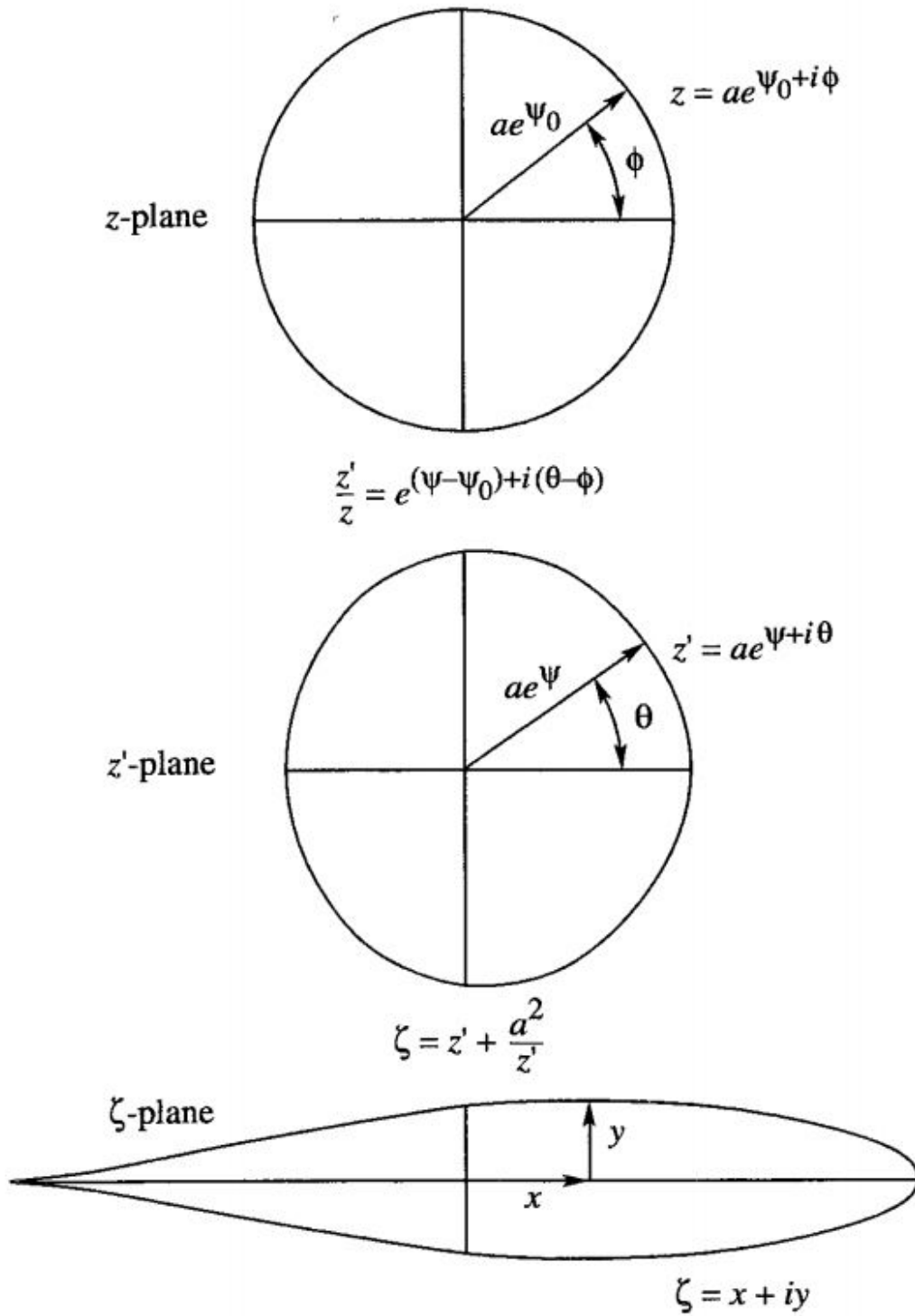
$$\epsilon = \sum_1^{\infty} A_n \sin(n\phi) - \sum_1^{\infty} B_n \cos(n\phi) \quad (2.6)$$

pa je tada $(\psi - \psi_0)$ oblika

$$(\psi - \psi_0) = \sum_1^{\infty} A_n \cos(n\phi) + \sum_1^{\infty} B_n \sin(n\phi) \quad (2.7)$$

Ova relacija pokazuje da za zadani $\epsilon(\phi)$, vrijednost $(\psi - \psi_0)$ može biti dobivena kao funkcija od ϕ [7]. Konačno preslikavanje iz strujanja oko približne kružnice u traženi proizvoljni aeroprofil dano je preslikavanjem Žukovskog

$$\zeta = z' + \frac{a^2}{z'} \quad (2.8)$$



Slika 2.1: Korišteno preslikavanje za dobivanje proizvoljnog aeroprofila i rasporeda tlaka [4].

Koordinate aeroprofila x i y su realni i imaginarni dijelovi od ζ

$$x = 2a \cosh(\psi) \cos(\theta) \quad (2.9)$$

$$y = 2a \sinh(\psi) \sin(\theta) \quad (2.10)$$

Tako je distribucija brzine u ovisnosti o parametrima aeroprofila ϵ i ψ dana sa

$$\frac{v}{V} = \frac{[\sin(\alpha_0 + \phi) + \sin(\alpha_0 + \epsilon_{TE})]e^{\psi_0}}{\sqrt{(\sinh^2(\psi) + \sin^2(\theta))[(1 - \frac{d\epsilon}{d\psi})^2 + (\frac{d\psi}{d\phi})^2]}} \quad (2.11)$$

Dodatnim istraživanjima pokazano je da svaka podserija NACA serije 6 ima vlastite osnovne vrijednosti funkcija ψ i ϵ [3] koje su dane [8]. Tada se bilo koji aeroprofil podserije može dobiti skaliranjem osnovnih funkcija konstantnim faktorom koji ovisi samo o debljini aeroprofila [8]. Taj faktor je oblika

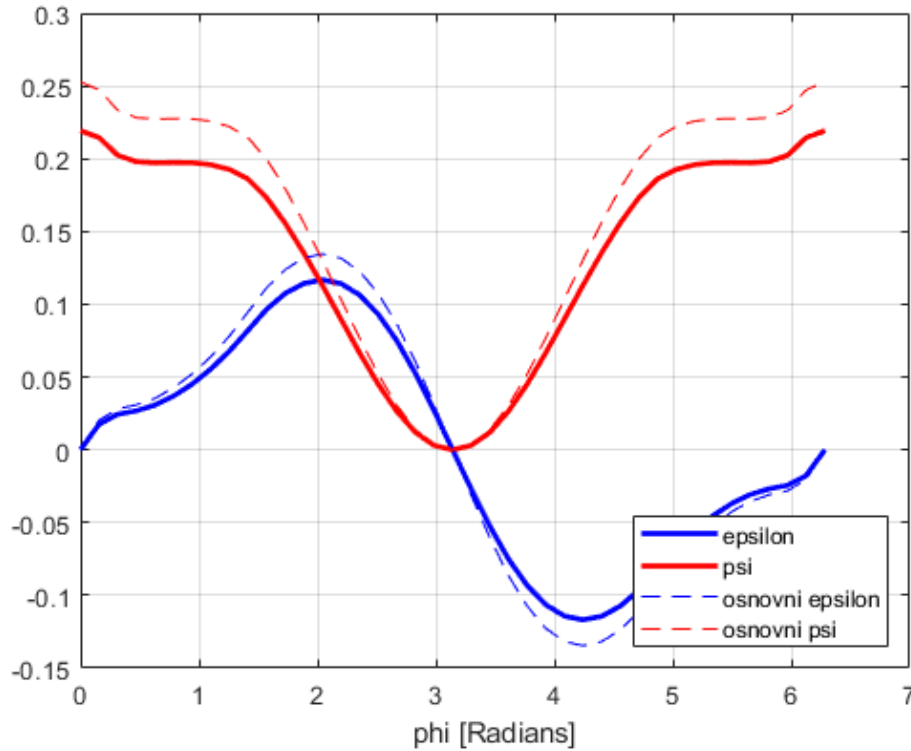
$$C = K_1(t/c) + K_2(t/c)^2 + K_3(t/c)^3 + K_4(t/c)^4 \quad (2.12)$$

pri čemu su koeficijenti za svaku podseriju dani tablicom 2.2

Podserija NACA serije 6	K_1	K_2	K_3	K_4
63	8.1827700	1.3776209	-0.0928517	7.5942563
64	4.6535511	1.0380630	-1.5041794	4.7882784
65	6.5718716	0.4937629	0.7319794	1.9491474
66	6.7581414	0.1925377	0.8128826	0.852090
67	6.6272890	0.0989966	0.9675977	0.9053758

Tablica 2.2: Tablica koeficijenata polinoma za dobivanje faktora proporcionalnosti C [8]

Za primjer se uzima aeroprofil $NACA\ 64_3 - 018$. Vrijednosti generalnih funkcija ϵ, ψ za samu podseriju 4, kao i za točno navedeni aeroprofil prikazani su slikama 2.2. Analogno, mogu se prikazati funkcije koje definiraju debljinu i za proizvoljne aeroprofile ostalih podserija.



Slika 2.2: Vrijednosti funkcija ϵ i ψ u ovisnosti o ϕ za *NACA 64₃ – 018* [8].

2.2. Metoda konačnih volumena

Metoda konačnih volumena integralna je metoda za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju polja fizikalnih veličina. Temelji se na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednadžbi promatranog modela po diskretiziranim područjima volumena promatrane domene koji se nazivaju konačni volumeni [9]. Integralna jednadžba glasi

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \rho \phi dV = - \int_{\partial\Omega_P} \left(\rho \phi v_j - D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Omega_P} S_\phi dV \quad (2.13)$$

Član D_ϕ predstavlja difuzivnost svojstva ϕ , dok Ω_P označava svaki proračunski volumen za kojeg se jednadžba rješava. U ovom slučaju, ϕ predstavlja skalarnu fizikalnu veličinu, a njeni članovi su redom:

- nestacionarni član
- konvekcijski član
- difuzijski član
- izvorski član

Jednadžba 2.13 diskretizira se na prostorne integrale pomoću integralnog teorema o srednjoj vrijednosti

$$\int_{\Omega_P} \phi d\Omega = \bar{\phi} \Omega_P \quad (2.14)$$

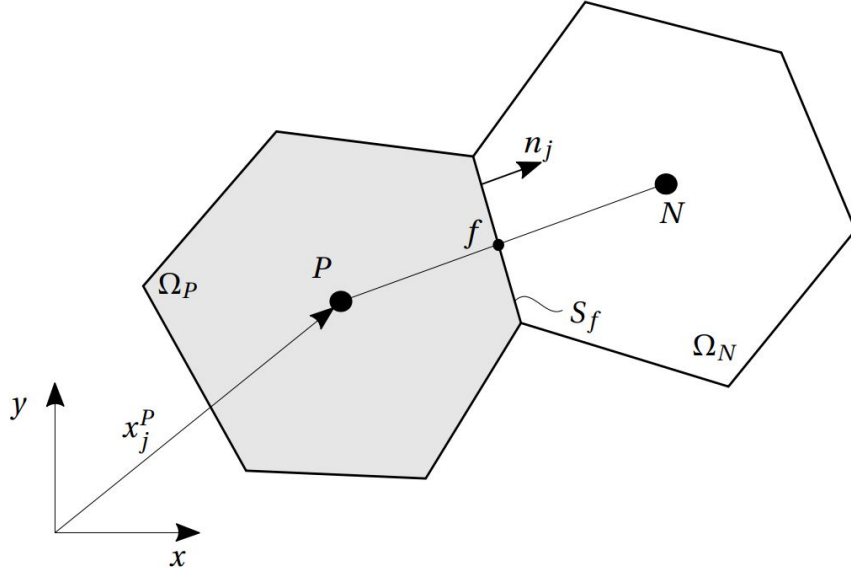
pri čemu član $\bar{\phi}$ predstavlja srednju vrijednost veličine ϕ u volumenu Ω_P . Raspodjela veličine ϕ u volumenu aproksimira se Taylorovim razvojem u red oko čvora P . U osnovnoj metodi konačnih volumena svi članovi reda višeg od linearnog se odbacuju, a čvor i težište volumena koincidiraju te tada vrijedi relacija

$$\phi_P = \bar{\phi} \quad (2.15)$$

koja nakon što se uvrsti u 2.14 daje aproksimacijski izraz

$$\int_{\Omega_P} \phi d\Omega = \phi_P \Omega_P \quad (2.16)$$

Greška stvorena aproksimacijom 2.16 bit će manja što je proračunska mreža finije raspoređena. Egazktno rješenje može se dobiti osnovnom metodom samo ako je raspodjela veličine ϕ doista linearna.



Slika 2.3: Geometrija heksaedarskog elemenata [9].

Nadalje, prema 2.14, ukupni protok veličine ϕ kroz stranicu konačnog volumena S_f sastoji se od konvektivnog i difuzijskog člana te on ima oblik

$$\Delta J_f = \int_{S_f} \left(\rho \phi v_j - D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \left(\rho \overline{(v_i n_i \phi)}_{S_f} - D_\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{S_f} \right) S_f \quad (2.17)$$

Jednadžba 2.17 može se aproksimirati vrijednostima u točki f , koja predstavlja točku dodira spojnica čvorova P i N i stranice S_f na sljedeći način

$$\Delta J_f = \left(\rho v_{n,f} \phi_f - D_\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_f \right) S_f \quad (2.18)$$

pri čemu je $v_{n,f}$ normalna komponenta brzine na stranicu S_f u točki f

Konačno, kombinacijom integralnih aproksimacija i jednadžbe 2.13 može se prikazati krajnji oblik diskretizirane jednadžbe

$$\rho \frac{\partial \phi_P}{\partial t} \Omega_P = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left(\rho v_{n,f} \phi_f - D_\phi \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_f \right)_{nb} + S_{\phi,P} \Omega_P \quad (2.19)$$

dok $\sum_{nb=1}^{N_{nb}}$ predstavlja zbroj po svim stranicama konačnog volumena.

2.2.1. Numeričke sheme

U numeričkom se postupku računaju i pamte samo čvorne vrijednosti polja unutar mreže zbog čega se vrijednosti ϕ_f i $\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_f$ moraju računati različitim numeričkim shemama.

Shema za difuzijski član

- **Shema centralnih razlika** Ovom shemom može se aproksimirati difuzijski protok u dvjema susjednim ćelijama te se u točki k derivacija polja ϕ u smjeru normale može izraziti kao

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_n = \frac{\phi_N - \phi_C}{x_N - x_C} \quad (2.20)$$

Točnost ove sheme je drugog reda u slučaju uniformne ortogonalne mreže.

Sheme za konvekcijski član

- **Uzvodna shema** Bezuvjetno stabilnom zvodnom shemom (upwind) 1. reda točnosti možemo odrediti vrijednost ϕ_f temeljem smjera strujanja

$$\begin{cases} \phi_C \text{ za } v_n \geq 0 \\ \phi_N \text{ za } v_n < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Ovom shemom se unosi lažna difuzija čime rješenja nisu dovoljno točna.

- **Linearno-uzvodna shema** Linearno-uzvodna shema (linearUpwind) vrijednost ϕ_f određuje linearnom ekstrapolacijom iz uzvodnih točaka

$$\begin{cases} \phi_C + \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_P \left| x_j^f - x_j^P \right| \text{ za } v_n \geq 0 \\ \phi_N + \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_N \left| x_j^f - x_j^N \right| \text{ za } v_n < 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Na ovaj način može se uzrokovati nestabilnost numeričkog proračuna jer shema nije bezuvjetno stabilna. Nadalje, shema je maksimalno drugog reda točnosti.

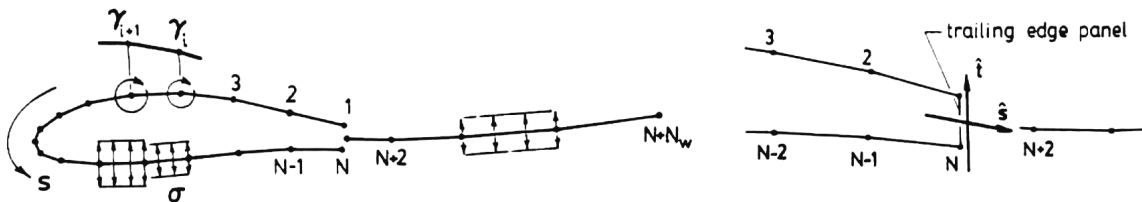
2.3. 2D panelna metoda

Osim metode konačnih volumena, u ovome radu koristi se i 2D panelna metoda implementirana u paketu XFOIL [10]. U suštini, ona je numerička implementacija metode rubnih elemenata, u 2D inačici s vrtlozima kao elementima strujanja kojima se zadovoljavaju rubni uvjeti. Općenito, strujna funkcija koja opisuje opstrujavanje 2D aeroprofila dobiva se superpozicijom brzine neporemećene struje, vrtložne plohte na površini aeroprofila gustoće vrtloga γ te izvorne plohte na površini aeroprofila i vrtložnog traga jakosti σ .

$$\Psi(x, y) = u_\infty y - v_\infty x + \frac{1}{2\pi} \int \gamma(s) \ln r(s; x, y), ds + \frac{1}{2\pi} \int \sigma(s) \theta(s; x, y), ds \quad (2.23)$$

gdje je s koordinata duž vrtložne i izvorne plohte, r magnituda vektora između točke s i točke polja x, y . θ je vektorski kut, a $u_\infty = q_\infty \cos \alpha$ i $v_\infty = q_\infty \sin \alpha$ su x i y komponente brzine neporemećene struje.

Kontura proizvoljnog aeroprofila i putanja vrtložnog traga diskretiziraju se na ravne panele, s N panelnih čvorova na aeroprofilu i N_w čvorova na vrtložnom tragu kao na slici 2.4. Svaki panel aeroprofila ima linearnu distribuciju vrtložnosti definiranu vrijednostima u čvorovima γ_i ($1 \leq i \leq N$). Nadalje, svaki panel aeroprofila i vrtložnog traga ima konstantan izvor jakosti σ_i ($1 \leq i \leq N + N_w - 1$).



Slika 2.4: Geometrija panela aeroprofila i vrtložnog traga s detaljem izlaznog ruba [10].

Ako aeroprofil ima izlazni brid konačne debljine, tada je potrebno postaviti i panel uniformne jakosti izvora σ_{TE} i gustoće vrtloga γ_{TE} na izlazni brid. Za glatko opstrujavanje izlaznog brida moraju vrijediti korelacije između lokalne vrtložnosti površine aeroprofila i jakosti panelnih izvora i ponora [10].

$$\begin{aligned}\sigma_{TE} &= \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_N)|\vec{s} \times \vec{t}| \\ \gamma_{TE} &= \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_N)|\vec{s} \cdot \vec{t}|\end{aligned}\quad (2.24)$$

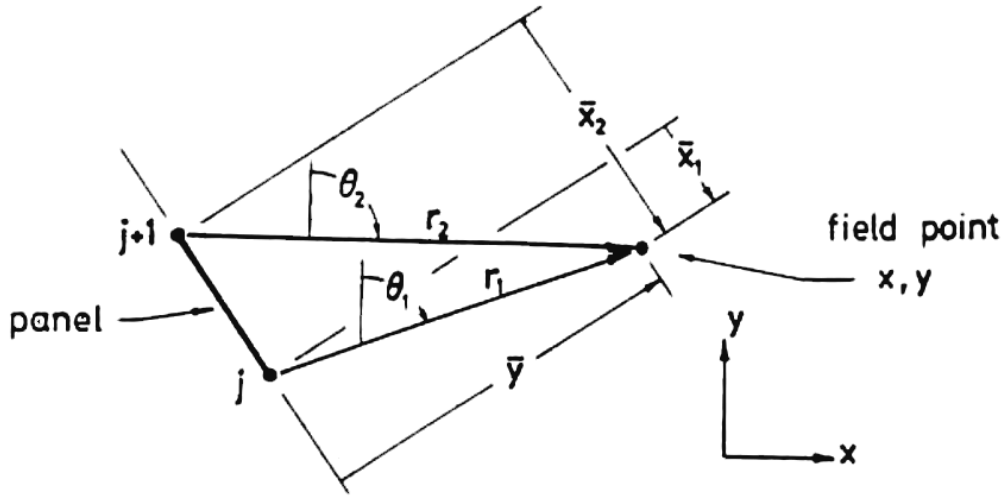
pri čemu je \vec{s} jedinični vektor koji presijeca kut izlaznog brida, a \vec{t} jedinični vektor duž panela izlaznog brida.

Za aeroprofil s ravnim panelima, jednadžba strujne funkcije 2.23 može se prikazati za svaku točku polja x, y .

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) &= u_\infty y - v_\infty x + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N+N_w-1} \Psi_j^\sigma(x, y) 2\sigma_j \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N-1} \Psi_j^{\gamma^+}(x, y)(\gamma_{j+1} + \gamma_j) + \Psi_j^{\gamma^-}(x, y)(\gamma_{j+1} - \gamma_j) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left(\Psi_N^\sigma(x, y)|\vec{s} \times \vec{t}| + \Psi_N^{\gamma^+}(x, y)|\vec{s} \cdot \vec{t}| \right) (\gamma_1 - \gamma_N)\end{aligned}\quad (2.25)$$

Jedinične strujne funkcije iz jednadžbe 2.25 mogu se lako definirati preko lokalnih koordinata panela $\bar{x} - \bar{y}$ kao na slici 2.5.

$$\begin{aligned}\Psi_j^{\gamma^+}(x, y) &= \bar{x}_1 \ln r_1 - \bar{x}_2 \ln r_2 + \bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{y}(\theta_1 - \theta_2) \\ \Psi_j^{\gamma^-(x, y)} &= \left[(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \Psi_j^{\gamma^+} + r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1 + \frac{1}{2}(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2)) \right] \frac{1}{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \\ \Psi_j^\sigma(x, y) &= \bar{x}_2 \theta_2 - \bar{x}_1 \theta_1 + \bar{y} \ln \frac{r_1}{r_2}\end{aligned}\quad (2.26)$$



Slika 2.5: Lokalne koordinate panela
[10].

Iz uvjeta da strujna funkcija mora biti jednaka nekoj konstantnoj vrijednosti Ψ_0 na svakom čvoru aeroprofila [10], slijedi linearni sustav

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \gamma_j - \Psi_0 = -u_{\infty} y_i + v_{\infty} x_i - \sum_{j=1}^{N+N_w-1} b_{ij} \sigma_j, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.27)$$

gdje su parametri a_{ij} i b_{ij} matrice koeficijenata iz jednadžbe 2.26. Kombinacijom jednadžbe 2.27 i Kuttinim uvjetom

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0 \quad (2.28)$$

dobiva se linearni $(N + 1) \times (N + 1)$ sustav za N vrijednosti γ_i u čvorovima te strujnu funkciju Ψ_0 .

Posebni slučaj je aeroprofil sa šiljastim izlaznim bridom gdje se čvorovi $i = 1$ i $i = N$ preklapaju pa su njihove vrijednosti jednadžbe 2.27 jednake. Sustav tada postaje singularan. Problem se rješava tako da se jednadžba $i = N$ u 2.27 zamjenjuje s ekstrapolacijom srednje gustoće vrtloga γ do izlaznog brida.

$$(\gamma_3 - 2\gamma_2 + \gamma_1) - (\gamma_{N-2} - 2\gamma_{N-1} + \gamma_N) = 0 \quad (2.29)$$

2.4. Interpolacija radijalnim baznim funkcijama (RBF)

U mnogim praktičnim slučajevima, potrebno je rekonstruirati funkcije više varijabli iz nestrukturiranih/raspršenih podataka (eng. *scattered data*). Jedna od tehnika aproksimacije ili interpolacije ovog problema je korištenjem radijalnih baznih funkcija (*RBF*) koje su vrlo pogodne za takve slučajeve jer se funkcija udaljenosti računa između svake točke i njenog susjeda, ne postoje ograničenja za postavljanje točaka osim da moraju biti različite te se omogućuju interpolanti proizvoljne glatkoće. U strojnom učenju, RBF kernel vrlo često se koristi za probleme klasifikacije i regresije.

Radijalne funkcije su funkcije čije vrijednosti ovise samo o međusobnoj udaljenosti centara podataka (eng. *data centers*). Primjerice, prema izrazu $g(x) = \phi(\|x\|) = \phi(r)$, pri čemu je $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija ϕ je konstantna. Tada je funkcija ϕ *radijalna bazna funkcija* pri čemu se za normu najčešće uzima euklidska udaljenost ($\|\cdot\|$). Ideja je pronaći interpolant $s(x), x \in \mathbb{R}^d$ koji zadovoljava sljedeći oblik

$$s(x_i) = f_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.30)$$

Kod interpolacije radijalnih baznih funkcija, za izračun interpolanta $s(x)$ dodaju se polinomi nižeg reda gdje je Π_{m-1}^d vektorski prostor svih realnih polinoma u varijabli d stupnja $m-1$. Tada interpolant $s(x)$ poprima oblik

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) + \sum_{j=1}^{\bar{m}} \gamma_j p_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.31)$$

Za $m = 0$ interpolant je

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (2.32)$$

Te se koeficijenti $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ dobivaju iz interpolacijskih uvjeta 2.30 rješavanjem linearnog sustava

$$A\lambda = f \quad (2.33)$$

Za $m > 0$, interpolant mora sadržavati polinomni dio koji stvara dodatnih q stupnjeva slobode, pri čemu je $q = \binom{m-1+d}{d}$ dimenzija polinomnog prostora $\Pi_m(\mathbb{R}^d)$. Na-

vedeni doodatni stupnjevi slobode eliminiraju se pomoću q uvjeta ortogonalnosti pa polinomni dio jednadžbe 2.31 izgleda

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_j(x_i) = 0, j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.34)$$

Varijablu m nazivamo stupnjem radijalne bazne funkcije te se konačno rješava linearni sustav

$$\begin{bmatrix} \Phi & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

gdje su članovi β koeficijenti radijalnog dijela, a članovi γ koeficijenti polinomnog dijela.

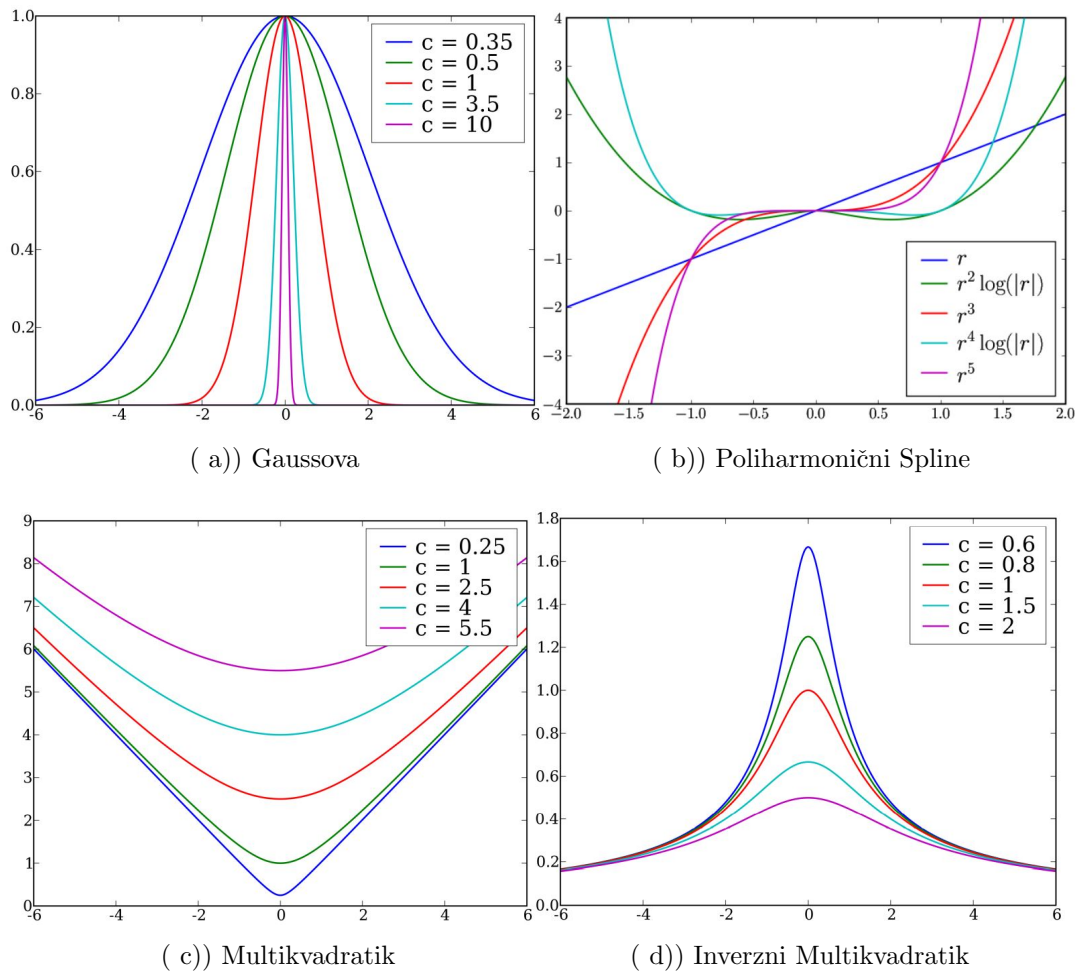
2.4.1. Tipovi radijalnih baznih funkcija

Radijalne bazne funkcije najčešće sadrže zapis $r = \|x - x_i\|$ te koriste parametar oblika ϵ za skaliranje radijalnog kernela. Neke od popularno korištenih funkcija prikazane su tablicom 2.3 i slikom 2.6.

Radijalna bazna funkcija	$\phi(r)$	parametri	red funkcije
Gaussova	$\phi(r) = e^{-\epsilon r}$	$\epsilon > 0$	0
Poliharmonični Spline	$r^{2\epsilon-1}$	$\epsilon \in \mathbb{N}$	$m=\epsilon$
	$r^{2\epsilon} \log(r)$	$\epsilon \in \mathbb{N}$	$m=\epsilon + 1$
Multikvadratik	$\sqrt{r^2 + \epsilon^2}$	$\epsilon > 0$	1
Inverzni Multikvadratik	$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}$	$\epsilon > 0$	0

Tablica 2.3: Tablica najpopularnijih radijalnih baznih funkcija

[11]



Slika 2.6: Prikaz najpopularnijih RBF u ovisnosti o parametru ϵ

Ono što je karakteristično za prikazane funkcije je to da su one definirane globalno, na \mathbb{R}^d , te im je klasa glatkoće C^∞ . Nasuprot tomu, u novije vrijeme javljaju se radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču [1] konačne glatkoće C^{2k} koje ovise od dimenziji prostora d i za koje vrijedi $m = 0$.

Prema Wendlandovoj analizi [1] funkcija oblika

$$\begin{cases} \phi(r) = p(r), 0 \leq r \leq 1, \\ \phi(r) = 0, r > 1, \end{cases} \quad (2.36)$$

pri čemu je polinom p u 1D, dobiva se funkcija

$$\phi_l(r) = (1 - r)_+^l \quad (2.37)$$

te Wendland i Fasshauser, povećavajući glatkoću u potrebnom broju dimenzija, iterativnim postupkom predlažu prvih nekoliko radijalnih baznih funkcija

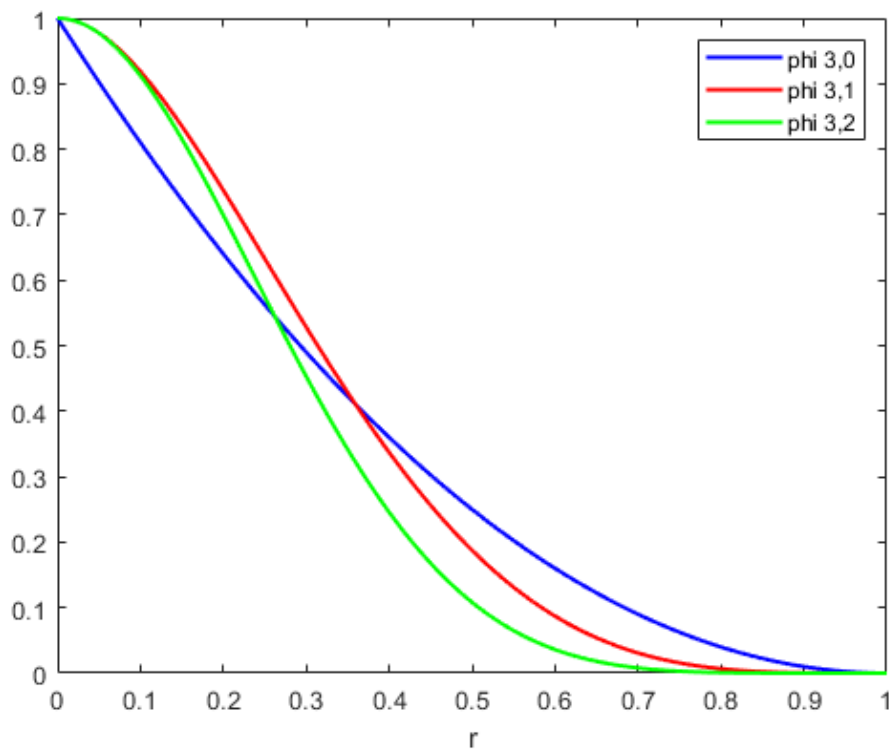
$$\begin{aligned} \phi_{d,0} &= (1 - r)_+^{[d/2]+1}, \\ \phi_{d,1} &= (1 - r)_+^{l+1}[(1 + l)r + 1], \\ \phi_{d,2} &= (1 - r)_+^{l+2}[(l^2 + 4l + 3)r^2 + (3l + 6)r + 3], \\ \phi_{d,3} &= (1 - r)_+^{l+3}[(l^3 + 9l^2 + 23l + 15)r^3 + (6l^2 + 36l + 45)r^2 + (15l + 45)r + 15] \end{aligned} \quad (2.38)$$

gdje je $l = [d/2] + k + 1$.

U tablici 2.4 nalaze se Wendlandove radijalne bazne funkcije na kompaktnom nosaču

dimenzija	funkcija	glatkoća
$d = 1$	$\phi_{1,0}(r) = (1 - r)_+$	C^0
	$\phi_{1,1}(r) = (1 - r)_+^3(3r + 1)$	C^2
	$\phi_{1,2}(r) = (1 - r)_+^5(8r^2 + 5r + 1)$	C^4
$d \leq 3$	$\phi_{3,0}(r) = (1 - r)_+^2$	C^0
	$\phi_{3,1}(r) = (1 - r)_+^4(4r + 1)$	C^2
	$\phi_{3,2}(r) = (1 - r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$	C^4
	$\phi_{3,3}(r) = (1 - r)_+^8(32r^3 + 25r^2 + 8r + 1)$	C^6
$d \leq 5$	$\phi_{5,0}(r) = (1 - r)_+^3$	C^0
	$\phi_{5,1}(r) = (1 - r)_+^5(5r + 1)$	C^2
	$\phi_{5,2}(r) = (1 - r)_+^7(16r^2 + 7r + 1)$	C^4

Tablica 2.4: Wendlandove radijalne bazne funkcije [1]

Slika 2.7: Wendlandove funkcije C^0, C^2, C^4 za $d \leq 3$ [1].

2.5. Linearna regresija

U statistici, regresijska analiza podrazumijeva istraživanje korelacije između dvaju skupova nezavisnih varijabli pomoću regresijskih tehnika. Unutar statistike postoje različite regresijske metode čiji odabir ovisi o vrsti odabranih podataka i pretpostavkama koje možemo donijeti na temelju tih podataka. U ovome radu primijenit će se jednostavna i višestruka linearna regresija koja respektivno ovisi o jednom, odnosno više ulaznih parametara.

Pretpostavlja se da postoji funkcija $f(x)$ takva da za svaku vrijednost neovisne varijable x_i , ovisna varijabla poprima oblik

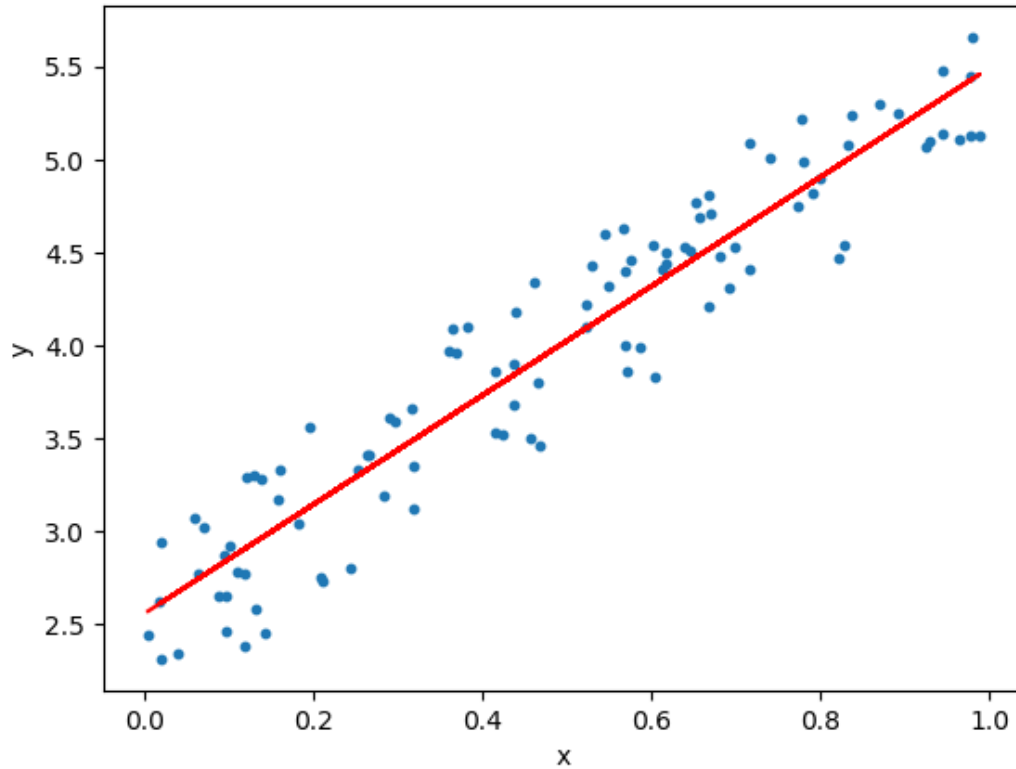
$$y_i = f(x_i) + e_i \quad (2.39)$$

gdje je pogreška e_i slučajna varijabla normalne raspodjele i očekivane vrijednosti nula.

Ukoliko se pretpostavi da postoje neki koeficijenti a i b koji za svaku vrijednost nezavisne varijable x_i mogu opisati ovisnu varijablu y_i kao

$$y_i = a + bx_i + e_i \quad (2.40)$$

onda se radi o *linearnoj regresiji* zbog linearne zavisnosti neovisne i ovisne varijable. Parametar b još se naziva i koeficijentom regresije, a pravac $y = a + bx$ regresijski pravac.



Slika 2.8: Primjer linearne regresije za zadani skup podataka

2.5.1. Metoda najmanjih kvadrata

Za procjenu nepoznatih parametara a i b služi se metodom najmanjih kvadrata koja odabire parametre linearne funkcije po principu najmanjih kvadrata, odnosno minimizirajući sumu kvadrata razlika ovisne varijable u zadanom setu podataka i podataka predviđenih linearnom funkcijom neovisnih varijabli.

Konkretno, to znači da je od svih pravaca regresije najvjerojatniji onaj za koji je suma kvadrata odstupanja minimalna što se može prikazati na sljedeći način

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \min \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad (2.41)$$

to jest

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} &= 0\end{aligned}\tag{2.42}$$

Nakon raspisivanja izraza 2.42 i rješavanjem sustava jednadžbi, konačan oblik parametara a i b dani su formulama

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\tag{2.43}$$

te

$$a = \frac{1}{n} \left(\sum y_i - b \sum x_i \right)\tag{2.44}$$

Služeći se izrazom za regresijski pravac, za svaku eksperimentalnu vrijednost x_i može se izračunati teoretska vrijednost varijable y_i . Tada se svako odstupanje eksperimentalne od teorijske vrijednosti može zapisati kao

$$e_{pi} = y_i - y_{pi} = y_i - (a_p + b_p x_i)\tag{2.45}$$

gdje varijable s ineksom p označavaju procijenjene vrijednosti.

Niz vrijednosti $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ nazivaju se rezidualima, a suma kvadrata svih navedenih reziduala (eng. *Sum of Squares of Errors, SSE*) označava minimalnu postignutu vrijednost za $S(a, b)$ te ujedno predstavlja mjeru kvalitete modela koja se još označava i kao **SSE**

$$SSE = \sum [y_i - (a_p + b_p x_i)]^2 = \sum e_{pi}^2\tag{2.46}$$

Ostali bitni pokazatelji kvalitete modela su parametri SST (eng. *Sum of Squares Total*) te SSR (eng. *Sum of Squares Due to Regression*) koji izgledaju

$$\begin{aligned}SST &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ SSR &= \sum_{i=1}^n (y_{pi} - \bar{y}_i)^2\end{aligned}\tag{2.47}$$

gdje je \bar{y}_i aritmetička sredina varijable y te vrijedi

$$SST = SSR + SSE \quad (2.48)$$

Jednadžba 2.48 naziva se jednadžba analize varijance i ona je osnova za prikaz reprezentativnosti modela regresije.

2.5.2. Koeficijent determinacije r^2

Kako bi se što bliže prikazala sposobnost modela da opiše korelaciju i smjer linearne povezanosti varijabli, koristi se koeficijentom determinacije $r^2 \in \langle 0, 1 \rangle$ koji glasi

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (2.49)$$

U praksi, on nam zapravo daje udio varijacije jedne varijable predviđen iz druge te pokazuje koliko dobro linearna regresija može opisati podatke. Konkretno, ako je $r^2 = 0,86$, to znači da se 86% ukupne varijacije u y može aproksimirati linearnom ovisnošću, a ostalih 14 % ne može.

2.5.3. Višestruka linearna regresija i polinomijalna linearna regresija

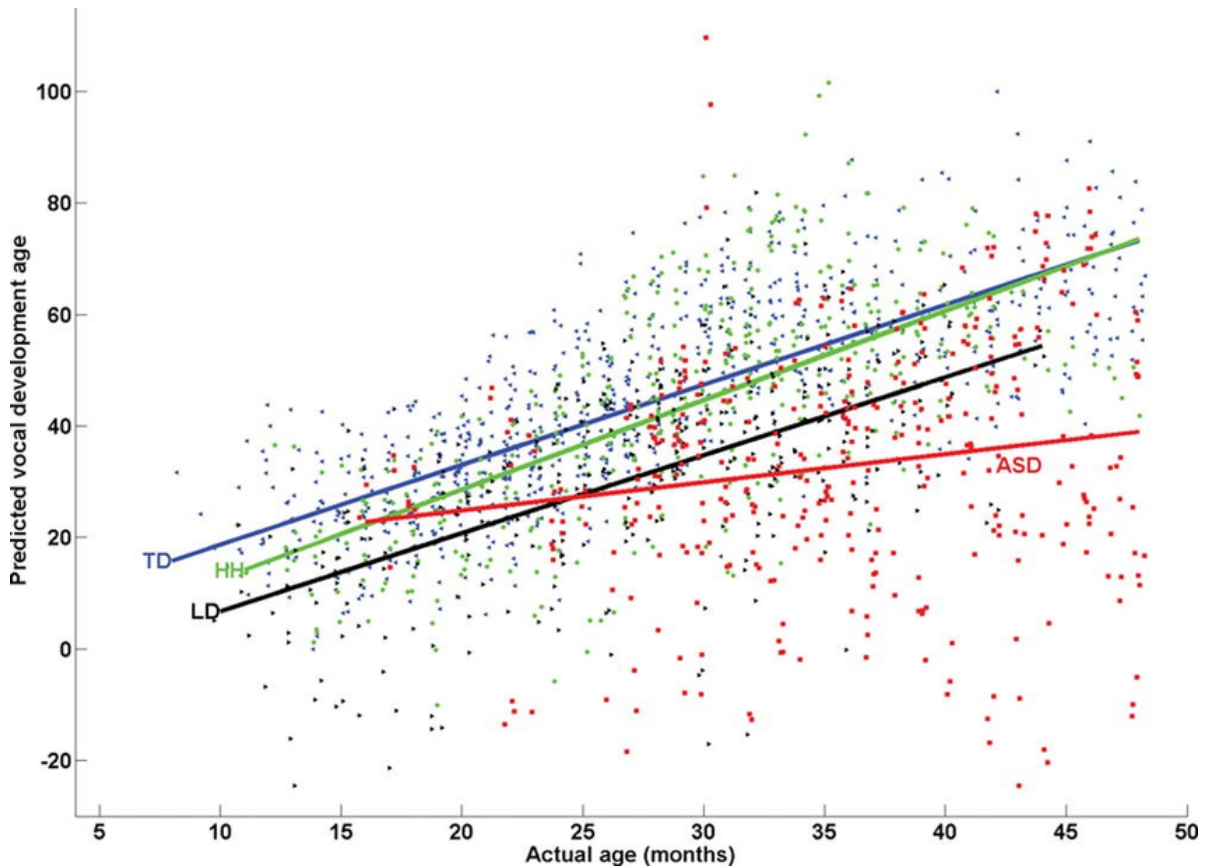
Kod multivarijantne ili višestruke linearne regresije, javlja se linearna ovisnost jedne zavisne varijable (y) i više nezavisnih (x_1, x_2, \dots, x_n)

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} + e_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.50)$$

U matričnom zapisu, model se može zapisati kao sustav od n jednadžbi

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad (2.51)$$

pri čemu se izrazi za koeficijent determinacije r^2 određuje analogno izrazima za jednostavnu linearnu regresiju.



Slika 2.9: Primjer višestruke linearne regresije koja predviđa vokalni razvoj djece u ovisnosti o starosti

[12]

Polinomijalna regresija je algoritam koji modelira korelaciju između zavisne i nezavisne varijable polinomom n -tog reda. Takav model zapravo je posebni slučaj višestruke linearne regresije jer joj se dodaju polinomni dijelovi kako bi se povećala točnost. Pojam linearnosti odnosi se na linearnost u parametrima te prikazivanje nezavisne varijable kao linearnu kombinaciju potencija zavisne varijable.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 x_1^3 + \dots + \beta_n x_1^n \quad (2.52)$$

Originalni članovi se tada pretvaraju u polinomne članove te se zatim modeliraju korištenjem linearnog modela.

3 Rezultati

U ovom poglavlju prikazat će se primjena matematičkog modela na konkretnim aeroprofilima NACA serije 6. Točnije, provest će se numerički proračun polare metodom konačnih volumena u paketu *openFoam* [13] i numerički proračun 2D panelnom metodom u paketu *XFOIL* te će se usporediti dobiveni rezultati s eksperimentalnim rezultatima [3]. Konačno, metodom RBFI i linearnom regresijom pokušat će se pronaći korelacija između različitih aeroprofila NACA serije 6 podserije 5. Treba napomenuti da su se u ovom radu promatrali aeroprofil s platôom oblika poput *NACA 65₃-418*, $a=0,5$ čiji indeks definira raspon niskog otpora što nam zapravo direktno pokazuje da aeroprofil ima *drag bucket*.

3.1. Metoda konačnih volumena

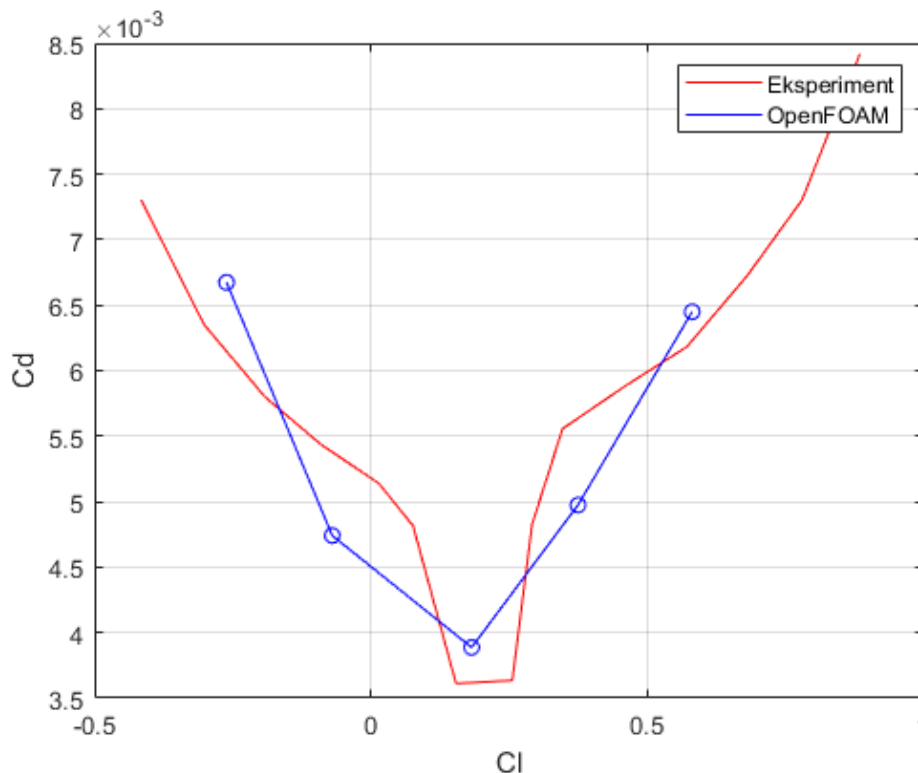
3.1.1. Postavke proračuna

Ovaj rad koristio je iterativni rješavač *simpleFoam* za stacionarno strujanje, dok je model turbulencije *kkl-omega*. Mreža kontrolnih volumena izrađena je u programskom paketu *GMSH* [14] pri čemu se pazilo da je bezdimenzijska udaljenost y^+ prve okomite ćelije na aeroprofil manja od 0,5, a oblik korištene mreže je C-grid.

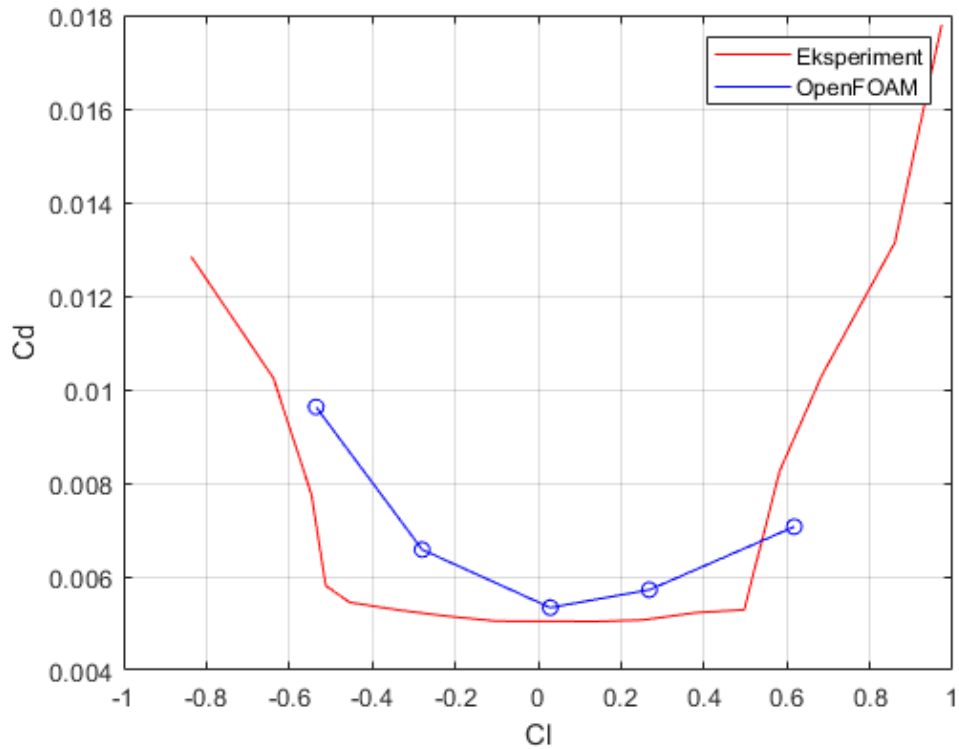
3.1.2. Rezultati

Za proračun su odabrani aeroprofil NACA65–206 i NACA65₄–021 jer predstavljaju najtanji i najdeblji aeroprofil svoje serije. Prije svega, eksperimentalni podaci o polari

i ovisnosti napadnog kuta o koeficijentu uzgona [3] digitalizirani su pomoću programskog paketa *WebPlotDigitizer* [15]. Zatim se proveo *openFoam* proračun za pronalazak koeficijenata uzgona i koeficijenata otpora za 5 napadnih kuteva α . Prema slikama 3.1 i 3.2 očito je da proračuni u *openFoam*u ne mogu prikazati raspon niskog otpora (*drag bucket*) kao što je to slučaj kod podataka dobivenima eksperimentalnim mjerenjima. Ta činjenica je dokazana upravo koristeći najtanji i najdeblji dostupni aeroprofil i prikazivajući rješenja za oba ekstrema. Koeficijent otpora pri nominalnom kutu uzgona nešto je viši nego u stvarnosti, ali problem nastupa kod odvajanja strujanja gdje bi koeficijent otpora trebao naglo porasti. U *openFoam*-u to ponašanje nije dobro opisano i ne možemo na temelju polare sa sigurnošću pokazati kada dolazi do odvajanja strujanja. Zbog navedenih argumenata metoda kontrolnih volumena neće se dalje uzimati kao validna metoda rješavanja problema *drag bucketa* te idealnog napadnog kuta koji se može zaključiti iz njega.



Slika 3.1: Usporedba polare dobivene eksperimentalno i *openFoam*-om za aeroprofil NACA65 – 206



Slika 3.2: Usporedba polare dobivene eksperimentalno i *openFoam-om* za aeroprofil NACA65₄ – 021

3.2. XFOIL

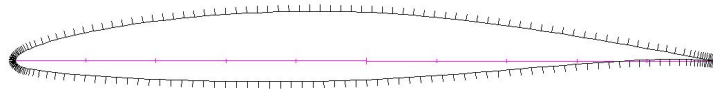
3.2.1. Postavke proračuna

Za jednostavnost proračuna i postizanje brze konvergencije, najbolje su se pokazali sljedeći parametri

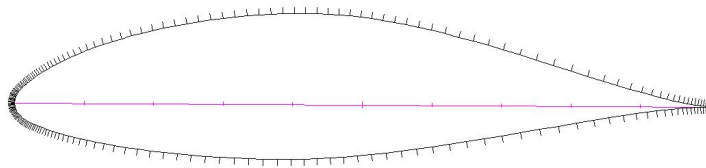
- Broj iteracija: 200
- Uključena viskoznost
- Reynoldsov broj: $Re = 6 \times 10^6$
- Broj panela: $N = 200$
- Parametar gustoće panela na bridovima: $P = 3$

- Omjer gustoće panela oko prednjeg i zadnjeg brida: 0.3

Navedeni parametri korišteni su u većini slučajeva te je takav raspored panela prikazan slikom 3.3. Izazov u smislu konvergencije rješenja jedino su predstavljali tanji aeroprofil debljine 6 % tetive gdje se samo povećao broj panela na 240 i gustoća panela oko prednjeg brida.



(a) NACA 65-410

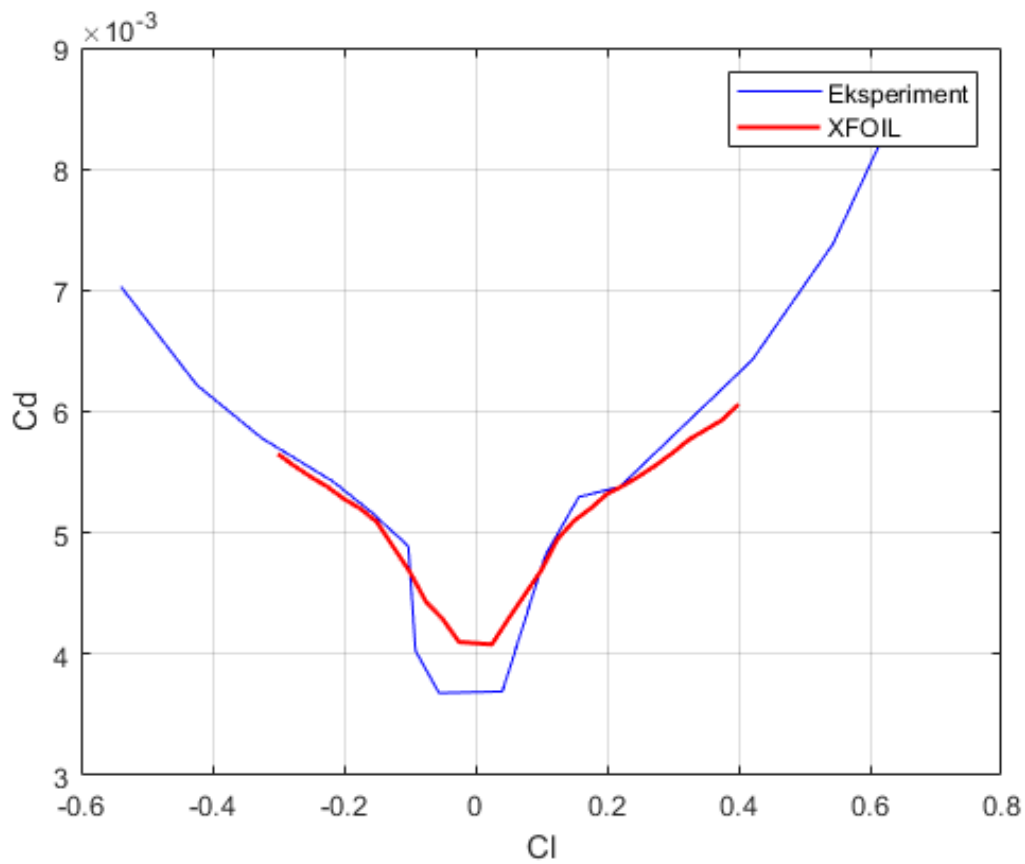


(b) NACA 65₄ - 421, $a = 0.5$

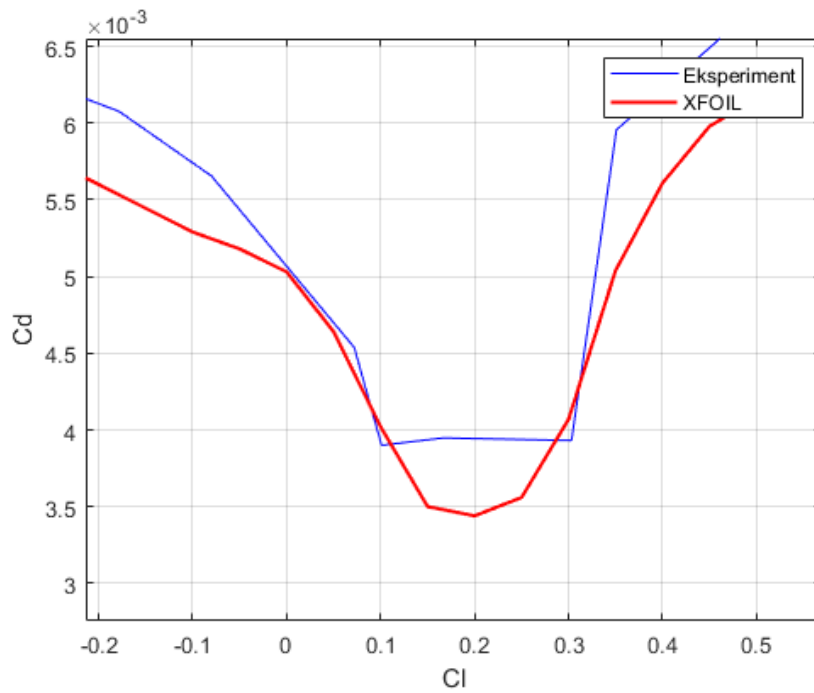
Slika 3.3: Raspored panela na različitim aeroprofilima

3.2.2. Rezultati

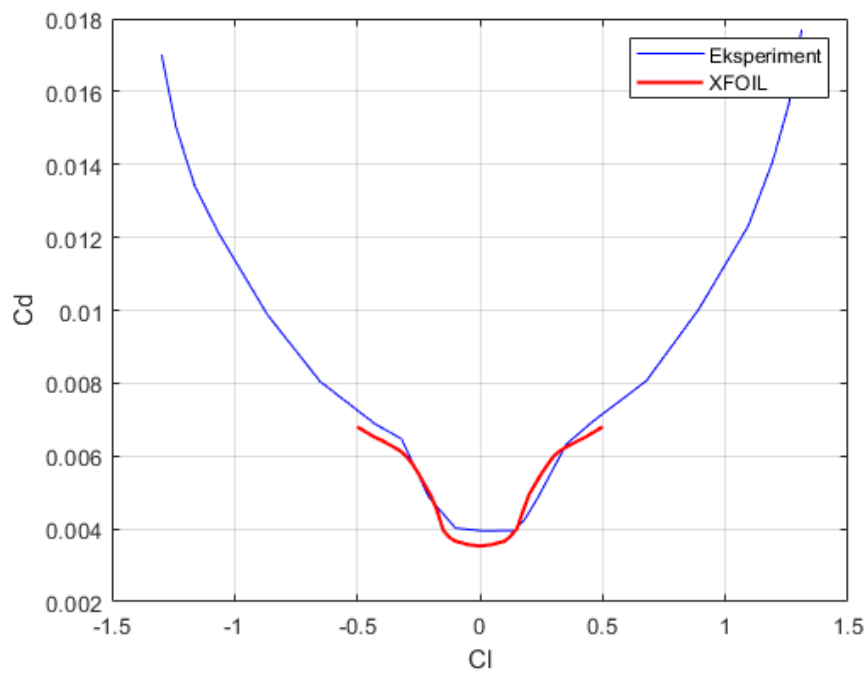
U ovom radu promatrao se odnos koeficijenata uzgona C_l i koeficijenata otpora C_d , odnosno polara. Svi rezultati dobiveni su prema sekvencama koeficijenta uzgona C_l s korakom 0,025 i 0,05. Usporedbe polara nekih aeroprofila dobivenih *XFOIL*-om i eksperimentalnim mjerenjima prikazane su sljedećim slikama.



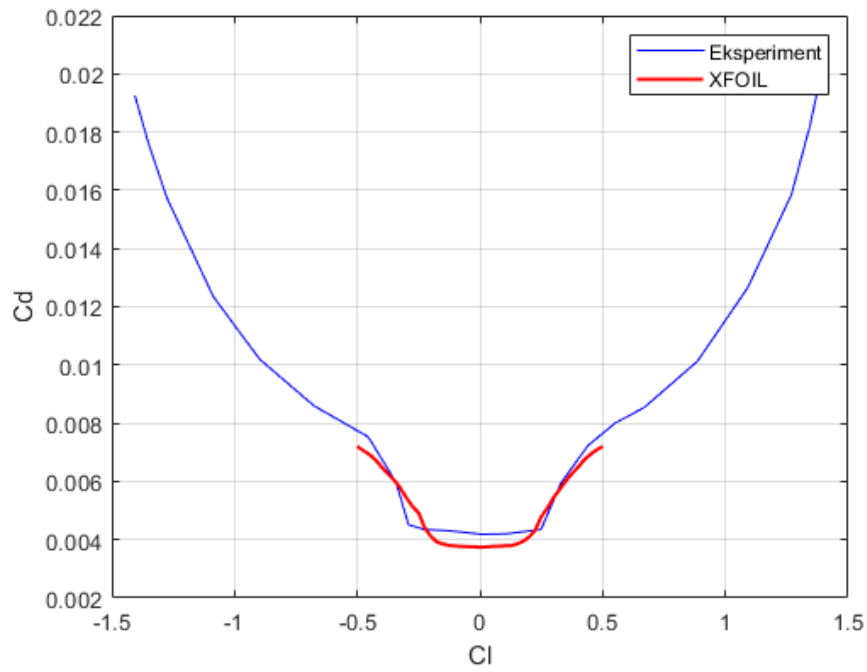
Slika 3.4: Polara NACA65 – 006



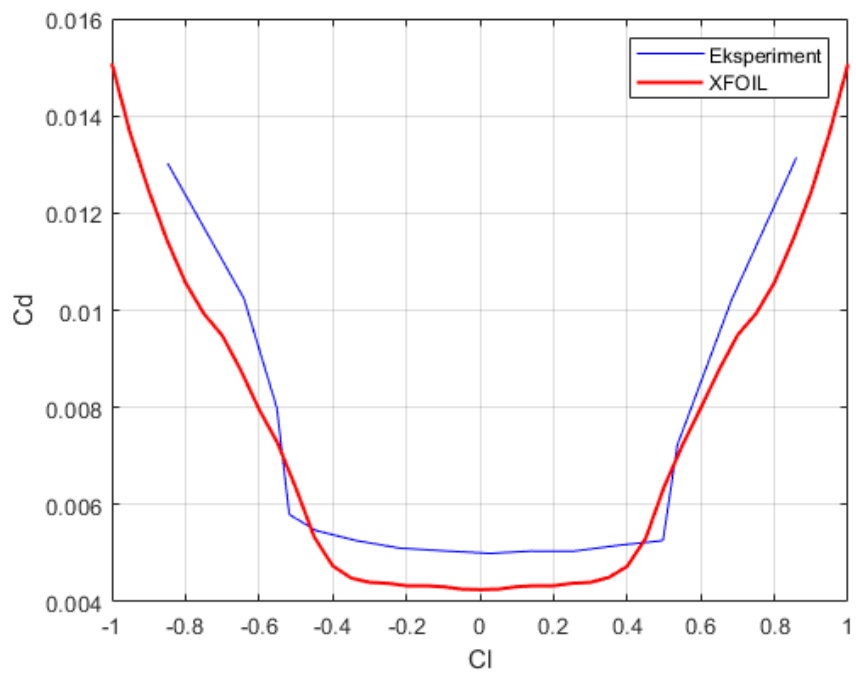
Slika 3.5: Polara NACA 65 – 009



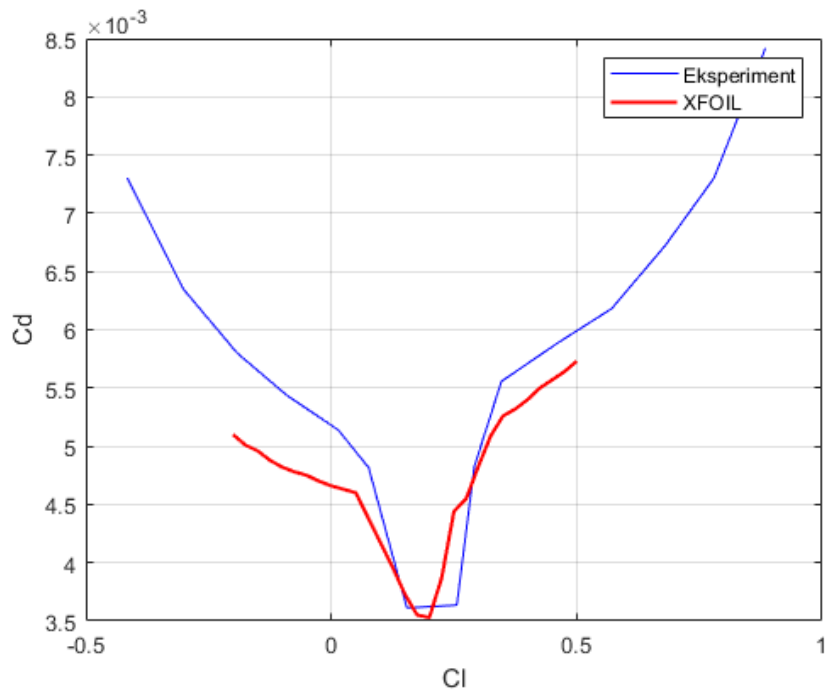
Slika 3.6: Polara NACA 65₁ – 012



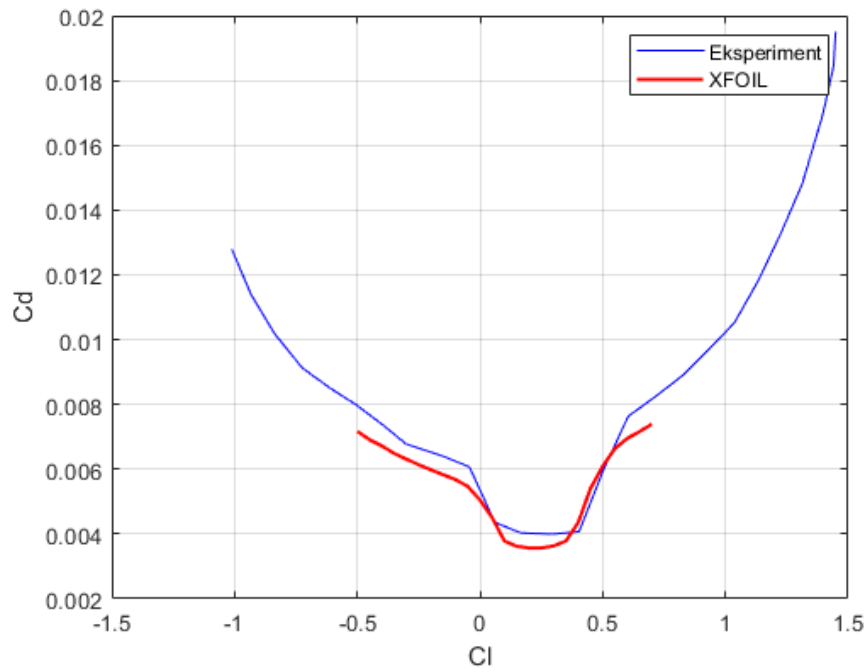
Slika 3.7: Polara NACA 65₂ – 015



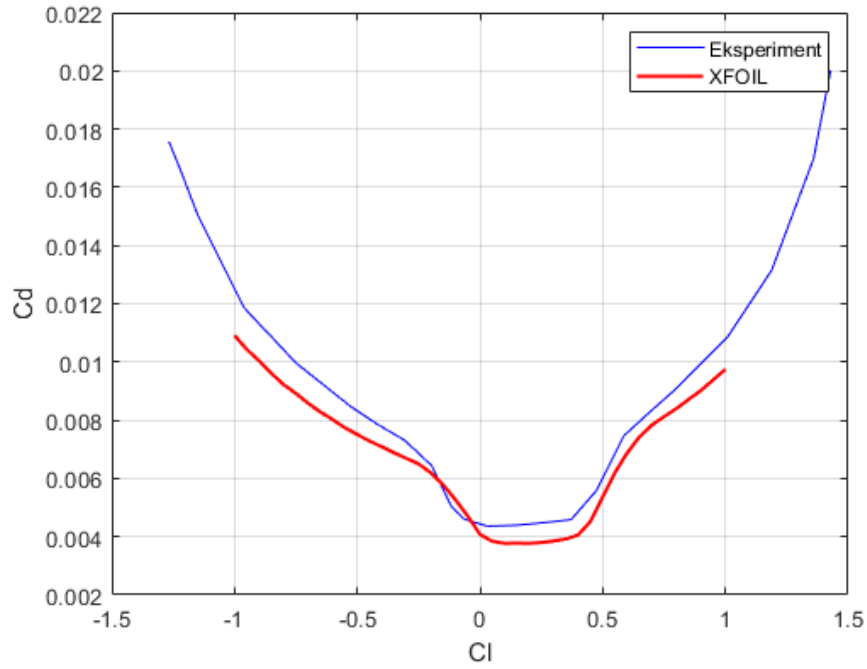
Slika 3.8: Polara NACA 65₄ – 021



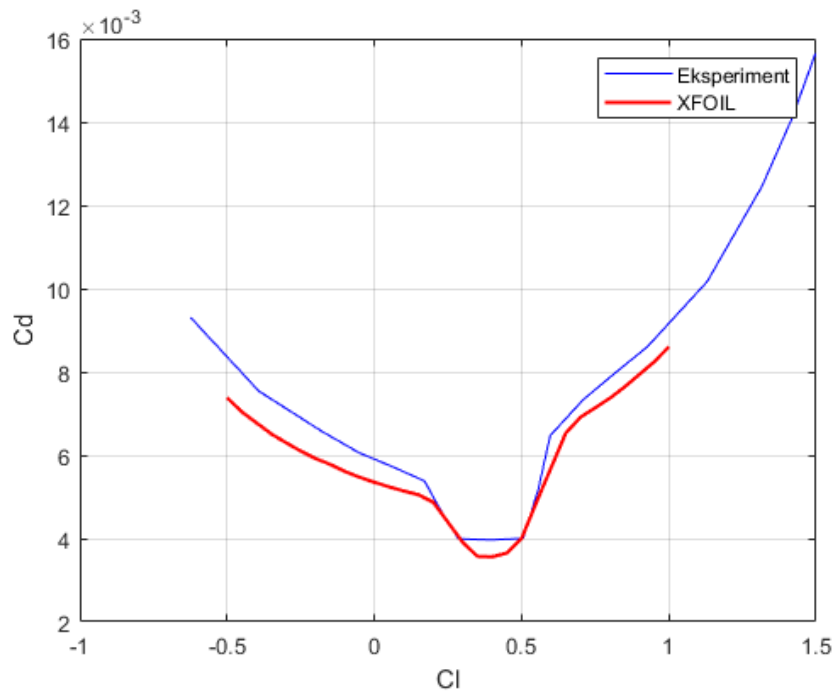
Slika 3.9: Polara NACA 65 – 206



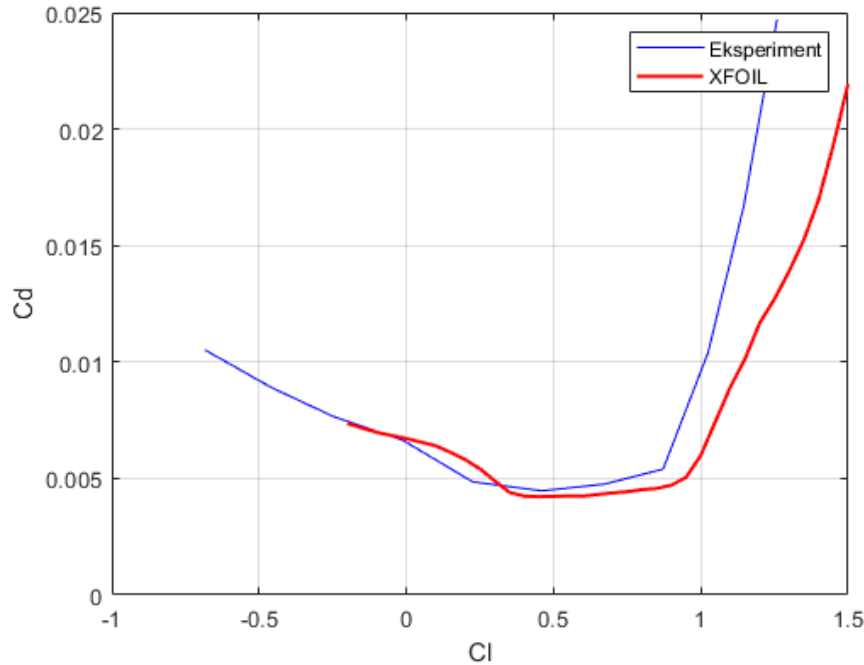
Slika 3.10: Polara NACA 65₁ – 212, $a = 0.6$



Slika 3.11: Polara NACA 65 – 215



Slika 3.12: Polara NACA 65 – 410



Slika 3.13: Polara NACA 65,3 – 618

Iz priloženog se može vidjeti da XFOIL vrlo dobro predviđa položaj odvajanja strujanja kod laminarnih aeroprofila. U svim slučajevima program dobro pokazuje raspon niskog otpora, odnosno širinu *drag bucketa*. Zbog toga je ta metoda pogodna za analizu svojstava istih. Širinu platôa *drag bucketa* XFOIL preciznije prikazuje kod aeroprofila debljine iznad 10% tetive, ali kod tanjih aeroprofila poput debljine 6 i 9% tetive dolazi do većih odstupanja i rješenja više nalikuju onima dobivenima metodom konačnih volumena (*openFoam*). Nadalje, zanimljivo je spomenuti da se kod aeroprofila s platôom sredina područja niskog otpora (nominalni koeficijent uzgona) jako dobro poklapa s eksperimentalnim rezultatima, dok je za aeroprofile bez platôa (3.13) karakterističan pomak osi (*eng. skew*). Konačno, visine *drag bucketa*, odnosno vrijednosti otpora su nešto niže nego u stvarnosti.

3.3. Implementacija RBFI i linearne regresije

Korištenjem tehnika interpolacije radijalnim baznim funkcijama (*RBFI*) i aproksimacije linearnom regresijom, cilj ovog poglavlja je pokušati prikazati korelaciju između

aerodinamičkih karakteristika koje opisuju *drag bucket* i različitih aeroprofila za koje posjedujemo podatke. Ideja je pronaći karakterističan skup podataka koji što bolje opisuju problem i na temelju kojih se problem može generalizirati i kasnije primjeniti na podatke (aeroprofile) za koje nemamo dostupna mjerenja. Nadalje, na temelju tih podataka moći će se odrediti optimumi karakteristika *drag bucket-a* za svaki aeroprofil što može biti korisno pri odabiru takve vrste aeroprofila tijekom faze konstruiranja zrakoplova i njegove aerodinamičke analize.

3.3.1. RBF1

Prije početka interpolacije radijalnim baznim funkcijama, potrebno je definirati broj dimenzija i oblik korištenog polinoma. U ovom slučaju, točke u prostoru definirane su trima dimenzijama:

- Nominalni koeficijent uzgona: C_l
- Vrsta srednje linije: \mathbf{a}
- Koeficijent proporcionalnosti: \mathbf{C}

Razlog odabira koeficijenta proporcionalnosti kao jednu od dimenzija leži u činjenici da svaka podserija laminarnih aeroprofila posjeduje vlastitu, karakterističnu distribuciju funkcija ϵ i ψ . Koeficijent proporcionalnosti tada obuhvaća i debljinu aeroprofila i navedene funkcije kao što je već pokazano izrazom (2.12). Tada kombinacija tih triju parametara predstavlja jedan laminarni aeroprofil proizvoljne podserije. Nadalje, koordinate su normalizirane radi ispravnosti rezultata.

Što se tiče polinoma, korišteni su kvadratni polinom oblika

$$P_2 = C_0 + C_1x + C_2y + C_3z + C_4x^2 + C_5y^2 + C_6xy + C_7xz + C_8yz \quad (3.1)$$

te

$$P_1 = C_0 + C_1x + C_2y + C_3z \quad (3.2)$$

gdje su x , y i z respektivno normalizirane koordinate C_{ln} , C_n i a .

Implementacija metode temeljena je na *Matlab* kodu [16] koji koristi jednodimenzijski polinom 1. stupnja. Kôd je modificiran i prilagođen trima dimenzijama te je originalni

polinom zamijenjen polinomom 3.1. Korištena radijalna bazna funkcija je Wendlandova funkcija C^0 za $d \leq 3$.

Najveću prepreku predstavljao je odabir ispravnog skupa podataka iz 25 dostupnih mjerenja koja su priložena u [3]. Eksperimentiranjem s navedenim podacima, pokazalo se da zapravo najveći utjecaj na vrijednost koju želimo interpolirati posjeduje koordinata koeficijenta proporcionalnosti C_n pa se za početni skup podataka, na kojem se model učio, pokušao odabrati skup koji bi obuhvatio sve vrijednosti debljine aeroprofila. Kao drugi uvjet za izbor skupa podataka odabrao se onaj koji je imao barem tri različite vrijednosti koordinate a .

Od vrste interpolanata, za analizu *drag bucketa* odabrane su vrijednosti gornjeg koeficijenta uzgona gdje završava područje niskog otpora, donji koeficijent uzgona gdje počinje područje niskog otpora te iznos koeficijenta otpora koji karakterizira to područje. Svi navedeni parametri odgovaraju Reynoldsovom broju $Re = 6 \times 10^6$ i odabrani skup podataka za učenje modela je sljedeći

Aeroprofil NACA	Gornji C_l	Donji C_l	C_d drag bucket-a
65-006	0,0396	-0,077179497	0,00392913
65-206	0,2568	0,151526844	0,003872479
65-009	0,1203	-0,074303517	0,004349886
65-209	0,3050	0,084401863	0,003942674
65-210	0,3237	0,051172679	0,003990207
65-410	0,5276	0,227120522	0,004237319
65 ₁ – 212, a=0,6	0,4095	0,097877164	0,004227091
65 ₁ – 412	0,5310	-0,200280698	0,004202901
65 ₂ – 415, a=0,5	0,7344	0,265088704	0,004771538
65 ₂ – 215	0,4821	-0,067509355	0,004814183
65 ₃ – 618, a=0,5	0,9771	0,430637925	0,004957751
65 ₃ – 418, a=0,5	0,7644	0,178668697	0,004961924
65 ₄ – 221	0,6247	-0,313100844	0,005339376
65 ₄ – 421	0,8155	0,085875432	0,005288106

Tablica 3.1: Skup podataka za interpolaciju

Usporedbom interpoliranih vrijednosti gornjeg C_l , donjeg C_l i C_d s eksperimentalnim

vrijednostima preostalih aeroprofila za koje su dostupni podaci, dolazi se do zaključka da mjerenja za donji C_l nisu glatko raspoređeni podaci zbog čega se javlja ogromna greška između interpoliranih vrijednosti i eksperimenata, dok se gornji C_l i C_d prihvatljivo poklapaju. Zbog toga se filtrirao početni skup aeroprofila pri čemu su se odbacili aeroprofil s naglim skokom pri izlazu iz *drag bucketa*, odnosno laminarnim odvajanjem strujanja. Novi skup podataka za učenje je sljedeći

Aerofil NACA	Gornji C_l	Donji C_l	C_d drag bucketa
65 – 006	0,039554	-0,077179497	0,003929133
65 – 009	0,1203	-0,074303517	0,004349886
65 – 210	0,3237	0,051172679	0,003990207
65 ₁ – 012	0,181146	-0,106493887	0,004369891
65 ₁ – 212, a=0,6	0,409533	0,097877164	0,004325783
65 ₂ – 415	0,652017	0,085687868	0,004771538
65 ₃ – 418, a=0,5	0,764367	0,178668697	0,004945083
65 ₄ – 021	0,492736	-0,507962825	0,005369257
65 – 206	0,2568	0,151526844	0,003872479
65 ₃ – 218	0,538103	-0,200280698	0,005002686
65 ₂ – 015	0,257432	-0,289964941	0,004752588
65 ₁ – 212	0,338203	0,029322688	0,004227091

Tablica 3.2: Filtrirani skup podataka za interpolaciju

Ovaj skup od 12 aeroprofila odabran je zbog optimalne greške koja se javlja za svaku vrstu interpolanata. Daljnjim povećavanjem skupa za učenje nije rezultiralo povećavanjem točnosti interpolanata. Greške interpolirane vrijednosti za nove aeroprofile uspoređene su s eksperimentima u tablici 3.7.

Aeroprofil NACA	Gornji C_l -greška	Donji C_l -greška	C_d -greška
65 – 209	0 %	4%	1%
65 ₂ – 215	11 %	8%	4%
65 – 410	4%	11%	1%
65 ₃ – 018	4%	15%	1%
65 ₁ – 412	10%	6%	5%

Tablica 3.3: Greška interpolacije

Razlika između gornjeg i donjeg C_l predstavlja širinu *drag bucketa* (širina DB), a omjer širine DB i koeficijenta otpora pri kojoj postoji takav raspon niskog otpora nam je direktni pokazatelj kvalitete aeroprofila u aerodinamičkom smislu. Širine DB i omjeri $\frac{DB}{C_d}$ dani su sljedećom tablicom

Aeroprofil NACA	Širina DB	Širina DB-greška	DB/ C_d
65 – 209	0,2234	1%	55,85
65 ₂ – 215	0,5021	9%	109,15
65 – 410	0,2974	1%	70,81
65 ₃ – 018	0,7497	5%	149,94
65 ₁ – 412	0,3901	12%	88,66

Tablica 3.4: Interpolanti širine DB za polinom 3.1

Prema teoriji, simetrični aeroprofil laminarne serije, odnosno aeroprofil s nominalnim koeficijentom uzgona nula, trebali bi imati simetričan raspored koeficijenta uzgona oko nominalnog koeficijenta uzgona. Zbog toga će se primjeniti još jedan filter na već filtriranom skupu podataka gdje će se u skupu podataka korištenjem za učenje modela, vrijednosti donjeg C_l zamijeniti suprotnim vrijednostima gornjeg C_l . Ta modifikacija odnosi se *samo* na simetrične aeroprofile tog skupa podataka. Tada je dvostruko filtrirani skup podataka sljedeći.

Aeroprofil NACA	Gornji C_l	Donji C_l	C_d drag bucketa
65 – 006	0,039554	-0,039554	0,003929133
65 – 009	0,1203	-0,0.1203	0,004349886
65 – 210	0,3237	0,051172679	0,003990207
65 ₁ – 012	0,181146	-0,181146	0,004369891
65 ₁ – 212, a=0,6	0,409533	0,097877164	0,004325783
65 ₂ – 415	0,652017	0,085687868	0,004771538
65 ₃ – 418, a=0,5	0,764367	0,178668697	0,004945083
65 ₄ – 021	0,492736	-0,0.492736	0,005369257
65 – 206	0,2568	0,151526844	0,003872479
65 ₃ – 218	0,538103	-0,200280698	0,005002686
65 ₂ – 015	0,257432	-0,257432	0,004752588
65 ₁ – 212	0,338203	0,029322688	0,004227091

Tablica 3.5: Dvostruko filtrirani skup podataka za interpolaciju

Rješenja interpolacije i greške dane su sljedećim tablicama.

Aeroprofil NACA	Gornji C_l -greška	Donji C_l -greška	C_d -greška
65 – 209	0 %	7%	1%
65 ₂ – 215	11 %	14%	4%
65 – 410	4%	8%	1%
65 ₃ – 018	4%	10%	1%
65 ₁ – 412	10%	2%	5%

Tablica 3.6: Greška interpolacije dvostruko filtriranog skupa podataka

Aeroprofil NACA	Širina DB	Širina DB-greška	DB/ C_d
65 – 209	0,2265	3%	53,93
65 ₂ – 215	0,5066	8%	107,79
65 – 410	0,3049	1%	72,60
65 ₃ – 018	0,7325	3%	143,63
65 ₁ – 412	0,3976	14%	90,36

Tablica 3.7: Interpolanti širine DB za dvostruko filtrirani skup podataka

Za dobivanje rezultata do sada se koristio kvadratni polinom oblika 3.1, a u tablici 3.8 prikazani su interpolirani rezultati koji se odnose na *drag bucket* primjenom polinoma oblika 3.2.

Aeroprofil NACA	Širina DB	Širina DB-greška	DB/ C_d
65 – 209	0,2296	4%	57,40
65 ₂ – 215	0,5200	5%	113,04
65 – 410	0,2865	5%	68,21
65 ₃ – 018	0,7706	8%	151,10
65 ₁ – 412	0,3929	13%	89,30

Tablica 3.8: Interpolanti širine DB za polinom 3.2

Širina DB i omjeri *drag bucket*-a i koeficijenta otpora C_d nešto više odstupaju od stvarnih vrijednosti u odnosu na polinom 2. stupnja. Aerodinamički gledano, obje primjene pokazuju da od testiranih aeroprofila najbolju karakteristiku posjeduje aeroprofil 65₃ – 018.

3.3.2. Linearna regresija

Osim RBF interpolacije, za analizu podataka primjenit će se i polinomijalna linearna regresija pomoću programskog jezika *Python* te alata *scikit-learn* [17]. Definicija koordinata, odabir skupa aeroprofila i testni aeroprofil isti su kao i u RBF metodi kako bi se dvije metode mogle direktno usporediti.

Predviđanje vrijednosti gornjeg C_l po točnosti je bolje od RBF metode s kvadratnim polinomom, ali nešto lošije od RBF metode s polinomom 1. stupnja. Predviđanje koeficijenta otpora C_d gotovo je identično u sva tri slučaja, no primjetna razlika javlja se kod predviđanja donjeg C_l gdje, od sva tri načina, linearna regresija najbolje pretpostavlja vrijednosti.

	Gornji C_l	Donji C_l	C_l
Koeficijent determinacije r^2	0.8592	0.9919	0.8796

Tablica 3.9: Koeficijenti determinacije nakon predviđanja

Aeroprofil NACA	Širina DB	Širina DB-greška	DB/ C_d
65 – 209	0.2022	8%	50.51
65 ₂ – 215	0.5114	7%	111.57
65 – 410	0.2974	1%	70.73
65 ₃ – 018	0.7322	3%	145.69
65 ₁ – 412	0.3899	12%	88.31

Tablica 3.10: Predviđene vrijednosti DB linearnom regresijom

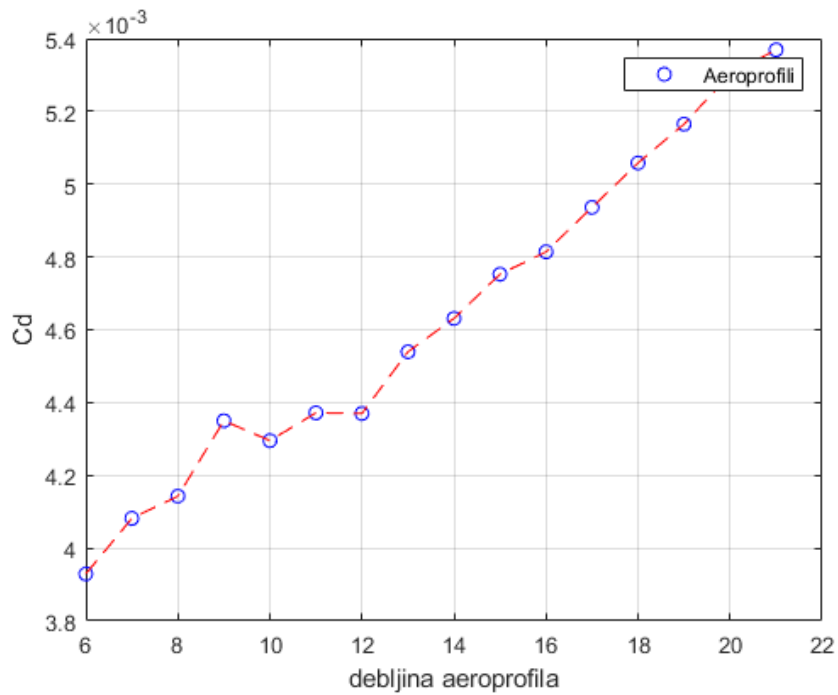
Kada se skupu aeroprofila za učenje modela regresije pridoda jedan dodatni aeroprofil, točnost predviđanja naraste, a dodani aeroprofil u ovom slučaju je NACA65₁ – 412 te novi koeficijenti determinacije koji se odnose na skup od 13 aeroprofila dani su tablicom 3.11.

	Gornji C_l	Donji C_l	C_l
Koeficijent determinacije r^2	0.9180	0.9928	0.8912

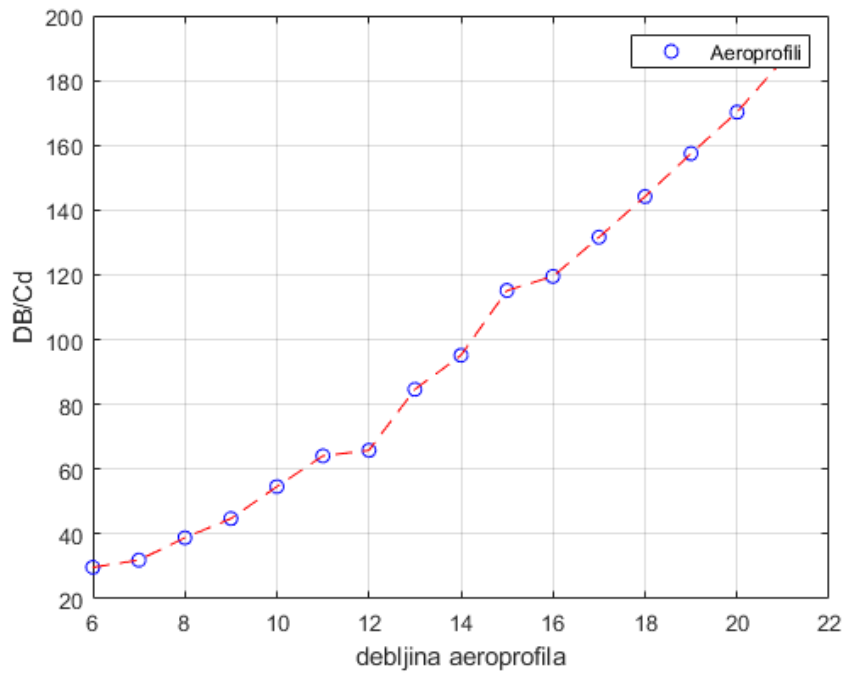
Tablica 3.11: Koeficijenti determinacije nakon predviđanja za 13 aeroprofila

Nakon pokušaja utvrđivanja korelacije između dostupnih aeroprofila za koje posjedujemo eksperimentalna mjerenja, u sljedećim grafovima prikazat će se razni aeroprofilu u ovisnosti o njihovom omjeru debljine i $\frac{DB}{C_d}$ te debljine i C_d , gdje je debljina izražena u postocima tetive. Ovog puta skup podataka za učenje obuhvaća sve jednostruko filtrirane aeroprofile za koja su dostupna mjerenja, a metodom polinomijalne linearne regresije traže se aeroprofilu za koja mjerenja nisu dostupna.

Za prvi slučaj promatraju se aeroprofilu podserije "5" kojima je nominalni koeficijent uzgona jednak nuli te imaju srednju liniju $a = 1$. Prema grafovima 3.15 i 3.14 može se primijetiti da i koeficijent otpora i omjer $\frac{DB}{C_d}$ rastu s debljinom aeroprofila, što fizikalno ima smisla. Iako ima najveći koeficijent otpora, aeroprofil NACA 65₄ – 021 ima najširi raspon *drag bucketa* zbog čega mu je omjer $\frac{DB}{C_d}$ također najveći.

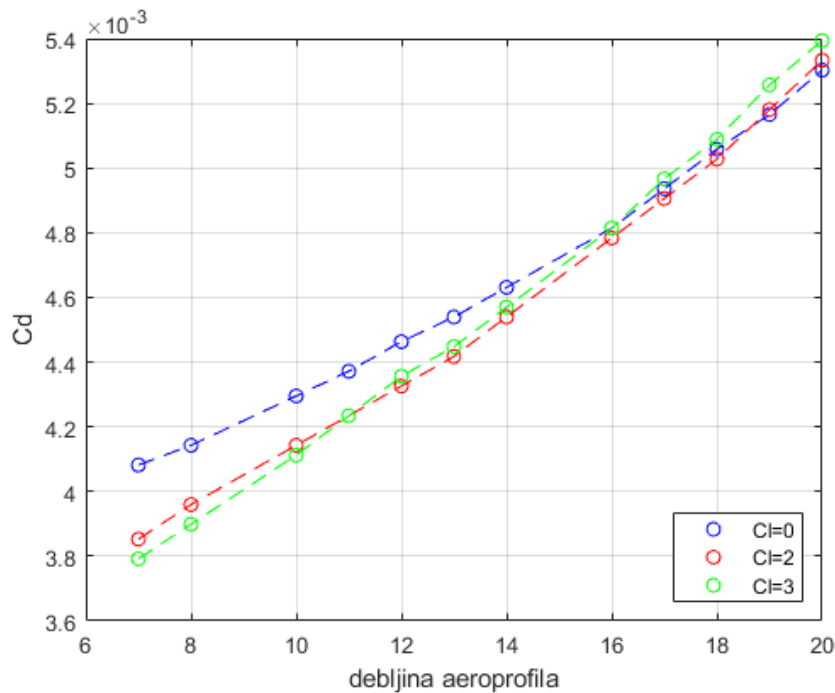


Slika 3.14: Koeficijenti otpora aeroprofila za $C_l = 0$

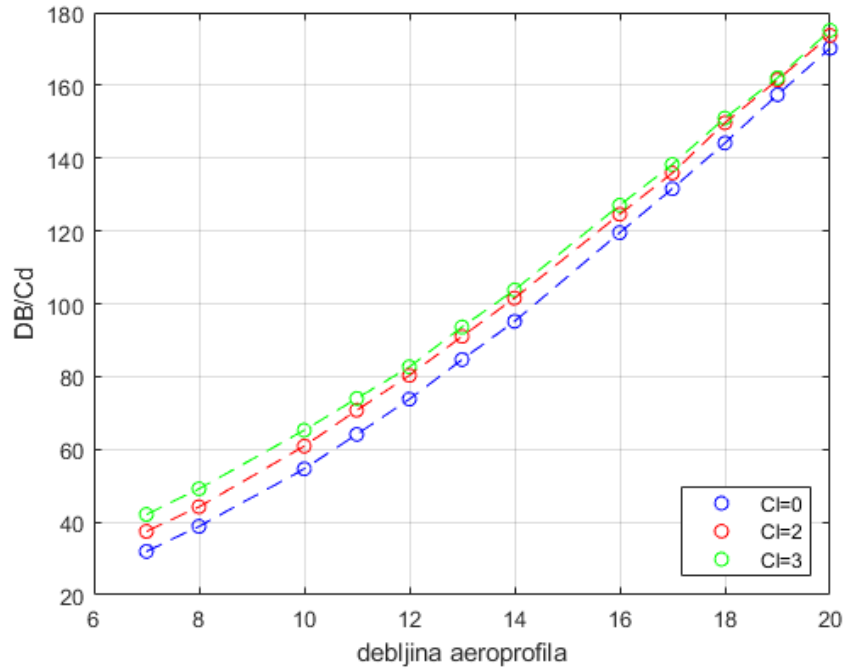


Slika 3.15: Parametri $\frac{DB}{C_d}$ aeroprofila za $C_l = 0$

U drugom slučaju uspoređuju se samo aproksimirani aeroprofil podserije "5" nominalnog koeficijenta uzgona $C_l = 0$, $C_l = 2$ i $C_l = 3$ te $a = 1$. Iz grafova 3.16 i 3.17 primjećuje se da kod tanjih aeroprofila, manji otpor posjeduju oni aeroprofil s većim koeficijentom uzgona, dok kod debljih dolazi do inverzne karakteristike. Što se tiče omjera $\frac{DB}{C_d}$, najveći omjer imaju deblji aeroprofil većeg nominalnog koeficijenta uzgona. U ovom slučaju najveći parametar $\frac{DB}{C_d}$ odnosi se na aeroprofil NACA 65₄ – 321.



Slika 3.16: Koeficijenti otpora aeroprofila za $C_l = 0, 2, 3$

Slika 3.17: Parametri $\frac{DB}{C_d}$ aeroprofila za $C_l = 0, 2, 3$

4 | Zaključak

Laminarna serija projektirana je da radi dobro oko idealnog napadnog kuta, a eksperimenti impliciraju da pod idealnim napadnim kutem laminarna sekcija generalno ima najpovoljnije aerodinamičke karakteristike. Za dani Re i c_{l_i} , prve metrike dobrote aeroprofila koje su nameću, dane su širinom *drag bucketa* i njegovim oblikom.

Metoda konačnih volumena *RANS* modelom turbulencije ne prikazuje oblik *drag bucketa*, dok je XFOIL u tome prilično uspješan. Problem sa samim podacima vidi se u nesimetričnosti aerodinamičkih svojstava, gdje bi ona prema teoriji trebala biti simetrična oko idealnog napadnog kuta. Naslijeđeni podaci fizičkih pokusa obrađeni su metodama interpolacije radijalnim baznim funkcijama te polinomijalnom linearnom regresijom. Uzevši omjer širine *drag bucketa* i njenog odgovarajućeg koeficijenta otpora kao relevantan parametar za kakvoću profila, omogućuje se direktna usporedba različitih aeroprofila za jedan fiksni nazivni koeficijent uzgona što može biti vrlo praktično pri odabiru aeroprofila u fazi konstruiranja.

Literatura

- [1] Holger Wendland. Konstruktion und untersuchung radialer basisfunktionen mit kompaktem träger. *Göttingen, Georg-August-Universität zu Göttingen, Diss*, 1996.
- [2] Laurence K Loftin. *Quest for performance: The evolution of modern aircraft*. Number 468. Scientific and Technical Information Branch, National Aeronautics and Space . . . , 1985.
- [3] Ira ABBOTT, Albert DOENHOFF, and Louis STIVERS. Summary of airfoil data. 01 1945.
- [4] Th Theodorsen. Theory of wing sections of arbitrary shape. 01 1931.
- [5] C. L. Ladson and C. W. Brooks. Development of a computer program to obtain ordinates for naca-6 and 6a-series airfoils. 1974.
- [6] Eastman Jacobs. Preliminary report on laminar flow airfoils and new methods adopted for airfoil and boundary-layer investigations. 07 1939.
- [7] Irven Naiman. Numerical evaluation by harmonic analysis of the epsilon-function of the theodorsen arbitrary-airfoil potential theory. page 17, 08 1945.
- [8] Ralph Carmichael. Algorithm for calculating coordinates of cambered naca airfoils at specified chord locations. 10 2001.
- [9] Zdravko Virag and Ivo Džijan. Računalna dinamika fluida. *Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb*, 2014.

- [10] Mark Drela. Xfoil: An analysis and design system for low reynolds number airfoils. volume 54, 06 1989.
- [11] Wilna Toit. Radial basis function interpolation. 09 2021.
- [12] Mark Vandam, D. Kimbrough Oller, Sophie Ambrose, Sharmistha Gray, Jeffrey Richards, Jill Gilkerson, Noah Silbert, and Mary Moeller. Automated vocal analysis of children with hearing loss and their typical and atypical peers. *Ear and hearing*, 36, 01 2015.
- [13] Hrvoje Jasak, Aleksandar Jemcov, Zeljko Tukovic, et al. Openfoam: A c++ library for complex physics simulations. In *International workshop on coupled methods in numerical dynamics*, volume 1000, pages 1–20. IUC Dubrovnik Croatia, 2007.
- [14] Vecchio César. Code-saturne, <https://www.code-saturne.org/forum/viewtopic.php?t=957>, 2010.
- [15] Ankit Rohatgi. Webplotdigitizer: Version 4.5, 2021.
- [16] joslorgom. Github, <https://github.com/joslorgom/RBFinterp/>, 2018.
- [17] scikit-learn, <https://scikit-learn.org/stable/>, 2021.