

# Procjena zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni za bimodalni spektar naprezanja

---

**Večerić, Sara**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:159636>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-10**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ZAVRŠNI RAD**

**Sara Večerić**

Zagreb, 2021.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

---

# Procjena zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni za bimodalni spektar naprezanja

---

Mentori:

**Doc. dr. sc. Zvonimir Tomičević,**

**mag.ing.mech.**

**Dr. sc. Damjan Čakmak, mag.ing.mech.**

Studentica:

**Sara Večerić**

Zagreb, 2021.

~Zahvala~

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru, doc. dr. sc. Zvonimiru Tomičeviću na iskazanom povjerenju tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem svojim prijateljima koji su mi uljepšali i olakšali vrijeme tijekom studija.

Zahvaljujem svojim roditeljima i sestri Ivoni na njihovoj bezuvjetnoj podršci i nepresušenom izvoru strpljenja bez čega moje obrazovanje na preddiplomskom studiju ne bi bilo moguće.

Naposljetku, posebno zahvaljujem komentoru dr. sc. Damjanu Čakmaku na iskazanom povjerenju, strpljenju, te uloženom trudu i vremenu. Zahvaljujem na korektnom i ugodnom odnosu, podijeljenom znanju, korisnim savjetima i smjernicama koje su bile esencijalne u izradi ovog rada.

Sara Večerić,  
Zagreb, 30. kolovoza 2021.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomatske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomatske ispite studija strojarstva za smjerove.



Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Sara Večerić** JMBAG: **0035212809**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Procjena zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni za bimodalni spektar naprezanja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Estimation of fatigue in the time and frequency domains for the bimodal stress spectrum**

Opis zadatka:

Zamor materijala uzrokovan stohastičnim vibracijama čest je razlog kolapsa konstrukcija u tehničkoj praksi. Metoda „toka kiše“ (eng. *rainflow*) smatra se najtočnijom metodom za brojanje ciklusa nepravilnih amplituda. *Rainflow* metoda omogućuje pojednostavljenje složenih povijesti naprezanja različitih amplituda na niz jednostavnih ciklusa naprezanja konstantnih amplituda. Na takav niz pojednostavljenih ciklusa toka kiše moguće je primijeniti Palmgren-Minerovo pravilo za procjenu nakupljenog oštećenja u konstrukciji. Međutim, *rainflow* metoda postaje računalno intenzivna za vrlo duge povijesti naprezanja. U tom slučaju, prikladnije je koristiti približne *rainflow* spektralne teorije u frekvencijskoj domeni. Pri tome su posebno važni tzv. bimodalni spektri naprezanja u kojima dominiraju dvije osnovne frekvencije.

U ovom radu potrebno je osmisliti i razviti algoritam za procjenu zamora na temelju bimodalne stohastičke povijesti naprezanja korištenjem *rainflow* metode, u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

Tijekom rada potrebno je:

1. Opisati fenomen zamora materijala i način procjene zamora pomoću Palmgren-Minerovog pravila.
2. Detaljno opisati način brojanja ciklusa nepravilnih amplituda *rainflow* metodom za ponavljajuću povijest naprezanja (eng. *repeating time history*) prema ASTM E1049-85 normi.
3. Razviti i dokumentirati algoritam za procjenu visokocikličkog zamora *rainflow* metodom u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.
4. Koristiti približne spektralne teorije: 1) Bendat, 2) Dirlik, 3) Tovo-Benasciutti i 4) Jiao-Moan, u frekvencijskoj domeni.
5. Međusobno usporediti rezultate spektralnih teorija s obzirom na proračun u vremenskoj domeni.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

6. svibnja 2021.

**2. rok (izvanredni):** 5. srpnja 2021.  
**3. rok:** 23. rujna 2021.

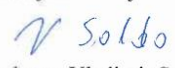
**2. rok (izvanredni):** 9.7.2021.  
**3. rok:** 27.9. – 1.10.2021.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

  
Doc. dr. sc. Zvonimir Tomičević

  
Dr. sc. Damjan Čakmak

  
Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

## Sadržaj

<b>Sadržaj</b> .....	<b>I</b>
<b>Popis slika</b> .....	<b>III</b>
<b>Popis tablica</b> .....	<b>IV</b>
<b>Popis oznaka</b> .....	<b>V</b>
<b>Popis skraćenica</b> .....	<b>VI</b>
<b>Sažetak</b> .....	<b>VII</b>
<b>Summary</b> .....	<b>VIII</b>
<b>1. Uvod</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Zamor</b> .....	<b>2</b>
2.1. Problematika zamornog loma.....	2
2.2. S-N metoda.....	6
<b>3. Metode brojanja ciklusa</b> .....	<b>9</b>
3.1. Rainflow metoda (metoda brojanja toka kiše).....	9
3.2. Rainflow metoda za ponavljajuću povijest naprežanja.....	10
3.3. Ostale metode brojanja ciklusa.....	11
3.3.1. Brojanje prelaska nivoa (Level-Crossing Counting).....	12
3.3.2. Brojanje raspona (Range Counting).....	12
3.3.3. Brojanje vrhova (Peak Counting).....	12
<b>4. Slučajan signal</b> .....	<b>13</b>
4.1. Statistička parametrizacija Gaussovske distribucije .....	13
4.2. Fourierova transformacija slučajnog signala .....	16
4.2.1. Diskretna Fourierova transformacija.....	16
4.2.2. Brza Fourierova transformacija.....	17
4.2.3. Inverzna Fourierova transformacija.....	18
4.3. Spektralni parametri slučajnog signala .....	19
4.4. Procedura za stvaranje slučajnog signala .....	20
<b>5. Približne spektralne teorije</b> .....	<b>23</b>
5.1. Bendat – NB/LCC spektralna teorija.....	23
5.2. Dirlik.....	24
5.3. Tovo i Benasciutti.....	25
5.4. Jiao-Moan.....	26
<b>6. Usporedba rezultata spektralnih teorija</b> .....	<b>30</b>
6.1. Referentni primjer .....	30
6.2. Usporedba rezultata $f_1 = 1 - 8,5 \text{ Hz}$ , $f_2 = 10 \text{ Hz}$ .....	36

6.3.	Usporedba rezultata $f_1 = 1 - 95 \text{ Hz}$ , $f_2 = 100 \text{ Hz}$ .....	37
6.4.	Usporedba rezultata $S_{\text{PSD1}} = S_{\text{PSD1}} = 10\,000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .....	38
6.5.	Usporedba rezultata $S_{\text{PSD1}} = 10\,000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , $S_{\text{PSD2}} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .....	39
6.6.	Usporedba rezultata $S_{\text{PSD1}} = 10\,000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , $S_{\text{PSD2}} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .....	40
6.7.	Usporedba rezultata $S_{\text{PSD1}} = 10\,000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , $S_{\text{PSD2}} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .....	41
<b>7.</b>	<b>Zaključak</b> .....	<b>42</b>
	<b>Literatura</b> .....	<b>43</b>

## Popis slika

Slika 1. Propagacija mikropukotine preko kristalnih zrna [1] .....	2
Slika 2. Statički vlačni pokus a) $\sigma$ , $S$ - $e$ dijagram, b) korelacija $A_0/A$ sa uzorkom [2] .....	4
Slika 3. Dinamičko naprezanje: a) harmonijsko, b) nepravilne amplitude [2].....	5
Slika 4. Slučajevi harmonijskog cikličkog naprezanja ovisni o vremenu [3].....	6
Slika 5. $S$ - $N$ krivulja za čelični materijal [2].....	7
Slika 6. Povijest naprezanja s razvrstanim ciklusima konstantnih amplituda [4] .....	8
Slika 7. Primjer Rainflow metode [1].....	9
Slika 8. Primjer Rainflow metode za ponavljajuću povijest naprezanja [5] .....	11
Slika 9. Metoda brojanja vrhova .....	12
Slika 10. a) PSD dijagram b) Slučajan signal.....	30
Slika 11. Gaussova krivulja.....	31
Slika 12. Histogram – usporedba metoda .....	31
Slika 13. Kumulativno oštećenje.....	32
Slika 14. PSD dijagram $f_1 = 8,5$ Hz i $f_2 = 10$ Hz.....	35
Slika 15. Histogram – usporedba metoda NB odziv.....	35
Slika 16. Kumulativno oštećenje – NB odziv.....	36
Slika 17. Usporedba spektralnih metoda $f_1 = 1 - 8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz .....	37
Slika 18. Usporedba spektralnih metoda $f_1 = 1 - 95$ Hz, $f_2 = 100$ Hz.....	38
Slika 19. Usporedba spektralnih metoda $S_{PSD1} = S_{PSD2} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz.....	39
Slika 20. Usporedba spektralnih metoda $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz, $S_{PSD2} = 250$ MPa <sup>2</sup> /Hz.....	40
Slika 21. Usporedba spektralnih metoda $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz, $S_{PSD2} = 25$ MPa <sup>2</sup> /Hz.....	40
Slika 22. Usporedba spektralnih metoda $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz, $S_{PSD2} = 2,5$ MPa <sup>2</sup> /Hz.....	41



---

## Popis tablica

---

Tablica 1. Prikaz rezultata svih navedenih metoda za $f_1 = 1-8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz.....	33
Tablica 2. Prikaz odnosa vremena do loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni za $f_1 = 1-8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz.....	34

## Popis oznaka

### Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
${}_2F_1(\cdot)$	–	Gausovska/obična HiperGeometrijska funkcija
$b$	–	Basquinov zamorni eksponent
$B'_f$	$(\text{N/mm}^2)^m$	Spektralni eksponent zamorne čvrstoće
$b_{\text{TB}}^{\text{app}}$	–	Tovo i Benasciutti težinski faktor ( $0 \leq b_{\text{TB}}^{\text{app}} \leq 1$ )
$C_r$	–	Faktor krijeste/vrha ( $0 \leq C_r \leq \infty$ )
$D$	–	Ukupno zamorno oštećenje ( $0 \leq D \leq 1$ )
$D_{1,2,3}$	–	Dirlikovi parametri prilagodbe ( $0 \leq D_{1,2,3} \leq 1$ )
$e$	–	Baza prirodnog logaritma ( $e \cong 2.718281$ )
$E[0]$	Hz	Očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi
$E[P]$	Hz	Očekivani broj vrhova po sekundi
$E_i[0], v_{0,i}$	Hz	Očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi $i$ -tog procesa
$\text{erf}(\cdot)$	–	Funkcija greške ( $0 \leq  \text{erf}(\cdot)  \leq 1$ )
$f$	Hz	Frekvencija uzbude ( $f = \Omega / (2\pi)$ )
$f_{\text{Nyq}}$	Hz	Nyquistova frekvencija ( $f_{\text{Nyq}} = f_{\text{sr}} / 2$ )
$f_{\text{sr}}$	Hz	Frekvencija uzorkovanja
$i$	–	Imaginarna jedinica ( $i = \sqrt{-1}$ )
$i, j, k, n$	–	Indeks (cijeli broj, $i, j, k, n = 1 \dots \infty$ )
$m$	–	Spektralni zamorni eksponent ( $m = -1/b$ )
$m_n$	$(\text{N/mm}^2)^2 \text{Hz}^n$	$n$ -ti spektralni moment
$m_{n,i}$	$(\text{N/mm}^2)^2 \text{Hz}^n$	$n$ -ti spektralni moment $i$ -tog procesa
$N$	–	Ukupni broj varijabli
$N_f$	–	Broj ciklusa do zamornog loma
$p_{\text{PDF}}$	$1/(\text{N/mm}^2)$	Funkcija gustoće vjerojatnosti naprezanja
$q$	–	Bezdimenzijska amplituda/vrijednost
$R$	–	Dirlikov parametar prilagodbe ( $0 \leq  R  \leq 1$ )
$S_a$	$\text{N/mm}^2$	Amplituda inženjerskog naprezanja ( $S_a = S_r / 2$ )
$S'_f$	$\text{N/mm}^2$	Eksponent zamorne čvrstoće
$S_h$	$\text{N/mm}^2$	Povijest naprezanja
$S_{\text{PSD}}$	$(\text{N/mm}^2)^2/\text{Hz}$	Spektralna gustoća snage naprezanja
$S_r$	$\text{N/mm}^2$	Raspon inženjerskog naprezanja
$S_{\text{RMS}}, x_{\text{RMS}}$	$\text{N/mm}^2$	Efektivna vrijednost naprezanja
$t$	s	Vrijeme
$T_f$	s	Vrijeme do zamornog loma
$t_{\text{max}}$	s	Ukupno vrijeme
$v_{0,P}$	Hz	Očekivana frekvencija niskofrekventne komponente procesa
$x$	$\text{N/mm}^2$	Varijabla naprezanja
$Z$	–	Normalizirani raspon naprezanja
$\mathcal{F}(\cdot)$	$\text{N/mm}^2$	Rezultat Fourierove transformacije povijesti naprezanja
$\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$	$\text{N/mm}^2$	Rezultat inverzne Fourierove transformacije naprezanja

## Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
$\alpha_n$	–	$n$ -ti bezdimenzijski spektralni parametar
$\Gamma(\cdot)$	–	Potpuna Eulerova Gama funkcija
$\gamma, \alpha_2$	–	Faktor nepravilnosti ( $0 \leq \gamma \leq 1$ )
$\delta, \alpha_1$	–	prvi bezdimenzijski spektralni parametar ( $0 \leq \delta \leq 1$ )
$\delta_2$	–	Vanmarckeov spektralni parametar drugog procesa (visokofrekventna komponenta)
$\kappa$	–	Faktor spljoštenosti/zašiljenosti
$\lambda$	–	Parametar spektralne širine pojasa ( $\lambda = \sqrt{1 - \gamma^2}$ )
$\lambda_{0,i}$	–	Omjer spektralnih momenata $i$ -tog procesa
$\mu, \bar{x}$	N/mm <sup>2</sup>	Aritmetička sredina naprezanja
$\pi$	rad	Ludolfov broj ( $\pi \cong 3.14159$ )
$\sigma$	N/mm <sup>2</sup>	Standardna devijacija naprezanja
$\zeta, S_k$	–	Faktor asimetrije/iskrivljenosti
$\sigma^2, \text{Var}(x)$	(N/mm <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>	Varijanca naprezanja
$\varphi$	rad	Fazni kut
$\Phi(\cdot)$	–	Bezdimenzijska funkcija standardne normalne distribucije
$\Omega$	rad/s	Kružna frekvencija uzbude

## Popis skraćenica

Oznaka	Puno značenje
a	Amplituda
anlt	Analitički
c	Kumulativno
CLT	Centralni granični teorem
DFT	Diskretna Fourierova transformacija
Dr	Dirlik
FFT	Brza Fourierova transformacija
FT	Fourierova transformacija
HG	HiperGeometrijski
IFFT	Inverzna brza Fourierova transformacija
JM	Jiao i Moan
LCC	Brojanje prelaska nivoa
NB	Uskopojasno
Nyq	Nyquist
PC	Brojanje vrhova
PSD	Spektralna gustoća snage
r	Raspon
RC	Brojanje raspona
RFC	Brojanje ciklusa tîka kiše
RL	Rice i Lalanne
RMS	Efektivna vrijednost
TB	Tovo i Benasciutti

## Sažetak

Ovaj rad bavi se temom zamora materijala uzrokovanog stohastičkim vibracijama. U ovom radu detaljno je opisana *Rainflow* metoda brojanja ciklusa (metoda „toka kiše“) za ponavljajuću povijest naprezanja. *Rainflow* metoda za ponavljajuću povijest naprezanja je metoda kojom se pojednostavljaju složene povijesti naprezanja promjenjivih amplituda u niz jednostavnih ciklusa naprezanja konstantnih amplituda što omogućuje proračun zamora. Za duge povijesti naprezanja, proračun visokocikličkog zamora *Rainflow* metodom u vremenskoj domeni postaje računalno dugotrajan. U svrhu pojednostavljenja, u ovom radu opisane su i korištene spektralne teorije u frekvencijskoj domeni.

Na početku rada opisan je fenomen zamornog loma, širenje pukotine u materijalu, Wöhlerova krivulja te *S-N* metoda proračuna zamora.

U drugom dijelu rada detaljno je opisan način brojanja ciklusa nepravilnih amplituda *Rainflow* metodom za ponavljajuću povijest naprezanja prema ASTM E1049-85 normi.

Nadalje, opisane su sve formulacije potrebne za procjenu visokocikličkog zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Detaljno su opisane približne spektralne teorije: Bendat, Dirik, Tovo-Benasciutti i Jiao-Moan.

U zadnjem dijelu provedena je analiza rezultata spektralnih teorija s obzirom na dobivene rezultate u vremenskoj domeni. Analiza je provedena pomoću algoritma napisanog u programskom paketu *MATLab R2017b*.

Ključne riječi: *zamorni lom, Rainflow metoda, povijest naprezanja, kumulirano oštećenje, broj ciklusa, spektralne teorije, frekvencijska domena.*

## Summary

This thesis deals with the topic of material fatigue caused stochastic vibrations. This thesis describes the Rainflow method of cycle counting for repeating stress history. Rainflow method for repeating stress history is a method used to simplify complex variable amplitude stress histories into a series of simple constant amplitude stress cycles that allows fatigue calculation. For long stress histories, the calculation of high-cycle fatigue by the Rainflow method in the time domain becomes computationally time-consuming. For the purpose of simplicity, spectral theories in the frequency domain are also explained and used.

At the beginning, the phenomenon of fatigue fracture, crack propagation in the material, Wöhler curve and  $S-N$  method of fatigue calculation are described.

The second part of the thesis describes the method of counting cycles of irregular amplitudes by the Rainflow method for the repeating stress history according to the ASTM E1049-85 standard.

Furthermore, the formulations required to estimate high-cycle fatigue in the time and frequency domains are described. Spectral theories: Bendat, Dirlik, Tovo-Benasciutti and Jiao Moan are also described.

The last part analyses and compares the results of spectral theories with the results obtained in the time domain. The analysis was performed using the algorithm written in the software package *MATLab R2017b*.

Keywords: *fatigue fracture, Rainflow method, stress history, cumulative damage, number of cycles, spectral theories, frequency domain.*

## 1. Uvod

Najčešći uzrok mehaničkih oštećenja je upravo zamor materijala. Fenomen zamora materijala veoma je kompleksan, te predstavlja veliki izazov današnjim inženjerima. Opterećenje pri kojem dolazi do zamora materijala je promjenjivo u vremenu. Za rješavanje problema zamora materijala, predložene su brojne približne metode za brojanje ciklusa opterećenja. Neke od njih su metoda brojanja prelaska nivoa, brojanje vrhova, brojanje raspona i *Rainflow* metoda. U ovom radu obrađena je *Rainflow* metoda za brojanje ciklusa, koja se smatra najtočnijom metodom. Proračun za brojanje ciklusa *Rainflow* metodom proveden je u vremenskoj domeni. Takav proračun za duge povijesti naprezanja postaje veoma zahtjevan, stoga se primjenjuju spektralne teorije koje pojednostavljaju proračun. Spektralne teorije definirane su u frekvencijskoj domeni.

Rad se bavi procjenom kumuliranog oštećenja tj. životnog vijeka konstrukcije korištenjem *Rainflow* metode u vremenskoj domeni i u frekvencijskoj domeni. Cilj ovog rada je usporedba rezultata spektralnih *Rainflow* teorija u odnosu na rezultate dobivene *Rainflow* metodom u vremenskoj domeni.

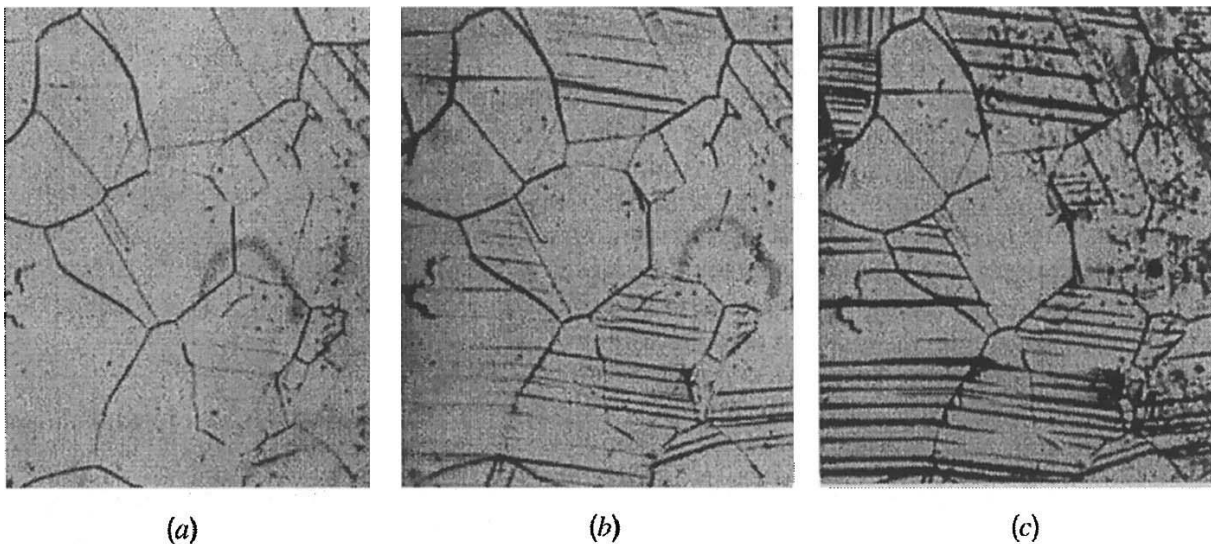
## 2. Zamor

### 2.1. Problematika zamornog loma

Zamor materijala je pojava postupnog razaranja materijala uslijed dugotrajnog, vremenski promjenjivog djelovanja dinamičkih naprezanja koji rezultiraju lomom strojnog dijela. S obzirom da se lomovi uslijed zamora često događaju bez ikakvog upozorenja, posljedice mogu biti katastrofalne.

Do mehaničkog loma može doći i u slučaju kada naprezanja u materijalu dosegnu graničnu vrijednost vlačne čvrstoće uslijed koje dolazi do potpunog loma materijala uz značajnu prethodnu plastičnu deformaciju. Lomovi uslijed zamora materijala najčešće nastaju kada su naprezanja manja od maksimalne vlačne čvrstoće.

Oštećenje uslijed zamora materijala manifestira se u obliku pukotine, i veže se sa ponašanjem grešaka u kristalnoj rešetci (dislokacije). Pukotine tj. diskontinuiteti unutar kristalne rešetke najčešće nastaju na mjestima gdje postoji koncentracija naprezanja. Lom počinje na mjestu najveće koncentracije naprezanja i pojavljuje se u obliku mikropukotine (Slika 1.) [1].



Slika 1. Propagacija mikropukotine preko kristalnih zrna [1]

Postoje tri faze loma kod zamora materijala: početna pukotina, širenje pukotine i trenutni lom. Širenjem pukotine smanjuje se gornja granica nosivosti materijala strojnog dijela. Pukotina se širi stalnom promjenom opterećenja. Do trajnog loma dolazi kada nosivi presjek strojnog dijela više ne može nositi nazivno opterećenje. Do trajnog loma dolazi u trenutku kada

je nametnuto naprezanje zbog smanjenja nosive površine naraslo na iznos jednak vlačnoj čvrstoći materijala.

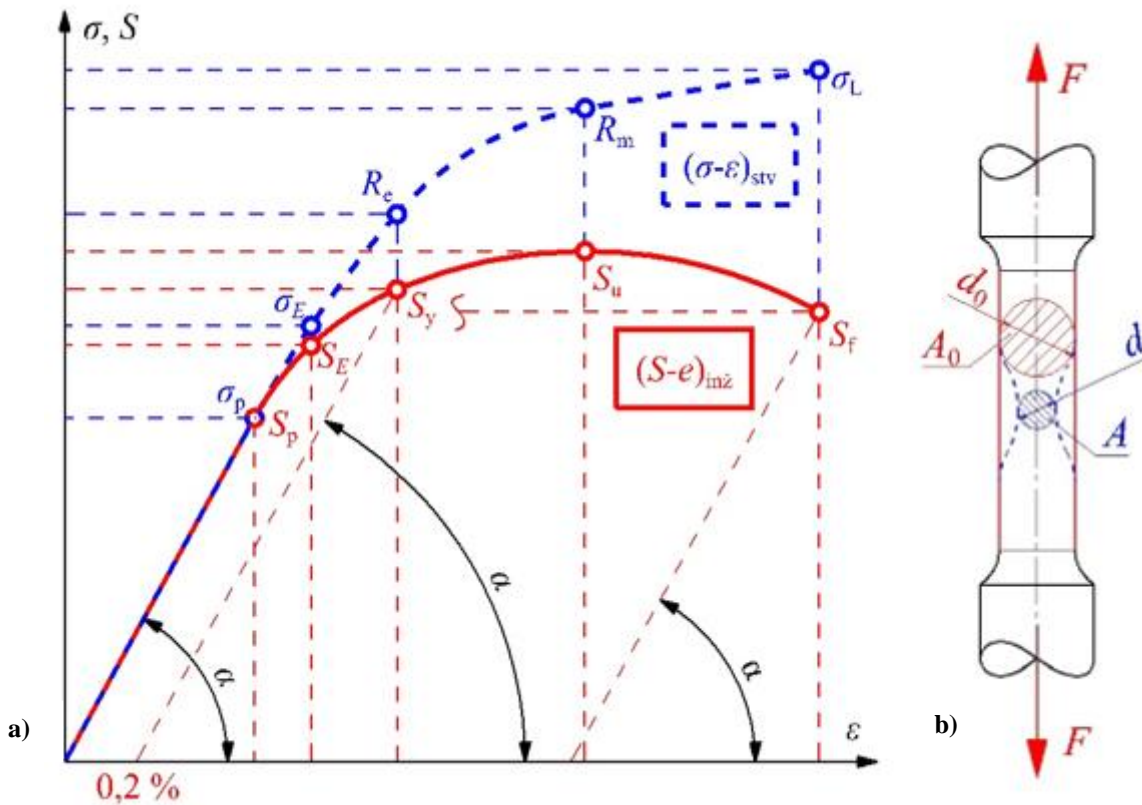
Problem zamora materijala uočen je prije više od 100 godina, te do danas je još uvijek samo djelomično shvaćen zbog svoje kompleksnosti.

Podjela zamora materijala s obzirom na trenutak nastupanja [2]:

- Visokociklički zamor:
  - lom nastupa nakon velikog broja ciklusa opterećenja ( $N_f > 10^5$ ),
  - naprezanja i deformacije su u elastičnom području,
  - koristi se  $S-N$  krivulja (Wohler, 1860.)
- Niskociklički zamor
  - Lom nastupa nakon  $10^2 - 10^5$  ciklusa,
  - Naprezanja i deformacije su u elastoplastičnom području,
  - Računa se broj ciklusa do iniciranja pukotine ( $N_i$ )  $\varepsilon-N$  metoda,
  - Računa se broj ciklusa rasta pukotine do kritične duljine  $N_p$
  - Računa se broj ciklusa do loma:  $N_f = N_i + N_p$

Na slici 2. prikazan je statički vlačni pokus pomoću kojeg se mogu definirati parametri koji se koriste za analizu zamora materijala. Postoji razlika između inženjerskog i stvarnog naprezanja i deformacije. Kod inženjerskog računanja naprezanja i deformacije koristi se pretpostavka da je poprečni presjek jednak početnom poprečnom presjeku  $A_0$  i uzima se kao konstantna vrijednost, i time je proračun pojednostavljen. Kod stvarnog naprezanja dolazi do kontrakcije tj. suženja presjeka, te se za proračun uzima poprečni presjek  $A$  na mjestu suženja.





Slika 2. Statički vlačni pokus a)  $\sigma, S$ - $e$  dijagram, b) korelacija  $A_0/A$  sa uzorkom [2]

Inženjersko naprezanje:

$$S = \frac{F}{A_0} \quad (2.1)$$

Stvarno naprezanje:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.2)$$

Inženjerska deformacija:

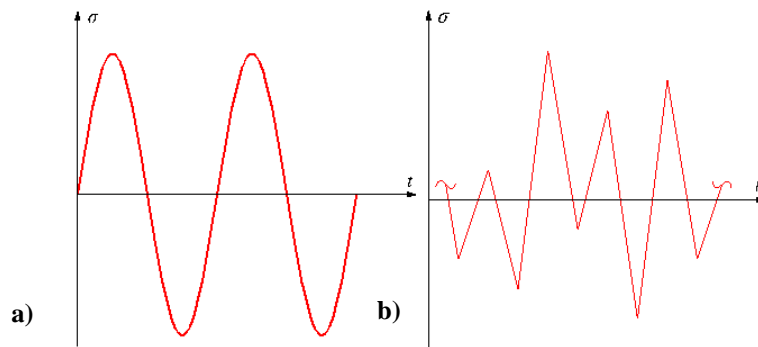
$$e = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (2.3)$$

Stvarna deformacija:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (2.4)$$

Slika 3. prikazuje dinamičko naprezanje ovisno o vremenu. Cikličko harmonijsko dinamičko opterećenje ovisno o vremenu, prikazano na slici 3.a), pravilna je promjena opterećenja tj.

periodička i opisana je sinusoidom. U realnim situacijama, ova pojava je poprilično rijetka, te se koristi u eksperimentalnim ispitivanjima.



**Slika 3. Dinamičko naprezanje: a) harmonijsko, b) nepravilne amplitude [2]**

Na slici 3.b) prikazano je stohastičko (slučajno) ili periodičko dinamičko opterećenje ovisno o vremenu, amplitude su nepravilne (promjenjive), stoga je slučaj prikazan na Slici 3.b) kompliciraniji u odnosu na proračun zamora u slučaju konstantne amplitude naprezanja (Slika 3.a)).

Pri proračunu konstrukcija, periodička dinamička opterećenja najčešće se aproksimiraju harmonijskim dinamičkim opterećenjem, uz uvjet da amplituda i srednje naprezanje ostaju konstantni tijekom vremena. Izrazi korišteni za računanje stvarnog naprezanja vrijede i za inženjersko naprezanje  $S$ .

Raspon naprezanja jednak je dvostrukoj amplitudi ili razlici najvećeg i najmanjeg naprezanja:

$$\sigma_r \equiv \Delta\sigma = |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = 2 \cdot \sigma_a. \quad (2.5)$$

Amplituda naprezanja jednaka je polovici raspona naprezanja:

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right| = \frac{\sigma_r}{2}. \quad (2.6)$$

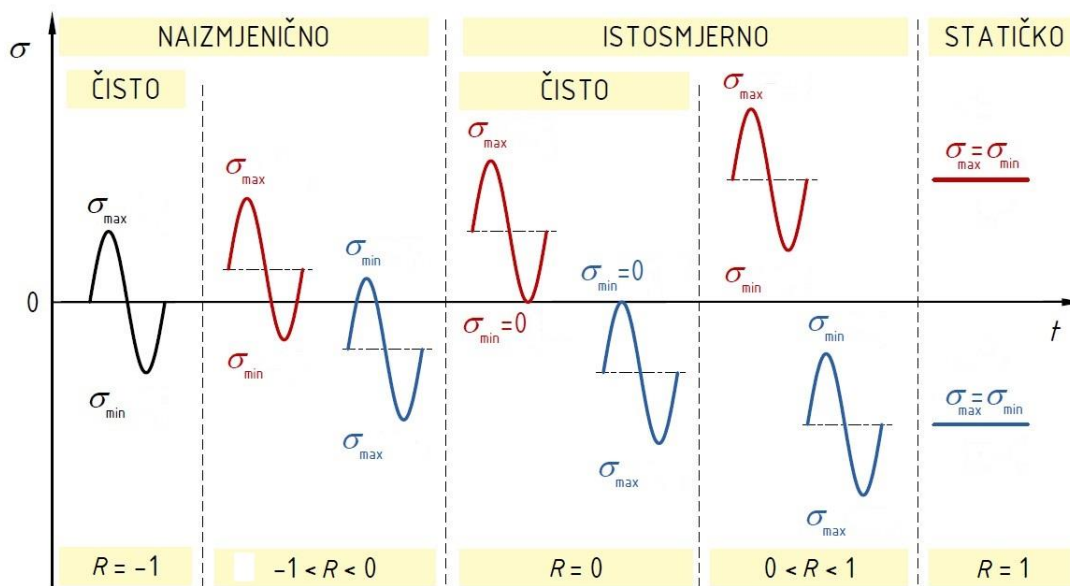
Srednje naprezanje jednako je srednjoj vrijednosti između najvećeg i najmanjeg naprezanja:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \quad (2.7)$$

Odnos graničnih naprezanja jednak je omjeru najmanjeg i najvećeg naprezanja:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (2.8)$$

Harmonijsko cikličko naprezanje određeno je odnosom graničnih naprezanja  $R$  i srednjom vrijednošću naprezanja. Odnos graničnih naprezanja određeno je granicama  $-1 < R < 1$ . Najjednostavniji oblik promjenjivog, dinamičkog opterećenja je kada je naprezanje čisto naizmjenično, slučaj  $R = -1$ . Takvo naprezanje obuhvaća i vlačno i tlačno područje s jednakim apsolutnim vrijednostima. Na slici 4. prikazani su slučajevi za različite vrijednosti  $R$ .



Slika 4. Slučajevi harmonijskog cikličkog naprezanja ovisni o vremenu [3]

## 2.2. S-N metoda

Dinamička izdržljivost mehaničko je svojstvo materijala koje pokazuje otpornost materijala dinamičkom naprezanju, a time i pojavi umora materijala. Wöhler je 1860. godine postavio temelje S-N metode [1]. Wöhlerove krivulje prikazuju ovisnost dinamičke čvrstoće o broju ciklusa  $N$  za određeni odnos graničnih naprezanja  $R$ . Wöhlerova krivulja prikazuje dinamičku čvrstoću materijala u ovisnosti o broju ciklusa  $N$ . Određuje se u laboratorijima ispitivanjem na uređajima koji se zovu umaralice. Provođi se tako da se identični uzorci izlažu različitim promjenjivim opterećenjima do pojave pukotine ili do potpunog loma, te se vrijednosti dobivene ispitivanjem zapisuju u dijagram. Srednje naprezanje je konstantno, a amplituda naprezanja se mijenja tj. smanjuje za svaki uzorak. Za svaki uzorak zapisuje se broj ciklusa  $N$  pri kojem je došlo do pukotine ili loma. Smanjenje amplitude naprezanja vrši se sve do trenutka kada se uzorak ne lomi iako je izdržao veliki broj graničnih ciklusa. U dijagram se

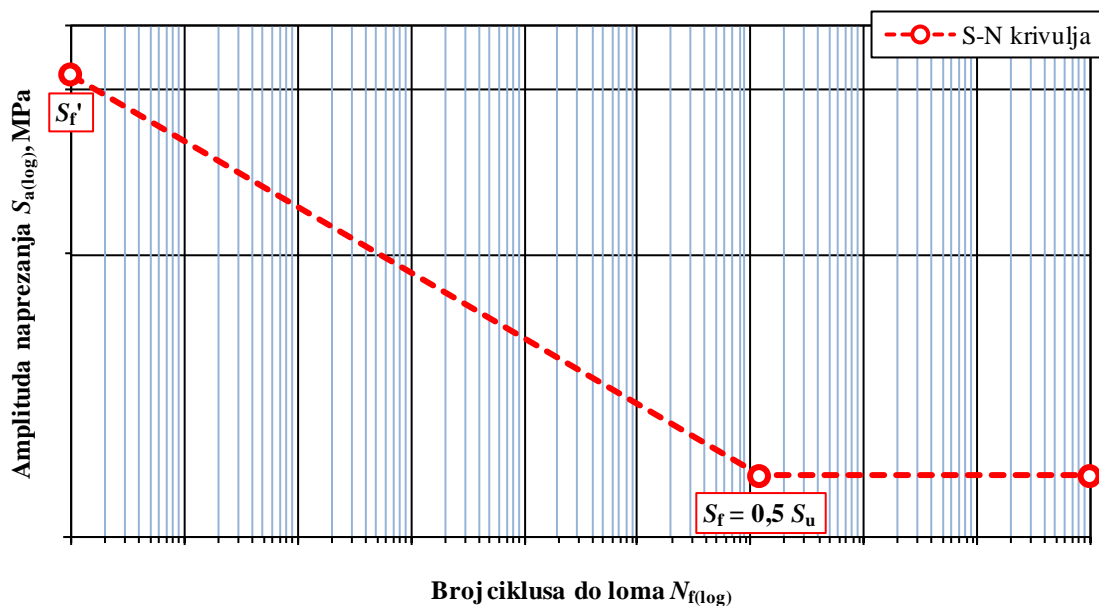
unose vrijednosti naprezanja i broj ciklusa pri kojem je došlo do loma uzorka. Jednadžba krivulje kroz te točke može se zapisati izrazom:

$$S_a = S_f' \cdot (N_f)^b, \quad (2.9)$$

gdje je  $S_f'$  koeficijent zamorne čvrstoće,  $b$  eksponent zamorne čvrstoće,  $S_a$  amplituda naprezanja, a  $N_f$  broj ciklusa do loma. Izraz vrijedi u slučaju kada je  $R = -1$ , tj. čisti naizmjeničan slučaj.

Wöhlerova krivulja obično se prikazuje u dvostrukom logaritamskom mjerilu zbog preglednosti [2]. Kada vrijednost amplitude dođe do pola vlačne čvrstoće, krivulja se nastavlja kao vodoravna. Taj dio predstavlja trajnu dinamičku čvrstoću ili trajnu zamornu čvrstoću, i ispod nje čelični materijali niske i srednje čvrstoće teoretski nikada ne dožive lom. Iskustvena vrijednost trajne dinamičke čvrstoće glasi:

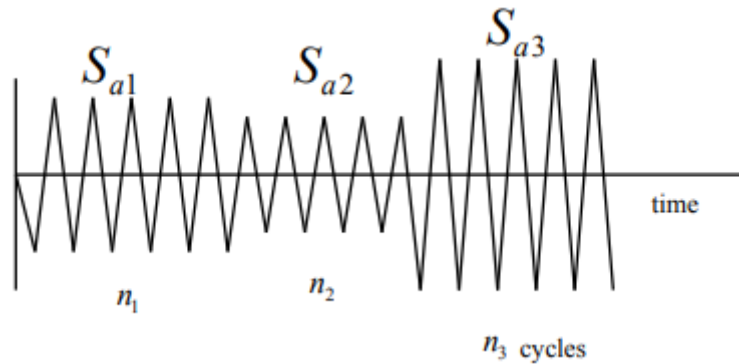
$$S_f \approx 0,5 \cdot S_u. \quad (2.10)$$



Slika 5. S - N krivulja za čelični materijal [2]

Izrazi su izvedeni za slučaj kada je  $R = -1$ , gdje je srednje naprezanje jednako nuli, što u praksi često nije slučaj. Potrebno je uvesti korektivne faktore koji uzimaju u obzir utjecaj srednjeg naprezanja. Srednje naprezanje može biti vlačno ili tlačno, gdje je vlačno naprezanje nepogodnije jer ubrzava pojavu zamora.

Kod stohastičkog opterećenja, uz dovoljno dugu povijest napreznja, može se takvo opterećenje smatrati preiodičkim. Na Slici 6. prikazan je povijest napreznja za već sredeno stohastičko opterećenje. Signal napreznja u vremenu razvrstan je po ciklusima, gdje je svaki ciklus određen pripadajućom konstantnom amplitudom napreznja. [4]



**Slika 6. Povijest napreznja s razvrstanim ciklusima konstantnih amplituda [4]**

Oštećenje uzrokovano jednim ciklusom definirano je izrazom:

$$D = \frac{1}{N}, \quad (2.11)$$

gdje je  $N$  broj ponavljanja istog ciklusa tj. srednji život do loma. Svaki ciklus ima pripadajuće kumulirano oštećenje koje je proporcionalno broju ciklusa do loma  $N_f$  pri konstantnoj amplitudi  $S_a$ . Oštećenje uzrokovano za više različitih  $n$  ciklusa je:

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (2.12)$$

Kumulirano (nakupljeno) oštećenje uslijed dinamičkog opterećenja s promjenjivom amplitudom prikazano je izrazom:

$$D_{\text{uk}} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} = \frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} \dots + \frac{n_n}{N_{fn}}, \quad (2.13)$$

gdje je  $D_{\text{uk}}$  ukupno kumulirano oštećenje,  $N$  je broj ciklusa određeno iz  $S$ - $N$  krivulje, a  $n_i$  je ukupan broj ciklusa pri konstantnoj amplitudi napreznja  $S_{ai}$ . Izrazom je matematički opisano Palmgren-Minerovo pravilo. Lom se predviđa kada zbroj omjera bude veći ili jednak od 1 tj. 100%. Kako bi se Palmgren-Minerovo pravilo moglo primijeniti potrebno je složeni ciklus promjenjive amplitude rastaviti na jednostavnije cikluse konstantne amplitude.

### 3. Metode brojanja ciklusa

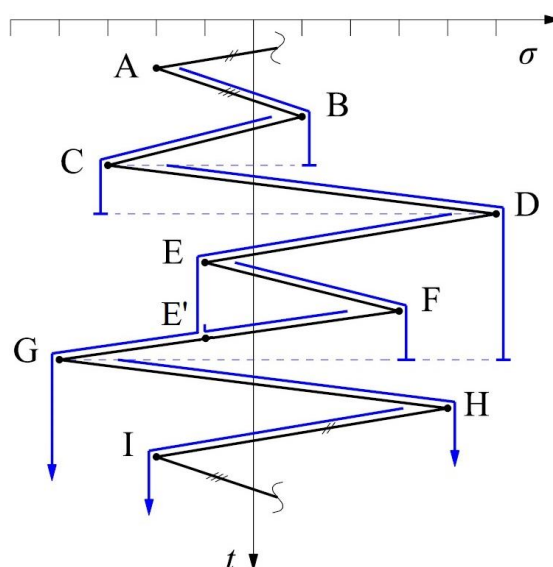
Povijest naprezanja najčešće je nepravilna, tj. stohastička/periodička. Kako bi se moglo koristiti Palmgren-Minerovo pravilo, objašnjeno u poglavlju 2., potrebno je takvu povijest naprezanja pojednostaviti kako bi se mogle prebrojati sve promjene tijekom trajanja signala. Prema ASTM normi dano je nekoliko metoda kojima se sažima složena povijest naprezanja. Metodama brojanja ciklusa identificira se podatak o broju pojava ciklusa određenog raspona naprezanja za složenu povijest naprezanja slučajnog signala.

Kako bi se povijest naprezanja mogla analizirati, potrebno je znati krajnje točke, tj. lokalne ekstreme. Uzimaju se u obzir samo vrhovi i udoline, a odbacuju se točke koje su između [5].

#### 3.1. Rainflow metoda (metoda brojanja toka kiše)

*Rainflow* metoda prepoznata je kao najpreciznija metoda za utvrđivanje oštećenja kompleksnog opterećenja zato što uzima u obzir i male i velike raspone naprezanja [4]. Razvili su je Matsuishi i Endo 1968. godine. *Rainflow* metodom ciklusi se razvrstavaju po razlikama naprezanja i po srednjem naprezanju, te se takvo brojanje naziva dvoparametarskim [2].

Prvi korak je rotacija dijagrama za  $90^\circ$  u smjeru kazaljke na satu, tako da apscisa  $t$  gleda prema dolje (vertikalna), a vrh dijagrama predstavlja točka A (Slika 7.). Od vrha dijagrama pusti se zamišljeni tok vode. Ovakav dijagram podsjeća na padanje kiše po krovu pagode, gdje su rubovi tog krova vrhovi i udoline, odnosno lokalni maksimumi i minimumi.



Slika 7. Primjer Rainflow metode [1]

Sljedeća pravila odnose se na prepoznavanje zatvorenih krivulji koji tvore cikluse [2]:

- o voda teče odozgo prema dolje (gravitacija),
- o voda teče najprije iz točke A (točka I je zadnja po redu),
- o tok vode iz sljedećeg ekstrema započinje tek kada tok vode iz prethodnog ekstrema završi (npr. točka B je na redu prije točke C),
- o voda teče sve dok: **(1)** ne *prođe* pored većeg ili jednakog maksimuma ili minimuma od onog s kojeg je krenula (točke A, B, C i E), **(2)** ne *ispadne* (točke D, G i H), **(3)** ne *naiđe* na prethodni mlaz (točka F),
- o zatvorene krivulje (one koje su naišle na prethodni mlaz – spojnice E-F-E') tvore pune/cijele cikluse (Slika 7.),
- o krivulje koje se nisu zatvorile (spojnice A-B, B-C, C-D, D-G, G-H i H-I) tvore polu-cikluse (engl. *one-half cycle*) (Slika 7.).

Algoritam za provedbu *Rainflow* metode, namijenjen programiranju, može se naći u ASTM normi E1049-85. Za kompleksne i duge signale pogodnija je primjena računala.

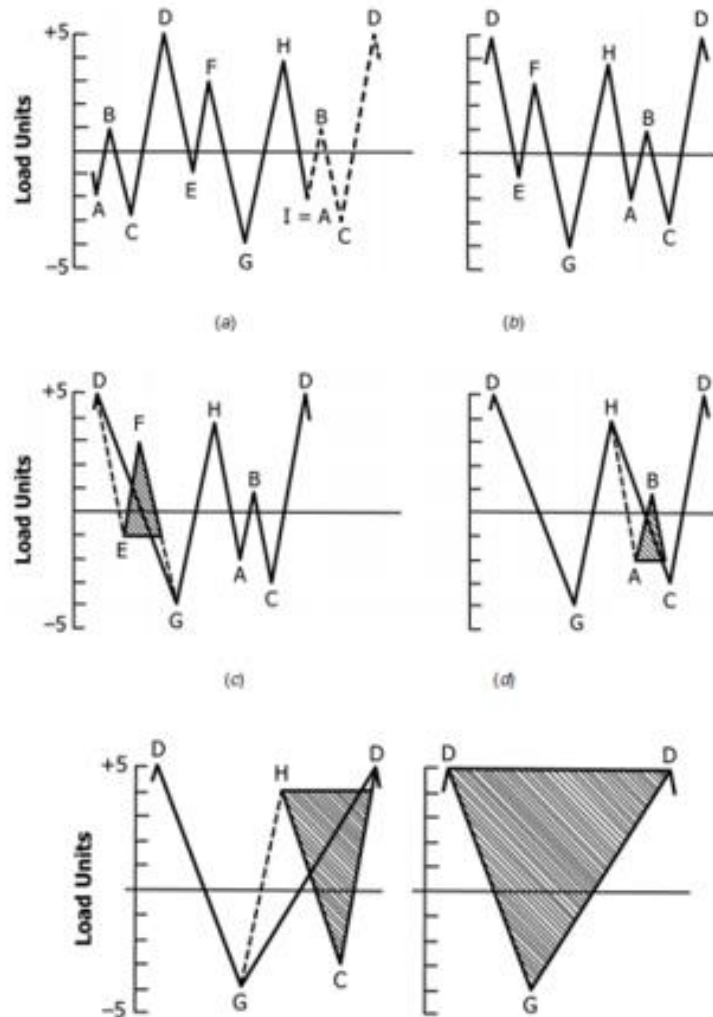
### 3.2. *Rainflow* metoda za ponavljajuću povijest naprezanja

Za ponavljajući ciklus (povijest naprezanja) se pretpostavlja da predstavlja period nekog duljeg signala, tj. da se ponavlja u vremenu. Budući da se ciklusi u praksi, koliko god bili kompleksni redovito ponavljaju, proračun zamora proveden je pojednostavljenom *Rainflow* metodom [2]. Ova metoda naziva se još metoda triju uzastopnih točaka, te je jedna od poznatijih *Rainflow* metoda. Povijest naprezanja raspoređuje se tako da brojanje počne s najvišim vrhom ili najnižom udolinom. Traže se zatvoreni ciklusi te se brišu iz dijagrama i zapisuju u tablicu, sve dok ne ostane nijedan. Svi rasponi broje se kao puni ciklusi, i svi rasponi odgovaraju zatvorenoj krivulji histereze, tj. čine zatvorene trokute.

X predstavlja raspon koji se razmatra, a Y prethodni raspon susjedan rasponu X. Kada je  $X > Y$ , tada se prethodni raspon smatra punim ciklusom. Ako ciklus nije izbrojan, onda treba provjeriti sljedeća 4 vrha, sve dok se ne dođe do punog ciklusa. [5]

Na primjeru slike 8. pokazano je brojanje ciklusa prema ASTM normi [5]:

$Y=E-F$ ,  $X=F-G$ ,  $X>Y$ , E-F sa točkom F, koja se nalazi na dijelu F-G, zatvaraju trokut te se broji kao puni ciklus, i točke E i F se odbacuju. Brojanje se zaustavlja kada se odrede svi puni ciklusi u signalu (E-F-E', A-B-A', H-C-H' i D-G-D).



Slika 8. Primjer Rainflow metode za ponavljajuću povijest napreznja [5]

### 3.3. Ostale metode brojanja ciklusa

Bitno je opisati ostale tri metode brojanja ciklusa zbog lakšeg razumijevanja spektralnih teorija opisanih u poglavlju 5. Postoje jednaparametarske i dvoparametarske metode brojanja ciklusa. Kao što je već navedeno, dvoparametarska metoda brojanja ciklusa uzima u obzir razliku napreznja i vrijednost srednjeg napreznja, dok se jednaparametarskom metodom brojanja ciklusa ciklusi razvrstavaju samo po razlici napreznja. Rezultati dobiveni korištenjem



tih metoda mogu biti konzervativni i liberalni. Konzervativna metoda brojanja ciklusa predviđa veliko kumulirano oštećenje u materijalu, drugim riječima rezultira najkraćim životnim vijekom. Liberalna metoda brojanja ciklusa predviđa manje kumulirano oštećenje od stvarnog, odnosno prikazuje veći broj ciklusa nego što materijal zapravo može izdržati.

### 3.3.1. Brojanje prelaska nivoa (*Level-Crossing Counting*)

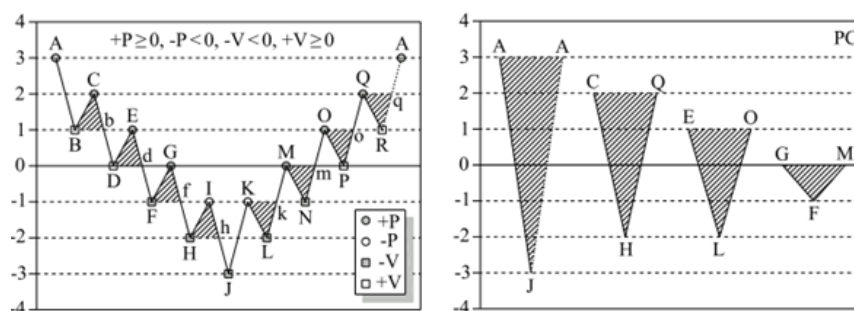
Ovom metodom bilježi se koliko puta je opterećenje prešlo skup fiksnih nivoa. Prelazak referentnog nivoa broji se samo u slučaju kada rastući dio krivulje prijeđe preko referentnog nivoa u pozitivnom ili negativnom smjeru. Razvrstavanje ciklusa vrši se postavljanjem najrazornijeg ciklusa, a zatim ostalih ciklusa poredanih od najvećeg do najmanjeg. Metoda prelaska nivoa je jednoparameterska metoda.

### 3.3.2. Brojanje raspona (*Range Counting*)

Ova metoda izdvaja raspone od vrha do sljedeće udoline, ili od udoline pa do sljedećeg vrha, gdje se svaki raspon broji kao jedan polu-ciklus. Raspon se definira kao visina između susjednog vrha i udoline. Ovom metodom mogu se razlikovati polu-ciklusi kao pozitivni ili negativni rasponi. Metoda brojanja raspona smatrana je kao liberalna metoda zato što uzima u obzir relativno male raspone naprezanja, a zanemaruje velike raspone. Metoda brojanja raspona dvoparameterska je metoda i uzima utjecaj srednjeg naprezanja.

### 3.3.3. Brojanje vrhova (*Peak Counting*)

Metoda prepoznaje sve vrhove iznad i sve udoline ispod referentne razine. Najrazorniji ciklusi broje se tako da se uzima najviši i najniži mogući vrh i udolina, sve dok se ne iskoriste svi ekstremi kao što prikazuje Slika 9. Metoda brojanja vrhova ne uzima u obzir utjecaj srednjeg naprezanja. Ova metoda je najkonzervativnija metoda jer uzima u obzir utjecaj najrazornijih raspona.



Slika 9. Metoda brojanja vrhova

## 4. Slučajan signal

Bilo koji proces može biti klasificiran ili kao deterministički ili slučajan. Kada je proces deterministički, tada se njegovo buduće stanje može lako predvidjeti. Primjer determinističkog procesa je sinusoida. Kod slučajnih procesa teško je predvidjeti buduće stanje. Slučajni procesi matematički su opisani kao *stohastički procesi*. Primjeri slučajnog procesa su micanje tla uslijed potresa, neravnine puta koje proizvode slučajne ulazne sile na gumi automobila itd. Pretpostavke koje se koriste za stohastički proces su da je signal Gaussovski, stacionaran i ergodičan.

Slučajan proces definiran je kao stacionaran ako su sve statističke karakteristike u procesu neovisne o vremenu tj. ne mijenjaju se pri pomicanju vremena. Proces je ergodičan ako statističko mjerenje za svaki uzorak predstavlja statističko mjerenje za bilo koji uzorak. Drugim riječima, proces je ergodičan ako je moguće preći iz bilo kojeg stanja u bilo koje drugo stanje, ne obavezno u jednom koraku. U stvarnosti, mjereni signal je obično ergodičan ako je stacionaran [6].

### 4.1. Statistička parametrizacija Gaussovske distribucije

Slučajna varijabla je takva veličina čija se trenutna vrijednost ne može predvidjeti. Slučajna varijabla sa Gaussovskom raspodjelom je normalno raspodijeljena i zove se normalna devijacija. Može se objasniti preko centralnog graničnog teorema: kada postoji veliki broj neovisnih slučajnih varijabli, njegov pravilno normaliziran zbroj asimptotski teži normalnoj tj. Gaussovoj distribuciji (raspodjeli). Generalizirana slučajna varijabla  $x$  raspodijeljena je u rasponu od  $\{-\infty, +\infty\}$ , a općeniti oblik funkcije gustoće vjerojatnosti za pripadajuću varijablu glasi [7], [8]

$$p_{\text{PDF}}^{\text{norm}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (4.1)$$

gdje je  $\mu$  očekivana raspodjela, dok je parametar  $\sigma$  pripadajuća standardna devijacija.

Aritmetička sredina uzoraka, označena kao  $\bar{x}$  ili  $\mu$ , je zbroj vrijednosti uzoraka podijeljenih ukupnim brojem stavki u uzorku. Aritmetička sredina glasi

$$\bar{x} \equiv \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (4.2)$$

Varijanca je očekivanje kvadratne devijacije slučajne varijable  $x_i$  od srednje vrijednosti. Varijanca efektivno mjeri koliko skup brojeva odstupa od prosječne vrijednosti. Jednadžba varijance glasi

$$\text{Var}(x) \equiv \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right]. \quad (4.3)$$

Standardna devijacija je mjera broja varijacija ili disperzija skupa vrijednosti. Za diskretnu slučajnu varijablu, kao korijen od varijance, standardna devijacija zapisuje se kao

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} \equiv \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right]}. \quad (4.4)$$

Efektivna vrijednost RMS skupa vrijednosti je korijen kvadrata aritmetičke sredine za vrijednosti  $x_i^2$ . U slučaju kada su skupovi od  $N$  uzoraka, RMS je određen relacijom

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}. \quad (4.5)$$

Za srednju vrijednost jednakoj nuli, Gaussovski slučajan signal za dovoljnu statističku relevantnu duljinu, numeričke vrijednosti prikazane jednadžbama (4.4) i (4.5), teži sličnim vrijednostima tj.  $\sigma \approx x_{\text{RMS}}$ , gdje je tada aritmetička srednja vrijednost naprezanja (4.2) jednaka nuli.

Faktor asimetrije je mjera asimetrije raspodjele slučajne varijable oko njezine srednje vrijednosti. Vrijednost nagiba iskrivljenosti može biti pozitivna, nula, negativna ili nedefinirana. Faktor asimetrije normalne distribucije, ili bilo koje savršene simetrične distribucije, jednak je nuli. Izraz za faktor asimetrije glasi

$$\zeta \equiv S_k = \frac{M_3}{(M_2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{N} \left[ (x_1 - \bar{x})^3 + (x_2 - \bar{x})^3 + \dots + (x_N - \bar{x})^3 \right]}{\left( \frac{1}{N} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right] \right)^{3/2}}, \quad (4.6)$$

gdje su  $M_2$  i  $M_3$  drugi i treći statistički centralni momenti. Opći izraz za  $n$ -ti statistički centralni moment glasi

$$M_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^n. \quad (4.7)$$

Faktor zašiljenosti (kurtoza) opisuje oblik raspodjele vjerojatnosti. Definiira vršnu vrijednost raspodjele. Vrijednost faktora zašiljenosti može biti pozitivna, nula ili negativna. Faktor zašiljenosti je mjera zašiljenosti oko vrha krivulje raspodjele naprežanja. Može biti definiran kao normalizirani oblik četvrtog centralnog momenta raspodjele. Izraz za faktor zašiljenosti glasi

$$\kappa = \frac{M_4}{(M_2)^2} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} = \frac{\frac{1}{N} \left[ (x_1 - \bar{x})^4 + (x_2 - \bar{x})^4 + \dots + (x_N - \bar{x})^4 \right]}{\left( \frac{1}{N} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right] \right)^2}. \quad (4.8)$$

Ako je vrijednost kurtoze manja od 3, raspodjela PDF je ravnija nego uobičajeno, ako je kurtoza jednaka 3 može se reći da je raspodjela normalna. Ako je kurtoza veća od 3 raspodjela PDF zaoštrenija je od normalne.

Ako je uzorak podataka Gaussovski, tada je vrijednost kurtoze jednaka 3. Prekoračenje kurtoze definirano je izrazom

$$\kappa_0 = \kappa - 3. \quad (4.9)$$

Faktor vrha je relativno česta statistička mjera u analizi signala. Definiran je kao omjer maksimalne apsolutne vrijednosti uzorka signala za RMS vrijednost tj. efektivne vrijednosti

signala iz jednadžbe. Faktor vrha pokazuje koliko su ekstremni vrhovi u signalu. Za nultu srednju vrijednost slučajnog uzorka signala faktor vrha glasi

$$C_r = \frac{\max \{|x_i|\}}{x_{\text{RMS}}}. \quad (4.10)$$

Faktor vrha bitno je svojstvo signala, s obzirom da ukazuje koliko je šiljat signal.

Kod analiziranja postojećeg slučajnog signala aritmetička srednja vrijednost napreznja i faktor asimetrije trebali bi biti približni nuli, kurtoza 3, a faktor vrha veći od 4. Za takav signal se zatim može reći da je statistički relevantan tj. dovoljno dug normalan/Gaussovski signal.

## 4.2. Fourierova transformacija slučajnog signala

Fourierova analiza omogućava da bilo koja slučajna povijest napreznja konačne duljine (diskretna Fourierova analiza) može biti prikazana kao skup funkcija sinusoida. Iz takve funkcije može se očitati amplituda, frekvencija i faza. Fourierovom transformacijom svaki proces može biti prikazan pomoću spektralne formulacije kao funkcija spektralne gustoće snage. Takav proces opisan je frekvencijskom funkcijom i određen je u frekvencijskoj domeni. Korištenjem inverzne Fourierove transformacije lako se prijeđe iz frekvencijske domene u vremensku [4], [7].

### 4.2.1. Diskretna Fourierova transformacija

Fourierova transformacija rastavlja vremenski signal i daje povratnu informaciju o frekvenciji svih sinusoida koje su potrebne za opisivanje tog vremenskog signala. Granice Fourierovog integrala protežu se od  $\{-\infty, +\infty\}$ . Kada je signal izmjeren za neko konačno vrijeme  $T$  koristi se diskretna Fourierova transformacija, koja je u frekvencijskoj domeni opisana jednadžbom:

$$\mathcal{F}\{x_n(t)\} = X_k(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n e^{-i \frac{2\pi(k-1)(n-1)}{N}}, \quad (4.11)$$

gdje je  $N$  ukupni broj uzoraka,  $n$  je trenutni položaj uzorka,  $x_n$  je vrijednost signala u odgovarajućem vremenu,  $k$  je položaj trenutne frekvencije,  $i$  je imaginarni broj  $i = \sqrt{-1}$ , a  $X_k$

je rezultat diskretne Fourierove transformacije. Razdvojene komponente vektora  $X_{k\dots N}(f)$  u frekvencijskoj domeni iz jednadžbe (4.11) glase:

$$\begin{aligned}
 X_{k=1}(f) &= \frac{1}{N} \left( x_1 e^{-i \frac{2\pi(1-1)(1-1)}{N}} + x_2 e^{-i \frac{2\pi(1-1)(2-1)}{N}} + \dots + x_N e^{-i \frac{2\pi(1-1)(N-1)}{N}} \right) \\
 X_{k=2}(f) &= \frac{1}{N} \left( x_1 e^{-i \frac{2\pi(2-1)(1-1)}{N}} + x_2 e^{-i \frac{2\pi(2-1)(2-1)}{N}} + \dots + x_N e^{-i \frac{2\pi(2-1)(N-1)}{N}} \right) \\
 X_{k=N}(f) &= \frac{1}{N} \left( x_1 e^{-i \frac{2\pi(N-1)(1-1)}{N}} + x_2 e^{-i \frac{2\pi(N-1)(2-1)}{N}} + \dots + x_N e^{-i \frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.12a-c}$$

Iz izraza (4.12a-c) može se zaključiti da se vektor  $X_{k\dots N}(f)$  općenito sastoji od  $N$  kompleksnih diskretnih vrijednosti

$$X_{k\dots N}(f) = \left\{ \overbrace{X_1^{\Re} + i X_1^{\Im}}^{\text{kompleksan}}, \overbrace{X_2^{\Re} + i X_2^{\Im}}^{\text{kompleksan}}, \dots, \overbrace{X_N^{\Re} + i X_N^{\Im}}^{\text{kompleksan}} \right\}, \tag{4.13}$$

realan
imaginarni

gdje je  $\Re$  realni dio, a  $\Im$  imaginarni dio kompleksnog broja.

#### 4.2.2. Brza Fourierova transformacija

Brza Fourierova transformacija može se primijeniti kao specijalan slučaj diskretne Fourierove transformacije, i to samo kada je broj diskretnih podatkovnih točaka  $N=2^j$ , gdje je  $j$  pozitivni cijeli broj. Veza između složenih vektorskih koeficijenta prema jednadžbi (4.13) može se prikazati na sljedeći način:

$$\overbrace{X_k}^{k\text{-ti koeficijent}} = X_k^{\Re} + i X_k^{\Im} \equiv \overbrace{X_{N+2-k}^{\Re} - i X_{N+2-k}^{\Im}}^{\text{desni koeficijent}} = X_{N+2-k}. \tag{4.14}$$

Desni Fourierov koeficijent  $X_{N+2-k}$  u jednadžbi (4.14) je kompleksno konjugiran  $k$ -ti koeficijent  $X_k$ . S obzirom da iznos maksimalnog desnog koeficijenta u jednadžbi (4.14) ne može biti veći od  $N$ , kako bi relacija bila valjana minimum indeksa  $k$  mora iznositi  $k_{\min} = 2$ . Maksimalna

vrijednost indeksa  $k$  može biti  $k_{\max} = N/2$ , što je ujedno i vrijednost na kojoj je postignuta Nyquistova frekvencija.

### 4.2.3. Inverzna Fourierova transformacija

S ciljem pretvorbe dobivenog frekvencijskog signala ponovo u vremensku domenu, koristi se inverzna fourierova transformacija (IFT). Kod korištenja diskretnih podataka, koristi se diskretna Fourierova transformacija. U vremenskoj domeni, DIFT definira se kao:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X_k(f)\} = x_n(t) = \sum_{k=1}^N X_k e^{i \frac{2\pi(k-1)(n-1)}{N}}. \quad (4.15)$$

Svi parametri u jednadžbi (4.15) podudaraju se u potpunosti sa parametrima iz jednadžbe (4.11).

Odvojene komponente vektora  $x_n$  u vremenskoj domeni općenito se zapisuju:

$$\begin{aligned} x_{n=1}(t) &= X_1 e^{-i \frac{2\pi(1-1)(1-1)}{N}} + X_2 e^{-i \frac{2\pi(2-1)(1-1)}{N}} + \dots + X_N e^{-i \frac{2\pi(N-1)(1-1)}{N}} \\ x_{n=2}(t) &= X_1 e^{-i \frac{2\pi(1-1)(2-1)}{N}} + X_2 e^{-i \frac{2\pi(2-1)(2-1)}{N}} + \dots + X_N e^{-i \frac{2\pi(N-1)(2-1)}{N}}. \\ x_{n=N}(t) &= X_1 e^{-i \frac{2\pi(1-1)(N-1)}{N}} + X_2 e^{-i \frac{2\pi(2-1)(N-1)}{N}} + \dots + X_N e^{-i \frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}} \end{aligned} \quad (4.16a-c)$$

Sve vrijednosti iz jednadžbe (4.15) i (4.16) su realne vrijednosti. Parsevalov teorem koristi se radi provjere valjanosti izvršene Fourierove transformacije, i opisan je sljedećim izrazima:

$$\mathcal{F}\{x_n(t)\} = X_k(f) \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{X_k(f)\} = x_n(t) \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x_n(t)]^2 \equiv \sum_{k=1}^N |X_k(f)|^2. \quad (4.17a-c)$$

Zbroj kvadrata funkcije DFT mora bit jednak kvadratu funkcije pripadajućeg inverza IDFT. Analogno, energija signala u vremenskoj domeni mora biti jednaka energiji signala u frekvencijskoj domeni.

### 4.3. Spektralni parametri slučajnog signala

U vremenskoj domeni, povijest naprezanja funkcija je vremena. Prednost RFC metode je mogućnost primjene Palmgren-Minerovog pravila. Standardan RFC algoritam koristi se radi procjene ukupne kumulativne štete  $D_{\text{RFC}}$  i odgovarajućeg broja ciklusa do loma  $N_{\text{RFC}}$ . Relacije za RFC primjenom Palmgren-Minerovog zapisa [4] glase

$$D_{\text{RFC}} [S_h(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} \Rightarrow N_{\text{RFC}} = \frac{1}{D_{\text{RFC}}} \Rightarrow T_{\text{RFC}} = t_{\text{max}} N_{\text{RFC}}, \quad (4.18a-c)$$

gdje je  $T_{\text{RFC}}$  vrijeme do loma. Uvedeno je ukupno vrijeme trajanja analize ponavljajućeg procesa naprezanja  $t_{\text{max}}$ .

Stohastičko opterećenje tj. naprezanje slučajnog procesa u frekvencijskoj domeni definirano je pripadajućom spektralnom gustoćom snage naprezanja  $S_{\text{PSD}}(f)$ , gdje je  $f$  frekvencija izražena u Hz. Statističke karakteristike stacionarnog procesa mogu biti opisane spektralnim momentima PSD-a. Generalizirani oblik za  $n$ -ti spektralni moment  $m_n$ , i odgovarajuća efektivna vrijednost tj. standardna devijacija, prikazane su sljedećim izrazima:

$$m_n = \int_0^{f_{\text{max}} \rightarrow \infty} f^n S_{\text{PSD}}(f) df, \quad S_{\text{RMS}} = \sqrt{\int_0^{f_{\text{max}} \rightarrow \infty} S_{\text{PSD}}(f) df} = \sqrt{m_0}, \quad (4.19a,b)$$

gdje je  $S_{\text{RMS}}$  efektivna vrijednost nultog spektralnog momenta  $m_0$  prikazana kao funkcija širokopojasne frekvencije.  $S_{\text{PSD}}(f)$  uobičajeno je definiran mjernom jedinicom  $\text{MPa}^2/\text{Hz}$ . Nadalje, tipične spektralne statističke veličine glase:

$$E[0] = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}, \quad E[P] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}, \quad \gamma (0 \leq \gamma \leq 1) = \frac{E[0]}{E[P]}, \quad \lambda (0 \leq \lambda \leq 1) = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (4.20a-d)$$

gdje je  $E[0]$  očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi,  $E[P]$  očekivani broj vrhova po sekundi,  $\gamma$  faktor nepravilnosti, a  $\lambda$  parametar spektralne širine pojasa. Za idealni uskopojasni proces (Narrow-Band),  $\gamma$  teži prema 1, dok za širokopojasne procese  $\gamma$  je jednak nuli. S obzirom da su svi spektralni parametri iz jednadžbe (4.20a-d) realne i pozitivne skalarne vrijednosti, granice od  $\gamma$  i  $\lambda$  su uvijek između 0 i 1, budući da je  $E[P] \geq E[0]$  [9], [10]. Iz općenitog



spektralnog momenta  $m_n$ , odgovarajući bezdimenzijski spektralni parametar  $\alpha_n$  i pripadajuće najčešće izvedenice glase:

$$\alpha_n (0 \leq \alpha_n \leq 1) = \frac{m_n}{\sqrt{m_0 m_{2n}}} \Rightarrow \alpha_1 = \delta = \frac{m_1}{\sqrt{m_0 m_2}}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \equiv \gamma, \quad (4.21a-c)$$

gdje  $\delta \equiv \alpha_1$  i  $\alpha_2 \equiv \gamma$  su specijalni slučajevi dobiveni iz bezdimenzijskog spektralnog parametra  $\alpha_n$  za  $n = 1$  odnosno  $n = 2$ . Oštećenje po sekundi, tj. intenzitet oštećenja, broj ciklusa do zamornog loma i pripadajuće vrijeme do zamornog loma u frekvencijskoj domeni dani su relacijama:

$$\frac{D_{\text{PDF}}}{t_{\text{max}}} [p_{(\text{PDF})}(S_r)] = \frac{E[0...P]}{B'_{\text{rf}}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{(\text{PDF})}(S_r) dS_r \Rightarrow N_{\text{fPDF}} = \frac{1}{D_{\text{PDF}}} \Rightarrow T_{\text{fPDF}} = t_{\text{max}} N_{\text{fPDF}}, \quad (4.22a-c)$$

gdje je  $t_{\text{max}}$  ukupno maksimalno vrijeme ponavljajućeg referentnog signala,  $B'_{\text{rf}}$  spektralni eksponent zamorne čvrstoće iskazan u mjernoj jedinici  $\text{MPa}^m$ , a  $p_{(\text{PDF})}$  je funkcija gustoće vjerojatnosti u mjernim jedinicama  $1/\text{MPa}$ . Inverzni negativni Basquinov eksponent  $m$  je bezdimenzijski parametar i definiran je izrazom  $m = -b^{-1}$ . Izraz za računanje integrala glasi

$$I_{(\text{PDF})}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{(\text{PDF})}(S_r) dS_r \Rightarrow \frac{D_{\text{PDF}}}{t_{\text{max}}} = \frac{E[0...P]}{B'_{\text{rf}}} I_{(\text{PDF})}(S_r). \quad (4.23a,b)$$

Simbol  $E[0...P]$  podrazumijeva da u određenim slučajevima upotrebljavanje  $E[P]$  može pridonijeti konzervativnoj procjeni zamora, te je poželjno koristiti  $E[0]$  kako bi se postigla dovoljna točnost procjene.

#### 4.4. Procedura za stvaranje slučajnog signala

Opća procedura za stvaranje slučajnog signala Gaussovske prirode dana je kako slijedi:

- Definirati ukupan broj diskretnih točaka koje se koriste za simulaciju  $N = 2^j$ , gdje je  $j$  pozitivan cijeli broj, u svrhu upotrebe brze Fourierove transformacije (FFT) i inverzne brze Fourierove transformacije (IFFT).

- Definirati frekvenciju uzorkovanja  $f_{sr}$  (Hz), pri čemu  $f_{sr}$  treba biti veća od deset puta najveće frekvencije u signalu. ( $f_{sr} \geq 10 \cdot f_{max}$ )
- Definirati jednostrani PSD funkcije naprezanja  $S_{PSD}$  i izračunati pripadajući RMS
- Diskretizirati jednu stranu PSD funkcije naprezanja za  $M=N/2+1$  uzoraka  
 $S_{PSDi} = \{S_{PSD1}, \dots, S_{PSDM}\}$ .
- Izračunati Nyquistovu frekvenciju  $f_{Nyq} = f_{sr}/2$  (Hz).
- Izračunati ukupno trajanje simulacije  $t_{max} = N/f_{sr}$  (s).
- Izračunati vremenski inkrement  $\Delta t = 1/f_{sr}$  (s).
- Izračunati frekvencijski inkrement  $\Delta f = 1/t_{max}$  (Hz).
- Izračunati pola amplitude  $S_{0i} = (2 \cdot S_{PSDi} \cdot \Delta f)^{1/2}/2 = (2 \cdot \Delta f \cdot \{S_{PSD1}, \dots, S_{PSDM}\})^{1/2}/2$  (MPa)
- Generirati  $M$  ravnomjerno raspoređenih slučajnih faznih kuteva  $\varphi_i = \{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ , gdje je  $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$
- Pripisati slučajne faze  $\varphi_i$  amplitudama preko izraza  $S_{0Li} = S_{0i} \cdot e^{i\varphi_i}$  ili preko analognog izraza Eulerove transformacije  $S_{0Li} = S_{0i} [i \cdot \sin(\varphi_i) + \cos(\varphi_i)]$ , gdje je imaginarna jedinica  $i = \sqrt{-1}$
- Kopirati  $S_{0Li}$  u novi vektor  $S_{0RRCi}$ ; izbrisati prvu i zadnju vrijednost  
 $S_{0Ri} = \{S_{0R2} \cdot e^{i\varphi_2}, \dots, S_{0RM-1} \cdot e^{i\varphi_{M-1}}\}$ .
- Okrenuti vektor  $S_{0Ri}$  tako da novi vektor glasi  
 $S_{0RRi} = \text{Rev.}\{S_{0Ri}\} = \{S_{0RM-1} \cdot e^{i\varphi_{M-1}}, \dots, S_{0R2} \cdot e^{i\varphi_2}\}$ .
- Izračunati kompleksno-konjugirani vektor  $S_{0RRCi} = \text{Conjug.}\{S_{0RRCi}\}$ .
- Povezati  $S_{0Li}$  i  $S_{0RRCi}$  vektore u novi vektor duljine  $N$ ,  $S_{0Ci} = \{\{S_{0Li}\}, \{S_{0RRCi}\}\}$ .
- Izvesti IFFT na ulančanom vektoru  $S_{0Ci}$  kako bi se postigla slučajna povijest naprezanja  
 $S_{hi} = \mathcal{F}^{-1}\{S_{0Ci}\}$ .
- Provjeriti u kojoj mjeri je  $S_{hi}$  Gaussovski računanjem pripadajućeg faktora asimetrije/iskrivljenosti, faktora spljoštenosti/zašiljenosti, srednje vrijednosti i faktor vrha. Ako je faktor vrha manji od 4, simulacija bi trebala biti zanemarena i ponovljena.
- Provjeriti relativnu razliku između analitički izračunatog RMSa i RMSa  $S_{hi}$ .
- Provesti FFT za  $S_{hi}$  i dobiti pripadajući PSD, gdje je konačni PSD jednak  
 $S_{PSDRi} = |\mathcal{F}\{S_{hi}\}|^2 / (2 \cdot \Delta f)$ .
- Izostaviti zadnjih  $N/2$  vrijednosti iz  $S_{PSDRi}$  i pomnožiti sa dva za dobivanje prvobitnog jednostranog PSD  $S_{PSDi}$ .

- Provjeriti valjanost FT preko Parsevalovog teorema  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [s_{hi}(i)]^2(t) \equiv \sum_{i=1}^N |\mathcal{F}\{s_{hi}(i)\}|^2(f)$ .

Najrigorozniji (najstroži) kriterij za provjeru statističke relevantnosti spojenog signala je računanje odgovarajućeg statističkog zamornog oštećenja  $D_i$  preko računanja jedne od metoda prikazane u nastavku. Ne postoji jedinstven slučajan signal u vremenskoj domeni za određeni PSD, odnosno sljedeći sintetizirani slučajan signal će uvijek biti različit od prethodnog. Ta pojava posljedica je slučajnosti uniformnog faznog kuta. Bitno je naglasiti kako je RMS generiranog signala u vremenskoj domeni uvijek konstantan i time uvijek jednak RMSu PSDa u frekvencijskoj domeni.

## 5. Približne spektralne teorije

Približne spektralne teorije provode se u frekvencijskoj domeni. Postupci brojanja u frekvencijskoj domeni i odgovarajući proračun zamora prikazan je sljedećim teorijama: Bendat, Dirlik, Tovo-Benasciutti i Jiao-Moan. Korištenjem spektralnih teorija pojednostavljuje se proračun, a time i analiza visokocikličkog zamora. PDF i PSD povezani su spektralnim momentima. Približne spektralne teorije definirane su na pretpostavkama o Gaussovskom procesu i pripadajućem PSD-u [7].

### 5.1. Bendat – NB/LCC spektralna teorija

NB spektralno rješenje koristi Rayleigh PDF. Rješenje se dobiva na način da se oduzme RL PDF negativnih raspona od RL PDFa pozitivnih raspona. Bendat među prvima predlaže konačan izraz za računanje zamora u frekvencijskoj domeni za metodu brojanja ciklusa LCC. Konačan *Narrow-band* izraz glasi [11], [12]:

$$p_{NB}(S_r) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left\{ \overbrace{\left[ \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-S_r^2}{8m_0\lambda^2}} + \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{S_r\gamma}{\lambda\sqrt{8m_0}}\right) \right] \frac{S_r\gamma}{4\sqrt{m_0}} e^{\frac{-S_r^2}{8m_0}} \right]}^{p_{RL}(S_r)} \right\} - p_{RL}(S_r \rightarrow -S_r) = \gamma \frac{S_r}{4m_0} e^{\frac{-S_r^2}{8m_0}}. \quad (5.1)$$

Intenzitet oštećenja, broj ciklusa do zamornog loma i pripadajuće vrijeme do loma iznose:

$$\frac{D_{NB}}{t_{\max}} = \frac{E[P]}{B'_{rf}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{NB}(S_r) dS_r = \frac{E[P]}{B'_{rf}} I_{NB}(S_r) \Rightarrow N_{fNB} = \frac{1}{D_{NB}} \Rightarrow T_{fNB} = t_{\max} N_{fNB}, \quad (5.2a-c)$$

gdje je integral

$$I_{NB}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{NB}(S_r) dS_r = \gamma (\sqrt{8m_0})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right). \quad (5.3)$$

Određivanjem konačnih gornjih integracijskih granica za proizvoljnu vrijednost raspona naprezanja, kumulativan integral i odgovarajuće kumulativno oštećenje za NB glase

$$I_{NB}^c(S_r) = \int_0^{S_r} S_r^m p_{NB}(S_r) dS_r = I_{NB}(S_r) - \gamma (\sqrt{8m_0})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r}{8m_0}\right), \quad \frac{D_{NB}^c}{t_{\max}} = \frac{E[P]}{B'_{rf}} I_{NB}^c(S_r), \quad (5.4a,b)$$

gdje  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  predstavlja nepotpunu Gamma funkciju. Za kompleksne brojeve s pozitivnim dijelom, Gamma funkcija definirana je pomoću konvergentnog nepravog integrala [15]

$$\Re(q) > 0 \Rightarrow \Gamma(q) = \int_0^{\infty} t^{q-1} e^{-t} dt \equiv 2 \int_0^{\infty} t^{2q-1} e^{-t^2} dt, \quad (5.5)$$

za općenitu veličinu  $q$ . S obzirom da je „ $m$ “ iz jednadžbe uvijek pozitivna i realna skalarna vrijednost, taj uvjet je automatski zadovoljen.

NB uvijek predviđa konzervativna rješenja i predstavlja gornju granicu za RFC predviđanje oštećenja. [13]

## 5.2. Dirlik

Od poznatih spektralnih metoda, Dirlikova metoda se najčešće upotrebljuje. Dirlikova metoda sastoji se od tri raspodjele: eksponencijalne, te dvije Rayleigh-eve funkcije gustoće vjerojatnosti [14].

Izraz za Dirlikov približni PDF glasi:

$$Z = \frac{S_r}{2\sqrt{m_0}} \Rightarrow p_{Dr}(Z) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left( \overbrace{\frac{4}{5} e^{\frac{-4Z}{5D_1}}}^{\text{eksponencijalno}} + \overbrace{\frac{D_2 Z}{R^2} e^{\frac{-Z^2}{2R^2}}}^{\text{Rayleigh/NB}} + \overbrace{D_3 Z e^{\frac{-Z^2}{2}}}^{\text{Rayleigh/NB}} \right), \quad (5.6a,b)$$

gdje je  $Z$  normalizirani raspon naprezanja, a preostali parametri definirani su kao

$$D_1 = 2\gamma \frac{\delta - \gamma}{1 + \gamma^2}, \quad R = \frac{\gamma(1 - \delta) - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}, \quad D_2 = \frac{\gamma(1 - \delta) - D_1^2}{R - R^2}, \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2. \quad (5.7a-d)$$

Iz jednadžbi (5.7a-d) može se primijetiti da su pripadajući koeficijenti isključivo funkcije  $\delta$  i  $\gamma$ , odnosno jednadžbe (4.23). Intenzitet oštećenja  $D/t_{\max}$  glasi:

$$\frac{D_{Dr}}{t_{\max}} = \frac{E[P]}{B'_{rf}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{Dr}(S_r) dS_r = \frac{E[P]}{B'_{rf}} I_{Dr}(S_r) \Rightarrow N_{fDr} = \frac{1}{D_{Dr}} \Rightarrow T_{fDr} = t_{\max} N_{fDr}, \quad (5.8a,b)$$

gdje je broj ciklusa do zamornog loma obrnuto proporcionalan oštećenju, dok je vrijeme do zamornog loma proporcionalno ukupnom vremenu i  $N_{fDr}$ .

Integral iz jednadžbe (5.8) glasi

$$I_{Dr}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{Dr}(S_r) dS_r = (\sqrt{m_0})^m \left[ \overbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^m D_1^{m+1} \Gamma(1+m)}^{\text{eksponencijalno}} + \overbrace{(\sqrt{8})^m (D_2 |R|^m + D_3) \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}^{\text{Rayleigh/NB}} \right]. \quad (5.9)$$

Sređivanjem konačnih granica integracije u vrijednosti raspona naprezanja  $S_r$ , kumulativni integral i pripadajuće kumulativno oštećenje glase

$$I_{Dr}^c(S_r) = \int_0^{S_r} S_r^m p_{Dr}(S_r) dS_r = I_{Dr}(S_r) - (\sqrt{m_0})^m \left[ \overbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^m D_1^{m+1} \Gamma\left(1+m, \frac{2S_r}{5D_1\sqrt{m_0}}\right)}^{\text{eksponencijalno}} + \overbrace{(\sqrt{8})^m \left[ D_2 |R|^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r^2}{8R^2 m_0}\right) + D_3 \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r^2}{8m_0}\right) \right]}^{\text{Rayleigh/NB}} \right] \quad (5.10)$$

$$\frac{D_{Dr}^c}{t_{\max}} = \frac{E[P]}{B'_{rf}} I_{Dr}^c(S_r). \quad (5.11)$$

Dirlikova metoda nije potkrijepljena nijednom teorijskom podlogom, stoga rezultati dobiveni korištenjem ove metode su potpuno aproksimativni [10].

### 5.3. Tovo i Benasciutti

Rychlik je pokazao kako je gornja granica za intenzitet oštećenja prema Gaussovom procesu jednaka aproksimaciji NB oštećenja, dok je Madsen dao aproksimaciju za donju granicu intenziteta oštećenja koja se poklapa sa metodom brojanja raspona u vremenskoj domeni. Godine 2002., Tovo došao je do zaključka kako bi točan intenzitet oštećenja trebao ležati negdje između granica donjeg RC i gornjeg LCC/NB [7], [9], [10]

$$D^{\text{RC}} \leq D^{\text{RFC}} \leq D^{\text{NB}}. \quad (5.12)$$

TB PDF raspona naprezanja glasi

$$p_{TB}(S_r) = \frac{S_r}{4m_0} \left[ \overbrace{b_{TB}^{\text{app}} \alpha_2 e^{\frac{-S_r^2}{8m_0}}}^{\text{LCC/NB}} + \overbrace{(1-b_{TB}^{\text{app}}) \frac{1}{\alpha_2} e^{\frac{-S_r^2}{8\alpha_2^2 m_0}}}^{\text{RC}} \right], \quad (5.13)$$

gdje je približan RFC težinski faktor  $0 \leq b_{\text{TB}}^{\text{app}}(\alpha_1, \alpha_2) \leq 1$

$$b_{\text{TB}}^{\text{app}} = (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{1.112(1 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2)e^{2.11\alpha_2} + \alpha_1 - \alpha_2}{(1 - \alpha_2)^2}. \quad (5.14)$$

Intenzitet oštećenja, broj ciklusa do zamora te vrijeme do zamora glase

$$\frac{D_{\text{TB}}}{t_{\text{max}}} = \frac{E[\text{P}]}{B'_{\text{rf}}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{\text{TB}}(S_r) dS_r = \frac{E[\text{P}]}{B'_{\text{rf}}} I_{\text{TB}}(S_r) \Rightarrow N_{\text{fDr}} = \frac{1}{D_{\text{TB}}} \Rightarrow T_{\text{fTB}} = t_{\text{max}} N_{\text{fTB}}, \quad (5.15\text{a-c})$$

gdje je integral

$$I_{\text{TB}}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{\text{TB}}(S_r) dS_r = \left[ b_{\text{TB}}^{\text{app}} \alpha_2 + \overbrace{(1 - b_{\text{TB}}^{\text{app}})}^{1-\text{težina}} \alpha_2^m \right] \left( \sqrt{8m_0} \right)^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right). \quad (5.16)$$

Konačan izraz za kumulativan integral te pripadajuće kumulativno oštećenje za TB aproksimaciju iznose:

$$I_{\text{TB}}^c(S_r) = \int_0^{S_r} S_r^m p_{\text{TB}}(S_r) dS_r = I_{\text{TB}}(S_r) - \left( \sqrt{8m_0} \right)^m \left[ b_{\text{TB}}^{\text{app}} \alpha_2 \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r}{8m_0}\right) + \overbrace{(1 - b_{\text{TB}}^{\text{app}})}^{1-\text{težina}} \alpha_2^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r}{8\gamma^2 m_0}\right) \right]. \quad (5.17\text{a,b})$$

$$\frac{D_{\text{TB}}^c}{t_{\text{max}}} = \frac{E[\text{P}]}{B'_{\text{rf}}} I_{\text{TB}}^c(S_r)$$

## 5.4. Jiao-Moan

Jiao-Moan metoda razvijena je za bimodalne procese [10] str. 95. Bimodalni proces specijalan je slučaj slučajnog Gaussovskog procesa kod širokopojasne uzbude. Bimodalni proces prikazan je kao kombinacija dva uskopojasna procesa sa pripadajućim frekvencijama, odnosno sastoji se od utjecaja niske i visoke frekvencije. Jiao i Moan PDF za donji bimodalni spektar naprezanja glasi

$$p_Q^{\text{JM,anlt}}(q) = \lambda_{0,1} q e^{\frac{-q^2}{2\lambda_{0,1}}} + \lambda_{0,2} q e^{\frac{-q^2}{2\lambda_{0,2}}} + \sqrt{2\pi\lambda_{0,1}\lambda_{0,2}} (q^2 - 1) e^{\frac{-q^2}{2}} (\Phi_1 + \Phi_2 - 1). \quad (5.18)$$

Funkcija koja sadrži bezdimenzijske amplitude/količine  $q$  i  $\Phi(\cdot)$  je funkcija standardne normalne distribucije. Funkcije distribucije  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  iz jednadžbe (5.18) definirane su izrazima

$$\Phi_1(q_1) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{q_1}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad \Phi_2(q_2) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{q_2}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (5.19a,b)$$

gdje

$$q_1(q) = q \sqrt{\frac{\lambda_{0,1}}{\lambda_{0,2}}}, \quad q_2(q) = q \sqrt{\frac{\lambda_{0,2}}{\lambda_{0,1}}}. \quad (5.20a,b)$$

Nadalje, omjeri spektralnih momenata iz jednadžbe (5.20) definirani su prema relacijama

$$\lambda_{0,1} = \frac{m_{0,1}}{m_0}, \quad \lambda_{0,2} = \frac{m_{0,2}}{m_0}, \quad \lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} = 1, \quad (5.21a-c)$$

gdje je jednadžba za odgovarajući spektralni moment definirana izrazima

$$m_{n,i} = \int_0^\infty f^n S_{\text{PSDi}}(f) df, \quad m_0 = m_{0,1} + m_{0,2}. \quad (5.22a,b)$$

U jednadžbi (5.22) indeks cijelog broja „ $n$ “ odnosi se na broj spektralnih momenta, dok se cijeli broj „ $i$ “ odnosi na broj procesa. JM PDF iz jednadžbe može se pretvoriti u dimenzijsku formu i prikladno integrirati uz poštivanje pravila raspona napreznja preko općeg izraza transformacije

$$p_{\text{JM}}^{(\dots)}(S_r) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} p_Q^{(\dots)} \left( q \rightarrow Z = \frac{S_r}{2\sqrt{m_0}} \right) \Rightarrow I_{\text{JM}}^{(\dots)}(S_r) = \int_0^\infty S_r^m p_{\text{JM}}^{(\dots)}(S_r) dS_r. \quad (5.23a,b)$$

Analički i bezdimenzijski JM PDF glasi

$$p_{\text{JM}}^{\text{anlt}}(S_r) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left[ \lambda_{0,1} q e^{\frac{-Z^2}{2\lambda_{0,1}}} + \lambda_{0,2} q e^{\frac{-Z^2}{2\lambda_{0,2}}} + \sqrt{2\pi\lambda_{0,1}\lambda_{0,2}} (Z^2 - 1) e^{\frac{-Z^2}{2}} (\Phi_1 + \Phi_2 - 1) \right]. \quad (5.24)$$

U konačnom dimenzijskom obliku, analitički JM PDF glasi

$$p_{\text{JM}}^{\text{anlt}}(S_r) = \frac{e^{-S_r^2 \frac{2m_{0,1} + m_{0,2}}{8m_{0,1}m_{0,2}}}}{8\sqrt{2} (m_{0,1}m_{0,2})^2 \left( \frac{1}{m_{0,1}} + \frac{1}{m_{0,2}} \right)^{\frac{5}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{8} \sqrt{\frac{1}{m_{0,1}} + \frac{1}{m_{0,2}}} \left( e^{\frac{S_r^2}{4m_{0,2}}} m_{0,1} + e^{\frac{S_r^2}{8m_{0,1}m_{0,2}}} m_{0,2} \right) S_r^2 - \\ - e^{\frac{S_r^2 (2m_{0,1}^2 + 2m_{0,1}m_{0,2} + m_{0,2}^2)}{8m_{0,1}m_{0,2}(m_{0,1} + m_{0,2})}} \sqrt{\pi} (4(m_{0,1} + m_{0,2}) - S_r^2) [\operatorname{erf}_{0,1} + \operatorname{erf}_{0,2}] \end{array} \right\}, \quad (5.25)$$

gdje je funkcija greški



$$\operatorname{erf}_{0,1} = \operatorname{erf} \left( \frac{m_{0,1} S_r^2}{\sqrt{8m_{0,1}m_{0,2}(m_{0,1} + m_{0,2})}} \right), \quad \operatorname{erf}_{0,2} = \operatorname{erf} \left( \frac{m_{0,2} S_r^2}{\sqrt{8m_{0,1}m_{0,2}(m_{0,1} + m_{0,2})}} \right). \quad (5.26a,b)$$

Nakon pojednostavljenja, konačan izraz za analitičko rješenje JM PDFa glasi

$$p_{\text{JM}}^{\text{anlt}}(S_r) = \frac{\sqrt{\frac{8}{m_{0,1}} + \frac{8}{m_{0,2}}} \left( e^{\frac{-S_r^2}{8m_{0,1}}} m_{0,1} + e^{\frac{-S_r^2}{8m_{0,2}}} m_{0,2} \right) S_r - \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{m_{0,1}} S_r}{\sqrt{8m_{0,2}m_0}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{m_{0,2}} S_r}{\sqrt{8m_{0,1}m_0}} \right) \right] \sqrt{\pi} (4m_0 - S_r^2) e^{\frac{-S_r^2}{8m_0}}}{8\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{m_{0,1}} + \frac{1}{m_{0,2}}} m_0^2}. \quad (5.27)$$

Zatvoreni integral za analitičko rješenje JM PDF glasi

$$I_{\text{JM}}^{\text{anlt}}(S_r) = (\sqrt{8m_0})^m \Gamma \left( 1 + \frac{m}{2} \right) \left\{ \lambda_{0,1}^{2+\frac{m}{2}} + \lambda_{0,2}^{2+\frac{m}{2}} + \lambda_{0,1} \lambda_{0,2} \left( \lambda_{0,1}^{\frac{m}{2}} + \lambda_{0,2}^{\frac{m}{2}} \right) + m \left[ {}_2F_1^{\text{JM1}} \lambda_{0,1} + {}_2F_1^{\text{JM2}} \lambda_{0,2} \right] \right\}, \quad (5.28)$$

gdje je odgovarajuća Gaussovska hipergeometrijska funkcija

$${}_2F_1^{\text{JM1}} = {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, 1 + \frac{m}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-\lambda_{0,1}}{\lambda_{0,2}} \right), \quad {}_2F_1^{\text{JM2}} = {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, 1 + \frac{m}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-\lambda_{0,2}}{\lambda_{0,1}} \right). \quad (5.29)$$

Gaussovska hipergeometrijska funkcija je posebna funkcija predstavljena hipergeometrijskim nizom. Takva funkcija rješenje je obične linearne diferencijalne jednačbe drugog reda [16].

Potpuni analitički PDF za skalirani JM RFC raspon glasi

$$p_{\text{JM}}^{\text{anlt,full}}(S_r) = \frac{E_{\text{JM}}^{\text{lo}}}{E[\text{P}]} p_{\text{JM}}^{\text{anlt}}(S_r) + \frac{E_{\text{JM}}^{\text{hi}}}{E[\text{P}]} \frac{S_r}{4m_{0,2}} e^{\frac{-S_r^2}{8m_{0,2}}}. \quad (5.30)$$

U jedn. (5.30) faktori skaliranja su

$$E_{\text{JM}}^{\text{lo}} = \frac{v_{0,P} + E_1[0]}{2}, \quad E_{\text{JM}}^{\text{hi}} = E_2[0] - E_{\text{JM}}^{\text{lo}}, \quad (5.31a,b)$$

gdje parametri iz jednačbi (5.30), (5.31a,b) glase

$$v_{0,P} = \lambda_{0,1} v_{0,1} \sqrt{1 + \frac{\lambda_{0,2}}{\lambda_{0,1}} \left( \frac{v_{0,2}}{v_{0,1}} \delta_2 \right)^2}, \quad \delta_2 = \sqrt{1 - \frac{m_{1,2}^2}{m_{0,2} m_{2,2}}}, \quad v_{0,1} = E_1[0] = \sqrt{\frac{m_{2,1}}{m_{0,1}}},$$

$$v_{0,2} = E_2[0] = \sqrt{\frac{m_{2,2}}{m_{0,2}}}. \quad (5.32a-d)$$

$v_{0,P}$  je očekivana frekvencija komponente niske frekvencije,  $\delta_2$  je Vanmarcke-ov spektralni parametar za drugi proces, koji se odnosi na visoko frekventne komponente, i  $E_1[0]$  i  $E_2[0]$  su očekivani brojevi prema ničtici za prvi i drugi proces.

Intenzitet oštećenja, broj ciklusa do oštećenja i pripadajuće vrijeme do oštećenja za analitičko JM rješenje glasi

$$\frac{D_{JM}^{anlt}}{t_{max}} = \frac{E[P]}{B'_{if}} \int_0^\infty S_r^m p_{JM}^{anlt,full}(S_r) dS_r = \frac{E[P]}{B'_{if}} \left[ \frac{E_{JM}^{lo}}{E[P]} I_{JM}^{anlt}(S_r) + \frac{E_{JM}^{hi}}{E[P]} (\sqrt{8m_{0,2}})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \right] \quad (5.33a-c)$$

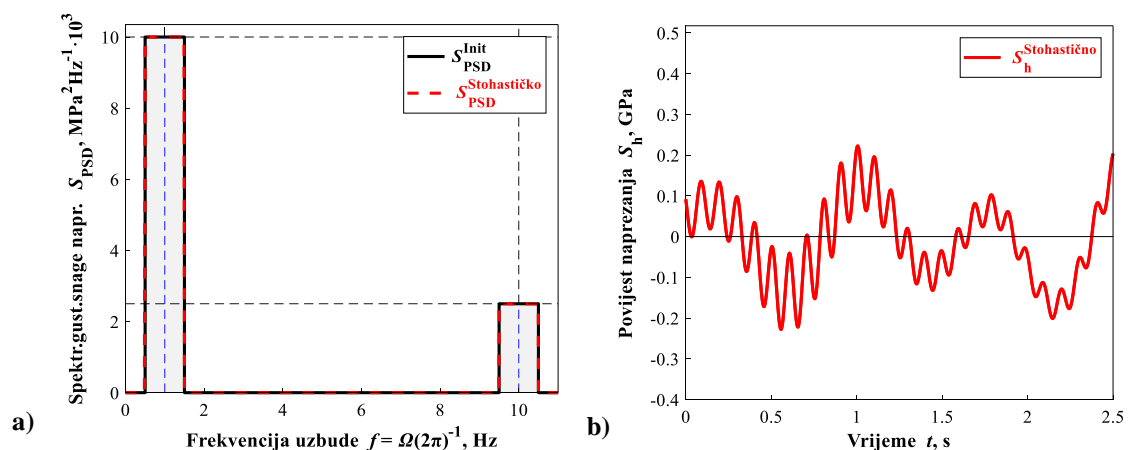
$$\Rightarrow N_{fJM}^{anlt} = \frac{1}{D_{JM}^{anlt}} \Rightarrow T_{fJM}^{anlt} = t_{max} N_{fJM}^{anlt}$$

## 6. Usporedba rezultata spektralnih teorija

Razmatrane su metode u frekvencijskoj domeni, redom: NB, Dirlik, TB i JM, koje su zatim uspoređene s RFC rezultatima dobivenim u programskom paketu *MATLab R2017b*.

### 6.1. Referentni primjer

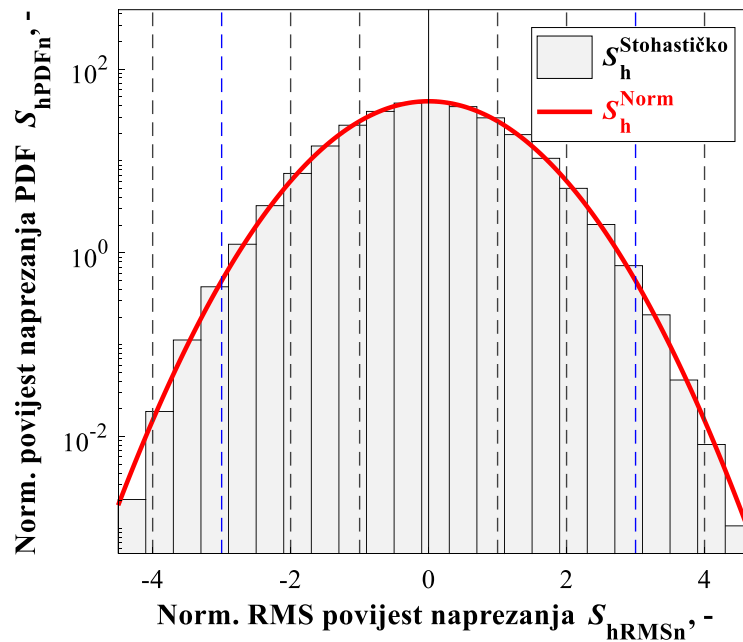
U ovom poglavlju prikazani su rezultati simulacije za visokociklički zamor dobiveni u programskom paketu *MATLab R2017b*. Na slici 10.a) prikazan je PSD dijagram koji je definiran kao idealni pravokutni bimodalni spektar napreznja [13]. Dominiraju dvije osnovne frekvencije  $f_1 = 1$  Hz i  $f_2 = 10$  Hz, gdje je širina frekvencije jednaka  $\Delta f = 1$  Hz. Maksimalna PSD napreznja za odgovarajuću frekvenciju iznose  $S_{PSD1} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz i  $S_{PSD2} = 2500$  MPa<sup>2</sup>/Hz. Na slici 10.b) prikazan je stohastički ili slučajni signal, te inverzna Fourierova transformacija PSD dijagrama iz frekvencijske domene u vremensku.



Slika 10. a) PSD dijagram b) Slučajan signal

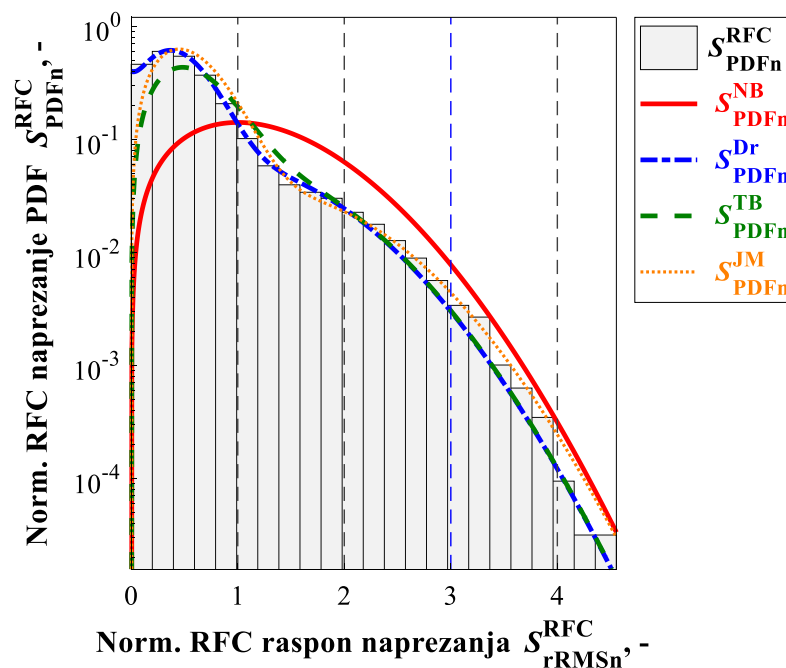
Za navedeni slučaj, ukupno vrijeme trajanja procesa postavljeno je na  $t_{\max} = 8192$  s, frekvencija uzorkovanja  $f_{sr} = 1024$  Hz, broj diskretnih točaka  $N = 8388608$ , Inverzni negativni Basquinov eksponent  $m = 3$ , širina frekvencijskog bloka  $\Delta f = 1$  Hz i  $B'_{fr} = 6,4 \cdot 10^{10}$  (N/mm<sup>2</sup>)<sup>3</sup>. Navedene ulazne vrijednosti korištene su za sve naredne simulacije.

Na slici 11. prikazana je Gaussova krivulja za razmatrani slučaj. Gaussova krivulja poprilično točno opisuje histogram slučajnog procesa, stoga se može zaključiti da je signal normalne/Gaussovske raspodjele. Faktor vrha je približno između 4 i 5, aritmetička srednja vrijednost napreznja je jednaka nuli, kao i faktor asimetrije, a faktor zašiljenosti je približno jednak tri. S obzirom na izračunate faktore, može se reći da je signal Gaussovski, ergodičan i stacionaran.



Slika 11. Gaussova krivulja

Na slici 12. prikazan je histogram RFC metode. Može se primijetiti kako Dirlikova krivulja najbolje opisuje histogram, a NB najlošije. Apscisa prikazuje normaliziran RFC raspon napreznja koji je normaliziran izrazom  $S_{rRMSn} = S_r / (2S_{RMS})$ . Na ordinati je prikazana normalizirana gustoća vjerojatnosti napreznja, skalirana izrazom  $S_{rPDFn} = S_{RMS} p_{(PDF)}$  kako bi se dobilo bezdimenzijski PDF [13].

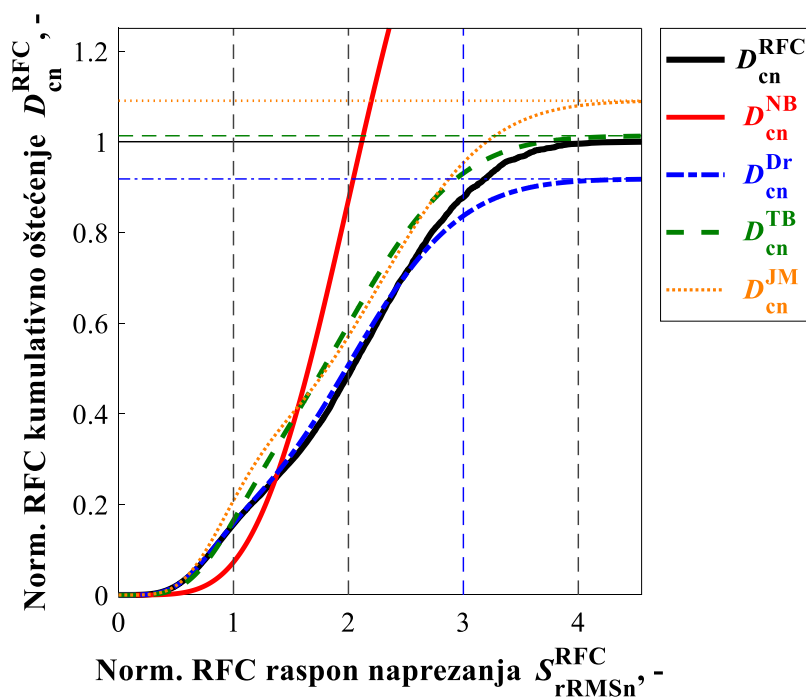


Slika 12. Histogram – usporedba metoda

Slika 13. prikazuje odnos normaliziranog kumulativnog oštećenja kao funkciju RMS na ordinati i normaliziranog RFC raspona napreznja na apscisi za navedene spektralne teorije. Oštećenje za svaku od spektralnih teorija je normalizirano izrazom  $D_n(\dots)=D(\dots)/D_{RFC}$ , gdje je  $D_{RFC}$  referentna, skalirana vrijednost dobivena u programskom paketu *MATLab R2017b* [13].

Kada simulirana krivulja postane skoro horizontalna, tj. kada se približava pripadajućoj horizontalnoj osi, može se reći da krivulja konvergira.

Dirlikova metoda za navedeni slučaj smatra se liberalnom zato što predviđa manje oštećenje od RFC oštećenja. TB i JM smatraju se konzervativnijim metodama jer predviđaju veća oštećenja od RFC. Nijedna funkcija ne smije biti iznad NB. Na slici 13. vidi se kako rezultati JM, Dirlik i TB ne odstupaju previše od RFC rezultata dobiven u vremenskoj domeni, te se može reći da JM, Dirlik i TB dovoljno precizno opisuju RFC oštećenje.



Slika 13. Kumulativno oštećenje

U nastavku je provedena analiza za vrijeme do zamornog loma izračunata u vremenskoj i frekvencijskoj domeni u ovisnosti o  $\gamma$ . Napravljena je simulacija u programskom paketu *MATLab R2017*, pomoću kojeg su izračunate vrijednosti potrebne za usporedbu.  $T_{IRFC}$  je vrijeme do zamornog loma izračunato u vremenskoj domeni, a  $T_{IPDF}$  je vrijeme do zamornog loma izračunato spektralnim metodama u frekvencijskoj domeni. Analiza je provedena tako da je  $f_2 = 10$  Hz konstantna vrijednost, a  $f_1$  se mijenja počevši od  $f_1 = 1$  Hz pa sve do  $f_1 = 8,5$  Hz,

uz povećanje frekvencije za 0,5 Hz. Rezultat vremena do loma u vremenskoj domeni dobiven je nakon deset uzastopnih simulacija, te je zatim izračunata pripadajuća srednja vrijednost koja je korištena za analizu visokocikličkog zamora. Postupak se ponavljao za svaku promjenu frekvencije  $f_1$ . Rezultat vremena do loma u frekvencijskoj domeni je konstantan.

Tablica 1. prikazuje rezultate vremena do loma izračunate zasebno za svaku spektralnu metodu te rezultat vremena do loma u vremenskoj domeni  $T_{\text{IRFC}}$ .

**Tablica 1. Prikaz rezultata svih navedenih metoda za  $f_1 = 1-8,5$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz**

$f_1$	$f_2$	$\gamma$	$T_{\text{fNB}}$	$T_{\text{fDr}}$	$T_{\text{fTB}}$	$T_{\text{fJM}}$	$T_{\text{IRFC}}$
1	10	0,4657	333,153	701,647	635,665	590,639	642,9082
1,5	10	0,4875	325,452	545,302	510,815	453,254	502,8249
2	10	0,5175	315,516	451,464	435,800	366,698	417,7101
2,5	10	0,5548	303,984	390,467	385,196	307,602	364,1344
3	10	0,5985	291,471	348,288	348,409	264,798	321,4541
3,5	10	0,6467	278,503	317,258	320,158	232,402	297,7792
4	10	0,6977	265,495	292,891	297,41	207,044	278,9376
4,5	10	0,7491	252,750	272,629	278,214	186,662	265,4208
5	10	0,7985	240,471	255,122	261,258	169,925	255,5904
5,5	10	0,8438	228,783	239,661	245,717	155,938	262,0128
6	10	0,8835	217,753	225,810	231,190	144,076	226,9184
6,5	10	0,9167	207,404	213,272	217,597	133,888	212,992
7	10	0,9432	197,732	201,856	205,025	125,045	200,704
7,5	10	0,9634	188,716	191,456	193,582	117,297	190,8736
8	10	0,978	180,322	182,009	183,312	110,452	181,4528
8,5	10	0,9879	172,513	173,453	174,172	104,361	172,8512

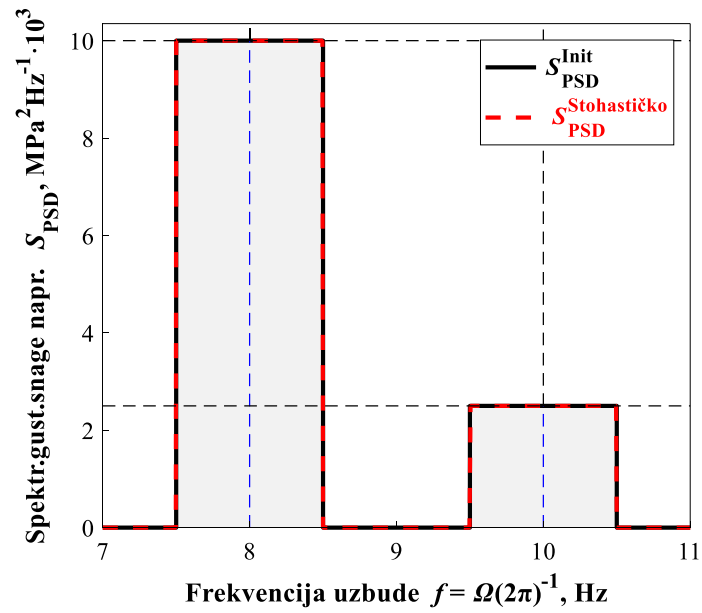
Tablica 2. prikazuje odnos  $T_{\text{IRFC}}/T_{\text{IPDF}}$ , tj. omjer vremena do loma u vremenskoj domeni i vremena do loma u frekvencijskoj domeni. Iz tablice je vidljivo da kada je  $f_1 = 1$  Hz, rezultat Dirlikove metode je manji od 1, što znači da Dirlikova metoda daje liberalna rješenja u odnosu na RFC u vremenskoj domeni. Rezultati TB i JM su veći od 1, time se navedene metode smatraju konzervativnima. NB metoda predviđa prekonzervativna rješenja.

Tablica 2. Prikaz odnosa vremena do loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni za  $f_1 = 1-8,5$  Hz,  $f_2 = 10$ 

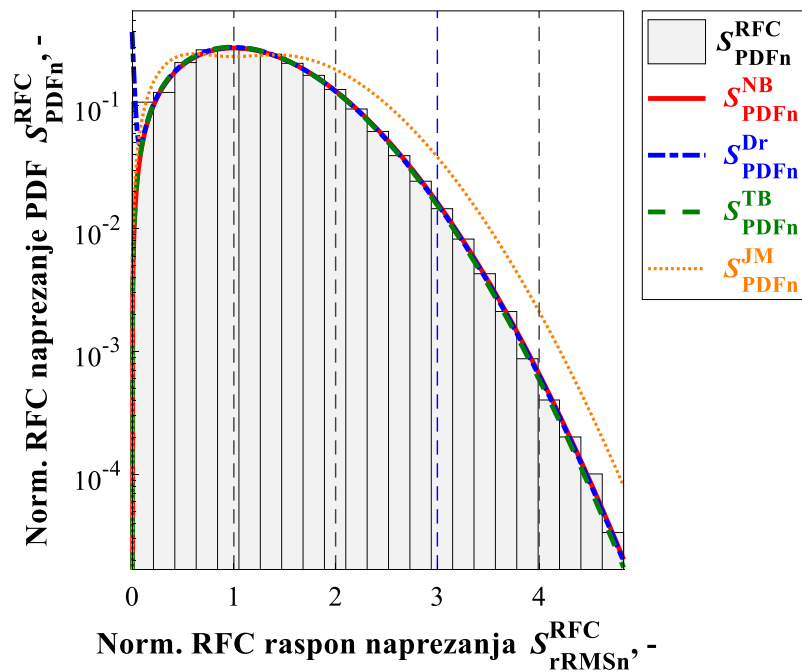
Hz

$f_1$	$f_2$	$\gamma$	$T_{fRFC}/T_{fNB}$	$T_{fRFC}/T_{fDr}$	$T_{fRFC}/T_{fTB}$	$T_{fRFC}/T_{fJM}$
1	10	0,4657	1,9298	0,9163	1,0114	1,0885
1,5	10	0,4875	1,545	0,9221	0,9844	1,10904
2	10	0,5175	1,3239	0,9252	0,9585	1,1391
2,5	10	0,5548	1,1978	0,9326	0,9453	1,1838
3	10	0,5985	1,1029	0,9229	0,9226	1,2139
3,5	10	0,6467	1,0692	0,9386	0,9301	1,2813
4	10	0,6977	1,0506	0,9524	0,93789	1,3472
4,5	10	0,7491	1,0501	0,9736	0,9540	1,4219
5	10	0,7985	1,0629	1,0018	0,9783	1,5041
5,5	10	0,8438	1,1453	1,0933	1,0663	1,6802
6	10	0,8835	1,0421	1,0049	0,9815	1,5749
6,5	10	0,9167	1,0269	0,9987	0,9788	1,5908
7	10	0,9432	1,015	0,9943	0,9789	1,6051
7,5	10	0,9634	1,0114	0,9969	0,9861	1,6273
8	10	0,978	1,0063	0,9969	0,9899	1,6428
8,5	10	0,9879	1,002	0,9965	0,9924	1,6563

Slika 14. prikazuje PSD dijagram kada je odziv uskopojasan, odnosno kada su dvije dominantne osnovne frekvencije vrlo blizu jedna drugoj. Dominantne frekvencije za ovaj slučaj su  $f_1 = 8,5$  Hz i  $f_2 = 10$  Hz. Kada je odziv uskopojasan tj. *Narrow band* (NB), iz Tablice 2. vidljivo je da  $\gamma$  teži jedinici.

Slika 14. PSD dijagram  $f_1 = 8,5$  Hz i  $f_2 = 10$  Hz

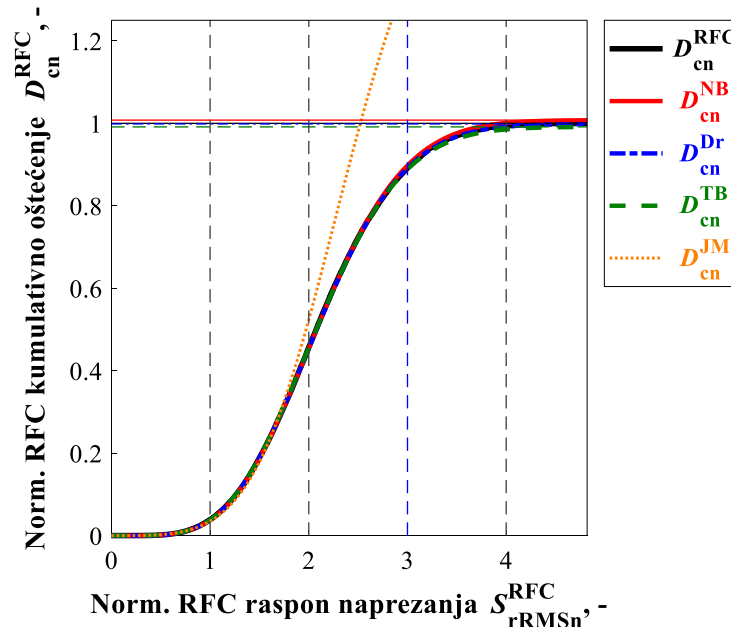
Slika 15. prikazuje histogram za navedene metode u uskopojasnom području. U ovom slučaju NB, Dirlik i TB dovoljno točno opisuju histogram, dok JM odudara i predviđa veće RFC raspone.



Slika 15. Histogram – usporedba metoda NB odziv



Slika 16. prikazuje kako JM metoda predviđa znatno veći PDF naprezanja i previđa oštećenje veće od NB metode. Rezultati JM metode u uskopojasnom području su nefizikalni. Spektralne metode NB, Dirlik i TB u uskopojasnom području konvergiraju u NB.



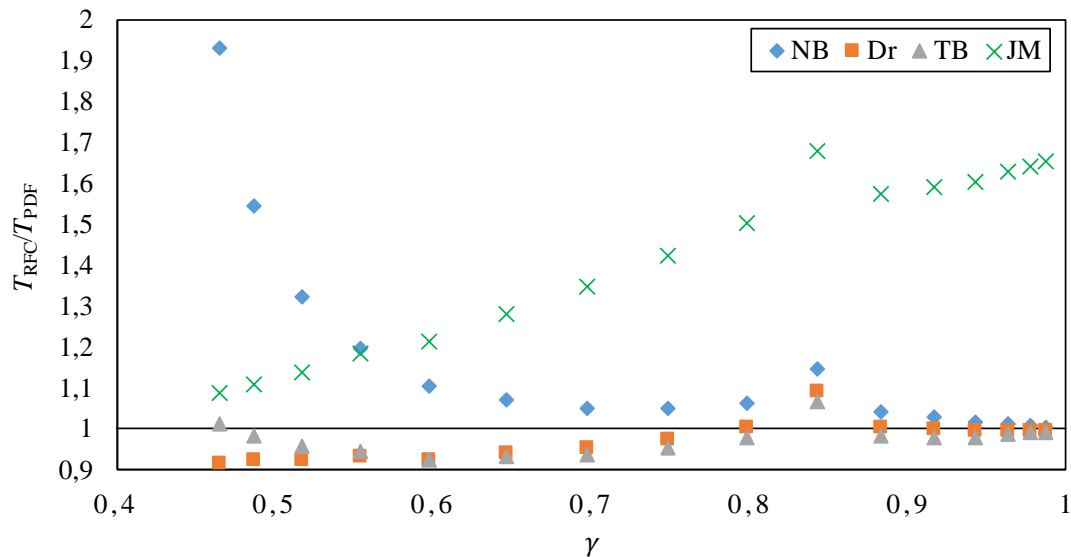
Slika 16. Kumulativno oštećenje – NB odziv

## 6.2. Usporedba rezultata $f_1 = 1 - 8,5 \text{ Hz}$ , $f_2 = 10 \text{ Hz}$

Slika 17. definirana je za u naslovu navedene referentne vrijednosti. Ordinata je definirana odnosom  $T_{\text{RFC}}$  i  $T_{\text{PDF}}$ . Kada je omjer  $T_{\text{RFC}}/T_{\text{PDF}}$  jednak jedan to znači da su rezultati za vrijeme do zamornog loma u frekvencijskoj i vremenskoj domeni jednaki. Proračun zamora u frekvencijskoj domeni puno je jednostavniji i brži nego u vremenskoj domeni. Na apscisi je definiran faktor nepravilnosti  $\gamma$ , koji se kreće u granicama  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

Vrijednosti dobivene Dirlik i TB metodama približno se poklapaju s vrijednostima dobivenim u vremenskoj domeni, te se za te metode može reći da poprilično dobro opisuju RFC raspone. NB se raspada na početku gdje su vrijednosti frekvencija poprilično udaljene jedna od druge. NB daje konzervativna rješenja u odnosu na RFC u vremenskoj domeni i vrijedi u slučaju kada frekvencije nisu previše razmaknute. NB je gornja granica za RFC oštećenje, a sve iznad te granice nema fizikalnog smisla jer je NB prema literaturi prekonzervativan. JM daje konzervativno rješenje kada se frekvencije međusobno približavaju, tj. kada je  $\gamma$  bliži 1, što je

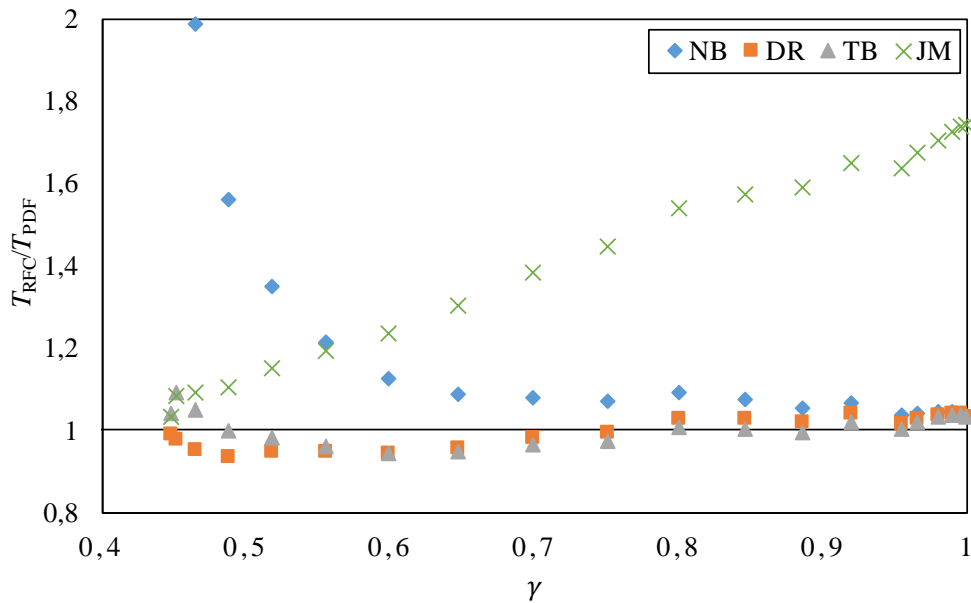
nefizičko. JM metoda vrijedi kada je uzbuda širokopolasna i kada su dvije dominantne frekvencije znatno udaljene jedna od druge.



Slika 17. Usporedba spektralnih metoda  $f_1 = 1 - 8,5$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz

### 6.3. Usporedba rezultata $f_1 = 1 - 95$ Hz, $f_2 = 100$ Hz

Slika 18. definirana je za  $f_2 = 100$  Hz, a  $f_1$  pomiče se od početne frekvencije  $f_1 = 1$  Hz do  $f_1 = 95$  Hz, uz povećanje frekvencije za 5 Hz. Ostale vrijednosti jednake su već navedenim referentnim vrijednostima. Ukupno vrijeme trajanja procesa postavljeno je na  $t_{max} = 8192$  s, frekvencija uzorkovanja iznosi  $f_{sr} = 1024$  Hz i broj diskretnih točaka je  $N = 8388608$ . Kako bi prikaz rezultata ostalih metoda bio precizniji, NB je na početku dijagrama odrezan zato što NB daje prekonzervativna rješenja kada su dvije dominantne frekvencije jako udaljene.

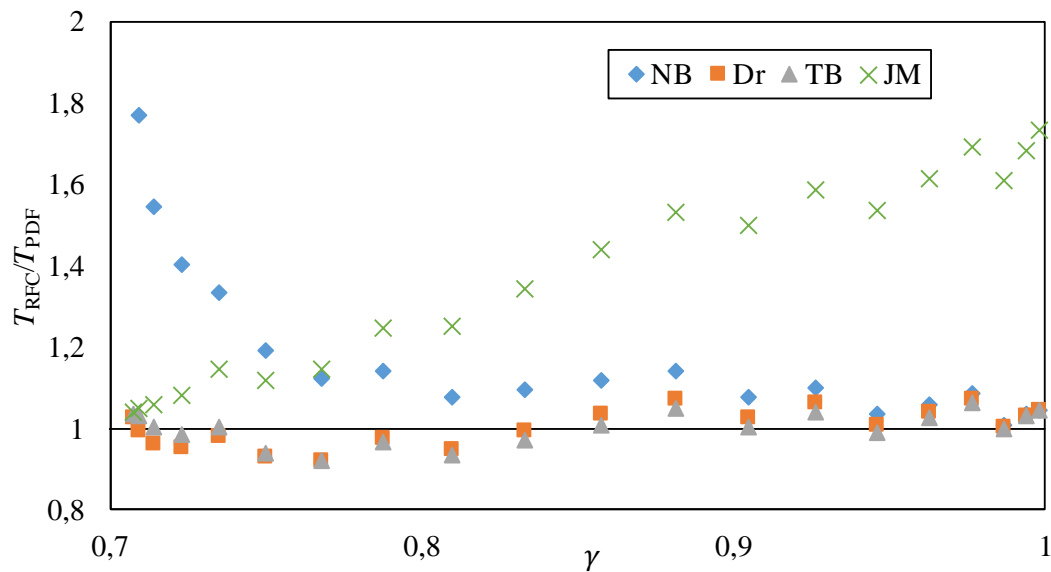


Slika 18. Usporedba spektralnih metoda  $f_1 = 1 - 95$  Hz,  $f_2 = 100$  Hz

Slikom 18. prikazano je kako promjena frekvencije ne utječe znatno na omjer vremena do loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

#### 6.4. Usporedba rezultata $S_{PSD1} = S_{PSD2} = 10\,000$ MPa<sup>2</sup>/Hz

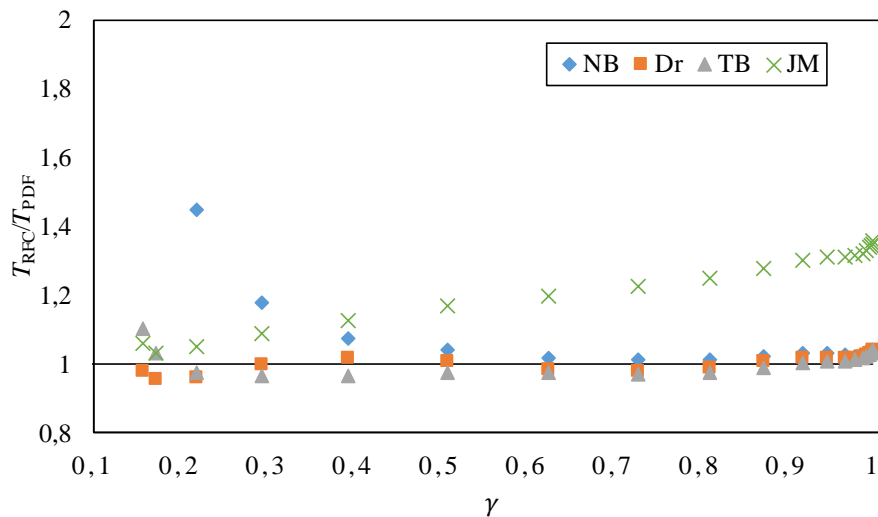
Slika 19. prikazuje odnos  $T_{RFC}/T_{PDF}$  gdje obje frekvencije imaju jednaka naprezanja  $S_{PSD1} = S_{PSD2} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz. Analiza je definirana za konstantan  $f_2 = 100$  Hz, i  $f_1$  koji se mijenja od  $f_1 = 1$  Hz pa sve do  $f_1 = 95$  Hz. Ukupno vrijeme trajanja procesa postavljeno je na  $t_{max} = 8192$  s, frekvencija uzorkovanja iznosi  $f_{sr} = 1024$  Hz i broj diskretnih točaka je  $N=8388608$ . Sve opaske koje su uočene za slučajeve navedene gore (slika 17. i slika 18.) vrijede i ovdje. Faktor nepravilnost  $\gamma$  za ovaj slučaj kreće se između 0,7 i 1.



Slika 19. Usporedba spektralnih metoda  $S_{PSD1} = S_{PSD2} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$

## 6.5. Usporedba rezultata $S_{PSD1} = 10\ 000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$

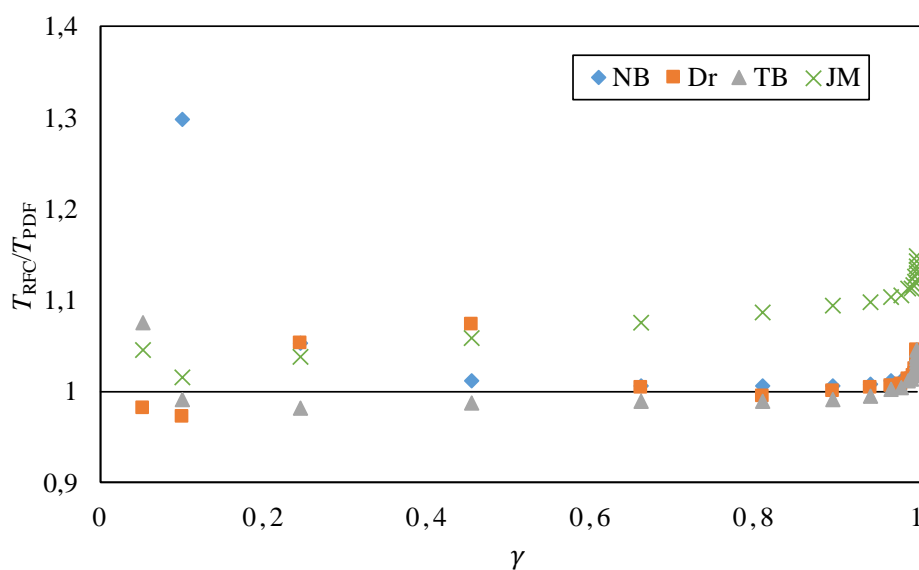
Na slici 20. prikazan je odnos  $T_{RFC}/T_{PDF}$  gdje je  $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , a  $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ . Analiza je definirana za konstantan  $f_2 = 100 \text{ Hz}$ , i  $f_1$  koji se mijenja od  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  pa sve do  $f_1 = 95 \text{ Hz}$ . Ukupno vrijeme trajanja procesa postavljeno je na  $t_{\max} = 8192 \text{ s}$ , frekvencija uzorkovanja iznosi  $f_{sr} = 1024 \text{ Hz}$  i broj diskretnih točaka je  $N = 8388608$ . Za takav slučaj, sve metode u frekvencijskoj domeni daju poprilično točne rezultate, osim NB gdje su frekvencije jako razmaknute. Smanjenjem  $S_{PSD2}$ , dijagrami se znatno ne mijenjaju. Faktor nepravilnost  $\gamma$  za ovaj slučaj kreće se između 0,1 i 1.



Slika 20. Usporedba spektralnih metoda  $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ ,  $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$

## 6.6. Usporedba rezultata $S_{PSD1} = 10\,000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$

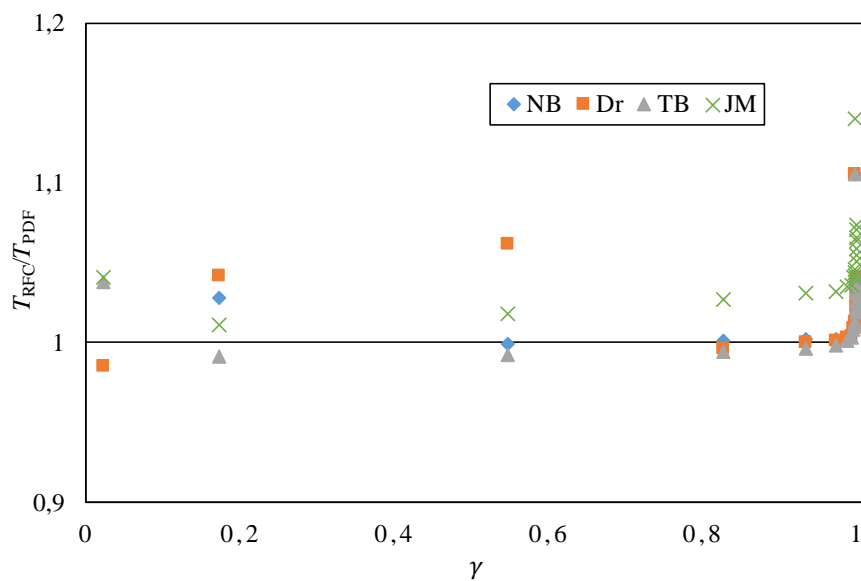
Na slici 21. prikazan je odnos  $T_{RFC}/T_{PDF}$  gdje je  $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , a  $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ . Analiza je definirana za konstantan  $f_2 = 100 \text{ Hz}$ , i  $f_1$  koji se mijenja od  $f_1 = 1 \text{ Hz}$  pa sve do  $f_1 = 95 \text{ Hz}$ . Ukupno vrijeme trajanja procesa postavljeno je na  $t_{\max} = 8192 \text{ s}$ , frekvencija uzorkovanja iznosi  $f_{sr} = 1024 \text{ Hz}$  i broj diskretnih točaka je  $N = 8388608$ . Faktor nepravilnost  $\gamma$  za ovaj slučaj kreće se između 0 i 1.



Slika 21. Usporedba spektralnih metoda  $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ ,  $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$

## 6.7. Usporedba rezultata $S_{\text{PSD1}} = 10\ 000\ \text{MPa}^2/\text{Hz}$ , $S_{\text{PSD2}} = 2,5\ \text{MPa}^2/\text{Hz}$

Na slici 22. prikazan je odnos  $T_{\text{RFC}}/T_{\text{PDF}}$  gdje je  $S_{\text{PSD1}} = 10000\ \text{MPa}^2/\text{Hz}$ , a  $S_{\text{PSD2}} = 2,5\ \text{MPa}^2/\text{Hz}$ . Analiza je definirana za konstantan  $f_2 = 100\ \text{Hz}$ , i  $f_1$  koji se mijenja od  $f_1 = 1\ \text{Hz}$  pa sve do  $f_1 = 95\ \text{Hz}$ . Ukupno vrijeme trajanja procesa postavljeno je na  $t_{\text{max}} = 8192\ \text{s}$ , frekvencija uzorkovanja iznosi  $f_{\text{sr}} = 1024\ \text{Hz}$  i broj diskretnih točaka je  $N = 8388608$ . Faktor nepravilnost  $\gamma$  za ovaj slučaj kreće se između 0 i 1.



Slika 22. Usporedba spektralnih metoda  $S_{\text{PSD1}} = 10000\ \text{MPa}^2/\text{Hz}$ ,  $S_{\text{PSD2}} = 2,5\ \text{MPa}^2/\text{Hz}$

## 7. Zaključak

U radu je opisan koncept brojanja ciklusa za povijest naprezanja s promjenjivom amplitudom. Opisane su sljedeće metode za brojanje ciklusa: brojanje prelaska nivoa, brojanje vrhova, brojanje raspona i brojanje toka kiše. Detaljno je opisana metoda brojanja ciklusa za ponavljajuću povijest naprezanja, koja se još naziva pojednostavljenom *Rainflow* metodom.

Razvijen je algoritam u računalnom alatu *MATLab R2017b* za procjenu visokocikličkog zamora korištenjem *rainflow* metode u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. *Rainflow* metodom u vremenskoj domeni izračunate su vrijednosti kumulativnog oštećenja i vrijeme zamora do loma.

Proračun u frekvencijskoj domeni uključuje približne spektralne teorije: Bendat (*Narrow-Band*), Dirlik, Tovo-Benasciutti i Jiao-Moan. Primjenom tih spektralnih teorija također su dobiveni rezultati za kumulativno oštećenje i vrijeme zamora do loma.

Provedena je usporedba *Rainflow* metode u vremenskoj domeni i primjena spektralnih teorija u frekvencijskoj domeni. Uspoređeni su rezultati uz primjenu oba pristupa. S obzirom da je proračun za duge povijesti naprezanja u vremenskoj domeni dugotrajan, korištenjem spektralnih teorija znatno se pojednostavljuje proračun, stoga je bitno da su rezultati dobiveni u obje domene približno jednaki.

Razmatran je stohastički signal. Kako bi se mogao provesti proračun u frekvencijskoj domeni, opisan je postupak Fourierove transformacije pomoću koje je signal prikazan kao funkcija spektralne gustoće snage PSD u frekvencijskoj domeni (bimodalan spektar naprezanja u kojem prevladavaju dvije osnovne frekvencije).

Iz provedene analize može se zaključiti kako spektralne teorije Dirlik i Tovo-Benasciutti daju približno jednaka rješenja za predviđanje zamora materijala. *Narrow-Band* uvijek daje prekonzervativna rješenja i raspada se kad su dvije osnovne frekvencije poprilično razdvojene. JM daje relativno točna, ali konzervativna rješenja u području gdje su dvije osnovne frekvencije razdvojene, tj. u širokopojasnom području, a raspada se kada se frekvencije približavaju gdje premašuje čak i *Narrow-Band* rezultate.

## Literatura

- [1] *Stephens, R. I., Fatemi, A., Stephens, R. R., Fuchs, H. O., Metal Fatigue in Engineering, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [2] Čakmak, D., **Rainflow metoda**, Seminarski rad iz kolegija **Mehanika oštećenja i mehanika loma**, FSB, Zagreb, 2014.
- [3] *Kranjčević, N., Elementi Strojstva, Poglavlja iz kolegija Elementi konstrukcija I, IA i IB*, FSB, Zagreb, 2012.
- [4] Bishop, N.W.M., Sherratt, F., **Finite Element Based Fatigue Calculations**, NAFEMS Ltd, Farnham, 2000.
- [5] *ASTM Standards, E1049 – 85, Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis*, 2011.
- [6] Bishop, N.W.M., **The use of frequency domain parameters to predict structural fatigue**, Ph.D. Thesis, University of Warwick, Coventry, England, 1988.
- [7] *Slavič, J., Mršnik, M., Česnik, M., Javh, J., Boltežar, M., Vibration Fatigue by Spectral Methods*, 1st Edition, From Structural Dynamics to Fatigue Damage – Theory and Experiments, Elsevier, 2020
- [8] *Brandt, A., Noise and vibration analysis*, University of Southern Denmark, 2011.
- [9] Tovo, R., **Cycle distribution and fatigue damage under broad-band random loading**, *International Journal of Fatigue* 24(11) (2002) 1137–1147.
- [10] Benasciutti, D., **Fatigue analysis of random loadings**, Ph.D. Thesis, University of Ferrara, Italy, 2005.
- [11] Benasciutti, D., Tovo, R., **On fatigue damage assessment in bimodal random processes**, *International Journal of Fatigue* 29(2) (2007), 232 – 244.
- [12] Jiao, G., Moan, T., **Probabilistic Analysis of Fatigue Due to Gaussian Load Processes**, *Probabilistic Engineering Mechanics* 5(2) (1990) 76–83.
- [13] Čakmak, D., Tomičević, Z., Wolf, H., Božić, Ž., Semenski, D., **Explicit solution of Rice/Lalanne peak probability distribution for statistical fatigue assessment in the frequency domain**, *Procedia structural integrity* 31C (2021) 98–104.
- [14] Dirlik, T., **Application of computers in fatigue analysis**, Ph.D. Thesis, University of Warwick, Coventry, England, 1985.
- [15] Bendat, J.S., **Probability functions for random responses: prediction of peaks, fatigue damage and catastrophic failures**, Technical Report/NASA report on contract NAS-5-4590, NASA CR-33, Washington, 1964.
- [16] Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R., *Special functions*, Cambridge University Press, 1999.
- [17] Kutleša, E., **Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora metodom toka kiše**, **Završni rad**, FSB, Zagreb, 2021.
- [18] Mršnik, M., Slavič, J., Boltežar, M., **Frequency-Domain Methods for a Vibration-Fatigue-Life Estimation - Application to Real Data**, *International Journal of Fatigue* 47 (2013) 8–17.
- [19] Benasciutti, D., Tovo, R., **Comparison of spectral methods for fatigue analysis of broad-band Gaussian random processes**, *Probabilistic Engineering Mechanics* 21(4) (2006), 287 - 299.



- [20] Lalanne, C., **Fatigue Damage, Mechanical Vibration and Shock Analysis**, *Revised and Updated 3rd Edition, Volume 4*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2014. (First edition published 2002)
- [21] Pearson, J., **Computation of Hypergeometric Functions**, M.D. Thesis, Worcester College, 2009.