

# Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora iz stohastičke povijesti naprezanja u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

---

Matijević, Marko

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:510209>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-10**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)





**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

**ZAVRŠNI RAD**

**Marko Matijević**

**Zagreb, 2021.**



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

---

# Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora iz stohastičke povijesti naprezanja u vremenskoj i frekvencijskoj domeni

---

Mentori:

Doc. dr. sc. Zvonimir Tomičević, mag. ing. mech.

Dr. sc. Damjan Čakmak, mag. ing. mech.

Student:

Marko Matijević

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru, doc. dr. sc. Zvonimiru Tomičeviću, mag. ing. mech na iskazanom povjerenju tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem svojim roditeljima, sestrama, zaručnici Marini i svim prijateljima na potpori, razumjevanju i svakoj riječi podrške tijekom studija.

Posebnu zahvalu posvećujem komentoru dr. sc. Damjanu Čakmaku, mag. ing. mech. na iskazanom povjerenju, uloženom vremenu i dostupnosti za razgovor o temama zamora. Zahvalan sam što me je uveo u meni nepoznatu tematiku zamornog loma, vibracija i statistike. Zahvaljujem na konstantnom usmjeravanju tijekom izrade ovog rada, na energičnosti, poticajima, kritikama i najviše na korektnom odnosu.

Marko Matijević,

Zagreb, 22. rujna 2021.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove.



Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

PSveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Marko Matijević** JMBAG: **0035211196**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora iz stohastičke povijesti naprezanja u vremenskoj i frekvencijskoj domeni**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Development of an algorithm for the estimation of high-cycle fatigue from the stochastic stress history in the time and frequency domains**

Opis zadatka:

U slučaju stohastičke povijesti naprezanja potrebno je primijeniti približnu metodu brojanja ciklusa pri procjeni zamora konstrukcije. Norma ASTM E1049-85 daje četiri osnovna načina brojanja ciklusa nepravilnih amplituda: brojanje raspona toka kiše (eng. *rainflow range counting*), brojanje vrhova (eng. *peak counting*), brojanje raspona (eng. *range counting*) i brojanje prelaska nivoa (eng. *level crossing counting*). Sve navedene metode omogućuju pojednostavljenje složenih povijesti naprezanja različitih amplituda na niz jednostavnih ciklusa naprezanja konstantnih amplituda. Na takav niz pojednostavljenih ciklusa moguće je primijeniti Palmgren-Minerovo pravilo za procjenu nakupljenog oštećenja u konstrukciji.

U ovom radu potrebno je osmisliti i razviti algoritam za procjenu zamora na temelju stohastičke povijesti naprezanja metodama: 1) brojanja vrhova, 2) brojanja prelaska nivoa i 3) brojanja raspona, uz korištenje vremenske i frekvencijske domene.

Tijekom rada potrebno je:

1. Opisati fenomen zamora materijala i način procjene zamora pomoću Palmgren-Minerovog pravila.
2. Detaljno opisati sve tri korištene metode brojanja ciklusa različitih amplituda prema ASTM E1049-85 normi.
3. Razviti i dokumentirati algoritam za procjenu visokocikličkog zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.
4. Usporediti dobivene rezultate za različite stohastičke povijesti naprezanja primjenom svih teorija.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

6. svibnja 2021.

Datum predaje rada:

2. rok (izvanredni): 5. srpnja 2021.  
3. rok: 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:

2. rok (izvanredni): 9.7.2021.  
3. rok: 27.9. – 1.10.2021.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Zvonimir Tomičević

Dr. sc. Damjan Čakmak

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

## Sadržaj

<b>Sadržaj</b> .....	<b>I</b>
<b>Popis slika</b> .....	<b>III</b>
<b>Popis tablica</b> .....	<b>V</b>
<b>Popis važnijih oznaka i skraćenica</b> .....	<b>VI</b>
<b>Sažetak</b> .....	<b>VIII</b>
<b>Summary</b> .....	<b>IX</b>
<b>1. Uvod</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Zamor</b> .....	<b>2</b>
2.1. Prva istraživanja.....	2
2.2. Zamorni lom .....	2
2.3. S-N metoda .....	8
<b>3. Metode brojanja ciklusa</b> .....	<b>11</b>
3.1. Brojanje raspona toka kiše (engl. <i>Rainflow Range Counting</i> ) .....	12
3.2. Brojanje prelaska nivoa (engl. <i>Level-Crossing Counting</i> ) .....	14
3.3. Brojanje vrhova (engl. <i>Peak Counting</i> ) .....	15
3.4. Brojanje raspona (engl. <i>Range Counting</i> ) .....	16
3.5. Usporedba navedenih metoda.....	18
<b>4. Frekvencijsko područje</b> .....	<b>19</b>
4.1. Fourierova transformacija.....	19
4.1.1. Diskretna fourierova transformacija (engl. Discrete Fourier transform).....	20
4.1.2. Brza Fourierova transformacija (engl. Fast Fourier Transform (FFT)).....	21
4.1.3. Inverzna Fourierova transformacija (engl. Inverse Fourier Transform) .....	22
4.2. Stohastički signal.....	22
4.2.1. Gaussovska raspodjela.....	23
4.3. Spektralni parametri stohastičkog signala u frekvencijskom području.....	24
<b>5. Metode brojanja ciklusa u frekvencijskom području</b> .....	<b>27</b>
5.1. Metoda brojanja vrhova - Rice/Lalane .....	27
5.2. Metoda brojanja prelaska nivoa – NB .....	28
5.3. Metoda brojanja raspona Krenk i Tunna.....	29
<b>6. Procjena visokocikličkog zamora</b> .....	<b>30</b>
6.1. Visokociklički zamor – referentni primjer .....	30
6.2. Usporedba visokocikličkog zamora s različitim naprežanjem $S_{PSD}$ .....	39
6.2.1. Metoda LCC – NB.....	39
6.2.2. Metoda PC – RL.....	40

6.2.3. Metoda RC – KT .....	41
<b>7. Zaključak .....</b>	<b>44</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>45</b>

## Popis slika

Slika 2.1 Shema transkristalnog mikroskopskog rasta pukotina Faze I (smicanje) i Faze II (vlak), preuzeto i uređeno iz [5].....	3
Slika 2.2 Prikaz visokocikličkog i niskocikličkog zamora u logaritamskom mjerilu (prilagođeno iz [7]) .....	4
Slika 2.3 Statički vlačni pokus: a) $\sigma$ - $\epsilon$ / $S$ - $e$ dijagram, b) korelacija $A_0/A$ sa uzorkom [6].....	5
Slika 2.4 Dinamičko opterećenje: a) harmonijsko, b) nepravilne amplitude .....	6
Slika 2.5 Jedan period harmonijskog cikličkog opterećenja (prilagođeno iz [7]) .....	7
Slika 2.6 Slučajevi harmonijskog cikličkog naprezanja ovisni o omjeru naprezanja (prilagođeno iz [7]) .....	7
Slika 2.7 $S$ - $N$ krivulja za čelični materijal [6].....	8
Slika 2.8 Povijest naprezanja: a) promjenjive amplitude, b) razvrstanih ciklusa konstantnih amplitude [9] .....	9
Slika 3.1 Prikaz pojednostavljenja sinusoide u pravce i "zatvorenog" trokuta kao cijelog ciklusa [9] .....	11
Slika 3.2 Primjer <i>Rainflow</i> metode [9].....	12
Slika 3.3 Primjer brojanja prelaska nivoa: a) Brojanje prelaska nivoa, b) Ciklusi izvedeni iz a) ....	15
Slika 3.4 Primjer brojanja vrhova: a) Brojanje vrhova, b) Ciklusi izvedeni iz a) .....	16
Slika 3.5 Primjer brojanja vrhova s ograničenjem (prilagođeno iz [1]).....	16
Slika 3.6 Primjer brojanja raspona (prilagođeno iz [1]) [9] .....	17
Slika 3.7 Usporedba tri metode brojanja ciklusa.....	18
Slika 4.1 Standardni postupak proračuna zamora u vremenskom području (prilagođeno iz [8])	19
Slika 4.2 Suma sinusoida [12].....	20
Slika 6.1a) PSD dijagram stohastičkog opterećenja, b) fragment stohastičkog signala .....	30
Slika 6.2 a) Ukupna povijest naprezanja, b) Histogram slučajnog procesa.....	31
Slika 6.3 Dijagram usporedbe dviju spektralnih metoda (LCC) za $f_1 = 1 - 8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz, $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz i $S_{PSD2} = 2500$ MPa <sup>2</sup> /Hz.....	32
Slika 6.4 Dijagram usporedbe dviju spektralnih metoda (PC) za $f_1 = 1 - 8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz, $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz i $S_{PSD2} = 2500$ MPa <sup>2</sup> /Hz.....	33
Slika 6.5 Dijagram usporedbe dviju spektralnih metoda (RC) za $f_1 = 1 - 8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz, $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz i $S_{PSD2} = 2500$ MPa <sup>2</sup> /Hz.....	34
Slika 6.6 PSD dijagram stohastičkog opterećenja uskopojasnog (NB) signala, $f_1 = 8,5$ Hz i $f_2 = 10$ Hz.....	36
Slika 6.7 Odziv sustava u uskopojasnom području (NB) za metodu LCC: $f_1 = 8,5$ Hz i $f_2 = 10$ Hz a) dijagram PDF naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja .....	36
Slika 6.8 Odziv sustava u uskopojasnom području (NB) za metodu PC: $f_1 = 8,5$ Hz i $f_2 = 10$ Hz a) dijagram PDF naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja .....	36
Slika 6.9 Odziv sustava u uskopojasnom području (NB) za metodu RC: $f_1 = 8,5$ Hz i $f_2 = 10$ Hz a) dijagram PDF naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja .....	37
Slika 6.10 LCC metoda a) PDF dijagram naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja.....	38
Slika 6.11 PC metoda a) PDF dijagram naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja .....	38



Slika 6.12 RC metoda a) PDF dijagram naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja .....	38
Slika 6.13 Usporedba spektralnih metoda LCC-NB a) $S_{PSD2} = S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , b) $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , c) $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , d) $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .....	40
Slika 6.14 Usporedba spektralnih metoda PC-RL a) $S_{PSD2} = S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , b) $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ c) $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , d) $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .....	41
Slika 6.15 Usporedba spektralnih metoda RC-KT a) $S_{PSD2} = S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , b) $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , c) $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , d) $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .....	42
Slika 6.16 Dio povijesti naprezanja za $f_1 = 5\text{Hz}$ , $f_2 = 100\text{Hz}$ , $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .....	42
Slika 6.17 RC metoda za $f_1 = 5\text{Hz}$ , $f_2 = 100\text{Hz}$ , $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ a) PDF dijagram naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja .....	43

## Popis tablica

Tablica 3.1 Primjer brojanja ciklusa <i>Rainflow</i> metodom (prilagođeno iz [1]).....	13
Tablica 3.2 Matrica jednostavnog broja srednjih raspona (preuređeno iz [1]) .....	17
Tablica 6.1 Prikaz rezultata za LCC i NB metodu u frekvencijskom rasponu za $f_1 = 1 - 8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz, te $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz i $S_{PSD2} = 2500$ MPa <sup>2</sup> /Hz .....	32
Tablica 6.2 Prikaz rezultata za PC i RL metodu u frekvencijskom rasponu za $f_1 = 1 - 8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz, te $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz i $S_{PSD2} = 2500$ MPa <sup>2</sup> /Hz .....	34
Tablica 6.3 Prikaz rezultata za RC i KT metodu u frekvencijskom rasponu za $f_1 = 1 - 8,5$ Hz, $f_2 = 10$ Hz, te $S_{PSD1} = 10000$ MPa <sup>2</sup> /Hz i $S_{PSD2} = 2500$ MPa <sup>2</sup> /Hz .....	35

## Popis važnijih oznaka i skraćenica

### Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
${}_2F_1(\cdot)$	–	Gausovska/obična HiperGeometrijska funkcija
$A$	$m^2$	površina opterećenog poprečnog presjeka uzorka/ploče
$A_0$	$m^2$	početna površina poprečnog presjeka uzorka/ploče
$b$	–	eksponent zamorne čvrstoće (Basquinov eksponent)
$B'_f$	$(N/mm^2)^m$	Spektralni eksponent zamorne čvrstoće
$D_f$	–	ukupno zamorno oštećenje
$e$	–	baza prirodnog logaritma ( $e \cong 2.718281$ )
$E[0]$	Hz	očekivani broj gore usmjerenih ništica po sekundi
$E[P]$	Hz	očekivani broj vrhova po sekundi
$\text{erf}(\cdot)$	–	funkcija greške ( $0 \leq  \text{erf}(\cdot)  \leq 1$ )
$f$	Hz	frekvencija uzbude ( $f = \Omega / (2\pi)$ )
$f_{Nyq}$	Hz	Nyquistova frekvencija ( $f_{Nyq} = f_{sr} / 2$ )
$f_{sr}$	Hz	frekvencija uzorkovanja
$i$	–	imaginarna jedinica ( $i = \sqrt{-1}$ )
$i, j, k, n$	–	indeks (cijeli broj, $i, j, k, n = 1 \dots \infty$ )
$m$	–	Spektralni zamorni eksponent ( $m = -1/b$ )
$m_n$	$(N/mm^2)^2 Hz^n$	$n$ -ti spektralni moment
$S_a$	$N/mm^2$	amplituda inženjerskog naprezanja ( $S_a = S_r / 2$ )
$S'_f$	$N/mm^2$	eksponent zamorne čvrstoće
$S_h$	$N/mm^2$	povijest naprezanja
$S_{PSD}$	$(N/mm^2)^2/Hz$	spektralna gustoća snage naprezanja
$S_r$	$N/mm^2$	raspon inženjerskog naprezanja
$S_{RMS}, x_{RMS}$	$N/mm^2$	efektivna vrijednost naprezanja
$t$	s	vrijeme
$T_f$	s	vrijeme do zamornog loma
$t_{max}$	s	ukupno vrijeme
$\nu_{0,P}$	Hz	očekivana frekvencija niskofrekventne komponente procesa
$x$	$N/mm^2$	varijabla naprezanja
$Z$	–	normalizirani raspon naprezanja
$\mathcal{F}(\cdot)$	$N/mm^2$	rezultat Fourierove transformacije povijesti naprezanja
$\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$	$N/mm^2$	Rezultat inverzne Fourierove transformacije naprezanja

## Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
$\alpha_n$	–	$n$ -ti bezdimenzijski spektralni parametar
$\Gamma(\cdot)$	–	potpuna Eulerova Gama funkcija
$\gamma, \alpha_2$	–	faktor nepravilnosti ( $0 \leq \gamma \leq 1$ )
$\delta, \alpha_1$	–	prvi bezdimenzijski spektralni parametar ( $0 \leq \delta \leq 1$ )
$\kappa$	–	faktor spljoštenosti/zašiljenosti
$\lambda$	–	parametar spektralne širine pojasa ( $\lambda = \sqrt{1 - \gamma^2}$ )
$\lambda_{0,i}$	–	omjer spektralnih momenata $i$ -tog procesa
$\mu, \bar{x}$	N/mm <sup>2</sup>	aritmetička sredina naprezanja
$\pi$	rad	Ludolfov broj ( $\pi \cong 3.14159$ )
$\sigma$	N/mm <sup>2</sup>	standardna devijacija naprezanja
$\zeta, S_k$	–	faktor asimetrije/iskrivljenosti
$\sigma^2, \text{Var}(x)$	(N/mm <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>	varijanca naprezanja
$\varphi$	rad	fazni kut
$\Phi(\cdot)$	–	bezdimenzijska funkcija standardne normalne distribucije
$\Omega$	rad/s	kružna frekvencija uzbude

## Skraćenice, indeksi

Oznaka	Puno značenje
a	Amplituda
anlt	Analitički
c	Kumulativno
CLT	Centralni granični teorem
DFT	Diskretna Fourierova transformacija
FFT	Brza Fourierova transformacija
FT	Fourierova transformacija
HG	HiperGeometrijski
IFFT	Inverzna brza Fourierova transformacija
LCC	Brojanje prelaska nivoa
NB	Uskopojasno ( <i>Narrow-Band</i> )
Nyq	Nyquist
PC	Brojanje vrhova
PSD	Spektralna gustoća snage
r	Raspon
RC	Brojanje raspona
RFC	Brojanje ciklusa tóka kiše
RL	Rice i Lalanne
RMS	Efektivna vrijednost (engl.: <i>root mean square</i> )

## Sažetak

Ovaj rad bavi se analizom zamora materijala. Usmjeren je na tri metode brojanja ciklusa iz ASTM norme: metoda brojanja prelaska nivoa (engl. *Level-Crossing Counting*), metoda brojanja vrhova (engl. *Peak Counting*) te metoda brojanja raspona (engl. *Range Counting*). Ovim metodama se pojednostavljaju složene povijesti naprezanja različitih amplituda na niz jednostavnih ciklusa naprezanja konstantnih amplituda.

Na početku rada opisan je zamorni lom, Wöhlerova krivulja te *S-N* metoda proračuna zamora.

Nadalje nabrojane su i opisane metode brojanja ciklusa navedene u normi ASTM E1049-85 (2011.)

U sljedećem dijelu opisani su frekvencijska domena, načini pretvorbe signala iz frekvencijske u vremensku domenu i obrnuto. Također su opisane karakteristike stohastičkog signala te uvjeti da bi on bio stohastičan. Opisane su metode brojanja ciklusa u frekvencijskom području za tri slučaja kojima je usmjeren ovaj rad.

U završnom dijelu prikazani su rezultati analize zamora stohastičkog signala različitih frekvencija i veličine naprezanja. Analiza je provedena pomoću algoritma napisanog u računalnom programu *MATLab R2017b*.

Ključne riječi: *zamorni lom, brojanje vrhova, brojanje raspona, brojanje prelaska nivoa, stohastička povijest naprezanja, vremenska domena, frekvencijska domena.*

---

## Summary

---

This thesis deals with the analysis of material fatigue. It focuses on three ASTM standards cycle counting methods: Level-Crossing Counting, Peak Counting and Range Counting. These methods simplify complex stress histories variable amplitudes into a series of simple constant amplitude stress cycles.

At the beginning of the thesis, fatigue fracture, Wöhler curve and  $S-N$  method of fatigue calculation are described.

The next section lists and describes cycle counting methods listed in ASTM E1049-85 (2011) standard.

The following section describes the frequency domain, ways to convert signals from frequency to time domain, and vice versa. The characteristics of the stochastic signal and the conditions to be stochastic are also described. Methods of counting cycles in the frequency range for three cases are described, which are the focus of this thesis.

The final part presents the results of the analysis of stochastic signal fatigue of different frequencies and stress sizes. The analysis was performed using an algorithm written in the computer program *MATLab R2017b*.

Keywords: *fatigue fracture, peak counting, range counting, level crossing counting, stochastic stress history, time domain, frequency domain.*

## 1. Uvod

U današnje doba u kojem se teži optimizaciji procesa razvoja proizvoda vrlo važnu ulogu imaju približne i brze metode proračuna ciklusa. U početnim fazama razvoja proizvoda teži se preliminarnim, brzim proračunima gdje se odlučuje o daljnjem postupku razvoja. Zamorni lom predstavlja sve veći izazov za modernog inženjera. Zamorni lom je lom uslijed cikličkih vremenski promjenjivih opterećenja. Kod zamornog loma problem je u određivanju broja ciklusa, tj. prebrojavanju ciklusa prije nastupanja zamornog loma. Norma ASTM E1049-85 [1] daje četiri osnovna načina brojanja ciklusa nepravilnih amplituda: brojanje vrhova, brojanje raspona, brojanje prelaska nivoa te brojanje raspona toka kiše.

Rad se bavi usporedbom rješenja triju metoda brojanja ciklusa te problemom loma uslijed zamora materijala. Cilj ovog rada je usporediti, dokumentirati i prikazati rješenja predviđena metodom brojanja vrhova, brojanja raspona i brojanja prelaska nivoa.

## 2. Zamor

### 2.1. Prva istraživanja

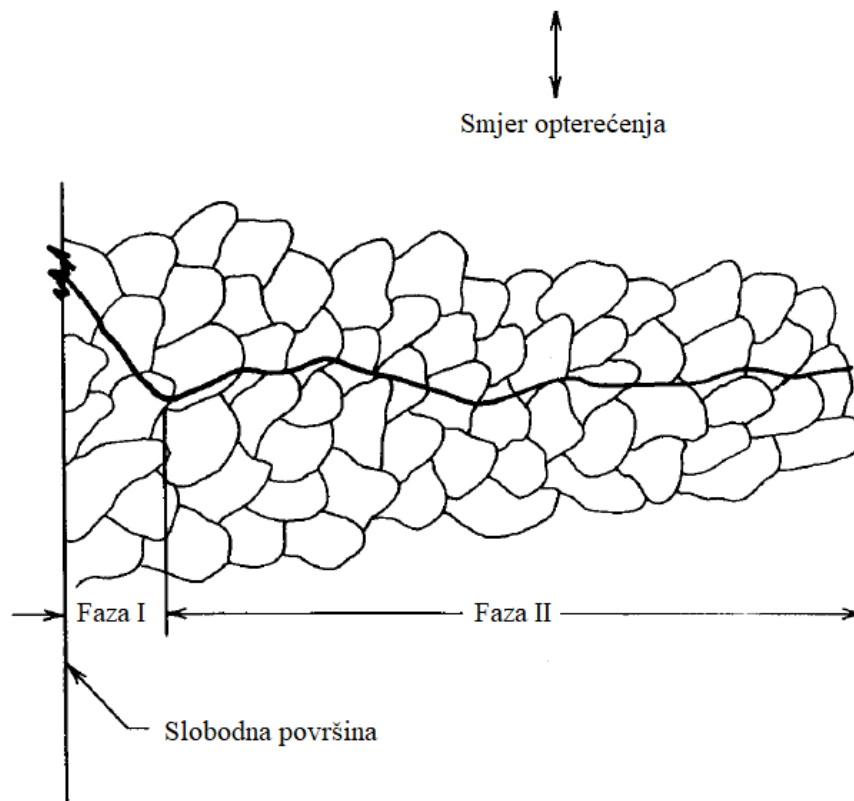
Zamor materijala spominje se prvom polovicom 19. stoljeća [2]. Lomovi na jarbolima zbog čestog podizanja jedara, u danima kada su brodovi plovili na velike udaljenosti, smatraju se zamornim lomom. Vjeruje se da je prvo istraživanje zamora metala oko 1829. godine proveo njemački rudarski inženjer W.A.J. Albert [2]. 1837. godine objavio je prve poznate rezultate ispitivanja zamora, koristeći ispitni stroj posebno izrađen za tu svrhu za lance transporter koji su pukli pri radu u rudnicima Clausthal [3]. Zanimanje za proučavanje zamora počelo se širiti sve većom uporabom željeznih konstrukcija, posebno mostova u željezničkim sustavima. Veliki utjecaj u istraživanju zamora materijala imala je željeznica. Prvo detaljno istraživanje zamora metalnog materijala pokrenuto je 1842. godine nakon željezničke nesreće u blizini Versaillesa u Francuskoj koja je rezultirala gubitkom ljudskih života (The Times of London, 11. svibnja 1842.). Uzrok ove nesreće pronađen je u zamoru materijala koji je potekao iz prednje osovine lokomotive. A. Wohler je tijekom razdoblja od 1852. do 1869. godine u Berlinu provodio sustavna ispitivanja nastanka zamora, gdje je uspostavio pokusnu stanicu. Primijetio je da je čvrstoća čeličnih željezničkih osovinama izloženih cikličkim opterećenjima znatno niža od njihove statičke čvrstoće. Wöhlerove studije koje su razmatrale savijanje, uvijanje i aksijalno opterećenje uključujući ispitivanja zamora na željezničkim osovinama i na raznim strukturnim komponentama koje se koriste u malim strojevima. Njegovo je istraživanje [4] također dovelo do karakterizacije ponašanja zamora u smislu krivulje amplitude naprezanja i broja ciklusa ( $S-N$ ). Godine 1910. O.H. Basquin je predložio empirijske zakone koji karakteriziraju  $S-N$  krivulje metala [2]. Pokazao je da je  $S-N$  dijagram u logaritamskom mjerilu rezultirao linearnim odnosom u velikom rasponu naprezanja.

### 2.2. Zamorni lom

Prema definiciji, zamor materijala predstavlja postupno razaranje materijala zbog dugotrajnoga djelovanja dinamičkog opterećenja (vremenski promjenjivo opterećenje). Zamor je lokalizirani postupak oštećenja materijala koji nastaje cikličkim opterećenjem. Rezultat je kumulativnog procesa koji se sastoji od: inicijacije pukotine, širenja pukotine te konačnog loma. Tijekom cikličkog opterećenja na mjestima najvećeg naprezanja mogu se javiti lokalizirane plastične deformacije koje uzrokuju trajno oštećenje materijala te nastajanje pukotine. Objašnjenje načina oštećenja materijala pri zamoru materijala vrlo je složeno i u uskoj vezi s



ponašanjem grešaka u kristalnoj rešetci. Širenje pukotine sastoji se od dvije faze: faza I, rast kratke pukotine, faza II, rast duge pukotine, što prikazuje Slika 2.1.

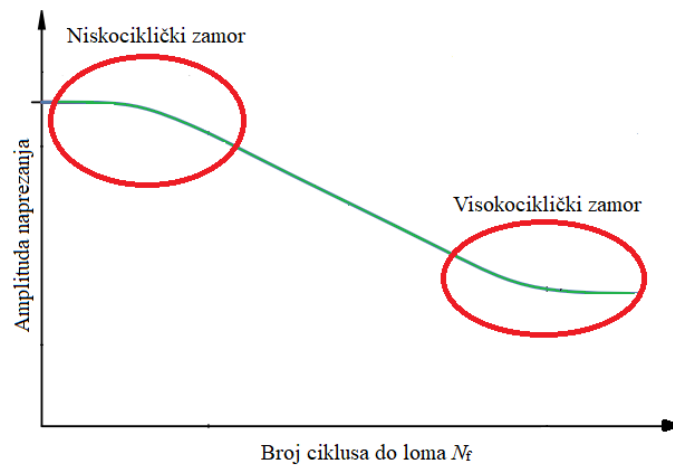


Slika 2.1 Shema transkristalnog mikroskopskog rasta pukotina Faze I (smicanje) i Faze II (vlak), preuzeto i uređeno iz [5]

U praksi se razlikuje visokociklički zamor (engl. *high-cycle/low strain fatigue*) i niskociklički zamor materijala (engl. *low-cycle/high strain fatigue*), a razlika je u trenutku nastupanja zamornog loma [6], str. 3. kako prikazuje Slika 2.2.

- **Visokociklički zamor**
  - o lom nastupa nakon velikog broja ciklusa opterećenja ( $N_f > 10^5$ ),
  - o naprezanja i deformacije su u elastičnom području,
  - o koristi se **S-N krivulja** (Wöhler, 1860.),
- **Niskociklički zamor**
  - o lom nastupa nakon  $10^1$ - $10^5$  ciklusa,
  - o naprezanja i deformacije su u elastoplastičnom području,

- o računa se broj ciklusa do iniciranja pukotine ( $N_i$ ) -  $\epsilon$ - $N$  metoda,
- o računa se broj ciklusa rasta pukotine do kritične duljine ( $N_p$ )  $da/dN$ ,
- o računa se broj ciklusa do loma:  $N_f = N_i + N_p$  – (iniciranje i propagacija pukotine)



Slika 2.2 Prikaz visokocikličkog i niskocikličkog zamora u logaritamskom mjerilu (prilagođeno iz [7])

U nastavku su definirani parametri statičkog vlačnog pokusa potrebni za analizu zamora materijala, prema [6], str. 4.

Inženjersko naprezanje:

$$S = \frac{F}{A_0} \quad (2.1)$$

Stvarno naprezanje:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.2)$$

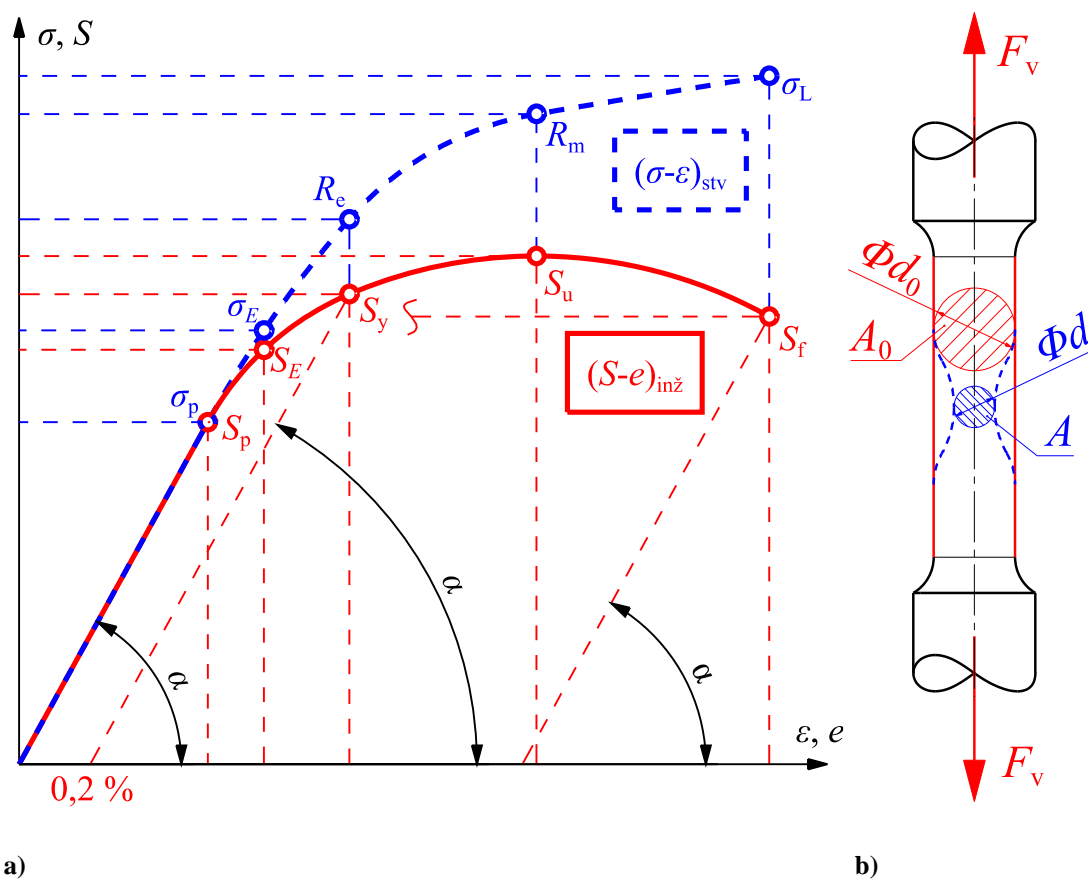
Inženjerska deformacija:

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (2.3)$$

Stvarna deformacija:

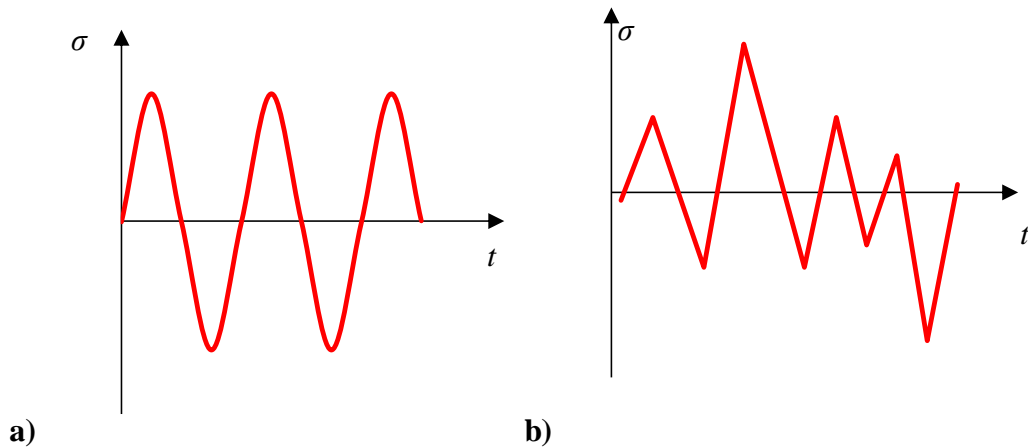
$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}. \quad (2.4)$$

Radi boljeg razumijevanja gore navedenih izraza potrebno je definirati parametre pomoću  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagrama duktilnog materijala prema [5], [6]. Kako prikazuje Slika 2.3b), a također je uočljivo u izrazu (2.1) da inženjersko naprezanje uzima u obzir početnu površinu  $A_0$ , dok stvarno naprezanje (2.2), koje je u stvarnosti veće, uzima površinu  $A$  koja je manja od površine  $A_0$ , rezultat toga je stvarno naprezanje koje je veće od inženjerskog (Slika 2.3a)) te uvelike utječe na daljnji tijek proračuna zamora materijala.



Slika 2.3 Statički vlačni pokus: a)  $\sigma$ - $\varepsilon/S$ - $e$  dijagram, b) korelacija  $A_0/A$  sa uzorkom [6]

U inženjerskom svijetu uvijek se teži prema idealiziranim slučajevima radi jednostavnosti proračuna. Kod određivanja dinamičkog opterećenja postoji idealni slučaj, te slučaj koji prikazuje realno opterećenje. Slika 2.4a) prikazuje harmonijsko cikličko opterećenje gdje funkcija ovisna o vremenu i naprezanju ima sinusni oblik. Slika 2.4b) prikazuje dinamičko opterećenje promjenjivih amplituda, signal je kompleksan i nepravilan. Takva vrsta opterećenja naziva se stohastičko opterećenje.



Slika 2.4 Dinamičko opterećenje: a) harmonijsko, b) nepravilne amplitude

Kako bi se mogla definirati sinusna funkcija ovisna o vremenu i naprezanju potrebna za proračun zamora (Slika 2.5) koriste se sljedeći izrazi [6]:

Raspon naprezanja koji je uvijek pozitivna vrijednost jednak je dvostrukoj amplitudi tj. razlici između maksimalnog i minimalnog naprezanja:

$$\sigma_r \equiv \Delta\sigma = |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| = 2 \cdot \sigma_a. \quad (2.5)$$

Amplituda naprezanja koja je također uvijek pozitivan broj jednaka je polovici raspona naprezanja tj. polovici razlike između maksimalnog i minimalnog naprezanja:

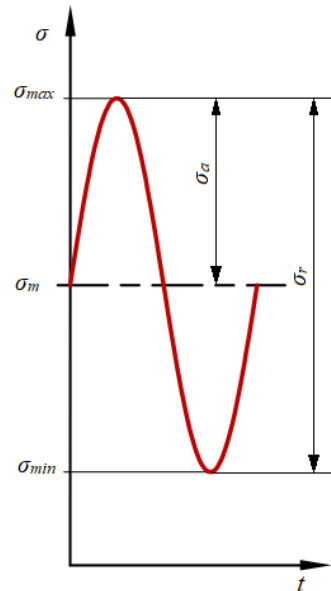
$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right| = \frac{\sigma_r}{2}. \quad (2.6)$$

Srednje naprezanje općenito je jednako polovici zbroja minimalnog i maksimalnog naprezanja

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \quad (2.7)$$

Omjer naprezanja predstavlja kvocijent minimalnog i maksimalnog naprezanja:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (2.8)$$

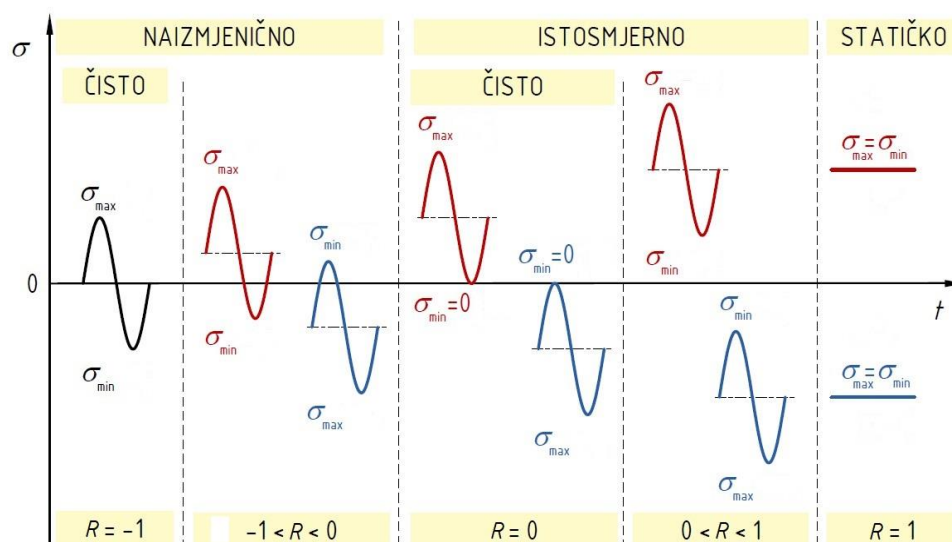


Slika 2.5 Jedan period harmonijskog cikličkog opterećenja (prilagođeno iz [7])

S obzirom na omjer naprezanja  $R$  koji se kreće u rasponu  $-1 < R < 1$  razlikuju se:

- Čisto naizmjenično naprezanje:  $R = -1$
- Čisto istosmjerno naprezanje:  $R = 0$

Kako prikazuje Slika 2.6, kod *čistog istosmjernog naprezanja* jednako je zastupljeno i vlačno i tlačno područje, tj.  $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$ . *Čisto naizmjenično naprezanje* predstavlja zastupljenost samo vlačnog, tj. samo tlačnog područja, kod te vrste opterećenja  $\sigma_{\min} = 0$ , a  $\sigma_{\max}$  je pozitivan, tj. negativan.



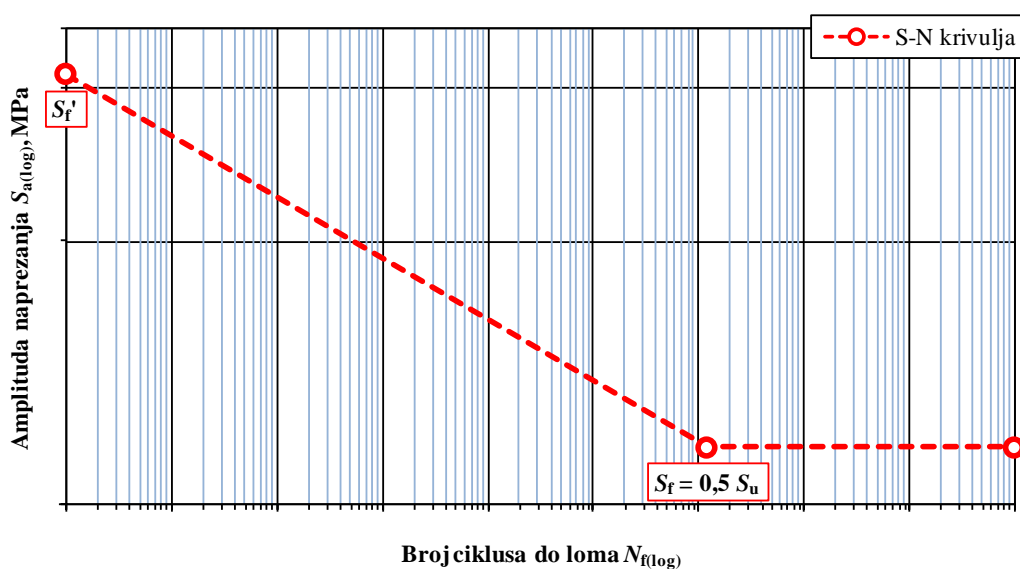
Slika 2.6 Slučajevi harmonijskog cikličkog naprezanja ovisni o omjeru naprezanja (prilagođeno iz [7])

### 2.3. S-N metoda

Procjena vijeka trajanja materijala uslijed zamora pretpostavlja da su sva naprezanja u komponenti ispod granice elastičnosti. S-N metoda je najstarija metoda za proračun vijeka trajanja (19. stoljeće) [8] i još uvijek je prikladna kada je nominalno naprezanje unutar granice elastičnosti materijala te ako je broj ciklusa do loma velik (visokociklički zamor - engl. *high-cycle fatigue*). S-N metoda nije primjenjiva u području niskocikličkog zamora (engl. *low-cycle fatigue*) gdje naprezanja imaju značajnu plastičnu komponentu [8]. Pri provođenju eksperimenta, polirani cilindar bez naglih promjena geometrije opterećen aksijalnom silom [8], stavlja se na umaralicu te se mjeri broj ciklusa do potpunog loma. Opterećenje, a ne naprezanje se drži konstantno tijekom cijelog testa. Za svaki uzorak izračnava se nominalno naprezanje  $S$  iz formula za elastično naprezanje, a rezultati se ucrtavaju na Wöhlerov dijagram (S-N dijagram) (Slika 2.7), osnova S-N metode. Standardna Wöhlerova (S-N) krivulja može se aproksimirati pomoću Basquinovog matematičkog odnosa [8]:

$$S_a = S'_{af} (N_f)^b \Leftrightarrow N_f = \left( \frac{S_a}{S'_{af}} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad S_r = S'_{rf} (N_f)^b \Leftrightarrow N_f = \left( \frac{S_r}{S'_{rf}} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad (2.9a-d)$$

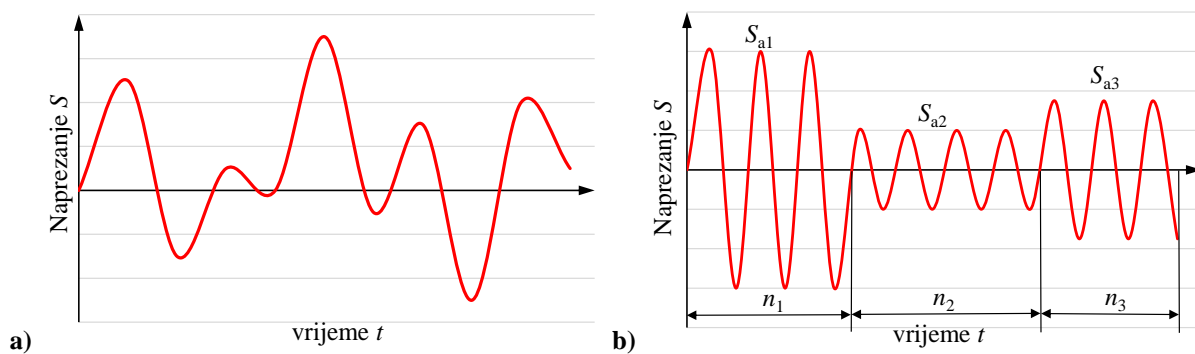
gdje su:  $S_a$  i  $S_r$  amplituda, tj. raspon inženjerskog naprezanja,  $b$  je Basquinov zamorni eksponent, (tj. nagib S-N krivulje),  $S'_{af}$  je amplituda zamorne čvrstoće, dok je  $S'_{rf}$  raspon zamorne čvrstoće u frekvencijskom području i  $N_f$  (ili skraćeno "N") je broj ciklusa do loma materijala.



Slika 2.7 S-N krivulja za čelični materijal [6]

Dijagram koji predočava Slika 2.7 prikazuje odnos trajne dinamičke čvrstoće  $S_f'$  i broja ciklusa do loma  $N_{f(\log)}$  u dvostrukom logaritamskom mjerilu radi preglednosti. Kada vrijednost amplitude iznosi pola vlačne čvrstoće krivulja postaje vodoravna.

Kada opterećenje nije harmonijsko cikličko, nego stohastičko,  $S-N$  krivulja se primjenjuje za svaki ciklus zasebno. Kod stohastičkog signala amplituda naprezanja nije konstantna, a  $S-N$  krivulja daje broj ciklusa do loma za harmonijski ciklus konstantne amplitude. Kako bi se procijenila povijest naprezanja stohastičkog signala prikladna za procjenu zamora, potrebno je signal razvrstati na skupine signala konstantne amplitude.



**Slika 2.8 Povijest naprezanja: a) promjenjive amplitude, b) razvrstanih ciklusa konstantnih amplitude [9]**

Za čisto naizmjenično naprezanje analizirano u vremenskoj domeni, povijest naprezanja  $S_h(t)$  je funkcija vremena  $t$ . Za procjenu ukupnog oštećenja (engl. *damage*) ili broja ciklusa do zamornog loma (engl. *number of cycles to fatigue failure*) koristi se standardni algoritam metode brojanja ciklusa toka kiše (engl. *Rainflow counting*) tj. metoda brojanja vrhova (engl. *peak counting*), metoda brojanja raspona (engl. *range counting*), metoda brojanja prelaska nivoa (engl. *level crossing counting*) u kombinaciji s Palmgren-Minerovim pravilom [8], kojim se određuje kumulirano oštećenje uslijed dinamičkog opterećenja promjenjive amplitude. Iz jednadžbi (2.9b-d), svaki zasebni  $i$ -ti broj ciklusa  $N_{fi}$  treba prethodno procijeniti. Ovaj standardni postupak u označavanju kod Palmgren-Minerovog pravila može se zapisati kao:

$$D_{\text{RFC}} [S_h(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} \Rightarrow N_{\text{RFC}} = \frac{1}{D_{\text{RFC}}} \Rightarrow T_{\text{RFC}} = t_{\text{max}} N_{\text{RFC}}, \quad (2.10a-c)$$

gdje je  $D_{\text{RFC}}$  ukupno oštećenje. Jednadžba (2.10c) prikazuje pretvorbu broja ciklusa do zamornog loma  $N_{\text{RFC}}$  u vrijeme do zamornog loma  $T_{\text{RFC}}$  množenjem ukupnim vremenom  $t_{\text{max}}$ . Ako ukupno oštećenje  $D_{\text{RFC}}$  daje rezultat 1 (100%), dolazi do loma materijala.

Basquinova matematička aproksimacija  $S$ - $N$  krivulje (2.9) u frekvencijskoj domeni može se definirati izrazima [8]:

$$S_a = \left( \frac{N_f}{B'_{af}} \right)^{-\frac{1}{m}} \Leftrightarrow N_f = \frac{B'_{af}}{(S_a)^m}, \quad S_r = \left( \frac{N_f}{B'_{rf}} \right)^{-\frac{1}{m}} \Leftrightarrow N_f = \frac{B'_{rf}}{(S_r)^m}, \quad (2.11a-d)$$

gdje su  $B'_{af}$  i  $B'_{rf}$ , spektralni eksponenti zamorne čvrstoće, a  $m$  je inverzni negativni Basquinov eksponent. Svaki od parametara  $b$ ,  $S'_{af}$  i  $S'_{rf}$ , ili  $m$ ,  $B'_{af}$  i  $B'_{rf}$  su svojstveni parametri materijala te ih treba odrediti eksperimentalno [8]. Transformacije relacija jednačbi u vremenskoj domeni (2.9) u jednačbe u frekvencijskoj domeni (2.11) napisane su u nastavku:

$$S_r = 2S_a, \quad m = -b^{-1}, \quad S'_{rf} = 2S'_{af} = 2(B'_{af})^{\frac{1}{m}} = (B'_{rf})^{\frac{1}{m}}, \quad (2.12a-d)$$

$$B'_{rf} = 2^m B'_{af} = 2^m (S'_{af})^m = (S'_{rf})^m.$$

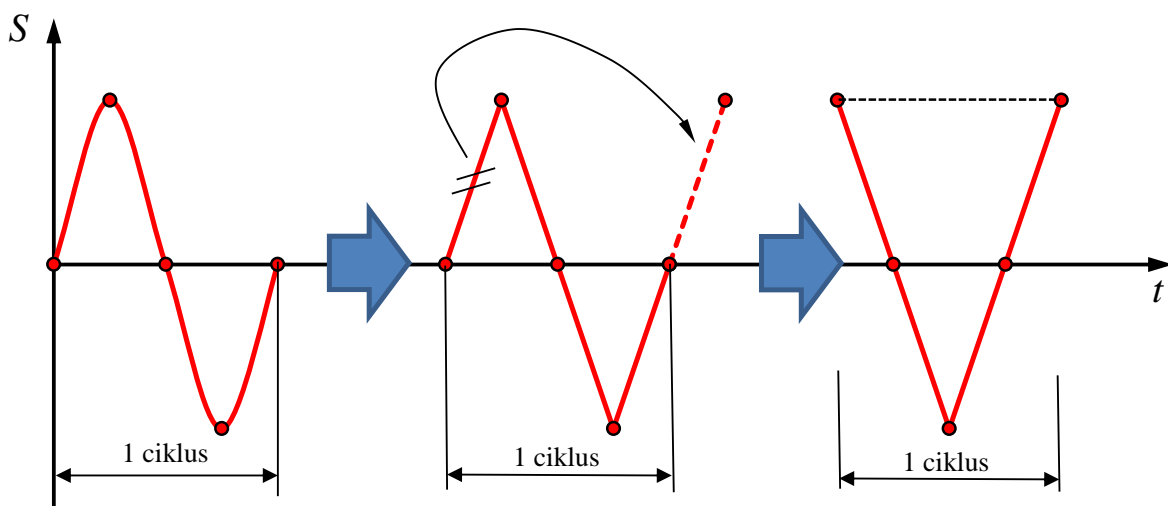
Može se primijetiti da su  $b$  i  $m$  bezdimenzijski parametri, a  $S'_{af}$  i  $S'_{rf}$  su obično u MPa, tj.  $N/mm^2$ . Međutim,  $B'_{af}$  i  $B'_{rf}$  su iskazani pomalo neobičnoj jedinici “MPa<sup>m</sup>”. Dakle potrebno je obratiti dodatnu pažnju prilikom primjene transformacijskih jednačbi (2.12c-d). Nadalje Basquinov eksponent  $b$  je negativna vrijednost [8], dakle inverzni negativni Basquinov eksponent  $m$  prema jednačbi (2.12b) je pozitivna vrijednost.



### 3. Metode brojanja ciklusa

U prethodnom poglavlju prikazana je povijest zamornog loma, sama problematika zamora materijala te je objašnjena analiza zamornog loma. Ukoliko je opterećenje na neku komponentu konstantne amplitude u vremenu, broj ciklusa do loma jednostavno je izraziti preko Wöhlerove krivulje. Određivanje broja ciklusa do loma kada je amplituda varijabilna u vremenu znatno otežava proračun. ASTM norma [1] daje rješenja kojim se složena povijest naprezanja „razvrstava“ i prebrojava dajući podatak koliko se puta pojavio ciklus iste amplitude i srednjeg naprezanja.

Za analizu povijesti naprezanja prema ASTM normi [1], [10], nije nužno poznavati matematičku funkciju krivulje naprezanja nego samo lokalne ekstreme tj. *vrhove* i *udoline* (engl. *peak/valley* [1]). Vrhovi i udoline kao ekstremi spajaju se pravicima te se radi pojednostavljenja ciklusa premješta prva točka signala na zadnju točku signala, kako bi se dobio zatvorni ciklus (Slika 3.1).



Slika 3.1 Prikaz pojednostavljenja sinusoide u pravce i “zatvorenog” trokuta kao cijelog ciklusa [9]

Kod metoda brojanja ciklusa razlikujuju se jednoparametarske metode (engl. *one-parameter cycle counting methods*) te dvoparametarske metode (engl. *two-parameter cycle counting methods*). U jednoparametarske metode spadaju: *metoda brojanja prelaska nivoa*<sup>1</sup>, *metoda brojanja raspona*<sup>2</sup> (može biti i dvoparametarska metoda ako se u obzir uzima srednje naprezanje) i *metoda brojanja vrhova*<sup>3</sup>. Jednoparametarske metode ne uspijevaju povezati

<sup>1</sup> engl. *Level-Crossing Counting*

<sup>2</sup> engl. *Range Counting*

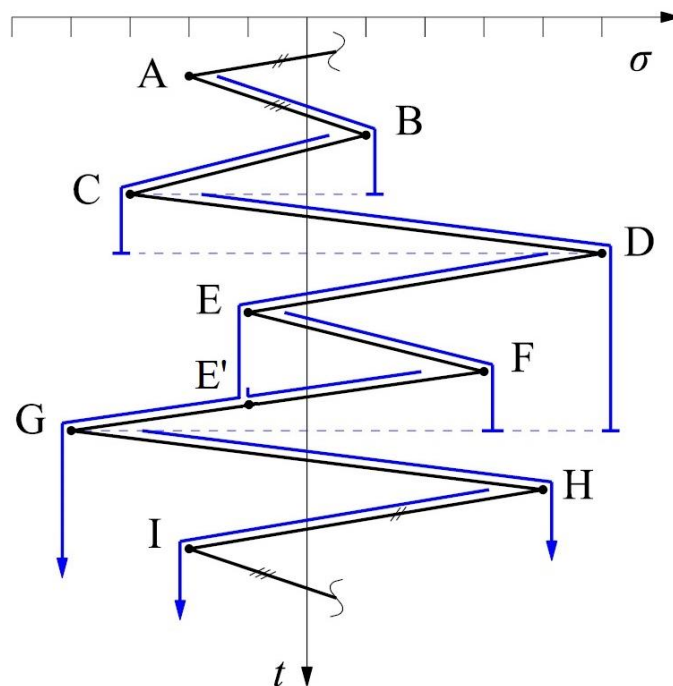
<sup>3</sup> engl. *Peak Counting*

cikluse opterećenja s lokalnim ponašanjem krivulje povijesti napreznja za koje je poznato da imaju veliku ulogu u zamoru materijala [10]. Jednoparametarske metode uzimaju u obzir samo razlike napreznja. U okviru ovog rada spomenuta je samo jedna dvoparametarska metoda, a to je: *metoda brojanja raspona toka kiše* (engl. *Rainflow Range Counting*). Ona u obzir uzima razlike napreznja u kombinaciji sa srednjim napreznjem [10].

### 3.1. Brojanje raspona toka kiše (engl. *Rainflow Range Counting*)

Metoda brojanja raspona toka kiše (*Rainflow* metoda) je dvoparametarska metoda brojanja ciklusa koja uzima u obzir razlike napreznja i srednje napreznje. Dvoparametarske metode brojanja ciklusa mogu vjerno predočavati cikličko opterećenje promjenjive amplitude. Dowling (1979.) navodi da se metoda brojanja toka kiše obično smatra metodom koja dovodi do boljih predviđanja broja ciklusa do zamornog loma [10], str 82. *Rainflow* metodu izvorno su razvili Matshuishi i Endo 1968. godine [10], str 84. Ime je dobila po analogiji kišnih kapi koje se slijevaju niz krov pagode<sup>4</sup> i teku niz rubove krova.

Za početak razvrstavanja i prebrojavanja ciklusa *rainflow* metodom potrebno je izvorni dijagram povijesti opterećenja zarotirati za  $90^\circ$  u smjeru kazaljke na satu tako da os koja označava vrijeme bude okrenuta prema dolje kako to prikazuje Slika 3.2, te se pusti zamišljeni tok vode.



Slika 3.2 Primjer *Rainflow* metode [9]

<sup>4</sup> Pagoda je toranj s više katova (i krovova) izgrađen prema tradicijama podrijetlom iz drevne Istočne Azije.

Točke A do I predstavljaju lokalne ekstreme signala. Tok vode počinje u točki A, prema sljedećim pravilima [6], str. 17:

- voda se spušta odozgora prema dolje (utjecaj gravitacije),
- točka A je prva na redu (nulto vrijeme), točka I je zadnja na redu,
- tek kada mlaz vode prethodnog ekstrema završi sa svojim tokom, kreće mlaz iz idućeg lokalnog ekstrema (npr. točka B je na redu prije točke C),
- voda pada dok: (1) ne *ispadne* (točke D, G i H), (2) ne *naiđe* na prethodni mlaz (točka F), (3) ne *prođe* kraj većeg ili jednakog maksimuma ili minimuma od onog sa kojeg je krenula (točke A, B, C i E),
- pune cikluse tvore zatvorene krivulje (one koje su naišle na prethodni mlaz) (spojnica E-F),
- $\frac{1}{2}$  ciklusa tvore krivulje koje se nisu zatvorile (spojnice A-B, B-C, C-D, D-G, G-H i H-I).

Radi lakšeg razumijevanja, Slika 3.2 prikazuje konkretan signal iz ASTM norme E1049-85 [1]. Tablica 3.1 pokazuje primjer brojanja ciklusa koje prikazuje Slika 3.2.

**Tablica 3.1** Primjer brojanja ciklusa *Rainflow* metodom (prilagođeno iz [1])

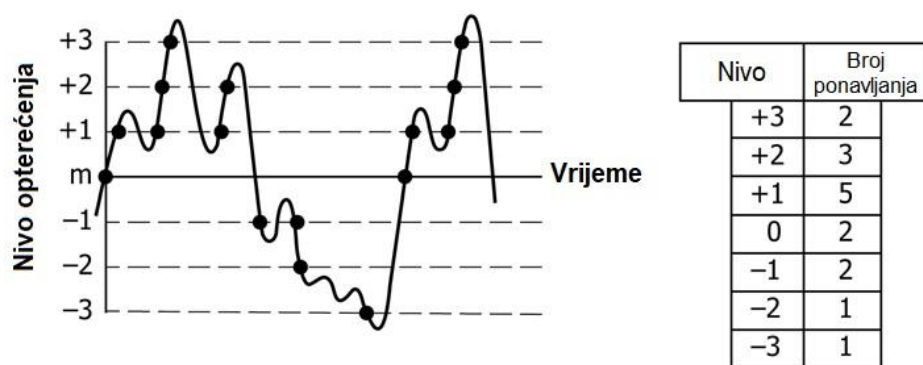
$\sigma$ , MPa	Broj ciklusa $n$	Putanja
10	0	
9	0,5	D-G
8	1,0	C-D, G-H
7	0	
6	0,5	H-I
5	0	
4	1,5	B-C, E-F
3	0,5	A-B
2	0	
1	0	

Glavna prednost *Rainflow* metode, osim što je najtočnija metoda iz ASTM norme [1], je mogućnost primjene Palmgren-Minerovog pravila (2.10) [6], [10].

### 3.2. Brojanje prelaska nivoa (engl. *Level-Crossing Counting*)

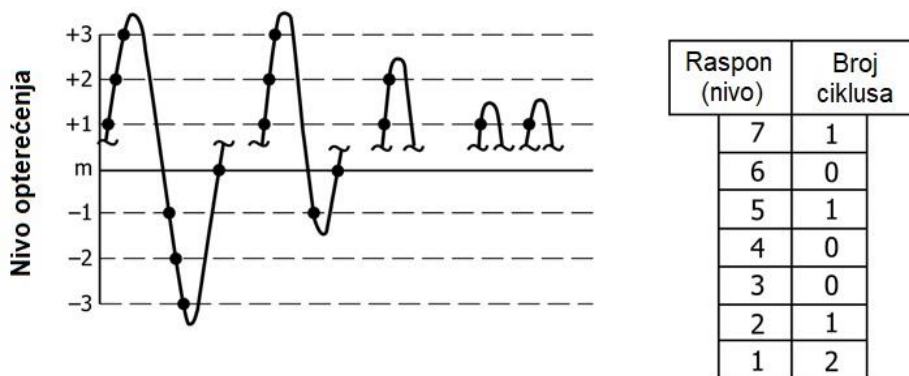
Metoda brojanja prelaska nivoa je jednoparametarska metoda te uzima u obzir samo jedan parametar, a to je razlika naprezanja. Kod metode brojanja prelaska nivoa prvo se bira referentno opterećenje te se ordinata dijagrama povijesti opterećenja dijeli na unaprijed zadane korake opterećenja. Kako prikazuje Slika 3.3a), referentno opterećenje označeno je s  $m$ , a povijest opterećenja podijeljena je jedinicama prirasta u pozitivnom i negativnom smjeru. Svaki puta kada krivulja povijesti naprezanja premaši zadanu razinu ispod ili iznad referentnog opterećenja brojčanik se uveća za jedan i zapiše u tablicu [1]. Slika 3.3a) prikazuje da se prelazak referentnog nivoa ubraja isključivo kada rastući dio krivulje u pozitivnom ili negativnom smjeru prijeđe preko njega. ASTM norma [1] kaže da nema razlike uzimaju li se u obzir samo rastući ili rastući i padajući prelasci. Razlika bi bila u dvostrukom smanjenju ukupnog broja ponavljanja ciklusa ako se uzimaju u obzir samo rastući prelasci.

Najveće ukupno zamorno oštećenje nastaje kod metode brojanja prelaska nivoa kada se konstruira najrazorniji ciklus<sup>5</sup>, nakon čega slijedi drugi po veličini itd., sve dok se svi prelasci nivoa (Slika 3.3a)) ne iskoriste. Slika 3.3b) ilustrira raspone poredane po veličini, ali metoda brojanja prelaska nivoa ne uzima u obzir kronološki redoslijed ponavljanja nekog ciklusa što ima značajnu ulogu u analizi zamora materijala [5] str. 290. Različiti redoslijed ponavljanja ciklusa može imati sekundarne utjecaje na iznos ukupnog zamornog oštećenja [1].



a)

<sup>5</sup> Najrazorniji (najdestruktivniji) ciklus je ciklus s najvećim rasponom naprezanja  $S_r$



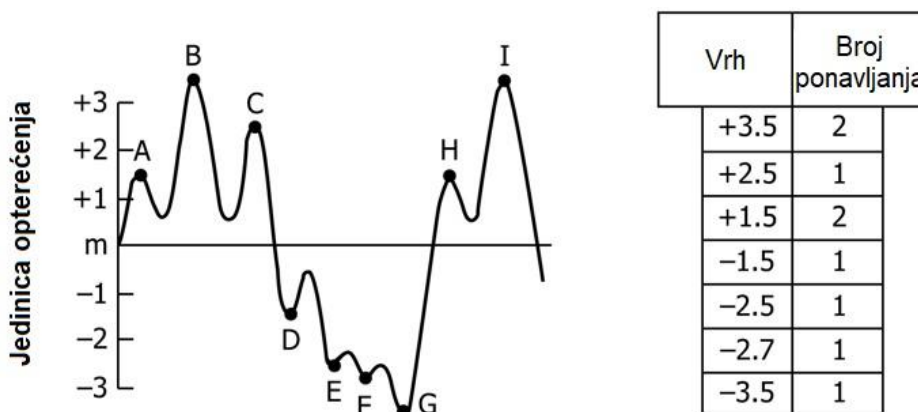
b)

Slika 3.3 Primjer brojanja prelaska nivoa: a) Brojanje prelaska nivoa, b) Ciklusi izvedeni iz a)  
(prilagođeno iz [1]) [9]

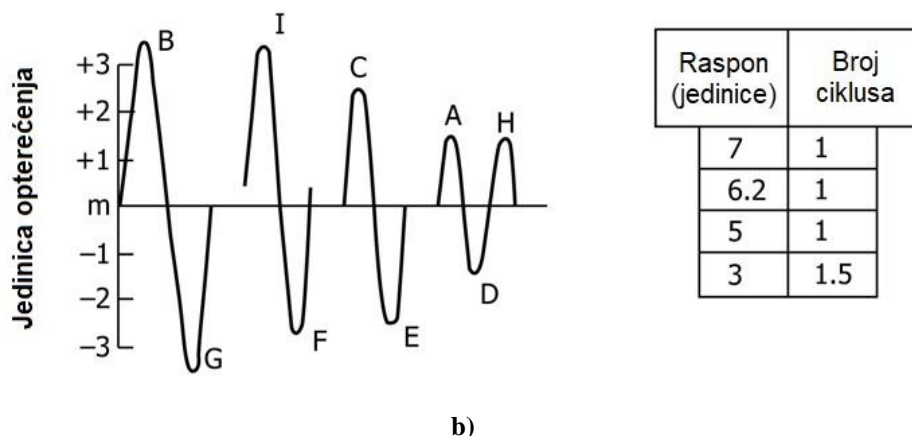
### 3.3. Brojanje vrhova (engl. *Peak Counting*)

Ova metoda je jednoparameterska metoda. Referentna razina opterećenja  $m$  se bira za dijagram povijest opterećenja. Vrhovi (engl. *peaks*), tj. maksimalne vrijednosti, opterećenja iznad i doline (engl. *valleys*), tj. minimalne vrijednosti opterećenja, ispod referentne razine opterećenja tada se identificiraju i broje, kao što prikazuje Slika 3.4a). Rezultati brojanja za vrhove i udoline obično se zapisuju odvojeno [1].

Najrazorniji ciklus konstruira se koristeći najviši vrh i najnižu dolinu, i on je prvi po redoslijedu, nakon čega slijedi drugi najveći ciklus i tako po redu dok se ne iskoriste svi brojevi vrhova/dolina [1]. Konačne cikluse koji proizlaze iz ovog postupka prikazuje Slika 3.4b). Slično metodi brojanja prelaska nivoa, ciklusi koji rezultiraju metodom brojanja vrhova nisu u određenom redoslijedu i, prema tome, ova metoda ne uzima u obzir učinke slijeda opterećenja [5].

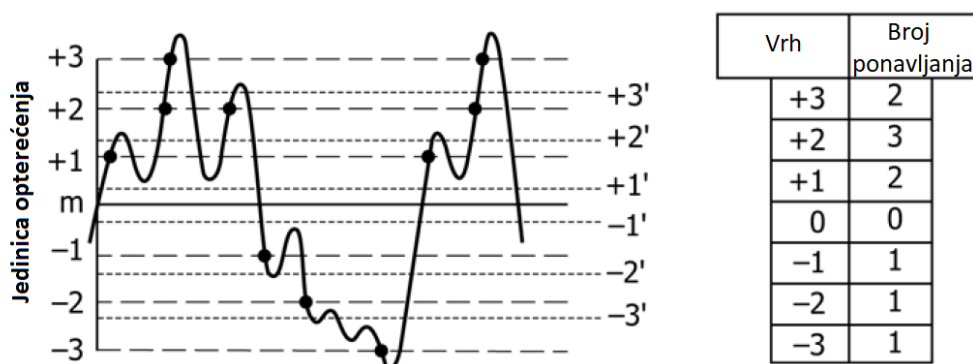


a)



Slika 3.4 Primjer brojanja vrhova: a) Brojanje vrhova, b) Ciklusi izvedeni iz a)  
(prilagođeno iz [1]) [9]

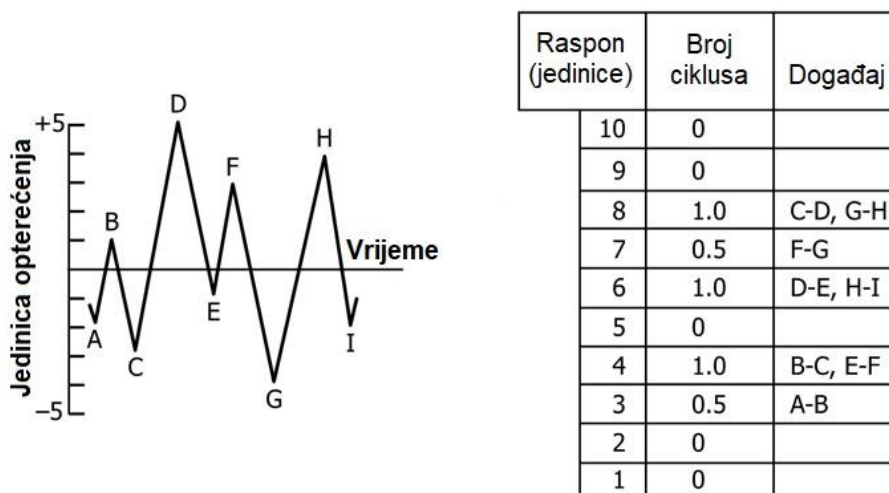
Da bi se eliminirala opterećenja male amplitude, često se koristi brojanje vrhova koji prelaze srednju vrijednost. Umjesto brojanja svih vrhova i dolina, računa se samo najveći vrh ili dolina između dva uzastopna srednja prijelaza kao što prikazuje Slika 3.5.



Slika 3.5 Primjer brojanja vrhova s ograničenjem (prilagođeno iz [1])

### 3.4. Brojanje raspona (engl. *Range Counting*)

Za ovu metodu raspon (engl. range) se definira kao visina između uzastopnog vrha i doline. Raspon je pozitivan na rastućem dijelu krivulje, a negativan na padajućem dijelu krivulje. Ovom metodom mogu se računati pozitivni rasponi, negativni rasponi ili oboje. Ako se broje samo pozitivni ili samo negativni rasponi, tada se svaki raspon računa kao jedan ciklus. Ako se računaju i pozitivni i negativni rasponi, tada se svaki raspon računa kao poluciklus. Rasponi manji od odabrane vrijednosti obično se eliminiraju prije brojanja [1].



Slika 3.6 Primjer brojanja raspona (prilagodeno iz [1]) [9]

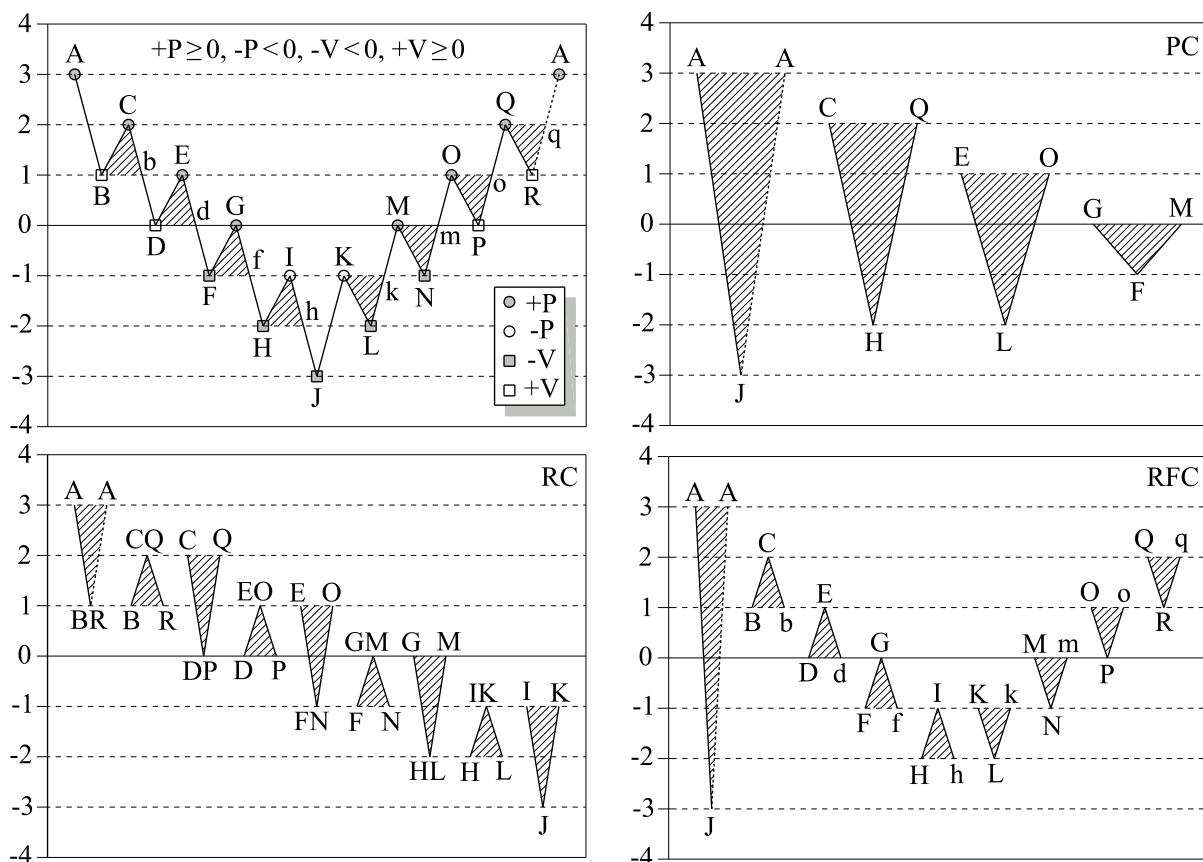
Kad se računa i srednja vrijednost svakog raspona, metoda se naziva jednostavno brojanje srednjih vrijednosti (engl. *simple range-mean counting*). Tablica 3.2 prikazuje brojanje raspona srednjih vrijednosti za povijest opterećenja koje prikazuje Slika 3.6 a).

Tablica 3.2 Matrica jednostavnog broja srednjih raspona (preuređeno iz [1])

Raspon	Srednja vrijednost								
	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	0.5	-	0.5	-	-
7	-	-	-	0.5	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	0.5	-	0.5
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	0.5	-	-	-	0.5	-	-
3	-	-	-	0.5	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-

### 3.5. Usporedba navedenih metoda

Kao što je već navedeno postoje jednoparametarske i dvoparametarske metode brojanja ciklusa. Jednoparametarske su manje točne jer ne uzimaju u obzir vrijednost srednjeg naprezanja kao što je to slučaj kod dvoparametarskih. Procjena zamora korištenjem ovih približnih metoda daje rezultat da je metoda brojanja vrhova najkonzervativnija<sup>6</sup>, slijedi ju metoda brojanja prelaska nivoa, zatim metoda brojanja toka kiše, te metoda brojanja raspona kao najliberalnija<sup>7</sup> metoda (Slika 3.7). Metoda RC uzima u obzir raspone naprezanja koji su relativno mali, ali ne uzima u obzir velike raspone, stoga je ta metoda previše liberalna. Metoda RFC uzima u obzir i velike i male raspone naprezanja te je zato najtočnija metoda za izračunavanje zamora [8]. Metoda PC precjenjuje utjecaje visokih raspona a podcjenjuje utjecaj niskih raspona, stoga se može smatrati konzervativnom metodom. Također podcjenjuje utjecaj srednjeg naprezanja.



Slika 3.7 Usporedba tri metode brojanja ciklusa

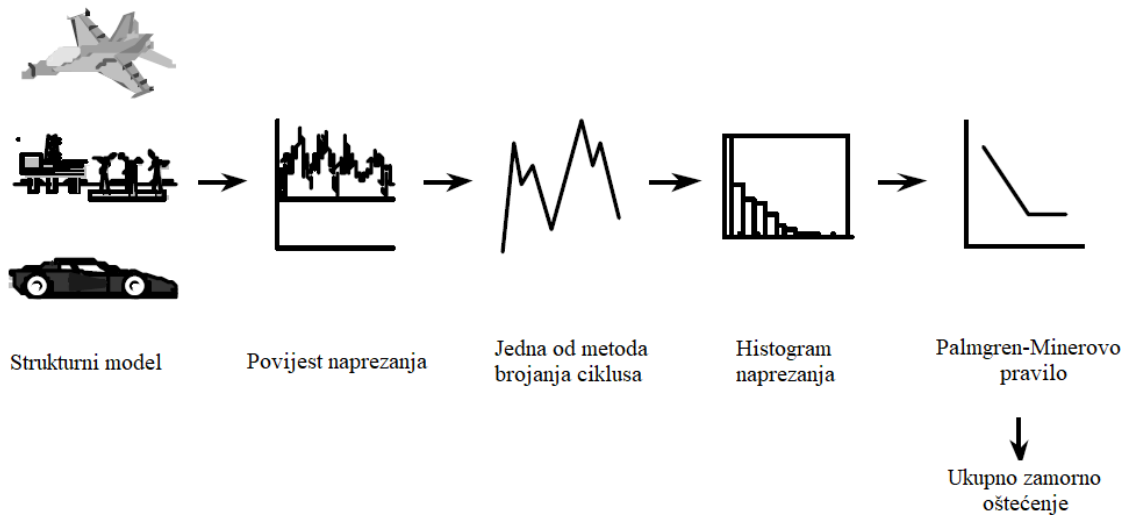
<sup>6</sup> Konzervativna metoda predviđa mali broj ciklusa do zamornog loma, materijal prije doživljava zamorni lom.

<sup>7</sup> Liberalna metoda predviđa veliki broj ciklusa do zamornog loma. Prikazuje veći broj ciklusa nego što materijal može izdržati.



## 4. Frekvencijsko područje

U dosadašnjim poglavljima sve metode brojanja ciklusa te povijesti naprezanja su bile temeljene na promjeni u vremenu. Za povijesti naprezanja izražene preko varijable  $t$  kaže se da su u vremenskoj domeni (engl. *time domain*). Slika 4.1 prikazuje standardni postupak proračuna zamora u vremenskoj domeni predočen u prošlim poglavljima.

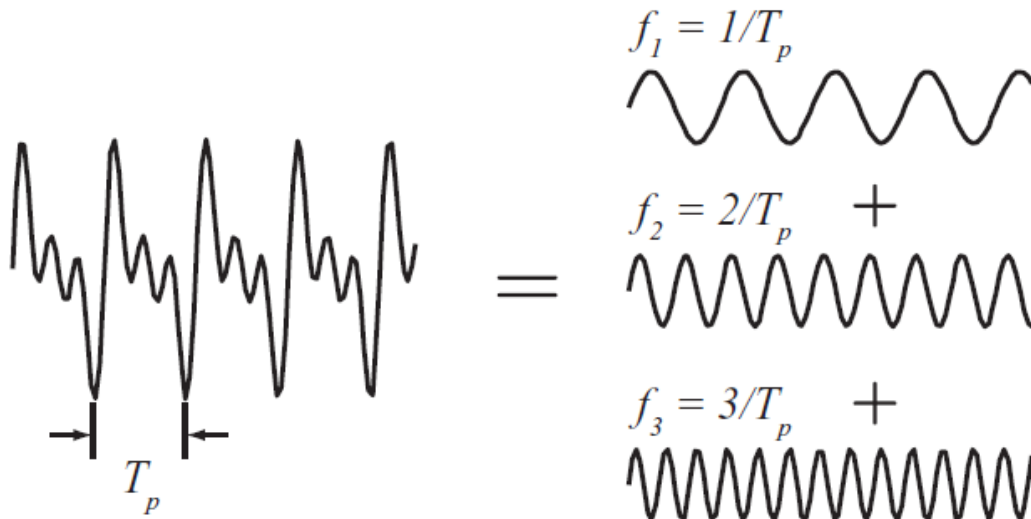


Slika 4.1 Standardni postupak proračuna zamora u vremenskom području (prilagođeno iz [8])

U nekim se situacijama odziv naprezanja i ulazno opterećenje izražavaju kao signali temeljeni na frekvenciji, obično u obliku dijagrama spektralne gustoće snage (engl. *power spectral density* (PSD)). Spektralna gustoća snage predstavlja energiju vremenskog signala na različitim frekvencijama [11] te je način prikazivanja signala u frekvencijskoj domeni. Brza Fourierova transformacija (engl. *Fast Fourier Transform* (FFT)) vremenskog signala može se koristiti za dobivanje PSD naprezanja, dok se inverzna Fourierova transformacija (engl. *Inverse Fourier Transform* (IFT)) može koristiti za pretvaranje frekvencijskog signala u vremenski signal odziva. Transformacija povijesti naprezanja između vremenske i frekvencijske domene podliježe određenim zahtjevima, prema kojima signal mora biti stacionaran, slučajan, ergodičan i Gaussovski (normalan) [1], [10].

### 4.1. Fourierova transformacija

Jean Baptiste Joseph Fourier je bio francuski znanstvenik koji je oko početka 19. stoljeća otkrio da se svi periodični signali mogu podijeliti u (potencijalno beskonačni) zbroj sinusoida, pri čemu svaka sinusoida ima svoju individualnu amplitudu i fazu kao što to prikazuje Slika 4.2.



Slika 4.2 Suma sinusoida [12]

Fourierova transformacija (FT) (engl. *Fourier transform*) pretvara vremenski signal u signal izražen preko frekvencije, sa svim informacijama o frekvenciji sinusnih/kosinusnih valova potrebnih za dobivanje tog vremenskog signala.

#### 4.1.1. Diskretna fourierova transformacija (engl. *Discrete Fourier transform*)

Diskretna Fourierova transformacija, (DFT), metoda je koja se koristi za transformiranje izmjerenih uzoraka signala u spektar. Za sekvence ravnomjerno raspoređenih vrijednosti, diskretna Fourierova transformacija (DFT)  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  je u frekvencijskom području definirana kao:

$$\mathcal{F}\{x_n(t)\} = X_k(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n e^{-i \frac{2\pi(k-1)(n-1)}{N}}, \quad (4.1)$$

gdje je  $N$  ukupni broj varijabli,  $n$  je trenutna pozicija tj. broj uzorka,  $x_n$  je vrijednost signal u odgovarajuće vrijeme (tj. trenutnog uzorka  $n$ ),  $k$  je položaj trenutne frekvencije (analogno s  $n$ ,  $k$  zauzima vrijednost 1 do  $N$ ) i  $X_k(f)$  je rezultat DFT (sadrži amplitude i fazu). Nadalje, imaginarni broj  $i = \sqrt{-1}$ . Vektor  $X_{k...N}(f)$  u frekvencijskoj domeni izražava se iz jednadžbe kao:

$$\begin{aligned}
X_{k=1}(f) &= \frac{1}{N} \left( x_1 e^{-i \frac{2\pi(1-1)(1-1)}{N}} + x_2 e^{-i \frac{2\pi(1-1)(2-1)}{N}} + \dots + x_N e^{-i \frac{2\pi(1-1)(N-1)}{N}} \right), \\
X_{k=2}(f) &= \frac{1}{N} \left( x_1 e^{-i \frac{2\pi(2-1)(1-1)}{N}} + x_2 e^{-i \frac{2\pi(2-1)(2-1)}{N}} + \dots + x_N e^{-i \frac{2\pi(2-1)(N-1)}{N}} \right), \\
X_{k=N}(f) &= \frac{1}{N} \left( x_1 e^{-i \frac{2\pi(N-1)(1-1)}{N}} + x_2 e^{-i \frac{2\pi(N-1)(2-1)}{N}} + \dots + x_N e^{-i \frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}} \right).
\end{aligned} \tag{4.2a-c}$$

Može se primijetiti da se vektor  $X_{k \dots N}(f)$  sastoji od  $N$  diskretnih kompleksnih vrijednosti:

$$X_{k \dots N}(f) = \left\{ \overbrace{X_1^{\Re} + i X_1^{\Im}}^{\text{kompleksan}}, \overbrace{X_2^{\Re} + i X_2^{\Im}}^{\text{kompleksan}}, \dots, \overbrace{X_N^{\Re} + i X_N^{\Im}}^{\text{kompleksan}} \right\}, \tag{4.3}$$

realan
imaginarni

gdje index  $\Re$  označava realni dio, a indeks  $\Im$  označava imaginarni dio kompleksnog broja. Prema tome,  $X_{k \dots N}(f)$  pohranjuje pripadajuću amplitudu i fazu u zasebnu odvojenu točku od 1 do  $N$ .

#### 4.1.2. Brza Fourierova transformacija (engl. *Fast Fourier Transform (FFT)*)

Ako je ukupni broj diskretnih varijabli  $N = 2^j$ , gdje je  $j$  pozitivan cijeli broj (obično mnogo veći od 2), tada se može primijeniti brza Fourierova transformacija (engl. *Fast Fourier Transform (FFT)*) kao posebna vrsta DFT. U takvom posebnom slučaju odnos između kompleksnih vektorskih koeficijenata prikazan u jednadžbi može se izraziti kao:

$$\overbrace{X_k = X_k^{\Re} + i X_k^{\Im}}^{k^{\text{th}} \text{ koeficijent}} \equiv \overbrace{X_{N+2-k}^{\Re} - i X_{N+2-k}^{\Im}}^{\text{desni koeficijent}} = X_{N+2-k}, \tag{4.4}$$

dakle desni Fourierov koeficijent  $X_{N+2-k}$  u jednadžbi (4.4) je zapravo kompleksno konjugiran  $k$ -ti koeficijent  $X_k$  i  $X_k^{\Re} \equiv X_{N+2-k}^{\Re}$ ,  $X_k^{\Im} \equiv -X_{N+2-k}^{\Im}$ . Budući da indeks maksimalnog desnog koeficijenta u jednadžbi (4.4) ne može biti veći od  $N$ , minimum za  $k$  je  $k_{\min} = 2$  da bi izraz u jednadžbi (4.4) mogao vrijediti. Prema tome koeficijent  $X_1(f)$  nema svoj kompleksno konjugirani par na krajnjoj desnoj strani spektra. Maksimalna vrijednost indeksa  $k$  u jednadžbi (4.4) može jedino biti  $k_{\max} = N/2$ , tj. vrijednost na kojoj je postignuta Nyquistova frekvencija  $f_{\text{Nyq}}$ .

### 4.1.3. Inverzna Fourierova transformacija (engl. Inverse Fourier Transform)

Kako bi se dobiveni signal iz frekvencijske domene u jednadžbi (4.1), prenio u vremensku domenu, treba se primijeniti *inverzna Fourierova transformacija* (engl. *Inverse Fourier Transform* (IFT)). Ako se radi s diskretnim podacima, primjenjuje se *Diskretna inverzna Fourierova transformacija* (engl. *Discrete Inverse Fourier Transform* (DIFT)). U vremenskoj domeni DIFT  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  se obično definira kao:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X_k(f)\} = x_n(t) = \sum_{k=1}^N X_k e^{i\frac{2\pi(k-1)(n-1)}{N}}. \quad (4.5)$$

Svi parametri u jednadžbi (4.5) izravno odgovaraju parametrima iz jednadžbe (4.1) gdje se koristi ista nomenklatura i indeksiranje ( $k$  i  $n$ ). Vektor  $x_{n\dots N}(t)$  u jednadžbi (4.5) se u vremenskoj domeni izražava kao:

$$\begin{aligned} x_{n=1}(t) &= X_1 e^{-i\frac{2\pi(1-1)(1-1)}{N}} + X_2 e^{-i\frac{2\pi(2-1)(1-1)}{N}} + \dots + X_N e^{-i\frac{2\pi(N-1)(1-1)}{N}}, \\ x_{n=2}(t) &= X_1 e^{-i\frac{2\pi(1-1)(2-1)}{N}} + X_2 e^{-i\frac{2\pi(2-1)(2-1)}{N}} + \dots + X_N e^{-i\frac{2\pi(N-1)(2-1)}{N}}, \\ x_{n=N}(t) &= X_1 e^{-i\frac{2\pi(1-1)(N-1)}{N}} + X_2 e^{-i\frac{2\pi(2-1)(N-1)}{N}} + \dots + X_N e^{-i\frac{2\pi(N-1)(N-1)}{N}}. \end{aligned} \quad (4.6a-c)$$

Suprotno kompleksnim vektorima u jednadžbama (4.1), (4.2) i (4.3) sve vrijednosti iz jednadžbi (4.5) i (4.6) su sada realne vrijednosti ( $\Re$ ). Kako bi se provjerila točnost izvedenih transformacija tj. poveznost izraza iz jednadžbe i jednadžbe (4.5) često se primjenjuje *Parsevalov teorem* (engl. *Parseval's theorem*) [13] koji je prikazan u nastavku:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_n(t)\} = X_k(f) &\Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{X_k(f)\} = x_n(t), \\ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x_n(t)]^2 &\equiv \sum_{k=1}^N |X_k(f)|^2. \end{aligned} \quad (4.7a-c)$$

Fizikalna interpretacija jednadžbe (4.7c) je Parsevalov teorem koji kaže da snaga signala u vremenskoj domeni mora biti jednaka snazi signala u frekvencijskoj domeni. Matematički rečeno, zbroj kvadrata funkcije je jednak sumi kvadrata njihove Fourierove transformacije.

## 4.2. Stohastički signal

Pretpostavke koje se koriste u ovom poglavlju su da je stohastički signal stacionaran, ergodičan i Gaussovski.

Bilo koji podatak koji predstavlja fizički proces može se izraziti kao deterministički ili slučajni. Deterministički proces (engl. *deterministic proces*) je proces u kojem se točno i sa sigurnošću mogu predvidjeti buduća stanja. Primjer periodičnog determinističkog procesa je sinusna funkcija. Suprotno determinističkom procesu je slučajni tj. stohastični proces (engl. *random process*) u kojem se buduća stanja u vremenu ne mogu predvidjeti nikakvim matematičkim izrazom, međutim u nekim situacijama može se predvidjeti ishod.

Slučajan proces je definiran kao stacionaran (engl. *stationary*) kada sve statističke karakteristike procesa ne ovise o vremenu. Jaka stacionarnost podrazumijeva se kada u svakom trenutku stacionarnost zadovoljava tražene uvijete [14].

Osim što je stacionaran, postupak se može nazvati i ergodičnim (engl. *ergodic*) ako su statističke vrijednosti na bilo kojem uzorku ili zapisu reprezentativne za statistiku izmjerenu na bilo kojem drugom uzorku. Vrlo je korisno ako je pretpostavka o ergodičnosti valjana jer to znači da se jedan dugi uzorak može koristiti za izračunavanje bilo koje željene statističke vrijednosti, umjesto da se mora mjeriti mnogo različitih zapisa.

#### 4.2.1. Gaussovska raspodjela

Za nultu srednju slučajnu varijablu kaže se da je Gaussova ako se njena spektralna gustoća snage (PSD) (engl. *power spectral density*) može zapisati u sljedećem obliku [14]:

$$p_{\text{PDF}}^{\text{norm}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (4.8)$$

gdje je parametar  $\mu$  srednja vrijednost ili očekivanje raspodjele, dok je parametar  $\sigma$  standardna devijacija (odstupanje) (engl. *standard deviation*) [12]. Varijanca raspodjele označava se sa  $\sigma^2$ .

Srednja vrijednost [12] uzetih vrijednosti zbroj je svih vrijednosti podijeljen s ukupnim brojem varijabli  $N$ . Analogno tome srednja vrijednost uzorka  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , koja se označava s  $\bar{x}$  ili  $\mu$ , zbroj je uzorkovanih vrijednosti podijeljen s ukupnim brojem varijabli u uzorku. Zapisuje se kao:

$$\bar{x} \equiv \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}. \quad (4.9)$$

Varijanca uzorka [12]  $\text{Var}(x)$  ili  $\sigma^2$  je odstupanje  $x_i$  od srednje vrijednosti  $\bar{x}$ . Varijanca učinkovito mjeri koliko je skup (slučajnih) brojeva raspoređen od njihove prosječne vrijednosti. Zapisuje se kao:

$$\text{Var}(x) \equiv \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2], \quad (4.10)$$

gdje su srednje vrijednosti  $\mu$ , tj.  $\bar{x}$  dane u jednadžbi (4.9).

Standardno odstupanje  $\sigma$  je mjera veličine varijacije tj. mjera rasipanja skupa vrijednosti. Kvadratni korijen varijance  $\sigma^2$ , za diskretnu slučajnu varijablu se piše:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} \equiv \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4.11)$$

Efektivna vrijednost (engl. *root mean square*), skraćeno RMS, skupa vrijednosti kvadratni je korijen aritmetičke sredine kvadrata vrijednosti. U slučaju  $N$  uzoraka te  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , RMS se definira kao:

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)}. \quad (4.12)$$

Da bi signal bio gaussovski postoje parametri za kontrolu nabrojani u nastavku [12]:

- Mjera iskrivljenosti (engl. *skewness*) mjera stupnja asimetrije slučajne raspodjele stvarne slučajne varijable oko njene srednje vrijednosti. Savršeno simetrična raspodjela daje vrijednost za iskrivljenost 0,
- Kurtoza (engl. *Kurtosis*) – mjeri koncentraciju vrijednosti oko vrha i u „repovima“ u odnosu na koncentraciju u bokovima. Vrijednost *Kurtosisa* je približno jednaka tri,
- Faktor vrha (engl. *Crest factor*) – pokazuje koliko su vrhovi u signalu ekstremni. Da bi signal bio gaussovski, *Crest* faktor mora biti vrijednost između 4 i 5

### 4.3. Spektralni parametri stohastičkog signala u frekvencijskom području

Stohastičko opterećenje stohastičkog procesa u frekvencijskoj domeni definirano je spektralnom gustoćom snage naprezanja u ovisnosti o frekvenciji  $S_{\text{PSD}}(f)$  [13], gdje je  $f$

frekvencija u Hz, tj.  $s^{-1}$ . Općenito PSD (engl. *power spectral density*) opisuje koliko snage se prenosi na frekvencijske varijable stohastičkog postupka [13]. Statistička svojstva stacionarnog procesa mogu se opisati spektralnim momentima PSD-a (engl. *spectral moments*) [8]. Ukupni oblik za  $n$ -ti spektralni moment  $m_n$  i odgovarajuća efektivna vrijednost (RMS), tj. standardno odstupanje su dani jednadžbom u nastavku [8]:

$$m_n = \int_0^{f_{\max} \rightarrow \infty} f^n S_{\text{PSD}}(f) df, \quad S_{\text{RMS}} = \sqrt{\int_0^{f_{\max} \rightarrow \infty} S_{\text{PSD}}(f) df} = \sqrt{m_0}, \quad (4.13a-b)$$

gdje je  $S_{\text{RMS}}$  efektivna vrijednost naprezanja nultog spektralnog momenta  $m_0$  u ovisnosti o širokopojasnoj frekvenciji (engl. *bandwidth frequency*)  $f$ .  $S_{\text{PSD}}(f)$  ima jedinicu  $\text{MPa}^2/\text{Hz}$ .

Uobičajene spektralne veličine mogu se zapisati kao [8]:

$$E[0] = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}, \quad E[P] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}, \quad \gamma (0 \leq \gamma \leq 1) = \frac{E[0]}{E[P]}, \quad \lambda (0 \leq \lambda \leq 1) = \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad (4.14a-d)$$

gdje je  $E[0]$  očekivani broj gore usmjerenih ništica u sekundi,  $E[P]$  je očekivani broj vrhova po sekundi,  $\gamma$  je poznat kao faktor nepravilnosti (engl. *irregularity factor*), i  $\lambda$  je parametar spektralne širine pojasa. U idealnom uskopojasnom (engl. *Narrow - Band*) postupku  $\gamma$  teži u 1, dok za idealne širokopojasne (engl. *Broad-Band*) postupke,  $\gamma = 0$ . Poznavajući da su svi spektralni parametri iz jednadžbi (4.13) i (4.14) realne pozitivne skalarne vrijednosti slijedi da su  $\gamma$  i  $\lambda$  uvijek između 0 i 1, dok je  $E[P] \geq E[0]$ . Odgovarajući spektralni momenti  $m_{0,2,4}$  mogu se jednostavno dobiti iz jednadžbe (4.13a). Iz općeg spektralnog momenta  $m_n$ , odgovarajući bezdimenzijski spektralni parametar  $\alpha_n$  i njegovi najčešći slučajevi zapisuju se kao:

$$\alpha_n (0 \leq \alpha_n \leq 1) = \frac{m_n}{\sqrt{m_0 m_{2n}}} \Rightarrow \alpha_1 = \delta = \frac{m_1}{\sqrt{m_0 m_2}}, \quad \alpha_2 = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \equiv \gamma, \quad (4.15a-c)$$

gdje su  $\delta$  i  $\alpha_2 \equiv \gamma$  posebni slučajevi dobiveni iz bezdimenzijskog spektralnog parametra  $\alpha_n$  za  $n = 1$  odnosno 2. Nadalje oštećenje po sekundi  $D_{\text{PDF}}/t_{\max}$  (intezitet oštećenja) [13], broj ciklusa do zamornog loma  $N_{\text{PDF}}$  i odgovarajuće vrijeme  $T_{\text{PDF}}$  su dani jednadžbama:

$$\frac{D_{\text{PDF}}}{t_{\max}} \left[ p_{(\text{PDF})}(S_r) \right] = \frac{E[0 \dots P]}{B_{\text{if}}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{(\text{PDF})}(S_r) dS_r \quad (4.16a-c)$$

$$N_{\text{PDF}} = \frac{1}{D_{\text{PDF}}} \Rightarrow T_{\text{PDF}} = t_{\max} N_{\text{PDF}},$$

gdje je  $t_{\max}$  ukupno vrijeme koje se spominje u jednadžbi (2.10c) i  $p_{(\text{PDF})}$  je definiran kao funkcija gustoće vjerojatnosti naprezanja tj. PDF (engl. *stress probability density function*). Mjerna jedinica za  $p_{(\text{PDF})}$  je 1/MPa. Ovdje se dalje koriste raspon inženjerskog naprezanja  $S_r$ , ali se može koristiti i amplituda inženjerskog naprezanja  $S_a$  [13]. Matematički gledano procjena zamora svodi se na izazov preciznog integriranja desne strane jednadžbe (4.16a), tj. određivanje relacija za zadani  $p_{(\text{PDF})}$  integral:

$$I_{(\text{PDF})}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{(\text{PDF})}(S_r) dS_r \Rightarrow \frac{D_{\text{PDF}}}{t_{\max}} = \frac{E[0...P]}{B'_{\text{rf}}} I_{(\text{PDF})}(S_r). \quad (4.17\text{a-b})$$

U jednadžbi (4.16a) i (4.17b) varijabla  $E[0...P]$  implicira da u nekim slučajevima upotrebe,  $E[P]$  može dati pretjerano konzervativnu procjenu zamora i da  $E[0]$  može biti poželjan kako bi se postigla dovoljna točnost procjene [15]. To se može pokazati osobito potrebnim za konzervativne procjene naprezanja temeljenih na vršnim vrijednostima, poput NB ili Rice distribucije [15].



## 5. Metode brojanja ciklusa u frekvencijskom području

U poglavlju 3 obrađene su metode brojanja ciklusa u vremenskoj domeni prema normi ASTM E1049-85 [1]. Razlikuju se četiri različita načina brojanja ciklusa, a to su redom: Brojanje raspona toka kiše (RFC), Brojanje prelaska nivoa (LCC), Brojanje vrhova (PC) i Brojanje raspona (RC). U okviru ovog poglavlja obrađene su tri metode u frekvencijskom području. U nastavku su prikazane metode brojanja ciklusa u frekvencijskoj domeni, uz pripadajući proračun zamora.

### 5.1. Metoda brojanja vrhova - Rice/Lalane

Rice [16] i Lalanne [15] (RL) PDF s obzirom na raspon inženjerskog naprezanja  $S_r$ , može se napisati kao težinski zbroj Gaussove širokopojasne (BB) i Rayleighove [18] uskopojasne (NB) distribucije:

$$p_{RL}(S_r) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left\{ \overbrace{\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-S_r^2}{8m_0\lambda^2}}}^{\text{Gaussovski/BB}} + \overbrace{\left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{S_r\gamma}{\lambda\sqrt{8m_0}}\right) \right]}^{\text{težinski koeficijent}} \overbrace{\frac{S_r\gamma}{4\sqrt{m_0}} e^{\frac{-S_r^2}{8m_0}}}^{\text{Rayleigh/NB}} \right\}, \quad (5.1)$$

gdje je funkcija pogreške (engl. *error function*)  $\operatorname{erf}(\cdot)$  [25], s obzirom na gornju bezdimenzijsku granicu  $x$ , integral Gaussove raspodjele zadane s:

$$x = \frac{S_r\gamma}{\lambda\sqrt{8m_0}} \Rightarrow \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{j!(2j+1)} \Rightarrow 0 \leq \operatorname{erf}(x) \leq 1. \quad (5.2a-c)$$

Intenzitet oštećenja  $D/t_{\max}$ , broj ciklusa do zamornog loma  $N_f$  i pripadajuće vrijeme do zamornog loma  $T_f$  pišu se kao [25]:

$$\begin{aligned} \frac{D_{RL}}{t_{\max}} &= \frac{E[P]}{B'_{if}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{RL}(S_r) dS_r = \frac{E[P]}{B'_{if}} I_{RL}(S_r) \\ N_{fRL} &= \frac{1}{D_{RL}} \Rightarrow T_{fRL} = t_{\max} N_{fRL}, \end{aligned} \quad (5.3a-c)$$

gdje je rješenje integrala:

$$I_{RL}(S_r) = \frac{(\sqrt{8m_0})^m}{2} \left[ \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3+m}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-\gamma^2}{\lambda^2}\right) (1+m)\gamma^2 + \lambda^{3+m}}{\lambda\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1+m}{2}\right) + \gamma \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \right]. \quad (5.4)$$

Izraz  ${}_2F_1(\cdot)$  je poznat kao Gaussova ili obična hipergeometrijska (engl. HyperGeometric) (HG) funkcija [19], [25], dok  $\Gamma(\cdot)$  označava cjelovitu Eulerovu gama funkciju [13]. Za složene brojeve s pozitivnim realnim dijelom, gama funkcija definira se preko konvergentnog nepravilnog integrala koji zadovoljava relacije:

$$\Re(q) > 0 \Rightarrow \Gamma(q) = \int_0^{\infty} t^{q-1} e^{-t} dt \equiv 2 \int_0^{\infty} t^{2q-1} e^{-t^2} dt, \quad (5.5a-b)$$

za generalnu količinu “ $q$ ”. Budući da je eksponent “ $m$ ” iz jednadžbe (5.4) uvijek pozitivna i stvarna skalarna vrijednost, uvjet iz jednadžbe (5.5a) je automatski zadovoljen.

Gaussovska hipergeometrijska funkcija posebna je funkcija predstavljena hipergeometrijskim nizom koja je rješenje linearne obične diferencijalne jednadžbe drugog reda [26].

## 5.2. Metoda brojanja prelaska nivoa – NB

Uskopojasni (*Narrow-Band*) (NB) spektralni signal koristi Rayleighov [12] PDF. Ovo rješenje dobiva se oduzimanjem RL PDF s “negativnim” rasponima od RL PDF s pozitivnim rasponima tj. jednadžbom (5.1). Konačni izraz za *Narrow-Band* koji su predložili Miles 1954 godine [20] a kasnije i Bendat 1964. godine [21] glasi:

$$p_{\text{NB}}(S_r) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left\{ \overbrace{\left[ \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-S_r^2}{8m_0\lambda^2}} + \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{S_r\gamma}{\lambda\sqrt{8m_0}}\right) \right] \frac{S_r\gamma}{4\sqrt{m_0}} e^{\frac{-S_r^2}{8m_0}} \right]}^{p_{\text{RL}}(S_r)} \right\} - p_{\text{RL}}(S_r \rightarrow -S_r) = \gamma \frac{S_r}{4m_0} e^{\frac{-S_r^2}{8m_0}}. \quad (5.6)$$

Intenzitet oštećenja  $D/t_{\text{max}}$ , broj ciklusa do zamornog loma  $N_f$  i odgovarajuće vrijeme do zamornog loma  $T_f$  pišu se kao:

$$\frac{D_{\text{NB}}}{t_{\text{max}}} = \frac{E[\text{P}]}{B'_{\text{rf}}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{\text{NB}}(S_r) dS_r = \frac{E[\text{P}]}{B'_{\text{rf}}} I_{\text{NB}}(S_r) \quad (5.7a-c)$$

$$N_{\text{fNB}} = \frac{1}{D_{\text{NB}}} \Rightarrow T_{\text{fNB}} = t_{\text{max}} N_{\text{fNB}},$$

gdje je rješenje integrala:

$$I_{\text{NB}}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{\text{NB}}(S_r) dS_r = \gamma \left(\sqrt{8m_0}\right)^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right). \quad (5.8)$$

Postavljanjem konačne gornje granice integracije u jednadžbi (5.8) na proizvoljnu vrijednost naprezanja  $S_r$ , kumulativni integral i odgovarajuća kumulativna oštećenja kod NB pišu se kao:

$$I_{NB}^c(S_r) = \int_0^{S_r} S_r^m p_{NB}(S_r) dS_r = I_{NB}(S_r) - \gamma (\sqrt{8m_0})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r}{8m_0}\right), \quad (5.9)$$

$$\frac{D_{NB}^c}{t_{\max}} = \frac{E[P]}{B'_{rf}} I_{NB}^c(S_r),$$

gdje je  $\Gamma(\cdot, \cdot)$  sada označava nepotpunu Gamma funkciju.

### 5.3. Metoda brojanja raspona Krenk i Tunna

Približna metoda brojanja raspona (RC) PDF zapravo je modificirana (manje konzervativna) Rayleighova distribucija. Čini se da ju je prvi predložio Kowalewski [22] 1963. godine. Kasnije su ju također predložili Krenk 1978. [23] i Tunna 1986. [24]. Približni RC izraz (gdje indeks "KT" označava Kowalewski, Krenk i Tunna) je prikazan je u nastavku:

$$p_{KT}(S_r) = \frac{p_{NB}(m_0 \rightarrow \gamma^2 m_0)}{\gamma} = \frac{S_r}{4\gamma^2 m_0} e^{-\frac{S_r^2}{8\gamma^2 m_0}} \cong p_{RC}(S_r). \quad (5.10)$$

Intenzitet oštećenja  $D/t_{\max}$ , broj ciklusa do zamornog loma  $N_f$  i odgovarajuće vrijeme do zamornog loma  $T_f$  pišu se kao:

$$\frac{D_{KT}}{t_{\max}} = \frac{E[P]}{B'_{rf}} \int_0^{\infty} S_r^m p_{KT}(S_r) dS_r = \frac{E[P]}{B'_{rf}} I_{NB}(S_r) \quad (5.11a-c)$$

$$N_{fKT} = \frac{1}{D_{KT}} \Rightarrow T_{fKT} = t_{\max} N_{fKT},$$

gdje je rješenje integrala:

$$I_{KT}(S_r) = \int_0^{\infty} S_r^m p_{KT}(S_r) dS_r = (\gamma \sqrt{8m_0})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right). \quad (5.12)$$

Postavljanjem konačne gornje granice integracije u jednadžbi (5.12) na proizvoljnu vrijednost naprezanja  $S_r$ , kumulativni integral i odgovarajuća kumulativna oštećenja kod KT pišu se kao:

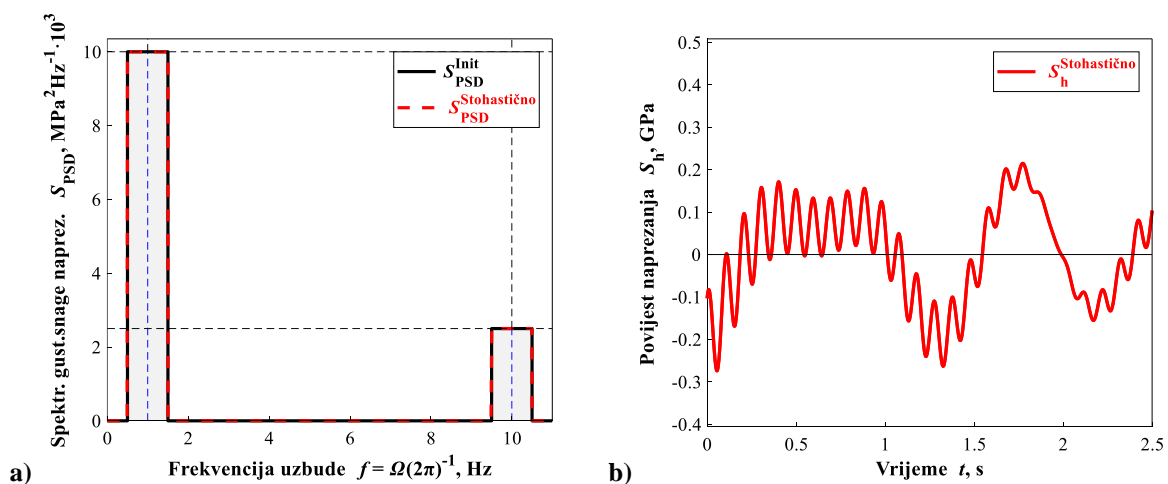
$$I_{KT}^c(S_r) = \int_0^{S_r} S_r^m p_{KT}(S_r) dS_r = I_{KT}(S_r) - (\gamma \sqrt{8m_0})^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}, \frac{S_r}{8\gamma^2 m_0}\right), \quad \frac{D_{KT}^c}{t_{\max}} = \frac{E[P]}{B'_{rf}} I_{KT}^c(S_r). \quad (5.13a-b)$$

## 6. Procjena visokocikličkog zamora

U ovom poglavlju prikazani su rezultati visokocikličkog zamora kroz usporedne dijagrame za tri metode brojanja ciklusa. Kako je prikazano u poglavlju 3, norma ASTM E1049-85 [1] daje četiri načina brojanja ciklusa u vremenskoj domeni. Opseg ovog poglavlja su tri načina brojanja ciklusa iz ASTM norme [1]: metoda brojanja prelaska nivoa (LCC), metoda brojanja vrhova (PC) i metoda brojanja raspona (RC). Paralelno s vremenskom domenom primijenjena je i frekvencijska domena u kojoj su dani rezultati po metodama iz poglavlja 5. Proračun visokocikličkog zamora rađen je u programu *MATLab R2017b*.

### 6.1. Visokociklički zamor – referentni primjer

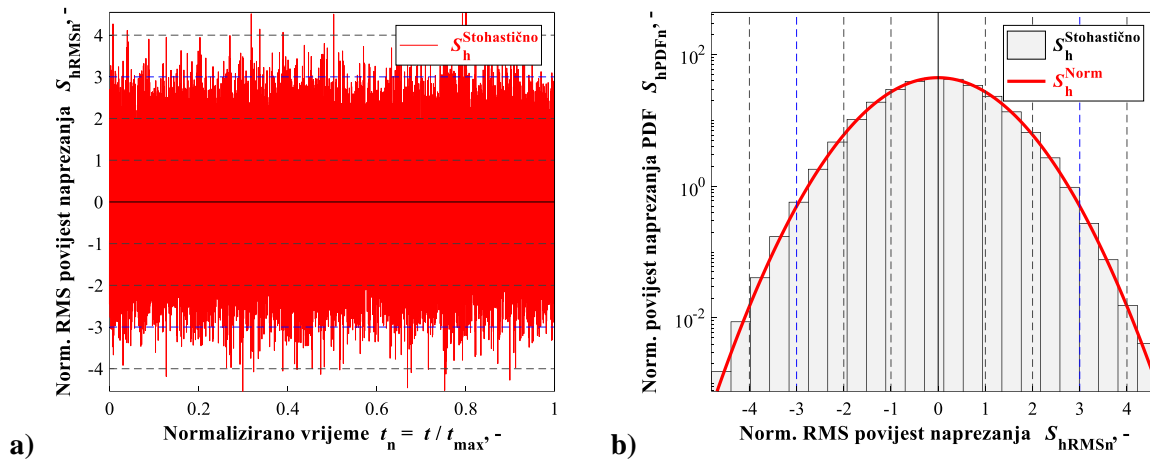
Kako bi se proračunao visokociklički zamor zadani su ulazni parametri koji se koriste kroz cijeli primjer. Slika 6.1a) prikazuje PSD dijagram u kojemu je vidljivo kako je maksimalno PSD naprezanje za odgovarajuću frekvenciju iznosa  $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , te  $S_{PSD2} = 2500 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ . Središnje frekvencije na kojima su trenutne vrijednosti PSD-a su  $f_1 = 1 \text{ Hz}$ , a  $f_2 = 10 \text{ Hz}$ . Slika 6.1b) prikazuje inverznu Fourierovu transformaciju (poglavljje 4.1.3) PSD dijagrama iz frekvencijske domene u vremensku domenu. Signal je, primjećuje se, stohastičan, dok su energijske vrijednosti frekvencijske i vremenske domene iste.



Slika 6.1a) PSD dijagram stohastičkog opterećenja, b) fragment stohastičkog signala

Vrijeme trajanja procesa je u ovom primjeru konstantno, te se neće mijenjati u opsegu ovog rada, a iznosi  $t_{\max} = 8192 \text{ s}$ , broj diskretnih točaka je  $N = 2^{25} = 8388608$ , dok je frekvencija uzorkovanja  $f_{sr} = 1024 \text{ Hz}$ . Inverzni negativni Basquinov eksponent  $m$  je iznosa 3. Širina frekvencijskog bloka je  $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ .  $B'_{rf} = 6,4 \cdot 10^{10} (\text{N/mm}^2)^3$ .

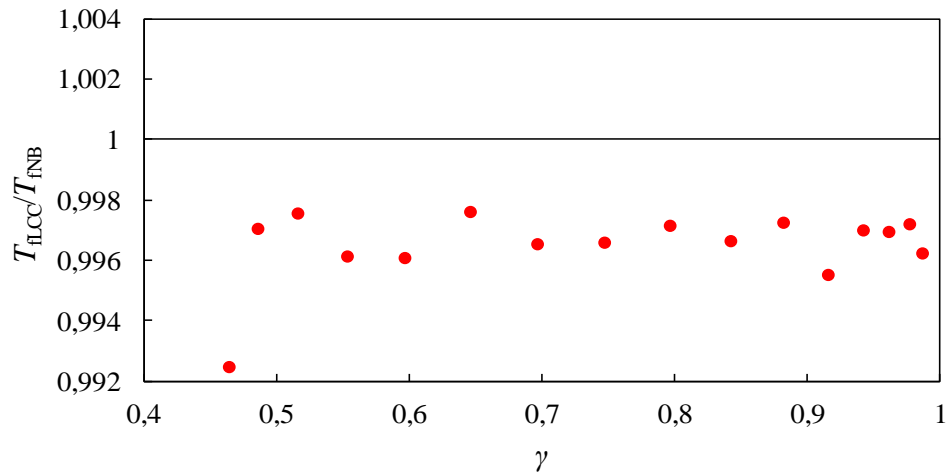
Kako bi se provjerilo je li signal Gausovski, potrebno je zadovoljiti uvjete koji su obrađeni u poglavlju 4.2.1. Slika 6.2 a) prikazuje ukupnu povijest napreznja proizašlu iz PSD dijagrama (Slika 6.1 a)). Slika 6.2 b) prikazuje histogram slučajnog procesa koji je gotovo pa savršeno opisan Gausovom krivuljom. Svakako treba napomenuti da ovaj signal zadovoljava sve nužne uvjete da bude Gausovski. Faktori Gausovskog signala izračunati su u programskom paketu *MATLAB R2017b*.



Slika 6.2 a) Ukupna povijest napreznja, b) Histogram slučajnog procesa

Kako je već navedeno, ovaj rad se bavi usporedbama metoda brojanja ciklusa. Napravljena je simulacija koja bi usporedila rezultate ako se napreznje  $S_{PSD}$  drži konstantnim za određene frekvencije. Odabrane vrijednosti su:  $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$  i  $S_{PSD2} = 2500 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ . Analiza je provedena tako da se uz konstantno napreznje PSD, frekvencija napreznja  $PSD_1$  povećavala za frekvencijski inkrement od 0,5 Hz do vrijednosti 8,5 Hz te su zapisivani rezultati vremena do zamornog loma  $T_f$  dobiveni proračunom zamora u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Povećanjem frekvencije za 0,5 Hz analiza je na istoj frekvenciji ponavljana deset puta radi izračunavanja srednje vrijednosti svih rezultata. Spektralne metode u frekvencijskoj domeni predviđaju konstantan rezultat vremena do zamornog loma te je njihova srednja vrijednost jednaka rezultatima prilikom svake analize.

Slika 6.3 prikazuje dijagram usporedbe metode brojanja prelaska nivoa (LCC) i uskopojasne (NB) spektralne metode i to kao međusobni omjer vremena do zamornog loma  $T_f$  u ovisnosti o faktoru nepravilnosti  $\gamma$  koji je u granicama  $0 \leq \gamma \leq 1$ .



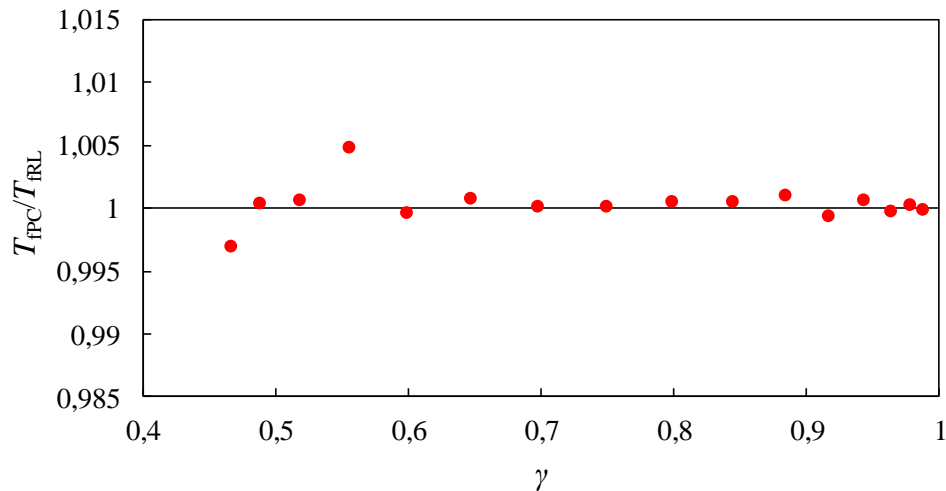
**Slika 6.3** Dijagram usporedbe dviju spektralnih metoda (LCC) za  $f_1 = 1 - 8,5$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz,  $S_{PSD1} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz i  $S_{PSD2} = 2500$  MPa<sup>2</sup>/Hz

Tablica 6.1 prikazuje srednje vrijednosti rezultata dobivenih analizom u programskom paketu *MATLab R2017b* za metode *Level Crossing Counting* (LCC) u vremenskoj domeni, te *Narrow-Band* (NB) u frekvencijskoj domeni. Smanjenjem raspona između  $f_1$  i  $f_2$  smanjuje se vrijeme do zamornog loma  $T_f$ . Uspoređujući vrijeme do zamornog loma u vremenskoj ( $T_{FLCC}$ ) i frekvencijskoj ( $T_{INB}$ ) domeni uočljivo je da obje metode daju slična rješenja i minimalna odstupanja u omjeru. Bitno je da omjer dva vremena teži u jedan jer je tada vrijeme do zamornog loma približno jednako za obje metode.

**Tablica 6.1** Prikaz rezultata za LCC i NB metodu u frekvencijskom rasponu za  $f_1 = 1 - 8,5$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz, te  $S_{PSD1} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz i  $S_{PSD2} = 2500$  MPa<sup>2</sup>/Hz

$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$T_{FLCC}$ (s)	$T_{INB}$ (s)	$T_{FLCC}/T_{INB}$	$\gamma$
1	10	330,6335346	333,153104	0,992437203	0,465662045
1,5	10	324,4778511	325,4520687	0,997006571	0,48750603
2	10	314,7329922	315,5158612	0,997518765	0,51748248
2,5	10	302,804745	303,9842968	0,996119695	0,554842904
3	10	290,3197189	291,4708045	0,996050769	0,598455078
3,5	10	277,8305108	278,5026005	0,997586774	0,646746242
4	10	264,5670578	265,4947006	0,996505984	0,697719371
4,5	10	251,8747109	252,74943	0,996539184	0,749079883
5	10	239,7731776	240,4705292	0,997100054	0,798477132
5,5	10	228,007349	228,7829324	0,996609959	0,843811663
6	10	217,1510833	217,7526094	0,997237571	0,883515298
6,5	10	206,4714987	207,4037226	0,995505269	0,916711723
7	10	197,1368526	197,7322312	0,996988965	0,943216504
7,5	10	188,1321615	188,7160685	0,996905897	0,963403612
8	10	179,8098134	180,3224396	0,997157169	0,978007319
8,5	10	171,8584566	172,5128734	0,996206563	0,987927954

Vidljivo je da Slika 6.4 prikazuje usporedbu metoda u vremenskoj (PC) i frekvencijskoj (RL) domeni za metodu brojanja vrhova. Rezultati i u ovoj metodi teže u jedan iz čega se da zaključiti o visokoj točnosti proračuna zamora u dvije domene.



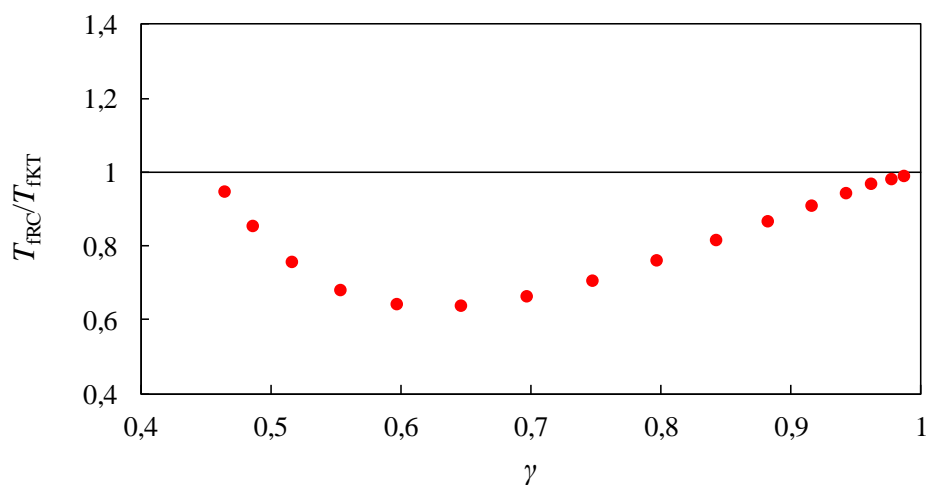
**Slika 6.4** Dijagram usporedbe dviju spektralnih metoda (PC) za  $f_1 = 1 - 8,5$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz,  $S_{PSD1} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz i  $S_{PSD2} = 2500$  MPa<sup>2</sup>/Hz

Tablica 6.2 prikazuje prikazuje srednje vrijednosti rezultata dobivenih analizom u programskom paketu *MATLab R2017b* za metode *Peak Counting* (PC) u vremenskoj domeni, te *Rice/Lalane* (RL) u frekvencijskoj domeni. Dobiveni rezultati za vrijeme do zamornog loma  $T_f$  kao i u spektralnim metodama LCC i NB padaju smanjenjem raspona između prve ( $f_1$ ) i druge ( $f_2$ ) frekvencije. Omjer vremena do zamornog loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni daje rezultat koji je približno jednak jedan. Usporedbom metoda LCC i NB s metodama PC i RL vidljivo je kako su rezultati vremena do zamornog loma u slični.

**Tablica 6.2** Prikaz rezultata za PC i RL metodu u frekvencijskom rasponu za  $f_1 = 1 - 8,5$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz, te  $S_{PSD1} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz i  $S_{PSD2} = 2500$  MPa<sup>2</sup>/Hz

$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$T_{iPC}$ (s)	$T_{iRL}$ (s)	$T_{iPC}/T_{iRL}$	$\gamma$
1	10	301,6375079	302,5380484	0,997023381	0,465662045
1,5	10	299,4363087	299,3167283	1,000399511	0,48750603
2	10	294,8005196	294,5958599	1,000694714	0,51748248
2,5	10	289,7073907	288,303195	1,004870552	0,554842904
3	10	280,3869453	280,4834401	0,99965597	0,598455078
3,5	10	271,54325	271,3224878	1,000813652	0,646746242
4	10	261,1727377	261,1300811	1,000163354	0,697719371
4,5	10	250,3226074	250,28871	1,000135433	0,749079883
5	10	239,3172418	239,1881004	1,000539915	0,798477132
5,5	10	228,279714	228,1676387	1,000491197	0,843811663
6	10	217,7014724	217,4823713	1,001007443	0,883515298
6,5	10	207,1663945	207,2960102	0,999374732	0,916711723
7	10	197,8312774	197,6938038	1,000695386	0,943216504
7,5	10	188,664077	188,7040674	0,999788079	0,963403612
8	10	180,3704317	180,319272	1,000283718	0,978007319
8,5	10	172,496504	172,512203	0,999908998	0,987927954

Kako prikazuje Slika 6.5, na dijagramu usporedbe spektralnih metoda za vremensku i frekvencijsku domenu po metodi RC, uočava se fenomen smanjenja točnosti metode zato jer je omjer  $T_{IRC}/T_{IKT} < 1$ , što pokazuje da su vrijednosti različite u frekvencijskom i vremenskom području. Stoga je "KT" metoda često preliberalna, osim kada je  $\gamma$  malen i teži u nulu, tj. kada teži u jedan. Za vrijednosti između, moguća su preliberalna predviđanja zamora s obzirom na pretpostavku brojanja raspona (RC).



**Slika 6.5** Dijagram usporedbe dviju spektralnih metoda (RC) za  $f_1 = 1 - 8,5$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz,  $S_{PSD1} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz i  $S_{PSD2} = 2500$  MPa<sup>2</sup>/Hz

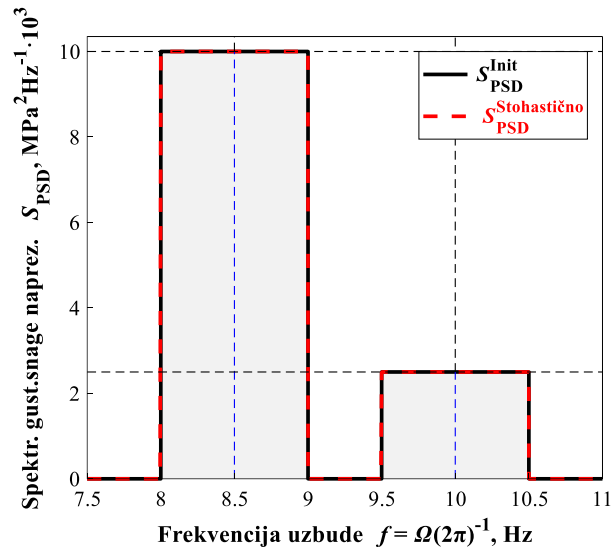
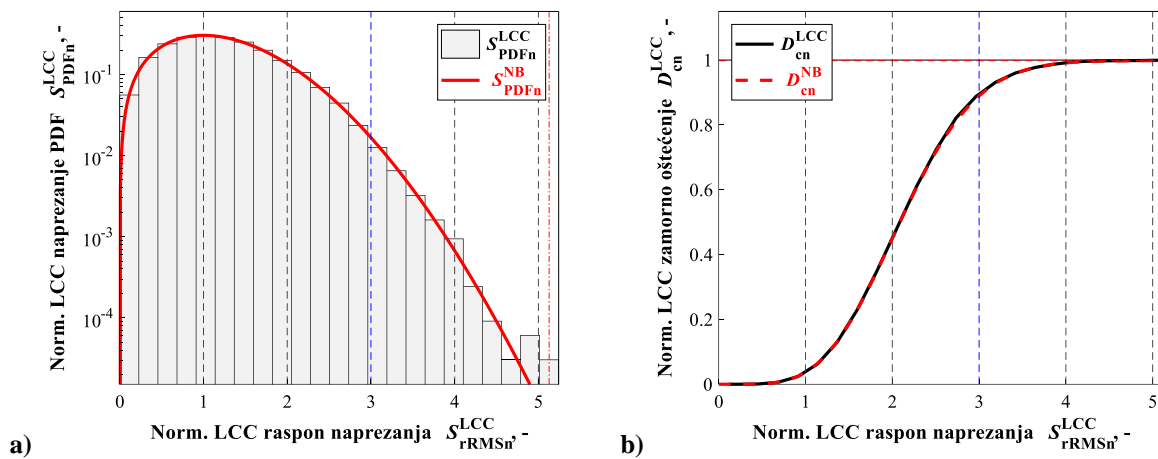


Tablica 6.3 prikazuje prikazuje srednje vrijednosti rezultata dobivenih analizom u programskom paketu *MATLab R2017b* za metode *Range Counting* (RC) u vremenskoj domeni, te *Krenk i Tunna* (KT) u frekvencijskoj domeni. Dobiveni rezultati vremena do zamornog loma su, u usporedbi s prijašnjim metodama (LCC, NB, PC i RL), puno liberalniji. Na većim rasponima između  $f_1$  i  $f_2$  vremena do zamornog loma su liberalna u odnos na prijašnje metode, dok se smanjenjem raspona frekvencija vremena do zamornog loma približavaju vrijednostima prijašnjih metoda.

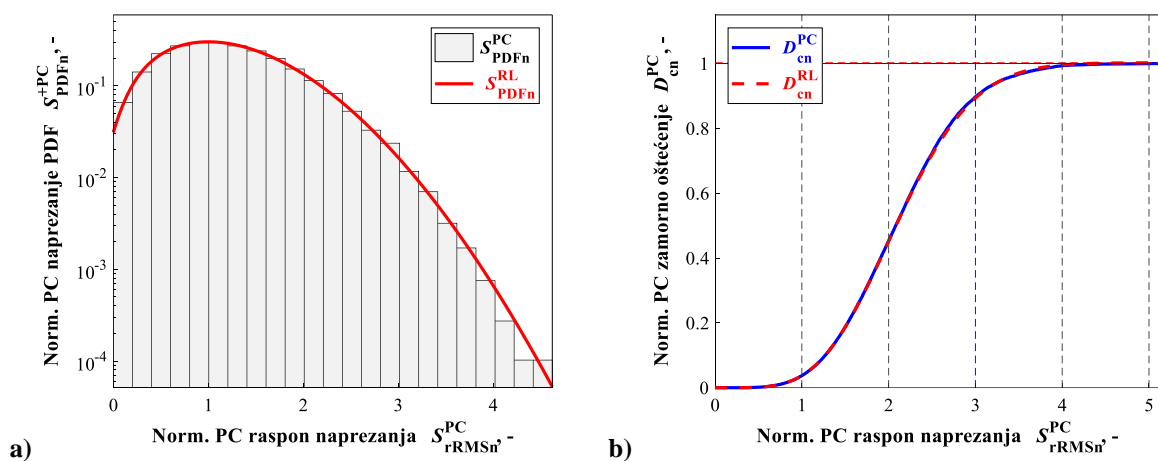
**Tablica 6.3 Prikaz rezultata za RC i KT metodu u frekvencijskom rasponu za  $f_1 = 1 - 8,5$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz, te  $S_{PSD1} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz i  $S_{PSD2} = 2500$  MPa<sup>2</sup>/Hz**

$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$T_{IRC}$ (s)	$T_{IKT}$ (s)	$T_{IRC}/T_{IKT}$	$\gamma$
1	10	1452,469605	1536,392513	0,945376648	0,465662045
1,5	10	1165,143302	1369,389687	0,850848603	0,48750603
2	10	887,1757905	1178,229508	0,752973665	0,51748248
2,5	10	669,8906272	987,4408199	0,678410912	0,554842904
3	10	521,2624871	813,8267249	0,64050795	0,598455078
3,5	10	423,9344271	665,8270386	0,636703532	0,646746242
4	10	360,3741759	545,373832	0,660783768	0,697719371
4,5	10	317,1849075	450,436854	0,704171749	0,749079883
5	10	286,0456572	377,1697843	0,758400246	0,798477132
5,5	10	261,6342703	321,316165	0,814258039	0,843811663
6	10	241,5363975	278,9556877	0,865859375	0,883515298
6,5	10	223,884102	246,8033081	0,907135742	0,916711723
7	10	209,2306012	222,256609	0,941392034	0,943216504
7,5	10	196,1216327	203,32573	0,964568689	0,963403612
8	10	184,7949477	188,5235306	0,980222188	0,978007319
8,5	10	174,6607019	176,7546957	0,988153108	0,987927954

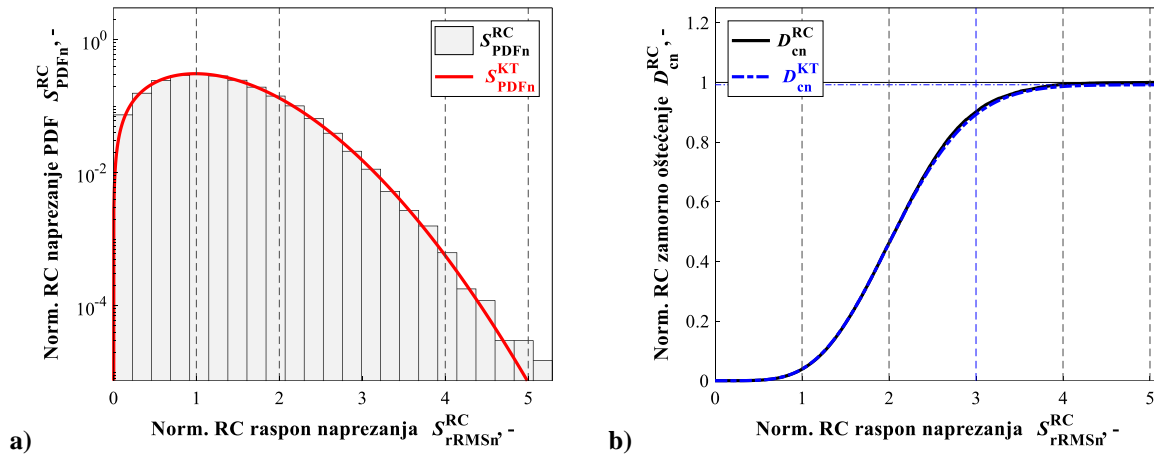
Kako prikazuje Tablica 6.3 vrijeme do zamornog loma materijala (RC metoda), kada su frekvencije  $f_1$  i  $f_2$  vrlo blizu (Slika 6.6), postaje vrlo slično vremenima ostalih metoda: LCC (Tablica 6.1) i PC (Tablica 6.2). Odziv sustava postaje uskopojasan (NB). U tom slučaju sve spektralne metode u vremenskoj/frekvencijskoj domeni (LCC/NB, PC/RL, RC/KT) konvergiraju u *Narrow band* (NB). Slika 6.7, Slika 6.8 i Slika 6.9 prikazuju odzive sustava u vremenskoj i frekvencijskoj domeni na uskopojasnom području. Vidljivo je da se odzivi u PDF dijagramu naprezanja i dijagramu zamornog oštećenja savršeno podudaraju u vremenskoj i frekvencijskoj domeni, što donosi „efekt“ uskopojasnosti, tj. *Narrow band* (NB).

Slika 6.6 PSD dijagram stohastičkog opterećenja uskopojasnog (NB) signala,  $f_1 = 8,5$  Hz i  $f_2 = 10$  HzSlika 6.7 Odziv sustava u uskopojasnom području (NB) za metodu LCC:  $f_1 = 8,5$  Hz i  $f_2 = 10$  Hz

a) dijagram PDF naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja

Slika 6.8 Odziv sustava u uskopojasnom području (NB) za metodu PC:  $f_1 = 8,5$  Hz i  $f_2 = 10$  Hz a) dijagram

PDF naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja



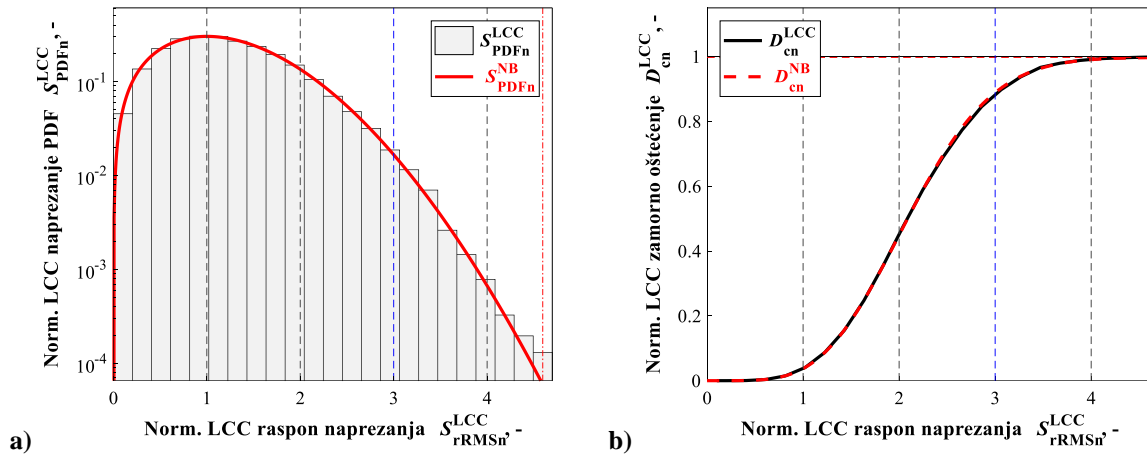
Slika 6.9 Odziv sustava u uskopojasnom području (NB) za metodu RC:  $f_1 = 8,5$  Hz i  $f_2 = 10$  Hz

a) dijagram PDF naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja

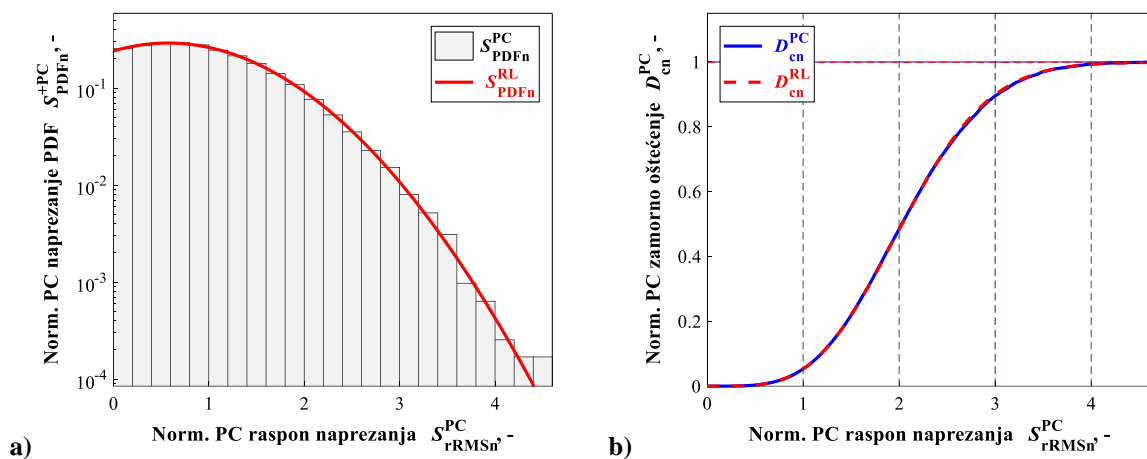
Normalizirane veličine koje prikazuju Slika 6.7, Slika 6.8 i Slika 6.9 su:  $S_{rRMSn}$ ,  $S_{PDFn}$  i  $D_{cn}$ . Normalizirano zamorno oštećenje  $D_{cn}$  normalizira se tako da se svako oštećenje u točki podijeli s maksimalnim dobivenim oštećenjem. Veličina  $S_{rRMSn}$ , normalizira se izrazom  $S_{rRMSn} = S_r / (2S_{RMS})$ , dok se izraz za gustoću vjerojatnosti naprezanja  $S_{PDFn}$  normalizira izrazom  $S_{PDFn} = S_{RMS} p_{PDF}$ .

PDF dijagram i dijagram zamornog oštećenja za LCC, PC i RC metodu u vremenskoj i frekvencijskoj domeni prikazuju Slika 6.10, Slika 6.11 i Slika 6.12. Iz tih slika donose se isti zaključci kao kod spektralnih metoda koje prikazuju dijagrami koje predočuje Slika 6.3, Slika 6.4 i Slika 6.5. Za dijagrame koje prikazuju slike korišteni su sljedeći ulazni podaci;  $f_1 = 1$  Hz,  $f_2 = 10$  Hz,  $S_{PSD1} = 10000$  MPa<sup>2</sup>/Hz,  $S_{PSD2} = 2500$  MPa<sup>2</sup>/Hz,  $N = 8388608$ ,  $f_{sr} = 1024$  Hz,  $B'_{rf} = 6,4 \cdot 10^{10}$  (N/mm<sup>2</sup>)<sup>3</sup>. Spektralne metode LCC (Slika 6.10) i PC (Slika 6.11) se gotovo savršeno poklapaju u frekvencijskoj i vremenskoj domeni. Metoda RC koju prikazuje Slika 6.12 odstupa od tražene točnosti i to tako da frekvencijska metoda (KT) prikazuje manju vrijednost ukupnog zamornog oštećenja  $D_f$ , iz tog zaključka proizlazi Slika 6.5 gdje je vidljivo da je omjer  $T_{fRC}/T_{fKT}$  manji od jedan. To se može objasniti preformuliranim matematičkim izrazom iz (6.1b-c):

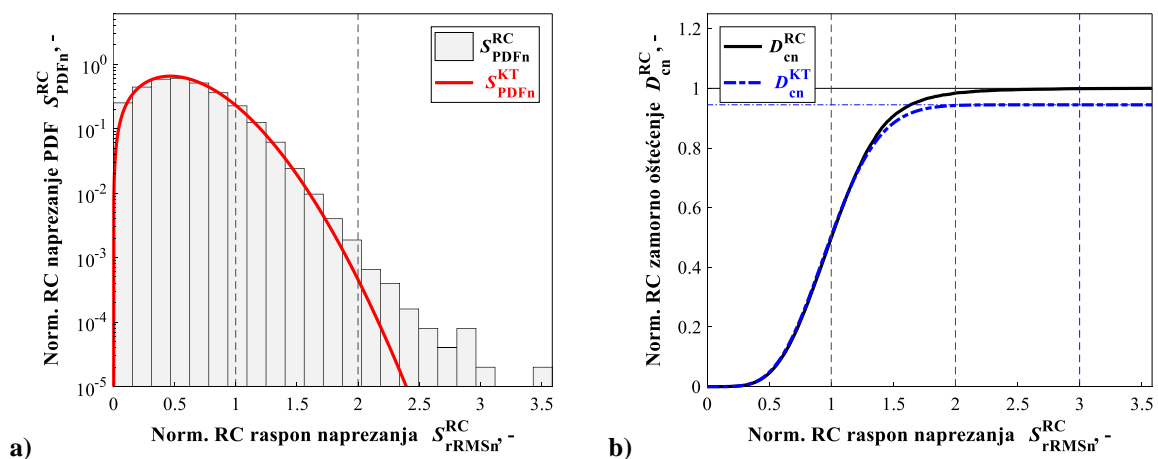
$$D_f = \frac{1}{N_f} \Rightarrow N_f = \frac{T_f}{t} \Rightarrow D_f = \frac{t}{T_f} \quad (6.1a-c)$$



Slika 6.10 LCC metoda a) PDF dijagram naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja



Slika 6.11 PC metoda a) PDF dijagram naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja



Slika 6.12 RC metoda a) PDF dijagram naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja

Jednadžba (6.1c) prikazuje ovisnost ukupnog zamornog oštećenja  $D_f$  i vremena do zamornog loma  $T_f$ . Budući da je ukupno vrijeme konstantno zaključak je da se porastom vremena  $T_f$  smanjuje  $D_f$ .

## 6.2. Usporedba visokocikličkog zamora s različitim naprežanjem $S_{PSD}$

U nastavku ovog rada prikazani su usporedni dijagrami omjera vremena do zamornog loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni u odnosu na faktor nepravilnosti  $\gamma$ . Cilj je naprežanje  $S_{PSD1}$  držati konstantnog iznosa,  $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$  dok je naprežanje druge frekvencije  $S_{PSD2}$  promjenjivo.  $S_{PSD2}$  iznosi:

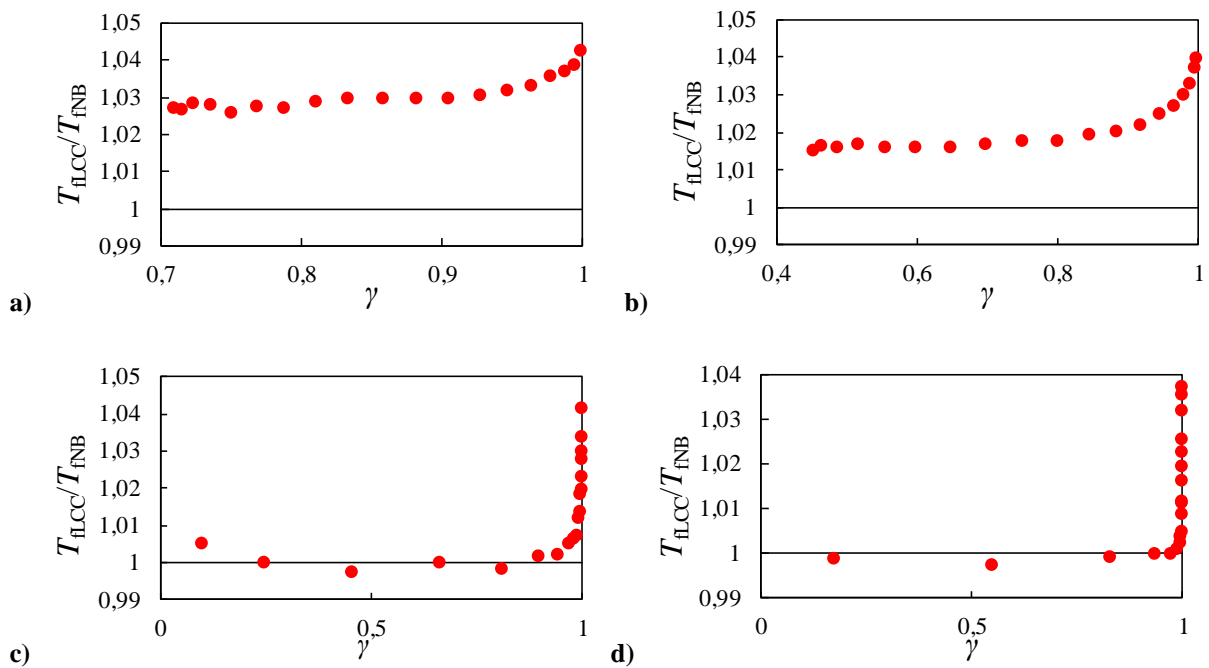
- a)  $S_{PSD2} = S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ ,
- b)  $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ ,
- c)  $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ ,
- d)  $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ .

Frekvencije u PSD dijagramu su u rasponu od 5 do 100 Hz. Vrijeme trajanja procesa je  $t_{\max} = 8192 \text{ s}$ , broj diskretnih točaka je  $N = 2^{25} = 8388608$ , dok je frekvencija uzorkovanja  $f_{sr} = 1024 \text{ Hz}$ . Širina frekvencijskog bloka je  $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ . Inverzni negativni Basquinov eksponent  $m$  je iznosa 3. Analiza se vrši tako da se u PSD dijagramu zadaju vrijednosti te se pokreće analiza koja sprema dobivena rješenja vremena do zamornog loma te pokreće ponovno analizu, i tako 10 puta kako bi se dobila aritmetička sredina rješenja. Kada se analiza „izvrti“, frekvencija  $S_{PSD1}$  se povećava za frekvencijski inkrement  $\Delta f = 5 \text{ Hz}$ , te se ponovno ponavlja isti ciklus. Kako je proračun zamora u vremenskoj domeni mnogo dulji zbog dobivanja povijesti naprežanja, cilj ovog poglavlja je usporediti u kojem to slučaju spektralne metode daju dovoljno točna rješenja u odnosu na metode iz vremenske domene jer bi se tako na brži i jednostavniji način mogao procijeniti zamor materijala.

### 6.2.1. Metoda LCC – NB

Slika 6.13 prikazuje usporedbe spektralnih metoda za LCC u vremenskoj domeni i NB u frekvencijskoj domeni. Osi dijagrama u sva četiri slučaja imaju iste mjerne jedinice tj. apscisi je dodjeljena vrijednost  $\gamma$ , dok je ordinati dodjeljena vrijednost omjera vremena do loma u vremenskoj te frekvencijskoj domeni. Vidljivo je da NB metoda u odnosu na LCC daje približno vrlo točna rješenja te da su svi omjeri  $T_{LCC}/T_{NB}$  blizu vrijednosti jedan. Ukupno gledano primijećeno je da porast odstupanja od vrijednosti jedan raste kako se frekvencija  $f_1$  u PSD dijagramu približava frekvenciji  $f_2$ . Raspon faktora nepravilnosti  $\gamma$  se smanjenjem naprežanja  $S_{PSD2}$  povećava, tako Slika 6.13a) prikazuje faktor nepravilnosti u vrijednostima

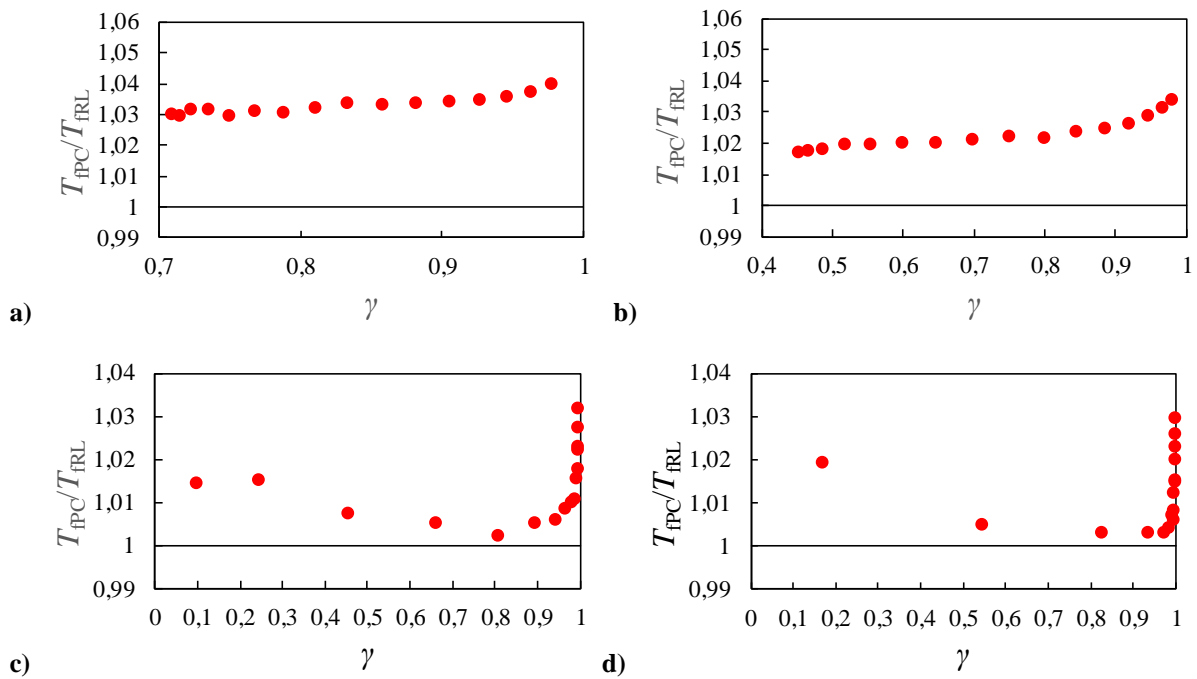
približno  $0,7 \leq \gamma \leq 1$  dok Slika 6.13d) prikazuje faktor nepravilnosti većeg raspona: približno  $0,2 \leq \gamma \leq 1$ .



Slika 6.13 Usporedba spektralnih metoda LCC-NB a)  $S_{PSD2} = S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , b)  $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , c)  $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , d)  $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$

### 6.2.2. Metoda PC – RL

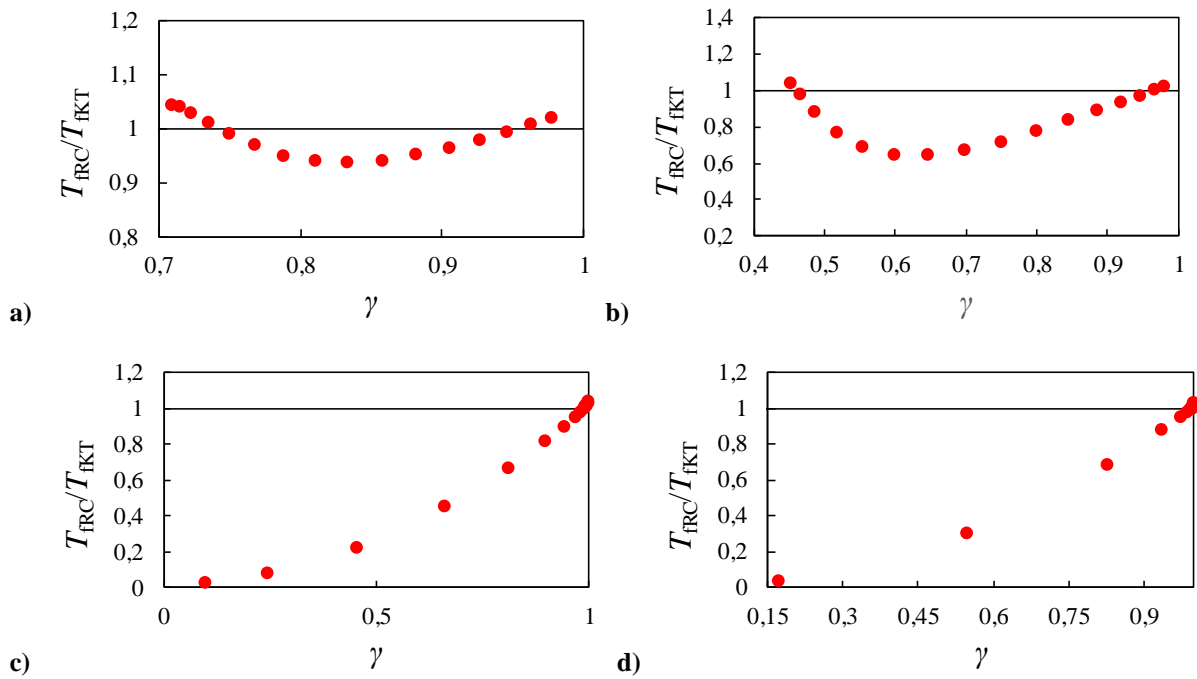
U ovoj metodi isto kao i u metodi prije (poglavlje 6.2.1) vrijedi da faktor nepravilnosti ovisi o frekvenciji i iznosu naprezanja  $S_{PSD}$ . Slika 6.14 prikazuje usporedbu metoda PC i RL. Također je vidljivo da su, za razliku od prošle metode, sva rješenja omjera vremena do zamornog loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni zapravo veća od vrijednosti jedan. Takva informacija daje naslutiti da metoda proračuna zamora materijala u frekvencijskoj domeni u ovom primjeru daje malo veća predviđanja nego što to daje metoda u vremenskoj domeni. Uvidom u vrijednost na ordinatama dijagrama razlike su uistinu malene ( $< 5\%$ ). Vidljivo je da smanjenjem vrijednosti  $S_{PSD2}$  dobivamo naglo povećanje omjera vremena kada se frekvencija  $f_1$  sve više približava frekvenciji  $f_2$  (Slika 6.14 a) i b)).



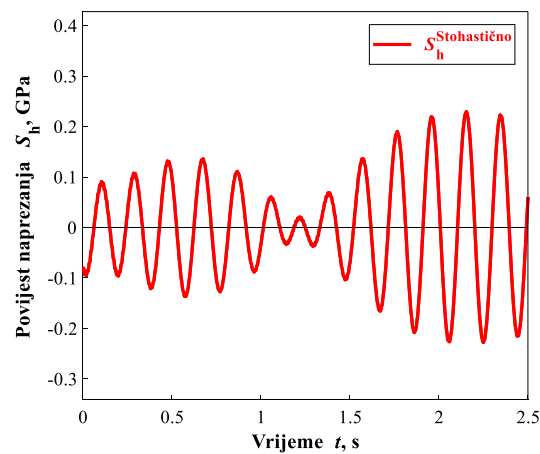
Slika 6.14 Usporedba spektralnih metoda PC-RL a)  $S_{PSD2} = S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , b)  $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$  c)  $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , d)  $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$

### 6.2.3. Metoda RC – KT

Slika 6.15 prikazuje usporedbu omjera vremena u vremenskoj i frekvencijskoj domeni metoda RC-KT. Vidljivo je da prva dva dijagrama (Slika 6.15 a) i b)) imaju isti oblik ali ne i vrijednosti te da druga dva dijagrama (Slika 6.15 c) i d)) također imaju isti oblik ali ne i vrijednosti. Povećavanjem frekvencije  $f_1$  za  $\Delta f$  prema  $f_2$  dobiva se blagi pad prema lokalnom minimumu te nakon toga povećanje (Slika 6.15 a) i b)). Metoda brojanja ciklusa RC uzima u obzir i najveći kao i najmanji raspon, npr. za područje niskog napreznja  $S_{PSD2}$  koji se nalazi na visokoj frekvenciji. U dijagramu povijesti napreznja (Slika 6.16) vidi se kako je niski  $S_{PSD2}$  zanemariv u odnosu na znatno veći  $S_{PSD1}$ . U biti Slika 6.16 prikazuje *Narrow Band* odziv te je uočljivo "treperenje" tj. "beating" Stoga metoda brojanja raspona zbraja puno velikih raspona ne uzimajući male u obzir. Razlog tog odstupanja prikazuje Slika 6.15 c) i d) gdje zapravo na području niske frekvencije  $f_1$  postoji najveće odstupanje od referentne vrijednosti koja je jedan.



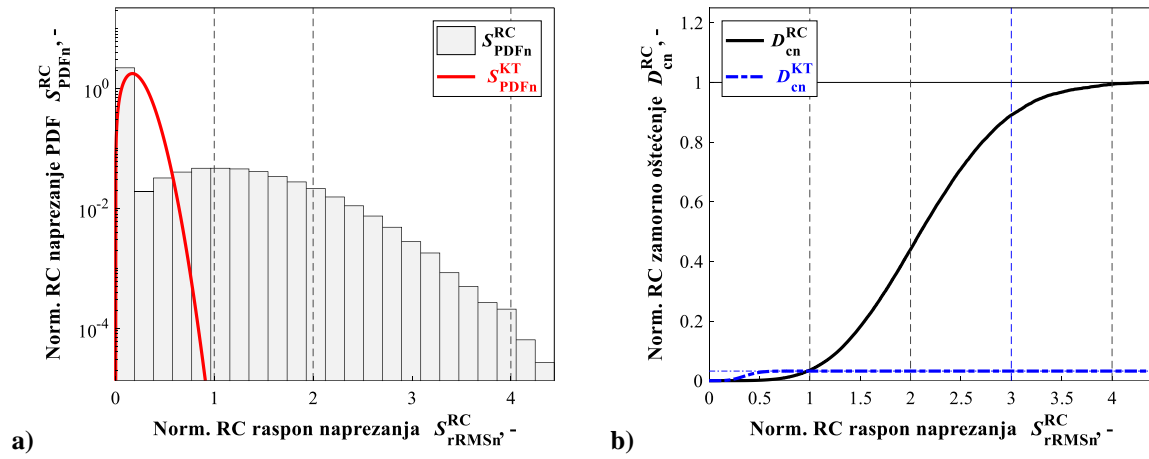
Slika 6.15 Usporedba spektralnih metoda RC-KT a)  $S_{PSD2} = S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , b)  $S_{PSD2} = 250 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , c)  $S_{PSD2} = 25 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ , d)  $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$



Slika 6.16 Dio povijesti naprezanja za  $f_1 = 5 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 100 \text{ Hz}$ ,  $S_{PSD1} = 10000 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$ ,  $S_{PSD2} = 2,5 \text{ MPa}^2/\text{Hz}$

Slika 6.17 prikazuje PDF dijagram naprezanja i dijagram zamornog oštećenja u kojima je vidljivo veliko odstupanje između frekvencijske i vremenske domene za metodu RC.





Slika 6.17 RC metoda za  $f_1=5\text{Hz}$ ,  $f_2=100\text{Hz}$ ,  $S_{PSD1}=10000\text{MPa}^2/\text{Hz}$ ,  $S_{PSD2}=2,5\text{MPa}^2/\text{Hz}$

a) PDF dijagram naprezanja b) dijagram zamornog oštećenja

## 7. Zaključak

U ovom radu je cilj kratko predstaviti problematiku zamornog loma, pobliže opisati brojanje ciklusa u povijesti naprezanja s promjenjivom amplitudom, pojednostaviti složene povijesti naprezanja s promjenjivom amplitudom na niz jednostavnih ciklusa naprezanja konstantnih amplituda. Detaljno su opisane metode brojanja ciklusa prema ASTM E1049-85 normi: brojanje prelaska nivoa (engl. *Level-Crossing Counting*), brojanje vrhova (engl. *Peak Counting*), brojanje raspona (engl. *Range Counting*), brojanje raspona toka kiše (engl. *Rainflow Counting*).

Metode kojima se ovaj rad bavi su: metoda brojanja prelaska nivoa (engl. *Level-Crossing Counting*), metoda brojanja vrhova (engl. *Peak Counting*) i metoda brojanja raspona (engl. *Range Counting*).

Rad se temelji na analizi procjene zamora u vremenskoj i frekvencijskoj domeni u računalnom programu *MATLAB R2017b*.

Razvijeni je algoritam za brojanje ciklusa prema tri metode: LCC, RC, PC u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

U zadnjem djelu rada tema je bila usporedba rezultata za različite stohastičke povijesti naprezanja primjenom svih teorija na kojima se temelji ovaj rad. Prikazani su usporedni dijagrami koji su ovisili o faktoru nepravilnosti  $\gamma$  te međusobnom omjeru rezultata vremena do zamornog loma u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

Usporedbom metoda obrađivanih u ovom radu utvrđeno je da metode u vremenskoj i frekvencijskoj domeni *Level Crossing Counting* (LCC), *Narrow Band* (NB), *Peak Counting* (PC) i *Rice/Lalane* (RL) s istim ulaznim vrijednostima u analizi daju slična rješenja vremena do zamornog loma. Metoda *Range Counting* (RC) u vremenskoj i frekvencijskoj domeni, za iste ulazne vrijednosti, daje liberalna vremena do zamornog loma, dok se smanjenjem raspona između frekvencija vrijeme do zamornog loma smanjuje, te postaje slično ostalim metodama (uskopojasno- *Narrow Band*).

## Literatura

- [1] *ASTM Standards, E1049 – 85, Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis*, 2011
- [2] *Suresh, S., Fatigue of materials*, drugo izdanje, Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [3] *Korun Curić, K., Određivanje zamorne čvrstoće materijala pomoću umjetne neuronske mreže*, Kvalifikacijski doktorski ispit, FESB, Split, 2013.
- [4] *Wohler, A., Versuche über die Festigkeit der Eisenbahnwagenachsen, 1860.*
- [5] *Stephens, R. I., Fatemi, A., Stephens, R. R., Fuchs, H. O., Metal Fatigue in Engineering*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [6] *Čakmak, D., Rainflow metoda, Seminarski rad iz kolegija Mehanika oštećenja i mehanika loma*, FSB, Zagreb, 2014..
- [7] *Kranjčević, N., Elementi Strojeva, Poglavlja iz kolegija Elementi konstrukcija I, IA i IB*, FSB, Zagreb, 2012.
- [8] *Bishop, N.W.M., Sherratt, F., Finite Element Based Fatigue Calculations*, NAFEMS Ltd, Farnham, 2000.
- [9] *Kutleša, E., Razvoj algoritma za procjenu visokocikličkog zamora metodom toka kiše*, Završni rad, FSB, Zagreb, 2021.
- [10] *Lee, Y, Pan, J., Hathawy, R., Barkey, M., Fatigue testing and analysis*, 2005.
- [11] *Bishop N. W. M., The use of frequency domain parameters to predict structural fatigue*, University of Warwick, 1988.
- [12] *Brandt, A., Noise and vibration analysis*, University of Southern Denmark, 2011.
- [13] *Slavič, J., Mršnik, M., Česnik, M., Javh, J., Boltežar, M., Vibration Fatigue by Spectral Methods*, 1st Edition, From Structural Dynamics to Fatigue Damage – Theory and Experiments, Elsevier, 2020
- [14] *Bishop, N.W.M., The use of frequency domain parameters to predict structural fatigue, Ph.D. Thesis, University of Warwick, Coventry, England, 1988.*
- [15] *Lalanne, C., Fatigue Damage, Mechanical Vibration and Shock Analysis, Revised and Updated 3rd Edition, Volume 4, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2014. (First edition published 2002)*
- [16] *Rice, S.O., Mathematical analysis of random noise, Bell System Technical Journal 23 (1944) 282–332, and 24 (1945) 46–156, Re-printed in: Wax, N. (Ed.), Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, New York, (1954) 133–294.*
- [17] *HBM Prencscia, nCode DesignLife 2019 Documentation*, United Kingdom Limited, 2019.
- [18] *Rayleigh, J.W.S., The Theory of Sound, Two Volumes In One, Dover Publications, New York, 1945. (First Edition Printed: 1877.)*
- [19] *Pearson, J., Computation of Hypergeometric Functions*, M.D. Thesis, Worcester College, 2009.
- [20] *Miles, J.W., On Structural Fatigue Under Random Loading*, Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences) 21(11) (1954) 753–762.
- [21] *Bendat, J.S., Probability functions for random responses: prediction of peaks, fatigue damage and catastrophic failures*, Technical Report/NASA report on contract NAS-5-4590, NASA CR-33, Washington, 1964.

- 
- [22] *Kowalewski, J.*, **On the relationship between component life under irregularly fluctuating and ordered load sequences**, DVL Report 249, MIRA Translations No. 43/66 (Part 1) (1963), No. 60/66 (Part 2) (1966)
- [23] *Krenk S.*, **A double envelope for stochastic processes**, **Report No. 134**, Danish Centre for Applied Mathematics and Mechanics, 1978.
- [24] *Tunna, J.M.*, **Fatigue life Prediction for Gaussian Random Loads at the Design Stage**, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 9(3) (1986) 169–184.
- [25] *Čakmak, D., Tomičević, Z., Wolf, H., Božić, Ž., Semenski, D.*, **Explicit solution of Rice/Lalanne peak probability distribution for statistical fatigue assessment in the frequency domain**, *Procedia structural integrity* 31C (2021) 98–104.
- [26] *Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R.*, **Special functions**, Cambridge University Press, 1999.