

Aktivna ćelija metamaterijala za neregipročnu transmisiju vibracija

Jalšić, Marin

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:617289>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Marin Jalšić

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:
Doc. dr. sc. Neven Alujević

Student:
Marin Jašić

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Mentoru doc. dr. sc. Nevenu Alujeviću zahvaljujem na iznimno velikoj količini prenesenog znanja iz područja teorije vibracija, kao i na pomoći, savjetima i strpljenju prilikom izrade ovog rada. Izuzetno cijenim njegovu pristupačnost i trud koji ulaže u sve studente s kojima surađuje te što jednoliku pažnju pridaje razvijanju intuicije rješavanja problema i utvrđivanju potrebnih teorijskih znanja.

Zahvalan sam i čitavoj Katedri za primijenjenu dinamiku, jer je svaki njen član u nekom trenutku pridonio proširenju mog znanja iz područja teorije dinamičkih sustava, teorije upravljanja i optimizacije.

Višekanalno pojačalo koje je korišteno u eksperimentalnom dijelu rada izradila je tvrtka ELMAR ELECTRONIC d.o.o. iz Splita i dipl. ing. Goran Radan te im ovim putem zahvaljujem.

Ponajviše zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima koji su mi ovaj period života učinili vrlo ugodnim i koji su mi pružali bezuvjetnu potporu u svim trenucima. Posebno sam zahvalan roditeljima jer su mi omogućili studij i uvijek vjerovali da ću ga uspješno privesti kraju.

Marin Jalšić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Marin Jalšić** JMBAG: 0035208755

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Aktivna ćelija metamaterijala za neregipročnu transmisiju vibracija**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Active metamaterial cell for non-reciprocal vibration transmission**

Opis zadatka:

U radu je potrebno osmisliti i karakterizirati jednu ćeliju aktivnog metamaterijala koji ne bi podlijegao principu dinamičke recipročnosti.

- Potrebno je razviti diskretni elektromehanički model osmišljene ćelije pretpostavljajući upotrebu dviju decentraliziranih povratnih veza po brzini vibracija s nekolociranim parovima osjetnika i aktuatora.
 - U model je potrebno inkorporirati frekvencijski odziv seizmičkih osjetnika ubrzanja i elektromagnetskih aktuatora.
 - Potrebno je ispitati stabilnost povratnih veza i odrediti dinamičke parametre pasivne ćelije metamaterijala tako da sustav automatske regulacije ima zadovoljavajuću rezervu stabilnosti usprkos upotrebi nekolociranih parova pretvornika.
 - Upotrebom razvijenog modela treba također odrediti i performanse sustava automatske regulacije u smislu suzbijanja transmisije vibracija u željenom smjeru.
 - Nadalje, pomoću modela treba kvantificirati gubitak dinamičke recipročnosti koji se očekuje zbog upotrebe nekolociranih parova pretvornika. To treba napraviti usporedbom karakterističnih prijenosnih funkcija aktivnog metamaterijala koje se dobiju zamjenjujući točke uzbude i odziva aktivne konstrukcije.
- Dobivene teorijske rezultate potrebno je provjeriti mjerenjima na eksperimentalnom prototipu. Prototip treba konstruirati tako da bude pogodan za izradu tehnikom 3D ispisa a potom i izraditi i opremiti svim potrebnim elementima regulacijskog sustava te izvršiti mjerenja s otvorenim i zatvorenim povratnim vezama.
- Teorijske i eksperimentalne rezultate treba kritički diskutirati i objasniti fenomen gubitka recipročnosti kod transmisije vibracija u suprotnim smjerovima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

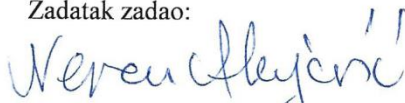
Predviđeni datumi obrane:

6. svibnja 2021.

8. srpnja 2021.

12. – 16. srpnja 2021.

Zadatak zadao:


Doc.dr.sc. Neven Alujević

Predsjednik Povjerenstva:


Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

SADRŽAJ

SADRŽAJ.....	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	VII
POPIS OZNAKA	VIII
SAŽETAK.....	XI
SUMMARY	XII
1 Uvod	1
1.1 Akustički metamaterijali	2
1.2 Recipročnost linearnih sustava.....	3
1.3 Aktivna kontrola vibracija.....	4
2 Problem smanjenja transmisije zvuka kao problem izolacije vibracija	7
2.1 Formulacija problema pasivne izolacije vibracija.....	8
2.2 Pasivna izolacija vibracija uz minimalnu $\mathcal{H}2$ normu	10
2.3 Primjer optimiranja sustava pasivne izolacije vibracija.....	13
2.4 Problem aktivne izolacije vibracija s nekolociranim mjernim i pogonskim članovima	17
3 Koncept ćelije aktivnog metamaterijala.....	22
3.1 Matematički model ćelije aktivnog metamaterijala	22
3.2 Analiza stabilnosti matematičkog modela ćelije aktivnog metamaterijala	23
3.3 Učinkovitost ćelije aktivnog metamaterijala u smanjenju transmisije vibracija.....	28

4	Matematički model ćelije aktivnog metamaterijala proširen s dinamikom mjernih i pogonskih članova	31
4.1	Drugačiji pristup opisu ćelije aktivnog metamaterijala bez dinamike mjernih i pogonskih članova.....	31
4.2	Proširenje modela ćelije aktivnog metamaterijala dinamikom mjernih i pogonskih članova	33
4.3	Analiza stabilnosti ćelije aktivnog metamaterijala koristeći generalizirani Nyquistov kriterij.....	38
5	Eksperimentalna verifikacija matematičkog modela ćelije aktivnog metamaterijala	44
5.1	Opis i izrada eksperimentalnog postava.....	44
5.1.1	Određivanje frekvencijskog pojasa koji sadrži prve četiri forme vibriranja pomoću metode konačnih elemenata.....	45
5.1.2	Izrada eksperimentalnog postava tehnologijom 3D ispisa i uvođenje mjernih i pogonskih članova u sustav	49
5.2	Dodatna mjerna oprema i postupak mjerenja.....	53
5.3	Analiza stabilnosti eksperimentalnog postava ćelije aktivnog metamaterijala.....	55
5.4	Karakteristične prijenosne funkcije eksperimentalnog postava ćelije aktivnog metamaterijala.....	59
6	Rasprava i budući razvoj	64
7	Zaključak	67
	Literatura	69
	PRILOZI.....	71

POPIS SLIKA

Slika 1.1 Primjeri akustičkih metamaterijala: a) kućište s rezonatorima u unutrašnjosti [6], b) kvadratna cijev s rezonatorima na vanjskoj strani [4].....	2
Slika 1.2 Vizualizacija principa recipročnosti na primjeru iz statike deformabilnih tijela	4
Slika 1.3 Razne strategije aktivne regulacije vibracija: a) kolocirani senzor i pogonski član, b) nekolocirani senzor i pogonski član, c) nekolocirni senzor i pogonski član ("skyhook" konfiguracija), d) kolocirani senzor i pogonski član (relativna konfiguracija).....	5
Slika 2.1 Problem transmisije zvuka kroz šupljinu s n panela.....	7
Slika 2.2 Vibracijski sustav s n stupnjeva slobode	8
Slika 2.3 Amplitudni dijagrami mobilnosti pasivnih sustava izolacije vibracija: a) sustavi bez optimiranja, b) sustavi s optimiranjem prigušenja po $\mathcal{H}2$ kriteriju .	16
Slika 2.4 $\mathcal{H}2$ norma pasivnih sustava izolacije vibracija	16
Slika 2.5 Aktivna izolacija vibracija sustava s dva stupnja slobode gibanja	18
Slika 2.6 Usporedba mobilnosti lagano prigušenog pasivnog, optimalnog pasivnog i aktivnih sustava za izolaciju vibracija uz pojačanja povratne veze $g = 10 \text{ N s m}^{-1}$ i $g = 200 \text{ N s m}^{-1}$	19
Slika 2.7 $\mathcal{H}2$ norme lagano prigušenog pasivnog, optimalnog pasivnog i aktivnih sustava izolacije vibracija uz pojačanja povratne veze $g = 10 \text{ N s m}^{-1}$ i $g = 200 \text{ N s m}^{-1}$	20
Slika 2.8 $\mathcal{H}2$ norme aktivnog sustava izolacije vibracija kao funkcija pojačanja povratne veze g	21
Slika 3.1 Model ćelije aktivnog metamaterijala.....	22
Slika 3.2 Hurwitzove determinante za slučaj bezuvjetno stabilnog aktivnog sustava s parametrima: $\alpha = 1, \beta = 12, \gamma = 12, \mu = 2, \zeta = 120$	27
Slika 3.3 Hurwitzove determinante za slučaj uvjetno stabilnog aktivnog sustava s parametrima: $\alpha = 1, \beta = 10, \gamma = 12, \mu = 12, \zeta = 120$	27

Slika 3.4 Usporedba $\mathcal{H}2$ normi karakterističnih prijenosnih mobilnosti sustava aktivne izolacije vibracija s dva stupnja slobode (isprekidane linije) i ćelije aktivnog metamaterijala (pune linije)	29
Slika 4.1 Blok-dijagram ćelije aktivnog metamaterijala.....	32
Slika 4.2 Model ćelije aktivnog metamaterijala s dinamikom mjernih i pogonskih članova.....	33
Slika 4.3 Blok-dijagram ćelije aktivnog metamaterijala proširenog s dinamikom mjernih i pogonskih članova	37
Slika 4.4 Ćelija aktivnog metamaterijala u otvorenom krugu	39
Slika 4.5 Nyquistove konture vlastitih vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: model s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, model bez dinamike mjernih i pogonskih članova – plavo (crni kružići prikazuju vlastite frekvencije sustava, crni dijamant prikazuje graničnu frekvenciju kruga elektrodinamičkih pogonskih članova, crni kvadratić frekvenciju prelaska konture preko negativne realne osi, a crni "×" vlastitu frekvenciju mjernih članova)	41
Slika 4.6 Amplitudni i fazni dijagram prve vlastite vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: model s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, model bez dinamike mjernih i pogonskih članova – plavo (crni kružići prikazuju vlastite frekvencije sustava, crni dijamant prikazuje graničnu frekvenciju kruga elektrodinamičkih pogonskih članova, crni kvadratić frekvenciju prelaska Nyquistove konture preko negativne realne osi, a crni "×" vlastitu frekvenciju mjernih članova).....	42
Slika 4.7 Amplitudni i fazni dijagram druge vlastite vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: model s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, model bez dinamike mjernih i pogonskih članova – plavo (crni kružići prikazuju vlastite frekvencije sustava, crni dijamant prikazuje graničnu frekvenciju kruga elektrodinamičkih pogonskih članova, crni kvadratić frekvenciju prelaska Nyquistove konture preko negativne realne osi, a crni "×" vlastitu frekvenciju mjernih članova)	42
Slika 5.1 Koncept eksperimentalnog postava ćelije aktivnog metamaterijala (bez aktivnih elemenata)	44
Slika 5.2 Rubni uvjeti pomaka na domeni vibracijskog sustava	46

Slika 5.3 Prva forma vibriranja pasivnog sustava (109,79 Hz)	47
Slika 5.4 Druga forma vibriranja pasivnog sustava (136,24 Hz).....	47
Slika 5.5 Treća forma vibriranja pasivnog sustava (241,41 Hz).....	48
Slika 5.6 Četvrta forma vibriranja pasivnog sustava (262,47 Hz).....	48
Slika 5.7 Peta forma vibriranja pasivnog sustava (842,39 Hz).....	49
Slika 5.8 Korišten 3D pisač i3 MK3 proizvođača Prusa Research [20]	50
Slika 5.9 Segmentiran pasivan vibracijski sustav: a) postupak sklapanja, b) sklopljen model	51
Slika 5.10 Prototip ćelije aktivnog metamaterijala opremljen s mjernim i pogonskim članovima.....	52
Slika 5.11 Izrađen prototip ćelije aktivnog metamaterijala opremljen mjernim i pogonskim članovima i učvršćen za podlogu	52
Slika 5.12 Eksperimentalan postav ćelije aktivnog metamaterijala s opremom za mjerenje	53
Slika 5.13 Pojačalo naboja	54
Slika 5.14 Analizator spektra	54
Slika 5.15 Pojačalo snage.....	54
Slika 5.16 Mjerenje prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova za slučaj pobude prvim reaktivnim vibratorom.....	56
Slika 5.17 Mjerenje prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova za slučaj pobude drugim reaktivnim vibratorom	57
Slika 5.18 Nyquistove konture vlastitih vrijednosti eksperimentalno dobivene matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova (crni kvadratić prikazuje frekvenciju prelaska konture preko negativne realne osi)	57
Slika 5.19 Amplitudni i fazni dijagram prve vlastite vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: matematički model s koncentriranim parametrima i uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, eksperimentalni rezultati – plavo (crni kvadratić prikazuje frekvenciju prelaska Nyquistove konture preko negativne realne osi).....	58

Slika 5.20 Amplitudni i fazni dijagram druge vlastite vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: matematički model s koncentriranim parametrima i uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, eksperimentalni rezultati – plavo (crni kvadratić prikazuje frekvenciju prelaska Nyquistove konture preko negativne realne osi).....	58
Slika 5.21 Mjerenje karakteristične prijenosne funkcije $G_{4,1s}$	60
Slika 5.22 Mjerenje karakteristične prijenosne funkcije $G_{1,2s}$	60
Slika 5.23 Usporedba amplituda karakterističnih prijenosnih funkcija ćelije aktivnog metamaterijala za slučaj bez uključenih povratnih veza: eksperimentalno dobiveni rezultati – pune linije, matematički model s diskretnim parametrima i dinamikom mjernih i pogonskih članova – isprekidane linije	61
Slika 5.24 Usporedba amplituda karakterističnih prijenosnih funkcija ćelije aktivnog metamaterijala za slučaj s uključenim povratnim vezama $g = 300 \text{ V s m} - 1$: eksperimentalno dobiveni rezultati – pune linije, matematički model s diskretnim parametrima i dinamikom mjernih i pogonskih članova – isprekidane linije	62
Slika 5.25 Usporedba amplituda karakterističnih prijenosnih funkcija ćelije aktivno metamaterijala: sustav s isključenim povratnim vezama – točkasta linija, sustav s uključenim povratnim vezama – puna linija	63
Slika 6.1 Koncept aktivne akustične metamaterijalne pregrade	65
Slika 6.2 Koncept ćelije aktivnog akustičnog metamaterijala	65

POPIS TABLICA

Tablica 2.1 Krutosti i mase sustava pasivne izolacije vibracija.....	14
Tablica 2.2 Prigušenja lagano prigušenog sustava pasivne izolacije vibracija (bez optimiranja)	15
Tablica 2.3 Prigušenja sustava pasivne izolacije vibracija (nakon optimiranja po $\mathcal{H}2$ kriteriju).....	15
Tablica 3.1 Parametri sustava aktivne izolacije vibracija i ćelije aktivnog metamaterijala	28
Tablica 4.1 Parametri ćelije aktivnog metamaterijala s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova	40

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
A	[–]	matrica sustava
\hat{A}	[–]	matrica proširenog sustava
B	[–]	matrica ulaza
\hat{B}	[–]	matrica ulaza proširenog sustava
C	[–]	matrica izlaza
\hat{C}	[–]	matrica izlaza proširenog sustava
$c_{i,j}$	N s m ⁻¹	prigušenje između <i>i</i> -tog i <i>j</i> -tog stupnja slobode gibanja
D	m ⁻¹ N s	nazivnik prijenosne funkcije
D	N s m ⁻¹	matrica prigušenja
D_a	N s m ⁻¹	matrica prigušenja aktivnog sustava
e	V	vektor ulaznih napona elektrodinamičkih vibratora
f	Hz	frekvencija
f	N	vektor pobudnih sila
f_{ci}	N	<i>i</i> -ta upravljačka sila
g	N s m ⁻¹	pojačanje povratne veze idealnih pogonskih članova
\hat{g}	V s m ⁻¹	pojačanje povratne veze realnih pogonskih članova
G	m N ⁻¹ s ⁻¹	prijenosna funkcija sustava sa zatvorenim povratnom vezom i idealnim mjernim i pogonskim članovima
\hat{G}	m V ⁻¹ s ⁻¹	prijenosna funkcija sustava sa zatvorenim povratnom vezom i realnim mjernim i pogonskim članovima
G_c	N s m ⁻¹	prijenosna funkcija regulatora s idealnim pogonskim članovima
\hat{G}_c	V s m ⁻¹	prijenosna funkcija regulatora s realnim pogonskim članovima
$\hat{G}_{c,o}$	V s m ⁻¹	prijenosna funkcija regulatora s realnim pogonskim članovima u otvorenom krugu
G_f	[–]	matrica selekcije pobudnih napona
G_m	[–]	prijenosna funkcija realnog mjernog člana
G_p	m N ⁻¹ s ⁻¹	prijenosna funkcija procesa s idealnim mjernim i pogonskim članovima
\hat{G}_p	m V ⁻¹ s ⁻¹	prijenosna funkcija procesa s realnim mjernim i pogonskim članovima

\mathbf{G}_s	[-]	matrica prijenosnih funkcija idealnih mjernih članova
$\hat{\mathbf{G}}_s$	[-]	matrica prijenosnih funkcija realnih mjernih članova
$\hat{\mathbf{G}}_{sa}$	[-]	matrica prijenosnih funkcija između realnih mjernih i pogonskih članova
$\hat{\mathbf{G}}_{s,o}$	[-]	matrica prijenosnih funkcija realnih mjernih članova u otvorenom krugu
\mathbf{i}	A	vektor električnih struja u krugovima elektrodinamičkih vibratora
\mathbf{K}	N m ⁻¹	matrica krutosti
k_i	N m ⁻¹	krutost i -tog stupnja slobode gibanja
$k_{i,j}$	N m ⁻¹	krutost između i -tog i j -tog stupnja slobode gibanja
L	H	induktivitet zavojnice elektrodinamičkog vibratora
\mathbf{M}	kg	matrica mase
m_i	kg	masa i -tog stupnja slobode gibanja
$N_{i,j}$	[-]	brojnik prijenosne funkcije
$P_i^{(j)}$	[-]	i -ti polinom j -tog stupnja
\mathbf{q}	m	vektor pomaka
\mathbf{Q}	m N ⁻¹ s ⁻¹	matrica mobilnosti aktivnog sustava
R	Ω	otpor u krugu elektrodinamičkog vibratora
s	s ⁻¹	Laplaceova varijabla
\tilde{s}	[-]	bezdimenzijska Laplaceova varijabla
\mathbf{S}_f	[-]	spektralna gustoća pobudnih sila
\mathbf{S}_v	[-]	spektralna gustoća brzina stupnjeva slobode gibanja
t	s	vrijeme
T	N A ⁻¹ , V s m ⁻¹	konstanta proporcionalnosti sile, konstanta povratne elektromotorne sile
\mathbf{u}	N	vektor ulaznih veličina u sustav
$\hat{\mathbf{u}}$	V	vektor ulaznih veličina u proširen sustav
\mathbf{v}	m s ⁻¹	vektor brzina stupnjeva slobode gibanja
\mathbf{x}	[-]	vektor varijabli stanja
$\hat{\mathbf{x}}$	[-]	vektor varijabli stanja proširenog sustava
\mathbf{W}_c	[-]	Gramova matrica upravljivosti
\mathbf{y}	[-]	vektor izlaza sustava
$\hat{\mathbf{y}}$	[-]	vektor izlaza proširenog sustava
α, β, γ	[-]	bezdimenzijski omjeri kružnih frekvencija

α	m N^{-1}	matrica podatljivosti
$\Delta_{i,j}$	[–]	i -ta Hurwitzova determinanta j -tog polinoma
ζ	[–]	bezdimenzijsko prigušenje
ζ_m	[–]	bezdimenzijsko prigušenje realnog mjernog člana
η	[–]	bezdimenzijsko pojačanje povratne veze
λ_i	[–]	i -ta vlastita vrijednost prijenosne funkcije između idealnih mjernih i pogonskih članova
$\hat{\lambda}_i$	[–]	i -ta vlastita vrijednost prijenosne funkcije između realnih mjernih i pogonskih članova
μ	[–]	bezdimenzijski omjer masa stupnjeva slobode gibanja
\mathbf{Y}	$\text{m N}^{-1} \text{s}^{-1}$	matrica mobilnosti pasivnog sustava
ω	rad s^{-1}	kružna frekvencija
ω_m	rad s^{-1}	vlastita kružna frekvencija realnog mjernog člana
$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$	rad s^{-1}	izvedene kružne frekvencije

SAŽETAK

U ovom radu osmišljena je ćelija aktivnog metamaterijala koja ne podliježe principu dinamičke recipročnosti. Izveden je matematički model elektromehaničkog sustava s koncentriranim parametrima kojim se opisuje dinamičko ponašanje ćelije. Unutar metamaterijala implementirane su dvije decentralizirane povratne veze po brzini vibracija, pri čemu parovi mjernih i pogonskih članova povratnih veza nisu kolocirani.

Takav model iskorišten je kako bi se provela detaljna analiza stabilnosti s posebnim naglaskom na određivanje parametara pasivnog sustava za koje uključivanje povratne veze osigurava zadovoljavajuću rezervu stabilnosti. Pokazuje se da je, uz zanemarivanje dinamičkog odziva mjernih i pogonskih članova moguće osigurati bezuvjetnu stabilnost aktivnog sustava, a ukoliko pretvornici posjeduju vlastitu dinamiku tada sustav postaje uvjetno stabilan.

Performanse regulacijskog sustava kvantificirane su razmatranjem \mathcal{H}_2 norme karakterističnih prijenosnih funkcija sustava prilikom zamjene točaka uzbude i odziva. Time je omogućen uvid u ovisnost fenomena gubitka dinamičke recipročnosti sustava, kao i njegovih mogućnosti suzbijanja vibracija u željenom smjeru o pojačanju povratnih veza.

Matematički model verificiran je eksperimentalnim prototipom ćelije koja je izrađena tehnologijom 3D ispisa. Eksperimentalni je postav opremljen sensorima, kao i elektrodinamičkim vibratorima koji su potrebni za ostvarivanje povratnih veza. Na izrađenom prototipu ćelije aktivnog metamaterijala provedena su mjerenja u slučaju da je povratna veza otvorena, a sustav pasivan te u slučaju da su povratne veze zatvorene, čime sustav postaje aktivan. Mjerenjima je zabilježen značajan gubitak dinamičke recipročnosti u sustavu sa zatvorenim povratnim vezama, kao i iznimno smanjenje transmisije vibracija u željenom smjeru u usporedbi s pasivnim sustavom.

Ključne riječi: aktivna kontrola vibracija, dinamička recipročnost, aktivni metamaterijali, stabilnost, matematički modeli s koncentriranim parametrima, eksperimentalna verifikacija matematičkih modela

SUMMARY

In this thesis a cell of an active metamaterial, which does not obey the principle of dynamic reciprocity, is developed. A lumped parameter mathematical model of the electromechanical system is derived, which describes the dynamic behaviour of the cell. Within the metamaterial cell two decentralized velocity feedback loops are implemented, where the sensor-actuator pairs are non-collocated.

The derived model is used to conduct a detailed analysis of the system in terms of stability, paying special attention to the selection of parameters of the passive system which would ensure good stability margins. It is shown that, when the dynamics of the sensors and actuators are neglected, the system can be made unconditionally stable, whereas when these dynamics are taken into account no such property can be guaranteed, and the system is conditionally stable. Performance of the control system is quantified by considering the \mathcal{H}_2 norm of the characteristic transfer functions of the system when the points of excitation and response are switched. This kind of performance analysis gives insight into the phenomenon of reciprocity loss, as well as the ability of the system to suppress vibrations in a desired direction, as they depend on feedback gain.

The theoretical model is verified using an experimental prototype of the metamaterial cell, which is 3D printed. The experimental setup is equipped with sensors and electrodynamic shakers which are necessary for the realisation of feedback loops. Measurements were made both with and without feedback, for comparison between the passive and active case. Considerable loss of dynamic reciprocity is registered when feedback is present, as well as a substantial reduction in vibration transmission in the desired direction, as compared to the passive case.

Key words: active vibration control, dynamic reciprocity, active metamaterials, stability, lumped parameter mathematical models, experimental verification of mathematical models

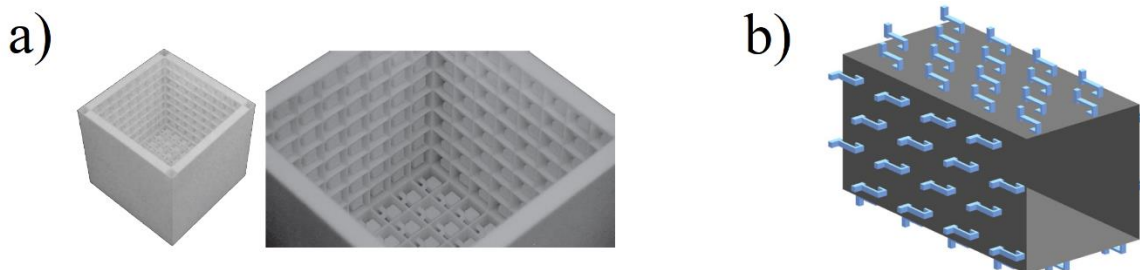
1 Uvod

Ubrzan razvoj tehnologije i uključivanje raznih strojeva u ljudsku okolinu jedan je od glavnih uzroka pojave buke. Njen utjecaj na zdravlje ljudi postaje sve važnija tema, pošto dugotrajna izloženost može uzrokovati čitav niz poteškoća: od lakših, poput iritacije i poremećenog sna, do ozbiljnih poput trajnog oštećenja sluha ili čak povećanja vjerojatnosti pojave kardiovaskularnih bolesti. Najvažnije skupine strojeva koji emitiraju buku uključuju transportna sredstva i strojeve za proizvodnju, a izvor buke koju proizvode u pravilu su vibracije komponenata od kojih se sastoje. Iz tog razloga sve se veći napori ulažu u konstruiranje proizvoda koji će emitirati manje buke, tako da se vibroakustička svojstva komponenata uzimaju u obzir odmah u fazi razvoja. Ipak, postoje konstrukcije koje izrazito dobro provode i emitiraju zvuk, a nije im dozvoljeno značajno mijenjati strukturu, kako se ne bi narušila njihova primarna funkcija. Primjeri takvih konstrukcija uključuju ljuske i ploče (tankostjene konstrukcije) koje se redovito koriste u automobilskoj i zrakoplovnoj industriji. Kako indeks transmisije zvuka opada s porastom mase po jedinici površine i frekvencijama [1], takve će konstrukcije biti izrazito dobri vodiči i radijatori zvuka, pogotovo pri niskim frekvencijama, što nikako nije povoljno. Redukcija transmisije i radijacije zvuka se u takvim konstrukcijama često provodi uvođenjem pasivnih komponenata u sustav: lijepljenjem slojeva materijala koji povećavaju strukturno prigušenje ili korištenjem spužvastih materijala za apsorpciju zvuka [2]. Nedostatak takvih metoda jest vezanost njihove učinkovitosti uz specifični frekvencijski pojas. Konkretno, slojevi spužvastih materijala koji upijaju zvuk učinkoviti su pri visokim frekvencijama, pošto zvuk tada ima malu valnu duljinu, dok bi pri niskim frekvencijama bilo potrebno koristiti znatno deblji sloj istog materijala, što nije opcija kod tankostjenih konstrukcija [3]. S druge strane, uz pojavu potrebe za laganim konstrukcijama, javlja se i novi skup lakih kompozitnih materijala koji se nazivaju akustički metamaterijali, a koji posjeduju svojstva koja se ne opažaju u prirodnim materijalima. Takvi materijali često su sustavi s lokalnim rezonatorima koji omogućuju ugađanje frekvencijskog pojasa u kojem učinkovito suzbijaju prolaz zvuka [4], što je istovremeno prednost nad ranije spomenutim pasivnim metodama (jer se frekvencijski pojas može podesiti), ali i njihov glavni nedostatak, pošto izvan tog pojasa prestaju biti učinkoviti. Uvođenjem aktivnih elemenata i povratnih veza u strukturu metamaterijala nastaju aktivni metamaterijali, koji nadilaze ograničenja njihovih pasivnih pandana u smislu frekvencijskog pojasa u kojem su učinkoviti, a upravo je sinteza i analiza takvog aktivnog sustava tema ovog rada.

Cilj ovog rada jest osmisлити ćeliju aktivnog metamaterijala koja će omogućiti nrecipročnu transmisiju vibracija. Nakon uvođenja osnovnih pojmova područja metamaterijala, fenomena recipročnosti i aktivne kontrole vibracija, provodi se teorijska analiza problema pasivne i aktivne izolacije vibracija te se na temelju takvih teorijskih razmatranja izvodi koncept ćelije aktivnog metamaterijala – u početku bez uzimanja u obzir dinamike senzora i pogonskih članova. Zatim se model proširuje, modeliranjem zanemarene dinamike, a na temelju takvog modela se izrađuje eksperimentalni prototip ćelije aktivnog metamaterijala na kojem se provode mjerenja, čiji se rezultati uspoređuju s teorijski dobivenim.

1.1 Akustički metamaterijali

Razvoj metamaterijala izuzetno je aktivno područje istraživanja. Radi se o kompozitnim materijalima koji su izrađeni od ćelija koje se ponavljaju u prostoru, s ciljem da osiguraju (prividno) svojstva koja se ne mogu ostvariti u prirodi (poput negativne gustoće ili negativnog modula stlačivosti [5]). Područje primjene takvih kompozita uključuje izradu uređaja za maskiranje (eng. *cloaking devices*) [5] ili, što je tema ovdje, uređaja za smanjenje transmisije vibracija. Primjeri pasivnih akustičkih metamaterijala koji koriste lokalne rezonatore prikazani su slikom 1.1. Napominje se još da primjena metamaterijala nije ograničena na valove mehaničke prirode, već da postoje i analogije u području elektromagnetskih valova, no ovdje o njima neće biti riječ.



Slika 1.1 Primjeri akustičkih metamaterijala: a) kućište s rezonatorima u unutrašnjosti [6], b) kvadratna cijev s rezonatorima na vanjskoj strani [4]

Iako lagani i kompaktni, ovakvi su metamaterijali korisni samo u frekvencijskom pojasu za koji su rezonatori podešeni, te im je iz tog razloga primjena ograničena. Stoga su razvijeni aktivni metamaterijali, koji omogućuju proširenje tog frekvencijskog pojasa. Glavna razlika između pasivnih i aktivnih sustava jest ta, što aktivni sustavi uključuju neki oblik procesiranja signala, u pravilu sa svrhom ostvarivanja povratne veze. Uspješna implementacija aktivnih metamaterijala prikazana je u [7], gdje je poseban naglasak stavljen na osiguravanje

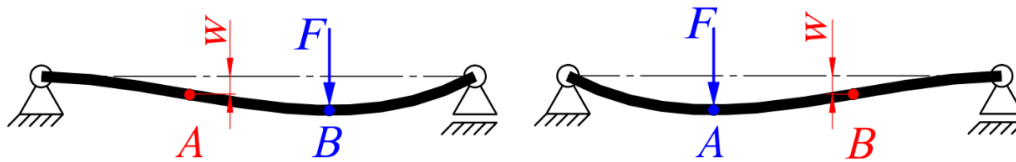
nerecipročnog odziva sustava (o svojstvu recipročnosti linearnih sustava riječ je u idućem potpoglavlju).

Na kraju se još napominje da je, iako je do sada u tekstu bila riječ o akustičkim metamaterijalima i problemu suzbijanja zvuka, u ovom radu naglasak na problemu transmisije zvuka, koji se može modelirati kao problem transmisije vibracija, pa će se ostatak teksta ograničiti na razmatranje vibracijskih sustava.

1.2 Recipročnost linearnih sustava

Fenomen recipročnosti vezan je uz linearne sustave, a formulirao ga je Helmholtz 1853. godine na primjeru problema iz bioelektromagnetizma [8]. Vrlo jednostavna interpretacija navedenog fenomena kaže da, ako se u linearnom sustavu zamjene točka pobude i mjerenja, mjerena veličina će biti jednaka. Recipročnost se može vizualizirati razmatranjem jednostavno oslonjene grede, kao na slici 1.2. Ukoliko sila djeluje u točki B, a mjeri se progib točke A, tada će (uz isti iznos sile) jednak progib biti izmjeren u točki B, ako sila djeluje u točki A. U statici čvrstih tijela ovaj princip nosi naziv Maxwell-Bettijev teorem, a postoje i analogije u ostalim područjima fizike (poput Lorentzove recipročnosti u elektromagnetizmu), sve s (u pravilu) drugačijim imenima. Iako se fenomen ovdje vizualizirao na primjeru iz statike, ovo svojstvo vrijedi i u slučaju dinamike, a manifestira se kao simetričnost matrica prijenosnih funkcija (više o tome u kasnijim poglavljima).

Bez obzira što je recipročnost vrlo često korisno svojstvo sustava, pa tako Maxwell-Bettijev teorem omogućuje jednostavnije rješavanje vrlo složenih problema iz statike, u području razvoja metamaterijala jedan od važnijih ciljeva je omogućiti odziv sustava koji nije recipročan [7]. Na taj način bila bi omogućena izrada uređaja koji bi drugačije provodio vibracije, ovisno o tome u kojem smjeru ulaze u sustav. Da je to moguće, pokazano je u [9] na primjeru vibracijskog sustava s dva stupnja slobode gibanja u kojem je uključena regulacija po apsolutnoj brzini vibracija s nekolociranim parom senzora i pogonskog člana, a na temelju tih rezultata izrađen je i eksperimentalni prototip kojim se verificirao matematički model [10]. Razni pristupi aktivnoj kontroli vibracija te neke njihove prednosti i nedostaci, uvode se u idućem potpoglavlju s ciljem da se argumentira korištenje određene strategije za smanjenje transmisije vibracija.

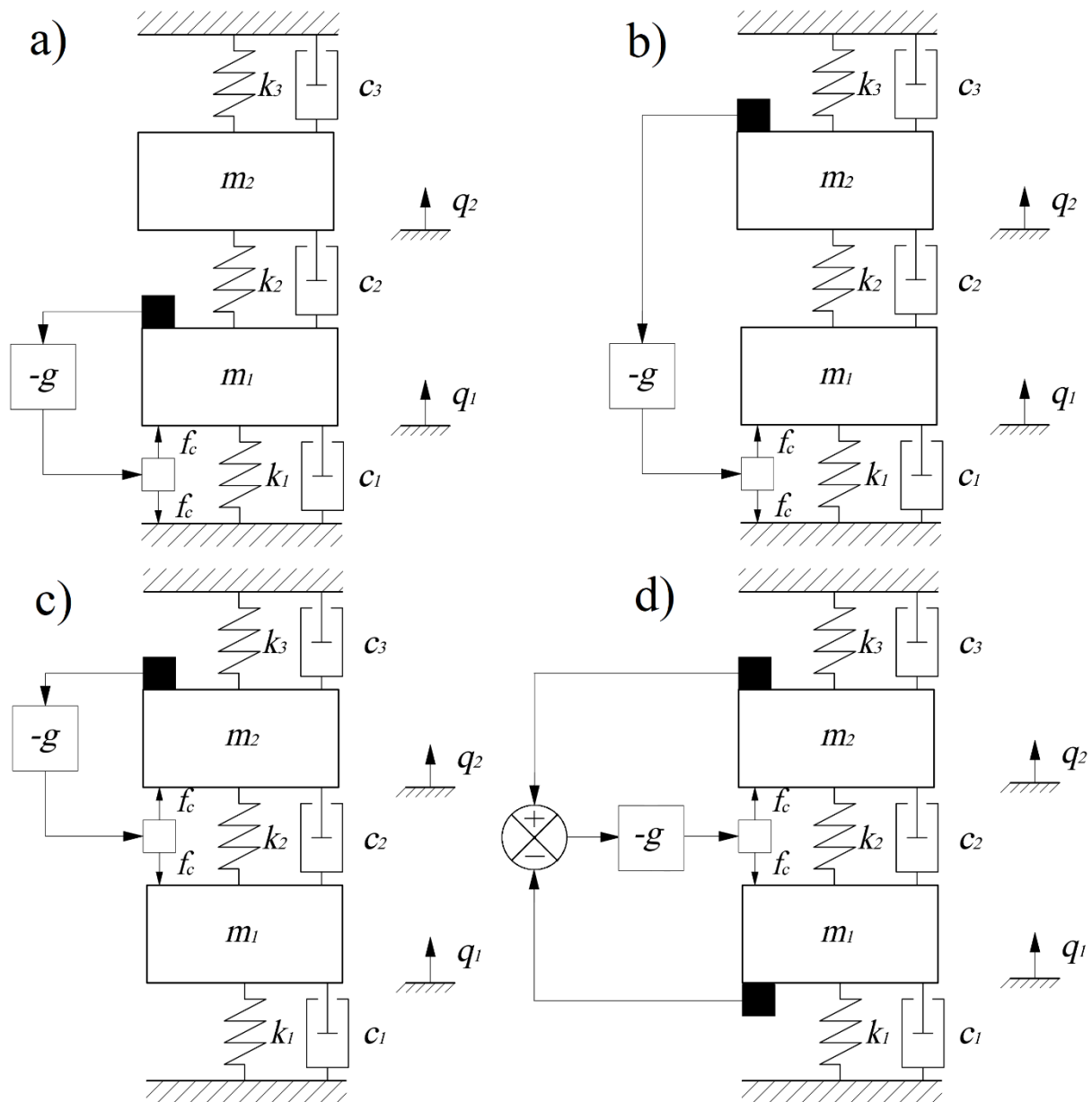


Slika 1.2 Vizualizacija principa recipročnosti na primjeru iz statike deformabilnih tijela

1.3 Aktivna kontrola vibracija

Tradicionalne metode smanjenja transmisije vibracija uključuju dodavanje pasivnih elemenata u sustav koji posjeduju određenu krutost i prigušenje, te na taj način omogućuju apsorpciju i disipaciju energije vibracija predanih sustavu iz okoline. Moderne metode često koriste aktivne elemente koji se sastoje od parova senzora i pogonskih članova, i koji mogu razvijati sile u ovisnosti o nekim mjerenim veličinama sustava. U kontekstu teorije upravljanja, takva aktivna kontrola zapravo je standardni regulator s proporcionalnim (u slučaju da je povratna veza ostvarena po brzini), integralnim (u slučaju da je povratna veza ostvarena po pomaku) i derivacijskim (u slučaju da je povratna veza ostvarena po ubrzanju) djelovanjem. U ovom tekstu, svi regulatori koji će se primjenjivati bit će proporcionalni, tj. povratna će veza biti ostvarena po brzini. Razlog korištenja takvog regulatora jest konjugiranost sile i brzine (umnožak mjernih jedinica tih veličina daje mjernu jedinicu snage), pa takvi regulatori rasipaju energiju sustava, a pokazano je da, ako su senzori i pogonski članovi takvog regulatora kolocirani, povratna je veza (u teoriji – uz zanemarivanje dinamike senzora i pogonskih članova) bezuvjetno stabilna [11].

Pojmove kolokacije senzora i pogonskih članova jednostavno je demonstrirati na primjerima vibracijskih sustava s dva stupnja slobode gibanja, kao na slici 1.3. Senzori brzine su na slici prikazani crnim kvadratićima, a pogonski članovi bijelim. Mase sustava označene su s m_i , krutosti s k_i , prigušenja s c_i , stupnjevi slobode s q_i , a pojačanje povratne veze s g . Ukratko – senzor i pogonski član kolocirani su, ako pogonski član djeluje na stupanj slobode kojeg pripadni senzor mjeri.



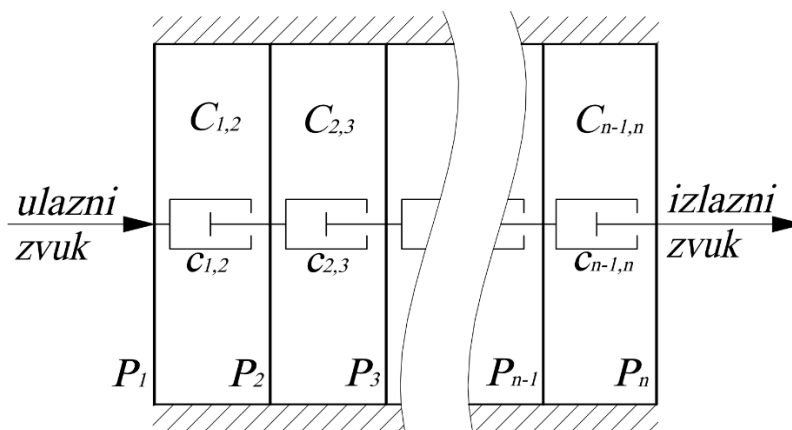
Slika 1.3 Razne strategije aktivne regulacije vibracija: a) kolocirani senzor i pogonski član, b) nekolocirani senzor i pogonski član, c) nekolocirni senzor i pogonski član ("skyhook" konfiguracija), d) kolocirani senzor i pogonski član (relativna konfiguracija)

Za slučajeve a) i b) sa slike ovakva je definicija kolociranosti dovoljno jasna, no za slučajeve c) i d) potrebno je još uzeti u obzir činjenicu da pogonski član ne može proizvesti jednu silu, već da se uvijek javlja par sila ("aktivna" i "reaktivna"). Kako su povratne veze ostvarene na razini brzine, tada je konfiguracija d), koja koristi relativnu brzinu između stupnjeva slobode, ekvivalentna uvođenju prigušivača varijabilnog prigušenja g u sustav. U takvoj konfiguraciji senzori i pogonski članovi su kolocirani, pošto za obje sile f_c postoji senzor koji mjeri pripadnu brzinu, a povratna je veza bezuvjetno stabilna. S druge strane, u konfiguraciji c) senzor i pogonski član nisu kolocirani, pošto "reaktivna" sila f_c koja djeluje u smjeru suprotnom od q_1

nema pripadni senzor koji bi mjerio brzinu tog stupnja slobode. Upravo je konfiguracija c), koja nosi engleski naziv "skyhook" prigušenje, jedna od konfiguracija koja omogućuje neregipročan vibracijski odziv, a koristit će se u ovom radu kao temelj sinteze aktivnog metamaterijala. Prednost korištena ovakve metode aktivne kontrole vibracija je prije svega jednostavnost implementacije, pošto se pogonski član ne montira na vanjsku podlogu (kao u konfiguracijama a) i b)), već se kao "podloga" koristi jedan od stupnjeva slobode. Međutim, kako u toj konfiguraciji senzor i pogonski član nisu kolocirani, posebno je važna analiza stabilnosti takve regulacijske petlje, pošto ne postoji garancija da će takav sustav biti stabilan za sva pojačanja povratne veze.

2 Problem smanjenja transmisije zvuka kao problem izolacije vibracija

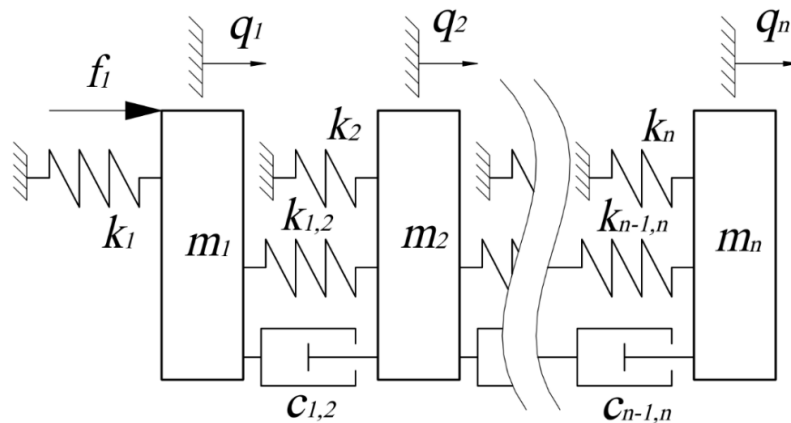
U ovom poglavlju razmatra se problem transmisije zvuka pomoću modela reduciranog reda. Slika 2.1 shematski prikazuje prijenos zvuka kroz barijeru koja je sastavljena od n panela (označenih s P_i), pri čemu se unutar svake šupljine (označene s $C_{i,j}$) nalazi prigušivač s viskozним prigušenjem $c_{i,j}$, koji povezuje dva susjedna panela. Iako problem transmisije zvuka spada u područje akustike, tj. interakcije fluida i čvrstog tijela, isti je problem moguće modelirati kao problem transmisije vibracija sustava s n stupnjeva slobode gibanja, ako se razmatraju samo osnovne forme vibriranja panela i zraka unutar šupljina [12]. Takav model prikazan je slikom 2.2, pri čemu m_i i k_i predstavljaju masu i krutost i -tog panela reprezentiranog jednim stupnjem slobode, tj. njegovom prvom formom vibriranja, a $k_{i,j}$ predstavlja krutost zraka unutar šupljina $C_{i,j}$ među panelima. Ovakva redukcija modela opravdana je, pošto je osnovna dvostruko neparna strukturna forma vibriranja pravokutne ploče (1,1) najzaslužnija za transmisiju i radijaciju zvuka pri niskim frekvencijama, zbog toga što na niskim frekvencijama prvi, volumetrijski, zvučni radijacijski oblik u najvećoj mjeri kontrolira radijaciju zvuka s neke vibrirajuće površine. Zvučni radijacijski oblici se općenito računaju kao vlastite vrijednosti matrice otpora radijaciji zvuka [13], a mogu se odrediti za razne geometrije (npr. pravokutne ploče, cilindrične ljuske i slično.) Iz ovih će se razloga u nastavku teksta razmatrati problem reducirati na problem izolacije vibracija.



Slika 2.1 Problem transmisije zvuka kroz šupljinu s n panela

2.1 Formulacija problema pasivne izolacije vibracija

Neka je zadan vibracijski sustav s n stupnjeva slobode i koncentriranim parametrima $m_i, k_i, k_{i,j}$ i $c_{i,j}$, kao na slici 2.2. Pretpostavlja se da je moguće djelovati silom f_i na svaki stupanj slobode q_i (na slici je označena samo sila f_1 zbog jasnoće). U tom slučaju, jednadžbe sustava mogu se zapisati kao (2.1a), pri čemu su \mathbf{M} matrica mase, \mathbf{K} matrica krutosti, \mathbf{D} matrica prigušenja, \mathbf{q} vektor stupnjeva slobode (pomaka), \mathbf{f} vektor sila koje djeluju na sustav, a t je vremenska varijabla:



Slika 2.2 Vibracijski sustav s n stupnjeva slobode

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_n), \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_{1,2} & -k_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ -k_{1,2} & k_{1,2} + k_2 + k_{2,3} & -k_{2,3} & \dots & 0 \\ 0 & -k_{2,3} & k_{2,3} + k_3 + k_{3,4} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & -k_{n-1,n} & k_{n-1,n} + k_n \end{bmatrix}, \quad (2.1c)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_{1,2} & -c_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ -c_{1,2} & c_{1,2} + c_{2,3} & -c_{2,3} & \dots & 0 \\ 0 & -c_{2,3} & c_{2,3} + c_{3,4} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & -c_{n-1,n} & c_{n-1,n} \end{bmatrix}, \quad (2.1d)$$

$$\mathbf{q}^T = [q_1(t) \quad \dots \quad q_n(t)], \quad (2.1e)$$

$$\mathbf{f}^T = [f_1(t) \quad \dots \quad f_n(t)]. \quad (2.1f)$$

Problem je povoljno promatrati u frekvencijskoj domeni, pošto je u tim koordinatama moguće dobiti jednostavnu vezu ulaza i izlaza sustava preko linearnog preslikavanja – matrice

prijenosnih funkcija. Iz tog razloga provodi se Laplaceova transformacija (2.1a), čime se dobiva (2.2):

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{D} + \mathbf{K})\mathbf{Q}(s) = \mathbf{F}(s), \quad (2.2)$$

gdje je s kompleksna Laplaceova varijabla, a $\mathbf{Q}(s)$ i $\mathbf{F}(s)$ predstavljaju Laplaceove transformacije vektora pomaka i sila. U nastavku teksta koristit će se konvencija prema kojoj se Laplaceove transformacije svih veličina označavaju velikim slovom. Prijenosna je funkcija sustava u općenitom slučaju definirana kao preslikavanje ulaza nekog sustava na izlaz tog sustava. U kontekstu ovog problema, invertiranje matrice koja množi $\mathbf{Q}(s)$ daje prijenosnu funkciju sustava u slučaju da su ulaz sile, a izlaz pomaci:

$$\mathbf{Q}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s)\mathbf{F}(s), \quad (2.3a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = (s^2\mathbf{M} + s\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}. \quad (2.3b)$$

Matrica $\boldsymbol{\alpha}(s)$ nosi naziv matrica podatljivosti [2], a element $\alpha_{i,j}(s)$ joj se interpretira kao preslikavanje j -te sile na i -ti pomak.

U ovom trenutku povoljno je promotriti svojstva matrice $\boldsymbol{\alpha}(s)$. Kako je matrica \mathbf{M} dijagonalna, matrice \mathbf{K} i \mathbf{D} su tridijagonalne i simetrične, a množenje skalarom i invertiranje ne narušava simetriju, matrica $\boldsymbol{\alpha}(s)$ je također simetrična, tj. vrijedi $\alpha_{i,j}(s) = \alpha_{j,i}(s)$. Stoga, ako se zamjene mjesta djelovanja sile i mjerenja pomaka, rezultat mjerenja će ostati isti, što znači da ovaj sustav (prema definiciji iz uvoda) posjeduje svojstvo recipročnosti.

Prilikom promatranja transmisije vibracija, odnosno rješavanja problema izolacije vibracija, (2.3) je povoljno derivirati (množiti s s), kako bi se dobila ovisnost brzina, $\mathbf{V}(s)$, o silama:

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{F}(s), \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{Y}(s) = s(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{D} + \mathbf{K})^{-1}. \quad (2.4b)$$

Matrica prijenosnih funkcija $\mathbf{Y}(s)$ naziva se matrica mobilnosti [2], a u nastavku će se koristiti kako bi se karakteriziralo ponašanje svih vibracijskih sustava koji će se analizirati.

Problem pasivne izolacije vibracija sastoji se u određivanju parametara vibracijskog sustava zadanog slikom 2.2, tako da neka, trenutno još neodređena, mjera pojačanja preslikavanja ulaznih veličina (sila) na izlazne veličine (brzine) bude minimalna. Drugim riječima, potrebno je minimizirati prijenos vibracija varirajući parametre sustava. Iako se isprva može činiti kao da je dostupan velik broj projektnih varijabli, zbog velikog broja parametara kojima je vibracijski sustav opisan, u stvarnosti ima smisla minimizirati pojačanje sustava samo po priguišenju. To je zbog činjenice što je u praktičnim slučajevima masu vrlo rijetko moguće

varirati (poželjno je na bude minimalna), a krutosti $k_{i,j}$ bi idealno trebale biti što je moguće manje, pošto u graničnom slučaju kada svi $k_{i,j}$ teže u 0 sustav postaje raspregnut i nema transmisije vibracija. To ponovno nije opcija, pošto je smanjena transmisija vibracija vrlo rijetko jedini kriterij koji općeniti sustav mora zadovoljiti, pa su i krutosti (barem djelomično) zadane. Dakle, preostaje jedino varirati prigušenja u sustavu. Ostaje još samo pitanje koja je mjera pojačanja sustava koju je potrebno minimizirati, na što se daje odgovor u idućem potpoglavlju.

2.2 Pasivna izolacija vibracija uz minimalnu \mathcal{H}_2 normu

Prilikom rješavanja problema iz teorije upravljanja koristeći optimizacijske metode, definiraju se norme sustava, koje predstavljaju mjere pojačanja vanjskih poremećaja preslikanih na izlazne veličine sustava. Tako postoji \mathcal{H}_∞ norma, koja predstavlja mjeru najvećeg pojačanja preko svih frekvencija i \mathcal{H}_2 norma, čiji kvadrat predstavlja varijancu izlaza u slučaju da je ulaz bijeli Gaussov šum [14]. Iako često korištena, \mathcal{H}_∞ norma u kontekstu problema koji se rješava nije nužno najbolja mjera kvalitete izolacije vibracija, pošto se njenom minimizacijom osigurava da je maksimalno pojačanje minimalno – što će biti u dominantnoj rezonanciji sustava. Takav bi pristup optimiranju bio opravdan kada bi bilo poznato da će sve sile koje djeluju na sustav uvijek djelovati pri toj frekvenciji. Ipak, češći je slučaj u kojem je vanjska pobuda na sustav stohastičke prirode (što je donekle opravdano modelirati kao bijeli šum), pa tako ima smisla minimizirati varijancu brzine, odnosno optimirati sustav po kriteriju \mathcal{H}_2 norme. Ukoliko je zadana sila $\mathbf{f}(t)$ kao šum sa spektralnom gustoćom $\mathbf{S}_f(j\omega)$, pri čemu ω označava kružnu frekvenciju, a j imaginarnu jedinicu, tada je varijanca sile definirana kao [15]:

$$\mathbb{E}[\mathbf{f}(t)^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\mathbf{S}_f(j\omega)] d\omega, \quad (2.5)$$

gdje $\mathbb{E}[*]$ označava očekivanje, a $\text{tr}[*]$ trag matrice. Kako je ulaz u sustav (sila) šum, a sustav linearan, izlaz (brzine) će također biti šum, kojem se spektralna gustoća računa kao [14]:

$$\mathbf{S}_v(j\omega) = \mathbf{Y}(j\omega)\mathbf{S}_f(j\omega)\mathbf{Y}^*(j\omega), \quad (2.6)$$

gdje \mathbf{Y}^* označava hermitski adjungiranu matricu matrici \mathbf{Y} . Prema (2.5) i uz poznatu relaciju (2.6), varijanca brzine se računa kao:

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(t)^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\mathbf{S}_v(j\omega)] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\mathbf{Y}(j\omega)\mathbf{S}_f(j\omega)\mathbf{Y}^*(j\omega)] d\omega, \quad (2.7)$$

a ako se k tome sila modelira kao bijeli šum, pa joj je spektralna gustoća jedinična matrica (sve frekvencije su jednako zastupljene), tada varijanca izlaza poprima oblik:

$$\mathbb{E}[\mathbf{v}(t)^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\mathbf{Y}(j\omega)\mathbf{Y}^*(j\omega)] d\omega. \quad (2.8)$$

Izraz (2.8) zapravo je kvadrat \mathcal{H}_2 norme prijenosne funkcije $\mathbf{Y}(j\omega)$ [15]. Napominje se kako je varijanca brzine proporcionalna srednjoj kinetičkoj energiji vibracija, što daje dodatni fizikalni smisao njenom korištenju kod optimizacije sustava. Uz poznatu definiciju \mathcal{H}_2 norme, problem izolacije vibracija koji se rješava može se zapisati kao optimizacija u nastavku, pri čemu su projektne varijable prigušenja u sustavu:

$$\min_{c_{i,j}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\mathbf{Y}(j\omega)\mathbf{Y}^*(j\omega)] d\omega. \quad (2.9)$$

Prije nego što se optimizacijski problem može riješiti, potrebno je naći način kako računati funkciju zadanu s (2.8). Pri tome će se iskoristiti činjenica da sustav koji se ovdje razmatra ima zapis u prostoru stanja.

Ukoliko se definiraju vektor varijabli stanja $\mathbf{x}(t)$ i vektor ulaza $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{x}^T(t) = [\mathbf{q}^T(t) \quad \dot{\mathbf{q}}^T(t)], \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t),$$

tada je (2.1a) moguće zapisati u obliku (2.10a), pri čemu su \mathbf{A} matrica sustava, \mathbf{B} matrica ulaza, a $\mathbf{0}$ i \mathbf{I} nul-matrica i jedinična matrica dimenzija $n \times n$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (2.10b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.10c)$$

Posebno, pošto se kao izlaz sustava razmatraju brzine, jednadžba izlaza ima oblik (2.11a), pri čemu su $\mathbf{y}(t)$ izlaz sustava, a \mathbf{C} matrica izlaza sustava:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}], \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t). \quad (2.11c)$$

Transformacijom (2.10a) u frekvencijsku domenu dobiva se ovisnost Laplaceovih transformacija varijabli stanja $\mathbf{X}(s)$ o Laplaceovim transformacijama varijabli ulaza $\mathbf{U}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (2.12)$$

a uvrštavanjem u transformiranu jednadžbu (2.11a) dobiva se ovisnost Laplaceovih transformacija izlaza $\mathbf{Y}(s)$ o ulazu:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s). \quad (2.13)$$

Kako su izlaz brzine, a ulaz sile, matrica koja množi $\mathbf{U}(s)$ u izrazu (2.13) mora biti jednaka matrici mobilnosti, tj. mora vrijediti:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \quad (2.14)$$

Uvrštavanjem (2.14) u (2.8) i uvažavanjem svojstva linearnosti operatora traga matrice, dobiva se izraz (2.15):

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{tr} \left\{ \mathbf{C} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-*} d\omega \right] \mathbf{C}^T \right\}. \quad (2.15)$$

Izraz u uglatoj zagradi (2.15) može se pomoću Parsevalovog teorema prevesti u vremensku domenu, tako da vrijedi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-*} d\omega = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt, \quad (2.16)$$

pri čemu $e^{\mathbf{A}t}$ predstavlja matricnu eksponencijalnu funkciju. Matrica dobivena izrazom (2.16) naziva se Gramova matrica upravljivosti, a zadovoljava Ljapunovljevu jednakost (2.17b) [14]:

$$\mathbf{W}_c = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt, \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}. \quad (2.17b)$$

Jednadžba (2.17b) može se svesti na rješavanje linearnih jednadžbi po $\text{vec}(\mathbf{W}_c)$ [16]:

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}) \text{vec}(\mathbf{W}_c) = -\text{vec}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T), \quad (2.18)$$

pri čemu je \mathbf{I} jedinična matrica jednakih dimenzija kao \mathbf{A} , \otimes predstavlja tenzorski (Kroneckerov) produkt, a operator $\text{vec}(\cdot)$ vektorizira matricu (sastavlja jedan vektor stupac od

svih stupaca matrice). Na kraju se formira Gramova matrica \mathbf{W}_c i računa kvadrat \mathcal{H}_2 norme mobilnosti sustava:

$$\|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \mathbf{C}\mathbf{W}_c\mathbf{C}^T. \quad (2.19)$$

Ovaj postupak računanja \mathcal{H}_2 norme omogućuje korištenje dostupnih rješavača za rješavanje optimizacijskih problema (npr. u MATLAB-u), kako bi se riješio problem \mathcal{H}_2 optimalne izolacije vibracija (2.9). U idućem potpoglavlju daju se primjeri odziva sustava izolacije vibracija pri čemu će jedan skup sustava biti optimiran prema \mathcal{H}_2 kriteriju, a drugi neće.

2.3 Primjer optimiranja sustava pasivne izolacije vibracija

U prethodnim se potpoglavljima formulirao problem pasivne izolacije vibracija i pokazao se način kako je moguće (rješavajući optimizacijski problem) odrediti potrebna prigušenja u sustavu da bi sustav bio optimalan u \mathcal{H}_2 smislu.

Ovdje se rješava problem transmisije vibracija kroz sustav prikazan slikom 2.2, pri čemu se pretpostavlja da se djeluje samo silom $f_1(t)$, a mjeri samo brzina $v_n(t)$. Drugim riječima, potrebno je naći takva prigušenja $c_{i,j}$, da bi \mathcal{H}_2 norma prijenosne mobilnosti $Y_{n,1}(s)$ bila minimalna. Razlog zašto se promatraju samo zbivanja na "rubovima" sustava (početni i krajnji stupanj slobode) jest taj, što problem zadan slikom 2.2, kao što je u uvodu poglavlja spomenuto, može modelirati transmisiju zvuka (slika 2.1), pa su od interesa zbivanja na "rubnim" panelima. Stoga će prostor stanja biti opisan nešto drugačijim matricama nego što su (u općenitom slučaju) bile zadane u prethodnom potpoglavlju. Konkretno, razlika je u matricama ulaza \mathbf{B} i izlaza \mathbf{C} koje sada postaju vektor stupac, odnosno redak (jer postoji samo jedan ulaz i izlaz), dok matrica \mathbf{A} ostaje ista (pošto se stanja nisu promijenila):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{0} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1],$$

pri čemu $\mathbf{0}$ sada predstavlja nul-vektor dimenzija $n \times 1$ u slučaju matrice \mathbf{B} , odnosno $1 \times n$ u slučaju matrice \mathbf{C} . Primjer optimiranja proveden je za slučaj sustava s 2, 4, 6, 8 i 10 stupnjeva slobode, a krutosti i mase sustava zadane su u tablici 2.1. Optimizacijski problem riješen je koristeći funkciju `fminunc()` dostupnu u MATLAB-ovoj biblioteci rješavača optimizacijskih

problema, koja koristi kvazi-Newtonovu metodu. Ovdje se naglašava da funkcija koja se minimizira nije dokazano konveksna, osim za slučaj sustava s dva stupnja slobode gibanja, za kojeg je to vrlo jednostavno pokazati rješavanjem (2.18) i pokazivanjem da je druga derivacija (2.19) po prigušenju pozitivno definitna. Iz tog razloga, za sustave s više stupnjeva slobode nije moguće garantirati da će algoritam konvergirati u globalni optimum. Ipak, u ovom slučaju i lokalni optimum predstavlja prihvatljivo rješenje, pošto prigušenja koja su vrlo mala (konvergiraju u 0) daju beskonačna pojačanja u rezonancijama sustava, pa je tako \mathcal{H}_2 norma beskonačna. S druge strane, vrlo velika prigušenja tvore "krute" veze među stupnjevima slobode, tako da se tada sustav svodi na slučaj u kojem se "gube" stupnjevi slobode i transmisija vibracija postaje bolja. Dakle, optimalna prigušenja se nalaze negdje između ovih ekstremnih slučajeva. U tablici 2.2 prikazana su početna prigušenja, a u tablici 2.3 prigušenja koja su dobivena nakon optimiranja.

Tablica 2.1 Krutosti i mase sustava pasivne izolacije vibracija

broj stupnjeva slobode (n)	krutosti k_i (N m ⁻¹)		krutosti $k_{i,j}$ (N m ⁻¹)		mase m_i (kg)	
	2	$k_1=50 \times 10^3$	$k_2=9 \times 10^3$	$k_{1,2}=20 \times 10^3$		$m_1=0,01$
4	$k_1=k_3=$ $=50 \times 10^3$	$k_2=k_4=$ $=9 \times 10^3$	$k_{1,2}=k_{3,4}=$ $=20 \times 10^3$	$k_{2,3}=$ $=15 \times 10^3$	$m_1=m_3=$ $=0,01$	$m_2=m_4=$ $=0,015$
6	$k_1=k_3=k_5=$ $=50 \times 10^3$	$k_2=k_4=k_6=$ $=9 \times 10^3$	$k_{1,2}=k_{3,4}=k_{5,6}=$ $=20 \times 10^3$	$k_{2,3}=k_{4,5}=$ 15×10^3	$m_1=m_3=$ $=m_5=$ $=0,01$	$m_2=m_4=$ $=m_6=$ $=0,015$
8	$k_1=k_3=$ $=k_5=k_7=$ $=50 \times 10^3$	$k_2=k_4=$ $=k_6=k_8=$ $=9 \times 10^3$	$k_{1,2}=k_{3,4}=$ $=k_{5,6}=k_{7,8}=$ $=20 \times 10^3$	$k_{2,3}=$ $=k_{4,5}=k_{6,7}=$ $=15 \times 10^3$	$m_1=m_3=$ $=m_5=m_7=$ $=0,01$	$m_2=m_4=$ $=m_6=m_8=$ $=0,015$
10	$k_1=k_3=k_5=$ $=k_7=k_9=$ $=50 \times 10^3$	$k_2=k_4=k_6=$ $=k_8=k_{10}=$ $=9 \times 10^3$	$k_{1,2}=k_{3,4}=$ $=k_{5,6}=$ $=k_{9,10}=k_{7,8}=$ $=20 \times 10^3$	$k_{2,3}=k_{4,5}=$ $=k_{6,7}=$ $=k_{8,9}=$ $=15 \times 10^3$	$m_1=m_3=$ $=m_5=m_7=$ $=m_9=$ $=0,01$	$m_2=m_4=$ $=m_6=m_8=$ $=m_{10}=$ $=0,015$

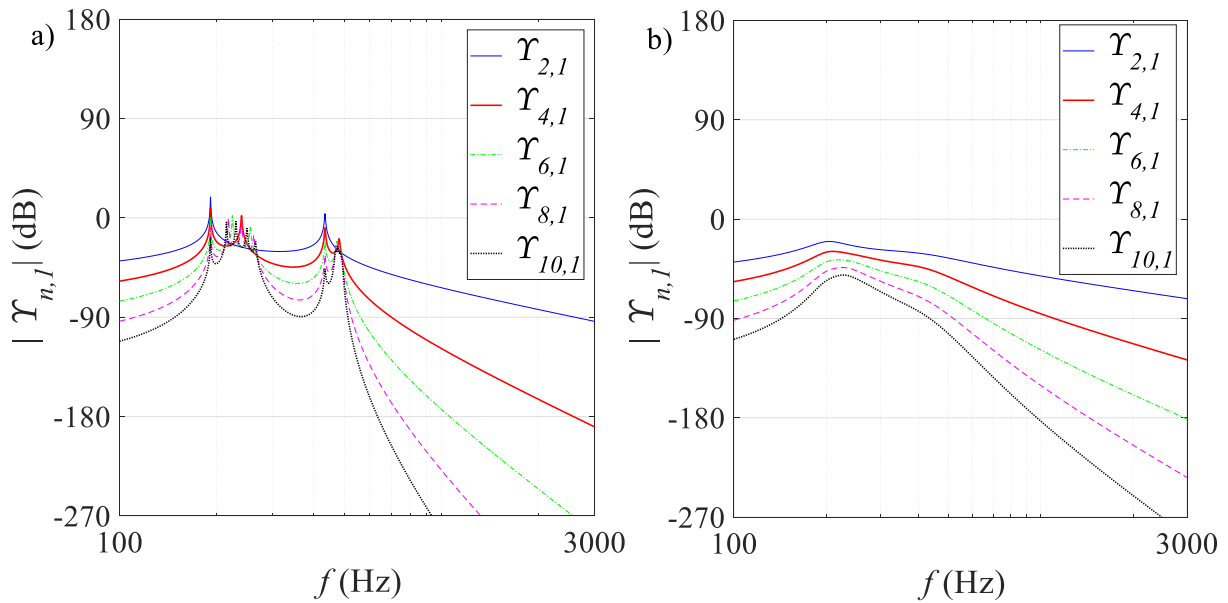
Tablica 2.2 Prigušenja lagano prigušenog sustava pasivne izolacije vibracija (bez optimiranja)

broj stupnjeva slobode (n)	prigušenja $c_{i,j}$ ($N s m^{-1}$)
2	$c_{1,2}=0,1$
4	$c_{1,2}= c_{2,3}= c_{3,4}=0,1$
6	$c_{1,2}= c_{2,3}= c_{3,4}= c_{4,5}= c_{5,6}=0,1$
8	$c_{1,2}= c_{2,3}= c_{3,4}= c_{4,5}= c_{5,6}= c_{6,7}= c_{7,8}=0,1$
10	$c_{1,2}= c_{2,3}= c_{3,4}= c_{4,5}= c_{5,6}= c_{6,7}= c_{7,8}= c_{8,9}= c_{9,10}=0,1$

Tablica 2.3 Prigušenja sustava pasivne izolacije vibracija (nakon optimiranja po \mathcal{H}_2 kriteriju)

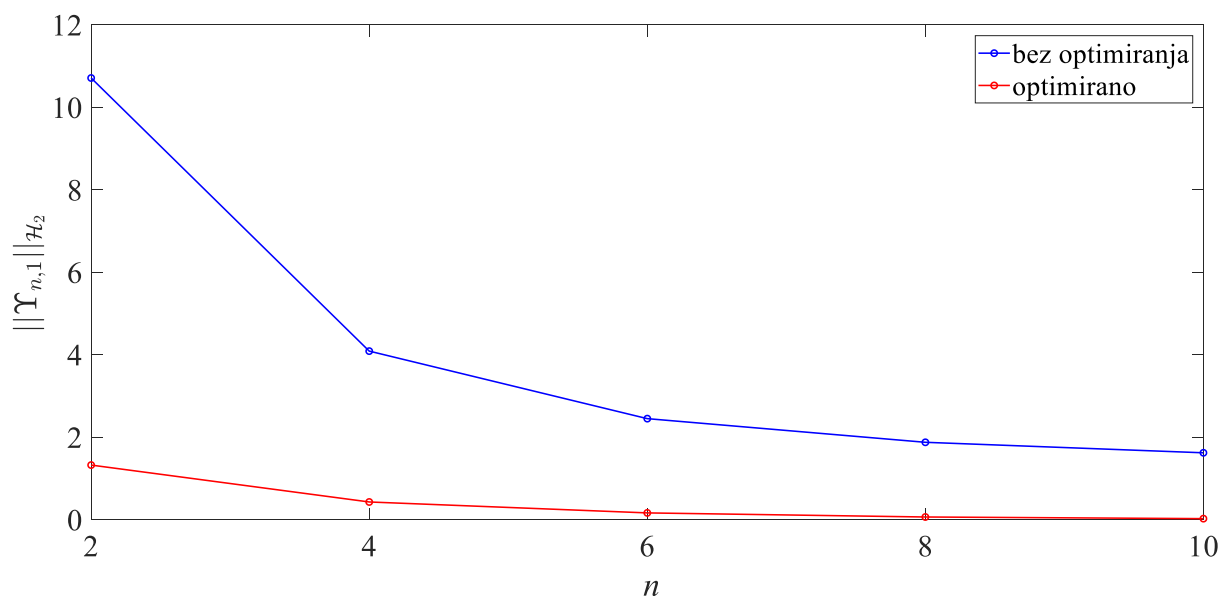
broj stupnjeva slobode (n)	prigušenja $c_{i,j}$ ($N s m^{-1}$)
2	$c_{1,2}=13,02$
4	$c_{1,2}=8,94, c_{2,3}=9,85, c_{3,4}=12,91$
6	$c_{1,2}=8,97, c_{2,3}=10,72, c_{3,4}=11,01, c_{4,5}=10,02, c_{5,6}=11,67$
8	$c_{1,2}=9,25, c_{2,3}=11,43, c_{3,4}=12,57, c_{4,5}=8,89,$ $c_{5,6}=10,97, c_{6,7}=10,8, c_{7,8}=10,38$
10	$c_{1,2}=9,34, c_{2,3}=11,94, c_{3,4}=12,85, c_{4,5}=8,86,$ $c_{5,6}=13,37, c_{6,7}=8,76, c_{7,8}=10,48, c_{8,9}=11,71, c_{9,10}=9,27$

Na slici 2.3 prikazani su amplitudni dijagrami mobilnosti $Y_{n,1}(s)$ za slučaj bez optimiranja i za slučaj nakon optimiranja. Sa dijagrama moguće je uočiti nekoliko bitnih svojstava sustava. Prije svega, čak i u slučaju kada sustav nije optimiran, amplitude sustava koji imaju veći broj stupnjeva slobode su u prosjeku manje od amplituda sustava s manjim brojem stupnjeva slobode. Stoga je moguće zaključiti da, ako se sustavu izolacije vibracija povećava broj stupnjeva slobode – transmisija vibracija će biti manja. Zatim, nakon što je sustav optimiran, moguće je uočiti znatno snižavanje amplituda u rezonancijama, ali i smanjenje nagiba asimptota pri visokim frekvencijama. To se događa pošto pri višim frekvencijama veća prigušenja ostvaruju "čvršću" vezu između stupnjeva slobode, pa je tako transmisija vibracija pri višim frekvencijama u slučaju većih prigušenja nešto bolja od slučaja s manjim prigušenjima.



Slika 2.3 Amplitudni dijagrami mobilnosti pasivnih sustava izolacije vibracija: a) sustavi bez optimiranja, b) sustavi s optimiranjem prigušenja po \mathcal{H}_2 kriteriju

Promatranjem amplitudnih dijagrama mobilnosti može se dobiti generalna ideja o tome kako broj stupnjeva slobode utječe na kvalitetu izolacije vibracija, no jasnija se informacija dobiva promatranjem \mathcal{H}_2 norme. Takva usporedba prikazana je slikom 2.4, a sada je vrlo jasno moguće uočiti koliko je optimiran sustav pasivne izolacije bolji od lagano prigušenog. Osim toga, moguće je uočiti opadanje \mathcal{H}_2 norme s dodavanjem stupnjeva slobode, pri čemu je najizraženiji prijelaz s dva na četiri (taj prijelaz izražen je u optimiranom kao i u lagano prigušenom sustavu).



Slika 2.4 \mathcal{H}_2 norma pasivnih sustava izolacije vibracija

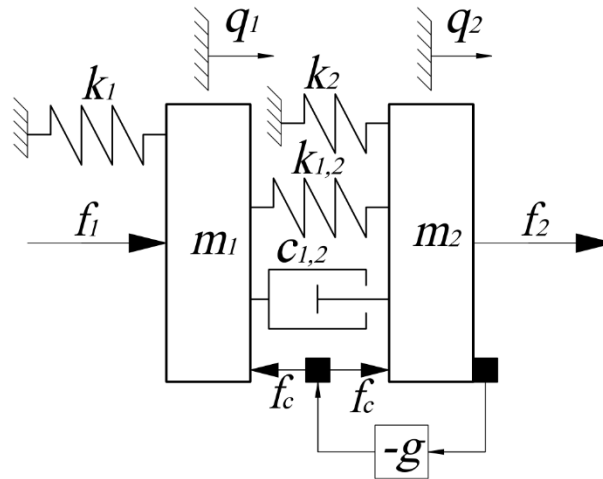
Iz ovih rezultata može se zaključiti da je jedna od opcija za smanjenje transmisije vibracija dodavanje stupnjeva slobode i prigušenja među njima. Međutim, takav pristup ima svoja ograničenja u praktičnoj primjeni, pošto u pravilu nije moguće dodavati proizvoljno velik broj stupnjeva slobode i dodavati prigušenja proizvoljnih iznosa. Ipak, razmatranja iz ovog potpoglavlja daju kvalitativnu ideju da će prijelaz s dva na četiri stupnjeva slobode imati veći utjecaj na smanjenje transmisije vibracija od prijelaza s npr. osam na deset. Stoga, čak i kada bi se mogao proizvoljno povećavati broj stupnjeva slobode, ovime se pokazuje da bi kvaliteta izolacije vibracija "stagnirala" s povećanjem broja stupnjeva slobode.

Nakon ovih razmatranja, uvodi se ideja korištenja aktivnih elemenata u sustavu izolacije vibracija, s ciljem ostvarivanja veće učinkovitosti u suzbijanju vibracija.

2.4 Problem aktivne izolacije vibracija s nekolociranim mjernim i pogonskim članovima

Sada se razmatra problem izolacije vibracija u kojem se uvode aktivni elementi, tj. u kojem je uključena povratna veza. Konkretno, prikazat će se utjecaj povratne veze po brzini vibracija za slučaj sustava s dva stupnja slobode gibanja, kao što je prikazano na slici 2.5.

Senzor brzine koji je montiran na masu m_2 mjeri njenu apsolutnu brzinu, a pogonski član među masama razvija silu f_c koja je proporcionalna mjerenoj brzini s konstantom proporcionalnosti g . Pretpostavlja se da su senzor brzine, kao i pogonski član "idealni", tj. da nemaju vlastitu dinamiku. Pošto su pogonski članovi u pravilu elektrodinamički sustavi sastavljeni od zavojnice i permanentnog magneta, prilikom relativnog gibanja tih komponenti dolazi do istiskivanja zraka iz uskih otvora oblika kružnog vijenca koji omogućuju to gibanje. Taj efekt istiskivanja zraka uvodi dodatno prigušenje u sustav, koje se modelira viskoznom prigušivačem $c_{1,2}$. U nastavku teksta će se ovakav model pasivnog prigušenja uvoditi na svim mjestima gdje će se primjenjivati elektrodinamički pogonski članovi. Još jednom se napominje da je, kao što je u uvodu spomenuto, ovakva konfiguracija senzora i pogonskog člana nekolocirana (slika 1.3 c)).



Slika 2.5 Aktivna izolacija vibracija sustava s dva stupnja slobode gibanja

Jednadžbe gibanja ovog sustava analogne su (2.1a), pri čemu su matrice mase, krutosti i prigušenja zadane kao u nastavku:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_{1,2} & -k_{1,2} \\ -k_{1,2} & k_{1,2} + k_2 \end{bmatrix}, \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} c_{1,2} & -c_{1,2} - g \\ -c_{1,2} & c_{1,2} + g \end{bmatrix}. \quad (2.20c)$$

Posebno je važna matrica prigušenja aktivnog sustava zadana s (2.20c), pošto se u njoj, osim pasivnog prigušenja, nalazi pojačanje povratne veze g , koje se može interpretirati kao vrsta aktivnog prigušenja (mjerne su im jedinice jednake). Ukoliko je $g = 0$, tada povratne veze nema i sustav je pasivan (reducira se na problem iz prethodnih potpoglavlja), no u slučaju da je $g \neq 0$, a sustav aktivan, matrica \mathbf{D}_a nije simetrična. Kako je matrica mobilnosti aktivnog sustava definirana pomoću \mathbf{M} , \mathbf{K} i \mathbf{D}_a jednadžbom (2.21), to znači da u slučaju aktivnog sustava ta matrica neće biti simetrična, tj. $Q_{1,2}(s) \neq Q_{2,1}(s)$ za $g \neq 0$:

$$\mathbf{Q} = s(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{D}_a + \mathbf{K})^{-1}. \quad (2.21)$$

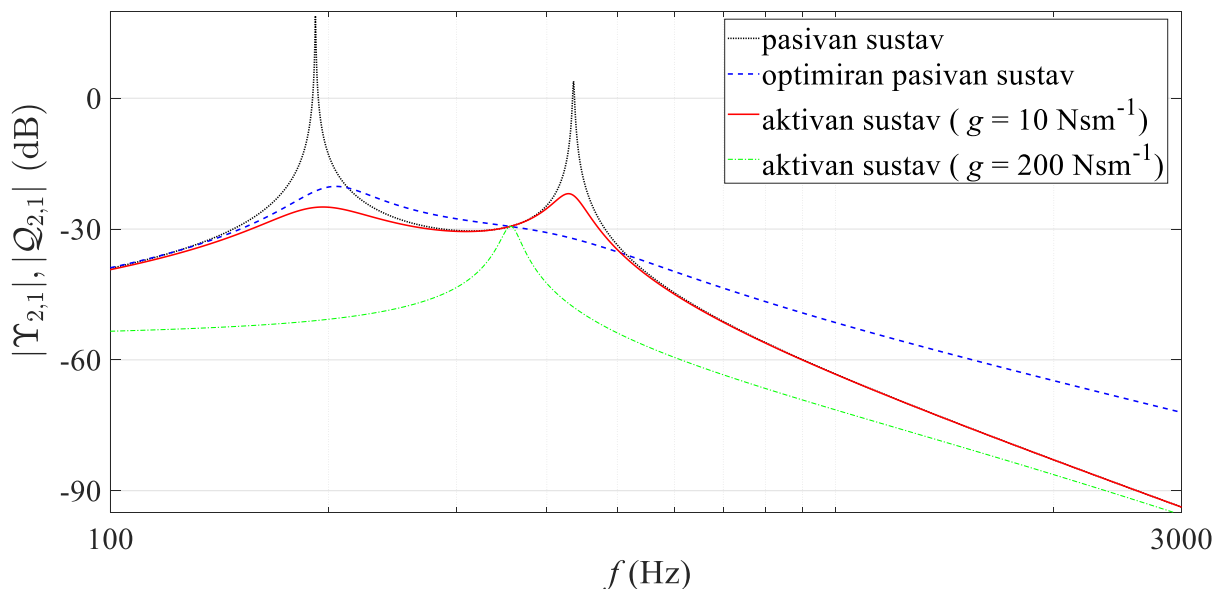
No to znači da ovakav sustav nije recipročan, tj. da će odziv sustava biti drugačiji ovisno o tome koja sila (f_1 ili f_2) djeluje na sustav i brzina kojeg se stupnja slobode mjeri (v_2 ili v_1). Ovo je svojstvo na sličnom primjeru bilo razmatrano u [9].

Kako mjerni i pogonski član regulacijske petlje nisu kolocirani, potrebno je analizirati svojstva stabilnosti takvog sustava. Ta je analiza za ovakav sustav provedena u [12] i [17] te se neće

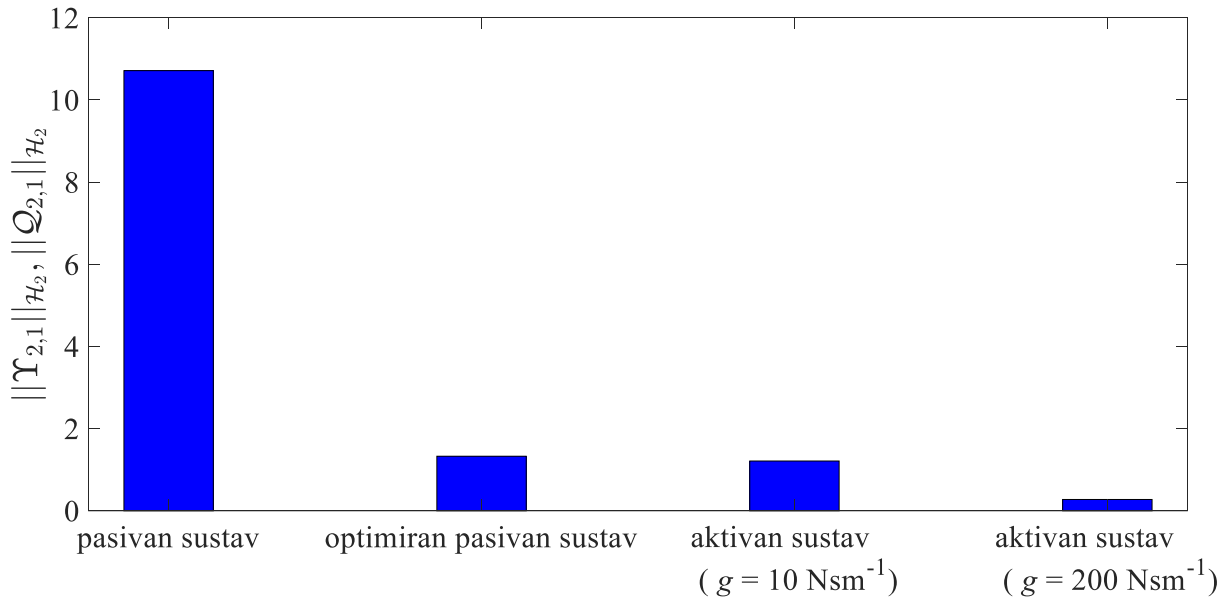
ovdje ponovno provoditi, već se samo daje konačan rezultat koji kaže da će sustav aktivne izolacije vibracija biti bezuvjetno stabilan ako je zadovoljena nejednakost (2.22):

$$\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} < \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}. \quad (2.22)$$

Drugim riječima, aktivan sustav zadan slikom 2.5 biti će stabilan za sve $g > 0$, ako je vlastita frekvencija drugog stupnja slobode manja od vlastite frekvencije prvog stupnja slobode kada je sustav raspregnut ($k_{1,2} = 0$). Izravnim uvrštavanjem vrijednosti u (2.22), može se provjeriti da parametri sustava s dva stupnja slobode gibanja zadanog tablicom 2.1 zadovoljavaju ovu nejednakost, pa ga uvođenje povratne veze ne može destabilizirati. Slika 2.6 prikazuje mobilnosti $Y_{2,1}$ za slučaj lagano prigušenog i optimalno prigušenog sustava te mobilnosti aktivnih sustava $Q_{2,1}$, pri čemu je pojačanje povratne veze od $g = 10 \text{ N s m}^{-1}$ izabrano tako da je \mathcal{H}_2 norma približno jednaka slučaju optimiranog pasivnog sustava, a pojačanje $g = 200 \text{ N s m}^{-1}$ izabrano je kako bi se usporedio odziv za slučaj kada je aktivno prigušenje u sustavu izuzetno veliko, a \mathcal{H}_2 norma mala.



Slika 2.6 Usporedba mobilnosti lagano prigušenog pasivnog, optimalnog pasivnog i aktivnih sustava za izolaciju vibracija uz pojačanja povratne veze $g = 10 \text{ N s m}^{-1}$ i $g = 200 \text{ N s m}^{-1}$

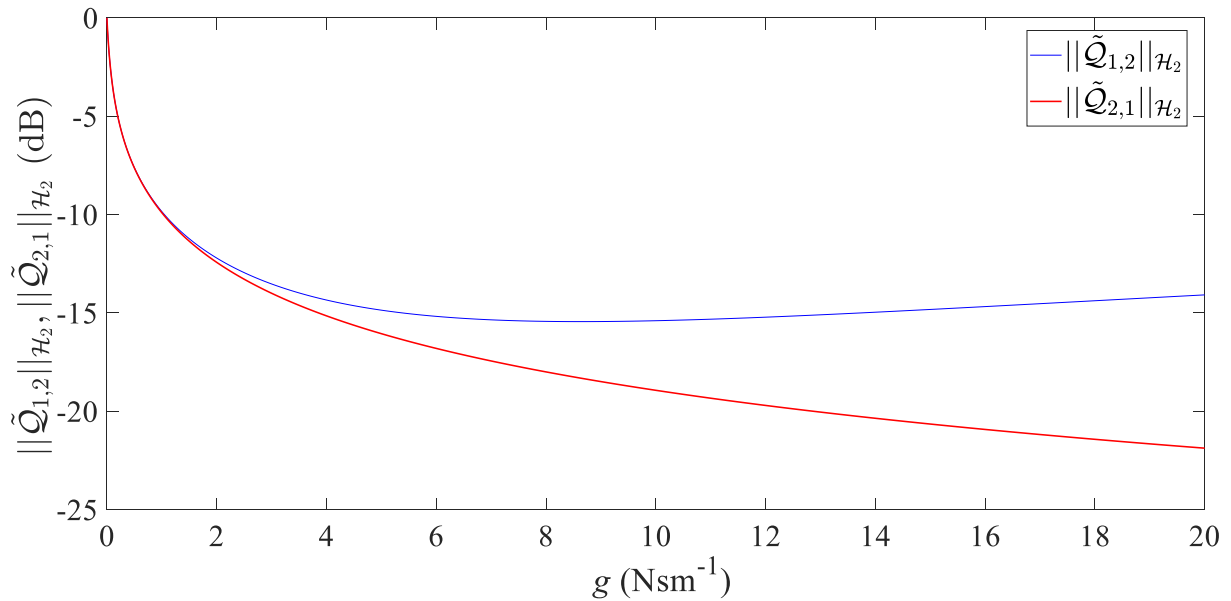


Slika 2.7 \mathcal{H}_2 norme lagano prigušenog pasivnog, optimalnog pasivnog i aktivnih sustava izolacije vibracija uz pojačanja povratne veze $g = 10 \text{ N s m}^{-1}$ i $g = 200 \text{ N s m}^{-1}$

Uočava se da amplitude mobilnosti aktivnih sustava ni na kojoj frekvenciji ne prelaze mobilnost slabo prigušenog pasivnog sustava, dok optimalan pasivan sustav pri frekvencijama višim od druge vlastite frekvencije ima veću amplitudu. Time se ilustrira smisao uvođenja aktivnih elemenata u svrhu izolacije vibracija: iako su \mathcal{H}_2 norma optimalnog pasivnog i aktivnog sustava približno jednake za slučaj kada je pojačanje povratne veze $g = 10 \text{ N s m}^{-1}$ (slika 2.7), aktivan sustav ni na kojoj frekvenciji nije "lošiji" u smislu izolacije od slabo prigušenog pasivnog sustava. S druge strane, kako je ovaj sustav bezuvjetno stabilan, moguće je implementirati vrlo velika pojačanja u povratnoj vezi, čime se dobiva izuzetno dobra izolacija vibracija pri svim frekvencijama (slika 2.6).

Osim ovog svojstva aktivnog sustava izolacije vibracija, povoljno je promotriti na koji način uvođenje povratne veze utječe na \mathcal{H}_2 normu mobilnosti $Q_{1,2}$, pošto je ranije spomenuto da aktivan sustav ne posjeduje svojstvo recipročnosti. To se može učiniti usporednim prikazom \mathcal{H}_2 normi prijenosnih mobilnosti $Q_{1,2}$ i $Q_{2,1}$ kao funkcije g , koje su normirane \mathcal{H}_2 normom istih prijenosnih mobilnosti za slučaj kada povratne veze nema (tada je $g = 0$, a $Q_{1,2} = Q_{2,1}$):

$$\|\tilde{Q}_{1,2}\|_{\mathcal{H}_2} = \frac{\|Q_{1,2}\|_{\mathcal{H}_2}}{\|Q_{1,2}(g=0)\|_{\mathcal{H}_2}}, \quad \|\tilde{Q}_{2,1}\|_{\mathcal{H}_2} = \frac{\|Q_{2,1}\|_{\mathcal{H}_2}}{\|Q_{2,1}(g=0)\|_{\mathcal{H}_2}}.$$



Slika 2.8 \mathcal{H}_2 norme aktivnog sustava izolacije vibracija kao funkcija pojačanja povratne veze g .

Iz dijagrama je odmah moguće zaključiti kako sustav ne provodi vibracije jednako u oba smjera, pošto \mathcal{H}_2 norme prijenosnih mobilnosti $Q_{1,2}$ i $Q_{2,1}$ za velika pojačanja povratne veze postaju znatno drugačija. Konkretno, ako je pobuda na prvom stupnju slobode, a odziv se mjeri na drugom, tada će transmisija biti izuzetno mala za velika pojačanja povratne veze (kako g teži u ∞ , $\|Q_{2,1}\|_{\mathcal{H}_2}$ teži u 0). S druge strane, ako se razmatra obratni smjer transmisije vibracija, tada s povećanjem g $\|Q_{1,2}\|_{\mathcal{H}_2}$ u početku pada, no za veće vrijednosti g , $\|Q_{1,2}\|_{\mathcal{H}_2}$ počinje rasti. Na taj način se zaključuje da je gubitak recipročnosti sustava moguće kvantificirati \mathcal{H}_2 normom prijenosnih mobilnosti kako ovise o pojačanju povratne veze g .

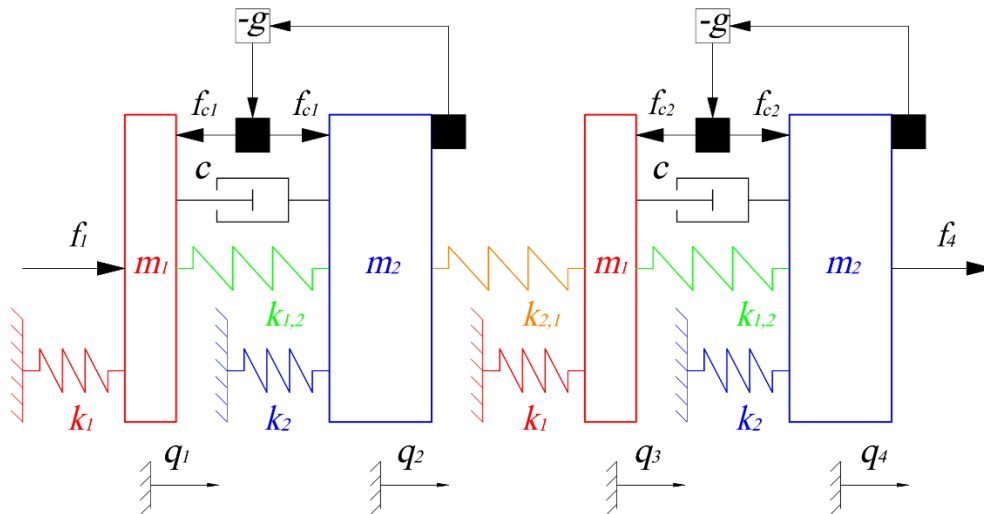
Razmatranja ovog poglavlja daju podlogu za izradu koncepta aktivnog sustava koji neće podlijegati principu recipročnosti, kako bi se ostvarilo znatno suzbijanje vibracija samo u jednom smjeru. U tome će poslužiti zaključak iz prethodnog potpoglavlja, da dodavanje stupnjeva slobode u sustavu poboljšava izolaciju vibracija te koncept nekolociranih mjernih i pogonskih članova iz ovog potpoglavlja koji omogućuje narušavanje principa recipročnosti.

3 Koncept ćelije aktivnog metamaterijala

Ovo poglavlje predstavlja koncept ćelije aktivnog metamaterijala koja ne podliježe principu recipročnosti. Prvo se izvodi matematički model sustava s koncentriranim parametrima koji opisuje njegovu dinamiku. Zatim se analizira stabilnost takvog sustava, a na kraju se razmatra njegova učinkovitost u suzbijanju vibracija u jednom smjeru.

3.1 Matematički model ćelije aktivnog metamaterijala

Slika 3.1 prikazuje koncept ćelije aktivnog metamaterijala. Ćelija je bazirana na razmatranom primjeru aktivnog sustava izolacije vibracija iz prethodnog poglavlja, pri čemu se on sada proširuje tako da se dodaje još jedan identičan sustav aktivne izolacije vibracija, koji povezan s prethodnim oprugom $k_{2,1}$. Uvođenjem dodatnih stupnjeva slobode očekuje se dodatna pasivna izolacija vibracija, a korištenjem decentraliziranih povratnih veza s jednakim pojačanjem mogla bi biti omogućena manja pojačanja, a s time i manja opterećenja na pogonske članove, uz jednak učinak izolacije vibracija i gubitak recipročnosti. Kao i u prethodnom poglavlju, pretpostavka je da su mjerni i pogonski članovi idealni, tj. da nemaju vlastitu dinamiku.



Slika 3.1 Model ćelije aktivnog metamaterijala

Kako se radi o posebnom slučaju već razmatranog vibracijskog sustava iz prethodnog poglavlja, jednadžbe gibanja jednake su (2.1a), pri čemu su matrice mase \mathbf{M} , krutosti \mathbf{K} i aktivnog prigušenja \mathbf{D}_a zadane u nastavku:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_{1,2} & -k_{1,2} & 0 & 0 \\ -k_{1,2} & k_{1,2} + k_2 + k_{2,1} & -k_{2,1} & 0 \\ 0 & -k_{2,1} & k_1 + k_{1,2} + k_{2,1} & -k_{1,2} \\ 0 & 0 & -k_{1,2} & k_{1,2} + k_2 \end{bmatrix}, \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{D}_a = \begin{bmatrix} c & -c - g & 0 & 0 \\ -c & c + g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -c - g \\ 0 & 0 & -c & c + g \end{bmatrix}. \quad (3.1c)$$

Ponovno je moguće uočiti (razmatranjem (3.1c)) da matrica mobilnosti aktivnog sustava neće biti simetrična, pa tako odziv aktivnog sustava neće biti recipročan ($Q_{1,4} \neq Q_{4,1}$).

Kako ovaj sustav posjeduje dvije decentralizirane povratne veze po brzini koje su k tome u nekolociranoj konfiguraciji, potrebno je provesti detaljnu analizu stabilnosti kako bi se saznalo postoje li uvjeti na parametrima pasivnog sustava koji bi mogli omogućiti da takav sustav bude stabilan za sva pojačanja povratne veze. Drugim riječima, za ovaj je sustav potrebno naći (ako je to moguće) uvjete koji su analogni (2.22), što će se učiniti u idućem potpoglavlju.

3.2 Analiza stabilnosti matematičkog modela ćelije aktivnog metamaterijala

U ovom se potpoglavlju provodi analiza stabilnosti koncepta aktivnog sustava uvedenog u prethodnom potpoglavlju. Taj će se postupak provesti koristeći Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti. Ovaj kriterij omogućuje određivanje svojstva stabilnosti aktivnog sustava bez računanja korijena polinoma visokog stupnja, razmatrajući njegove koeficijente. Elementi matrice mobilnosti (2.21) aktivnog sustava zadanog matricama (3.1a), (3.1b), i (3.1c) racionalne su funkcije oblika (3.2)

$$Q_{i,j}(s) = \frac{N_{i,j}(s)}{D(s)}, \quad (3.2)$$

pri čemu $N_{i,j}(s)$ označava brojnik, $D(s)$ nazivnik, a obje su funkcije polinomi u s . Iz (3.2) slijedi da sve prijenosne funkcije u matrici mobilnosti imaju jednak nazivnik – razlikuju se samo po brojnici. Stabilnost prijenosnih funkcija oblika (3.2) uvjetovana je upravo svojstvima korijena, tj. nultočki nazivnika. Točnije, prijenosna je funkcija oblika (3.2) stabilna, ako su realni dijelovi svih korijena $D(s)$ negativni. Kako je ovaj sustav osmog reda (svaki

stupanj slobode je sustav drugog reda, a ukupno ih je četiri), što znači da je stupanj polinoma $D(s)$ osam, korijene mu u općenitom slučaju nije moguće naći analitički, zbog čega je Routh-Hurwitzov kriterij izuzetno koristan.

U ovom trenutku povoljno je uvesti bezdimenzijske parametre, kako bi se analiza stabilnosti generalizirala na sve sustave ovakve zadane strukture. Konkretno, uvode se ovi bezdimenzijski parametri:

$$\text{bezdimenzijska Laplaceova varijabla: } \tilde{s} = \frac{s}{\Omega_1},$$

omjeri kružnih frekvencija:

$$\alpha = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2,$$

$$\beta = \left(\frac{\Omega_3}{\Omega_1}\right)^2,$$

$$\gamma = \left(\frac{\Omega_4}{\Omega_1}\right)^2,$$

$$\text{bezdimenzijsko prigušenje: } \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k_1 m_1}},$$

$$\text{omjer masa: } \mu = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\text{bezdimenzijsko pojačanje povratne veze: } \eta = \frac{g}{c},$$

pri čemu su $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ i Ω_4 izvedene kružne frekvencije definirane kao:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}},$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_{1,2}}{m_2}},$$

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}},$$

$$\Omega_4 = \sqrt{\frac{k_{2,1}}{m_2}}.$$

Iako je rečeno kako je nazivnik polinom osmog stupnja, struktura mu dozvoljava da ga se jednostavno može faktorizirati na dva polinoma četvrtog stupnja:

$$D(\tilde{s}) = \sqrt{k_1 m_1} P_1^{(4)}(\tilde{s}) P_2^{(4)}(\tilde{s}), \quad (3.3)$$

pri čemu su polinomi $P_1^{(4)}(\tilde{s})$ i $P_2^{(4)}(\tilde{s})$ zadani kao u nastavku:

$$P_1^{(4)}(\tilde{s}) = \mu\tilde{s}^4 + 2\zeta(1 + \eta + \mu)\tilde{s}^3 + \mu(1 + \alpha + \beta + \mu\alpha)\tilde{s}^2 + 2\zeta(1 + \beta\mu + \eta)\tilde{s} + \mu(\mu\beta\alpha + \beta + \alpha), \quad (3.4a)$$

$$P_2^{(4)}(\tilde{s}) = \mu\tilde{s}^4 + 2\zeta(\mu + 1 + \eta)\tilde{s}^3 + \mu(1 + \alpha + \beta + \gamma + \mu\alpha + \mu\gamma)\tilde{s}^2 + 2\zeta(1 + \eta + \mu\beta + 2\mu\gamma + \mu\gamma\eta)\tilde{s} + \mu^2[\alpha\beta + \gamma(2\alpha + \beta)] + \mu(\alpha + \beta + \gamma). \quad (3.4b)$$

Kriterij stabilnosti sada se svodi na zahtjev da korijeni oba polinoma četvrtog stupnja istovremeno moraju imati negativne realne dijelove, što je znatno jednostavnije provjeriti od jednakog kriterija na polinomu osmog stupnja. Nužan kriterij stabilnosti kaže da će polinom imati negativne realne dijelove korijena ako su mu svi koeficijenti jednakog predznaka. To je vrlo jednostavno pokazati za (3.4a) i (3.4b), pošto su svi bezdimenzijski parametri pozitivni po definiciji. Iako nužan, taj kriterij nije dovoljan da bi se dokazala stabilnost, pa se stoga razmatraju Hurwitzove determinante oba polinoma kao u nastavku ($\Delta_{i,j}$ označava i -tu Hurwitzovu determinantu j -tog polinoma):

$$\Delta_{1,1} = 2\zeta(\eta + \mu\beta + 1), \quad (3.5a)$$

$$\Delta_{2,1} = 2\mu\zeta\{1 + \eta + \mu[\alpha\eta(1 - \beta) + \beta^2]\}, \quad (3.5b)$$

$$\Delta_{3,1} = 4\zeta^2\mu^2(1 - \beta)\{\alpha\eta^2 + 1 - \beta + \eta[1 - \beta + \alpha(1 + \mu)]\}, \quad (3.5c)$$

$$\Delta_{4,1} = 4\zeta^2\mu^3(1 - \beta)\{\alpha\eta^2 + 1 - \beta + \eta[1 - \beta + \alpha(1 + \mu)]\}, \quad (3.5d)$$

$$\Delta_{1,2} = 2\zeta\{1 + \eta + \mu[\beta + \gamma(2 + \eta)]\}, \quad (3.6a)$$

$$\Delta_{2,2} = 2\mu\zeta \left\{ 1 + \eta + \mu[\alpha\eta(1 - \beta) + \beta^2 + \gamma^2(2 + \eta) + \gamma(2 + 2\beta + 2\eta)] + \gamma^2\mu^2(2 + \eta) + \mu\gamma\alpha\eta(\mu - 1) \right\}, \quad (3.6b)$$

$$\Delta_{3,2} = 4\mu^2\zeta^2 \left\{ \begin{array}{l} \eta^2[\gamma^2 + \alpha\gamma(\mu - 1) + \alpha(1 - \beta)] + \\ + \eta \left[\gamma^2(3 + \mu^2) + \gamma(\mu - 1)(\mu\alpha + 2(1 - \beta) + \alpha) + \right. \\ \left. + (1 - \beta)(1 - \beta + \alpha + \mu\alpha) \right] + \\ \left. + \gamma^2(2 + 2\mu^2) + 2\gamma(1 - \beta)(\mu - 1) + (\beta - 1)^2 \right\}, \quad (3.6c) \end{array} \right.$$

$$\Delta_{4,2} = 4\mu^3\zeta^2 \left\{ \begin{array}{l} \eta^2[\gamma^2 + \alpha\gamma(\mu - 1) + \alpha(1 - \beta)] + \\ + \eta \left[\begin{array}{l} \gamma^2(3 + \mu^2) + \gamma(\mu - 1)(\mu\alpha + 2(1 - \beta) + \alpha) + \\ + (1 - \beta)(1 - \beta + \alpha + \mu\alpha) \end{array} \right] + \\ \gamma^2(2 + 2\mu^2) + 2\gamma(1 - \beta)(\mu - 1) + (\beta - 1)^2 \end{array} \right\}. \quad (3.6d)$$

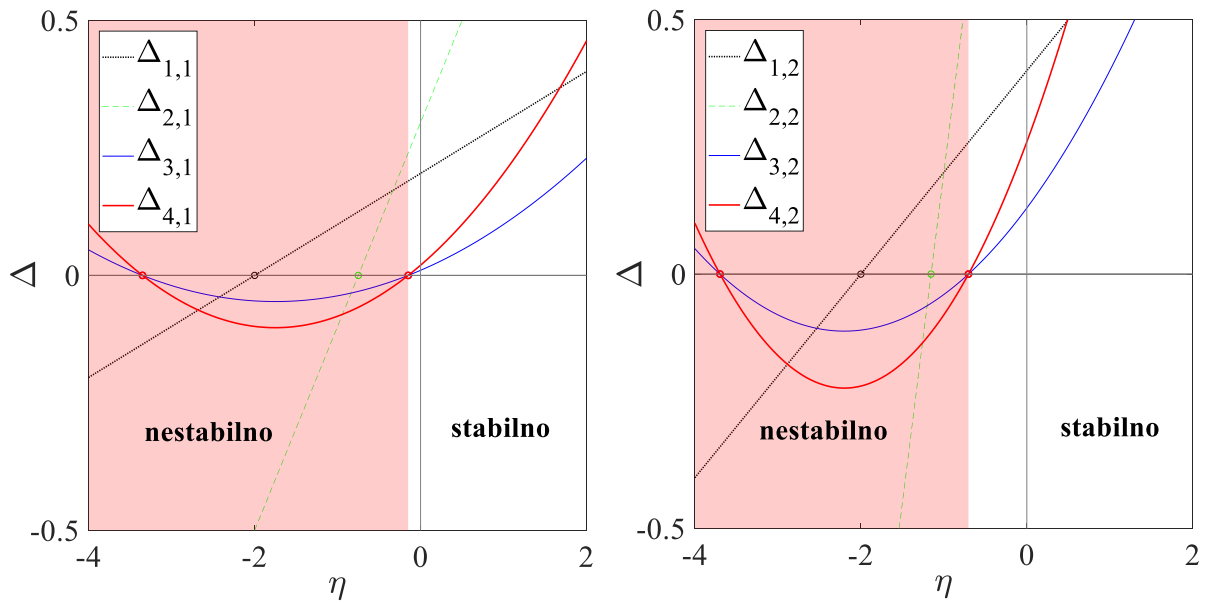
Kako bi se moglo tvrditi da je sustav u zatvorenoj petlji bezuvjetno stabilan, potrebno je zadovoljiti pozitivnost svake od ovih determinanti za sve nenegativne vrijednosti bezdimenzijskih pojačanja povratne veze η . Razmatranjem svakog člana kod kojeg se pojavljuje operacija oduzimanja, dolazi se do zaključka da, ako su zadovoljene nejednakosti (3.7) i (3.8), sustav je stabilan za sva pojačanja $\eta \geq 0$:

$$\beta < 1 \rightarrow \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} < \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad (3.7)$$

$$\mu > 1 \rightarrow m_2 > m_1. \quad (3.8)$$

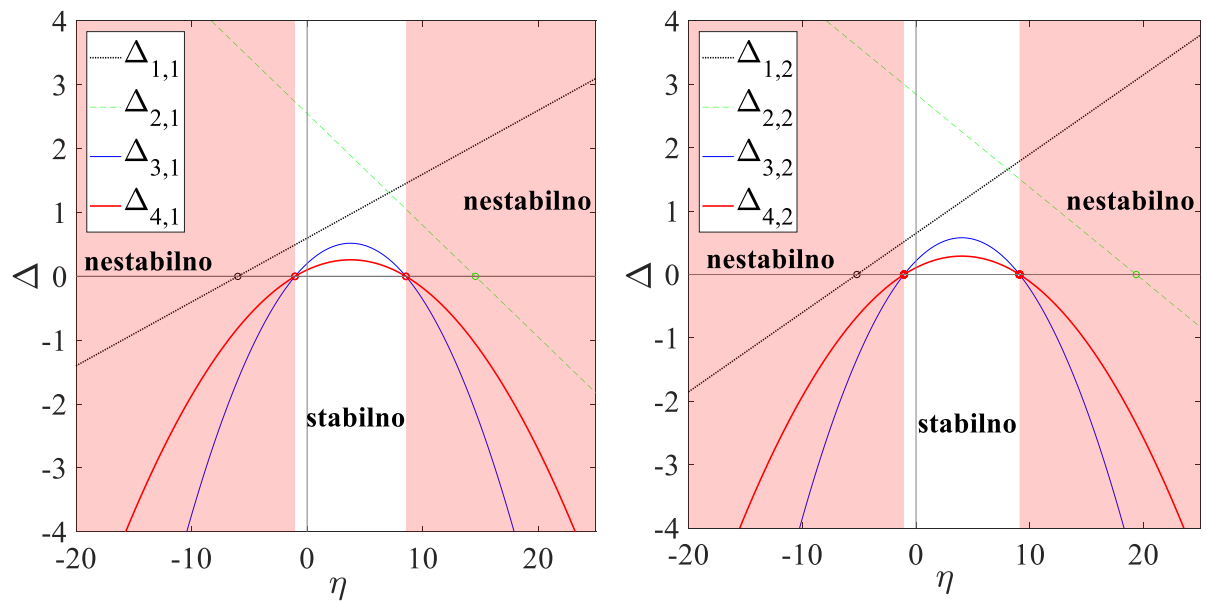
Uvjet (3.8) može se interpretirati kao zahtjev da mase m_2 (označene plavom bojom na slici 3.1) budu veće od masa m_1 (označene crvenom bojom na slici 3.1). S druge strane, uvjet (3.7) je analogan uvjetu (2.22) za sustav izolacije vibracija s dva stupnja slobode, pošto traži da vlastite frekvencije stupnjeva slobode s masom m_1 budu više od vlastitih frekvencija stupnjeva slobode s masom m_2 kada je sustav raspregnut ($k_{1,2} = k_{2,1} = 0$).

Utjecaj zadovoljenosti (3.7) i (3.8) moguće je vizualizirati prikazom Hurwitzovih determinanti (3.5) i (3.6) kao funkcija bezdimenzijskog pojačanja η kao u nastavku. Slika 3.2 prikazuje slučaj u kojem su (3.7) i (3.8) zadovoljeni, a sustav je bezuvjetno stabilan, tj. sve su Hurwitzove determinante pozitivne u slučaju da je $\eta > 0$. Ukoliko uvjeti (3.7) i (3.8) nisu zadovoljeni, tada će Hurwitzove determinante poprimiti oblik kao na slici 3.3, gdje je jasno vidljivo da postoji određen konačan interval pozitivnih vrijednosti η za koje je sustav stabilan, a izvan njega sustav postaje nestabilan.



Slika 3.2 Hurwitzove determinante za slučaj bezuvjetno stabilnog aktivnog sustava s parametrima:

$$\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}, \mu = 2, \zeta = \frac{1}{20}$$



Slika 3.3 Hurwitzove determinante za slučaj uvjetno stabilnog aktivnog sustava s parametrima:

$$\alpha = 1, \beta = 10, \gamma = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}, \zeta = \frac{1}{20}$$

Na samom kraju ove analize, daju se i oblici prijenosnih mobilnosti $Q_{1,4}$ i $Q_{4,1}$ aktivnog sustava koje su izražene pomoću bezdimenzijskih parametara, kako bi se još jednom pokazalo da aktivan sustav ovakvog tipa ne podliježe principu recipročnosti:

$$Q_{1,4}(\tilde{s}) = \frac{\mu\gamma\tilde{s}(2\zeta(\eta+1)\tilde{s} + \mu\alpha)^2}{D(\tilde{s})}, \quad (3.9a)$$

$$Q_{4,1}(\tilde{s}) = \frac{\mu\gamma\tilde{s}(2\zeta\tilde{s} + \mu\alpha)^2}{D(\tilde{s})}, \quad (3.9b)$$

pri čemu je nazivnik $D(\tilde{s})$ zadan s (3.3). Jasno je da (3.9a) i (3.9b) nisu jednake, pa tako ni transmisija vibracija u ta dva smjera nije jednaka. Posebno, ako je pojačanje povratne veze $\eta = 0$, što odgovara slučaju pasivnog sustava, ove prijenosne mobilnosti postaju jednake, a sustav ponovno ima recipročan odziv.

Nakon što se pokazalo da je moguće odrediti parametre pasivnog sustava za koje je sustav sa zatvorenim povratnim vezama bezuvjetno stabilan, u idućem se potpoglavlju promatra učinkovitost ovakvog sustava u suzbijanju vibracija u jednom smjeru.

3.3 Učinkovitost ćelije aktivnog metamaterijala u smanjenju transmisije vibracija

Kako bi se usporedila učinkovitost koncepta ćelije aktivnog metamaterijala sa sustavom aktivne izolacije vibracija sa dva stupnja slobode gibanja predstavljenog u potpoglavlju 2.4, razmatraju se \mathcal{H}_2 norme njihovih karakterističnih prijenosnih mobilnosti. Točnije, uspoređuju se \mathcal{H}_2 norme "rubnih" prijenosnih mobilnosti oba sustava: $Q_{1,2}$ i $Q_{2,1}$ za slučaj sustava izolacije vibracija s dva stupnja slobode, odnosno $Q_{1,4}$ i $Q_{4,1}$ za slučaj ćelije aktivnog metamaterijala. Usporedba se vrši na primjerima sustava s parametrima zadanim u tablici 3.1, a moguće je provjeriti da su parametri izabrani tako da vrijede nejednakosti (2.22) za slučaj sustava s dva stupnja slobode gibanja, odnosno (3.7) i (3.8) za slučaj ćelije aktivnog metamaterijala.

Tablica 3.1 Parametri sustava aktivne izolacije vibracija i ćelije aktivnog metamaterijala

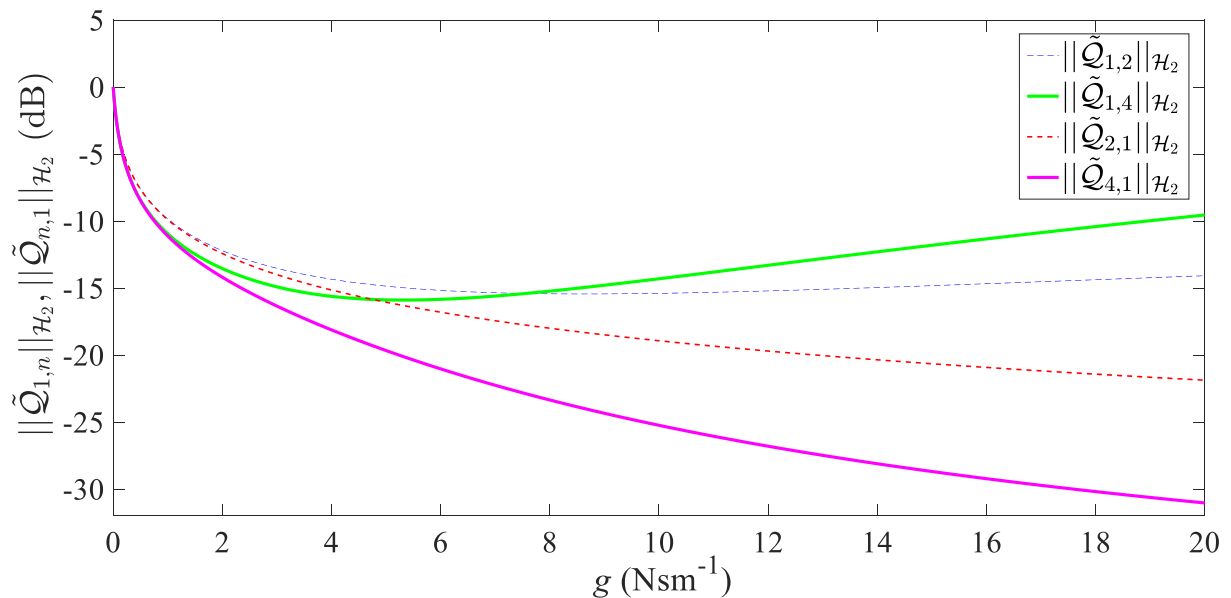
	sustav izolacije vibracija s dva stupnja slobode gibanja	ćelija aktivnog metamaterijala
m_1 (kg)	0,01	0,005
m_2 (kg)	0,015	0,0075
k_1 (N m ⁻¹)	50000	50000
k_2 (N m ⁻¹)	9000	9000
$k_{1,2}$ (N m ⁻¹)	20000	20000
$k_{2,1}$ (N m ⁻¹)	/	15000
$c = c_{1,2}$ (N s m ⁻¹)	0.1	0.1

Također je važno uočiti da su mase m_1 i m_2 za slučaj ćelije aktivnog metamaterijala izabrane tako da je ukupna masa ćelije jednaka masi sustava aktivne izolacije vibracija s dva stupnja slobode gibanja. To je učinjeno pošto je jedna od temeljnih ideja izrade metamaterijala zadržavanje ukupne mase sustava konstantnom, pri čemu se mijenja samo njena distribucija u prostoru.

Uz ovakve parametre sustava, slika 3.4 prikazuje \mathcal{H}_2 norme karakterističnih prijenosnih mobilnosti ćelije aktivnog metamaterijala i sustava aktivne izolacije vibracija s dva stupnja slobode gibanja. Kao što je to učinjeno u potpoglavlju 2.4, i ovdje su \mathcal{H}_2 norme karakterističnih prijenosnih mobilnosti normirane s pripadnim \mathcal{H}_2 normama istih prijenosnih mobilnosti za slučaj da su sustavi pasivni, tj. da je pojačanje povratne veze 0:

$$\begin{aligned} \|\tilde{Q}_{1,2}\|_{\mathcal{H}_2} &= \frac{\|Q_{1,2}\|_{\mathcal{H}_2}}{\|Q_{1,2}(g=0)\|_{\mathcal{H}_2}}, & \|\tilde{Q}_{2,1}\|_{\mathcal{H}_2} &= \frac{\|Q_{2,1}\|_{\mathcal{H}_2}}{\|Q_{2,1}(g=0)\|_{\mathcal{H}_2}}, \\ \|\tilde{Q}_{1,4}\|_{\mathcal{H}_2} &= \frac{\|Q_{1,4}\|_{\mathcal{H}_2}}{\|Q_{1,4}(g=0)\|_{\mathcal{H}_2}}, & \|\tilde{Q}_{4,1}\|_{\mathcal{H}_2} &= \frac{\|Q_{4,1}\|_{\mathcal{H}_2}}{\|Q_{4,1}(g=0)\|_{\mathcal{H}_2}}. \end{aligned}$$

Kako su parametri sustava aktivne izolacije vibracija s dva stupnja slobode gibanja jednaki onim iz poglavlja 2.4, na slici 3.4 isprekidane linije prikazuju jednake funkcije kao na slici 2.8.



Slika 3.4 Usporedba \mathcal{H}_2 normi karakterističnih prijenosnih mobilnosti sustava aktivne izolacije vibracija s dva stupnja slobode (isprekidane linije) i ćelije aktivnog metamaterijala (pune linije)

Ovim dijagramom dobiva se jasan uvid u smisao uvođenja dodatnih stupnjeva slobode, kako bi se izradio aktivni metamaterijal. Uspoređujući punu ljubičastu i isprekidanu crvenu liniju

moгуće je uočiti značajno smanjenje transmisije vibracija u jednom smjeru za slučaj ćelije metamaterijala u odnosu na sustav s dva stupnja slobode gibanja. Također, razlika između pune ljubičaste i pune zelene linije znatno je veća od razlike između isprekidanih linija. To zapravo ukazuje na značajan gubitak recipročnosti u odzivima sustava ćelije aktivnog metamaterijala u odnosu na sustav aktivne izolacije vibracija s dva stupnja slobode gibanja.

Teorijska razmatranja ovog poglavlja daju snažne indikacije kako bi zamišljen koncept aktivnog metamaterijala mogao nadmašiti jednostavniju izvedbu aktivnog sustava izolacije vibracija sa dva stupnja slobode gibanja. Prije svega, bezuvjetnu stabilnost je (u slučaju idealiziranih mjernih i pogonskih članova) moguće osigurati pažljivim izborom parametara pasivnog sustava, pri čemu je potrebno obratiti pažnju na svega dva kriterija: (3.7) i (3.8). Zatim, dvije decentralizirane povratne veze omogućuju primjenu znatno manjih pojačanja povratnih veza, a da je pritom osigurana veća razlika među karakterističnim prijenosnim funkcijama sustava, a time i znatno izraženiji gubitak svojstva recipročnosti. To je povoljno, pošto je na taj način moguće izbjegnuti zasićenje pogonskih članova koje bi eventualno moglo nastupiti zbog korištenja prevelikog pojačanja povratne veze.

Međutim, prije nego što se krene s izradom eksperimentalnog prototipa, provest će se još analiza ćelije aktivnog metamaterijala za slučaj da se dinamika mjernih i pogonskih članova uzima u obzir. To će se učiniti kako bi se saznalo na koji način ta zanemarena dinamika utječe na svojstva stabilnosti sustava i u kolikoj mjeri.

4 Matematički model ćelije aktivnog metamaterijala proširen s dinamikom mjernih i pogonskih članova

U ovom poglavlju izvodi se proširen model ćelije aktivnog metamaterijala predstavljene u prethodnom poglavlju, koji sada uključuje dinamiku mjernih i pogonskih članova. Izvode se diferencijalne jednadžbe koje opisuju dinamiku pasivnog sustava, nakon čega se formira regulacijska petlja s decentraliziranim povratnim vezama po brzini. Na kraju se analizira stabilnost takvog sustava koristeći generalizirani Nyquistov kriterij stabilnosti.

4.1 Drugačiji pristup opisu ćelije aktivnog metamaterijala bez dinamike mjernih i pogonskih članova

Iako je opis dinamike ćelije aktivnog metamaterijala pomoću matrica (3.1a), (3.1b) i (3.1c) koristan, pošto omogućuje vrlo jednostavnu interpretaciju fenomena gubitka recipročnosti u smislu gubitka simetrije matrice mobilnosti aktivnog sustava, te omogućuje korištenje relacije (2.21) kako bi se računale prijenosne mobilnosti $Q_{1,4}$ i $Q_{4,1}$, u ovom će poglavlju biti povoljno razdvojiti dinamiku pasivnog mehaničkog sustava od dinamike mjernih i pogonskih članova. Stoga se definira matrica prijenosnih funkcija pasivnog mehaničkog sustava $\mathbf{G}_p(s)$ kao u nastavku:

$$\mathbf{G}_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (4.1b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.1c)$$

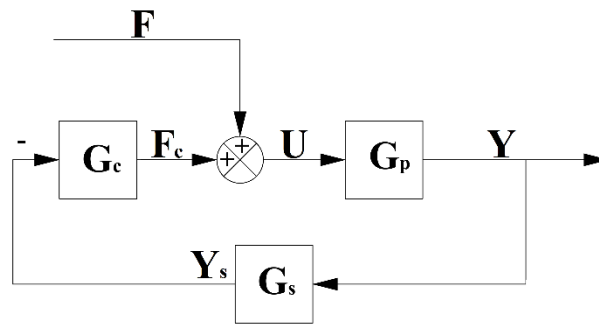
$$\mathbf{C} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}], \quad (4.1d)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (4.1e)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_{1,2} & -k_{1,2} & 0 & 0 \\ -k_{1,2} & k_{1,2} + k_2 + k_{2,1} & -k_{2,1} & 0 \\ 0 & -k_{2,1} & k_1 + k_{1,2} + k_{2,1} & -k_{1,2} \\ 0 & 0 & -k_{1,2} & k_{1,2} + k_2 \end{bmatrix}, \quad (4.1f)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix}, \quad (4.1g)$$

pri čemu su \mathbf{I} i $\mathbf{0}$ jedinična, odnosno nul-matrica dimenzija 4×4 . Sustav u kojem je uključena povratna veza prikazan je blok-dijagramom na slici 4.1. Iz dijagrama moguće je zaključiti kako matrica $\mathbf{G}_p(s)$ predstavlja preslikavanje svih sila $\mathbf{U}(s)$ koje djeluju na sustav (kako vanjskih, označenih s $\mathbf{F}(s)$, tako i regulacijskih, označenih s $\mathbf{F}_c(s)$) na brzine svih stupnjeva slobode $\mathbf{Y}(s)$.



Slika 4.1 Blok-dijagram ćelije aktivnog metamaterijala

Matrica \mathbf{G}_s predstavlja preslikavanje fizikalnih brzina stupnjeva slobode $\mathbf{Y}(s)$ na mjerene brzine potrebne za ostvarivanje povratne veze $\mathbf{Y}_s(s)$, a definirana je kao:

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

iz čega je moguće iščitati kako su pretpostavljeni idealizirani senzori, pošto se fizikalne brzine izravno preslikavaju na mjerene brzine (ni na koji način nisu promijenjene). S druge strane, matrica \mathbf{G}_c predstavlja prijenosnu funkciju regulatora, koji preslikava mjerene brzine $\mathbf{Y}_s(s)$ na upravljačke sile $\mathbf{F}_c(s)$, a definirana je kao:

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} -g & 0 \\ g & 0 \\ 0 & -g \\ 0 & g \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

čime se pokazuje da su i pogonski članovi idealizirani, pošto su upravljačke sile proporcionalne mjerenim brzinama.

Sada se može, koristeći pravila algebre blokova, izraziti ovisnost izlaza (brzina) sustava $\mathbf{Y}(s)$ o vanjskim silama $\mathbf{F}(s)$ kao:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{F}(s), \quad (4.4a)$$

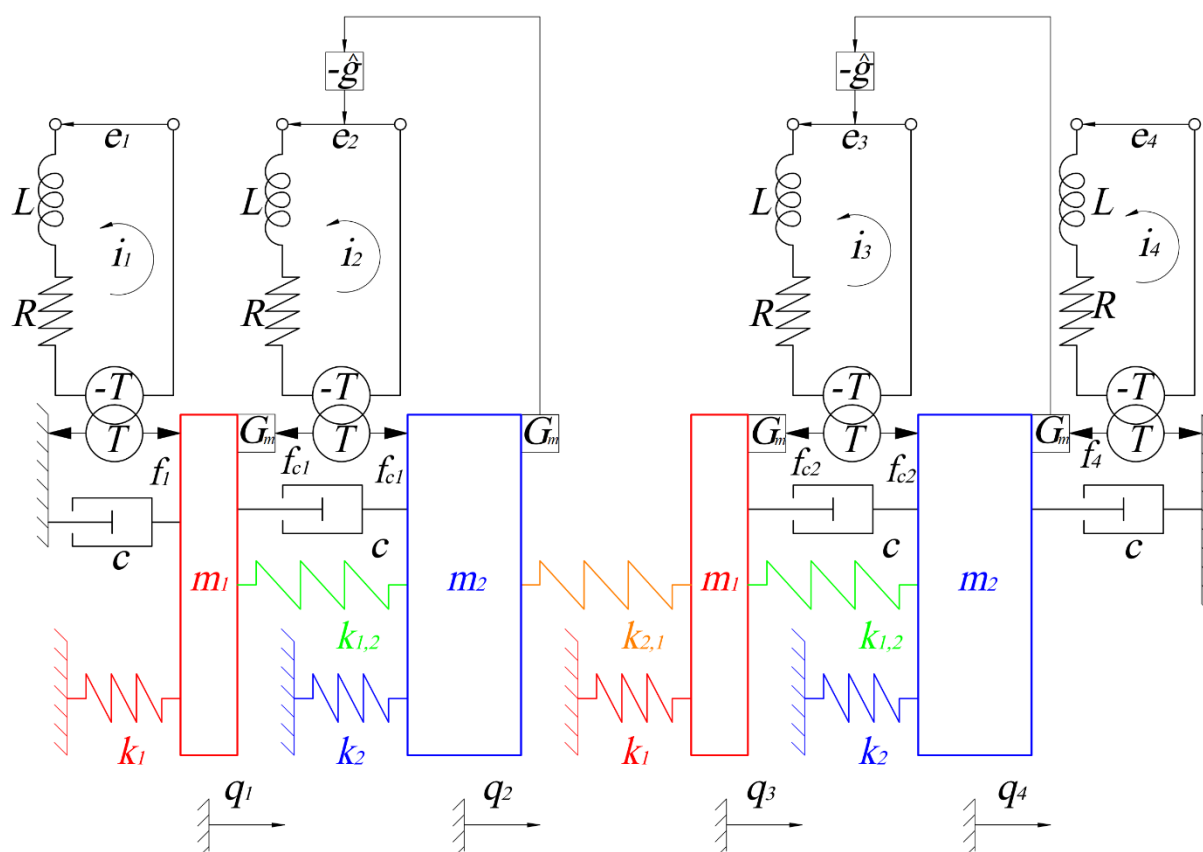
$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}_p(s)\mathbf{G}_c\mathbf{G}_s]^{-1}\mathbf{G}_p(s). \quad (4.4b)$$

Može se pokazati da je matrica $\mathbf{G}(s)$ definirana s (4.4b) identična matrici mobilnosti aktivnog sustava $\mathbf{Q}(s)$ definiranoj s (3.1a), (3.1b) i (3.1c) preko (2.21). Iako je opis dinamike ćelije aktivnog metamaterijala pomoću (4.4b) ponešto kompliciraniji, koristan je pošto omogućuje razdvajanje dinamike procesa, mjernih članova i regulatora. Upravo će se takav pristup iskoristiti u idućem potpoglavlju, gdje se dodaje dinamika mjernih i pogonskih članova.

4.2 Proširenje modela ćelije aktivnog metamaterijala dinamikom mjernih i pogonskih članova

Modeliranjem dinamike pogonskih članova dobiva se spregnuti model mehaničkog i električnog podsustava, koji daje vjerniju sliku stvarnog sustava ćelije aktivnog metamaterijala.

Takav model je prikazan slikom 4.2.



Slika 4.2 Model ćelije aktivnog metamaterijala s dinamikom mjernih i pogonskih članova

Pogonski se članovi mogu modelirati kao električni sustavi prvog reda s otporom R , induktivitetom L te konstantom povratne elektromotorne sile T , koja je jednaka po iznosu (ali ima drugačiju mjernu jedinicu) koeficijentu proporcionalnosti generirane sile i jakosti struje

koja teče krugom. Uz pretpostavku kako svi korišteni pogonski članovi imaju jednake parametre R , L i T , jednadžbe koje opisuju dinamiku električnih podsustava mogu se zapisati u matričnom obliku kao u nastavku:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = -\frac{R}{L}\mathbf{i} + \frac{T}{L}\mathbf{N}^T\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{L}\mathbf{e}, \quad (4.5a)$$

pri čemu su \mathbf{i} vektor jakosti struja u krugovima pogonskih članova:

$$\mathbf{i}^T = [i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4], \quad (4.5b)$$

\mathbf{e} je vektor napona:

$$\mathbf{e}^T = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4], \quad (4.5c)$$

a matrica \mathbf{N} definirana je kao u nastavku:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5d)$$

Kao što je spomenuto, sile koje djeluju na mehanički podsustav proporcionalne su jakostima struja koje teku električnim krugovima:

$$\mathbf{f}^T = [f_1 \quad f_{c1} \quad f_{c2} \quad f_4] = T\mathbf{i}^T,$$

što znači da će jednadžbe gibanja mehaničkog podsustava biti zadane kao (4.6a):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + T\mathbf{N}\mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad (4.6a)$$

gdje su matrica mase \mathbf{M} i krutosti \mathbf{K} identične (4.1e), odnosno (4.1f), no matrica prigušenja poprima oblik (4.6b), pošto se sada i aktivne sile f_1 i f_4 modeliraju pomoću elektrodinamičkih pogonskih članova (razlog zašto se aktivne sile tako modeliraju postat će jasan prilikom opisa eksperimentalnog postava), čime se uvodi dodatno pasivno prigušenje, kao što je spomenuto u potpoglavlju 2.4:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & -c & 2c \end{bmatrix}. \quad (4.6b)$$

Jednadžbe (4.5a) i (4.6a) mogu se zapisati kao sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda, čime se dobiva prikaz sustava u proširenom prostoru stanja:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{u}}, \quad (4.7a)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}, \quad (4.7b)$$

pri čemu je $\hat{\mathbf{x}}$ proširen vektor varijabli stanja koji uključuje veličine mehaničkog i električnog podsustava:

$$\hat{\mathbf{x}}^T = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T \quad \mathbf{i}^T], \quad (4.7c)$$

a $\hat{\mathbf{u}}$ vektor ulaznih veličina u sustav, koji je jednak vektoru ulaznih napona električnih podsustava:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{e}, \quad (4.7d)$$

dok su izlazne varijable sustava, kao i u prethodnim poglavljima, brzine stupnjeva slobode:

$$\hat{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.7e)$$

Uz ovakve definicije varijabli stanja, ulaza i izlaza, matrica proširenog sustava $\hat{\mathbf{A}}$ definirana je kao:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & -\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{T}}{L}\mathbf{N}^T & -\frac{R}{L}\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.7f)$$

pri čemu su \mathbf{I} i $\mathbf{0}$ jedinične, odnosno nul-matrice dimenzija 4×4 . Pomoću zapisa u ovako proširenom prostoru stanja moguće je dobiti uvid u spregnutost električnih i mehaničkih komponenti sustava. Konkretno, prvi 2×2 blok u (4.7f) je identičan oblikom matrici (4.1b), a prikazuje na koji način mehaničke varijable (pomaci i brzine) utječu na njihovu vlastitu dinamiku. S druge strane, članovi $-\mathbf{T}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ i $\frac{\mathbf{T}}{L}\mathbf{N}^T$ daju informaciju o tome kako električni podsustav utječe na mehanički podsustav, odnosno mehanički na električni. Kada bi bilo koja od tih matrica bila nul-matrica, mehanički i električni podsustavi ne bi bili potpuno spregnuti. Proširena matrica ulaza u sustav $\hat{\mathbf{B}}$ definirana je kao:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{1}{L}\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.7g)$$

pri čemu su \mathbf{I} i $\mathbf{0}$ ponovno jedinična, odnosno nul-matrica dimenzija 4×4 . Iz ove je matrice moguće zaključiti kako ulazi u sustav (naponi) utječu izravno samo na električni podsustav, pošto je pretpostavljeno da sve sile koje mogu djelovati na mehaničke stupnjeve slobode imaju

izvor u elektrodinamičkim pogonskim članovima.

Na kraju, matrica izlaza proširenog sustava $\hat{\mathbf{C}}$ definirana je kao (4.7h), gdje su $\mathbf{0}$ i \mathbf{I} nul-matrica i jedinična matrica dimenzija 4×4 :

$$\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}]. \quad (4.7h)$$

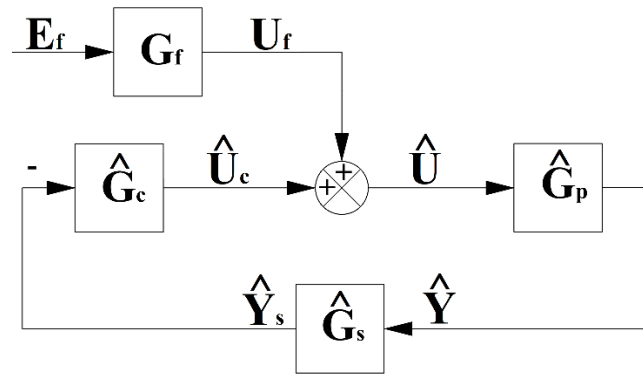
Matrica prijenosnih funkcija pasivnog sustava proširenog dinamikom pogonskih članova sada je zadana s:

$$\hat{\mathbf{G}}_p(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}}, \quad (4.8)$$

a predstavlja preslikavanje napona elektrodinamičkih pogonskih članova na brzine mehaničkih stupnjeva slobode. Uključivanje povratne veze provodi se prema blok-dijagramu na slici 4.3. Ovakav dijagram sličan je onom iz prethodnog potpoglavlja (slika 4.1), no matrice prijenosnih funkcija koje predstavljaju elemente sustava drugačije su popunjene. Matrica prijenosnih funkcija mjernih članova $\hat{\mathbf{G}}_s(s)$ definirana je preko (4.9a) pri čemu su joj elementi prijenosne funkcije drugog reda oblika (4.9b). Uspoređujući (4.9a) i (4.2) odmah je jasno da mjerni članovi sustava više nisu idealizirani, pošto se fizikalne brzine sustava $\hat{\mathbf{Y}}(s)$ preslikavaju u mjerene brzine $\hat{\mathbf{Y}}_s(s)$ preko matrice kojoj elementi nisu jedinični, već sadrže dinamiku drugog reda, što se može interpretirati kao vrsta "filtriranja" signala. Mjerni se članovi modeliraju pomoću sustava drugog reda zbog toga što se za mjerenje vibracija u pravilu koriste senzori sa seizmičkim masama, a takvi se senzori ponašaju se kao vibracijski sustavi sa vlastitom kružnom frekvencijom ω_m i prigušenjem ζ_m . Izraz (4.9b) bi formalno trebao biti množen konstantom koja predstavlja pojačanje sustava drugog reda, no ovdje se izbacila, pošto se pretpostavlja da je to pojačanje moguće obuhvatiti pojačanjem povratne veze \hat{g} , iz praktičnih razloga. Također, pretpostavlja se da su svi mjerni članovi jednaki, pa posjeduju jednake vlastite kružne frekvencije i prigušenja.

$$\hat{\mathbf{G}}_s(s) = \text{diag}[G_m(s), G_m(s), G_m(s), G_m(s)], \quad (4.9a)$$

$$G_m(s) = \frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 + 2\zeta_m\omega_ms + s^2}. \quad (4.9b)$$



Slika 4.3 Blok-dijagram ćelije aktivnog metamaterijala proširenog s dinamikom mjernih i pogonskih članova

Regulator je zadan prijenosnom funkcijom $\hat{\mathbf{G}}_c$, koja predstavlja preslikavanje mjerenih brzina sustava $\hat{\mathbf{Y}}_s(s)$ na upravljačke napone $\hat{\mathbf{U}}_c(s)$, pri čemu je mjerna jedinica pojačanja povratne veze \hat{g} sada V s m^{-1} (pošto se upravlja naponom), za razliku od pojačanja povratne veze g , koje je korišteno u slučaju kada su se pretpostavljali idealni mjerni i pogonski članovi, a imalo je mjernu jedinicu N s m^{-1} :

$$\hat{\mathbf{G}}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{g} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Nul-redovi u matrici $\hat{\mathbf{G}}_c$ potrebni kako bi dimenzija upravljačkih napona odgovarala dimenziji ulaznih veličina u sustav, a upravlja se samo naponima e_2 i e_3 . Iz jednakog je razloga potrebna matrica \mathbf{G}_f , koja samo služi kako bi se proširila dimenzija vektora pobudnih napona $\mathbf{E}_f(s)$ i dobio vektor vanjske pobude $\mathbf{U}_f(s)$ (u nastavku $E_1(s)$ i $E_4(s)$ predstavljaju Laplaceove transformacije napona $e_1(t)$ i $e_4(t)$):

$$\mathbf{E}_f^T(s) = [E_1(s) \quad E_4(s)], \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{G}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.11b)$$

Sada je moguće, koristeći pravila algebre blokova, zapisati preslikavanje vanjskih pobudnih napona $\mathbf{E}_f(s)$ na mjerene brzine $\hat{\mathbf{Y}}_s(s)$ preko matrice prijenosnih funkcija zatvorene petlje $\hat{\mathbf{G}}(s)$, koja je dimenzija 4×2 (mjere se 4 izlazne brzine, a sustav se pobuđuje s dva napona na "rubnim" stupnjevima slobode):

$$\hat{\mathbf{Y}}_s(s) = \hat{\mathbf{G}}(s)\mathbf{E}_f(s), \quad (4.12a)$$

$$\widehat{\mathbf{G}}(s) = [\mathbf{I} + \widehat{\mathbf{G}}_s(s)\widehat{\mathbf{G}}_p(s)\widehat{\mathbf{G}}_c]^{-1}\widehat{\mathbf{G}}_s(s)\widehat{\mathbf{G}}_p(s)\mathbf{G}_f. \quad (4.12b)$$

Razlog zbog čega se kao izlaz sustava razmatraju mjerene brzine, a ne fizikalne brzine sustava praktične je prirode, pošto su to veličine koje je u stvarnosti moguće mjeriti. Kako ova matrica nije kvadratna, karakteristične prijenosne funkcije koje služe kao analogija mobilnostima $Q_{1,4}$ i $Q_{4,1}$ modela u kojem nije bila uključena dinamika mjernih i pogonskih članova postaju elementi $\widehat{G}_{1,2}$ i $\widehat{G}_{4,1}$, koji predstavljaju preslikavanja napona e_4 na mjerenu brzinu prvog stupnja slobode, odnosno napona e_1 na mjerenu brzinu četvrtog stupnja slobode. Stoga, iako ne predstavlja preslikavanje sila na brzine (već napona na brzine), matrica $\widehat{\mathbf{G}}(s)$ se može smatrati svojevrsnom analogijom matrici mobilnosti aktivnog sustava $\mathbf{Q}(s)$ za slučaj kada dinamika mjernih i pogonskih članova nije zanemarena.

Zbog dodane dinamike pogonskih članova, pasivan sustav opisan matricom $\widehat{\mathbf{G}}_p(s)$ dvanaestog je reda. Kako se tijekom zatvaranja povratne veze ova matrica množi s prijenosnim funkcijama mjernih članova $\widehat{\mathbf{G}}_s(s)$ koje su drugog reda, red sustava sa zatvorenom povratnom vezom se dodatno povećava. Iz tog razloga analiza stabilnosti koristeći Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti, kao u prethodnom poglavlju, postaje izuzetno nepraktična. Jedan od načina kako je moguće jednostavnije analizirati svojstvo stabilnosti sustava s više ulaza i izlaza jest generaliziranim Nyquistovim kriterijem stabilnosti, što će se učiniti u idućem potpoglavlju.

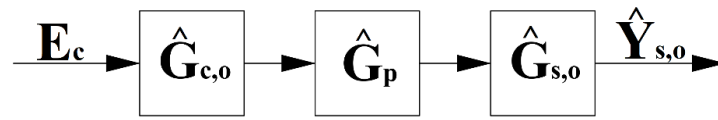
4.3 Analiza stabilnosti ćelije aktivnog metamaterijala koristeći generalizirani Nyquistov kriterij

Korištenje generaliziranog Nyquistvog kriterija počiva na analizi prijenosne funkcije otvorenog kruga, pri čemu su ulazi u sustav upravljane varijable, a izlaz iz sustava mjerene varijable koje se koriste u regulacijskoj petlji. Kako su u ovom sustavu prisutne dvije povratne veze, prijenosne funkcije između mjernih i pogonskih članova biti će zapisane kao matrica dimenzija 2×2 . Na slici 4.4 prikazan je blok-dijagram takvog otvorenog kruga, pri čemu je $\widehat{\mathbf{G}}_p$ matrica prijenosnih funkcija pasivnog sustava definirana s (4.8), a $\widehat{\mathbf{G}}_{s,o}$ i $\widehat{\mathbf{G}}_{c,o}$ su matrice prijenosnih funkcija mjernih članova, odnosno regulatora u otvorenom krugu definirane kao:

$$\widehat{\mathbf{G}}_{s,o}(s) = \begin{bmatrix} 0 & G_m(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_m(s) \end{bmatrix}, \quad (4.13a)$$

$$\widehat{\mathbf{G}}_{c,o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{g} & 0 \\ 0 & \hat{g} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13b)$$

gdje je $G_m(s)$ zadana s (4.9b).



Slika 4.4 Čelija aktivnog metamaterijala u otvorenom krugu

Množenjem ovih matrica dobiva se matrica prijenosnih funkcija koja povezuje upravljačke napone $\mathbf{E}_c(s) = [E_2(s) \ E_3(s)]^T$ kao ulaze u sustav s mjerenim brzinama potrebnim za ostvarivanje povratnih veza kao izlazima iz sustava:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{s,o}(s) = \hat{\mathbf{G}}_{sa}(s)\mathbf{E}_c(s), \quad (4.14a)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{sa}(s) = \hat{\mathbf{G}}_{s,o}(s)\hat{\mathbf{G}}_p(s)\hat{\mathbf{G}}_{c,o}. \quad (4.14b)$$

Generalizirani Nyquistov kriterij kaže da će sustav u zatvorenoj petlji biti stabilan, ako lokus (4.15) ne obuhvaća ishodište kompleksne ravnine, kada se frekvencija ω varira od $-\infty$ do ∞ [18]:

$$\det[\mathbf{I} + \hat{\mathbf{G}}_{sa}(j\omega)] = 0. \quad (4.15)$$

Posebno, kako je determinanta matrice jednaka umnošku njenih vlastitih vrijednosti, (4.15) moguće je preformulirati u (4.16), pri čemu $\hat{\lambda}_i(j\omega)$ predstavlja i -tu vlastitu vrijednost matrice $\hat{\mathbf{G}}_{sa}(j\omega)$ [19]:

$$[1 + \hat{\lambda}_1(j\omega)][1 + \hat{\lambda}_2(j\omega)] = 0. \quad (4.16)$$

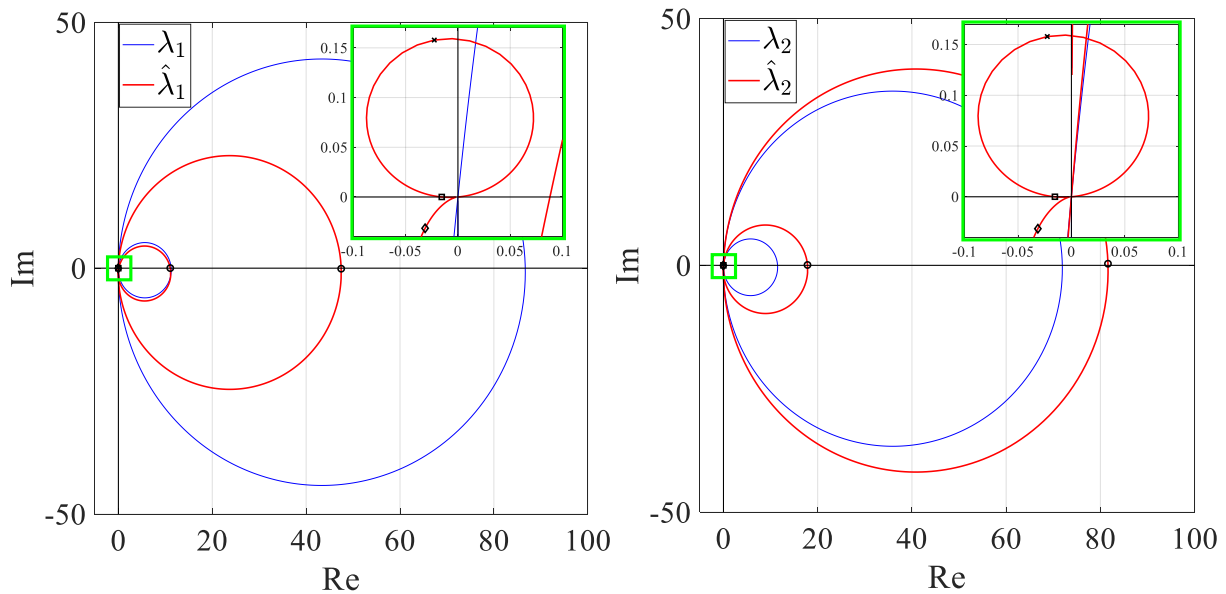
Sada se analiza stabilnosti sustava svodi na standardni Nyquistov kriterij stabilnosti za sustave s jednim ulazom i jednim izlazom, koji se primjenjuje na vlastite vrijednosti $\hat{\lambda}_1(j\omega)$ i $\hat{\lambda}_2(j\omega)$. Drugim riječima, ćelija aktivnog metamaterijala biti će stabilna, ako lokusi vlastitih vrijednosti $\hat{\lambda}_1(j\omega)$ i $\hat{\lambda}_2(j\omega)$ ne obuhvaćaju točku $-1+0j$.

Analiza stabilnosti generaliziranim Nyquistovim kriterijem stabilnosti provedena je za sustav s parametrima zadanim u tablici 4.1. Ovi parametri dobiveni su iz eksperimentalnog postava, koji će biti predstavljen u narednom poglavlju.

Tablica 4.1 Parametri ćelije aktivnog metamaterijala s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova

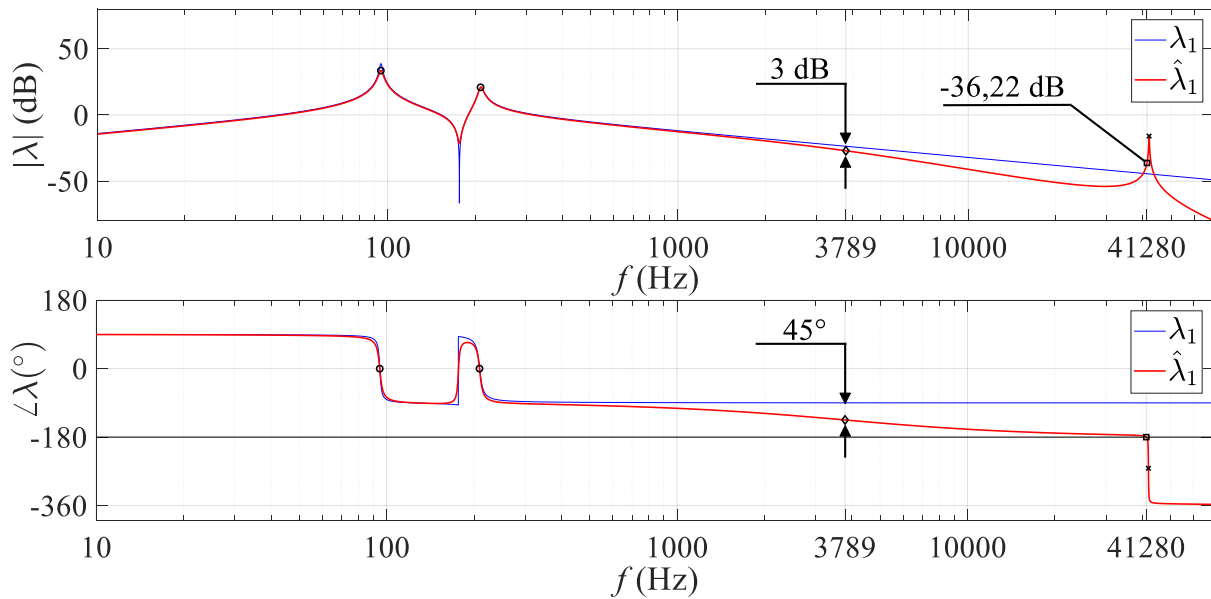
parametar	iznos
m_1 (kg)	0,045
m_2 (kg)	0,06075
k_1 (N m ⁻¹)	55400
k_2 (N m ⁻¹)	9100
$k_{1,2}$ (N m ⁻¹)	18150
$k_{2,1}$ (N m ⁻¹)	17850
c (N s m ⁻¹)	0,8
T (N A ⁻¹ , V s m ⁻¹)	0,45
L (H)	63×10^{-6}
R (Ω)	1,5
ω_m (rad s ⁻¹)	$2\pi \times 42 \times 10^3$
ζ_m (-)	0,00158
\hat{g} (V s m ⁻¹)	300

Slika 4.5 prikazuje Nyquistove konture lokusa obiju vlastitih vrijednosti prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova, pri čemu debela crvena linija prikazuje slučaj u kojem se dinamika mjernih i pogonskih članova uzima u obzir, dok tanka plava linija prikazuje lokuse vlastitih vrijednosti analognih prijenosnih funkcija u kojima je ta dinamika zanemarena.

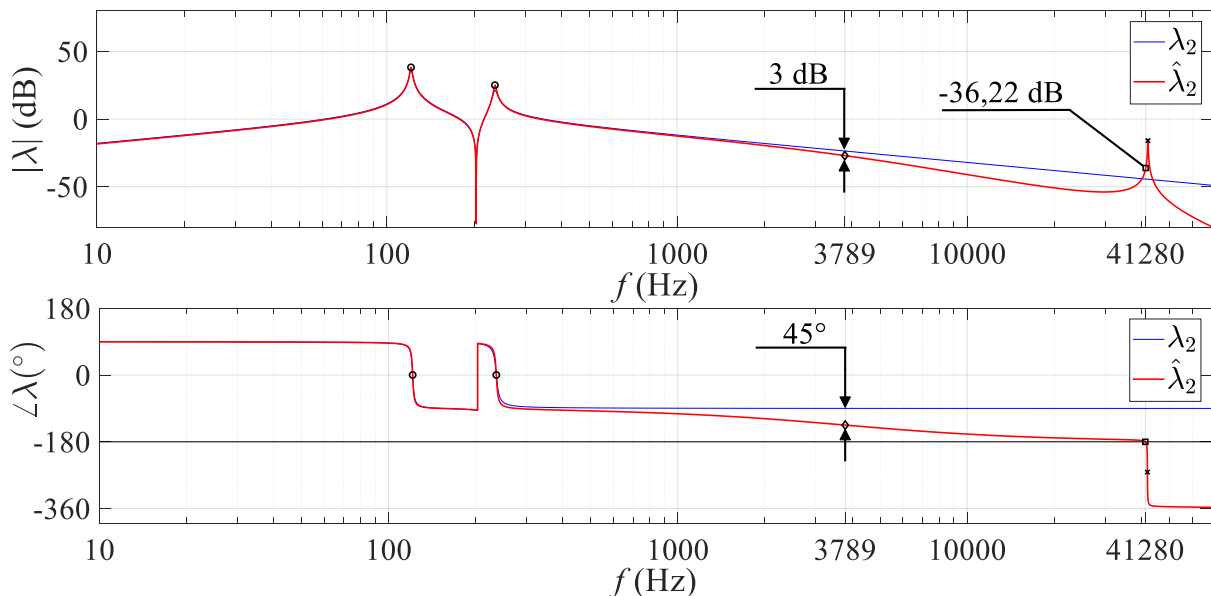


Slika 4.5 Nyquistove konture vlastitih vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: model s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, model bez dinamike mjernih i pogonskih članova – plavo (crni kružići prikazuju vlastite frekvencije sustava, crni dijament prikazuje graničnu frekvenciju kruga elektrodinamičkih pogonskih članova, crni kvadratić frekvenciju prelaska konture preko negativne realne osi, a crni "×" vlastitu frekvenciju mjernih članova)

Iz ovih dijagrama uočava se važno svojstvo modela u kojem je uključena dinamika mjernih i pogonskih članova. Iako su parametri pasivnog mehaničkog sustava izabrani tako da su zadovoljene nejednakosti (3.7) i (3.8), može se uočiti (uvećani prikaz uokviren zelenom bojom) da crvena linija prelazi preko negativne realne osi, za razliku od analognog modela u kojem dinamika mjernih i pogonskih članova nije uzeta u obzir, gdje je čitava kontura u desnoj poluravnini. Ovime se demonstrira da u stvarnosti nije moguće garantirati bezuvjetnu stabilnost ovakvog sustava, već ima smisla govoriti samo o rezervama stabilnosti. Konkretno, pošto je implementiran proporcionalni regulator, razmatra se amplitudna rezerva stabilnosti, koja se definira kao udaljenost točke u kojoj Nyquistova kontura presijeca negativnu realnu os (na slici 4.5 označeno crnim kvadratićem) od točke nestabilnosti $-1+0j$. Sa dijagrama na slici 4.5 moguće je zaključiti kako je uz pojačanje regulatora zadano tablicom 4.1 osigurana vrlo velika rezerva stabilnosti. To je moguće na bolji način vizualizirati razmatranjem Bodeovih amplitudnih i faznih dijagrama istih vlastitih vrijednosti, što je prikazano slikama 4.6 i 4.7 (model s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova ponovno je prikazan crvenom bojom, a slučaj bez modeliranja te dinamike plavom bojom).



Slika 4.6 Amplitudni i fazni dijagram prve vlastite vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: model s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, model bez dinamike mjernih i pogonskih članova – plavo (crni kružići prikazuju vlastite frekvencije sustava, crni dijamanat prikazuje graničnu frekvenciju kruga elektrodinamičkih pogonskih članova, crni kvadratić frekvenciju prelaska Nyquistove konture preko negativne realne osi, a crni "x" vlastitu frekvenciju mjernih članova)



Slika 4.7 Amplitudni i fazni dijagram druge vlastite vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: model s uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, model bez dinamike mjernih i pogonskih članova – plavo (crni kružići prikazuju vlastite frekvencije sustava, crni dijamanat prikazuje graničnu frekvenciju kruga elektrodinamičkih pogonskih članova, crni kvadratić frekvenciju prelaska Nyquistove konture preko negativne realne osi, a crni "x" vlastitu frekvenciju mjernih članova)

Pomoću Bodeovih dijagrama neke je značajke odziva sustava znatno jednostavnije analizirati. Prije svega, pri frekvencijama do oko 1 kHz modeli daju približno jednake rezultate, osim u rezonancijama sustava, što se objašnjava činjenicom da struktura pasivnog prigušenja u modelima nije jednaka, što se može provjeriti razmatranjem matrica (4.1g) i (4.6b). Osim toga, električni podsustavi također uvode dodatno pasivno prigušenje u sustav, pošto se relativnim gibanjem zavojnice i magneta u električnom krugu pogonskog člana inducira električna struja, a otpor u električnom krugu rasipa energiju (ponaša se kao vrsta prigušivača). Osim rezonancija mehaničkog sustava, od interesa je i točka označena crnim dijamantom, pošto ona predstavlja tzv. graničnu frekvenciju električnog podsustava. Konkretno, radi se o frekvenciji koja je definirana kao omjer otpora i induktiviteta u električnom krugu, a na toj frekvenciji javlja se karakterističan pad pojačanja za 3 dB, kao i kašnjenje u fazi od 45° u odnosu na slučaj u kojem ta dinamika nije uzeta u obzir. Također, moguće je uočiti da model u kojem je uključena dinamika mjernih i pogonskih članova posjeduje jednu dodatnu rezonantnu frekvenciju (označenu crnim "x" na dijagramima), koja pripada mjernim članovima, pošto su modelirani kao sustavi drugog reda. Upravo pri frekvenciji nešto nižoj od te rezonancije faza modela koji uključuje dinamiku mjernih i pogonskih članova prelazi -180° , što se u Nyquistovom dijagramu manifestira kao prelaženje konture preko negativne realne osi (označeno crnim kvadratićem na dijagramima). Pri toj frekvenciji amplituda ima iznos od oko -36 dB za obje vlastite vrijednosti, zbog čega se ta vrijednost uzima kao amplitudna rezerva stabilnosti. S obzirom na to da se u praksi uzima da je zadovoljavajuća rezerva stabilnosti oko 6 dB, ovaj model predviđa i više nego dovoljnu sigurnost od gubitka stabilnosti, odnosno predviđa da bi se mogla koristiti i veća pojačanja u povratnoj vezi.

Modeliranjem dinamike mjernih i pogonskih članova pokazalo se kako u općenitom slučaju nije moguće osigurati bezuvjetnu stabilnost aktivne ćelije metamaterijala čiji je model uveden u prethodnom poglavlju. Ipak, rezultati ukazuju na potencijalno vrlo veliku rezervu stabilnosti koju je moguće osigurati ukoliko se prilikom izrade sustava uvažavaju uvjeti (3.7) i (3.8).

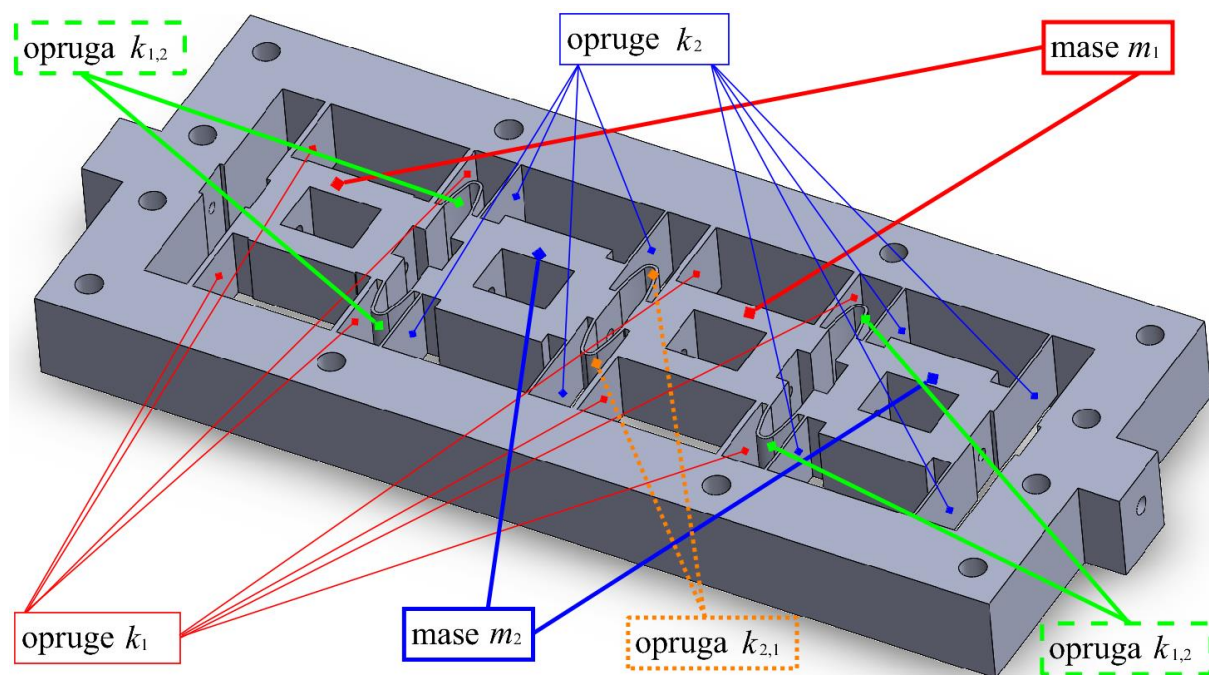
Nakon teorijskih razmatranja ovog i prethodnih poglavlja, u idućem se poglavlju prelazi na eksperimentalnu verifikaciju matematičkog modela ćelije aktivnog metamaterijala.

5 Eksperimentalna verifikacija matematičkog modela ćelije aktivnog metamaterijala

Nakon teorijskih razmatranja prethodnih poglavlja, ovdje se daje opis eksperimentalnog prototipa ćelije aktivnog metamaterijala koji je iskorišten kako bi se verificirao matematički model.

5.1 Opis i izrada eksperimentalnog postava

Kako model ćelije aktivnog metamaterijala pretpostavlja sustav s koncentriranim parametrima, potrebno je osigurati da i eksperimentalni sustav pokazuje slična svojstva. Drugim riječima, kako bi se odzivi matematičkog modela i eksperimentalnog postava mogli uspoređivati, fleksibilni elementi sustava trebali bi biti zanemarive mase u odnosu na elemente koji se tretiraju kao stupnjevi slobode (mase m_1 i m_2 na slikama 3.1, odnosno 4.2), a stupnjevi slobode bi trebali biti znatno krući od fleksibilnih elemenata. Moguća realizacija takvog eksperimentalnog postava (bez aktivnih elemenata) prikazana je slikom 5.1.



Slika 5.1 Koncept eksperimentalnog postava ćelije aktivnog metamaterijala (bez aktivnih elemenata)

Na slici je moguće uočiti da se radi o kontinuiranom sustavu gdje su stupnjevi slobode (mase m_1 i m_2) prikazani kao blokovi koji su lisnim oprugama (krutosti k_1 i k_2) vezani za okvir koji je pričvršćen za podlogu. Također, blokovi su lisnim oprugama (krutosti $k_{1,2}$ i $k_{2,1}$) vezani i međusobno (boje oznaka elemenata na slici 5.1 određene su tako da odgovaraju bojama na slici

3.1, odnosno slici 4.2 zbog jednostavnije usporedbe). Znatno veća masa i krutost blokova u odnosu na mase i krutosti lisnih opruga osigurava da se prve četiri vlastite frekvencije, kao i njihove pripadne forme vibriranja, uglavnom poklapaju s onima koje bi bile izračunate s pretpostavkom kako opruge nemaju masu, a da su blokovi idealno kruti. Ipak, zbog toga što su parametri sustava kontinuirani, na frekvencijama višim od četvrte dominantne vlastite frekvencije javit će se dodatne vlastite forme vibriranja koje nije moguće uzeti u obzir modelom s koncentriranim parametrima kakav je pretpostavljen u prethodnim poglavljima. Stoga će imati smisla uspoređivati teorijske i eksperimentalno dobivene rezultate samo u pojasu frekvencija između prve i četvrte vlastite frekvencije i neposrednoj okolini, dok se izvan tog pojasa matematički model i ponašanje eksperimentalnog sustava moraju razmatrati zasebno.

Potrebno je još naglasiti da je eksperimentalni postav konstruiran tako da zadovoljava uvjete (3.7) i (3.8), kako bi se osigurala dobra svojstva stabilnosti sustava sa zatvorenom povratnom vezom. To se učinilo dodavanjem materijala na blokovima m_2 kako bi im se povećala masa u odnosu na m_1 i zadovoljio uvjet (3.8) te korištenjem debljih opruga k_1 u odnosu na k_2 kako bi im se povećala krutost i na taj način zadovoljio uvjet (3.7).

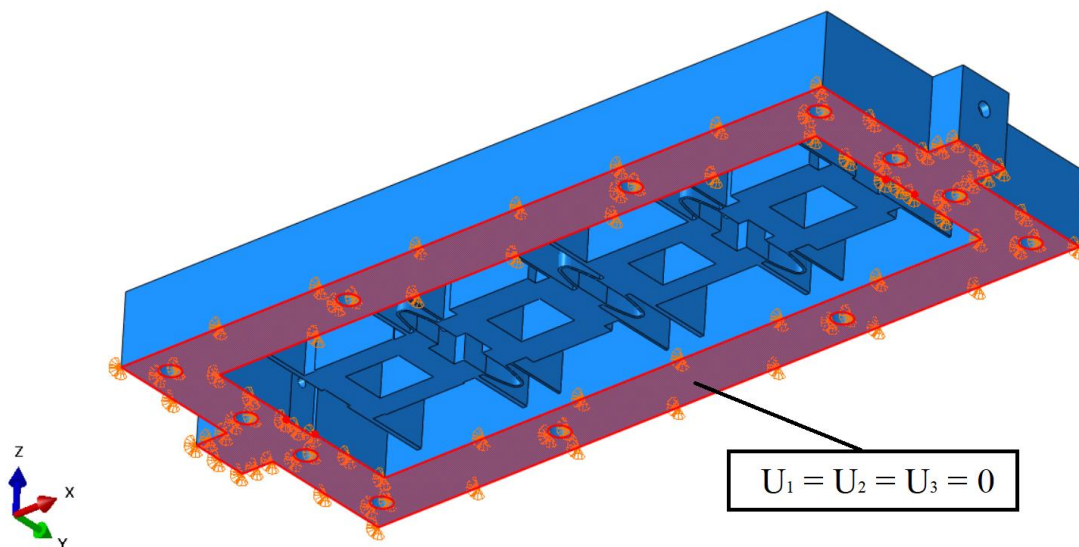
Povoljna tehnologija za izradu ovakvog eksperimentalnog postava je 3D ispis, koji omogućuje vrlo brz prelazak s računalno generiranog modela sustava na fizičku realizaciju. Zbog načina na koji je sustav zamišljen i koja će vrsta pogonskih članova biti korištena, osigurana su vrlo mala opterećenja na njegovim elementima, što pak osigurava i male pomake i deformacije komponenata. Stoga elementi sustava (iako će biti izrađeni od polimernog materijala) ostaju u linearno elastičnom području, što je i potrebno, pošto matematički model sustava upravo pretpostavlja linearnost.

5.1.1 Određivanje frekvencijskog pojasa koji sadrži prve četiri forme vibriranja pomoću metode konačnih elemenata

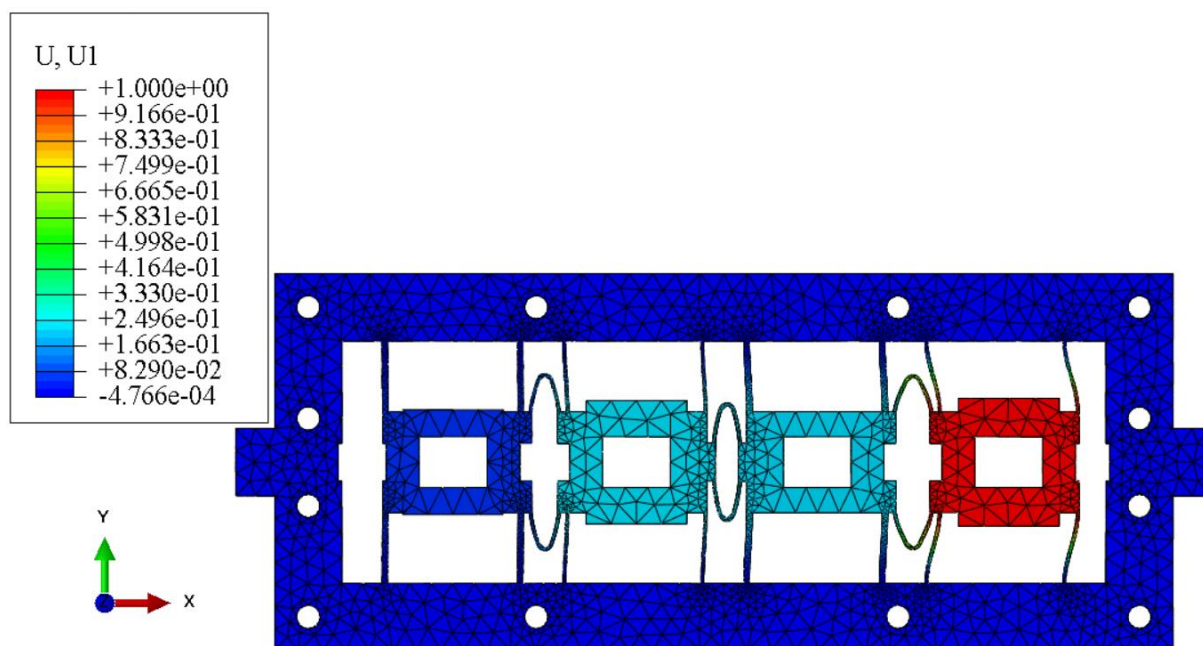
Zbog osjetljivosti mjernih i mogućnosti pogonskih članova aktivnog sustava, povoljno je konstruirati eksperimentalni postav tako da se prve četiri vlastite forme vibriranja nađu u frekvencijskom pojasu između 50 i 300 Hz. Jedan od načina kako se može pristupiti konstruiranju sustava koji zadovoljava ovaj uvjet jest određivanje početne geometrije sustava (poput one zadane slikom 5.1) čime se definiraju mase blokova koji predstavljaju stupnjeve slobode, a zatim se variranjem debljine lisnih opruga mogu mijenjati njihove krutosti, a time i vlastite frekvencije. Geometrija sustava zadanog slikom 5.1 izrađena je u alatu za konstruiranje pomoću računala Solidworks, a računanje vlastitih frekvencija je provedeno u alatu ABAQUS,

koji koristi metodu konačnih elemenata za rješavanje problema mehanike kontinuuma. Kako će se prilikom izrade fizičkog modela koristiti filament polimera PETG, Youngov modul elastičnosti iznosi 1,5 GPa, Poissonov faktor 0,333, a gustoća materijala 1270 kg m^{-3} . Posebno je važno napomenuti kako je eksperimentalni postav potrebno ispisati sa potpunim ispunjenjem, kako bi se podatak o gustoći materijala mogao koristiti. Osim toga, takav način ispisa umanjuje anizotropiju uzrokovanu smjerom ispisa.

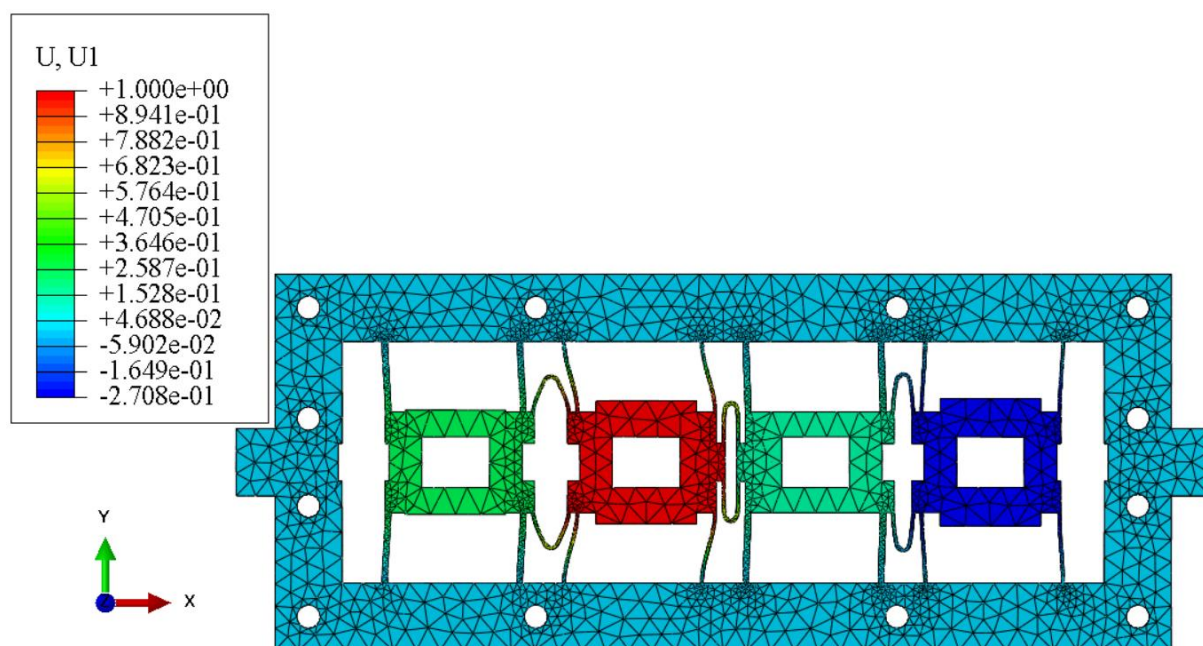
Kako će eksperimentalni postav biti pričvršćen za podlogu, odabrani su rubni uvjeti na donjoj strani modela (slika 5.2) koji sprječavaju pomake. Domena je diskretizirana koristeći parabolične tetraedarske elemente, koji (osim osiguravanja veće točnosti rješenja) omogućuju opisivanje zakrivljenosti na lisnim oprugama, bez korištenja vrlo velikog broja elemenata (što bi bilo potrebno u slučaju da se koriste linearni elementi). Gušća mreža korištena je na prijelazima s lisnih opruga na blokove, odnosno okvir, dok je rijetka mreža korištena za diskretizaciju blokova i okvira. Slike 5.3 do 5.6 prikazuju prve četiri forme vibriranja koje su izračunate s tako izrađenim numeričkim modelom, a moguće je uočiti da su prve četiri vlastite frekvencije uspješno smještene u traženi pojas. Posebno, važno je uočiti da su forme vibriranja prikazane u ravnini, kako bi se naglasilo da su pomaci blokova koji predstavljaju stupnjeve slobode usmjereni u smjeru osi x na slikama, što je i bilo potrebno osigurati, pošto matematički model sustava pretpostavlja gibanje svih stupnjeva slobode u smjeru iste osi.



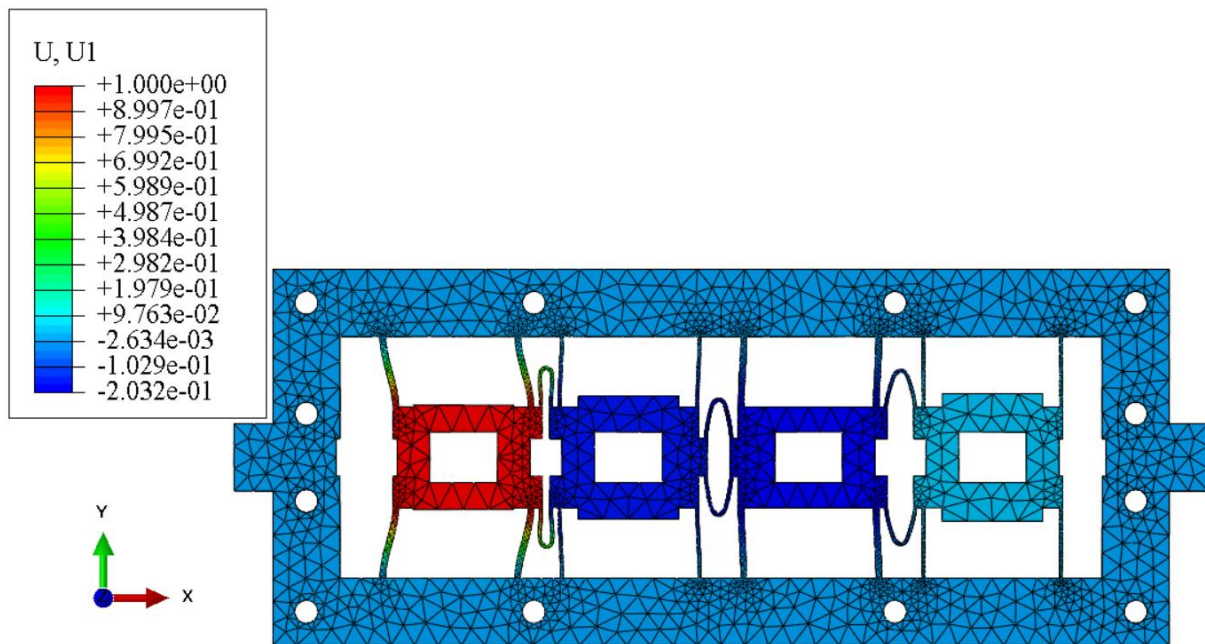
Slika 5.2 Rubni uvjeti pomaka na domeni vibracijskog sustava



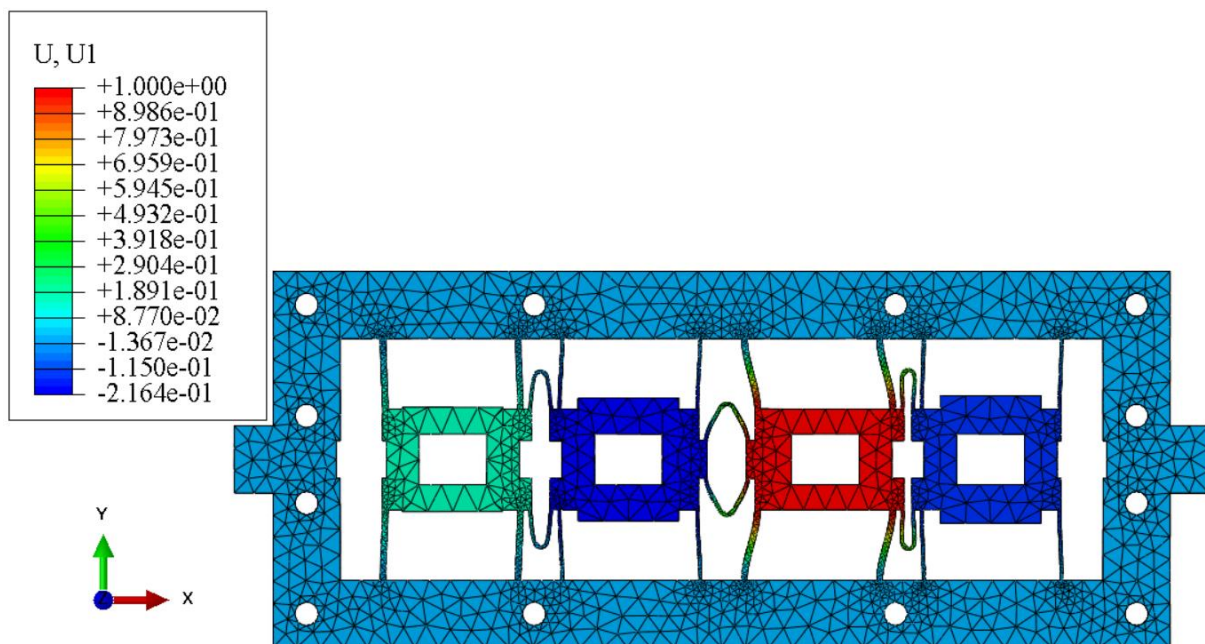
Slika 5.3 Prva forma vibriranja pasivnog sustava (109,79 Hz)



Slika 5.4 Druga forma vibriranja pasivnog sustava (136,24 Hz)



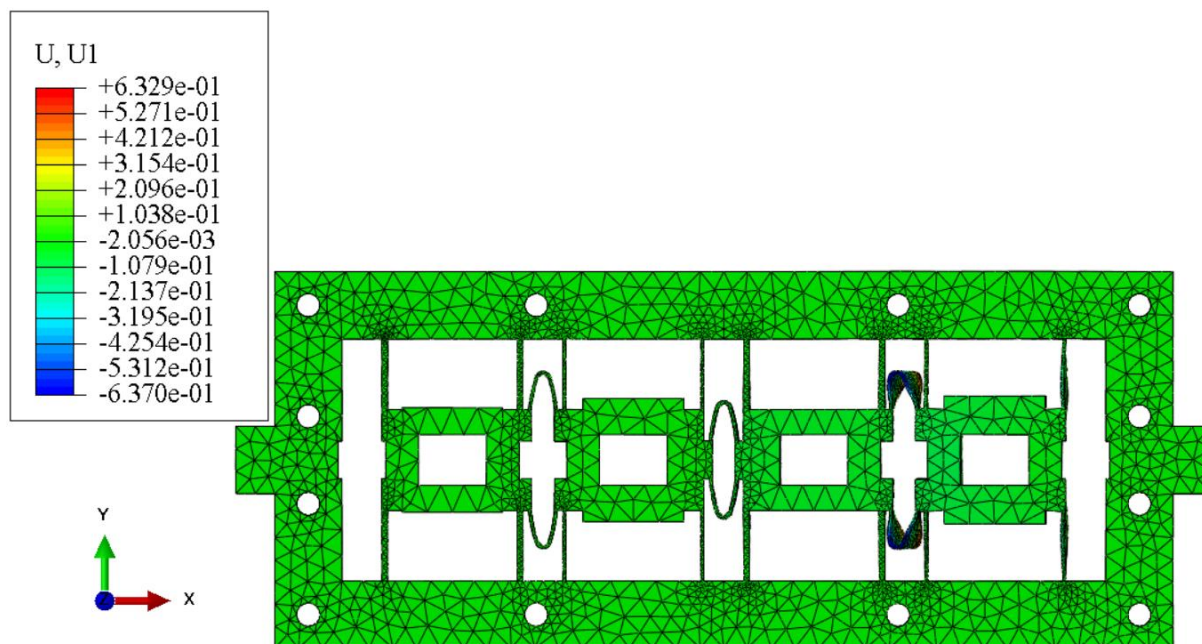
Slika 5.5 Treća forma vibriranja pasivnog sustava (241,41 Hz)



Slika 5.6 Četvrta forma vibriranja pasivnog sustava (262,47 Hz)

Kao što je spomenuto, parametri ovog sustava su kontinuirani, pa tako posjeduje velik broj formi vibriranja pri frekvencijama višim od četvrte vlastite frekvencije. Konkretno, fizička realizacija posjeduje ih beskonačno, dok ih model diskretiziran konačnim elementima ima konačan (ali velik) broj. Prva sljedeća forma vibriranja ovog sustava koju matematički model s koncentriranim parametrima opisan u prethodnim poglavljima ne može modelirati prikazana je slikom 5.7, a javlja se pri frekvenciji od oko 840 Hz, što je znatno viša frekvencija od četvrte

vlastite frekvencije. Radi se o torzijskoj formi vibriranja opruga $k_{1,2}$ i k_2 koje su vezane uz krajnji desni blok na slici.



Slika 5.7 Peta forma vibriranja pasivnog sustava (842,39 Hz)

Ovi rezultati upućuju na to da bi izrađen eksperimentalni postav mogao biti dobro opisan matematičkim modelom ćelije metamaterijala koji se obrađivao dosad. Pri tome bi rezultate mjerenja imalo smisla uspoređivati u frekvencijskom pojasu koji je određen s prvih četiri izračunatih vlastitih frekvencija sustava.

Na kraju ovog odjeljka se napominje kako je analiza vlastitih frekvencija poslužila samo kao smjernica za izradu stvarnog prototipa. Zbog načina na koji će se izrada sustava provesti (o čemu je riječ u idućem odjeljku) te zbog dodatne opreme koja će se na njega montirati, a koja je potrebna za ostvarivanje povratnih veza, očekuju se određene razlike među izračunatim i izmjerenim vlastitim frekvencijama. Stoga su podaci o krutostima, prigušenjima i masama koji su zapisani u tablici 4.1 procijenjeni iz mjerenja provedenih na fizičkoj realizaciji sustava.

5.1.2 Izrada eksperimentalnog postava tehnologijom 3D ispisa i uvođenje mjernih i pogonskih članova u sustav

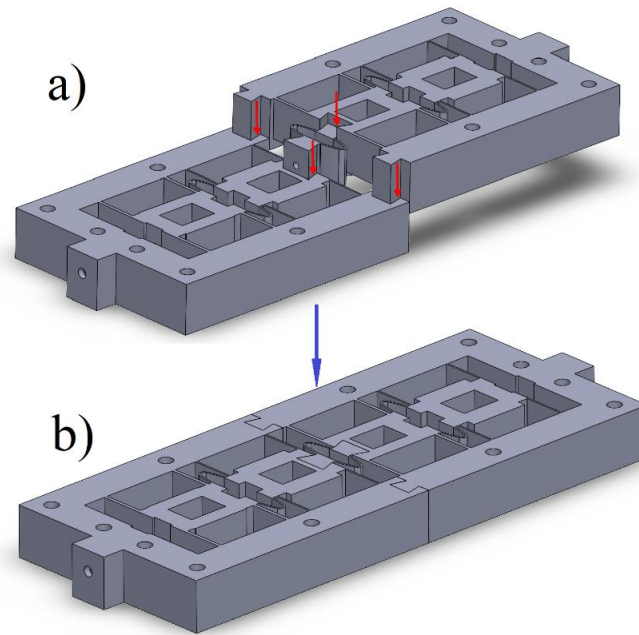
Kao što je spomenuto u prethodnom odjeljku i uvodu potpoglavlja, pasivan vibracijski sustav zadan slikom 5.1 moguće je izraditi tehnologijom 3D ispisa. Za izradu je korišten 3D pisar i3 MK3 proizvođača Prusa Research, koji je temeljen na metodi taložnog sraščivanja (slika 5.8), a ispis je proveden koristeći filament polimera PETG proizvođača AzureFilm. Navedeni

polimer izabran je zbog toga što ima vrlo dobra mehanička svojstva te se dobro lijepi za površinu na kojoj se provodi ispis.



Slika 5.8 Korišten 3D pisac i3 MK3 proizvođača Prusa Research [20]

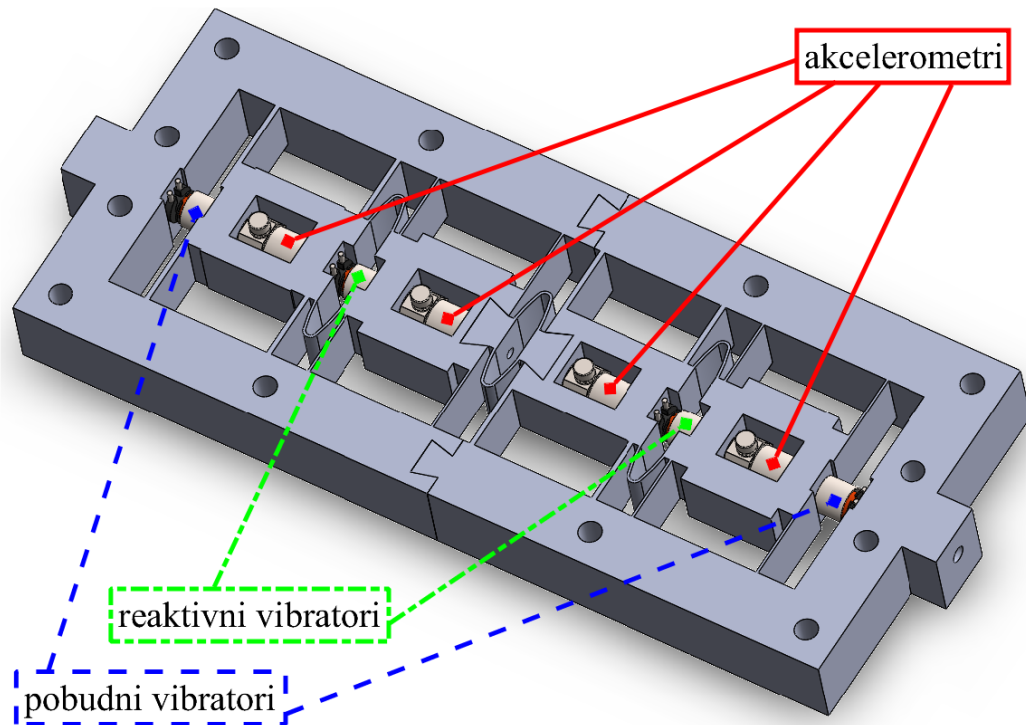
Kako je geometrija i sveukupna veličina eksperimentalnog postava uvjetovana veličinom dostupnih mjernih i pogonskih članova, 3D model pasivnog sustava prikazanog u početku ovog poglavlja nije moguće ispisati kao jednu komponentu koristeći dostupan volumen 3D pisaa koji je na raspolaganju. Stoga se kontinuiran sustav prikazan slikom 5.1 razlaže na tri komponente koje je moguće ispisati zasebno, a nakon toga sastaviti čvrstim dosjedima. Konkretno, čitav se sustav razložio na dva dijela koja sadrže okvir i blokove m_1 i m_2 te veznu oprugu $k_{2,1}$, a sve veze su ostvarene pomoću zglobova golubljeg repa. Razložen sustav, kao i postupak sklapanja prikazan je slikom 5.9.



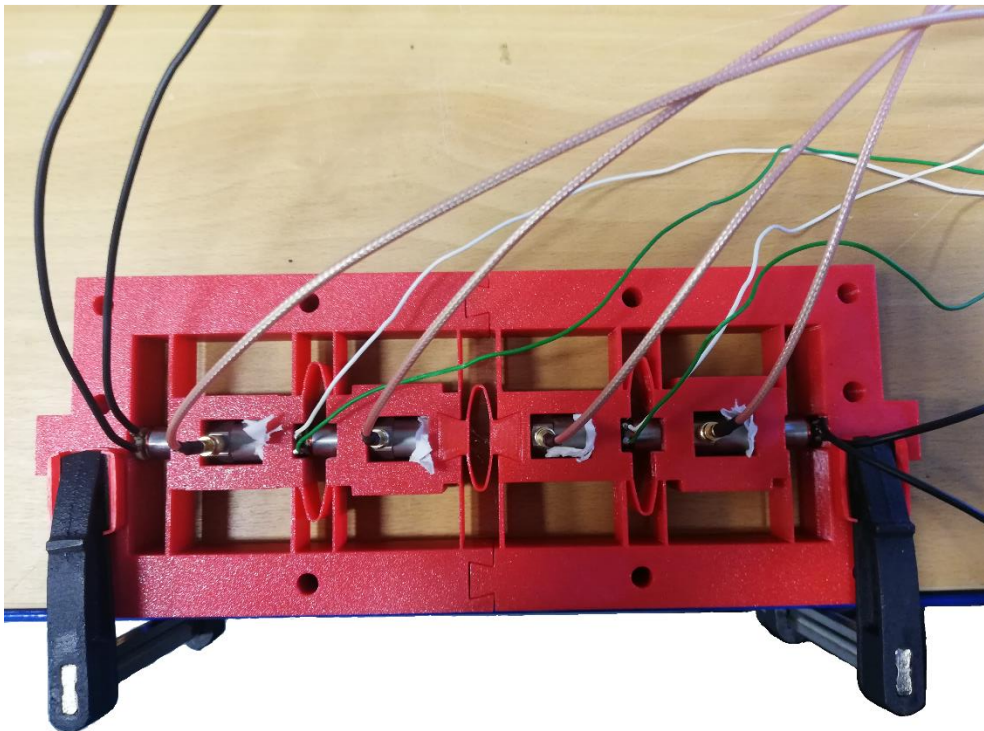
Slika 5.9 Segmentiran pasivan vibracijski sustav: a) postupak sklapanja, b) sklopljen model

Prilikom segmentiranja modela koji je zamišljen kao kontinuiran potrebno je posebnu pažnju posvetiti izradi kvalitetnih dosjeda, tako da u sustavu ne dođe do pojave zračnosti koje mogu znatno utjecati na odziv sustava.

Nakon što su ispisane komponente pasivnog sustava sastavljene prema slici 5.9, sustav je potrebno opremiti mjernim i pogonskim članovima, kako bi se u ćeliji metamaterijala mogle uvesti povratne veze. Tako opremljen sustav prikazan je slikom 5.10, pri čemu su mjerni članovi (seizmički akcelerometri) označeni crvenom bojom i smješteni su unutar pravokutnih šupljina blokova koji predstavljaju stupnjeve slobode. S druge strane, zelenom su bojom označeni reaktivni elektrodinamički vibratori kojima se ostvaruju povratne veze u sustavu, a na "rubnim" stupnjevima slobode sustava nalazi se po jedan dodatni elektrodinamički vibrator kojim je moguće pobuđivati sustav (označeni su plavom bojom na slici). Ovo je ujedno i razlog zbog kojeg su se u prethodnom poglavlju pobudne sile modelirale pomoću električnih krugova. Korišteni su elektrodinamički linearni DC motori "Non-Comm DC Voice Coil Linear Actuator – NCC01-04-001-1X", čiju je dokumentaciju moguće naći u prilogu II, a svi potrebni parametri za modeliranje električnog kruga sadržani su u tablici 4.1. Također, u istoj su tablici sadržani i parametri korištenih seizmičkih akcelerometara, koje je moguće iščitati iz tablica i grafova dokumentacije u prilogu III.



Slika 5.10 Prototip ćelije aktivnog metamaterijala opremljen s mjernim i pogonskim članovima



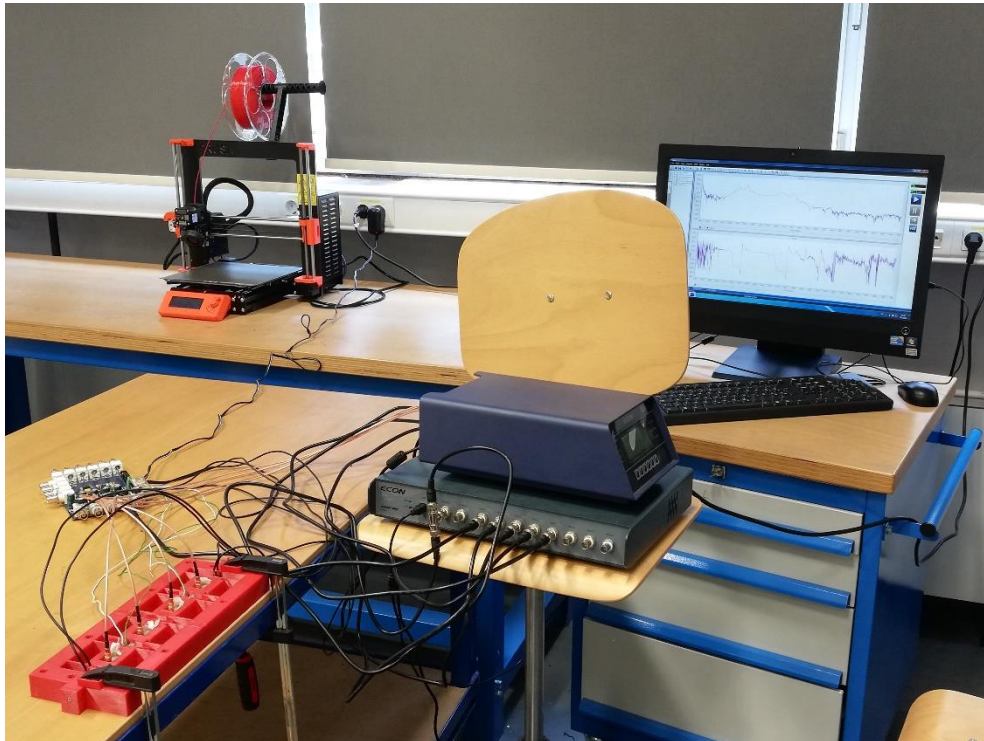
Slika 5.11 Izrađen prototip ćelije aktivnog metamaterijala opremljen mjernim i pogonskim članovima i učvršćen za podlogu

Nakon što je pasivan sustav izrađen, sastavljen i opremljen komponentama potrebnim za ostvarivanje povratnih veza, u idućem se potpoglavlju opisuje na koji način su provedena

mjerenja koja će biti iskorištena za usporedbu s teorijski dobivenim rezultatima prethodnog poglavlja.

5.2 Dodatna mjerna oprema i postupak mjerenja

Na slici 5.12 prikazan je čitav eksperimentalan postav zajedno s uređajima koji su potrebni za mjerenje odziva. Dodatna oprema koja je potrebna za provedbu mjerenja uključuje pojačalo naboja (slika 5.13), analizator spektra (slika 5.14), pojačalo snage (slika 5.15) i računalo. Pojačalo naboja kao ulaz prihvaća signal iz akcelerometara, kojeg integrira i pojačava. Integracija je potrebna pošto su karakteristične prijenosne funkcije sustava definirane na razini brzine, a povratne su veze također ostvarene na razini brzine. S druge strane, kako bi se proporcionalni regulatori mogli implementirati, potrebno je pojačalo snage koje omogućuje povećanje, odnosno smanjenje pojačanja povratne veze. Ovo je pojačalo također potrebno kako bi se regulirala amplituda ulaznog napona na pobudnim vibratorima. Nadalje, analizator spektra omogućuje procesiranje svih signala od interesa (mjerene brzine i naponi na pobudnim vibratorima), a uz poveznicu s računalom i pripadnim softverom, omogućuje i generiranje raznih vrsta signala koji se koriste u svrhe pobude sustava.



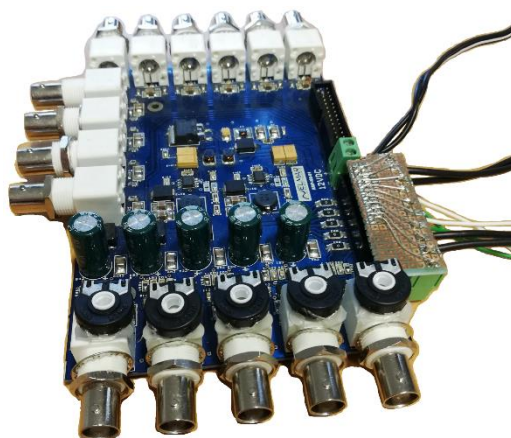
Slika 5.12 Eksperimentalan postav ćelije aktivnog metamaterijala s opremom za mjerenje



Slika 5.13 Pojačalo naboja



Slika 5.14 Analizator spektra



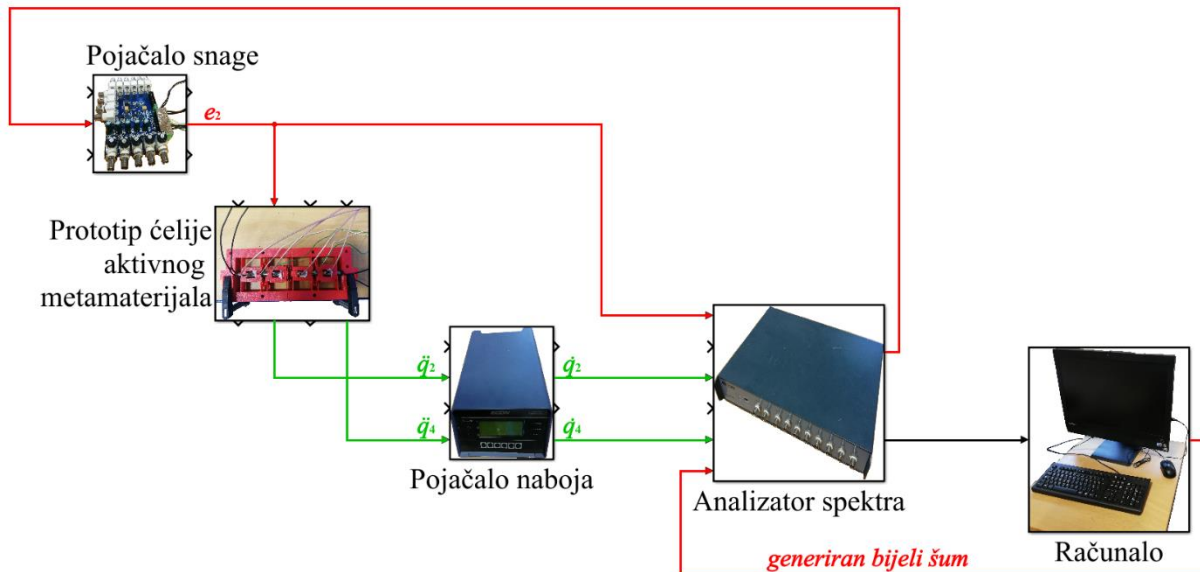
Slika 5.15 Pojačalo snage

Postoje razne vrste signala ulaznog napona na pobudnim vibratorima koje bi bilo moguće koristiti za pobudu sustava i provedbu mjerenja. Korištenje signala sinusnog oblika u pravilu daje najkvalitetnije rezultate, pošto je omjer signala prema okolnom šumu za taj slučaj izuzetno velik, pa je utjecaj okoline malen. Međutim, takva su mjerenja izuzetno spora, pošto je od interesa odziv sustava za širok spektar frekvencija, a svakim se mjerenjem može odrediti odziv

sustava na svega jednoj. Stoga se često koristi tzv. sinusni cvrkut (eng. *chirp*), koji predstavlja signal postupno rastuće (ili padajuće) frekvencije. Takav oblik pobude je povoljan jer omogućuje mjerenje odziva sustava na raznim frekvencijama u znatno kraćem vremenu od čiste sinusne pobude. Ipak, nedostatak je potreba za stacioniranjem odziva sustava na svim frekvencijama kako bi mjerenja bila valjana, pa je važno znati odrediti brzinu promjene frekvencija pobude. Još jedna vrlo česta vrsta signala koja se koristi u svrhe pobude vibracijskih sustava s ciljem mjerenja odziva jest bijeli šum. Najveća prednost ovakvog pristupa mjerenju odziva jest jednostavnost, pošto se sustav u jednom mjerenju pobuđuje na svim frekvencijama. Osim toga, upotrebom bijelog šuma moguće je učinkovito usrednjiti nelinearne odzive polimerne konstrukcije. Nedostatak je nepovoljan omjer signala prema okolnom šumu, koji je malen. Međutim, utjecaj okolnog šuma često je moguće umanjiti povećanjem amplitude pobudnog signala. U slučaju ovog eksperimentalnog sustava, zbog jednostavnosti i brzine mjerenja odlučeno je koristiti bijeli šum srednje kvadratične vrijednosti (eng. *root mean square*) 0,1 V kao oblik signala napona na ulazu u pobudne vibratore. U idućem se potpoglavlju opisuje proces ispitivanja svojstava stabilnosti eksperimentalnog postava, koristeći opremu i pristup mjerenju koji su opisani ovdje.

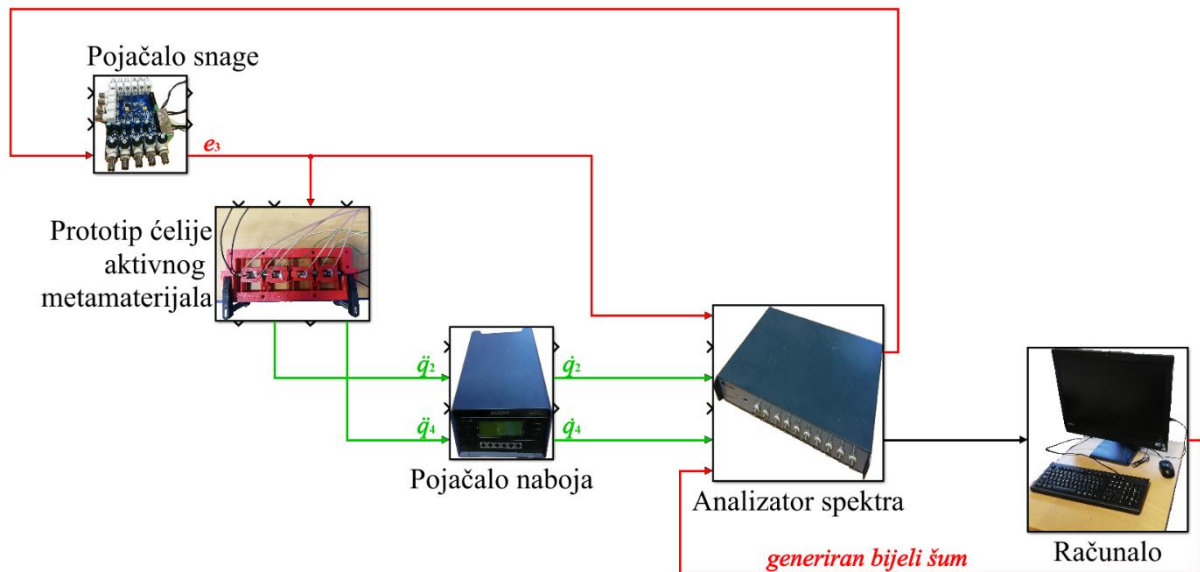
5.3 Analiza stabilnosti eksperimentalnog postava ćelije aktivnog metamaterijala

Stabilnost sustava će se analizirati na jednak način kao što je to opisano u potpoglavlju 4.3, koristeći generalizirani Nyquistov kriterij stabilnosti. Za to je potrebno formirati matricu prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova. Kreće se s mjerenjem prijenosnih funkcija otvorenog kruga za slučaj kada se sustav pobuđuje prvim reaktivnim vibratorom (naponom e_2), kao što je prikazano na slici 5.16. Sve oznake signala preuzete su sa slike 4.2, kako bi se jednostavnije povezale veličine matematičkog modela i eksperimentalnog postava.



Slika 5.16 Mjerenje prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova za slučaj pobude prvim reaktivnim vibratorom

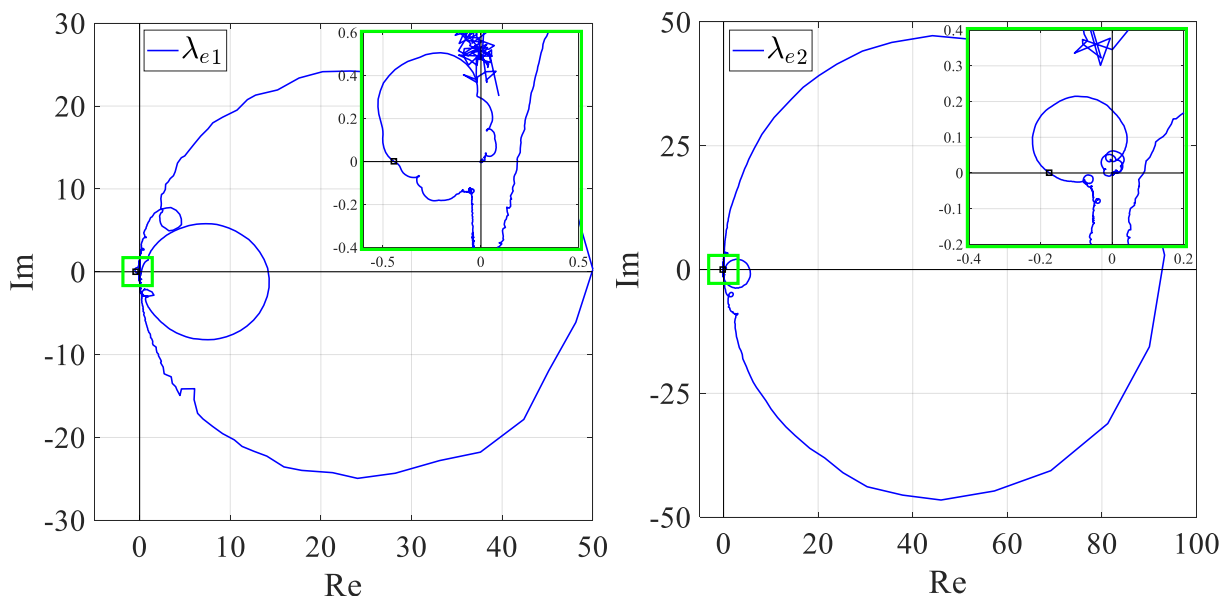
Crvena strelica prikazuje tok ulaznog bijelog šuma generiranog pomoću računala, dok zelene strelice prikazuju tok izlaznog signala akcelerometara. Signal ulaznog napona na pobudnom vibratoru i signali brzina \dot{q}_2 i \dot{q}_4 procesiraju se analizatorom spektra te uvode u računalo gdje se provodi postprocesiranje i pohrana podataka. Softver za postprocesiranje na temelju mjerenih veličina omogućuje formiranje vrijednosti eksperimentalno dobivenih prijenosnih funkcija $\hat{\mathbf{G}}_{sa}(j\omega)$ zadanih s (4.14b). Kako se u ovom slučaju provode mjerenja koristeći pobudni napon e_2 , formirat će se prvi stupac matrice $\hat{\mathbf{G}}_{sa}(j\omega)$. S druge strane, slika 5.17 prikazuje slučaj u kojem se sustav pobuđuje drugim reaktivnim vibratorom (naponom e_3). Postupak mjerenja u tom je slučaju vrlo je sličan prethodnom, pri čemu je jedino izmijenjen ulazni kanal. Nakon provedenih mjerenja i postprocesiranja signala, dobiva se drugi stupac matrice $\hat{\mathbf{G}}_{sa}(j\omega)$.



Slika 5.17 Mjerenje prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova za slučaj pobude drugim reaktivnim vibratorom

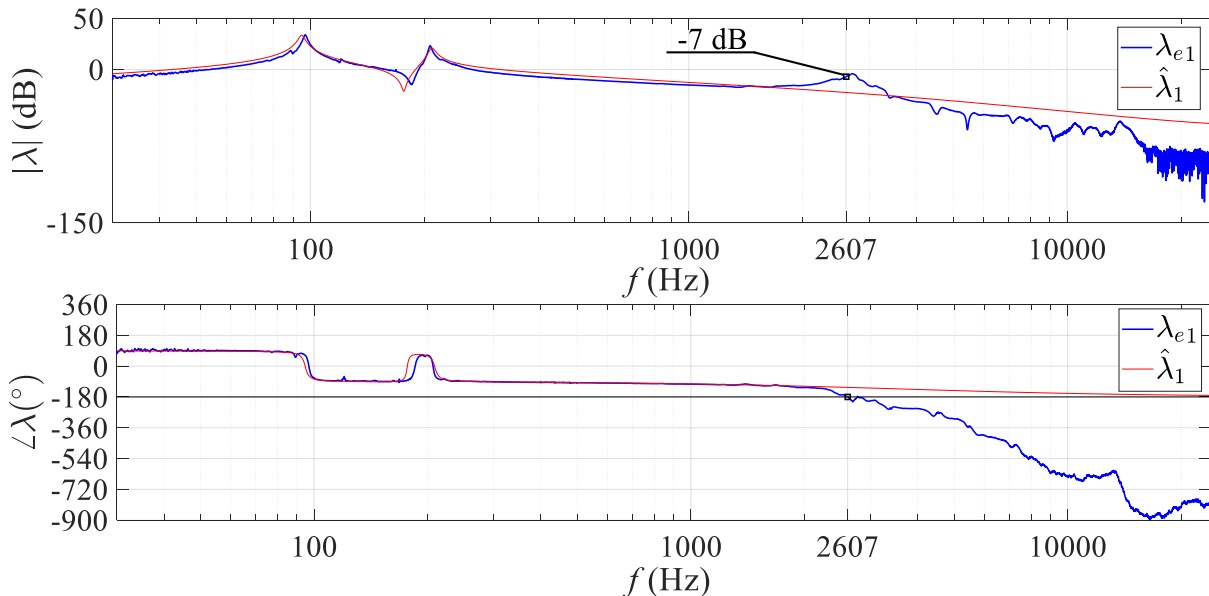
Cjelokupna matrica $\widehat{\mathbf{G}}_{sa}(j\omega)$ formira se za svaku frekvenciju na kojoj se mjerenje provodi, što omogućuje računanje njenih vlastitih vrijednosti na svim frekvencijama (mjerenja su provedena do frekvencije 24 kHz).

Računanje vlastitih vrijednosti prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova, omogućuje prikaz njihovih Nyquistovih kontura, kao što je to prikazano slikom 5.18. Na ovoj slici, kao i svim slikama u nastavku, indeks "e" označava eksperimentalno dobivene rezultate.

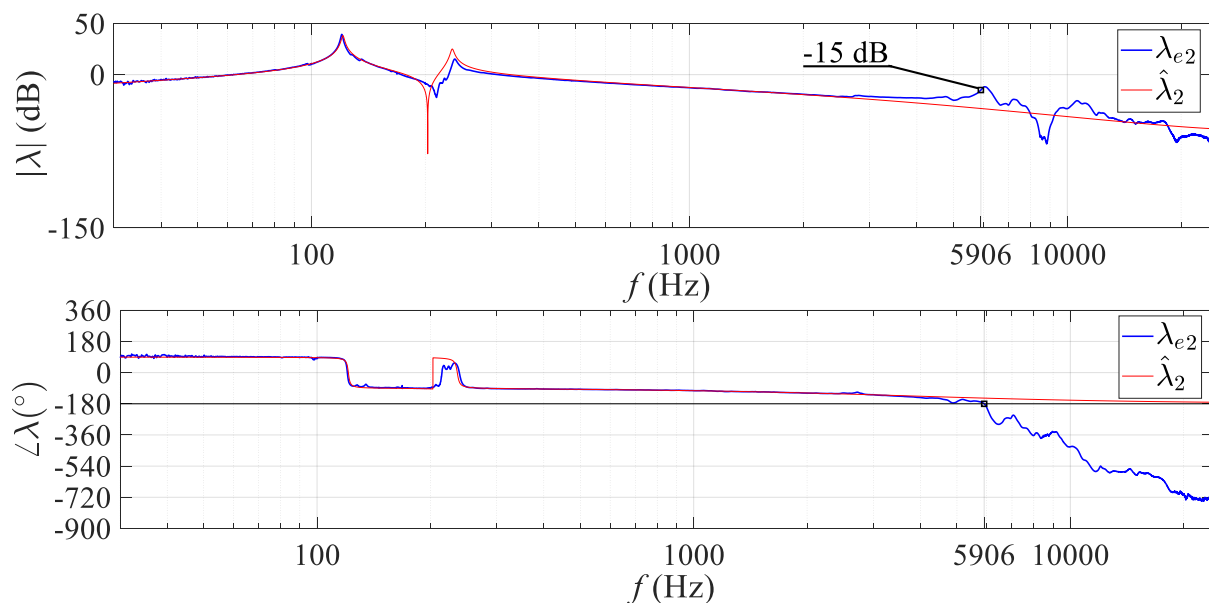


Slika 5.18 Nyquistove konture vlastitih vrijednosti eksperimentalno dobivene matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova (crni kvadratić prikazuje frekvenciju prelaska konture preko negativne realne osi)

Moguće je uočiti kako dobivene konture sijeku negativnu realnu os pri vrijednostima koje su znatno bliže Nyquistovoj točki $-1+0j$ od onih koje su predviđene matematičkim modelom na slici 4.5, što daje indicaciju da je rezerva stabilnosti ovakvog sustava manja od predviđane. Za daljnju analizu povoljnije je prikazati amplitudne i fazne dijagrame istih vlastitih vrijednosti te usporediti rezultate s teorijskim, što je učinjeno slikama 5.19 i 5.20.



Slika 5.19 Amplitudni i fazni dijagram prve vlastite vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: matematički model s koncentriranim parametrima i uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, eksperimentalni rezultati – plavo (crni kvadratić prikazuje frekvenciju prelaska Nyquistove konture preko negativne realne osi)



Slika 5.20 Amplitudni i fazni dijagram druge vlastite vrijednosti matrice prijenosnih funkcija između mjernih i pogonskih članova: matematički model s koncentriranim parametrima i uključenom dinamikom mjernih i pogonskih članova – crveno, eksperimentalni rezultati – plavo (crni kvadratić prikazuje frekvenciju prelaska Nyquistove konture preko negativne realne osi)

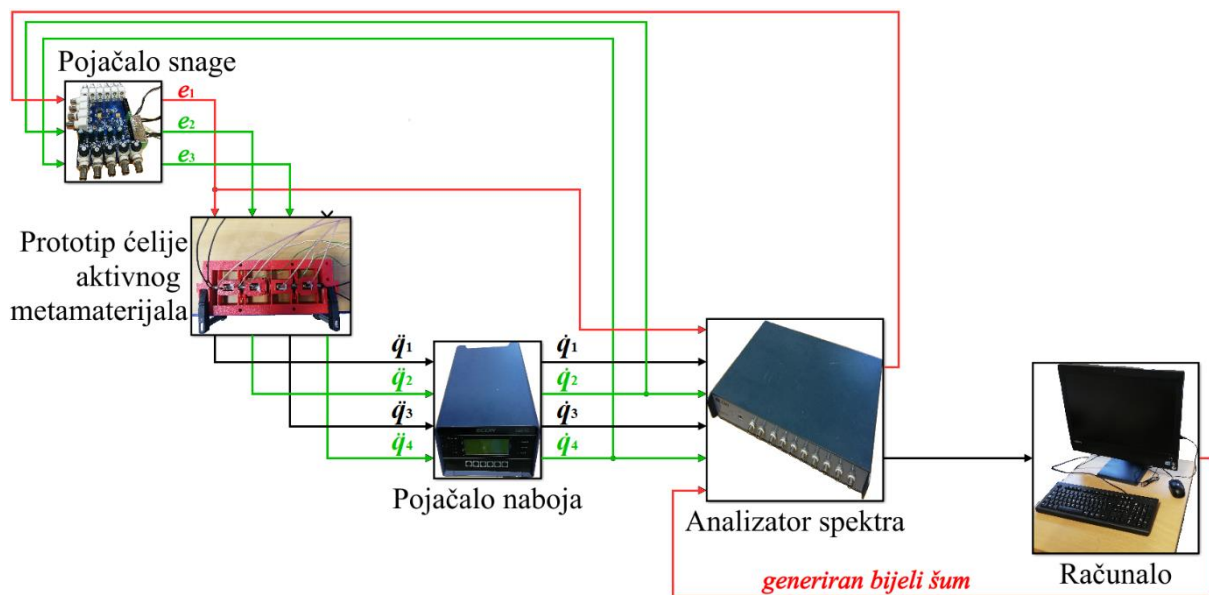
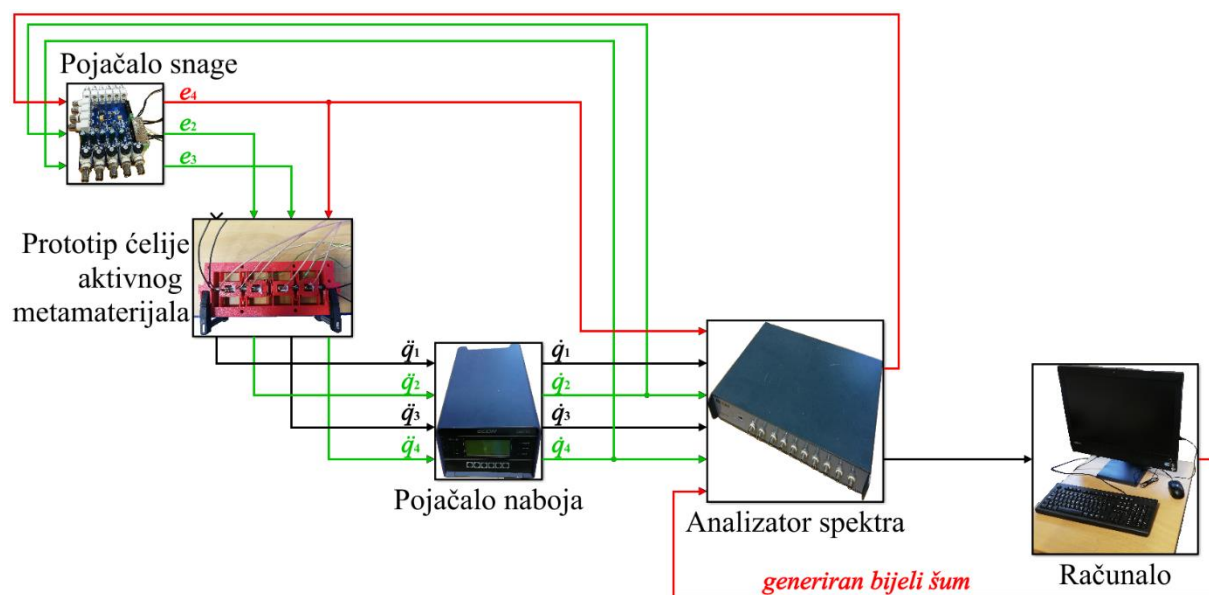
Iz ovih dijagrama dobiva se jasnija informacija o svojstvima stabilnosti aktivnog sustava. Prije svega, moguće je uočiti izuzetno dobro poklapanje matematičkog modela s koncentriranim parametrima i eksperimentalnog postava pri niskim frekvencijama. Međutim, pri frekvencijama višim od 2 kHz dolazi do znatnijeg odstupanja u odzivima. To se objašnjava činjenicom da je fizička realizacija ćelije aktivnog metamaterijala sustav s kontinuiranim parametrima, koji posjeduje beskonačno mnogo vlastitih frekvencija i formi vibriranja. Stoga se i kašnjenje u fazi od 180° javlja pri frekvencijama znatno nižim od teorijski predviđene te uz pojačanja koja su znatno viša od previđenih. Konkretno, teorijski model predviđa amplitudnu rezervu stabilnosti od oko 36 dB (slike 4.6 i 4.7), dok je (uz jednako pojačanje) na eksperimentalnom postavu izmjerena rezerva stabilnosti oko 7 dB (slika 5.19). Iako znatno manja, ova je rezerva stabilnosti zadovoljavajuća, pošto se u praktičnim slučajevima često primjenjuju rezerve od 6 dB. Pojava koja uzrokuje ovakvo ponašanje sustava naziva se prelijevanje (eng. *spillover*) i prisutno je kod regulacije vibracijskog ponašanja sustava s kontinuiranim parametrima, gdje regulacijski sustav ulazi u interakciju s formama vibriranja koje nisu uzete u obzir prilikom sinteze, ali su prisutne u realnom sustavu. Više o ovoj pojavi i mehanizmima njene kompenzacije može se naći u [21] i [22].

Nakon što je sustav analiziran u vidu stabilnosti i pošto je utvrđeno kako će sustav biti stabilan u povratnoj vezi sa zadovoljavajućom rezervom stabilnosti, u idućem se potpoglavlju provode mjerenja karakterističnih prijenosnih funkcija kako bi se utvrdilo na koji način ćelija provodi vibracije u dva karakteristična smjera.

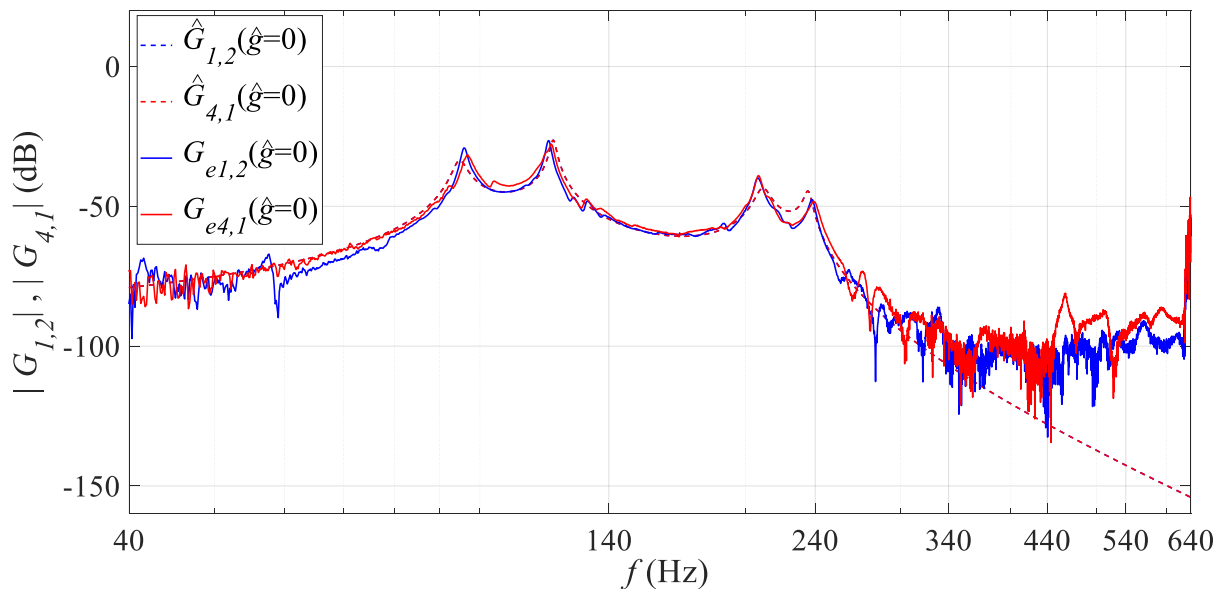
5.4 Karakteristične prijenosne funkcije eksperimentalnog postava ćelije aktivnog metamaterijala

Kako je u prethodnom potpoglavlju utvrđeno da će ćelija aktivnog metamaterijala u zatvorenoj povratnoj vezi biti stabilna s amplitudnom rezervom stabilnosti od 7 dB, ovdje će se prikazati rezultati mjerenja koji pokazuju na koji način sustav provodi vibracije u smjeru od prvog prema četvrtom stupnju slobode, odnosno u obratnom smjeru. Mjerenja se provode u slučaju da su povratne veze otvorene, a sustav je pasivan te u slučaju u kojem su povratne veze zatvorene, čime ćelija metamaterijala postaje aktivna. Konfiguracija eksperimentalnog postava na slici 5.21 prikazuje slučaj u kojem se sustav pobuđuje vibratorom veznim uz prvi stupanj slobode i okvir (krajnje lijevi vibrator na slici 5.11), tj. slučaj u kojem je ulaz u sustav napon e_1 (prema slici 4.2). U tom slučaju mjeri se brzina na posljednjem stupnju slobode (krajnje desnom na

slici 5.11), čime se dobiva element $\hat{G}_{4,1}(s)$ matrice prijenosnih funkcija zadane s (4.12b). Na slici 5.21 crvenom bojom je ponovno prikazan tok signala ulaznog (pobudnog) napona, dok sada zelene strelice prikazuju tok signala potrebnih za ostvarivanje povratnih veza. Analogno, ukoliko se sustav pobuđuje vibratorom vezanim uz četvrti stupanj slobode i okvir (krajnje desni vibrator na slici 5.11), a mjeri se brzina na prvom stupnju slobode (krajnje lijevom na slici 5.11) tada se dobiva element $\hat{G}_{1,2}(s)$ matrice zadane s (4.12b). Takva konfiguracija eksperimentalnog postava prikazana je slikom 5.22.

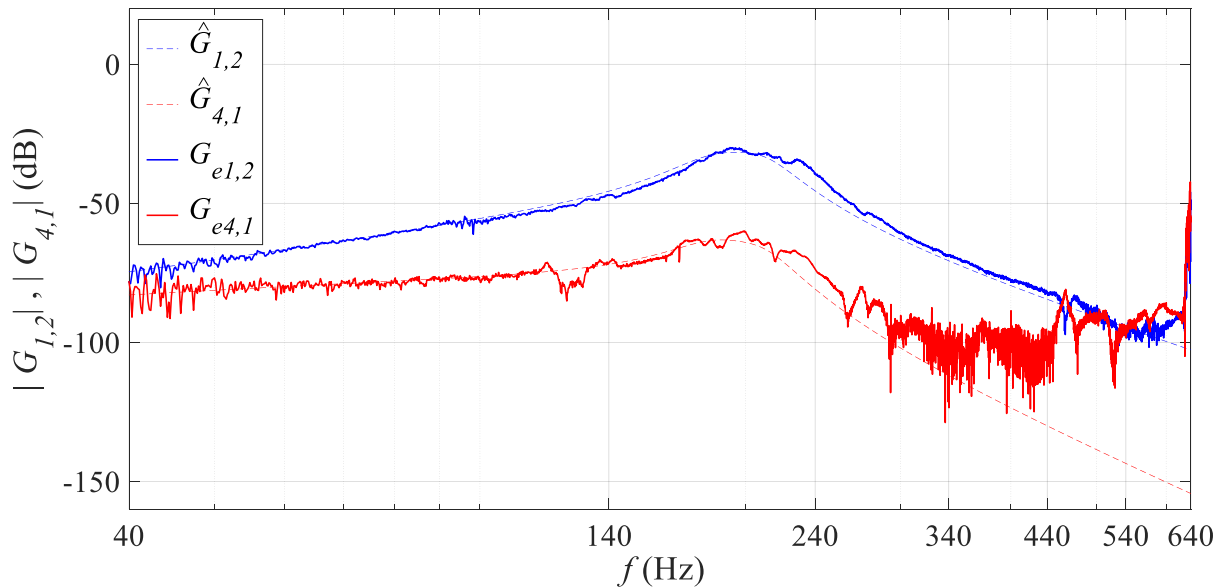
Slika 5.21 Mjerenje karakteristične prijenosne funkcije $\hat{G}_{4,1}(s)$ Slika 5.22 Mjerenje karakteristične prijenosne funkcije $\hat{G}_{1,2}(s)$

U slučaju kada povratne veze nisu zatvorene, a sustav je pasivan, dobivaju se odzivi sustava prikazani slikom 5.23. Uz odziv eksperimentalnog postava (pune linije) prikazan je i odziv matematičkog modela (isprekidane linije). Uočava se kako matematički model predviđa recipročan odziv sustava, pošto su prijenosne funkcije $\hat{G}_{1,2}$ i $\hat{G}_{4,1}$ jednake u slučaju da je pojačanje povratne veze jednako nuli. S druge strane, iako su gotovo identične, među mjerenim karakteristične prijenosnim funkcijama postoje određene razlike, koje su posebno izražene pri višim frekvencijama, što se može objasniti činjenicom da svi korišteni mjerni članovi aktivnog sustava nisu jednaki. Posebno, šum pri visokim frekvencijama posljedica je izuzetno malih amplituda vibracija sustava, zbog čega se odziv sustava približava šumnom podu (eng. *noise floor*) pri kojem nije moguće razlučiti utjecaj šuma iz okoline i pobudnog signala.



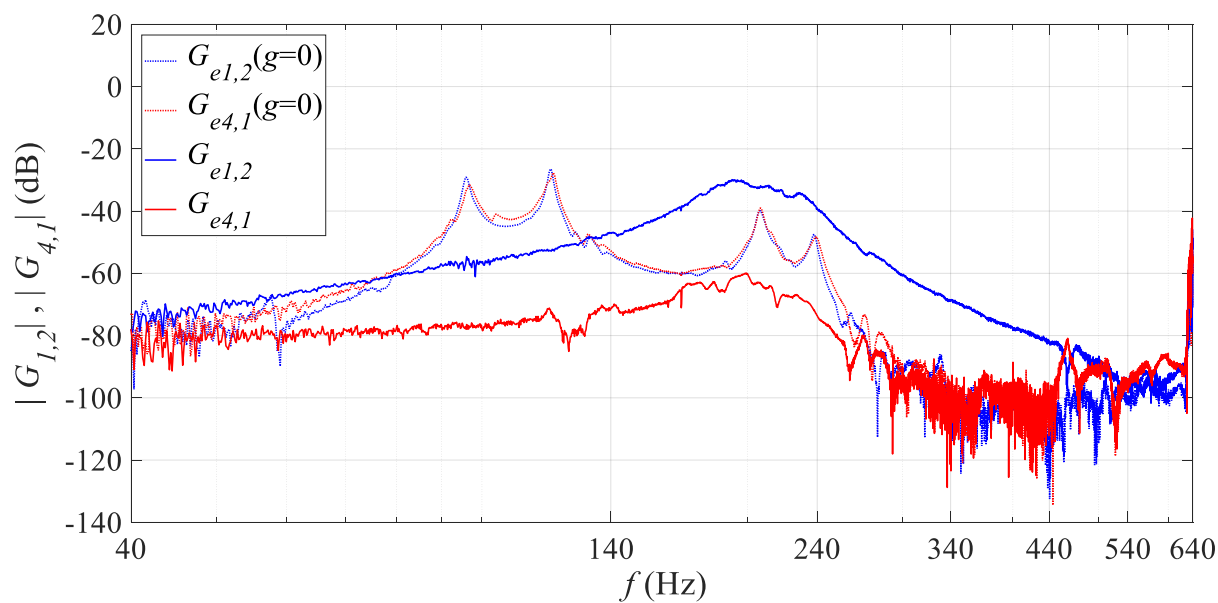
Slika 5.23 Usporedba amplituda karakterističnih prijenosnih funkcija ćelije aktivnog metamaterijala za slučaj bez uključenih povratnih veza: eksperimentalno dobiveni rezultati – pune linije, matematički model s diskretnim parametrima i dinamikom mjernih i pogonskih članova – isprekidane linije

Ukoliko se sada povratne veze ćelije aktivnog metamaterijala zatvore, dobivaju se odzivi kao na slici 5.24, gdje je jasno da sada postoji znatna razlika u transmisiji vibracija u suprotnim smjerovima. Drugim riječima, kao što je predviđeno matematičkim modelima iz prethodnih poglavlja, sustav s uključenim povratnim vezama ne podliježe principu recipročnosti. Konkretno, razlika u amplitudama ovih prijenosnih funkcija pri frekvenciji od 80 Hz iznosi oko 15 dB, pri frekvenciji od 200 Hz 30 dB, dok pri frekvencijama od oko 300 Hz ta razlika postaje još veća i iznosi oko 40 dB. Međutim, pri višim frekvencijama nije moguće uspoređivati odzive zbog premale osjetljivosti mjernih članova, tj. zbog toga što se amplituda približava šumnom podu.



Slika 5.24 Usporedba amplituda karakterističnih prijenosnih funkcija ćelije aktivnog metamaterijala za slučaj s uključenim povratnim vezama ($\hat{g} = 300 \text{ V s m}^{-1}$): eksperimentalno dobiveni rezultati – pune linije, matematički model s diskretnim parametrima i dinamikom mjernih i pogonskih članova – isprekidane linije

Kako bi se transmisija vibracija aktivnog i pasivnog sustava stavila u kontekst, slikom 5.25 prikazane su usporedno eksperimentalno dobivene karakteristične prijenosne funkcije za slučaj sa uključenim (pune linije), odnosno isključenim (točkaste linije) povratnim vezama. Može se uočiti da je amplituda prijenosne funkcije označene crvenom bojom (prijenosna funkcija $G_{e4,1}$) u slučaju zatvorenih povratnih veza manja pri svim frekvencijama od slučaja u kojem povratne veze nisu zatvorene. To znači da u tom smjeru ćelija aktivnog metamaterijala znatno slabije provodi vibracije od slučaja u kojem je sustav pasivan. S druge strane, amplituda prijenosne funkcije označena plavom bojom (prijenosna funkcija $G_{e1,2}$) pri frekvencijama iznad 140 Hz poprima veće vrijednosti kada su povratne veze zatvorene u odnosu na slučaj u kojem je sustav pasivan. Drugim riječima, u tom smjeru ćelija aktivnog metamaterijala pri višim frekvencijama bolje provodi vibracije od slučaja u kojem je sustav pasivan.

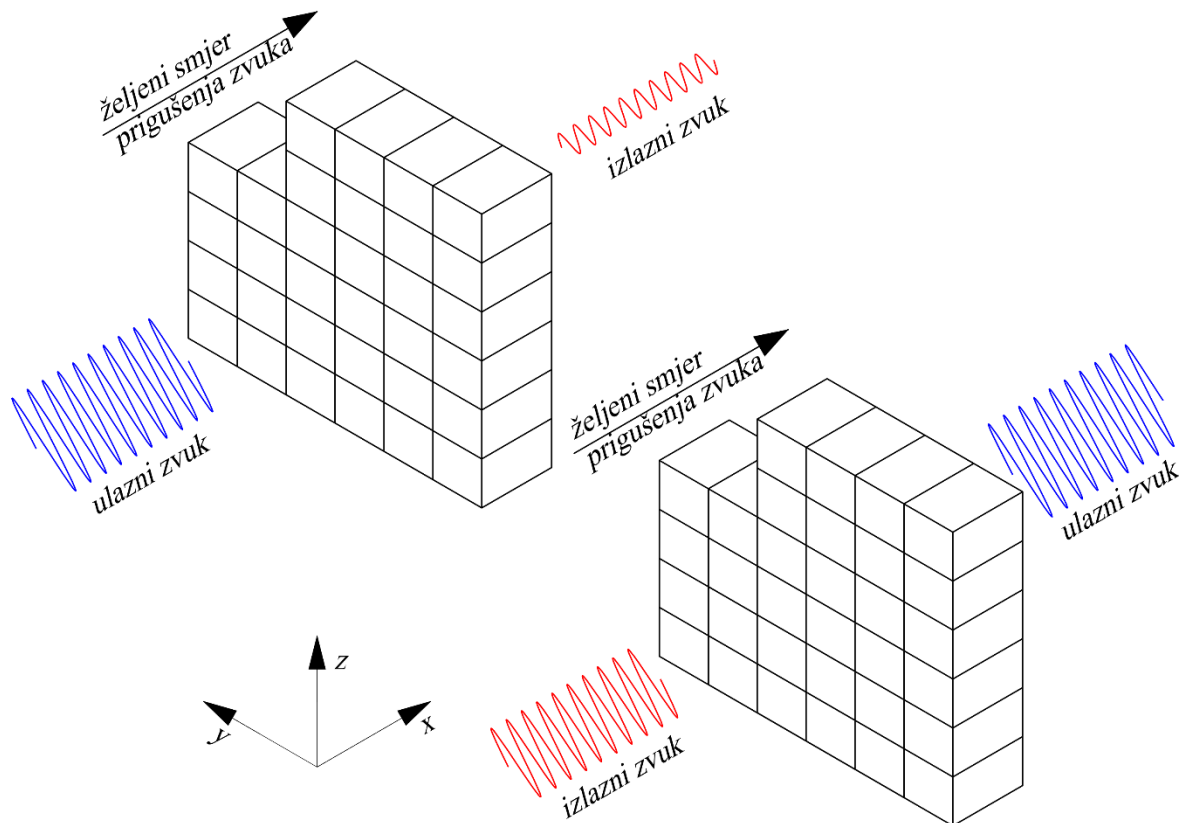


Slika 5.25 Usporedba amplituda karakterističnih prijenosnih funkcija ćelije aktivno metamaterijala: sustav s isključenim povratnim vezama – točkasta linija, sustav s uključenim povratnim vezama – puna linija

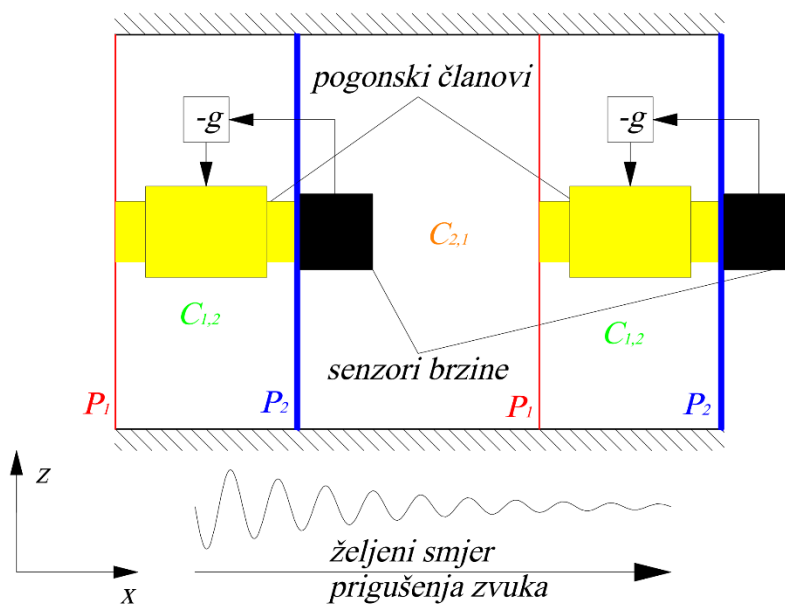
6 Rasprava i budući razvoj

U prethodnim je poglavljima predstavljen način osiguravanja neregipročnog odziva linearnih vibracijskih sustava pomoću nekolociranih povratnih veza po brzini. Teorijski, kao i eksperimentalni rezultati ovog rada pokazuju kako koncept ćelije aktivnog metamaterijala s implementiranim nekolociranim povratnim vezama u decentraliziranoj konfiguraciji može omogućiti značajno smanjenje transmisije vibracija samo u jednom smjeru. Iako nije moguće osigurati bezuvjetnu stabilnost u realnim uvjetima koji uključuju vibracijske sustave s distribuiranim parametrima te mjerne i pogonske članove koji imaju vlastitu dinamiku, pažljivim konstruiranjem pasivnog sustava (zadovoljavanjem uvjeta (3.7) i (3.8)) moguće je osigurati zadovoljavajuću rezervu stabilnosti.

Kao što je u drugom poglavlju rečeno, problem transmisije vibracija može predstavljati model reduciranog reda za problem transmisije zvuka. Uzevši to u obzir zajedno s teorijskim i eksperimentalnim rezultatima ovog teksta, dolazi se do koncepta aktivnog akustičnog metamaterijala, koji je prikazan slikom 6.1. Aktivna metamaterijalna pregrada sastavljena je od ponavljajućih ćelija strukture zadane slikom 6.2. Svaka se ćelija sastoji od dva para panela P_1 i P_2 razdvojenih šupljinom $C_{2,1}$, koja je ispunjena akustičkim medijem (zrakom). U šupljinama $C_{1,2}$ između panela P_1 i P_2 , koje su također ispunjene akustičkim medijem, smješten je po jedan pogonski član, kojim je moguće ostvariti silu među panelima koja je proporcionalna mjerenoj brzini panela P_2 . Ovakav je sustav moguće modelirati (uzimajući u obzir samo prve forme vibriranja panela P_1 i P_2) kao vibracijske sustave s koncentriranim parametrima zadane slikama 3.1, odnosno 4.2.



Slika 6.1 Koncept aktivne akustične metamaterijalne pregrade



Slika 6.2 Koncept ćelije aktivnog akustičnog metamaterijala

Kako su ti modeli detaljno analizirani u smislu stabilnosti i učinkovitosti smanjenja transmisije vibracija samo u jednom smjeru, budući razvoj ovakve ćelije aktivnog akustičnog metamaterijala uključivao bi konstrukciju panela P_1 i P_2 koji zadovoljavaju kriterije (3.7) i (3.8) te izbor prikladnih mjernih i pogonskih članova za ostvarivanje stabilnih povratnih veza.

Međutim, za razliku od ovdje predstavljenog eksperimentalnog postava ćelije aktivnog metamaterijala, ploče posjeduju vlastite forme vibriranja koje su smještene u znatno zbijenijem frekvencijskom pojasu, što znači da bi regulacijski sustav mogao pri znatno nižim frekvencijama ući u interakciju s formama vibriranja koje nisu modelirane i na taj način destabilizirati sustav. Iz tog razloga, a sa svrhom korištenja aktivne akustičke metamaterijalne pregrade pri visokim frekvencijama, posebnu pažnju bilo bi potrebno posvetiti izradi kompenzatora mehanizma prelijevanja.

7 Zaključak

Teorijska razmatranja problema pasivne izolacije vibracija sustava s koncentriranim parametrima dovela su do zaključka kako dodavanje stupnjeva slobode vibracijskom sustavu i prigušenja među njima kao posljedicu ima smanjenje \mathcal{H}_2 norme karakteristične prijenosne mobilnosti sustava. Međutim, takvi sustavi izolacije vibracija kao temeljni nedostatak imaju tešku praktičnu implementaciju, zbog toga što u općenitom slučaju nije moguće dodavati proizvoljan broj stupnjeva slobode, kao ni proizvoljne iznose prigušenja. Osim toga, uočilo se kako povećavanje prigušenja među stupnjevima slobode, čak i kada su ona optimirana prema kriteriju minimizacije \mathcal{H}_2 norme, uzrokuje povećanje amplitude karakterističnih prijenosnih mobilnosti sustava pri visokim frekvencijama, što predstavlja određen problem ukoliko je poznato da će pobuda sustava djelovati pri tim frekvencijama. Stoga se pokazalo kako uvođenje nekolociranih povratnih veza po brzini vibracija može osigurati znatno veću učinkovitost smanjenja transmisije vibracija u željenom smjeru, pri čemu je izolacija vibracija aktivnog sustava bolja pri svim frekvencijama od pasivnog sustava. Osim ove prednosti, uočilo se kako transmisija vibracija kroz aktivan sustav s ovakvim oblikom regulacije nije recipročna, što znači da sustav ne provodi vibracije jednoliko u svim smjerovima, već da u jednom smjeru znatno više prigušuje vibracije od obratnog smjera.

Navedeni su rezultati dali temelj razvoju koncepta aktivnog metamaterijala, koji koristi dvije decentralizirane povratne veze po brzini, od kojih je svaka u nekolociranoj konfiguraciji. Analiza koncipirane ćelije za slučaj u kojem su mjerni i pogonski članovi idealizirani (nemaju vlastitu dinamiku) dovela je do kriterija koje bi parametri pasivnog mehaničkog sustava trebali zadovoljiti kako bi sustav s uključenom povratnom vezom bio stabilan za sva pojačanja, zbog toga što u općenitom slučaju nekolocirane povratne veze ne mogu garantirati bezuvjetnu stabilnost. Detaljnijom analizom modela ćelije aktivnog metamaterijala u kojem je uključena zanemarena dinamika mjernih i pogonskih članova pokazalo se kako ta dinamika narušava svojstva stabilnosti sustava, pa bezuvjetnu stabilnost u slučaju realnih mjernih i pogonskih članova nije moguće garantirati, ali je moguće osigurati zadovoljavajuću rezervu stabilnosti. Rezultati teorijskih razmatranja verificirani su eksperimentalnim prototipom ćelije aktivnog metamaterijala te je zabilježena značajna razlika u transmisiji vibracija u suprotnim smjerovima koja pri određenim frekvencijama prelazi 30 dB, čime se pokazalo kako je u linearnom vibracijskom sustavu moguće osigurati nerekipročan odziv. Razlike u odzivima matematičkog modela i eksperimentalnog postava pri visokim frekvencijama i ponešto lošija svojstva stabilnosti objašnjavaju se pojavom mehanizma prelijevanja – interakcije sustava regulacije s

formama vibriranja koje nisu uzete u obzir tijekom sinteze. Potencijalno poboljšanje svojstava stabilnosti ovakvih sustava predstavlja sinteza kompenzatora mehanizma prelijevanja.

Rezultati ovog rada ukazuju na potencijalnu primjenu decentraliziranih povratnih veza u nekolociranoj konfiguraciji pri konstruiranju aktivnih akustičkih metamaterijala: sustava koji bi omogućili znatno drugačiju transmisiju zvuka ovisno o smjeru kojim on ulazi u sustav.

Literatura

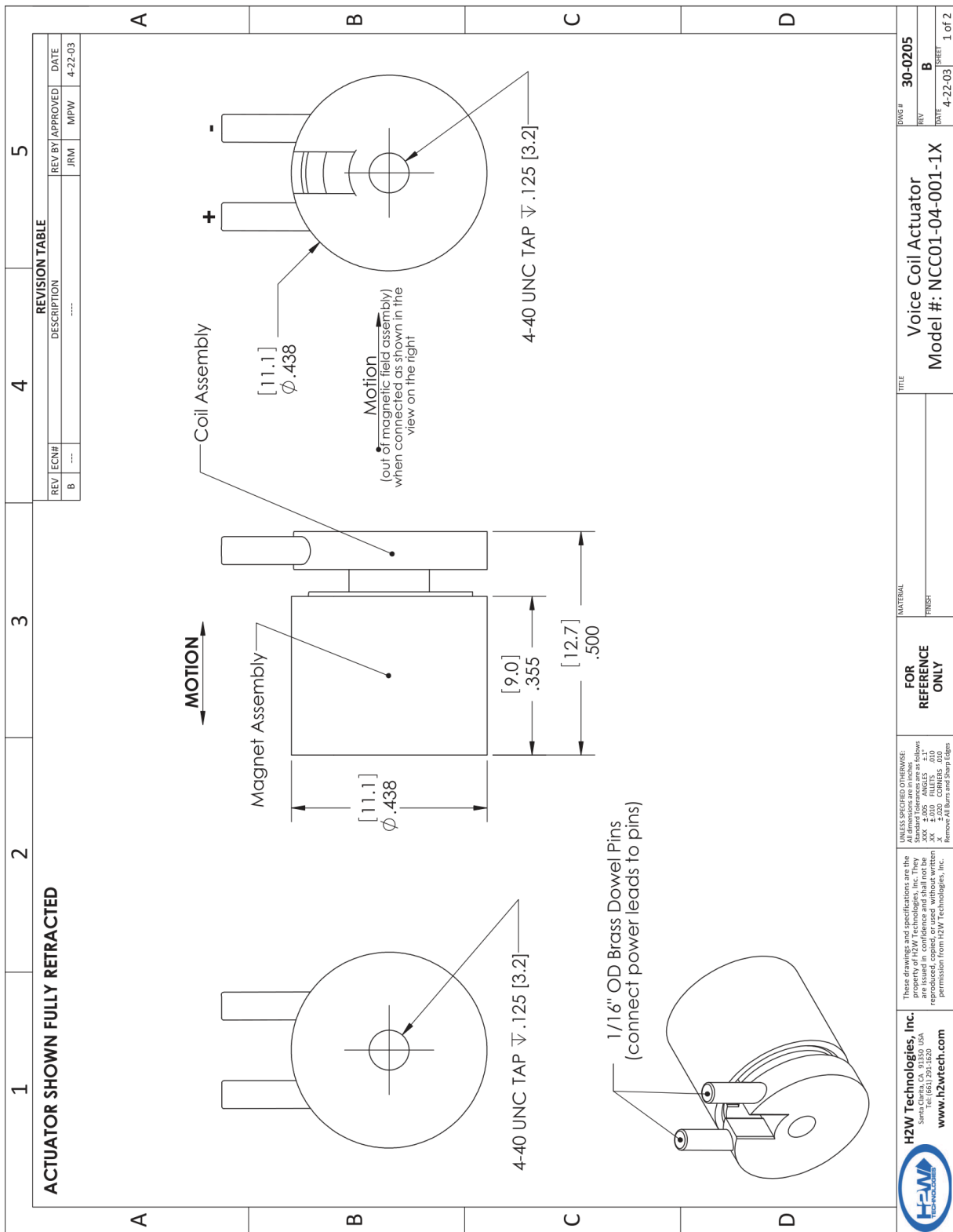
- [1] F. Fahy and P. Gardonio, *Sound and structural vibration: Radiation, transmission and response* / Frank Fahy, Paolo Gardonio, 2nd ed. Amsterdam, London: Elsevier/Academic, 2007.
- [2] F. Fahy and J. G. Walker, Eds., *Advanced applications in acoustics, noise and vibration*. Boca Raton: CRC Press, 2019.
- [3] J. F. Camino and J. Arruda, “H₂ and H_∞ feedforward and feedback compensators for acoustic isolation,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, no. 8, pp. 2538–2556, 2009, doi: 10.1016/j.ymsp.2009.04.006.
- [4] C. Claeys, N. G. Rocha de Melo Filho, L. van Belle, E. Deckers, and W. Desmet, “Design and validation of metamaterials for multiple structural stop bands in waveguides,” *Extreme Mechanics Letters*, vol. 12, pp. 7–22, 2017, doi: 10.1016/j.eml.2016.08.005.
- [5] F. Zangeneh-Nejad and R. Fleury, “Active times for acoustic metamaterials,” *Reviews in Physics*, vol. 4, p. 100031, 2019, doi: 10.1016/j.revip.2019.100031.
- [6] C. Claeys, E. Deckers, B. Pluymers, and W. Desmet, “A lightweight vibro-acoustic metamaterial demonstrator: Numerical and experimental investigation,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71, pp. 853–880, 2016, doi: 10.1016/j.ymsp.2015.08.029.
- [7] R. Fleury, D. Sounas, and A. Alù, “An invisible acoustic sensor based on parity-time symmetry,” *Nature communications*, vol. 6, p. 5905, 2015, doi: 10.1038/ncomms6905.
- [8] H. Helmholtz, “Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche,” *Ann. Phys. Chem.*, vol. 165, no. 6, pp. 211–233, 1853, doi: 10.1002/andp.18531650603.
- [9] N. Alujević, I. Senjanović, I. Čatipović, and N. Vladimir, “The absence of reciprocity in active structures using direct velocity feedback,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 438, pp. 251–256, 2019, doi: 10.1016/j.jsv.2018.09.035.
- [10] M. Jalšić, N. Alujević, A. M. Šegon, I. Čatipović, “Broadband reciprocity loss in structures activated by non-collocated velocity feedback,” *The 27th International Congress on Sound and Vibration*, Jul. 2021.
- [11] M. J. Balas, “Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures,” *Journal of Guidance and Control*, vol. 2, no. 3, pp. 252–253, 1979, doi: 10.2514/3.55869.
- [12] A. Caiazzo, N. Alujević, B. Pluymers, and W. Desmet, “Active control of turbulent boundary layer-induced sound transmission through the cavity-backed double panels,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 422, pp. 161–188, 2018, doi: 10.1016/j.jsv.2018.02.027.
- [13] S. J. Elliott and M. E. Johnson, “Radiation modes and the active control of sound power,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 94, no. 4, pp. 2194–2204, 1993, doi: 10.1121/1.407490.
- [14] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall; London : Prentice-Hall International, 1996.

- [15] M. M. Peet, “LMI Methods in Optimal and Robust Control - Lecture 11: Relationship between H2, LQG and LGR and LMIs for state and output feedback H2 synthesis,” [Online]. Available: <http://control.asu.edu/Classes/MAE598/598Lecture11.pdf>
- [16] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*, 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall; London : Prentice Hall International, 1996.
- [17] N. Alujević, H. Wolf, P. Gardonio, and I. Tomac, “Stability and performance limits for active vibration isolation using blended velocity feedback,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, no. 21, pp. 4981–4997, 2011, doi: 10.1016/j.jsv.2011.05.020.
- [18] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable feedback control: Analysis and design / Sigurd Skogestad, Ian Postlethwaite*, 2nd ed. Chichester: Wiley, 2005.
- [19] C. G. Díaz, C. Paulitsch, and P. Gardonio, “Smart panel with active damping units. Implementation of decentralized control,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 124, no. 2, pp. 898–910, 2008, doi: 10.1121/1.2945168.
- [20] Prusa Research, *Original Prusa i3 MK3S 3D printer*. [Online]. Available: <https://shop.prusa3d.com/en/3d-printers/181-original-prusa-i3-mk3s-3d-printer.html#> (accessed: Jun. 13 2021.).
- [21] M. Balas, “Feedback control of flexible systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 23, no. 4, pp. 673–679, 1978, doi: 10.1109/TAC.1978.1101798.
- [22] Wei Liu, *Vibration control of large scale flexible structures using magnetorheological dampers*, 2005. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/252588668_Vibration_control_of_large_scale_flexible_structures_using_magnetorheological_dampers

PRILOZI

- I. CD-R disk
- II. Specifikacije elektrodinamičkog vibratora
- III. Specifikacije seizmičkog akcelerometra

PRILOG II. Specifikacije elektrodinamičnog vibratora



PRILOG III. Specifikacije seizmičkog akcelerometra

PRODUCT DATA

Piezoelectric Charge Accelerometer Types 4371 and 4371-V

Uses

- General purpose vibration testing and analysis
- High-frequency measurements
- Measurements in high-temperature environments

Features

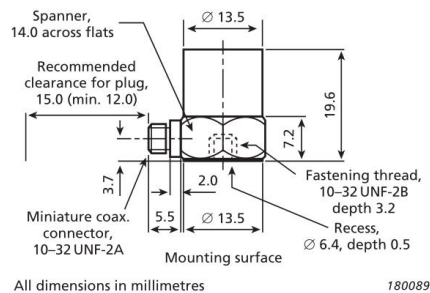
- High sensitivity
- High resonance frequency



Description

Type 4371 DeltaShear™ Unigain* accelerometer. It features a 10–32 UNF-2A side connector and a 10–32 UNF-2B threaded hole for mounting. Type 4371-V† has the same specifications and long-term stability as Type 4371, but it has a relaxed sensitivity tolerance.

Fig. 1 Dimensions of Type 4371



Characteristics

This piezoelectric accelerometer may be treated as a charge source. Its sensitivity is expressed in terms of charge per unit acceleration (pC/ms^{-2} , pC/g).

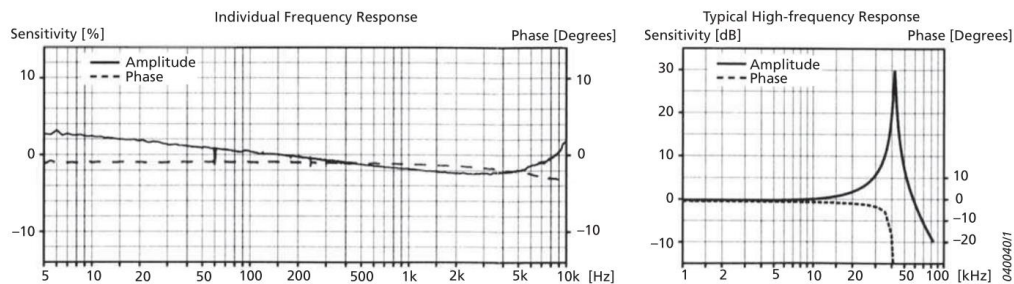
The DeltaShear design consists of three piezoelectric elements and three seismic masses arranged in a triangular configuration around a triangular centre post. They are held in place by a clamping ring that isolates the configuration from the base. The ring also prestresses the piezoelectric elements to give a high degree of linearity. This design provides a high sensitivity-to-mass ratio, a relatively high resonance frequency and high isolation from base strains and temperature transients.

The piezoelectric element is a PZ 23 lead zirconate titanate element, and the housing material is titanium.

Calibration

The sensitivity is calibrated to a convenient value such as 1, 3.16 or $31.6 \text{ pC}/\text{ms}^{-2}$ for Unigain accelerometers. The sensitivity given in the calibration chart has been measured at 159.2 Hz with 95% confidence level, using the coverage factor $k = 2$.

Fig. 2 Frequency response curves for Type 4371



* Unigain: The individual measured sensitivity is within $\pm 2\%$ of the specified sensitivity

† V-type: The individual measured sensitivity is within $\pm 15\%$ of the specified sensitivity

Specifications – Charge Accelerometer Types 4371 and 4371-V

Type No.	4371	4371-V
General		
Weight	g	11
	oz	0.39
Charge Sensitivity (at 159.2 Hz)	pC/ms ⁻²	1 ± 2%
	pC/g	9.8 ± 2%
Frequency Range (±10% limit)	Hz	0.1 to 12600
Mounted Resonance Frequency	kHz	42
Max. Transverse Sensitivity (at 30 Hz, 100 ms ⁻²)	%	<4
Transverse Resonance Frequency	kHz	15
Max. Operational Continuous Sinusoidal Acceleration (peak)	kms ⁻²	60
	g	6000
Electrical		
Residual Noise Level (measured with NEXUS Type 2692-001 in the specified frequency range)	mms ⁻²	2.4
	mg	0.24
Capacitance (excluding cable)	pF	1100
Min. Leakage Resistance (at 20 °C)	GΩ	20
Environmental		
Operating Temperature Range	°C	-74 to +250
	°F	-101 to +482
Temperature Coefficient of Sensitivity	%/°C	0.05*
Temperature Transient Sensitivity (3 Hz Low. Lim. Freq. (-3 dB, 6 dB/octave))	ms ⁻² /°C	0.4
	g/°F	0.02
Base Strain Sensitivity (at 250 µε in the base plane)	ms ⁻² /µε	0.02
	g/µε	0.002
Magnetic Sensitivity (50 Hz, 0.038 T)	ms ⁻² /T	4
	g/kG	0.04
Max. Non-destructive Shock (± peak)	kms ⁻²	200
	g	20000
Mechanical		
Housing Material		Titanium ASTM Grade 2
Piezoelectric Sensing Element		PZ 23
Construction		DeltaShear
Sealing		Welded
Electrical Connector		10-32 UNF-2A
Mounting		10-32 UNF-2B × 3.2 mm threaded hole
Mounting Torque	Max.	Nm (lbf-in)
	Min.	3.5 (31)
		0.5 (4.4)

* In the temperature range -25 to +125 °C (-13 to +257 °F)

All values are typical at 25 °C (77 °F) unless measurement uncertainty is specified

COMPLIANCE WITH STANDARDS



Brüel & Kjær and all other trademarks, service marks, trade names, logos and product names are the property of Brüel & Kjær or a third-party company.

Brüel & Kjær Sound & Vibration Measurement A/S
DK-2850 Nærum · Denmark · Telephone: +45 77 41 20 00 · Fax: +45 45 80 14 05
www.bksv.com · info@bksv.com
Local representatives and service organizations worldwide

Although reasonable care has been taken to ensure the information in this document is accurate, nothing herein can be construed to imply representation or warranty as to its accuracy, currency or completeness, nor is it intended to form the basis of any contract. Content is subject to change without notice – contact Brüel & Kjær for the latest version of this document.

Ordering Information

Type 4371

includes the following accessories:

- Carrying box
- Calibration chart
- AO-0038: Low-noise coaxial cable, 10-32 UNF connectors, length 1.2 m
- 10-32 UNF threaded steel stud, length 12.7 mm

Type 4371-V

includes the following accessories:

- Carrying box
- Calibration chart
- 10-32 UNF threaded steel stud, length 12.7 mm

Optional Accessories	
AO-0038-x-yyy*	Low-noise coaxial cable, 10-32 UNF connectors, 250 °C (482 °F)
AO-0122-x-yyy*	Super low-noise cable, 10-32 UNF connectors, 250 °C (482 °F)
AO-0231-x-yyy*	Super low-noise cable, 10-32 UNF to TNC, 180 °C (356 °F)
AO-1382-x-yyy*	Flexible double-screened coaxial cable, 10-32 UNF connectors, 250 °C (482 °F)
DB-0544	Probe with round tip, 10-32 UNF
JJ-0207	Plug adaptor, 10-32 UNF to TNC (female)
JP-0162	Plug adaptor, 10-32 UNF to TNC (male)
QA-0013	Hexagonal key for 10-32 UNF studs
QA-0029	Tap for 10-32 UNF thread
UA-0078	Accelerometer accessory set
UA-0553	Mechanical filter (set of five)
UA-0642	Mounting magnet and two insulating discs
UA-0866	Cementing stud, 10-32 UNF, dia. 14 mm (set of 25)
YG-0150	Steel stud, double-ended with flange, 10-32 UNF, length 5.3 mm
YJ-0216	Beeswax for mounting
YP-0080	Probe with sharp tip, 10-32 UNF
YP-0150	Insulated stud, fully threaded, 10-32 UNF, length 13 mm
YQ-2960	Set screw, 10-32 UNF × 1/2" (12.8 mm)
YQ-2962	Set screw, 10-32 UNF × 5/16" (7.7 mm)
Type 4294	Calibration Exciter
Calibration Services	
ACC-M-CAI	Accredited initial calibration
ACC-M-CAF	Accredited calibration
ACC-M-CFF	Factory standard calibration
ACC-M-CTF	Traceable calibration

* x = D (decimetres) or M (metres)
yyy = length in decimetres or metres
Please specify cable length when ordering

BP 2036-14 2018-08 © Brüel & Kjær. All rights reserved.



Brüel & Kjær