

# Aerodinamička analiza elastičnih krila u idealnom fluidu

---

Ivetić, Luka

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:223991>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Luka Ivetić

ZAGREB, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

AERODINAMIČKA ANALIZA ELASTIČNIH KRILA U IDEALNOM FLUIDU

Mentor:

Doc. dr.sc. Dubravko Matijašević

Student:

Luka Ivetić

ZAGREB, 2021.

*Zahvaljujem se obitelji na kontinuiranoj  
potpori.*

*Zahvaljujem se stručnom mentoru na vod-  
stvu te strpljenju.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, srpanj 2021.

Luka Ivetić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Luka Ivetić** Mat. br.: 0035209315

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Aerodinamička analiza elastičnih krila u idealnom fluidu**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Aerodynamic analysis of elastic wings in ideal fluid**

### Opis zadatka:

Krila aerodinamički efikasnih letjelica su inherentno vitka, a vitka krila će se generalno više deformirati uslijed aerodinamičkog opterećenja. Dok su materijali za izradu jako vitkih krila bili skupi i nedostupni široj zajednici, u preliminarnoj fazi projektiranja uobičajena je bila pretpostavka da se pod aerodinamičkim opterećenjem geometrija deformiranog krila zanemarivo malo razlikuje od geometrije nedeformiranog krila, tj. da se aerodinamička opterećenja deformiranog krila neznatno mijenjaju uslijed elastičnog deformiranja krila. No, danas kada moderni materijali dozvoljavaju izradu sve vitkijih krila, pomičući granice aerodinamičke efikasnosti koja se može realizirati u naravi, takva pretpostavka je sve rjeđe opravdana.

U ovom radu promatra se stacionarna zadaća sprege idealnog fluida i elastične konstrukcije zrakoplova, te njeno numeričko rješenje primjereno preliminarnoj fazi projektiranja. U tu svrhu potrebno je usvojiti metodologiju za predmetni problem te implementirati formulaciju za numerički proračun međusobne (dvosmjerne) sprege fluidnog i konstrukcijskog dijela domene. Strujanje oko krila modelirat će se metodom noseće linije, a elastična konstrukcija opisati grednim modelom.

U okviru rada potrebno je prezentirati problem i korištene metode, komentirati dobivene rezultate te navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
30. studenoga 2020.

Datum predaje rada:  
1. rok: 18. veljače 2021.  
2. rok (izvanredni): 5. srpnja 2021.  
3. rok: 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 22.2. – 26.2.2021.  
2. rok (izvanredni): 9.7.2021.  
3. rok: 27.9. – 1.10.2021.

Zadatak zadao:

Doc. dr.sc. Dubravko Matijašević

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	vii
Popis tablica	ix
Popis oznaka	x
Sažetak	xii
Summary	xiii
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Tijek istraživanja . . . . .	1
<b>2. Matematički model</b>	<b>3</b>
2.1. Općeniti oblik transportnih zakona . . . . .	3
2.2. Krilo u idealnom fluidu . . . . .	4
2.3. Aerodinamički analiza . . . . .	6
2.4. Osnovne jednadžbe teorije elastičnosti . . . . .	7
2.5. Savijanje štapa . . . . .	8
2.6. Uvijanje štapa . . . . .	8
2.7. Aksijalan pomak krila uzrokovan velikim progibima . . . . .	9

	<b>vi</b>
<b>3. Numerička implementacija matematičkih modela</b>	<b>10</b>
3.1. Pistolessi-Weissingerova noseća linija . . . . .	10
3.2. Prostorni gredni elementi . . . . .	12
3.2.1. Moment uvijanja . . . . .	13
3.3. Komunikacija dviju domena . . . . .	14
<b>4. Rezultati</b>	<b>16</b>
4.1. Validacija Pistolessi-Weissingerove noseće linije . . . . .	16
4.1.1. Krilo eliptične raspodjele duljine tetive duž raspona . . . . .	16
4.1.2. Pravokutno krilo . . . . .	17
4.1.3. Krilo s dihedralom . . . . .	18
4.2. Validacija strukture . . . . .	20
4.2.1. Validacija uvijanja . . . . .	20
4.2.2. Validacija savijanja . . . . .	21
4.3. Aeroelastično krilo . . . . .	22
<b>5. Zaključak</b>	<b>27</b>
<b>Literatura</b>	<b>28</b>



# Popis slika

2.1	Prikaz jednog vrtložnoga segmenta [1] . . . . .	7
3.1	Prikaz krila načinjeno od potkovičastih vrtloga [1] . . . . .	11
3.2	Prikaz položaja centra uvijanja u odnosu na $\frac{1}{4}$ tetive aeroprofila . . . . .	13
3.3	2D prikaz nedeformiranoga krila te aerodinamičkoga opterećenja . . . . .	14
3.4	Prikaz pomaka te položaja II vrtloga u sljedećoj iteraciji . . . . .	15
3.5	Prikaz nedeformirane grede sa smjerovima opterećenja deformiranoga krila . . . . .	15
4.1	Usporedba raspodjele vrtložnosti za $\alpha = 7^\circ$ . . . . .	17
4.2	Usporedba polara za eliptično krilo . . . . .	17
4.3	Usporedba raspodjele uzgona za pravokutno krilo . . . . .	18
4.4	Usporedba polara za pravokutno krilo . . . . .	18
4.5	Usporedba raspodjele uzgona za dihedralno krilo . . . . .	19
4.6	Usporedba polara za dihedralno krilo . . . . .	19
4.7	Validacija uvijanja za 200 konačnih elemenata . . . . .	20
4.8	Validacija progiba . . . . .	21
4.9	Distribucija vrtložnosti deformiranoga te nedeformiranoga krila . . . . .	22
4.10	Prikaz progiba deformiranoga krila . . . . .	23
4.11	Aksijalni kut zakreta deformiranoga krila . . . . .	23
4.12	Usporedba polari deformiranoga te nedeformiranoga krila . . . . .	24
4.13	Neočekivani skok u vrtložnosti . . . . .	24
4.14	Progib u stacionarnome režimu leta HALE letjelice [2] . . . . .	25

4.15 Izračunati progib u stacionarnome režimu leta HALE letjelice . . . . . **26**

# Popis tablica

4.1	Specifikacije validacije eliptičnoga krila . . . . .	16
4.2	Specifikacije validacije pravokutnoga krila . . . . .	17
4.3	Specifikacije validacije dihedrnog krila . . . . .	19
4.4	Parametri validacije . . . . .	20
4.5	Karakteristike Euler-Bernoullijeve grede . . . . .	21
4.6	Elastične karakteristike . . . . .	22
4.7	Specifikacije krila s dihedrom . . . . .	22
4.8	Elastične karakteristike . . . . .	25
4.9	Specifikacije validacije dihedrnog krila . . . . .	25

# Popis oznaka

$\epsilon_{ij}$	Tenzor deformacija . . . . .	8
$\Gamma$	Vrtložnost, $[m^2/s]$ . . . . .	12
$\nu$	Poissonov faktor . . . . .	8
$\Omega_P$	Kontrolni volumen, $[m^3]$ . . . . .	4
$\Omega_M$	Materijalni volumen, $[m^3]$ . . . . .	4
$\partial\Omega_M$	Rub materijalnog volumena, $[m^3]$ . . . . .	4
$\partial\Omega_P$	Rub kontrolnog volumena, $[m^2]$ . . . . .	4
$\Phi$	Perturbacijski potencijal brzine strujanja, $[m^2/s]$ . . . . .	6
$\phi$	Opće specifično svojstvo . . . . .	4
$\Phi_\infty$	Potencijal slobodne struje, $[m^2/s]$ . . . . .	6
$\Phi_{Uk}$	Ukupni potencijal brzine, $[m^2/s]$ . . . . .	6
$\rho$	Gustoća, $[kg/m^3]$ . . . . .	4
$\sigma_{ij}$	Tenzor naprezanja, $[N/m^2]$ . . . . .	7
$\theta$	Kut uvijanja, $[rad]$ . . . . .	8
$A$	Poprečni presjek, $[m^2]$ . . . . .	8
$C_m$	Koeficijent momenta propinjanja . . . . .	12
$E$	Youngov modul elastičnosti, $[N/m^2]$ . . . . .	8
$f_i$	vektor specifičnih masenih sila, $[N/kg]$ . . . . .	6
$G$	Modul smicanja, $[N/m^2]$ . . . . .	8
$I_t$	Torzijski moment tromosti, $[m^4]$ . . . . .	8
$m_x$	raspodjela momenta uvijanja, $[N]$ . . . . .	8
$n_i$	Normala na površinu . . . . .	4

$p$	tlak, $[Pa]$ . . . . .	6
$q$	Gustoća opterenčenja, $[N/m^3]$ . . . . .	7
$q_{\phi,i}$	površinska gustoća difuzijskog protoka svojstva $\phi$ $[m^3]$ . . . . .	4
$S_{\phi}$	Volumna gustoća izviranja svojstva $\phi$ . . . . .	4
$u$	Aksijalni pomak, $[m]$ . . . . .	9
$v_i$	vektor brzine strujanja fluida, $[m/s]$ . . . . .	4
$w$	progib, $[m]$ . . . . .	8

# Sažetak

Dostupnost materijala za izradu letjelica s izrazito vitkim krilima povećava njihovu potražnju. Vitka su krila sklona značajnoj elastičnoj deformaciji koja utječe na letne karakteristike. U sklopu ovoga rada implementiran je Euler-Bernoullijev gredni model sa stupnjevima slobode savijanja i torzije. Implementirana je korekcija za aksijalan pomak uzrokovan rotacijom krila. Osnovna stacionarna aeroelastična zadaća napravljena je pomoću metode konačnih elemenata (MKE) implementacije Euler-Bernoullijeva grednoga modela te dostupne numeričke implementacije Pistolessi-Weissingerove metode noseće linije.

**Ključne riječi:** Interakcija fluida i strukture, Pistolessi-Weissinger metoda noseće linije, gredni model, MKE, idealni fluid

# Summary

Availability of materials needed for highly slender wings is widening their demand. Slender wings are prone to significant elastic deformation which affects flight characteristics. In scope of this work Euler-Bernoulli beam has been implemented, with bending and torsion degrees of freedom. Correction for axial displacement caused by wing rotation has been implemented. Basic stationary aeroelastic analysis has been made using finite element method (FEM) implementation of Euler-Bernoulli beam model and available numerical implementation of numerical Pistolessi-Weissinger lifting line method.

**Keywords:** Fluid-structure interaction, Pistolessi-Weissinger lifting line method, Beam model, FEM, ideal fluid

# 1 | Uvod

U novije doba dostupnost materijala za izradu vitkih te ujedno i aerodinamički efikasnih krila sve je veća. Samim time raste i potreba za izradom letjelica s vitkim krilima koja su inherentno sklonija većoj elastičnoj deformaciji.

Stacionarna analiza leta letjelica s vitkim krilima sprega je aerodinamičkih te elastičnih sila, stoga uobičajena pretpostavka o zanemarivim deformacijama krila nije optimalna. Sukladno tomu, sve je češća primjena rješavača interakcije fluida i strukture (eng. *Fluid-structure interaction* (FSI)) u preliminarnome dizajnu letjelica kako bi se što ranije i za što manju cijenu otkrile aerodinamičke mane elastične letjelice. Jedan od poznatijih primjera je ASWING [3] kojega je napravio Mark Drela te je rješavač u ovome radu napravljen po uzoru na njega sa namjerom da se u konačnici što više približi stacionarnome rješavaču toga programa.

## 1.1. Tijek istraživanja

Prezentirane su te validirane numeričke metode korištene u sklopu istraživanja. Karakteristična im velika brzina rješavanja što pogoduje preliminarnoj fazi konstruiranja. Programski paketi poput SharPy-a [4] koriste ekvivalente gredne modele koji prirodno unose grešku preslikavanja stvarnoga krila u numerički model. Radi lakše implementacije te boljeg razvijanja intuicije korištene su linearne metode koje unose dodatnu grešku zbog svoje prirode. Implementirana je i korekcija za aksijalni pomak krila uzrokovan rotacijom grede [5].

Validacija numeričkih metoda u pod-domenama izvršena je pomoću programskih pa-



keta XFRL5 [6], MachUP-a [7] te Prandtlove noseće linije u domeni fluida, a analitičkim rješenjima u domeni konstrukcije. Analiza utjecaja elastičnosti promatrane stacionarne aeroelastične zadaće bazira se na usporedbi koeficijenata uzgona te otpora između deformirane te nedoformirane konfiguracije leta te usporedbe njihovih polara radi evaluacije gubitka aerodinamičke efikasnosti krila.

## 2 Matematički model

U svrhu definicije osnovnih jednažbi potrebnih za rješavanje ovog, ali i većinu problema u klasičnoj mehanici, mehanici fluida te termodinamici, uvodi se hipoteza kontinuuma [8]. Posljedica modela kontinuuma je mogućnost primjene integralnog te diferencijalnog računa pri promatranju pojava u makrosvijetu. Konačno, mogu se primjeniti transportni zakoni klasične mehanike za opis strujanja fluida:

- Zakon očuvanja mase
- Zakon očuvanja količine gibanja
- Zakon očuvanja momenta količine gibanja
- Zakon očuvanja energije (I. gl. stavak termodinamike)
- II. gl stavak termodinamike

Kod nepolarnog fluida, kakav je npr. zrak, zakon momenta količine gibanja svodi se na simetričnost tenzora naprezanja te se taj zakon može izuzeti iz razmatranja. Nadalje, matematička formulacija drugog stavka termodinamike nije spregnuta s ostalima te se može izostaviti budući da nam ne donosi novu informaciju za izentropski tok u odnosu na energetska jednažbu.

### 2.1. Općeniti oblik transportnih zakona

Transportni zakoni primjenju se za istaknuti volumen koji se u svakome trenutku sastoji od istih materijalnih čestica te se naziva materijalnim volumenom  $\Omega_M$ . Za neko

specifično skalarno svojstvo  $\phi$ , integralni transportni zakon za materijalni volumen glasi da je brzina akumulacije svojstva  $\phi$  unutar materijalnog volumena jednaka sumi brzine protoka svojstva  $\phi$  kroz njegove granice te izvoru svojstva  $\phi$  unutar materijalnog volumena

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_M} \phi \rho d\Omega = - \int_{\partial\Omega_M} q_{\phi,i} n_i dS + \int_{\Omega_M} S_\phi d\Omega \quad (2.1)$$

gdje je  $q_{\phi,i}$  površinska gustoća difuzijskog protoka svojstva  $\phi$ ,  $S_\phi$  volumna gustoća izviranja svojstva  $\phi$  unutar materijalnog volumena te je  $n_i$  vanjska normala na rub materijalnog volumena  $\partial\Omega_M$ . Uz pomoć Reynoldsovog transportnog teorema prelazi se u kontrolni volumen koji je zatvoren kontrolnom površinom

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_P} \phi \rho d\Omega_P + \int_{\partial\Omega_P} \phi \rho v_i n_i dS = - \int_{\partial\Omega_P} q_{\phi,i} n_i dS + \int_{\Omega_P} S_\phi d\Omega \quad (2.2)$$

gdje je  $v_i$  vektor brzine strujanja fluida. Za dobivanje diferencijalnoga oblika transportnog zakona skalarnog svojstva  $\phi$  za proizvoljni kontrolni volumen, prvotno se primjeni teorem Gauss-Ostrogradskog, a zatim se sam kontrolni volumen sažme u diferencijalni volumen. Konačno, konzervativan oblik diferencijalnoga transportnog zakona svojstva  $\phi$  glasi

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \phi)}{\partial x_j} = - \frac{\partial q_{\phi,j}}{\partial x_j} + S_\phi \quad (2.3)$$

te će se u nastavu navoditi diferencijalni oblik transportnih zakona.

## 2.2. Krilo u idealnom fluidu

U ovom istraživanju oko promatranog krila struji idealni fluid. Idealni fluid je neviskozni i nestlačivi fluid koji je na rubu (u  $\infty$ ) nevtložan [9]. Motivacija za ove pretpostavke su zanemarivi efekti stlačivosti za letjelice s vitkim krilima, a efekt viskoznosti koncentriran je u graničnome sloju. S povećanjem vrijednosti Reynoldsova broja debljina graničnoga sloja iščezava te je nezamjetna efektivna promjena geometrije krila. Za potrebne ovoga istraživanja pretpostavlja se dovoljno velik Reynoldsov broj te su efekti viskoznosti zanemareni.

Zakon očuvanja mase naziva se još i jednadžba kontinuiteta te za idealni fluid u diferen-

cijalnoj formi poprima oblik

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

Zakon očuvanja količine gibanja u diferencijalnoj formi glasi

$$\frac{\partial (v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \quad (2.5)$$

gdje je  $f_i$  vektor specifične masene sile, najčešće gravitacijske.

Potencijalno strujanje je svako ono strujanje čija brzina ima potencijal. Sukladno Kelvinovu kinematičkome poučku, unutar idealnog fluida kakav se ovdje promatra, vrtložnost je konstanta pa se zaključuje da je takav fluid bezvrtložan unutar cijele domene budući da je takav po rubu [9], osim u izoliranim singularitetima koje krilo uzrokuje svojim prisustvom u struji fluida. Obzirom da je rotor polja brzine idealnoga fluida jednak nuli, slijedi da brzinu možemo prikazati gradijentom skalarnoga polja  $\Phi$ , odnosno skalarnim potencijalom

$$v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2.6)$$

Pomoću skalarnog potencijala brzine jednadžba kontinuiteta (2.4) oblikuje se u Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2.7)$$

Pomoću skalarnog potencijala brzine i jednadžbe (2.5), jednadžba očuvanja količine gibanja svodi se na Euler-Bernoullijevu jednadžbu

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 + p = 0 \quad (2.8)$$

Supstitucijom potencijala brzine nelinearni sustav jednadžbi sveden je na algebarsko diferencijalni skup nespregnutih jednadžbi gdje se za stacionarni režim strujanja preko Laplaceove jednadžbe odredi polje brzine, a zatim preko Euler-Bernoullijeve jednadžbe polje tlaka. [10]

Linearnost Laplaceove jednadžbe za potencijal brzine ima za posljedicu da se ukupni potencijal brzine može prikazati kao zbroj potencijala slobodne struje i potencijala perturbacije koju krilo uzrokuje svojim prisustvom.

$$\Phi_{uk} = \Phi_{\infty} + \Phi \quad (2.9)$$

## 2.3. Aerodinamički analiza

Uzgon letjelica posljedica je vrtložnosti koju krilo generira svojim prisustvom [9]. Vrtložnost krila varira duž raspona te je prema teoremu Kutte-Žukovskog [9] uzgon pojedine sekcije krila jednak

$$L(y) = \rho V_\infty \Gamma(y) \quad (2.10)$$

Posljedično je uzgon krila konačnoga raspona jednak linijskome integralu prethodnoga izraza

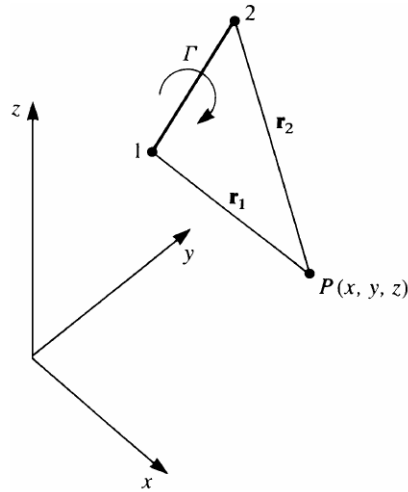
$$L = \rho V_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy \quad (2.11)$$

Obzirom da na vrhovima krila fluid može slobodno prestrujavati s donjanke na gornjaku dolazi do izjednačenja tlaka te je samim time uzgon na vrhu krila, a time i vrtložnost, jednak 0. Za aerodinamičko modeliranje problema ravnih krila Prandtl je 1918. formulirao noseću liniju čiji se rezultati smatraju primjenjivim za krila s aspektnim odnosom većim od 6.

U skolpu istraživanja koristi se numerička implementacija Pistolesi-Weissingerove noseće linije [11] u kojoj je vrtložna nit podijeljena na segmente sa diskretnim razlikama u vrtložnosti. Shodno Helmholtzovom teoremu vrtložne se niti odvajaju od vezenoga vrtloga u diskretnim slobodnim vrtlozima te oni i vezani vrtlozi induciraju brzinu u proizvoljnoj točki prema Biot-Savartovom zakonu [1]

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.12)$$

gdje su korišteni vektori definirani na slici 2.1



Slika 2.1: Prikaz jednog vrtložnoga segmenta [1]

## 2.4. Osnovne jednađbe teorije elastičnosti

Izrazi iz ovoga poglavlja preuzeti su iz [12], [13].

Stanje naprezanja u nekoj točki kontinuuma jednoznačno je određeno sa šest komponenta naprazanja te se iz uvjeta ravnoteže diferencijalnog elementa izvode sljedeće jednađbe ravnoteže

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_{vx} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + q_{vy} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_{vz} = 0$$

Iz jednađbi momenata dobiva se simetričnost tenzora naprezanja. Za potrebe grednoga modela krila pretpostavlja se linearno elastičan, homogen te izotropan materijal. Za takav materijal veza između naprezanja i deformacija prikazana je pomoću Hookeva zakona

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

$$\tau_{ij} = G \gamma_{ij}$$

## 2.5. Savijanje štapa

Vitka krila letjelica zbog svoje prirode nemaju značajnu promjenu poprečnoga presjeka te je standardni Euler-Bernoullijev gredni model primjenjiv za takav slučaj. Uz usvojene Euler-Bernoullijeve pretpostavke o savijanju štapa da je presjek ravan te okomit na elastičnu liniju tj. da se zakreće kao kruta figura, te da su sva naprezanja osim normalnog jednaka nuli te razmatranjem uvjeta ravnoteže dolazi se do sljedećih jednadžbi savijanja štapa duž dvije osi

$$EI \frac{d^4 w}{d\xi^4} - q_\zeta(\xi) = 0$$

$$EI \frac{d^4 v}{d\xi^4} + q_\eta(\xi) = 0$$

## 2.6. Uvijanje štapa

Za štap opterećen na uvijanje gdje je moment u pravcu uzdužne osi štapa iz uvjeta ravnoteže dolazi se do sljedeće relacije

$$GI_t \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + m_\xi = 0$$

gdje je  $\theta$  apsolutni kut uvijanja.

## 2.7. Aksijalan pomak krila uzrokovan velikim progibima

Za umjereno velike zakrete grednih konstrukcija sustav jednažbi savijanja te aksijalnog opterećenja je spregnut jednažbama [5]

$$EI \frac{d^4 w}{d\xi^4} - N \frac{d^2 w}{d\xi^2} - q = 0$$

$$\epsilon_\xi = \frac{du}{d\xi} - \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{d\xi} \right)^2$$

No, kako je aksijalna sila jednaka nuli, standardne Euler-Bernoullijeve pretpotavke su i dalje važeće te se korekcija za aksijalan pomak uzrokovan rotacijom grede može promatrati odvojeno uz relaciju

$$\Delta u = - \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (2.13)$$



# 3 | Numerička implementacija matematičkih modela

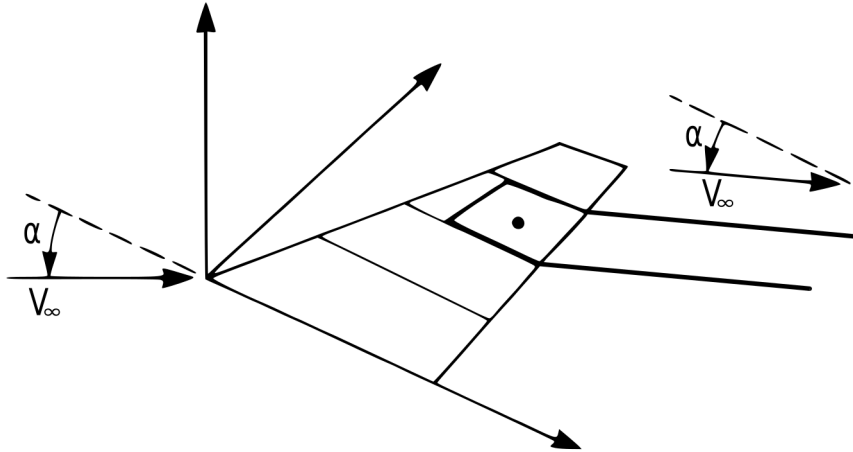
Za odabir rješavačkih metoda u preliminarnome dizajnu posebna se važnost stavlja na računalnu učinkovitost odabranih metoda i modela koji opisuju zadani problem. Metode poput RANS-a, LES-a ili DNS-a sa strane fluida također nude rješenja za zadani problem pa se postavlja pitanje zašto ih ne koristiti na strani fluida. Naime kako bi fluid komunicirao sa pod-domenom strukture koji bi se npr. rješavao pomoću FEM-a, potrebno je postaviti komunikaciju mreža promatranih domena. Postoje različite metode interpolacija te bi se u konačnici došlo do *higher-fidelity* rezultata budući da bi se gledala cjelokupnija te detaljnija slika strujanja fluida. No, ukoliko je geometrija nedefinirana, jednostavnije metode mogu ponuditi bržu konvergenciju ka aproksimativnome obliku geometrije koja se kasnije može rafinirati u spomenutim metodama vjernijim originalu. Također, u novije vrijeme postoje numeričke implementacije klasične Prandtllove metode noseće linije [14], no odabrana metoda nudi lakšu implementaciju koja je pogodna stvaranje intuicije oko zadanoga problema na što se ovaj rad fokusira.

U sklopu istraživanja koristit će se dostupna numerička verzija Pistolessi-Weissingerove metode noseće linije [15]. Ova metoda pogodna je za rješavanje krila sa strijelom te dihedralom.

## 3.1. Pistolessi-Weissingerova noseća linija

Za implementaciju geometrije krila koriste se  $\Pi$  vrtlozi duž raspona krila. Jedan  $\Pi$  vrtlog sastoji se od jednog vezanog vrtloga na  $\frac{1}{4}$  tetive sekcije te dva slobodna vrtloga, jedan sa svake strane kraja vezanoga vrtloga [16]. Nadalje, slobodni su vrtlozi radi

povećanja točnosti stacionarnoga rješenja prelomljeni na način da prate tetivu aeroprofila do izlaznoga brida [17], a zatim se lamaju te su paralelni sa vektorom slobodne struje prema beskonačnosti [11]. Osi koordinatnoga sustava te jedan  $\Pi$  vrtlog vidljivi su na slici 3.1.



**Slika 3.1:** Prikaz krila načinjeno od potkovičastih vrtloga [1]

Potrebno je zadovoljiti rubni uvjet nepropusnosti površine u evaluacijskim točkama koje se nalaze na  $\frac{3}{4}$  tetive aeroprofila [16]. Vrijednost brzine u njima mora biti tangencijalna na površinu krila, koja je u ovome slučaju definirana  $\Pi$  vrtlozima

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial x_i} \right) \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad (3.1)$$

Kako bi se vrtložnost mogla kvantificirati potrebno je odrediti geometrijski utjecaj pojedinog vrtloga na induciranu brzinu u pojedinoj evaluacijskoj točki preko numeričke implementacije Biot-Savartovog zakona (2.12) te se ta brzina označava koeficijentom utjecaja

$$a_{ij} = (u, v, w)_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \quad (3.2)$$

gdje indeks  $i$  označava pojedinu evaluacijsku točku dok indeks  $j$  označava pojedini  $\Pi$  vrtlog. Evaluacija koeficijenata utjecaja vrši se na način da se za svaki  $\Pi$  vrtlog postavi vrijednost vrtložnosti 1 te se jednadžba (3.1) zatim zapiše za svaku evaluacijsku točku u matričnome obliku sa vektorom vrtložnosti kao nepoznanicu. Na taj se način dobiva matrična jednadžba koju je jednostavno riješiti matričnim metodama linearnih susatava

jednadžbi prema [11]

$$\begin{aligned}
 a_{11}\Gamma_1 + a_{12}\Gamma_2 + a_{13}\Gamma_3 + \cdots + a_{1N}\Gamma_N &= -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_1 \\
 a_{21}\Gamma_1 + a_{22}\Gamma_2 + a_{23}\Gamma_3 + \cdots + a_{2N}\Gamma_N &= -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_2 \\
 a_{31}\Gamma_1 + a_{32}\Gamma_2 + a_{33}\Gamma_3 + \cdots + a_{3N}\Gamma_N &= -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_3 \\
 \vdots &\vdots \\
 a_{N1}\Gamma_1 + a_{N2}\Gamma_2 + a_{N3}\Gamma_3 + \cdots + a_{NN}\Gamma_N &= -\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_N
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Računanje momenata propinjanja segmenta krila za aerodinamički centar radi se naknadno uz odabir koeficijenta momenta propinjanja za aerodinamički centar koji je svojstven za određeni aeroprofil uz pomoć relacije [11]

$$M_i = \frac{C_m S_i \rho_\infty V_\infty^2 c_i}{2} \tag{3.4}$$

gdje indeks  $i$  označuje pojedini segment krila na kojem se određuju navedene vrijednosti. Ovaj se postupak iterativno ponavlja za svaku promjenu geometrije krila. Pi vrtlozi su ekvidistantni u Glauertovoj varijabli .

$$y = \frac{b}{2} \cos(\theta) \tag{3.5}$$

## 3.2. Prostorni gredni elementi

Globalna jednadžba konačnih elemenata je oblika [12]

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R} \tag{3.6}$$

Gdje je  $\mathbf{K}$  globalna matrica krutosti,  $\mathbf{V}$  je vektor globalnih stupnjeva slobode,  $\mathbf{R}$  je globalni vektor opterećenja. Dobiveni pomaci odnose se na globalni kooordinatni sustav koji koincidira sa koordinatnim sustavom aerodinamičkoga modela. Globalna matrica krutosti te globalni vektor opterećenja dobivaju se transformacijom pojedinačnih lokalnih matrica krutosti i lokalnih vektora opterećenja uz relacije

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{T}; \quad \mathbf{r}_g = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{r} \tag{3.7}$$

Promatrano krilo modelirano je pomoću ekvivalentne grede koja je u korijenu krila uklještena, a odgovarajući rubni uvjeti za potrebe rješavanja pomoću metode konačnih elemenata

$$\bar{w}(0) = 0; \quad w'(0) = 0; \quad \bar{\theta}(0) = 0 \quad (3.8)$$

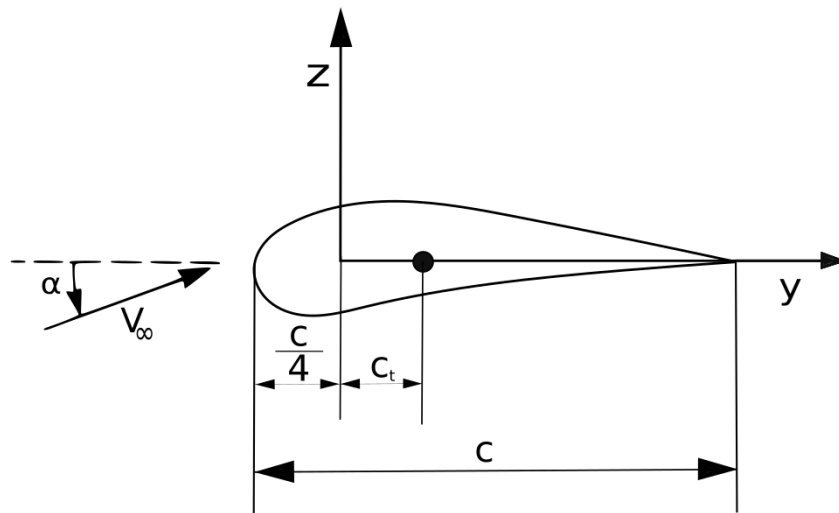
Budući da unutar metode konačnih elemenata nije implementirana relacija aksijalnog pomaka uslijed umjerenih deformacija grede, jednačba (2.13) rješava se naknadno.

### 3.2.1. Moment uvijanja

Aerodinamički centar je točka u kojoj prilikom promjene napadnoga kuta nema promjene u momentu propinjanja. Za većinu aeroprofile nalazi se blizu  $\frac{1}{4}$  tetive aeroprofila, ishodište slike 3.2. Obzirom da položaj centra uvijanja rijetko koincidira s aerodinamičkim centrom, potrebno je dodati moment uzrokovan djelovanjem sile uzgona na kraku. Slijedi da je kontinuirani moment uvijanja koji djeluje na jedan konačni element jednak

$$m_i = \frac{C_m \rho_\infty V_\infty^2 c_i^2}{2} + \frac{F_n c_t}{l_i} \quad (3.9)$$

gdje je  $m_i$  kontinuirani moment uvijanja za jedan konačni element,  $F_n$  je normalna komponenta sile (2.10) na taj segment krila te  $c_t$  pomak osi uvijanja u odnosu na aerocentar.



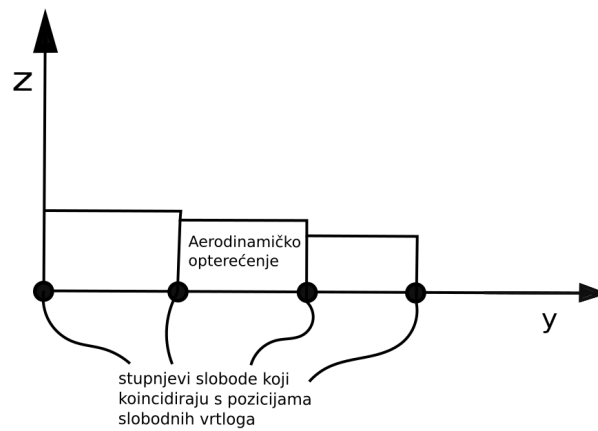
**Slika 3.2:** Prikaz položaja centra uvijanja u odnosu na  $\frac{1}{4}$  tetive aeroprofila

### 3.3. Komunikacija dviju domena

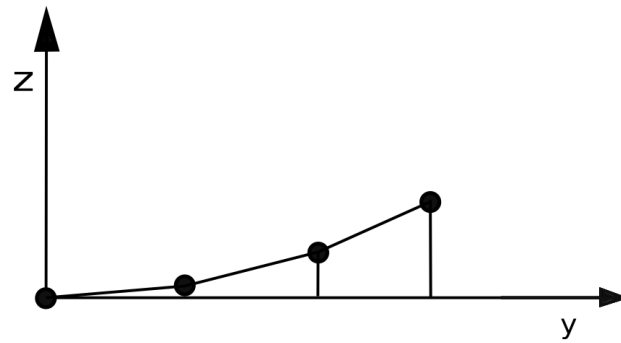
Vrhovi vezanih vrtloga Pistolessi-Weissingerove metode koincidiraju sa čvorovima konačnih elemenata. Prvo se za nedeformiranu konfiguraciju 3.3 pokreće aerodinamički rješavač. Zatim se dobivenim opterećenjima iz poglavlja 2.4. opterećuje nedeformirana greda v.[12]. Izračunati se pomaci koriste za dobivanje koordinata sljedeće iteracije aerodinamičkoga rješavanja 3.4. Zatim se novim opterećenjima ponovno opterećuje nedeformirana greda 3.5. Konvergencija aeroelastične analize smatra se postignutom kada je razlika vertikalnoga pomaka te kuta uvijanja krila u dva susjedna iteracijska koraka na čvoru vrha krila manja od odabrane konstante

$$|\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1}| < \epsilon \quad (3.10)$$

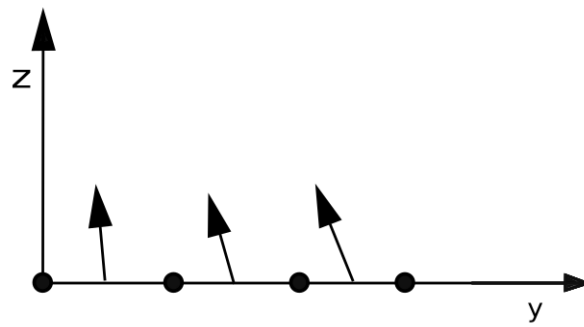
$$|\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_{i-1}| < \epsilon \quad (3.11)$$



**Slika 3.3:** 2D prikaz nedeformiranoga krila te aerodinamičkoga opterećenja



**Slika 3.4:** Prikaz pomaka te položaja II vrtloga u sljedećoj iteraciji



**Slika 3.5:** Prikaz nedeformirane grede sa smjerovima opterećenja deformiranoga krila

## 4 Rezultati

### 4.1. Validacija Pistolesi-Weissingerove noseće linije

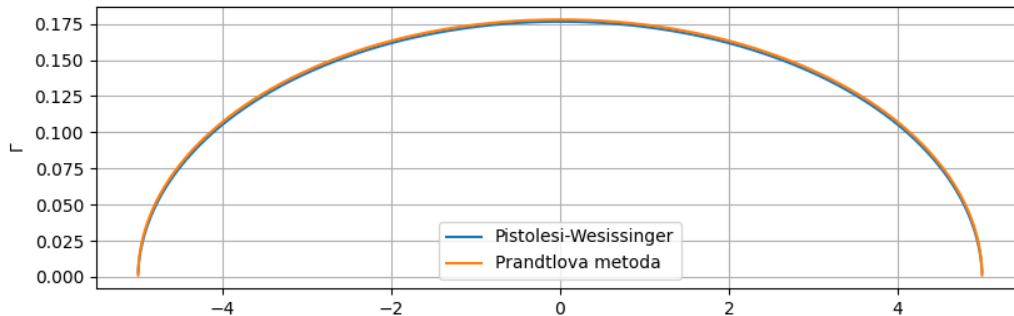
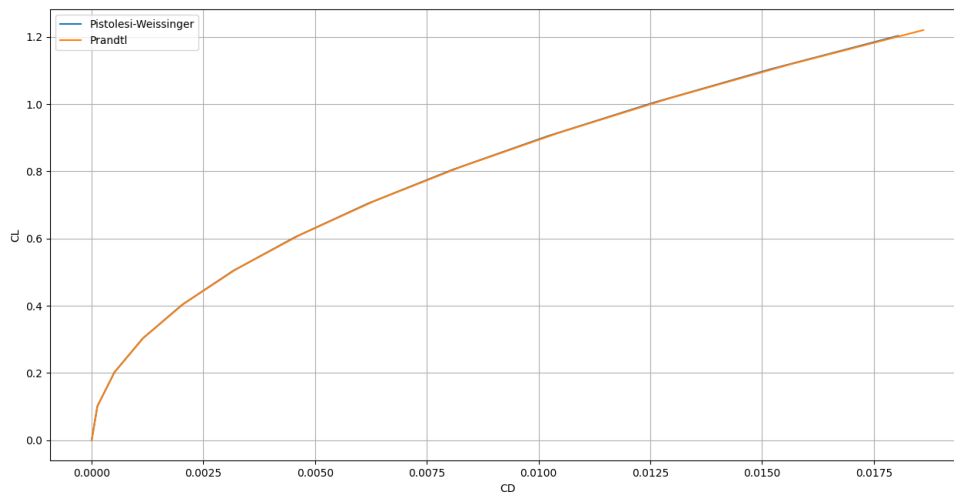
Kako bi se osigurala točnost rješenja numeričke metode, a posebice njezine implementacije unutar Python-a, provedeno je nekoliko analiza krutih krila. Dobiveni rezultati uspoređeni su sa rezultatima dobivenim standardnom Prandtlovom nosećom linijom, programskim paketom XFLR5 te MachUP-om.

#### 4.1.1. Krilo eliptične raspodjele duljine tetive duž raspona

Odabrane geometrijske te aerodinamične karakteristike za eliptično krilo koje se uspoređuje s Prandtlovom nosećom linijom. Na grafovima se mogu uočiti gotovo identična rješenja za polaru te raspodjelu vrtložnosti. Polare dviju metoda poklapaju se, no metoda noseće linije za isti napadni kut malo više uzgona i otpora.

Raspon	Tetiva korijena	$\mathcal{R}$	$\mathbf{N}$	$\alpha$
10 m	0.5 m	25.4648	200	7°

**Tablica 4.1:** Specifikacije validacije eliptičnoga krila

Slika 4.1: Usporedba raspodjele vrtložnosti za  $\alpha = 7^\circ$ 

Slika 4.2: Usporedba polara za eliptično krilo

#### 4.1.2. Pravokutno krilo

Odabrane geometrijske te aerodinamične karakteristike za pravokutno krilo

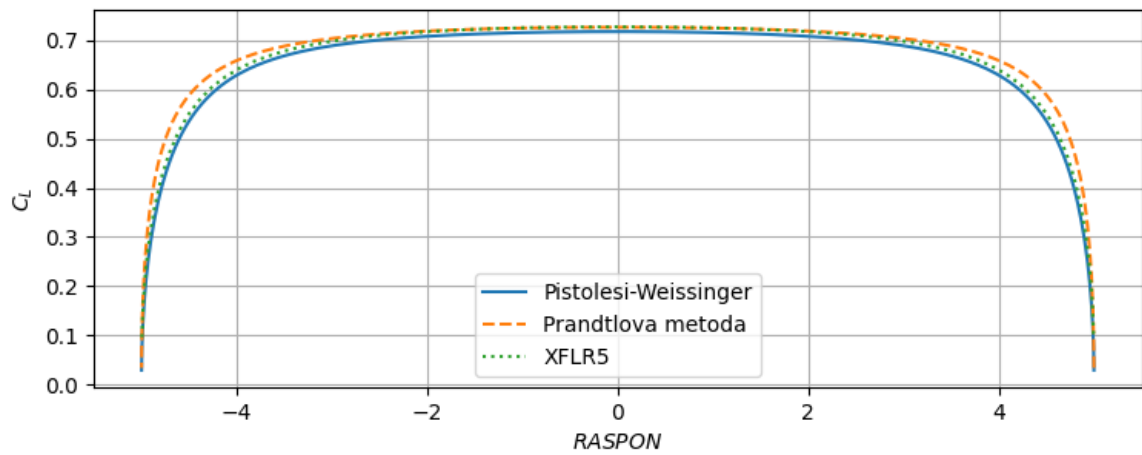
Raspon	Tetiva	$R$	$N$	$\alpha$
10 m	0.5 m	20	200	$7^\circ$

Tablica 4.2: Specifikacije validacije pravokutnoga krila

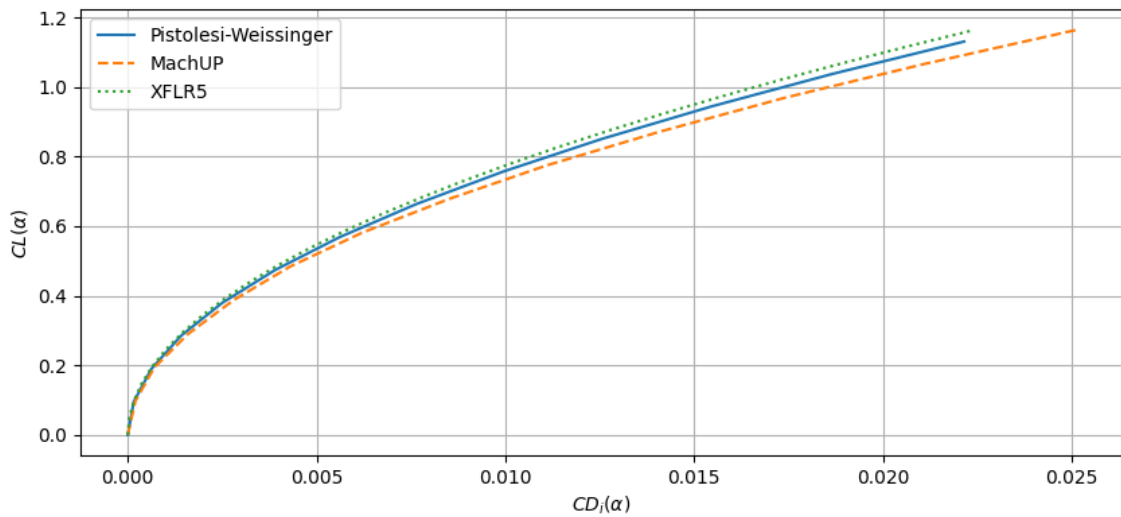
Na grafu 4.3 uočljiva je razlika u distribuciji uzgona pri vrhovima krila. Prandtlova metoda noseće linije daje malo više uzgona od metode rubnih elemenata (eng. boundary element method(BEM)) te Pistolessi-Weissingerove metode. Nadalje u grafu 4.4 vidi se



da je Pistolessi-Weissingerova metoda srodniija BEM metodi, dok se polare za numeričku, te analitičku Prandtlovu metodu u potpunosti poklapaju.



Slika 4.3: Usporedba raspodjele uzgona za pravokutno krilo



Slika 4.4: Usporedba polara za pravokutno krilo

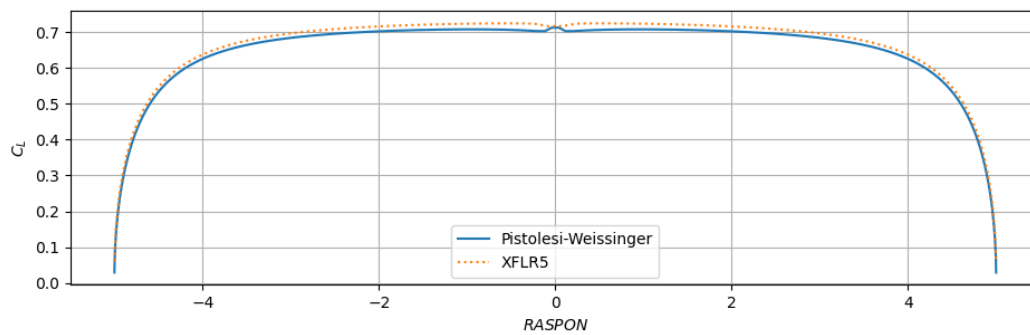
### 4.1.3. Krilo s dihedralom

Odabrane geometrijske karakteristike pravokutnoga krila te aerodinamički parametri leta za dihedralno krilo

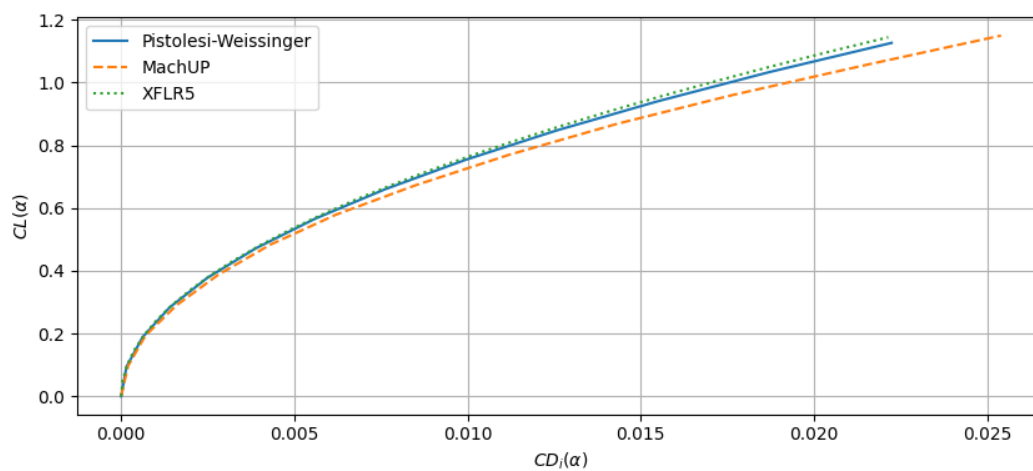
Raspon	Tetiva	$\mathcal{R}$	$\mathbf{N}$	$\alpha$	$\beta$
10 m	0.5	19.924	200	7°	5°

**Tablica 4.3:** Specifikacije validacije dihedralnog krila

Za dihedralno krilo razlika raspodjela uzgona 4.5 BEM metode te Pistolesi-Weissinger najviše se očituje u korijenu krila. Polare promatrnih rješavača najviše odskakuju za dihedralno krilo. Ponovno su srodnije Pistolesi-Weissingerova te BEM metoda u odnosu na MachUp.



**Slika 4.5:** Usporedba raspodjele uzgona za dihedralno krilo



**Slika 4.6:** Usporedba polara za dihedralno krilo

## 4.2. Validacija strukture

Rješavač strukturne domene uspoređen je sa analitičkim rješenjem za kontinuiranu raspodjelu uvijanja te savijanja grede.

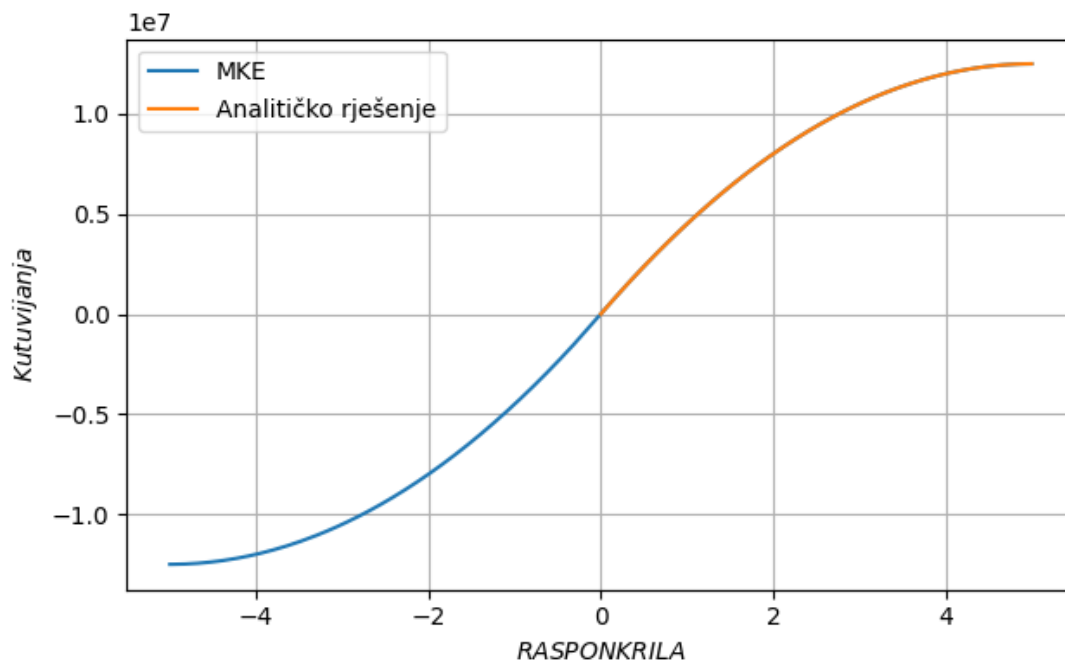
### 4.2.1. Validacija uvijanja

Odabrane geometrijske karakteristike grede te odabrani koeficijenti elastičnosti za validacijski proračun uvijanja

G	$m_x$	l	$I_t$
1 Pa	1 N	10 m	$1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$

Tablica 4.4: Parametri validacije

Raspodjela kuta uvijanja za uklješteni element grede kružnog poprečnoga presjeka poprima oblik koji odgovara analitičkome rješenju.



Slika 4.7: Validacija uvijanja za 200 konačnih elemenata

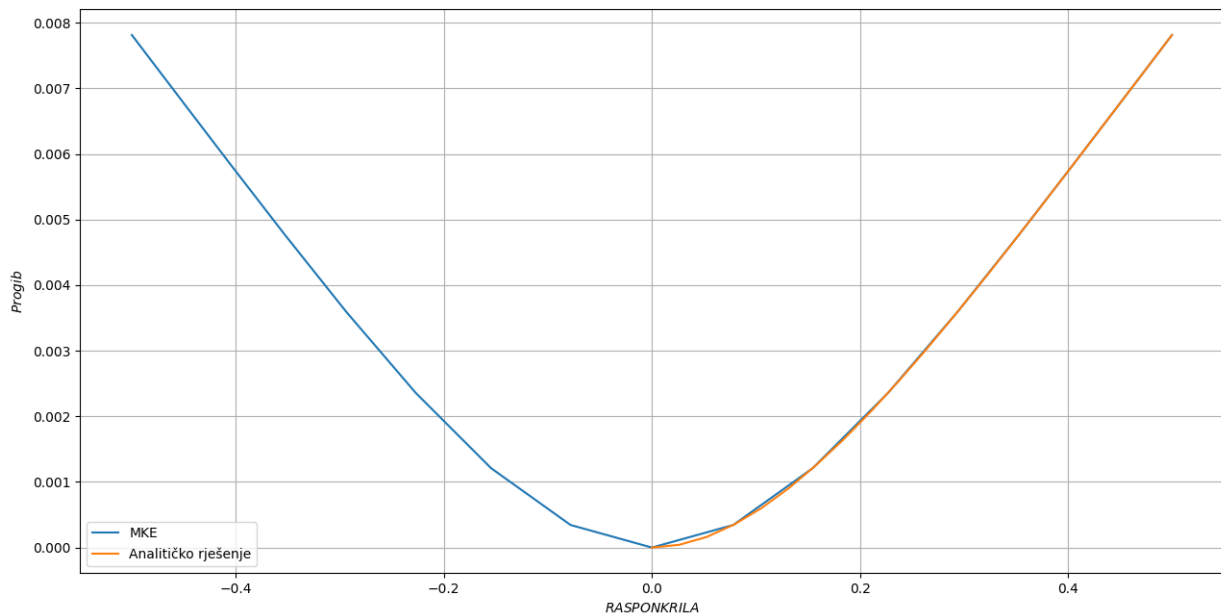
### 4.2.2. Validacija savijanja

Odabrane geometrijske karakteristike grede te odabrani koeficijenti elastičnosti za validacijski proračun savijanja

$$\frac{E}{1 \text{ GPa}} \quad \left| \quad \frac{I_y}{1 \text{ m}^4} \quad \right| \quad \frac{l}{1 \text{ m}} \quad \left| \quad \frac{q_z}{1 \text{ N}} \right|$$

**Tablica 4.5:** Karakteristike Euler-Bernoullijeve grede

Dobiveni rezultati odgovaraju analitičkome rješenju



**Slika 4.8:** Validacija progiba

### 4.3. Aeroelastično krilo

U ovom se poglavlju razmatra jedno generično aeroelastično krilo i njegove stacionarne aerodinamičke karakteristike.

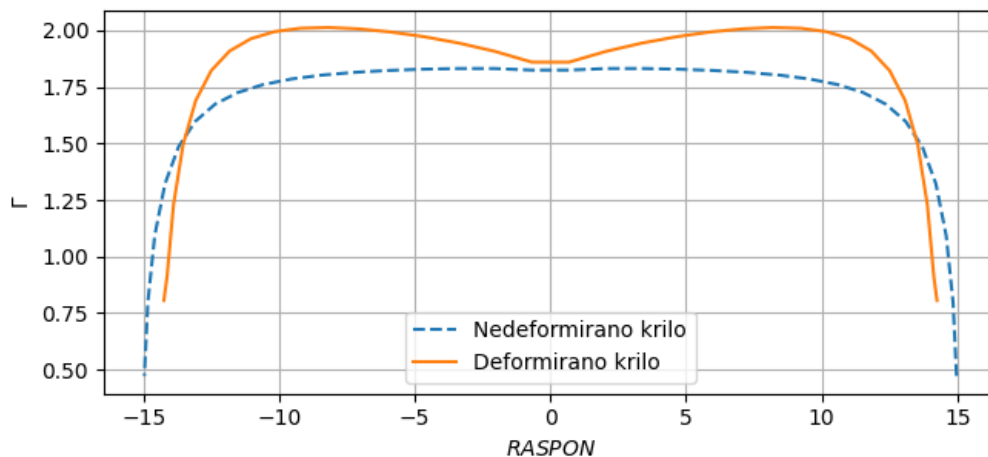
Iz raspodjela vrtložnosti 4.9 vidljiv je blagi porast u raspodjeli vrtložnosti pri napadnome kutu od 7 stupnjeva. Moguće objašnjenje za porast vrtložnosti jest porast lokalnih napadnih kuteva sekcija bliže vrhu zbog uvijanja krila. Iz polare 4.12 je vidljiv pad efikasnosti deformiranoga krila budući da za isti uzgon uvijek daje više induciranoga otpora od nedeformiranoga krila. Što je veća krutost krila to je njegova aerodinamička efikasnost bolja zbog sličnije geometrije deformiranoga krila nedeformiranomu.

$$\frac{EI}{20000 \text{ Nm}^2} \quad \Bigg| \quad \frac{GI_t}{10000 \text{ Nm}^2}$$

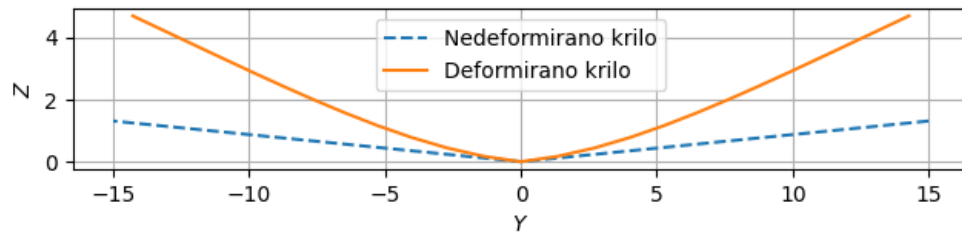
**Tablica 4.6:** Elastične karakteristike

Raspon	Korijen	$\mathcal{R}$	$\alpha$	$\mathbf{N}$
30 m	1 m	30	7°	40

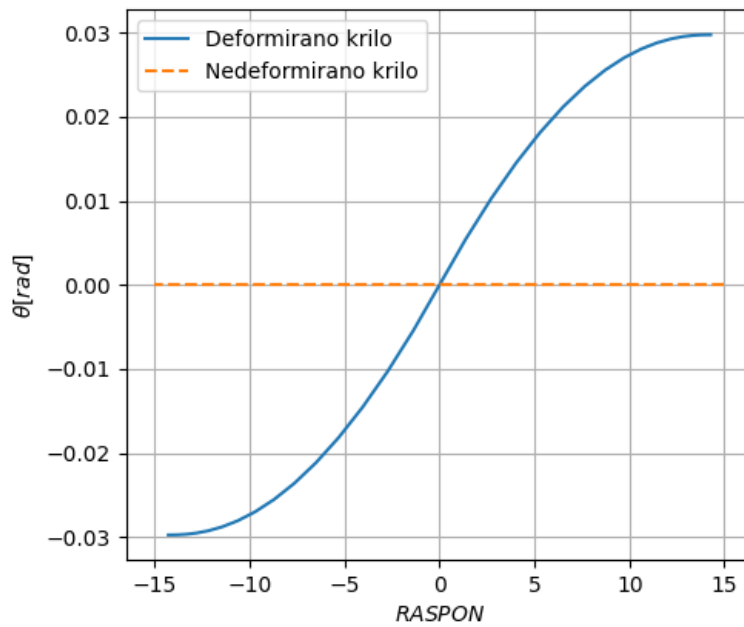
**Tablica 4.7:** Specifikacije krila s dihedralom



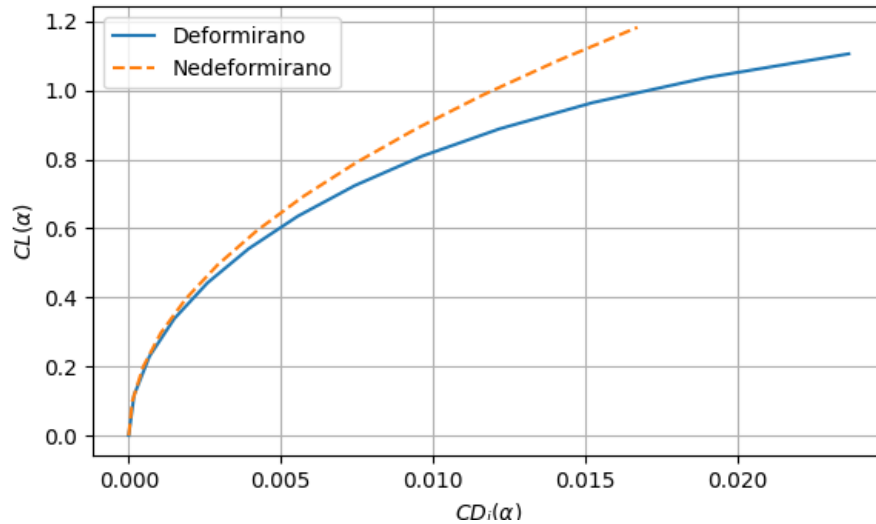
**Slika 4.9:** Distribucija vrtložnosti deformiranoga te nedeformiranoga krila



Slika 4.10: Prikaz progiba deformiranoga krila

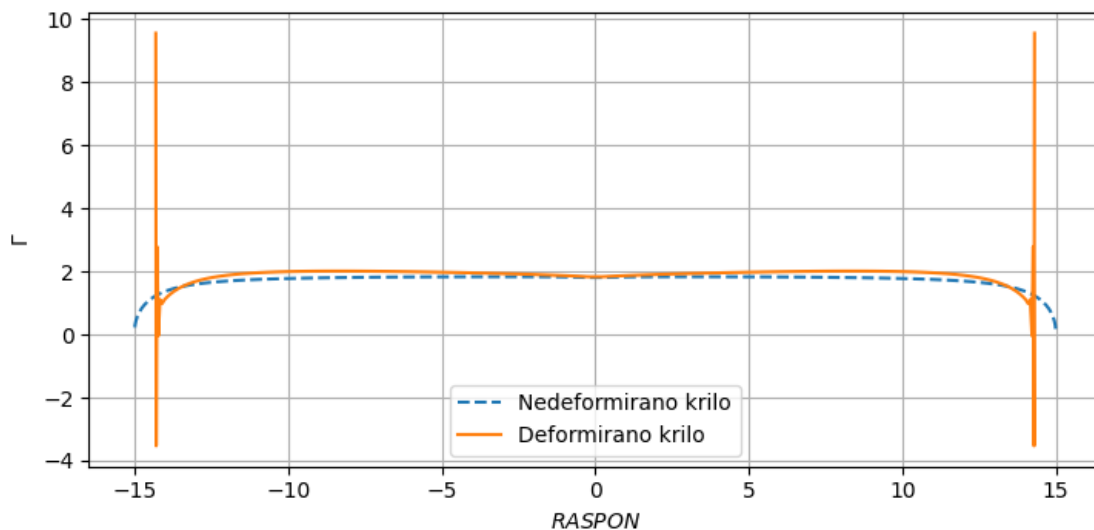


Slika 4.11: Aksijalni kut zakreta deformiranoga krila



**Slika 4.12:** Usporedba polari deformiranoga te nedeformiranoga krila

Bitno je napomenuti da je broj točaka za ovu analizu bio ograničen numeričkome točnosti rješenja, jer je za više točaka na vrhovima vrtložnost doživljavala skok koji nije u srazmjeru s očekivanim vrijednostima 4.13.



**Slika 4.13:** Neočekivani skok u vrtložnosti

Predstavljeni FSI rješavač uspoređen je za *High altitude long endurance* HALE le-

tjelicu sa karakteristikama u tablici s nelinearnim aeroelastičnim rješavačem [2].

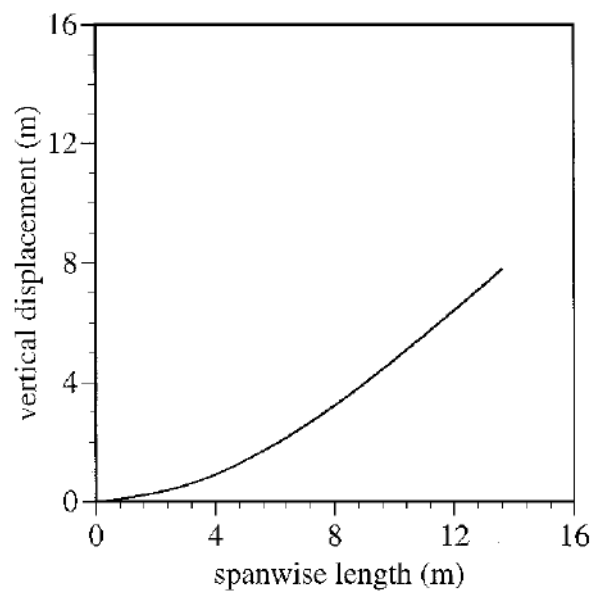
$EI$	$GI_t$	$m_l$
20000 $Nm^2$	10000 $Nm^2$	0.75 $kg/m$

**Tablica 4.8:** Elastične karakteristike

Raspon	Tetiva	$\mathcal{AR}$	$\alpha$	$N$	Brzina
32 $m$	1 $m$	32	9°	50	25 $m/s$

**Tablica 4.9:** Specifikacije validacije dihedralnog krila

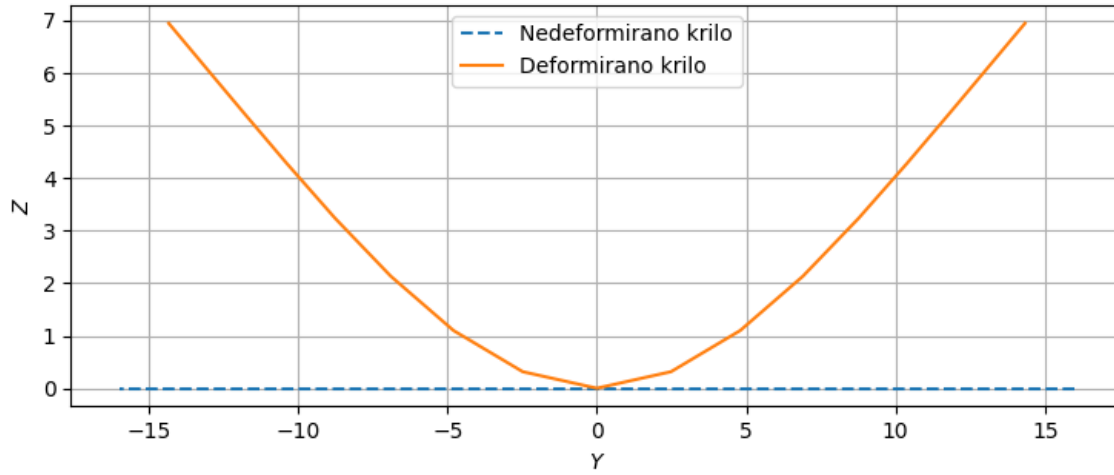
Dobivena rješenja za progib malo su manja od nelinearnoga rješavača te su prikazana na grafovima 4.14 i 4.15



**Fig. 11** Wing displacement at 25 m/s.

**Slika 4.14:** Progib u stacionarnome režimu leta HALE letjelice [2]





Slika 4.15: Izračunati progib u stacionarnome režimu leta HALE letjelice

## 5 | Zaključak

U sklopu ovoga rada promatra se dvostruka sprega fluida i strukture pomoću dostupne numeričke adaptacije Pistolesi-Weissingerove metode noseće linije te implementacije linearne Euler-Bernoullijeve gredne metode pomoću prostornih grednih elemenata. Također, primjenjen je nelinearni model skraćivanja krila za umjerene progibe kako bi se korigirala greška linearizacije promjene geometrije krila koja bi pridonjela rastu uzgona. Komunikacija između dviju metoda napravljena je preslikavanjem opterećenja iz vezanih vrtloga u konačne elemente nedeformiranoga krila. Prilikom svake sukcesivne iteracije opterećuje se nedeformirana greda opterećenjima deformiranoga krila sve dok je razlika između pomaka i kuta zakreta veća od zadane konstante.

Pomoću opisane metode prikazan je gubitak aerodinamičke efikasnosti uslijed elastične deformacije očitovan u polari promatranoga krila. Povećanjem krutosti konstrukcije krila smanjuju se i elastične deformacije stoga je prilikom dizajna letjelica s vitkim krilima potrebno obratiti pažnju na konstrukcijska rješenja s povećanom krutosti letjelica. Metoda se pokazala nestabilnom za veći broj točaka pri aeroelastičnom proračunu.

# Literatura

- [1] A. Plotkin J. Katz. *Low-Speed Aerodynamics*. McGraw-Hill, 1991.
- [2] Mayuresh J. Patil, Dewey H. Hodges, and Carlos E. S. Cesnik. *Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of High-Altitude Long-Endurance Aircraft*. JOURNAL OF AIRCRAFT Vol. 38, No. 1.
- [3] Mark Drela. *Integrated Simulation Model for Preliminary Aerodynamic, Structural, and Control-Law Design of Aircraft*. AIAA 99-1394, 1999.
- [4] del Carre et al. *SHARPy: A dynamic aeroelastic simulation toolbox for very flexible aircraft and wind turbines*. Journal of Open Source Software, 4(44), 1885, 2019.
- [5] Tomasz Wierzbicki. *2.080J Structural Mechanics*. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu> License: Creative Commons BY-NC-SA, Fall 2013.
- [6] A. Deperrois. *XFLR 5: Theoretical background*. <http://www.xflr5.tech/xflr5.htm>, pristupljeno 01.02.2020.
- [7] USU AeroLab. *MachUP* <https://aerolab.usu.edu/tools/aerodynamics>. USU AeroLab, pristupljeno 01.02.2020.
- [8] C. T Ruesdell. *C. T RUESDELL Vorticity and the thermodynamic state in a gas flow Mémorial des sciences mathématiques*,. fascicule 119, 1952.
- [9] K. Karamcheti. *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*. Pe Men Book Co., 1982.

- [10] Z. Virag; M. Šavar; I. Džijan. *Mehanika fluida II - Predavanja*. Sveučilište u Zagrebu, FSB, 2017.
- [11] Niko Tatomir. *Lifting Line Report*. 2020.
- [12] Jurica Sorić. *Metoda konačnih elemenata*. Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2004,.
- [13] Ivo Alfrević. *Nauka o Čvrstoći I*. Izdavačka radna organizacija tehnička knjiga Zagreb, 1989.
- [14] W. F. Phillips and D. O. Snyder. *Modern Adaptation of Prandtl's Classic Lifting-Line Theory*. JOURNAL OF AIRCRAFT, Vol. 37, No. 4, July–August 2000.
- [15] Niko Tatomir. *Lifting line method*. Pristupljeno veljača, 2020.
- [16] J. Weissinger. *The lift distribution on swept-back wings*. Forsch. Ber. d. Zentr. f. wiss. Berichtswesen 1553, Berlin-Adlershof, 1942.
- [17] D. Matijašević. *Aerodinamika I - predavanja*. Sveučilište u Zagrebu, FSB, 2020.