

# Optimizacija smještaja osjetnika vibracija

---

Rožić, Jurica

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:472525>

Rights / Prava: [Attribution-NonCommercial 4.0 International](#)/[Imenovanje-Nekomercijalno 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-09**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Jurica Rožić**

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Dr. sc. Marko Jokić, dipl. ing.

Student:

Jurica Rožić

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru dr.sc. Marku Jokiću na smjernicama i savjetima za izradu ovog diplomskog rada.

Zahvaljujem se svojoj obitelji na financijskoj i moralnoj podršci za vrijeme studiranja, te se na kraju zahvaljujem kolegi Petru Čajiću na velikodušnoj pomoći pri učenju.

Jurica Rožić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa: 602 - 04 / 20 - 6 / 3	
Ur. broj: 15 - 1703 - 20 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Jurica Rožić** Mat. br.: 0036452093

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Optimizacija smještaja osjetnika vibracija**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Optimization of vibration sensors placement**

Opis zadatka:

Piezoelektrični osjetnici vibracija, zajedno s odgovarajućim sustavima za obradu i pretvorbu signala i pohranu izmjerenih podataka, predstavljaju najčešće korištene osjetnike za mjerenje mehaničkih vibracija i osnova su brojnih laboratorijskih postava ili sustava za nadzor stanja konstrukcija. Osjetnici se pričvršćuju na konstrukciju ili laboratorijski uzorak i mjere mehaničke vibracije u smjerovima određenim njihovim smještajem. Pritom broj i smještaj osjetnika igra ključnu ulogu u dobivanju potpune slike o dinamičkom ponašanju konstrukcije.

U okviru ovog rada potrebno je razviti algoritam za optimizaciju smještaja osjetnika vibracija. Dati detaljan pregled postojećih pristupa za optimizaciju smještaja osjetnika, te odabrati odgovarajuću metodu optimizacije. Razvijeni algoritam implementirati u vidu računalnog programa i provjeriti učinkovitost na numeričkom primjeru.

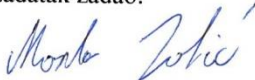
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
30. travnja 2020.

Datum predaje rada:  
2. srpnja 2020.

Predviđeni datum obrane:  
6. – 10.7.2020.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr. sc. Marko Jokić

Predsjednica Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Položaj i broj osjetnika.....	1
1.2. Primjer.....	2
2. OPTIMIRANJE SMJEŠTAJA OSJETNIKA.....	3
2.1. Modeliranje sustava .....	3
2.2. Modeliranje osmatrača .....	5
2.3. Norme.....	5
2.3.1. Norme signala .....	6
2.3.1.1. $L_1$ norma.....	6
2.3.1.2. $L_2$ norma.....	7
2.3.1.3. $L_\infty$ norma.....	7
2.3.1.4. $L_0$ norma: .....	7
2.3.2. Norme sustava.....	8
2.4. Modeliranje optimizacije .....	8
3. Modeliranje mehanike konstrukcije .....	12
3.1. Model konstrukcije .....	12
3.1.1. Konačni elementi .....	12
3.1.2. Diskretizacija .....	13
3.1.3. Matrica krutosti .....	13
3.1.4. Matrica masa .....	14

---

3.1.5. Rubni uvjeti konstrukcije .....	14
3.1.6. Vlastite frekvencije .....	15
3.1.7. Matrica prigušenja .....	16
4. RAČUNALNI PROGRAMI.....	22
4.1. <i>Python</i> .....	22
4.2. <i>Spyder</i> .....	22
4.3. Dodatni moduli .....	22
5. TOK PROCESA OPTIMIZACIJE .....	24
6. REZULTATI .....	29
6.1. Utjecaj $\alpha_2$ na broj osjetnika .....	29
6.2. Primjeri odabranih pozicija osjetnika i pojačanja osmatrača.....	30
6.3. Dodatni rezultati.....	35
6.3.1. Usporedba rezultata sa algoritmom koji ne minimizira broj osjetnika .....	36
6.3.2. Usporedba rezultata dobivenih iz $L$ * između faza optimizacije 1 i 2 .....	38
7. ZAKLJUČAK.....	39

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Primjer grede sa prvom i drugom formom savijanja.....	2
Slika 2.	Oblik odabrane konstrukcije .....	12
Slika 3.	Konačni element.....	13
Slika 4.	Komponente Rayleighevog prigušenja sustava.....	18
Slika 5.	Ovisnost Rayleigheva prigušenja o broju kružnih frekvencija .....	19
Slika 6.	Promjene Rayleighevih parametara sa brojem uzetih vlastitih frekvencija .....	21
Slika 7.	Tok procesa optimizacije.....	24
Slika 8.	Ovisnost broja iskorištenih pozicija osjetnika i faktoru $\alpha_2$ .....	29
Slika 9.	Pojačanje osmatrača pojedinog osjetnika za $\alpha_2 = 0.00005$ , $T_1$ .....	30
Slika 10.	Pojačanje osmatrača osjetnika za $\alpha_2 = 0.000055$ , $T_2$ .....	31
Slika 11.	Pojačanje osmatrača osjetnika za $\alpha_2 = 0.00007$ , $T_3$ .....	32
Slika 12.	Pojačanje osmatrača osjetnika za $\alpha_2 = 0.00028$ , $T_4$ .....	32
Slika 13.	Pojačanje osmatrača osjetnika za $\alpha_2 = 0.005$ , $T_5$ .....	33
Slika 14.	Pojačanje osmatrača osjetnika za $\alpha_2 = 0.09$ , $T_6$ .....	33
Slika 15.	Pojačanje osmatrača osjetnika za $\alpha_2 = 0.1$ , $T_7$ .....	34
Slika 16.	Pojačanje osmatrača osjetnika za $\alpha_2 = 100$ , $T_8$ .....	34
Slika 17.	Usporedba sa algoritmom koji ne minimizira broj osjetnika, brzina, $\alpha_2 = 0$ .....	36
Slika 18.	Usporedba sa algoritmom bez minimizacije broja osjetnika, pomak, $\alpha_2 = 0$ .....	36
Slika 19.	Usporedba sa algoritmom koji ne minimizira broj osjetnika, brzina, $\alpha_2 = 0.1$ ..	37
Slika 20.	Usporedba sa algoritmom koji ne minimizira broj osjetnika, brzina, $\alpha_2 = 0.1$ ..	37
Slika 21.	Usporedba pojačanja $L1$ * i $L2$ * na osjetnicima pomaka .....	38



## POPIS TABLICA

Tablica 1. Geometrijska i materijalna svojstva konstrukcije .....	12
Tablica 2. Vlastite frekvencije sustava.....	16
Tablica 3. Promjene Rayleighevih parametara sa brojem uzetih vlastitih frekvencija .....	20
Tablica 4. Sažetak relevantnih podataka sa slika 9-16.....	35

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>A</b>	-	Matrica koeficijenata (matrica dinamike)
<b>B</b>	-	Pobudna matrica (kontrolna matrica)
<b>C</b>	-	Matrica osjetnika (izlazna matrica)
<b>C*</b>	-	Modificirana matrica C sa pozicijama osjetnika
<b>D</b>	-	Matrica direktnog udjela
<i>d</i>	m	Promjer grede
<b>e</b>	-	Greška osmatrača
<b>ė</b>	-	Derivacija greške osmatrača
<i>E</i>	GPa	Modul elastičnosti grede
<i>f</i>	Hz	Frekvencija
<b>H</b>	-	Prijenosna funkcija
<i>H<sub>2</sub></i>	-	Oznaka <i>H<sub>2</sub></i> sistemske norme
<i>I<sub>y</sub></i>	m <sup>4</sup>	Moment površine presjeka grede
<i>i</i>	-	Indeks
<i>it</i>	-	Brojač iteracija prve faze optimizacije
<i>j</i>	-	Indeks
<b>K</b>	-	Matrica krutosti
<b>K<sub>e</sub></b>	-	Matrica krutosti konačnog elementa
<b>L</b>	-	Pojačanje osmatrača
<b>L<sub>1</sub>*</b>	-	Vrijednost <b>L*</b> u jednom međukoraku algoritma
<b>L<sub>2</sub>*</b>	-	Vrijednost <b>L*</b> u jednom međukoraku algoritma
<b>L*</b>	-	Supstitucija za <b>P L</b>
<i>L<sub>p</sub>, l<sub>p</sub></i>	-	Oznaka norme signala reda <i>p</i>
<i>l</i>	m	Duljina grede
<i>l<sub>e</sub></i>	m	Duljina konačnog elementa
<i>n</i>	-	Dimenzija vektora
<b>M</b>	-	Matrica inercije sustava
<b>M<sub>e</sub></b>	-	Matrica masa konačnog elementa
<i>m<sub>e</sub></i>	kg	Masa konačnog elementa
<i>m<sub>g</sub></i>	kg	Masa grede
<i>nKE</i>	-	Broj konačnih elemenata za diskretizaciju
<i>nred</i>	-	Red reduciranog sustava
<i>nω</i>	-	Broj uzetih vlastitih frekvencija za proračun prigušenja
<b>P</b>	-	Matrica prigušenja sustava
<b>q</b>	m	Vektor pomaka u jednadžbi dinamike sustava
<b>q̇</b>	m/s	Vektor brzine u jednadžbi dinamike sustava

---

$\ddot{\mathbf{q}}$	m/s <sup>2</sup>	Vektor ubrzanja u jednadžbi dinamike sustava
$\bar{\mathbf{q}}$	m	Amplituda pomaka
$\mathbf{u}$	-	Pobuda (ulazni vektor sustava)
$\mathbf{u}$	-	Generički vektor
$\mathbf{v}$	-	Generički vektor
$\mathbf{W}$	-	Težinska matrica
$w$	m	Progib grede
$\mathbf{x}$	-	Vektor stanja sustava
$\dot{\mathbf{x}}$	-	Derivacija vektora stanja sustava
$\hat{\mathbf{x}}$	-	Vektor stanja osmatrača
$\hat{\dot{\mathbf{x}}}$	-	Derivacija vektora stanja osmatrača
$\mathbf{x}_1$	m/s	Vektor brzine
$\dot{\mathbf{x}}_1$	m/s <sup>2</sup>	Derivacija vektora ubrzanja
$\mathbf{x}_2$	m	Vektor pomaka
$x$	-	Os koordinatnog sustava
$\mathbf{y}$	-	Izlazni vektor sustava
$\hat{\mathbf{y}}$	-	Izlazni vektor osmatrača
$y$	-	Os koordinatnog sustava
$\mathbf{z}$	-	Učinkovitost izlaza iz sustava
$z$	-	Os koordinatnog sustava
$O\_ods$	-	Tolerancija na iznos pojačanja ispod kojeg se smatra da su nula
$\alpha$	-	Rayleighov prvi parametar prigušenja
$\alpha_m$	-	Faktor u matrici masa
$\alpha_2$	-	Faktor koji balansira minimiziranje $H_2$ norme greške sustava i broja osjetnika
$\beta$	-	Rayleighov drugi parametar prigušenja
$\boldsymbol{\beta}$	-	Vektor težine stupaca
$\beta\_tol$	-	Iznos razlike $\beta_j^{it}$ i $\beta_j^{it-1}$
$\gamma_2$	-	Gornji iznos $H_2$ norme greške sustava
$\varepsilon$	-	Pomoćni pribrojnik pri računanju $\beta_j^{it}$
$\xi$	-	Bezdimenzijski parametar prigušenja materijala
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća materijala grede
$\varphi_y$	rad	Zakret grede oko y-osi
$\omega$	rad/s	Kutna frekvencija

## SAŽETAK

Praćenje zdravlja konstrukcije je u mnogim slučajevima neophodno za sigurnost korisnika, a bitno je i za radni vijek konstrukcije jer se time oštećenja mogu uočiti prije nego dosegnu kritičnu razinu kod koje dolazi do kolapsa.

Jedan od načina jest praćenje promjene u dinamičkom ponašanju konstrukcije. Ideja je da će se prilikom oštećenja dogoditi promjena npr. krutosti konstrukcije koja će onda biti vidljiva putem promjene dinamike konstrukcije. Očitavanjem razlike od poznatog „dobrog“ ponašanja konstrukcije se dakle može utvrditi da negdje postoji oštećenje ili neki drugi problem.

Dinamika konstrukcije se prati analizom podataka iz osjetnika (tipično piezoelektrični osjetnici vibracija), te se tu javlja komplicirano pitanje određivanja broja i položaja osjetnika na konstrukciji da bi se moglo pratiti dinamičko ponašanje. Problem je dovoljno težak da je jedini realni pristup sistematiziranje problema za optimiranje uz pomoć računala. Specifičan problem jest što je broj osjetnika nezgodan problem za optimiranje jer je to problem kombinatorike kojeg je teško numerički obraditi.

Ovaj rad prikazuje moguće metode za rješavanje tog problema, te objašnjava tipične prepreke kod provedbe. Nadalje, u radu je razvijen algoritam koji rješava zadani problem optimizacije položaja osjetnika. Objašnjen je postupak razvijanja algoritma koji rješava taj problem, te je detaljno opisan tok pripremanja i izvršavanja optimizacije broja i položaja osjetnika na jednostavno oslonjenoj gredi koja je diskretizirana metodom konačnih elemenata. Svaki čvor konačnih elemenata je potencijalno mjesto za osjetnik. Algoritam istovremeno provodi optimizaciju broja i položaja osjetnika, a kritični problem optimizacije broja osjetnika je riješen relaksacijom  $l_0$  norme broja osjetnika u  $l_1$  normu.

U rezultatima je prikazano kako broj korištenih osjetnika pada porastom faktora koji direktno utječe na težinu te minimizacije, te je prikazan i obrazložen optimirani izbor pozicija osjetnika za nekoliko bitnih iznosa spomenutog faktora.

Ključne riječi: Optimizacija smještaja osjetnika vibracija, Optimizacija broja osjetnika vibracija, Relaksacija  $l_0$  norme, Praćenje zdravlja konstrukcije

---

## SUMMARY

Structural health monitoring is often necessary for user safety, as well as the longevity of the structure because it can grant awareness of structural damage before it reaches critical levels that would lead to structure failure.

One method for doing so is monitoring the dynamics of the structure. The concept here is that upon structural damage, dynamics of the structure will change because, for example, the stiffness of the structure changed. Comparing current and “known good” behaviour of the structure dynamics, one can immediately become aware of a problem somewhere on the structure.

Structure dynamics is monitored by analysing sensor data (typically piezoelectric vibration sensors), which raises the complicated question of determining quantity and placement of those sensors. That problem is complicated enough that the only realistic approach is systematisation of the problem and computer aided optimisation. A pronounced problem is the minimisation of the number of sensors because it is a combinatorial problem which is difficult to deal with numerically.

This master thesis presents methods of solving that problem and unfolds typical issues with implementation. Furthermore, a solution algorithm is developed for the sensor placement optimisation. Process of preparing and running the optimisation of the quantity and placement of sensors is shown in detail on an example structure which is a simply supported beam discretized with FEM. Every node is a possible sensor location. Algorithm simultaneously tries to optimise both the number and positions of sensors. The critical issue of sensors quantity is resolved with relaxation of the  $l_0$  norm for the number of sensors into the  $l_1$  norm.

Results show how the quantity of used sensors decreases as the value of the factor that determines the weight of minimising that quantity increases. Sensor placement for a few noteworthy values of mentioned factor are also shown and explained.

Key Words: Optimisation of vibration sensor placement, Optimisation of vibration sensor quantity, Relaxation of the  $l_0$  norm, Structural health monitoring

## 1. UVOD

Praćenje zdravlja konstrukcija se može realizirati na više načina: vizualna inspekcija, ispitivanje penetrantima, ispitivanje uređajima za očitavanje stanja u materijalu (ultrazvuk, ispitivanje vrtložnom strujom (ECT - za električki vodljive materijale) [1]) i druge metode. Sve navedene metode su ne destruktivne metode, jer u suprotnom bi sama metoda kompromitirala konstrukciju. Također, sve te metode koriste isključivo lokalni pristup testiranju pa zahtijevaju pristup svim dijelovima konstrukcije i potencijalno veliku količinu posla.

Jedan dodatni pristup je praćenje dinamičkog ponašanja konstrukcije. To se odnosi na vibracijski odziv konstrukcije koji se promijeni pri oštećenju. Prema [2] postoje četiri različite razine praćenja:

1. Prisutnost oštećenja
2. Lokacija oštećenja
3. Kvantificiranje oštećenja
4. Procjena preostalog vijeka konstrukcije

a postoje i varijacije gdje je između koraka 2 i 3 dodatni korak: utvrđivanje tipa oštećenja.

Čak i provođenje prve razine je vrlo korisno jer (uz pretpostavku da je pravilno izvedena) daje podatak da je došlo do oštećenja, odnosno da se trebaju krenuti istraživati pozicija i veličina oštećenja. Implikacije su da se do prve pojave oštećenja time mogu zaobići redovita testiranja prethodnim metodama koja su vremenski i financijski zahtjevnija (te nekada fizički teško izvediva, npr. ako neki dijelovi konstrukcije nisu pristupačni).

### 1.1. Položaj i broj osjetnika

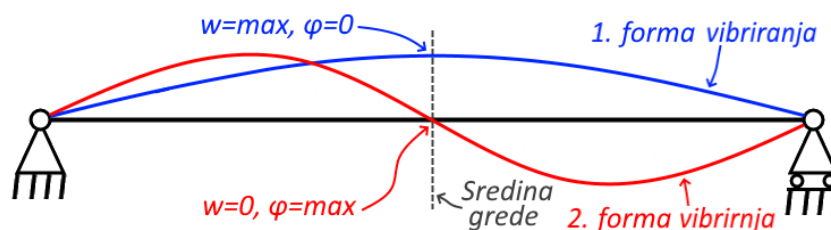
Jedan od problema praćenja dinamike konstrukcije je odabir broja i pozicija osjetnika. Realne konstrukcije nisu savršeno krute jer je sve u nekoj mjeri elastično, a oštećenje se može dogoditi bilo gdje, pogotovo ako se uzme u obzir mogućnost lokalnog mehaničkog oštećenja radi vanjskih utjecaja. Kao elastični kontinuum, svaka konstrukcija ima beskonačno stupnjeva slobode.

To se očito ne može riješiti korištenjem beskonačno osjetnika, već se treba odrediti neki realni broj, te time nužno onda i zadovoljavajuće pozicije. Osjetnik, njegova montaža i potrebni kablovi imaju svoju cijenu, a nadalje veći broj osjetnika znači i veću količinu podataka koju treba obrađivati, pa onda treba naći dobar kompromis između što manjeg broja osjetnika i poznavanja dovoljno podataka za zadovoljavajuće određivanje dinamike konstrukcije.

Određivanje optimalnih pozicija osjetnika je isprepletено sa određivanjem optimalnog broja osjetnika. Ako postoji optimalan broj osjetnika, to uključuje da svaki od njih ima svoje točno određeno mjesto na toj specifičnoj konstrukciji. U suprotnom bi se radilo o hrpi osjetnika na nasumičnim mjestima na konstrukciji, što znači da je moguće da su sve svi našli na jednom lokaliziranom mjestu, a to očito nije dobro. Postavlja se i pitanje redundantnosti osjetnika za slučaj kvara, ali to nije tema ovog rada.

## 1.2. Primjer

Na jednostavnom primjeru grede se mogu prikazati neke osnovne ideje i potencijalni problemi određivanja položaja osjetnika. Uzima se model grede kojoj su stupnjevi slobode rotacija oko  $y$  osi i pomaci u smjeru  $z$  osi, sa jednim nepomičnim i jednim pomičnim zglobovom, kao prema slici 1.



Slika 1. Primjer grede sa prvom i drugom formom savijanja

Neka je za ovaj hipotetski primjer na raspolaganju jedan osjetnik. Odmah je jasno da u osloncima nema smisla postaviti osjetnik pozicije, tj. pomaka, u smjeru  $z$  osi. No nije nužno odmah jasno gdje ima smisla postaviti osjetnik. Ako se postavi točno na sredinu grede, to je idealno za znati pomake (odnosno brzine i ubrzanja) uslijed prve forme vibriranja, ali ne služi svrsi za amplitudu druge forme vibriranja jer na tom mjestu druga forma (kao i četvrti, šesti, itd.) nema pomaka. Suprotno od toga, osjetnik zakreta na sredini grede nije koristan kod prve forme vibriranja, ali je koristan za drugu (pri prvom modu se sredina samo translacija, a pri drugom samo zakreće). Realna konstrukcija će vibrirati sa kombinacijom svojih formi vibriranja, pa je nužno potrebno biti u mogućnosti pratiti barem nekoliko prvih formi (prva je najvažnija, a svaka sljedeća sve manje).

## 2. OPTIMIRANJE SMJEŠTAJA OSJETNIKA

Cilj ovog rada je napraviti algoritam za optimizaciju smještaja osjetnika. To će biti postignuto tako da se na diskretiziranoj konstrukciji sa predodređenim mogućim pozicijama osjetnika (čvorovi metode konačnih elemenata) optimira koliko će osjetnika biti iskorišteno i na kojim će se pozicijama nalaziti.

Dinamika grede se formulira u modelu sustava sa varijablama stanja (eng. *state-space system*), nakon čega se modelira osmatrač koji minimizira  $H_2$  normu greške i broj osjetnika istovremeno. Problem kod optimizacije položaja i broja osjetnika jest da je broj osjetnika problem kombinatorike (minimizacija  $l_0$  norme pojačanja osmatrača) koji nije numerički izvediv. Umjesto toga se  $l_0$  norma relaksira u  $l_1$  normu, čime se to može svesti na konveksni optimizacijski problem.

### 2.1. Modeliranje sustava

Općenita jednačba dinamike sustava glasi:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (1)$$

gdje su:

- $\mathbf{M}$  - matrica inercije sustava,
- $\mathbf{P}$  - matrica prigušenja sustava,
- $\mathbf{K}$  - matrica sile,
- $\mathbf{B}$  - pobudna matrica
- $\mathbf{u}$  - ulazni signal.

Sustav je potrebno svesti na model s varijablama stanja oblika:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (3)$$

Gdje su:

- $\mathbf{A}$  - matrica dinamike,
- $\mathbf{C}$  - matrica osjetnika (izlazna matrica),
- $\mathbf{D}$  - matrica direktnog udjela,
- $\mathbf{u}$  - ulazni vektor sustava,



- $\mathbf{x}$  - Vektor stanja sustava,  
 $\mathbf{y}$  - Izlazni vektor sustava.

To je standardni format *LTI* sustava (Linearno vremenski invarijantni sustav, eng.: *Linear time invariant*).  $\mathbf{D}$  se ovdje ne koristi, pa će biti jednak nul matrici. Da bi se sustav iz jednadžbe (1) mogao opisati jednadžbama (2) i (3),  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  i  $\ddot{\mathbf{q}}$  se izražavaju preko  $\mathbf{x}$  na način:

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}_2, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{x}_1, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}_1. \quad (4)$$

Riječima, vektor položaja (odnosno pomaka)  $\mathbf{q}$  je sada  $\mathbf{x}_2$ , vektor brzina  $\dot{\mathbf{q}}$  je  $\mathbf{x}_1$ , a vektor ubrzanja  $\ddot{\mathbf{q}}$  je putem deriviranja po vremenu jednak  $\dot{\mathbf{x}}_1$ .

Sada se (1) može zapisati kao

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{P} \mathbf{x}_1 + \mathbf{K} \mathbf{x}_2 = \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (5)$$

Matrična jednadžba (1) se sa lijeve strane pomnoži sa inverzom matrice masa,  $\mathbf{M}^{-1}$ :

$$\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{x}_1 + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x}_2 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (6)$$

Nakon sređivanja se dobije

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (7)$$

gdje su vektori  $\mathbf{x}_1$  i  $\mathbf{x}_2$  dijelovi vektora  $\mathbf{x}$  koji predstavlja sva stanja sustava koja se očitavaju:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Supstitucijom (8) u (7) se dobiva sustav koji odgovara jednadžbi (2):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{P} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}. \quad (9)$$

Matrica  $\mathbf{C}$  iz jednadžbe (2) u općem slučaju služi za obradu stanja sustava vektora  $\mathbf{x}$  za potreban izlaz  $\mathbf{y}$ . U ovom radu je ta obrada isključivo biranje koja stanja sustava će se koristiti za izlazni vektor, odnosno kao rezultat koji se dalje obrađuje. Biraju se samo rezultati pomaka, pa se to postiže tako da se  $\mathbf{C}$  definira kao nul matrica odgovarajućih dimenzija, te se članovi koji predstavljaju osjetnike pomaka izjednače sa jedinicom.

## 2.2. Modeliranje osmatrača

Osmatrač stanja je zamišljeni sustav koji se gradi paralelno uz stvarni sustav. Ideja je da kada postoji pravi sustav kojemu nije moguće znati sva stanja sustava, konstruira se osmatrač stanja te se minimizira greška između izlaza stvarnog sustava i osmatrača stanja. Minimizacijom te greške se postiže da izlaz osmatrača aproksimira izlaz pravog sustava, te se onda model osmatrača može koristiti za predviđanje ponašanja pravog sustava bez poznavanja svih varijabli stanja [3]. U okviru ovog rada će osmatrač biti korišten tako da se svjesno pokuša aproksimirati izlaz stvarnog sustava pomoću modela osmatrača koji raspolaže sa manjim brojem stanja sustava (brzine, pomaci), koji na kraju odgovaraju pojedinačnim osjetnicima brzine i pomaka. Model osmatrača se formulira kao

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{L} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (11)$$

Oznaka iznad  $\hat{\mathbf{x}}$  naznačuje da se radi o veličini iz modela osmatrača.  $\mathbf{D}$  je ponovo napisan samo radi formalnosti pošto je to u ovom radu nul matrica.  $\mathbf{L}$  je pojačanje osmatrača. Ona sadrži vrijednosti koje prikazuju kako je greška  $\mathbf{e}$  vagana i raspoređena po stanjima sustava [4].

Greška osmatrača se modelira kao:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}. \quad (12)$$

Uvrštavanjem (2), (10) i (11) u (12) dobiva se:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) \mathbf{e} \quad (13)$$

Također postoji

$$\mathbf{z} = \mathbf{W} \mathbf{e} \quad (14)$$

koji predstavlja učinkovitost izlaza iz sustava. Matrica  $\mathbf{W}$  je težinska matrica izlaza koja modificira grešku na odgovarajući način za praćenje performansi sustava. Ovdje je ona ekvivalentna matrici  $\mathbf{C}$  jer joj je također svrha samo odabrati koji članovi inače nepromijenjenih vrijednosti su relevantni.

## 2.3. Norme

Prije samog modeliranja optimizacije, potrebno je objasniti što su norme. To su mjere za ocjenjivanje djelotvornosti signala i sustava. One na specifičan način kvantificiraju iznose

članova operatora i varijabli sustava, te pružaju smisleni podatak za usporedbu i validaciju sustava. Neke literature opisuju norme kao veličine. Ovdje se dijele na norme signala i  $H$  norme.

### 2.3.1. Norme signala

Norme signala korištene u ovom radu označavaju se slovom  $L$  (u nekim literaturama malim slovom  $l$ ). Slovo  $L$  potječe od naziva *Lebesgue*, jer u funkciji signala mora bit Lebesgue integrabilna (integral izmjerljive funkcije na prostoru mjere). Matematička oznaka za  $L_p$  normu je  $\|\cdot\|_p$ , gdje  $p$  predstavlja top  $L$  norme. Općenito,  $L_p$  norme se mogu zapisati kao

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left( \int_0^{\infty} |\mathbf{v}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1. \quad (15)$$

$L_p$  norma vektora  $\mathbf{u}$  duljine  $n$  se može direktno napisati kao:

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left( \sum_{i=0}^{n-1} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \quad (16)$$

#### 2.3.1.1. $L_1$ norma

To je poseban slučaj općenite  $L_p$  norme gdje je  $p = 1$ . Na engleskom ima mnogo zanimljivih kolokvijalnih naziva (*Manhattan distance*, *Taxicab norm*, *City block norm*) koji svi upućuju na kretanje pod pravim kutovima. Razlog je što ta norma rezultira zbrojem svih apsolutnih vrijednosti vektora, pa onda je lako zamisliti ako se udaljenost dvije lokacije u gradu sa pravokutnom mrežom ulica mjeri vožnjom u taksi vozilu da će ta udaljenost biti zbroj udaljenosti u prvom, i onda na njega okomitom smjeru kretanja.

Izrazi (15) i (16) se za  $L_1$  normu mogu zapisati kao

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \left( \int_0^{\infty} |\mathbf{v}(t)|^1 dt \right)^{\frac{1}{1}} \rightarrow \|\mathbf{v}\|_1 = \int_0^{\infty} |\mathbf{v}(t)| dt, \quad (17)$$

i

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \left( \sum_{i=0}^{n-1} |u_i|^1 \right)^{\frac{1}{1}} \rightarrow \|\mathbf{u}\|_1 = \sum_{i=0}^{n-1} |u_i|. \quad (18)$$

### 2.3.1.2. $L_2$ norma

Analogno  $L_1$  normi,  $L_2$  norma je samo  $L_p$  norma za slučaj kada je  $p = 2$ . U ovom radu se ne koristi ali je spomenuta radi potpunosti opisa normi signala. Zove se još i norma najmanjih kvadrata ili euklidska norma po euklidskoj udaljenosti jer predstavlja najkraći mogući put od jedne točke do druge. Npr. ako se radi o vektoru položaja u 3D prostoru, ona daje apsolutnu vrijednost duljine tog vektora.

Izrazi (15) i (16) se za  $L_2$  normu mogu zapisati kao

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left( \int_0^{\infty} |\mathbf{v}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

i

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left( \sum_{i=0}^{n-1} |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \|\mathbf{u}\|_1 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |u_i|^2}. \quad (20)$$

### 2.3.1.3. $L_{\infty}$ norma

Zove se još i *supremum* norma jer je jednaka apsolutnoj maksimalnoj vrijednosti signala, kao istoimena matematička funkcija. Uvrštavanjem  $p = \infty$  u (15) i (16) se dobije

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty} = \left( \int_0^{\infty} |\mathbf{v}(t)|^{\infty} dt \right)^{\frac{1}{\infty}} \rightarrow \|\mathbf{v}\|_1 = \sup(\mathbf{v}(t)) \quad (21)$$

i

$$\|\mathbf{u}\|_{\infty} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} |u_i|^{\infty} \right)^{\frac{1}{\infty}} \rightarrow \|\mathbf{u}\|_{\infty} = \sup(\mathbf{u}) \quad (22)$$

### 2.3.1.4. $L_0$ norma:

Zove se norma da bude sukladna sa ostalim  $L$  normama, ali zapravo nije norma već odgovara količini nenulatih vrijednosti vektora. Ona predstavlja drugačiji problem od ostalih  $L$  normi.  $L_0$  norma red ili stupac matrice je broj nenulatih vrijednosti u toj matrici.

### 2.3.2. Norme sustava

Analogno normama signala,  $H$  norme služe za ocjenjivane „veličine“ ili cijelog sustava ili prijenosne funkcije sustava, te su analogne  $L$  normama. Čisto pragmatično gledano,  $L$  norme ocjenjuju veličinu vektora (odnosno točnije jednodimenzionalne matrice), a  $H$  norme nisu ograničene na jednu dimenziju. U ovom radu se koristi samo  $H_2$  norma, na prijenosnoj funkciji sustava.

### 2.4. Modeliranje optimizacije

Optimizacija se izvodi u dvije faze, prva je minimiziranje broja i određivanje pozicija osjetnika, a druga je minimiziranje pojačanja osmatrača sa određenim pozicijama osjetnika.

Kod klasične primjene modela osmatrača, ovdje bi se sada provela minimizacija  $H_2$  norme pojačanja osmatrača modeliranog sustava, no to ne obuhvaća optimiranje broja odnosno pozicija osjetnika, već samo vrijednosti  $L$ . Potrebno je dodati član koji će težiti smanjiti broj korištenih osjetnika. To je najjednostavnije napisati kao:

$$\min_L \underbrace{\|\Sigma_e(\mathbf{L})\|_2}_{H_2} + \alpha_2 \underbrace{\sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1}^n |L_{ij}| \right\|_0}_{\text{min. broja senzora}}. \quad (23)$$

$\alpha_2$  je faktor čijim iznosom se mijenja težina člana za minimizaciju broja osjetnika. Za  $\alpha_2 = 0$  se to svodi na minimizaciju standardne  $H_2$  norme greške. Oznake  $\|x\|_2$  i  $\|x\|_0$  su oznake  $H_2$  i  $l_0$  normi, objašnjene kasnije u radu. Problem sa izrazom (23) je što uključuje  $l_0$  normu za broj osjetnika.  $l_0$  norma samo raspoznaje da li su vrijednosti nula ili ne nula, odnosno ona broj nenulte članove, pa je to problem kombinatorike koji se u ovom slučaju ne može direktno optimirati.

Inspirirano iz [5], a detaljnije razrađeno u [6], taj problem se rješava tako da se preformulira natrag u problem konveksnog optimiranja relaksacijom  $l_0$  norme u  $l_1$  normu sa težinskim faktorima koji su sadržani u vektoru  $\beta_j$ . Izraz :

$$\left\| \sum_{i=1}^n |L_{ij}| \right\|_0 \quad (24)$$

se zamijeni sa

$$\beta_j^{it} \sum_{i=1}^n |L_{ij}| \quad (25)$$

gdje je  $\beta_j^{it}$  težina stupca  $j$  na iteraciji  $it$ . Za prvu iteraciju su to samo jedinične vrijednosti. Glavna razlika je što oblik iz (25) jače penalizira veće vrijednosti, dok onaj iz (24) samo raspoznaje razliku između postojanja i ne postojanja nenulte vrijednosti. Težine se iterativno mijenjaju tako da se uvijek postave kao inverz vrijednosti  $l_1$  norme iz prošlog koraka [6]. Tako se aproksimiraju svojstva  $l_0$  norme, ali bez da se gubi konveksnost  $l_1$  norme.

Član standardne  $H_2$  norme sustava također treba doraditi. Iz [7] se uzima tvrdnja da za prijenosnu funkciju

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{C}(\mathbf{z} \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (26)$$

vrijedi:

1.  $\mathbf{A}$  je stabilno i  $\|\mathbf{H}\|_2 \leq \gamma_2$ ,
2. Postoji  $\mathbf{P} > 0$  takav da vrijedi

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{A} & -\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (27)$$

$$\text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}) < \gamma_2^2 \quad (28)$$

$\mathbf{P} > 0$  znači da je matrica  $\mathbf{P}$  pozitivno definitna, te analogno izraz (27) znači da je rezultat matičnog računa negativno definitan.  $\gamma_2$  je gornji iznos  $H_2$  norme greške sustava. Primjenom (27) na grešku iz (12), (13) i (14) dobije se

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{P} + \mathbf{W}^T \mathbf{W} & (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C})^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) & -\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (29)$$

to je sada bilinearna matična nejednakost zbog postojanja  $\mathbf{P} \mathbf{L}$  i  $\mathbf{L}^T \mathbf{P}$ . To je ne konveksni problem što ga čini kompliciranim za riješiti.

Postoji standardna procedura za rješavanje tog problema kod modeliranja osmatrača, a to je da se uvede supstitucija  $\mathbf{L}^* = \mathbf{P} \mathbf{L}$  čime to postaje linearna matična nejednakost. Novi problem s time jest što postoji uvjet da nema strukturalnih ograničenja na pojačanje osmatrača  $\mathbf{L}$ , što ovdje ima jer je cilj da bude što manje osjetnika, pa to rezultira sa pokušajima smanjivanja vrijednosti članova  $\mathbf{L}$  prema nuli.

U općenitom slučaju, sa takvim strukturalnim ograničenjima na sustav  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{L}^*$  nemaju nenulte vrijednosti na istim mjestima, pa se ta supstitucija ne može provesti. Međutim, u ovom specifičnom slučaju kada se minimizira broj osjetnika, vrijednosti  $\mathbf{L}$  se mijenjaju na pravilan način, tako da se cijeli stupac (koji predstavlja jednu poziciju za osjetnik) izjednači s nulom. Iz množenja matrica slijedi da će nulti stupci  $\mathbf{L}$  odgovarati nultim stupcima u  $\mathbf{P L}$ , ako je  $\mathbf{P}$  pozitivno definitna matrica.  $\mathbf{P}$  je definirana kao pozitivno definitna matrica, što znači da se za ovaj slučaj može uvesti supstitucija

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{P L}. \quad (30)$$

Novi problem koji to donosi jest što će i preostale vrijednosti  $\mathbf{L}$  u stupcima koji nisu postali nuli biti pod utjecajem pokušaja minimizacije  $\mathbf{L}$ , pa će time konačne vrijednosti pojačanja osmatrača biti nešto drugačije. Za to se uvodi druga faza optimizacije: kada se jednom utvrde pozicije osjetnika, ponovo se provede postupak minimizacije  $\mathbf{L}$ , ali ovaj se umjesto minimizacije broja osjetnika ručno podese sustav tako da su broj i pozicije osjetnika sada nepromjenjive od zadnje iteracije minimizacije, koristeći samo  $H_2$  normu pogreške osmatrača.

Sažeti prikaz problema istovremene optimizacije  $H_2$  norme sustava i broja osjetnika:

$$\min_{\mathbf{L}^*, \gamma_2^2} \gamma_2^2 + \alpha_2 \sum_{j=1}^n \beta_j^{it} \sum_{i=1}^n |L_{ij}^*| \quad (31)$$

$$\text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{P B}) < \gamma_2^2 \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}^T \mathbf{W} - \mathbf{P} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^{*T} \\ \mathbf{P A} - \mathbf{L}^{*T} \mathbf{C} & -\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (33)$$

$\alpha_2$  je faktor koji balansira minimiziranje  $H_2$  norme greške sustava i broja osjetnika.

Sustav (31)-(33) se rješava tako da se rade iteracije sustava dok se ne postigne da je razlika  $\beta_j^{it} - \beta_j^{it-1}$  za svaki postojeći  $j$  približno nula, odnosno manja od definirane tolerancije  $\beta_{tol}$ . Kako je već spomenuto, težine se iterativno mijenjaju tako da se uvijek postavljaju kao inverz vrijednosti  $l_1$  norme iz prošlog koraka. Matematički zapisano, to glasi [6]:

$$\beta_j^{it} = \frac{1}{\varepsilon + \sum_{i=1}^n |L_{ij}^*|}, \quad \text{za svaki } j. \quad (34)$$

Gdje je  $\varepsilon$  pomoćni pribrojnik vrlo malog iznosa. Time se dobije rješenje kojim su određeni nulti stupci matrice pojačanja osmatrača, odnosno pozicije na kojima nema osjetnika, ali zato što je u proces uključena  $l_1$  norma koja radi kao kaznena funkcija visokih vrijednosti  $L_{ij}^*$ , To nisu

prave vrijednosti pojačanja osmatrača za te odabrane pozicije osjetnika. Da bi se dobile prave vrijednosti, provodi se faza 2: u matrici  $\mathbf{C}$  se izbrišu (odnosno postave nultima) oni stupci koji su nulti u matrici  $\mathbf{L}^*$ , odnosno predstavljaju neiskorištene pozicije osjetnika. Neka je ta nova matrica  $\mathbf{C}$  označena kao  $\mathbf{C}^*$ .

$$\underbrace{\min}_{\tilde{\mathbf{L}}, \mathbf{P}, \gamma_2^2} \gamma_2^2 \quad (35)$$

$$\text{trag}(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}) < \gamma_2^2 \quad (36)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}^T \mathbf{W} - \mathbf{P} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{C}^{*T} \mathbf{L}^{*T} \\ \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{L}^{*T} \mathbf{C}^* & -\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (37)$$

To će dati konačne rezultate  $\mathbf{L}^*$  za pozicije osjetnik definirane u prvoj fazi. Sada za dobivanje pravih vrijednosti pojačanja osmatrača  $\mathbf{L}$  samo treba preurediti izraz (30):

$$\mathbf{L} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{L}^*. \quad (38)$$

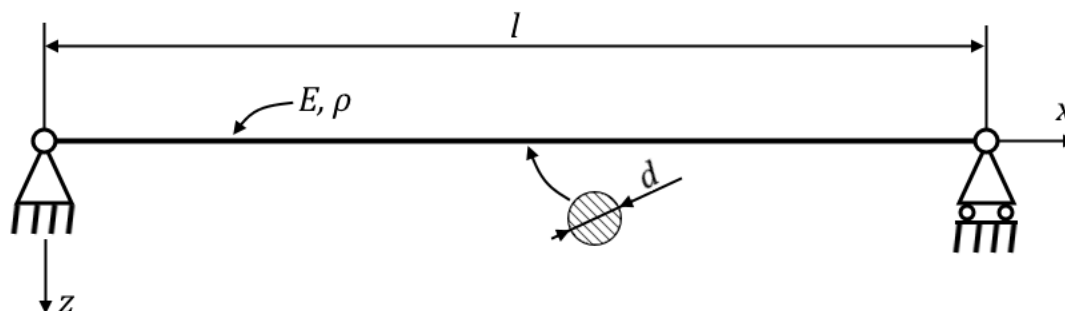
Pregledniji tok optimiranja je prikazan na slici 7 u poglavlju 5, gdje je i detaljno objašnjen.



### 3. Modeliranje mehanike konstrukcije

#### 3.1. Model konstrukcije

Za konstrukciju je odabrana greda prema slici 2.



Slika 2. Oblik odabrane konstrukcije

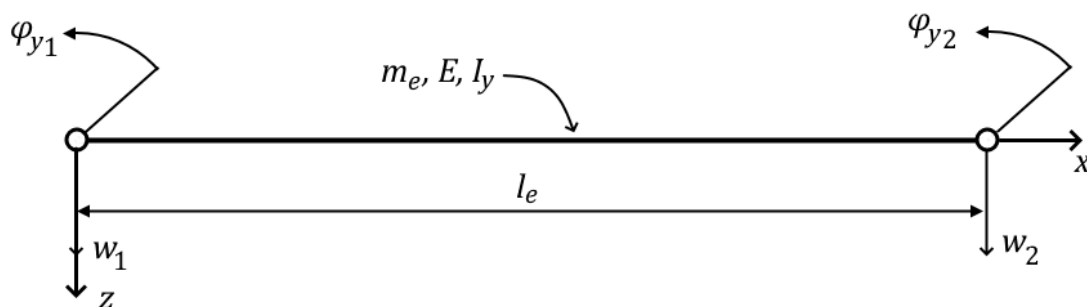
Greda je modelirana sa stupnjevima slobode zakreta oko  $y$  osi i pomaka u smjeru  $z$  osi. Gredi su dodijeljena geometrijska i materijalna svojstva prikazana u tablici 1:

Tablica 1. Geometrijska i materijalna svojstva konstrukcije

Veličina	Iznos
Gustoća $\rho$ , [kg/m <sup>3</sup> ]	7800
Modul elastičnosti $E$ , [GPa]	200
Duljina $l$ , [m]	1
Promjer $d$ , [m]	0,001

##### 3.1.1. Konačni elementi

Sukladno modelu grede, koriste se klasični osnovni gredni konačni elementi sa dva čvora i stupnjevima slobode zakreta oko  $y$  osi i pomaka u smjeru  $z$  osi.



Slika 3. Konačni element

Stupnjevi slobode elementa su:

$$\mathbf{v}^T = [w_1 \quad \varphi_{y1} \quad w_2 \quad \varphi_{y2}], \quad (39)$$

a funkcije oblika [8]

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{2l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3} & -s + \frac{2x^2}{l_e} - \frac{x^3}{l_e^2} & \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3} & \frac{x^2}{l_e^2} - \frac{x^3}{l_e^3} \end{bmatrix} \quad (40)$$

### 3.1.2. Diskretizacija

Diskretizacija je proces podjele kontinuuma na diskretne dijelove. Time se postiže da elastični sustav više nema beskonačno stupnjeva slobode, te se opisivanje diskretiziranog sustava može rješavati sistematski. Greda je podijeljena na 29 konačnih elemenata.

### 3.1.3. Matrica krutosti

Krutost je formulirana standardnog postupka metode konačnih elemenata. Matrica krutosti odabranog elementa je poznata, a globalna matrica krutosti se sastavlja od lokalnih na standardni način.

Matrica krutosti jednog elementa [8]:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 12EI_y/l^3 & -6EI_y/l^2 & -12EI_y/l^3 & -6EI_y/l^2 \\ -6EI_y/l^2 & 4EI_y/l & 6EI_y/l^2 & 2EI_y/l \\ -12EI_y/l^3 & 6EI_y/l^2 & 12EI_y/l^3 & 6EI_y/l^2 \\ -6EI_y/l^2 & 2EI_y/l & 6EI_y/l^2 & 4EI_y/l \end{bmatrix} \quad (41)$$

gdje su:

$\mathbf{K}_e$  - matrica krutosti elementa,

$E$  - modul elastičnosti,

$I_y$  - moment površine.

$E \cdot I_y$  je fleksijska krutost.

### 3.1.4. Matrica masa

Matrica masa je formirana kao matrica direktno koncentriranih masa (eng. *lumped mass matrix*) [9]. Takva matrica masa pojedinog elementa sadrži samo mase (ili ekvivalente za stupnjeve slobode zakreta) za taj čvor. To je isključivo dijagonalna matrica, pa je računanje njenog inverza numerički drastično lakše nego kod pune matrice masa. Postoje i druge prednosti i nedostaci, a u općenitom slučaju ju je najbolje upotrijebiti gdje su većina kretnji translacije, kao što i je slučaj za savijanje grede (uz pretpostavku malih pomaka).

Matrica masa pojedinog elementa iznosi:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \rho A l_e/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_m \rho A l_e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A l_e/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_m \rho A l_e^3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

gdje su:

$\rho$  - gustoća,

$A$  - površina presjeka grede,

$l_e$  - duljina elementa

$\alpha_m$  - nenegativni parametar

a  $\rho \cdot A \cdot l_e$  zapravo odgovara masi pojedinog elementa  $m_e$ .

$\alpha_m$  je parametar koji se uzima da je između  $0 \leq \alpha_m \leq 0,02$ . Za ovaj rad je izabrana vrijednost  $\alpha_m = 0,02$ . Vrijednost 0 bi rezultirala singularnom matricom masa.

### 3.1.5. Rubni uvjeti konstrukcije

Jedini rubni uvjeti dolaze od oslonaca grede, i to su Dirichletovi rubni uvjeti da u čvorovima u osloncima nema pomaka u smjeru  $z$ -osi.

### 3.1.6. Vlastite frekvencije

Vlastita frekvencija je frekvencija kojom neki sustav ima tendenciju vibrirati kada nema utjecaja prigušenja ni vanjskih sila. Sustavi imaju više vlastitih frekvencija, popraćenih svaka svojim jedinstvenim modom vibriranja koji je definiran popratnim vlastitim vektorom.

Vlastite frekvencije se dakle dobivaju rješavanjem diferencijalne jednadžbe dinamičkog sustava bez prigušenja i bez vanjskih sila. Ako se iz jednadžbe (1) izbace prigušenje i vanjske sile, ostaje:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (43)$$

To se rješava standardnim postupkom gdje se pretpostavi rješenje u obliku periodične funkcije

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} \sin(\omega t) \quad (44)$$

iz čega slijedi

$$\dot{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \omega \cos(\omega t), \quad (45)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\bar{\mathbf{q}} \omega^2 \sin(\omega t). \quad (46)$$

Uvrštavanjem (44) i (46) u (43) dobije se sustav

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (47)$$

Rješavanjem klasičnog problema vlastitih vrijednosti sustava

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (48)$$

se dobiju vlastite slobodne kružne frekvencije i vlastiti vektori sustava. Iz kružnih se linearne dobiju jednadžbom

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}. \quad (49)$$

Vlastite frekvencije sustava koji se u ovom radu obrađuje iznose (tablica 2):

Tablica 2. Vlastite frekvencije sustava

Redni broj vlastite kružne frekvencije sustava $n$	Vlastita kružna frekvencija $\omega_n$ , [rad/s]	Vlastita frekvencija $f_n$ , [Hz]
1	12,7997105	2,03713719
2	51,1627728	8,14280819
3	114,980917	18,2997813
4	204,073482	32,4793034
5	318,187070	50,6410450
6	456,995016	72,7330157
7	620,096610	98,6914406
8	807,015978	128,440582

### 3.1.7. Matrica prigušenja

Prigušenje je modelirano kao Rayleighevo prigušenje (proporcionalno prigušenje). To je prigušenje koje je proporcionalno linearnoj kombinaciji mase i krutosti, te se koristi sa dva Rayleigheva parametra prigušenja  $\alpha$  i  $\beta$  (u nekim literaturama  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , ili  $\mu$  i  $\lambda$ ). Prigušenje sustava se računa kao:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (50)$$

gdje su:

$\mathbf{P}$  - matrica prigušenja,

$\mathbf{M}$  - matrica masa,

$\mathbf{K}$  - matrica krutosti,

$\alpha$  - Rayleighev prvi parametar (u nekim literaturama  $\alpha_1$  ili  $\mu$ ),

$\beta$  - Rayleighev drugi parametar (u nekim literaturama  $\alpha_2$  ili  $\lambda$ ).

Parametri  $\alpha$  i  $\beta$  ovise o sustavu, specifično o vlastitim frekvencijama sustava. Najbitniji mod je prvi, te svaki sljedeći postepeno gubi na važnosti, pa se koriste modovi koji odgovaraju najnižim vlastitim frekvencijama sustava.  $\alpha$  i  $\beta$  se računaju iz izraza:

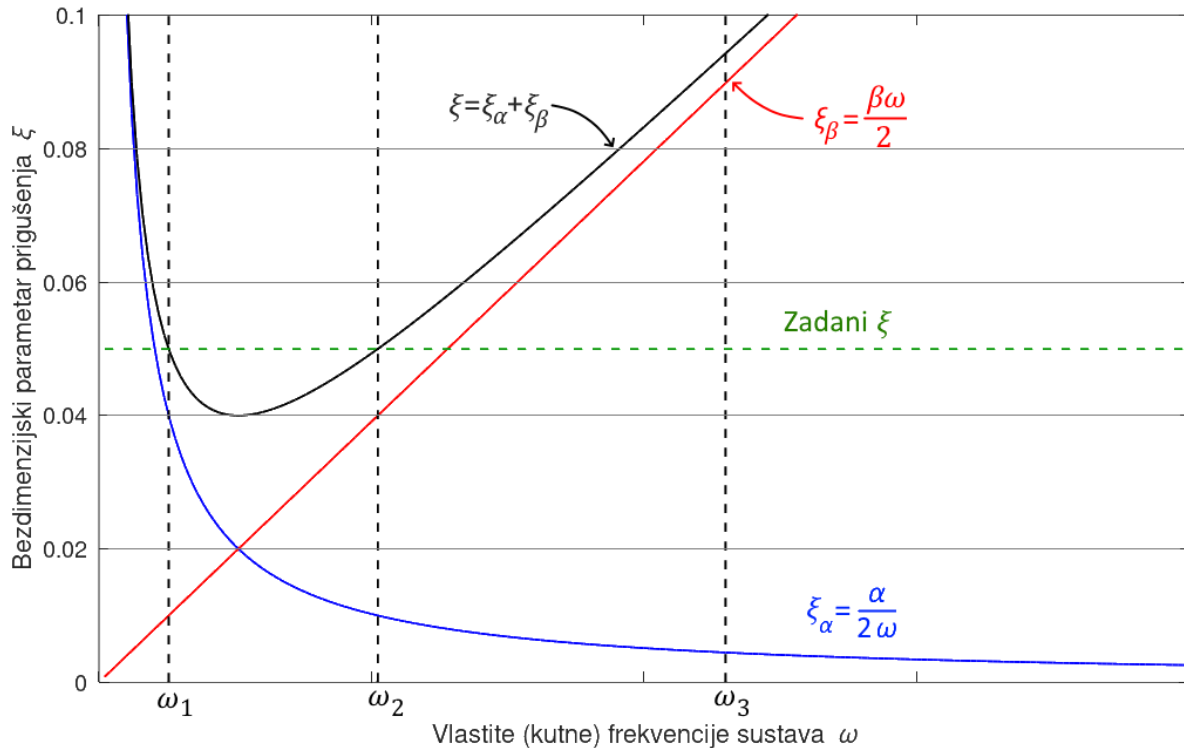
$$\xi_i = \frac{\alpha}{2 \omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2} \quad (51)$$

gdje je  $\xi_i$  omjer prigušenja  $i$ -tog moda vibriranja. Za npr. prve četiri vlastite frekvencije se dobije sustav

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2 * \omega_1} & \frac{\omega_1}{2} \\ \frac{1}{2 * \omega_2} & \frac{\omega_2}{2} \\ \frac{1}{2 * \omega_3} & \frac{\omega_3}{2} \\ \frac{1}{2 * \omega_4} & \frac{\omega_4}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \quad (52)$$

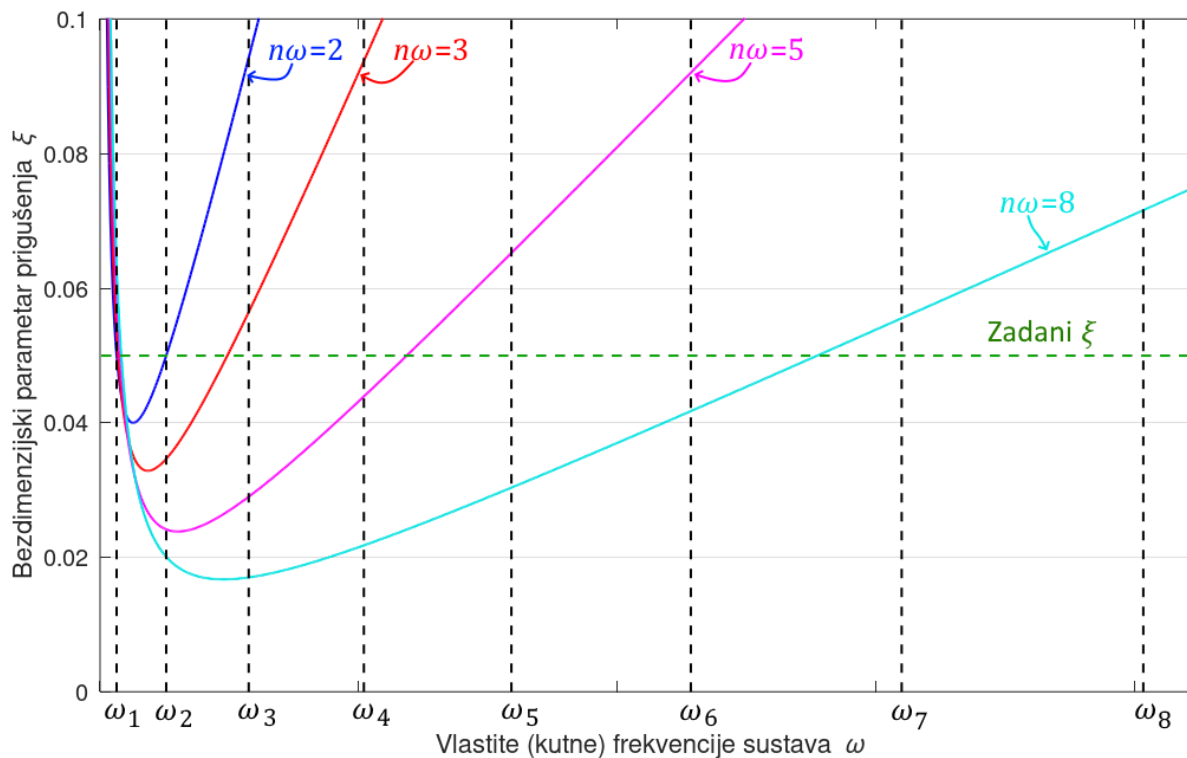
iz kojeg se onda traže najbolji  $\alpha$  i  $\beta$ . Taj sustav može biti predefiniiran (ovdje je) ili pod definiran pa se koeficijenti traže nekom ne direktnom metodom, npr. metodom najmanjih kvadrata (kao u ovom radu). Za provedbu postupka je odabrano prigušenje materijala od  $\xi = 0,05$ . To je standardni iznos bezdimenzijskog parametra prigušenja koji se često uzima za čelik.

Općenito govoreći,  $\alpha$  utječe na prigušenje radi matrice masa, a  $\beta$  na prigušenje radi krutosti materijala. Zbroj ta dva prigušenja tvori Rayleighevo prigušenje, što se može vidjeti na slici 4. Na slici je zelenom bojom prikazana zadana vrijednost bezdimenzijskog parametra prigušenja  $\xi = 0.05$  koju treba aproksimirati Rayleighevima parametrima  $\alpha$  i  $\beta$ . Prikazano je rješenje sa samo prve dvije vlastite frekvencije. Može se primijetiti da krivulja  $\xi$  siječe liniju zadanog  $\xi$  u točkama koje odgovaraju vlastitim frekvencijama  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , te da je u tom rasponu relativno blizu zadanom prigušenju.



**Slika 4. Komponente Rayleighevog prigušenja sustava**

Tu se sada očitava problem gdje je već kod treće vlastite frekvencije odstupanje od oko 90 %. Uzimanjem u obzir više vlastitih frekvencija pada točnost u rasponu prvih vlastitih frekvencija, ali raste na daljnjima. To je prikazano na slici 5, gdje plava boja predstavlja krivulju od dobivenu od dvije vlastite frekvencije prikazanu na slici 4, a prisutne su i krivulje dobivene od 3, 5 i 8 vlastitih frekvencija. Tu se sada još jasnije vidi kako bi Rayleighevi parametri dobiveni od samo dvije vlastite frekvencije radili vrlo veliku grešku već pri vibriranju na višim vlastitoj frekvenciji, no međutim one su mnogo važne od prethodnih.



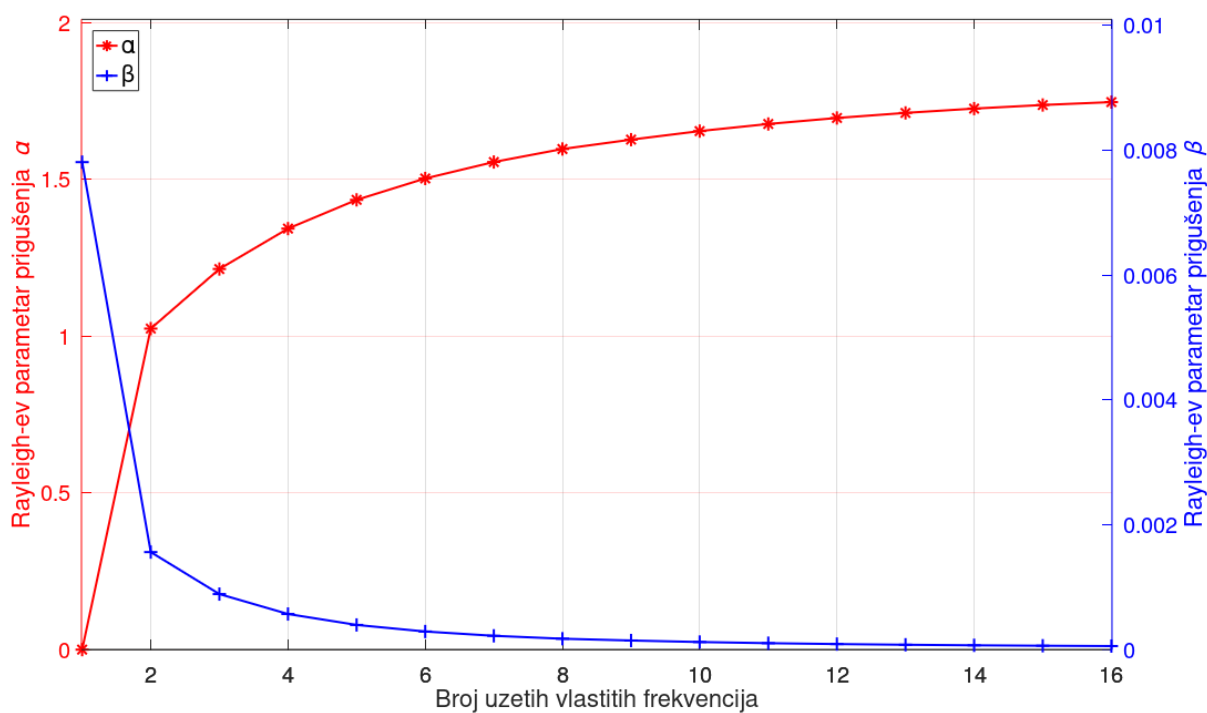
**Slika 5.** Ovisnost Rayleigheva prigušenja o broju kružnih frekvencija

Vrijednosti parametara  $\alpha$  i  $\beta$  se ponašaju kao da se asimptotski približavaju nekoj konačnoj vrijednosti sa porastom broja uzetih frekvencija sustava, kao što se može vidjeti u tablici 3 i na slici 6.



**Tablica 3. Promjene Rayleighevih parametara sa brojem uzetih vlastitih frekvencija**

Broj vlastitih frekvencija	$\alpha$	$\beta$
1	0,000047985	$7,8124 \cdot 10^{-3}$
2	1,0238	$1,5634 \cdot 10^{-3}$
3	1,2139	$0,89068 \cdot 10^{-3}$
4	1,3427	$0,57124 \cdot 10^{-3}$
5	1,4344	$0,39617 \cdot 10^{-3}$
6	1,5026	$0,29074 \cdot 10^{-3}$
7	1,5551	$0,22193 \cdot 10^{-3}$
8	1,5966	$0,17510 \cdot 10^{-3}$
9	1,6264	$0,14663 \cdot 10^{-3}$
10	1,6537	$0,1223 \cdot 10^{-3}$
11	1,6764	$0,1038 \cdot 10^{-3}$
12	1,6955	$0,0896 \cdot 10^{-3}$
13	1,7117	$0,0785 \cdot 10^{-3}$
14	1,7255	$0,0697 \cdot 10^{-3}$
15	1,7369	$0,0628 \cdot 10^{-3}$
16	1,7461	$0,0575 \cdot 10^{-3}$



**Slika 6. Promjene Rayleigh-evih parametara sa brojem uzetih vlastitih frekvencija**

Teško je odrediti koliko frekvencija treba uzeti u obzir za koji sustav, a ovdje je proizvoljno usvojeno da se koristi prvih osam vlastitih frekvencija grede, pa su onda Rayleigh-evi parametri  $\alpha = 1,5966$  i  $\beta = 0,0001751$ .

---

## 4. RAČUNALNI PROGRAMI

Danas je dostupan veliki izbor vrlo različitih programskih paketa s kojima se isti problem često rješava na osjetno drugačije načine. Stoga je uz ovaj rad koji objašnjava postupak razvijanja i korištenja algoritma shodno predstaviti korištene računalne alate pri izradi rada.

Sve do sada opisano u radu je programirano u programskom jeziku *Python* (3.8.8), u razvojnom okruženju *Spyder*.

### 4.1. *Python*

*Python* je programski jezik opće namjene otvorenog koda (eng. *open source*). Napravljen je da bude pristupačan i jednostavan za koristiti za početnike, a istovremeno pruža vrlo opširne mogućnosti kroz svoju knjižnicu (eng. *library*) modula odnosno dodataka. Česta (opravdana) kritika *Pythonu* jest da zaostaje sa brzinom za nekim drugim jezicima, međutim za primjenu razvoja algoritma njegov širok spektar postojećih alata lako prevagne taj nedostatak.

### 4.2. *Spyder*

To je integrirano razvojno okruženje (eng. *IDE, Integrated Development Environment*) otvorenog koda za programski jezik *Python*. *Python* funkcionira samostalno kroz sučelje komandne linije (eng. *CLI, Command Line Interface*), odnosno nije nužno koristiti *IDE*, no međutim neusporedivo je lakše za bilo što osim trivijalnih primjera.

### 4.3. Dodatni moduli

Za provedbu postupka ovog rada (koji je detaljno prikazan u sljedećem poglavlju) potrebni su i dodatni moduli s kojima se proširi funkcionalnost *Pythona*.

***NumPy***: modul otvorenog koda koji omogućava (među ostalim) korištenje matrica i matričnog računa.

***SciPy***: modul otvorenog koda koji sadrži alate za optimizaciju, linearnu algebru, interpolaciju, rješavače običnih diferencijalnih jednadžbi i još mnogo toga.

***Control***: modul koji sadrži osnovne alate za analizu i konstruiranje sustava povratnih veza i regulacije.

**Mosek:** komercijalni modul za rješavanje više vrsti optimizacijskih problema, sa posebnim naglaskom na linearno, kvadratno konično i semidefinitno optimiranje. Koristi se u inženjerstvu, financijama i informatici. Iako je to komercijalni modul, svima su dostupne privremene probne licence, a u edukacijske svrhe se mogu periodično obnavljati.

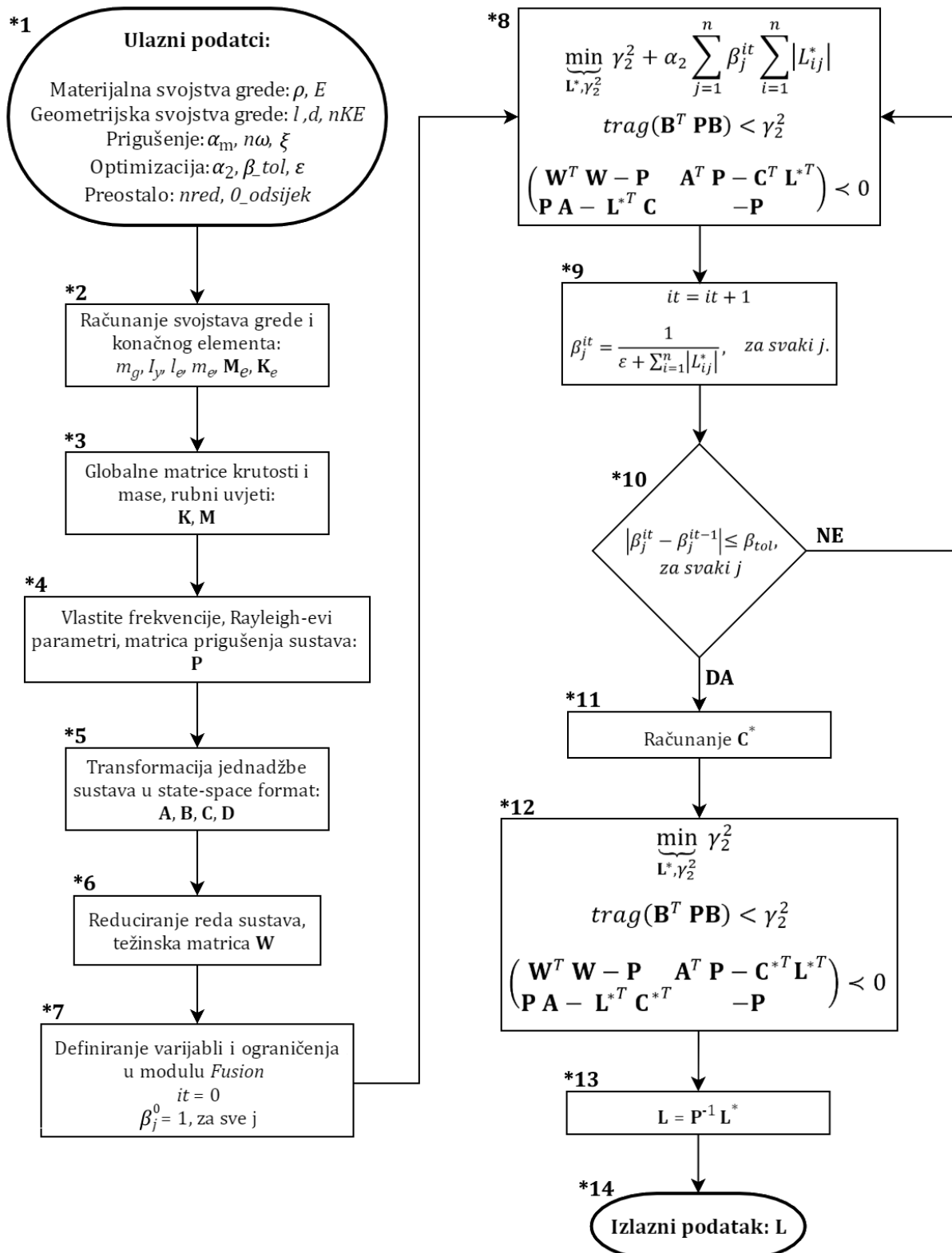
**Matplotlib:** modul otvorenog koda za vizualizaciju, uključujući dijagrame i animacije.

**Sys:** modul koji pruža pristup nekim inače nedostupnim varijablama.

**Slycot:** modul koji omogućava umotavanje postojećih funkcija u druge funkcije, u svrhu olakšavanja posla korisniku.

## 5. TOK PROCESA OPTIMIZACIJE

Cijeli proces je prikazan u dijagramu toka na slici 7.



Slika 7. Tok procesa optimizacije

Lijevi stupac je obrada ulaznih podataka i priprema optimizacije, a desni stupac su prva i druga faza optimizacije opisani u poglavlju 2. Dijagram toka je napravljen dosta pojednostavljeno jer bi inače bio nepregledan, pa su stavke iz dijagrama popraćene objašnjenjima i komentarima po brojevima stavki:

**\*1** - Ulazni podatci za cijeli sustav. Oznake predstavljaju

- $\rho$  - gustoća materijala grede,
- $E$  - modul elastičnosti grede,
- $l$  - duljina grede,
- $d$  - promjer grede,
- $nKE$  - broj konačnih elemenata za diskretizaciju,
- $\alpha_m$  - faktor u matrici masa,
- $n\omega$  - broj uzetih vlastitih frekvencija za proračun prigušenja,
- $\zeta$  - bezdimenzijski parametar prigušenja materijala,
- $\alpha_2$  - faktor koji balansira minimiziranje  $H_2$  norme greške sustava i broja osjetnika,
- $\beta\_tol$  - iznos razlike  $\beta_j^{it}$  i  $\beta_j^{it-1}$ ,
- $\varepsilon$  - pomoćni pribrojnik pri računanju  $\beta_j^{it}$ ,
- $nred$  - red reduciranog sustava,
- $0\_ods$  - tolerancija na iznos članova  $\mathbf{L}$  ispod kojeg se smatra da su nula.

**\*2** - Trivijalan postupak, matrice su standardne za odabrani konačni element. Oznake:

- $m_g$  - masa grede,
- $I_y$  - moment površine presjeka grede,
- $l_e$  - duljina konačnog elementa,
- $m_e$  - masa konačnog elementa,
- $\mathbf{M}_e$  - matrica masa konačnog elementa,
- $\mathbf{K}_e$  - matrica krutosti konačnog elementa.

**\*3** - Globalne matrice se sastavljaju na standardni način. Rubni uvjeti su da u prvom i zadnjem čvoru nema pomaka u smjeru y-osi, pa se onda u globalnim matricama mase i krutosti odstrane redovi i stupci koji odgovaraju tim stupnjevima slobode sustava (prvi i predzadnji).

Oznake:

**K** - globalna matrica krutosti,

**M** - globalna matrica masa.

**\*4** - Vlastite frekvencije se računaju gotovom naredbom `scipy.linalg.eig()`, gdje `eig` stoji za „*eigenvalues*“. Za dobivanje Rayleighevih parametara se definiraju matrice iz izraza (52), te se  $\alpha$  i  $\beta$  pronadu rješavanjem sustava pomoću gotove naredbe `scipy.linalg.lstsq()`, gdje `lstsq` stoji za „*least squares*“ (metoda najmanjih kvadrata). U globalnoj matrici prigušenja su rubni uvjeti već implementirani jer se za formiranje **P** koriste matrice krutosti i mase sa već izbačenim relevantnim redovima i stupcima. Oznake:

$\alpha$  - Rayleighev prvi parametar prigušenja,

$\beta$  - Rayleighev drugi parametar prigušenja,

**P** - globalna matrica prigušenja.

**\*5** - Postupak je opisan izrazima (1) - (9). Matrica **D** je nul matrica. Oznake:

**A** - matrica koeficijenata,

**B** - kontrolna matrica,

**C** - matrica osjetnika (izlazna matrica),

**D** - matrica direktnog udjela.

**\*6** - Sustav se formira unutar modula „*Control*“ pomoću naredbe `control.ss()`, gdje `ss` stoji za „*state-space*“. Nakon toga se reducira na red određen ulaznom varijablom `nred` pomoću naredbe `control.balred()`, gdje `balred` stoji za „*balanced reduction*“. Dodatno se računa težinska matrica **W** koja je u ovom zadatku ekvivalentna matrici **C** (objašnjenje u **poglavlju 2**). Oznake:

**W** - težinska matrica.

**\*7** - Definiranje optimizacijskog modela u modulu „*Mosek*“. Model se definira naredbom `ime_modela = fusion.Model()`, varijable naredbom `ime_modela.variable()`, a ograničenja naredbom `ime_modela.constraint()`. Varijable koje se tako definiraju su  $\gamma_2$ , **L**, i **P**. **P** je definirana kao *PSDCone* varijabla, tako da je tu ispunjen uvjet da je **P** pozitivno definitna matrica. Redni broj iteracije se postavi da je nula ( $it = 0$ ), te se definira vektor  $\beta^0$  za nultu iteraciju prema uputama. Oznake:

$it$  - brojač iteracija prve faze optimizacije,

$\beta_j^0$  -  $j$ -ti član vektora  $\beta^0$

$j$  - indeks

**\*8** - U optimizacijskom modelu modula „Mosek“ se definira funkcija cilja (*ime\_modela.objective()*). Na dijagramu stavka \*8 sadrži i zapise ograničenja, iako su definirana prije toga u stavci \*7, razlog je što u literaturama ograničenja skoro uvijek prate funkciju cilja u dijagramima toka, pa je ovdje to ponovljeno radi lakšeg snalaženja na dijagramu. Trenutne vrijednosti  $\beta$  se spremaju u privremenu varijablu radi usporedbe sa sljedećom iteracijom. Proces optimizacije se započinje naredbom *ime\_modela.solve()*. Zadnji red stavke je ograničenje da je izraz u zagradi negativno definitan. Oznake:

$\gamma_2$  - gornja vrijednost  $H_2$  norme sustava greške iz izraza (26)

**\*9** - Po završetku optimizacije problema iz stavke \*8, povećava se brojač iteracija za jedan i računaju se nove vrijednosti  $\beta$  prema uputama iz **poglavlja 2**.

**\*10** - Uspoređuju se nove vrijednosti  $\beta$  sa starima po svim pozicijama  $\beta$ . Ako za svaki  $j$  vrijedi da je  $\beta_j^{it} - \beta_j^{it-1} \leq \beta_{tol}$ , smatra se da je zadovoljen uvjet da je  $\beta_j^{it} \approx \beta_j^{it-1}$ , i iteriranje je završilo. Ako uvjet nije ispunjen, vraća se u stavku \*8 sa novim vrijednostima  $\beta$ .

**\*11** - Kada iteriranje završi, postignuto je da je optimiran broj i položaj osjetnika, ali ostatak rezultata nije dobar jer se pojačanje osmatrača računa sa dodatnim članom koji penalizira visoke iznose pojedinih vrijednosti matrice  $\mathbf{L}^*$ . Da bi se to ispravilo, kreće se u drugu fazu zadatka i računa se  $\mathbf{C}^*$ . Svrha  $\mathbf{C}^*$  je da preuzme na sebe posao držanja odabranih pozicija osjetnika, tako da se sada još jednom može provesti optimizacija, ali ovaj puta bez člana za minimiziranje broja osjetnika. To se postiže tako da se pogleda koji stupci matrice  $\mathbf{L}^*$  su nul stupci, te se onda ti isti stupci u matrici  $\mathbf{C}$  postave kao nul stupci. Važno je napomenuti da nul stupci matrice  $\mathbf{L}^*$  nisu zapravo nužno nul stupci, ali imaju vrlo očito vrijednosti koje nisu nula samo radi ne-savršenosti numeričkih postupaka, pa se onda radi provjera da li sve vrijednosti pojedinog stupca imaju vrijednosti niže od pred definirane granice koja ima oznaku *0\_odsjek* i za rješavanje ovog zadatka je iznosila  $10^{-5}$ .

**\*12** - Provodi se zadnji postupak optimizacije, skoro identičan onom iz prve faze. Definira se novi postupak optimizacije, potpuno analogno stavkama \*7 i \*8, samo se sada funkcija cilja i jedno ograničenje razlikuju. Iz funkcije cilja je u odnosu na stavku \*8 potpuno uklonjen dodatak za minimizaciju broja osjetnika, pa ona na ispravan način minimizira  $\mathbf{L}^*$ .



**\*13** - Sada iz ispravno dobivene matrice  $\mathbf{L}^*$  treba izvući matricu  $\mathbf{L}$ , koja predstavlja pojačanje osmatrača za dobiveni rezultat.

**\*14** - Izlazni podatak iz sustava je pojačanje osmatrača  $\mathbf{L}$ .

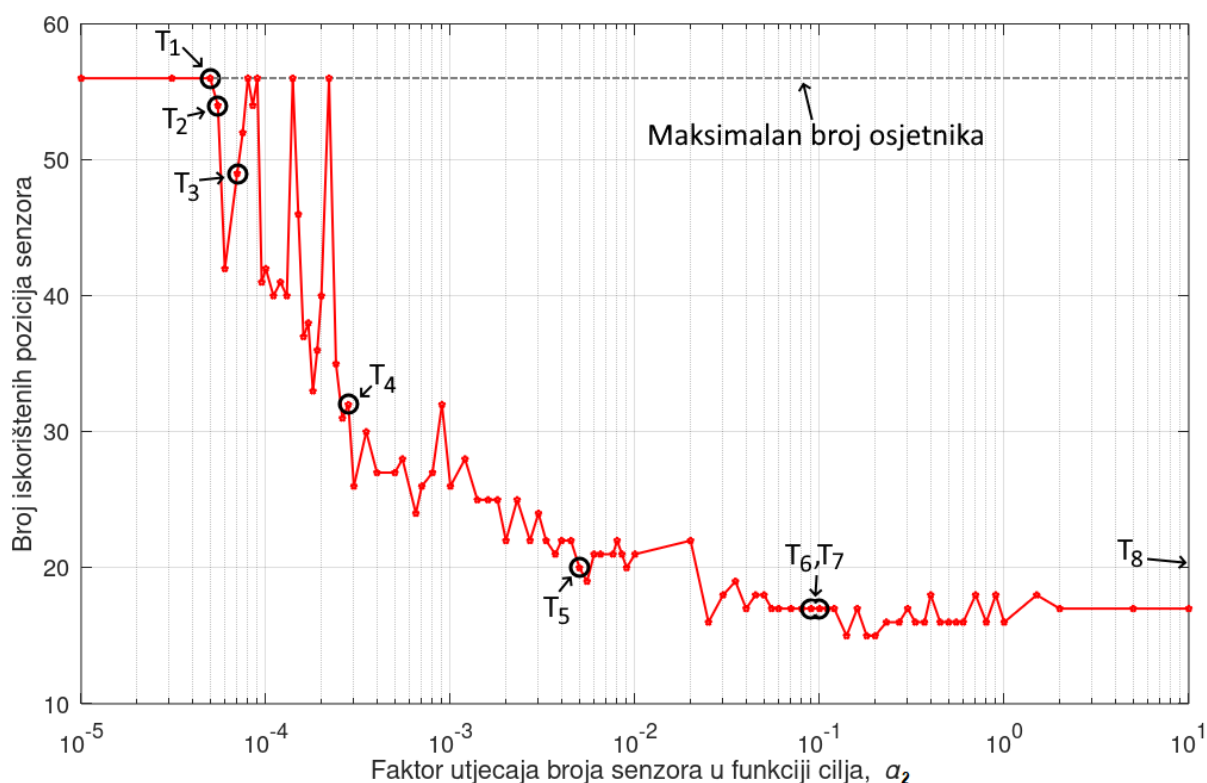
Time je završen proces pronalaženja pozicija osjetnika i optimiranja  $H_2$  norme greške sustava.

## 6. REZULTATI

Rezultati rada su dobiveni na gredi diskretiziranoj sa 29 grednih konačnih elemenata. Izvršen je 101 postupak optimizacije sa variranjem parametra  $\alpha_2$ , od čega je u 88 slučajeva broj iskorištenih pozicija osjetnika bio manji od maksimalnog mogućega. U slučaju iskorištavanja maksimalno mogućeg broja osjetnika, rezultati nisu od velike koristi u kontekstu ovog rada, pa se na njih uglavnom neće ni osvrnati. Sama ideja optimizacije položaja ovisi o tome da se ukupno koristi manje osjetnika nego što ima mogućih položaja za iste.

### 6.1. Utjecaj $\alpha_2$ na broj osjetnika

Kada je  $\alpha_2 = 0$ , ne optimira se broj osjetnika već samo  $H_2$  norma greške sustava (jednadžba (23)). Porastom  $\alpha_2$  raste utjecaj minimiziranja broja osjetnika na krajnji rezultat, pa je za očekivati da će istovremeno padati broj iskorištenih pozicija osjetnika. To se može i vidjeti na slici 8:



Slika 8. Ovisnost broja iskorištenih pozicija osjetnika i faktoru  $\alpha_2$

Prva pronađena vrijednost faktora  $\alpha_2$  kod koje nisu iskorištene sve moguće pozicije osjetnika je  $\alpha_2 = 0.000055$ . Daljnjim porastom  $\alpha_2$  se može vidjeti trend padanja broja iskorištenih

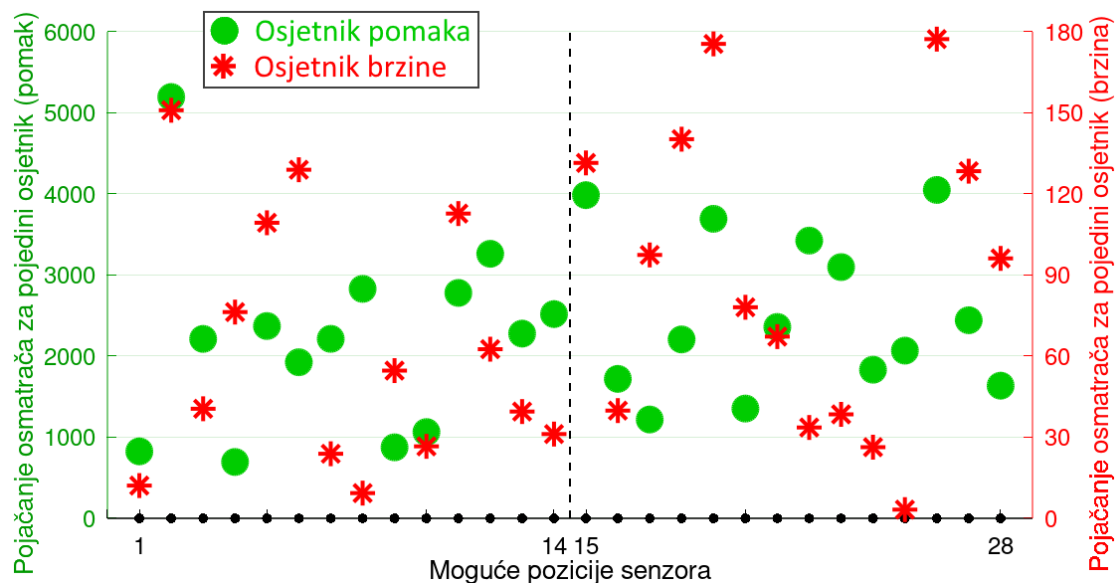
pozicija osjetnika, uz mala prividno nasumična odstupanja koja su nešto više izražena kod prvih vrijednosti  $\alpha_2$  gdje nisu iskorištene sve moguće pozicije.

Nakon  $\alpha_2 = 2$  broj iskorištenih pozicija trajno ostaje 17 za 10ak izvršenih procesa optimiranja, sve do vrijednosti  $\alpha_2 = 31200$ . Međutim za nekoliko drugih  $\alpha_2$  je dobiven rezultat sa manjim brojem osjetnika (15 i 16). Nije ispitano koji je točno uzrok tome, a neprovjerena pretpostavka je da sa dodatnim porastom  $\alpha_2$  raste i stabilnost opisa sustava pa je manji utjecaj varijacija radi same numerike.

Ti rezultati se preklapaju sa očekivanim ponašanjem razvijenog algoritma.

## 6.2. Primjeri odabranih pozicija osjetnika i pojačanja osmatrača

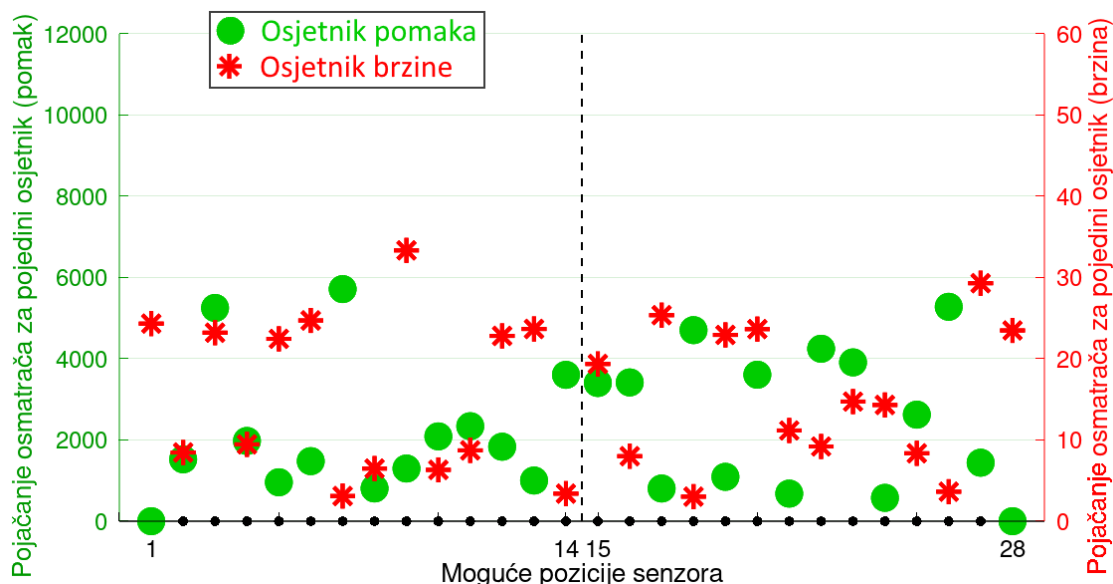
Na slici 8 je također označeno osam točaka  $T_1$ - $T_8$ . Sljedeće slike 9-16 prikazuju iznose pojačanja osmatrača za pojedini osjetnik (sume njihovih vrijednosti) za tih osam točaka. Slika 9 prikazuje najveću vrijednost faktora  $\alpha_2 = 0.00005$  prije koje nije pronađen slučaj sa neiskorištenim pozicijama osjetnika.



Slika 9. Pojačanje osmatrača pojedinog osjetnika za  $\alpha_2 = 0.00005$ ,  $T_1$

Zelenom bojom (krug, lijeva ordinata) su označene vrijednosti pojačanja osmatrača za pojedine osjetnike pomaka, a crvenom bojom (zvjezdica, desna ordinata) analogne vrijednosti osjetnika brzina. Iscrtkana okomita crta na sredini označava centar grede. Apscisa ne predstavlja kontinuirane vrijednosti već je na njoj crnim točkama iscrtano 28 mogućih pozicija za osjetnike. Ako se zamisli da apscisa predstavlja gredu, prostor između crnih točki bi odgovarao pojedinim

konačnim elementima, a pozicije 0 i 29 koje nisu označene odgovaraju osloncima grede. Te pozicije nisu moguće mjesto za smjestiti osjetnik jer su uklonjene rubnim uvjetima (u njima progib nužno uvijek nula). Na slici 9 niti jedna vrijednost pojačanja osmatrača ne iznosi nula, a sljedeće slike prikazuju trend opadanja iskorištenih broja osjetnika porastom  $\alpha_2$ .



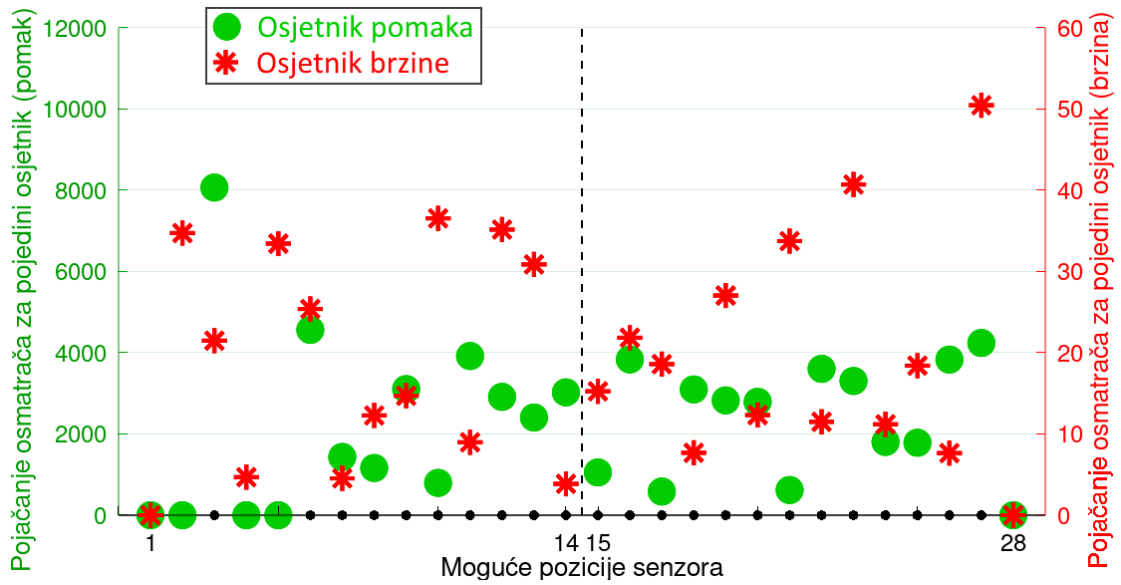
Slika 10. Pojačanje osmatrača osjetnika za  $\alpha_2 = 0.000055$ ,  $T_2$

Slika 10 prikazuje prvi pronađeni slučaj ( $\alpha_2 = 0.000055$ ) gdje nisu iskorištene sve pozicije osjetnika. Na mjestima gdje je vrijednost nula, odnosno oznaka osjetnika se nalazi na apscisi, nema osjetnika. Na slici se može vidjeti da su to osjetnici pomaka 1 i 28, odnosno nisu iskorištene prva i zadnja moguća pozicija osjetnika pomaka. Uočena je tendencija da kod niskih  $\alpha_2$  gustoća neiskorištenih pozicija osjetnika bude veća pri rubovima grede.

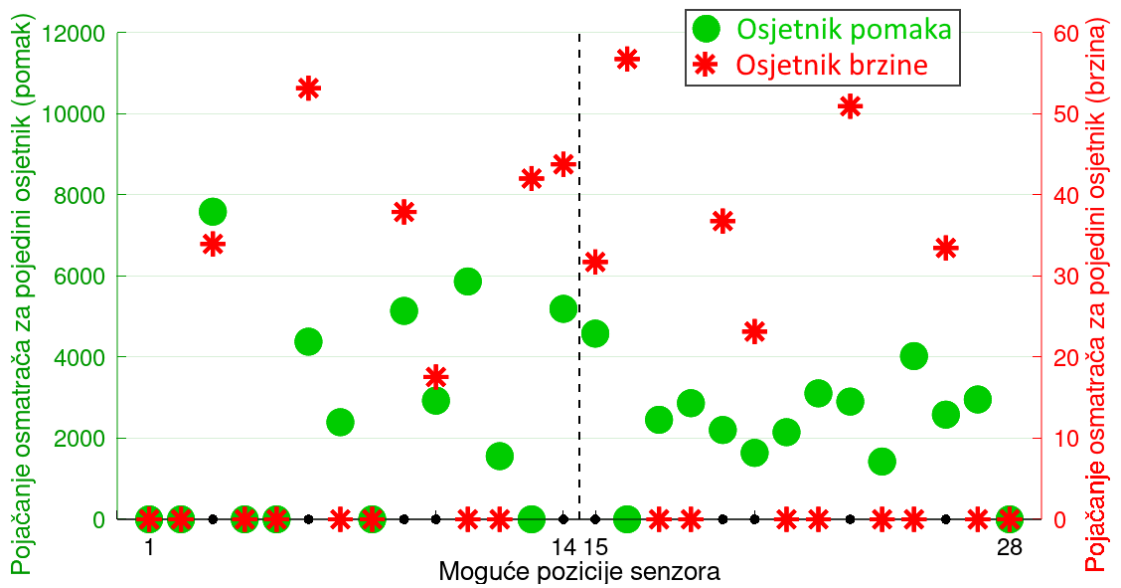
Općenito, ako je kod optimizacije vrijednost pojačanja osmatrača za neki osjetnik bila nula, to znači da je njegova važnost za minimiziranje pogreške osmatrača zanemariva (u sklopu istovremene minimizacije pogreške osmatrača i broja osjetnika). Takve pozicije su ručno uklonjene prije nego je izvršena konačna optimizacija čiji rezultati su ovdje prikazani. Rezultati iznosa pojačanja osmatrača prije nego se izbací utjecaj minimizacije broja osjetnika je vidljiv kasnije na slici 21.

Na slici 11 se vidi sedam (zbrojeno za pomake i brzine) neiskorištenih pozicija, opet u relativnoj blizini ruba grede. Zanimljivo je da je od pet susjednih pozicija osjetnika pomaka algoritam pronašao da četiri nisu relevantne, dok je na drugoj strani grede slučaj samo jedne pozicije. Razlog nije što se radi o dva različita oslonca (slika 2) jer u ovom sustavu ne postoji pomak u smjeru osi grede, pa su oba oslonca jednako modelirana.

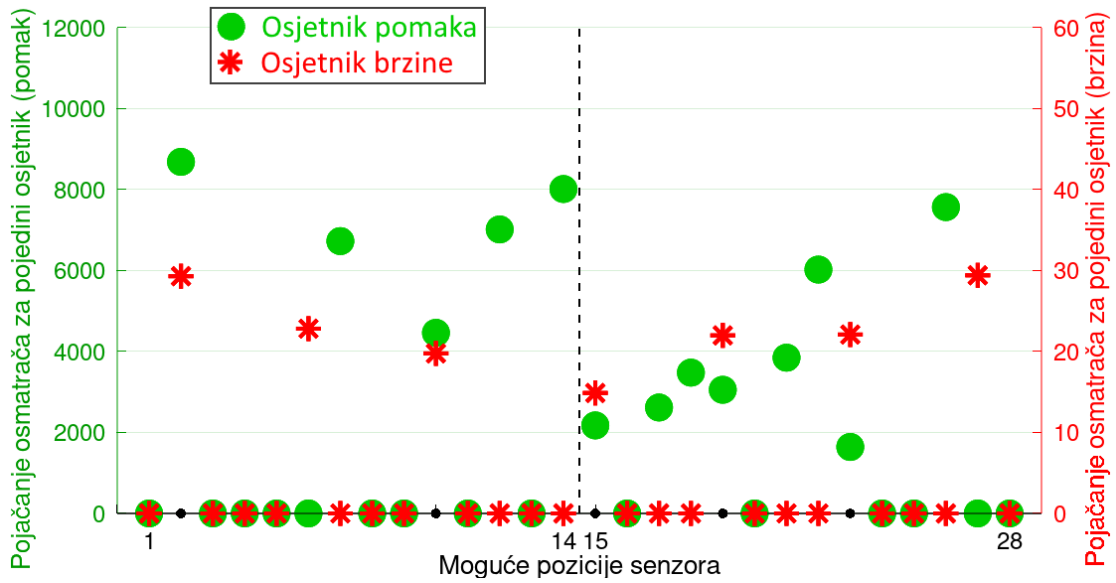
Kod slika 10-16 je ciljano ostavljen isti raspon vrijednosti ordinata.



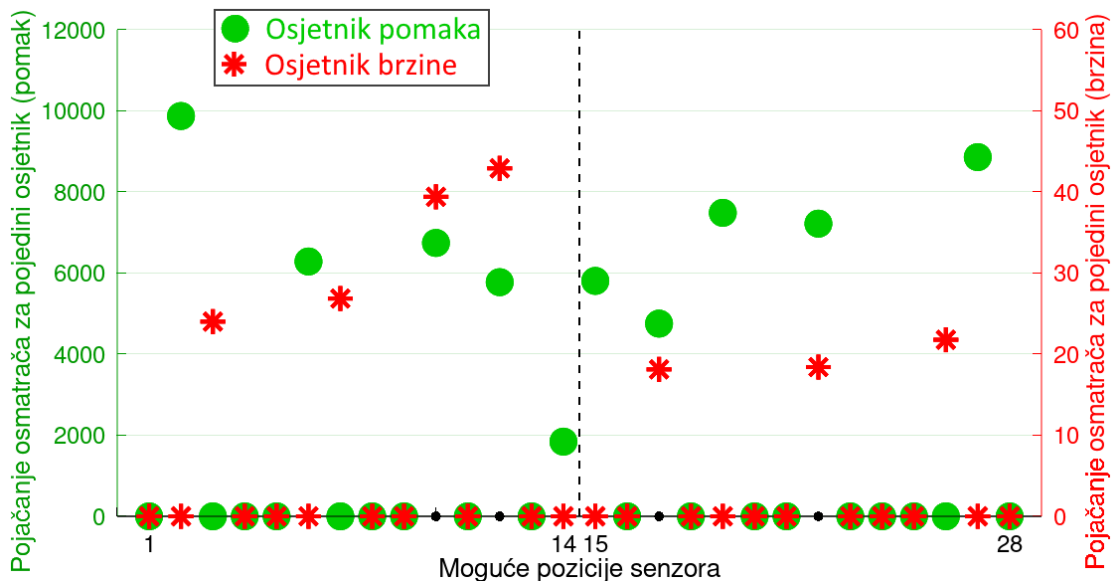
Slika 11. Pojačanje osmatrača osjetnika za  $\alpha_2 = 0.00007, T_3$



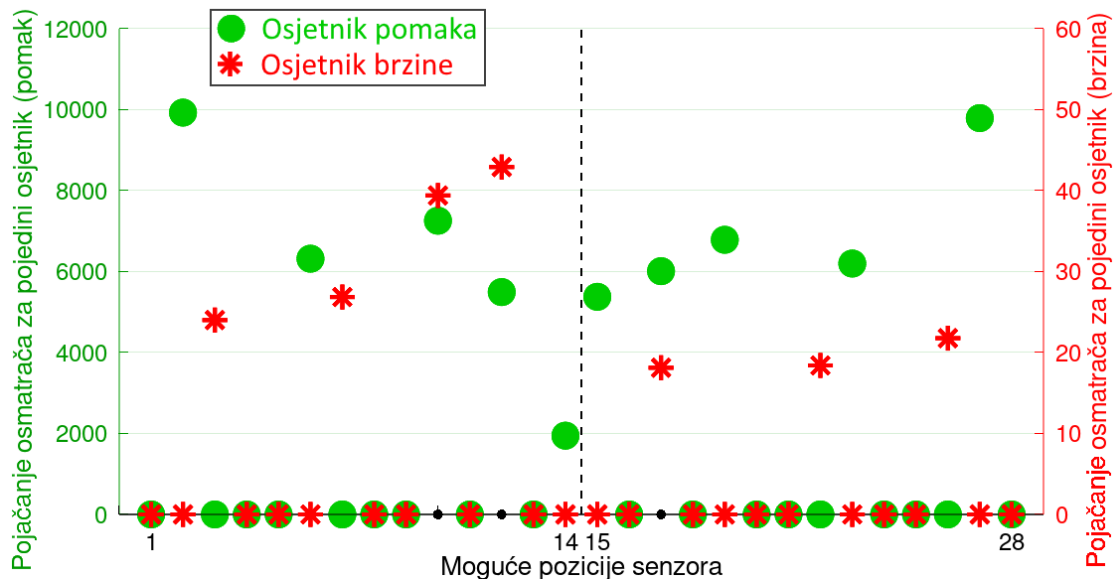
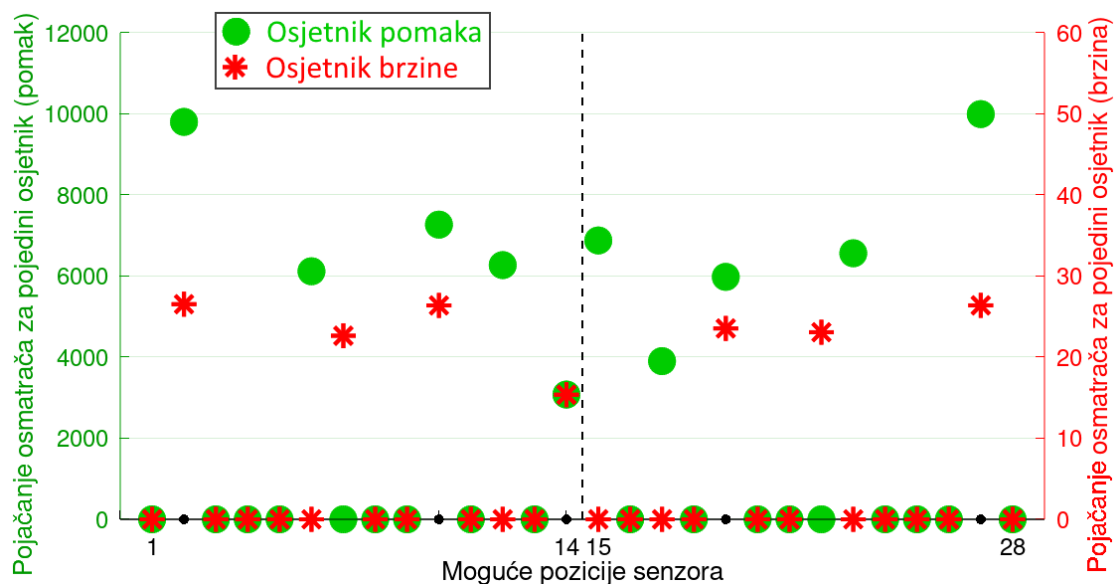
Slika 12. Pojačanje osmatrača osjetnika za  $\alpha_2 = 0.00028, T_4$



Slika 13. Pojačanje osmatrača osjetnika za  $\alpha_2 = 0.005, T_5$



Slika 14. Pojačanje osmatrača osjetnika za  $\alpha_2 = 0.09, T_6$

Slika 15. Pojačanje osmatrača osjetnika za  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $T_7$ Slika 16. Pojačanje osmatrača osjetnika za  $\alpha_2 = 100$ ,  $T_8$ 

Slike 14 i 15 (točke  $T_7$  i  $T_8$ ) su namjerno uzete sa vrlo bliskim  $\alpha_2$  da se prikaže kako nije nužno da unutar raspona  $\alpha_2$  gdje je optimiranjem utvrđen isti broj iskorištenih osjetnika to budu iste pozicije.

Populacija osjetnika na pozicijama 22 i 23 se razlikuje. Bilo bi za očekivati da kada se jednom utvrdi optimalan odabir pozicija, da se do sljedeće promjene tog broja ne mijenja koje su to pozicije, pošto je jedina razlika ulaza u proces optimizaciju faktor  $\alpha_2$  koji upravo pokušava smanjiti broj osjetnika. Uz prividno nasumična odstupanja spomenuta u potpoglavlju 6.1, to je

sada drugi razlog koji vodi prema zaključku da postoji neki iznos nestabilnosti u sustavu koji uzrokuje prividno nasumična odstupanja od trenda. Provođenjem optimiranja sa identičnim parametrima uvijek da identične rezultate, odnosno ta nestabilnost nije nasumična nego je ponovljiva.

Tablica 4 je sažetak bitnih podataka sa slika 9-16:

**Tablica 4. Sažetak relevantnih podataka sa slika 9-16**

Slika	Oznaka točke na slici 8	$\alpha_2$	Iskorištene pozicije osjetnika:		
			pomaka	brzine	ukupno
9	T <sub>1</sub>	0	28	28	56
10	T <sub>2</sub>	0.00005	26	28	54
11	T <sub>3</sub>	0.000055	23	26	49
12	T <sub>4</sub>	0.00007	20	12	32
13	T <sub>5</sub>	0.00028	13	7	20
14	T <sub>6</sub>	0.09	10	7	17
15	T <sub>7</sub>	0.1	10	7	17
16	T <sub>8</sub>	100	10	7	17

Još jedan primijećeni trend jest da su najviše vrijednosti pojačanja osmatrača na pozicijama oko koje je najveća gustoća neiskorištenih položaja osjetnika. Na prethodnim slikama ima mnogo primjera toga, a najizraženiji je na slici 11 gdje je pojačanje osmatrača osjetnika pomaka na poziciji 3 skoro duplog iznosa od svih ostalih, dok su oko njega na obje strane dvije moguće pozicije osjetnika pomaka neiskorištene. To je također očekivani rezultat jer što je šire lokalno područje gdje je to jedini osjetnik, to je viša njegova važnost za minimiziranje greške osmatrača.

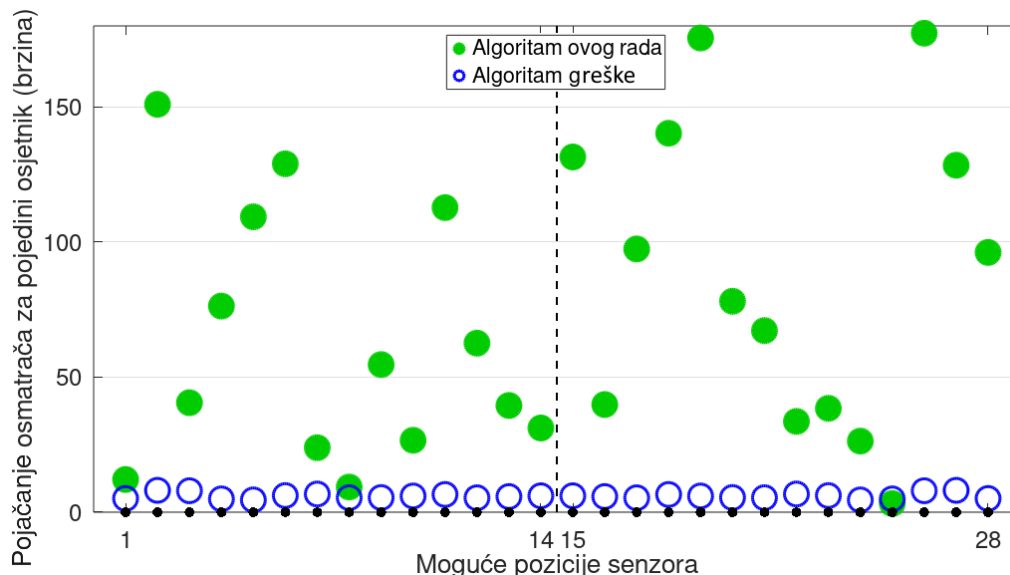
### 6.3. Dodatni rezultati

Ovdje su prikazani dodatni rezultati koji nisu nužno korisni za validaciju razvijenog algoritma, već su tu u svrhu boljeg razumijevanja općenite ideje rada i pojedinih koraka razvoja algoritma.

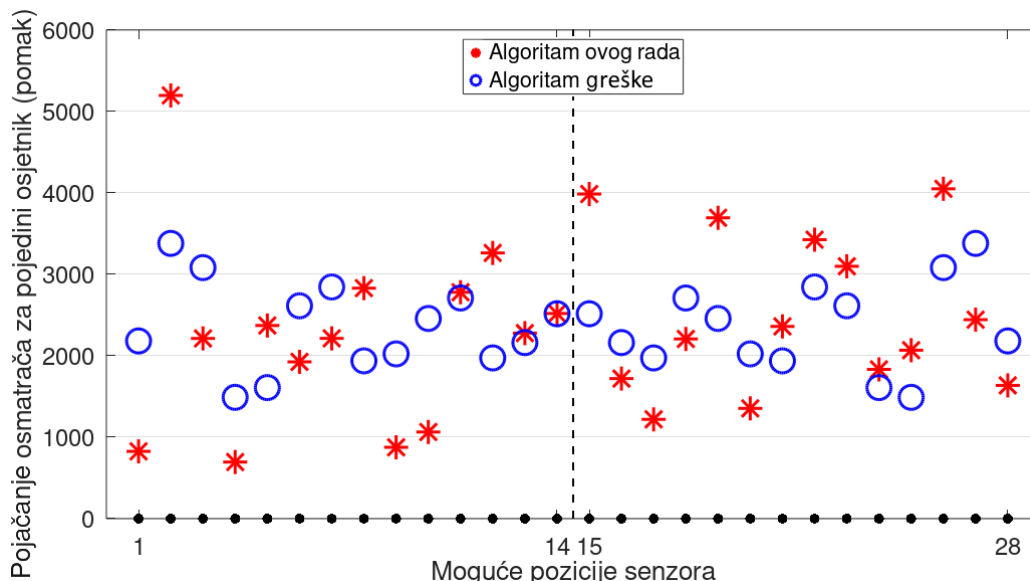


### 6.3.1. Usporedba rezultata sa algoritmom koji ne minimizira broj osjetnika

Rezultat je uspoređen sa algoritmom za minimiziranje greške osmatrača koji je razvijen bez podrške za minimiziranje broja osjetnika.



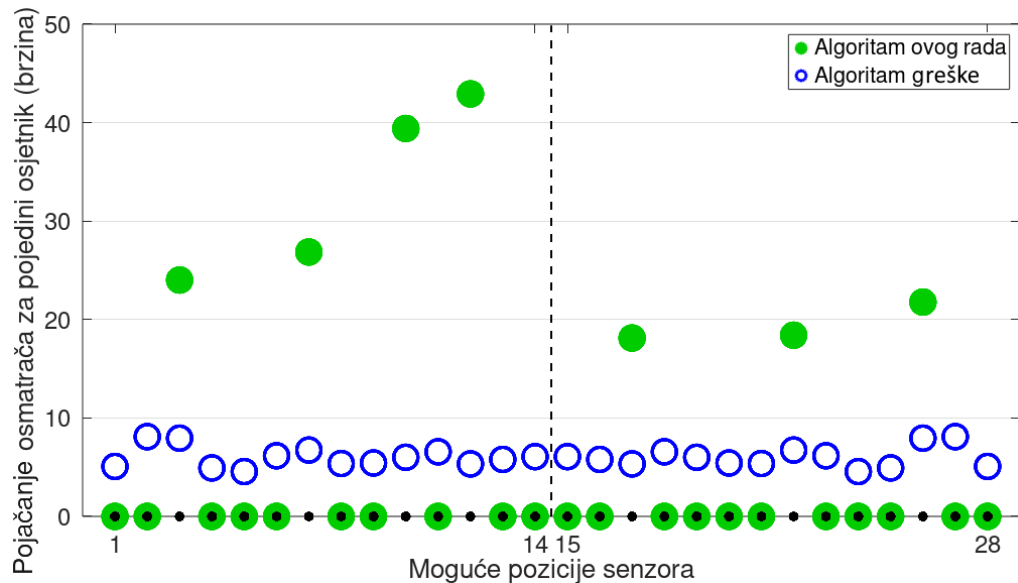
Slika 17. Usporedba sa algoritmom koji ne minimizira broj osjetnika, brzina,  $\alpha_2 = 0$



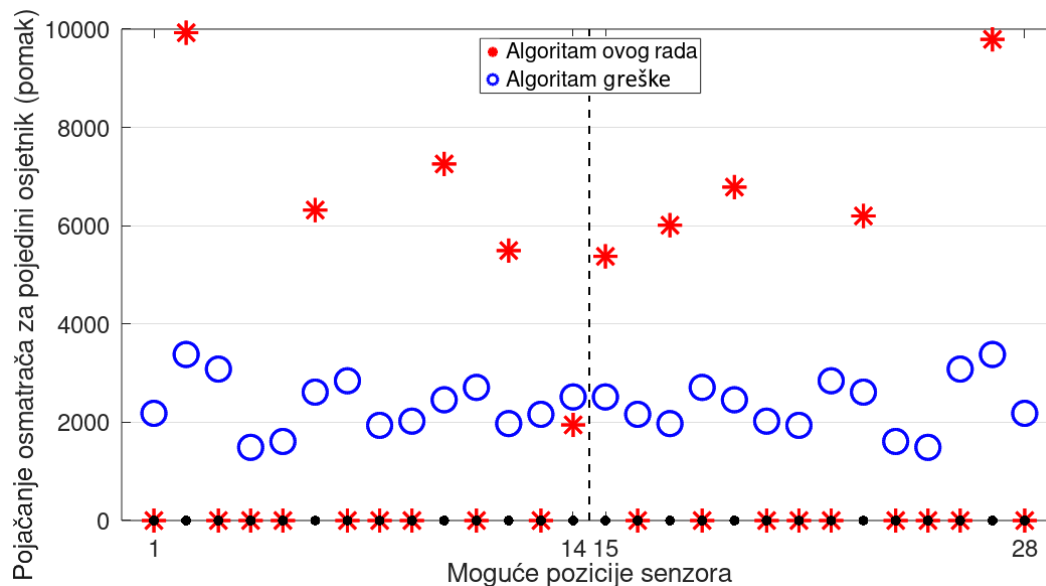
Slika 18. Usporedba sa algoritmom bez minimizacije broja osjetnika, pomak,  $\alpha_2 = 0$

Slike 17 i 18 prikazuju usporedbu rezultata sa istim ulaznim parametrima, dok je za algoritam ovog rada  $\alpha_2 = 0$ . Sada su pomaci i brzine odvojeni svaki na svojem dijagramu. Algoritmi su drugačije formulirani pa postoje razlike u vrijednostima pojedinih pozicija osjetnika, međutim ako se pogledaju sve vrijednosti pojačanja osmatrača (pomaka i brzina zajedno) razlika nije

velika. To je za očekivati jer za  $\alpha_2 = 0$  ta dva algoritma pokušavaju postići isti cilj. Prve stavke na obje slike su identične onima na slici 9.



**Slika 19.** Usporedba sa algoritmom koji ne minimizira broj osjetnika, brzina,  $\alpha_2 = 0.1$



**Slika 20.** Usporedba sa algoritmom koji ne minimizira broj osjetnika, brzina,  $\alpha_2 = 0.1$

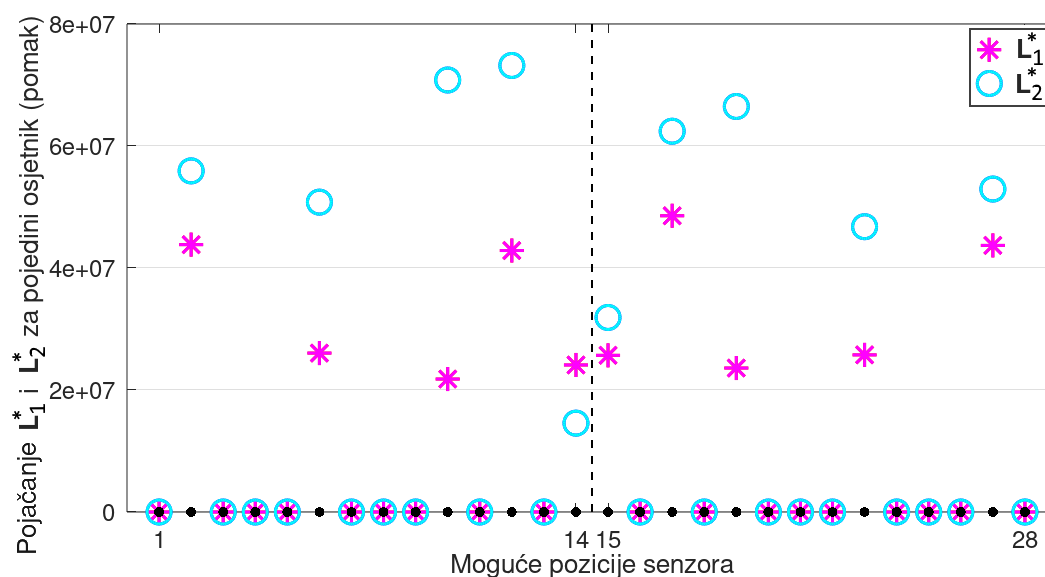
Slike 19 i 20 prikazuju analognu usporedbu rezultata sa istim ulaznim parametrima, dok je za algoritam ovog rada  $\alpha_2 = 0.1$ . Algoritam koji ne minimizira broj osjetnika i dalje radi sa svih 56, dok algoritam ovog rada radi sa ukupno 17. Za očekivati je da će pojačanje osmatrača preostalih osjetnika algoritma ovog rada biti iznad onih od algoritma koji nema minimizaciju broja osjetnika, što i je slučaj. Prve stavke na obje slike su identične onima na slici 15.

### 6.3.2. Usporedba rezultata dobivenih iz $L^*$ između faza optimizacije 1 i 2

Kratki podsjetnik:  $L^*$  je supstitucija za  $PL$  (jednadžba (30)). U jednadžbi (33) se  $L^*$  koristi u prvoj fazi optimizacije, gdje je on računat u sklopu funkcije cilja koja minimizira grešku sustava i broj osjetnika, i algoritam ima slobodu mijenjati sve njegove vrijednosti. Nadalje će se on označavati sa  $L_1^*$ .

U jednadžbi (37) se  $L^*$  koristi u drugoj fazi optimizacije gdje je računat u sklopu funkcije cilja koja ne minimizira broj osjetnika, već samo grešku sustava, ali ovaj puta su unaprijed (iz prve faze) određene pozicije osjetnika koje se koriste, pa algoritam nema pristup stupcima  $L^*$  koji odgovaraju tim pozicijama osjetnika, već su oni ručno definirani kao nul stupci uz pomoć matrice osjetnika  $C$ . Taj  $L^*$  će se nadalje označavati sa  $L_2^*$ .

Slika 21 prikazuje usporedbu vrijednosti pojačanja odgovarajućih stupaca  $L_1^*$  i  $L_2^*$  po pozicijama osjetnika za pomake.



Slika 21. Usporedba pojačanja  $L_1^*$  i  $L_2^*$  na osjetnicima pomaka

Na slici se može vidjeti kako dodatni pribrojnik za minimizaciju broja osjetnika u funkciji cilja utječe na iznose  $L_1^*$ . Iskorištene pozicije osjetnika su očito iste jer su to dva koraka iste optimizacije, no vrijednosti pojačanja za pojedine aktivne pozicija osjetnika se razlikuju. Nakon što se ukloni uvjet minimizacije broja osjetnika iz  $L_1^*$ , vrijednosti pojačanja za pomak  $L_2^*$  su više raštrkane od  $L_1^*$  koje se nalaze u užem pojasu.

## 7. ZAKLJUČAK

Zadatak rada je bio napraviti algoritam za optimizaciju smještaja osjetnika vibracija na konstrukciji. To je postignuto razvijanjem algoritma za mehanički sustav diskretiziran sa metodom konačnih elemenata koji istovremeno optimira i broj i položaj osjetnika. Algoritam je koncipiran tako da je svaki čvor mreže konačnih elemenata potencijalno mjesto za osjetnik, te se istovremeno minimizira  $H_2$  norma greške osmatrača i broj osjetnika pomnožen težinskim faktorom  $\alpha_2$  koji je izbor korisnika.

Algoritam radi na principu minimizacije greške osmatrača (eng. *observer*), te ima dvije faze: u prvoj istovremeno minimizira grešku sustava i broj osjetnika, čime postaju poznati broj i pozicije osjetnika na konstrukciji. U drugoj fazi se optimira samo greška sustava, ali sa nametnutim brojem i smještaj osjetnika iz prve faze. Tako se postiže ispravno optimirana greška (a time i ispravno definirani model osmatrača) na sustavu sa optimiranim položajem osjetnika. U radu je detaljno prikazan proces izvođenja optimizacijskog modela baziranog na istovremenom optimiranju smještaja i broja osjetnika. Nakon toga je na primjeru konstrukcije grede sa stupnjevima slobode zakreta i progiba prikazan potpuni postupak pripreme mehaničkog sustava za obradu sa razvijenim algoritmom. Dodatno, detaljno je prikazan i objašnjen dijagram toka pripreme i provođenja spomenute optimizacije.

Algoritam je primijenjen na spomenutom primjeru grede, i prikazani su rezultati. U rezultatima se jasno vidi kako porastom faktora težine minimizacije broja osjetnika  $\alpha_2$  pada broj korištenih osjetnika, te je za 8 strateški odabranih vrijednosti prikazana evolucija odabranih pozicija smještaja osjetnika na gredi. Rezultati su popraćeni mnogim komentarima koji daju dodatni uvid u način rada algoritma.

Dodatno, napravljena je usporedba sa algoritmom optimizacije greške analognog sustava koji ne minimizira broj osjetnika, te je prikazana usporedba rezultata međukoraka razvijenog algoritma.

---

**LITERATURA**

- [1] Fritzen, C.-P., „Vibration-Based Methods for SHM“, University of Siegen, Germany
- [2] Rytter, A., (1993), „Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures“, Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Fracture and Dynamics Vol. R9314 No. 44
- [3] Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K., „Robust and optimal control“, Prentice hall, New Jersey, 1995.
- [4] Aström, K. J., Murray, R.M., „Feedback Systems - An introduction for Scientists and Engineers“, Princeton university press, 2009.
- [5] U. Münz, M. Pfister and P. Wolfrum, „Sensor and Actuator Placement for Linear Systems Based on  $H_2$  and  $H_\infty$  Optimization,“ in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 11, pp. 2984-2989, Nov. 2014, doi: 10.1109/TAC.2014.2351673.
- [6] E. J. Candes, M. B. Wakin, and S. P. Boyd, “Enhancing sparsity by reweighted  $\ell_1$  minimization,” *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 14, no. 5, pp. 877–905, 2008.
- [7] Oliveira, M.C. & Geromel, J. & Bernussou, J.. (2002). Extended  $H_2$  and  $H_\infty$  characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control - INT J CONTR.* 75. 666-679. 10.1080/00207170210140212.
- [8] Sorić, J., *Metoda Konačnih Elemenata*“, Golden marketing - Tehnička knjiga Zagreb, 2004 .
- [9] Tonković, Z., „Dinamička analiza“, Zagreb 2011.