

# Numerička simulacija međudjelovanja fluida i stijenke kod disekcije aorte

---

**Kus, Jurica**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:578570>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-07**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Jurica Kus**

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof.dr.sc. Igor Karšaj, dipl.ing.

Student:

Jurica Kus

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Jurica Kus



Zahvaljujem se svome mentoru Prof.dr.sc. Igoru Karšaju na pruženoj potpori i prilici za rad na zanimljivoj temi, dr.sc. Lani Virag na savjetima i ukazanoj pomoći, te mag.ing. Philippu Miloviću na pruženoj pomoći oko postavljanja simulacije i pisanja rada.

Posebno se zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na bezuvjetnoj potpori tijekom cijelog studija, hvala vam!

Jurica Kus



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Jurica Kus** JMBAG: 0035178620

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička simulacija međudjelovanja fluida i stijenke kod disekcije aorte**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical fluid-solid interaction simulation of aortic dissection**

Opis zadatka:

Disekcija aorte je bolest kod koje dolazi do razdvajanja slojeva aorte i stvaranja lažnog lumena. Disekcije se klasificiraju kao tip A (zahvaća uzlaznu aortu) i tip B (koji zahvaća uglavnom silaznu aortu). Tip A i komplicirane aortne disekcije tipa B liječe se kirurški. S druge strane pokazalo se da operacija nekomplikiranih disekcija tipa B ne povećava postotak preživjelih pacijenata unutar dvije godine nakon operacije te se nekomplikirane disekcije obično samo slikovno prate svakih šest mjeseci. Stoga su numerički modeli i proračuni nekomplikiranih disekcija tipa B važni i mogu se koristiti pri procjeni hoće li nekomplikirana disekcija postati komplicirana.

Cilj ovog rada je napraviti numeričku simulaciju međudjelovanja stijenke aorte i krvi (eng. *fluid-solid-interaction*, FSI) za dvije različite idealizirane geometrije koristeći metodu konačnih volumena. Krv treba modelirati kao nestlačivi fluid, uz pretpostavku izotermnog, turbulentnog i tranzijentnog strujanja. Ponašanje stijenke aorte potrebno je opisati blago stlačivim Neo-Hooke modelom. U sklopu rada potrebno je:

- kontrolirati primijenjene rubne uvjete i vremensku konvergenciju fizioloških podataka (tlaka, brzine strujanja, pomaka, protoka i sl.),
- na temelju dobivenih rezultata odrediti broj ciklusa potrebnih da svaki od fizioloških podataka postigne reprezentativno rješenje,
- rezultate vezane za stijenku aorte dobivene FSI simulacijama potrebno je provjeriti metodom konačnih elemenata za odabrane trenutke.

Dodatne informacije i crteži dostupni su prema potrebi.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

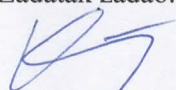
4. ožujka 2021.

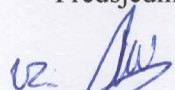
6. svibnja 2021.

10. – 14. svibnja 2021.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof.dr.sc. Igor Karšaj

  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	VI
POPIS OZNAKA .....	VII
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY .....	X
1. UVOD.....	1
2. MEDICINSKE TEORIJSKE OSNOVE.....	3
2.1. Krvožilni sustav .....	3
2.2. Srce .....	3
2.3. Krvne žile.....	4
2.4. Krv.....	6
2.5. Disekcija aorte .....	6
3. MATEMATIČKI MODEL .....	8
3.1. Matematički model čvrstog tijela .....	8
3.1.1. Zakoni održanja za domenu čvrstog tijela.....	8
3.1.2. Konstitutivne jednadžbe čvrstog tijela .....	11
3.2. Matematički model fluida.....	12
3.2.1. Zakoni održanja za domenu fluida .....	12
3.2.2. Konstitutivne jednadžbe fluida .....	14
3.2.3. Rubni uvjeti Navier-Stokesovih jednadžbi .....	15
3.2.4. k- $\omega$ SST model turbulencije .....	15
3.2.4.1. Ponašanje blizu zida.....	17
4. NUMERIČKI MODEL.....	19
4.1. Metoda konačnih volumena.....	19
4.1.1. Diskretizacija prostorne domene .....	20
4.1.2. Diskretizirani model jednadžbi .....	22
4.2. Numeričko rješavanje domene stijenke .....	23
4.3. Rješavanje promjenjive domene fluida primjenom SIMPLE postupka.....	25
4.4. Međudjelovanje fluida i stijenke (FSI).....	27
5. RAČUNALNI MODEL.....	32

---

5.1. Geometrija modela.....	32
5.2. Računske mreže.....	33
5.3. Rubni uvjeti .....	35
6. REZULTATI.....	38
6.1. Simetrična disekcija .....	38
6.1.1. Domena fluida.....	38
6.1.2. Domena stijenke .....	67
6.1.3. Usporedba rezultata FSI i FEM analize .....	76
6.2. Asimetrična disekcija .....	80
7. ZAKLJUČAK .....	84
LITERATURA.....	85

**POPIS SLIKA**

Slika 1. Dijelovi srca sa izlaznim i ulaznim krvnim žilama .....	4
Slika 2. Organi i krvne žile u krvožilnom sustavu .....	5
Slika 3. Dijelovi aorte.....	6
Slika 4. Ilustracija disekcije aorte.....	7
Slika 5. Zakon zida.....	18
Slika 6. Konačni volumen .....	20
Slika 7. Algoritam za iterativno rješavanje FSI problema .....	29
Slika 8. Simetrična i asimetrična geometrija disekcije .....	32
Slika 9. Prikaz mreže simetrične disekcije .....	34
Slika 10. Prikaz mreže asimetrične disekcije .....	34
Slika 11. Usporedba protoka dobivenih CFD i FSI simulacijama u stvarnom lumenu sa naznačenim točkama od interesa.....	39
Slika 12. Usporedba protoka dobivenih CFD i FSI simulacijama u lažnom lumenu sa naznačenim točkama od interesa.....	39
Slika 13. Prikaz brzine strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije u $t=9.17s$ .....	40
Slika 14. Prikaz brzine strujanja po poprečnim presjecima u $t=9.17s$ .....	40
Slika 15. Prikaz brzine strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije u $t=9.24s$ .....	41
Slika 16. Prikaz brzine strujanja po poprečnim presjecima u $t=9.24s$ .....	41
Slika 17. Prikaz brzine strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije u $t=9.41s$ .....	42
Slika 18. Prikaz brzine strujanja po poprečnim presjecima u $t=9.41s$ .....	42
Slika 19. Prikaz brzine strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije u $t=9.47s$ .....	43
Slika 20. Prikaz brzine strujanja po poprečnim presjecima u $t=9.47s$ .....	43
Slika 21. Odnosi maksimalnih brzina strujanja u stvarnom lumenu po ciklusima .....	44
Slika 22. Odnosi maksimalnih brzina strujanja u lažnom lumenu po ciklusima .....	45
Slika 23. Odnosi maksimalnih kinetičkih energija turbulencije u stvarnom lumenu po ciklusima .....	46
Slika 24. Odnosi maksimalnih kinetičkih energija turbulencije u lažnom lumenu po ciklusima .....	46
Slika 25. Odnosi maksimalnih posmičnih naprezanja u stvarnom lumenu po ciklusima .....	47
Slika 26. Odnosi maksimalnih posmičnih naprezanja u stvarnom lumenu po ciklusima .....	47
Slika 27. Točke na poprečnom presjeku sa najvećim oscilacijama vrijednosti tlakova.....	48
Slika 28. Tlakovi na presjecima u točkama s najvećim oscilacijama u stvarnom lumenu.....	49

Slika 29. Tlakovi na presjecima u točkama s najvećim oscilacijama u lažnom lumenu.....	49
Slika 30. Točke dijagrama duž aorte i pravci radialnih grafova po presjecima .....	50
Slika 31. Brzina strujanja i tlak duž aorte u $t=9.17s$ .....	51
Slika 32. Brzina strujanja i tlak duž aorte u $t=9.24s$ .....	51
Slika 33. Brzina strujanja i tlak duž aorte u $t=9.41s$ .....	52
Slika 34. Brzina strujanja i tlak duž aorte u $t=9.47s$ .....	52
Slika 35. Kinetička energija turbulencije duž aorte u $t=9.17s$ .....	53
Slika 36. Kinetička energija turbulencije duž aorte u $t=9.24s$ .....	54
Slika 37. Kinetička energija turbulencije duž aorte u $t=9.41s$ .....	54
Slika 38. Kinetička energija turbulencije duž aorte u $t=9.47s$ .....	55
Slika 39. Radijalna raspodjela brzine strujanja u stvarnom lumenu po presjecima u $t=9.17s$ .	55
Slika 40. Radijalna raspodjela brzine strujanja u lažnom lumenu po presjecima u $t=9.17s$ ....	56
Slika 41. Radijalna raspodjela brzine strujanja u stvarnom lumenu po presjecima u $t=9.24s$ .	56
Slika 42. Radijalna raspodjela brzine strujanja u lažnom lumenu po presjecima u $t=9.24s$ ....	57
Slika 43. Radijalna raspodjela brzine strujanja u stvarnom lumenu po presjecima u $t=9.41s$ .	57
Slika 44. Radijalna raspodjela brzine strujanja u lažnom lumenu po presjecima u $t=9.41s$ ....	58
Slika 45. Radijalna raspodjela brzine strujanja u stvarnom lumenu po presjecima u $t=9.47s$ .	58
Slika 46. Radijalna raspodjela brzine strujanja u lažnom lumenu po presjecima u $t=9.47s$ ....	59
Slika 47. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u stvarnom lumenu po presjecima u $t=9.17s$ .....	60
Slika 48. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u lažnom lumenu po presjecima u $t=9.17s$ .....	60
Slika 49. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u stvarnom lumenu po presjecima u $t=9.24s$ .....	61
Slika 50. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u lažnom lumenu po presjecima u $t=9.24s$ .....	61
Slika 51. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u stvarnom lumenu po presjecima u $t=9.41s$ .....	62
Slika 52. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u lažnom lumenu po presjecima u $t=9.41s$ .....	62
Slika 53. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u stvarnom lumenu po presjecima u $t=9.47s$ .....	63
Slika 54. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u lažnom lumenu po presjecima u $t=9.47s$ .....	63

Slika 55. Reiduali domene fluida u zadnjim iteracijama.....	65
Slika 56. FSI reiduali.....	65
Slika 57. Broj iteracija domene fluida.....	66
Slika 58. Maksimalni pomaci u cijeloj domeni stijenke .....	67
Slika 59. Komponente maksimalnog gradijenta pomaka sa najvećim oscilacijama.....	67
Slika 60. Prikaz deformirane aorte sa presjecima u trenutku maksimalnog tlaka u $t=9.17s$ ....	68
Slika 61. Raspodjela pomaka na poprečnom presjeku na sredini domene.....	69
Slika 62. Točke dijagrama promatranih pomaka duž aorte.....	70
Slika 63. Raspodjela pomaka po duljini aorte u $t=9.17s$ .....	71
Slika 64. Raspodjela pomaka po duljini aorte u $t=9.24s$ .....	71
Slika 65. Raspodjela pomaka po duljini aorte u $t=9.41s$ .....	72
Slika 66. Raspodjela pomaka po duljini aorte u $t=9.47s$ .....	72
Slika 67. Krivulje promatranih pomaka na poprečnim presjecima .....	73
Slika 68. Raspodjela pomaka po presjecima stvarnog lumena u $t=9.17$ .....	74
Slika 69. Raspodjela pomaka po presjecima lažnog lumena u $t=9.17$ .....	74
Slika 70. Prikaz deformirane aorte sa presjecima u $t=9.17s$ FEM analize .....	76
Slika 71. Uzdužni presjek aorte sa deformiranim i nedeformiranim oblikom u $t=9.17s$ .....	77
Slika 72. Poprečni presjek deformirane aorte u $t=9.17s$ na $z=0.08m$ FEM analize .....	77
Slika 73. Usporedba rezultata FSI i FEM analize u $t=9.17s$ .....	78
Slika 74. Usporedba rezultata FSI i FEM analize u $t=9.41s$ .....	79
Slika 75. Deformirana geometrija domene fluida u $t=1.99s$ .....	80
Slika 76. Deformacija ćelija u mreži u graničnom sloju do stijenke.....	81
Slika 77. Iznosi maksimalnog kuta neortogonalnosti u mreži prije prekida .....	82
Slika 78. Kutovi neortogonalnosti u domeni stvarnog lumena u $t=1.99s$ .....	82

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Koeficijenti $k$ - $\omega$ SST modela .....	17
Tablica 2. Zajedničke karakteristike obje geometrije .....	33
Tablica 3. Podaci o mrežama korištenima u FSI simulacijama .....	33
Tablica 4. Rubni uvjeti FSI simulacije za obje geometrije .....	36
Tablica 5. Zadane vrijednosti tolerancija rješavača .....	37



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
[A]	-	Matrica sustava linearnih algebarskih jednadžbi
$a_N$	-	Koeficijent susjedne ćelije
$a_P$	-	Dijagonalni koeficijent za ćeliju
<b>b</b>	-	Lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti
<i>D</i>	mm	Unutarnji promjer aorte
<b>D</b>	-	Tenzor brzine deformacije
<i>f</i>	N/m <sup>3</sup>	Masene sile
<b>F</b>	-	Gradijent deformiranja
<b>f</b>	-	Relativni gradijent deformiranja
$F_1, F_2$	-	Blending funkcije
<b>g</b>	m/s <sup>2</sup>	Gravitacijsko ubrzanje
<i>G</i>	Pa	Modul smicanja
<b>I</b>	-	Jedinični tenzor drugog reda
<i>J</i>	-	Jacobijeva determinanta
<i>j</i>	-	Relativni Jacobijan
<i>K</i>	Pa	Modul stlačivosti
<i>k</i>	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Kinetička energija turbulencije
<b>n</b>	-	Jedinični vektor normale
<i>p</i>	N/m <sup>2</sup>	Tlak
$P_k$	-	Produkcijски limiter
{ <i>r</i> }	-	Vektor izvorskih članova
<b>r</b>	m	Vektor položaja
<i>S</i>	m <sup>2</sup>	Površina

$S$	-	Invarijantna vrijednost brzine deformacije
$s_\phi$	-	Volumenski izvor/ponor
$t$	s	Vrijeme
$V$	$m^3$	Volumen
$\mathbf{v}, \mathbf{u}$	m/s	Vektor brzine
$y$	m	Udaljenost od zida
$y^+$	-	Bezdimenzijska udaljenost od zida
$\alpha_f$	rad	Kut neortogonalnosti ćelije
$\alpha_\phi$	-	Faktor podrelaksacije
$\boldsymbol{\varepsilon}$	-	Tenzor malih deformacija
$\phi$	-	Općenito fizikalno svojstvo
$\phi_{S,j}, \phi_{F,k}$	-	Vrijednosti polja u centrima stranica stijenke i fluida
$\nu$	Pa s; 1	Kinematička viskoznost fluida; Poissonov faktor
$\nu_t$	$m^2/s$	Turbulentna viskoznost
$\mu$	$Ns/m^2$	Dinamička viskoznost fluida
$\omega$	$s^{-1}$	Brzina disipacije kinetičke energije turbulencije
$\rho$	$kg/m^3$	Gustoća
$\boldsymbol{\sigma}$	Pa	Cauchyjev tenzor naprezanja
$\boldsymbol{\tau}$	$N/m^2$	Devijatorski dio tenzora naprezanja
$\Gamma_\phi$	-	Koeficijent difuzije

## SAŽETAK

Tema ovoga rada bila je napraviti dvije numeričke simulacije međudjelovanja fluida i stijenke (eng. *fluid structure interaction*, skraćeno FSI) za dvije idealizirane geometrije disekcije silazne aorte, te pokazati numeričke karakteristike problema promatrajući oscilacije i vremenske konvergencije fizioloških podataka od interesa. Rezultati FSI simulacije, u kojoj je primjenjena metoda konačnih volumena (MKV), kako na domeni fluida tako i na domeni stijenke, provjereni su metodom konačnih elemenata (MKE) na domeni stijenke za vremenske trenutke od interesa.

U radu su kratko opisane medicinske teorijske osnove vezane za komponente i funkcije krvožilnog sustava čovjeka, sa naglaskom na aroti i disekciji aorte, te matematički i numerički modeli čvrstog tijela i fluida koji su korišteni za opis ponašanja stijenke i strujanja krvi. Opisana je FSI metoda korištena za rješavanje problema međudjelovanja fluida i stijenke. Postavke numeričkih simulacija opisane su prikazom geometrije modela, zadanih rubnih uvjeta i računskih mreža. U zadnjem dijelu rada prikazani su rezultati numeričkih simulacija za obje idealizirane geometrije, te je pokazana konvergencija praćenih fizikalnih veličina, usporedba protoka FSI i CFD simulacije, te usporedba rezultata pomaka stijenke dobivenih FSI simulacijom i analizom metodom konačnih elemenata.

Numerička simulacija međudjelovanja fluida i stijenke provedena je u open source programskom paketu OpenFOAM v1912, koristeći eksternu biblioteku solids4foam. Provjera rezultata na domeni stijenke provedena je pomoću komercijalnog programskog paketa metodom konačnih elemenata.

Ključne riječi: disekcija aorte, međudjelovanje fluida i stijenke, FSI, metoda konačnih volumena, strujanje krvi

## SUMMARY

In this work, two numerical simulations of fluid-structure interaction (FSI) are made for two idealized geometries of descending aortic dissection. Numerical characteristics of the problem are shown by observing oscillations and temporal convergences of physiological data of interest, such as pressure, flow velocities, displacements and similar. The results of FSI simulations, in which the finite volume method (FVM) was applied both in the fluid domain and in the solid domain, were checked by the finite element method (FEM) on the solid domain for times of interest.

The first part of this work describes the basics of medical theory related to the components and functions of the human cardiovascular system with emphasis on the aorta and aortic dissection, and also mathematical and numerical models of solid and fluid mechanics used in this work. The FSI method for solving the problem of fluid-structure interaction is also presented and described, as well as setup of numerical simulations by describing the geometry of the models, used boundary conditions and computational meshes. The results of numerical simulations for both idealized geometry are presented in the last part of this work. The convergence of the monitored physiological data is shown, as well as the comparison of FSI and CFD simulation flow rates and the comparison of the results of solid displacements obtained by FSI simulation and the analysis using finite element method.

Numerical simulation of fluid-structure interaction was performed in the open source software OpenFOAM v1912, using the external library solids4foam. Verification of results on solid domain was performed in the commercial software package using finite element method.

Key words: aortic dissection, fluid-solid interaction, FSI, finite volume method, blood flow

## 1. UVOD

Tehnike analiza fizikalnih pojava numeričkim metodama, poput metode konačnih elemenata i metode konačnih volumena, pronašle su primjenu u raznim klasičnim inženjerskim područjima, pa tako i u manje klasičnim, interdisciplinarnim područjima poput biomehanike, koja se bavi proučavanjem stukture i mehaničkih svojstava biološkog sustava kao što je ljudsko tijelo. Od značajnog interesa u polju biomehanike je proučavanje djelovanja strujanja krvi na stijenke krvnih žila, pa tako i nekih specifičnih i opasnih bolesti krvožilnog sustava čovjeka, kao što je disekcija aorte. Disekcija aorte je bolest kod koje dolazi do djelomičnog raslojavanja stijenke aorte te prodoru krvi u novostvoreni prostor. Bolest ima visoku stopu smrtnosti [1], a na njeno nastajanje utječu razni fizikalno-kemijski procesi, od kojih je za područje biomehanike zanimljivo modeliranje rasta, razvoja i stanja stijenke krvne žile i krvi, te analiza njihovog međusobnog utjecaja. Krv u dijelu aorte sa disekcijom struji kroz dva područja zvanima stvarni i lažni lumen (eng. *true lumen* i *false lumen*), a između dva lumena nalazi se membrana nastala uslijed raslojavanja žile. Unutar pojedinačnog lumena krv često struji različitim protocima, koji su radi prirode srčanog ciklusa promjenjivi tijekom vremena i periodički se ponavljaju. Kako u lumenima u različitim vremenskim trenucima vladaju različite vrijednosti fizikalnih veličina (tlak, brzina strujanja itd.), za pravilnu dijagnozu potrebno je poznavati lokalno stanje unutar disekcije, a da bi to bilo moguće, potrebno je adekvatno modelirati interakciju stijenke aorte i krvi. Za inženjere je posebno zanimljiva numerička analiza međudjelovanja fluida i čvrstog deformabilnog tijela, tzv. FSI analiza (eng. *fluid-structure interaction* ili *fluid-solid interaction*) kod koje strujanje fluida, u ovom slučaju krvi, djeluje na stijenku aorte te ju deformira, a stijenka aorte svojim pomacima djeluje na strujanje fluida.

Modeliranje problema interakcije stijenke i fluida je komplicirano jer dolazi do deformiranja stijenke pod utjecajem sila generiranih strujanjem fluida, te promjene oblika domene fluida kao rezultat deformacije stijenke. Za adekvatan opis takvog ponašanja međudjelovanja fluida i stijenke problem je potrebno promatrati kao vremenski promjenjiv, a dodatnu kompleksnost rješavanju pridodaje ionako već tranzijentna priroda strujanja krvi. Kompleksnost problema strujanja u idealiziranoj disekciji aorte predstavljaju dvije odvojene domene fluida sa različitim vrijednostima protoka krvi (stvarni lumen i lažni lumen), koje dijeli membrana preko koje dolazi do posrednog međudjelovanja domene fluida stvarnog i lažnog lumena. Sukladno tome, cilj ovoga rada je promatrati numeričke karakteristike fizikalnih polja tijekom simulacije na

relativno kratkim geometrijama modela i testirati ispravnost postavljenih rubnih uvjeta, kao i analizirati utjecaj promjene fizikalnih veličina na ponašanje simulacije.

Geometrije korištene u ovome radu su pojednostavljene (idealizirane) u odnosu na realnu disekciju aorte koja je geometrijski prekompleksna za modeliranje i ovisi od slučaja do slučaja. Stijenka aorte je modelirana kao hiperelastični materijal pomoću stlačivog Neo-Hooke modela, a krv je modelirana kao nestlačiva uz pretpostavku izoternog, turbulentnog i tranzijentnog strujanja.

## 2. MEDICINSKE TEORIJSKE OSNOVE

### 2.1. Krvožilni sustav

Krvožilni sustav čovjeka je sustav organa koji omogućuje distribuciju krvi unutar organizma, a sastoji se od srca, krvnih žila i krvi. Kod čovjeka je krvožilni sustav zatvoren, što znači da krv ne napušta granice sustava, tj. ne izlazi iz sustava krvnih žila i srca.

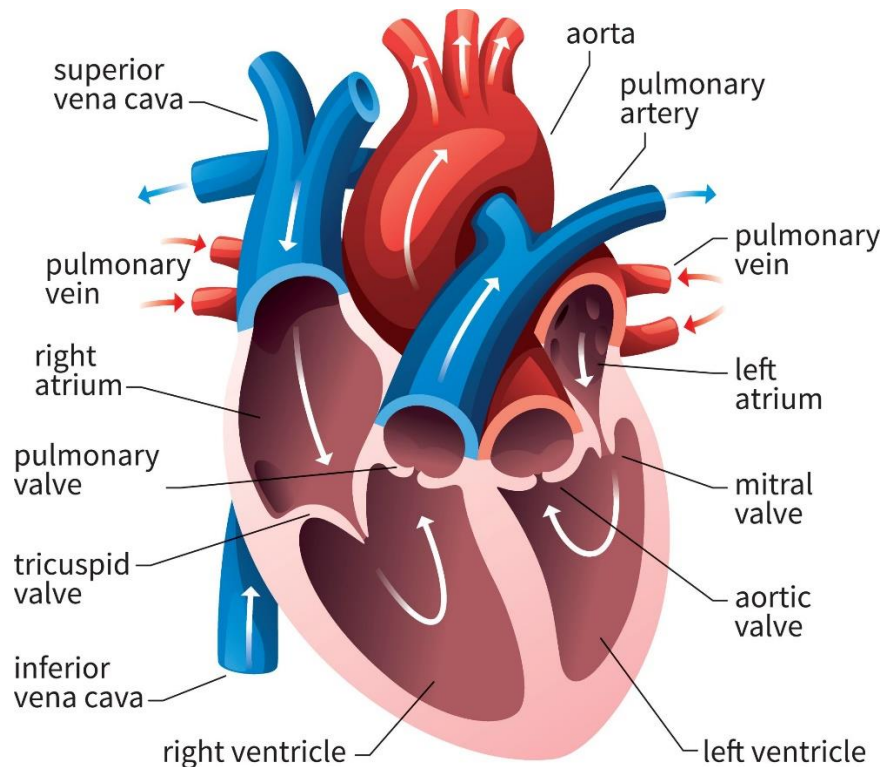
Neke od bitnijih funkcija krvožilnog sustava su:

- Transport deoksigenirane krvi (siromašne kisikom) iz srca u pluća i oksigenirane krvi (obogaćene kisikom) iz pluća do srca
- Transport oksigenirane (arterijske) krvi iz srca do tkiva, te transport deoksigenirane krvi iz tkiva do srca
- Distribucija nutrijenata do stanica
- Transport otpadnih tvari iz stanica (ugljični dioksid, ureja, laktati)
- Transport enzima i hormona
- Regulacija pH vrijednosti
- Regulacija tjelesne temperature preuzimanjem topline i redistribucijom prema površini tijela.

### 2.2. Srce

Srce je šuplji mišićni organ koji obavlja neprekidnu cirkulaciju krvi pumpanjem krvi kroz krvne žile. U ljudskom tijelu srce je smješteno u sredini prsnog koša između dva plućna krila, s malim pomakom u lijevo i veličine je stisnute šake. Srce je podijeljeno na četiri glavne komore, a to su lijeva i desna pretklijetka (atrij) i lijeva i desna klijetka (ventrikul). Između pretklijetki i klijetki nalaze se zalisci koji omogućuju strujanje krvi u samo jednom smjeru, iz pretklijetki u klijetke, a između lijeve i desne strane srca nalazi se srčana pregrada (septum). Srčana stijenka sastoji se od tri sloja, a to su: vanjski sloj (epikard), srednji mišićni sloj (miokard) i unutarnji sloj (endokard). Izvana je srce obavijeno vezivnom ovojnicom (perikard). Uloga desne strane srca je prikupljanje deoksigenirane krvi iz tijela te transport prema plućima, dok je uloga lijeve strane prikupljanje oksigenirane krvi i pumpanje nazad u tijelo. Iz lijeve klijetke krv ulazi u aortu, najveću arteriju u organizmu. Rad srca karakterizirano je srčanim ciklusima. Jedan srčani ciklus sastoji se od dvije faze: sistola i dijastola. Sistola predstavlja kontrakciju i izbacivanje krvi iz srca, a dijastola opuštanje i uljevanje krvi u srce. Kod prosječnog čovjeka broj otkucaja

srca iznosi od 60 do 80 puta u minuti u neopterećenom stanju. Povećanjem aktivnosti organizma broj otkucaja srca raste.



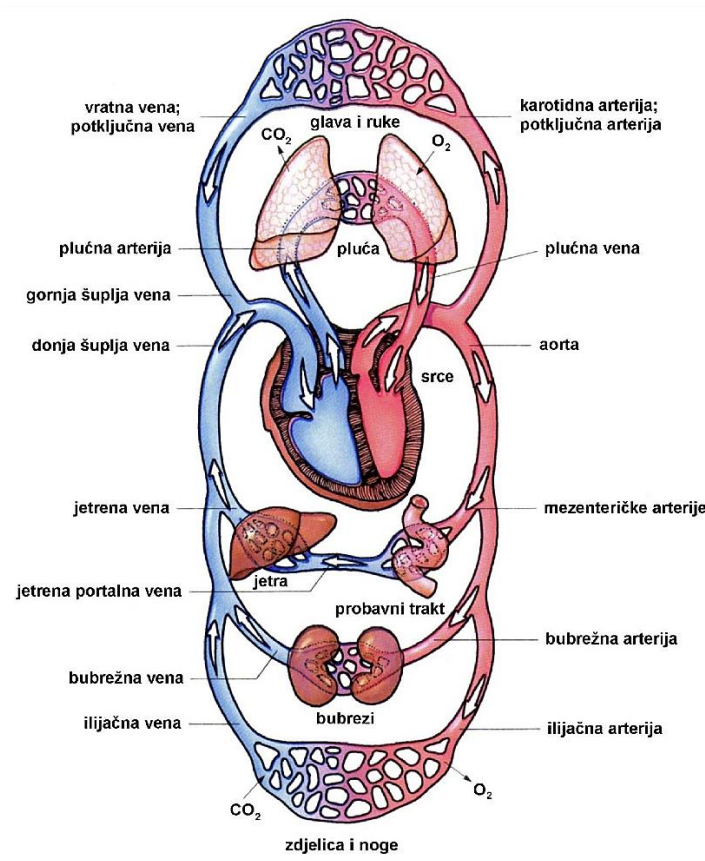
**Slika 1. Dijelovi srca sa izlaznim i ulaznim krvnim žilama [2]**

### 2.3. Krvne žile

Krvne žile su sastavni dio krvožilnog sustava čija je funkcija dovoz krvi bogate kisikom i hranjivim tvarima u stanice organizma i odvođenje krvi s ugljikovim dioksidom i otpadnim tvarima iz stanica, a ovisno o funkciji dijele se na arterije, vene i kapilare, čije su osnovne karakteristike:

- Arterije su najveće krvne žile sa čvrstom stijenkom građenom od elastičnih i mišićnih valakana. One transportiraju oksigeniranu krv iz srca u stanice tijela. Najveća arterija je aorta
- Vene su krvne žile koje dovode deoksigeniranu krv koja sadrži ugljični dioksid iz stanica tijela u srce. Vene imaju venske zaliske koji sprječavaju strujanje suprotno od smjera ka srcu
- Kapilare su najmanje krvne žile koje povezuju završetke ogranaka najsitnijih arterija i vena. U kapilarama se odvija izmjena hranjivih i otpadnih tvari te izmjena plinova.

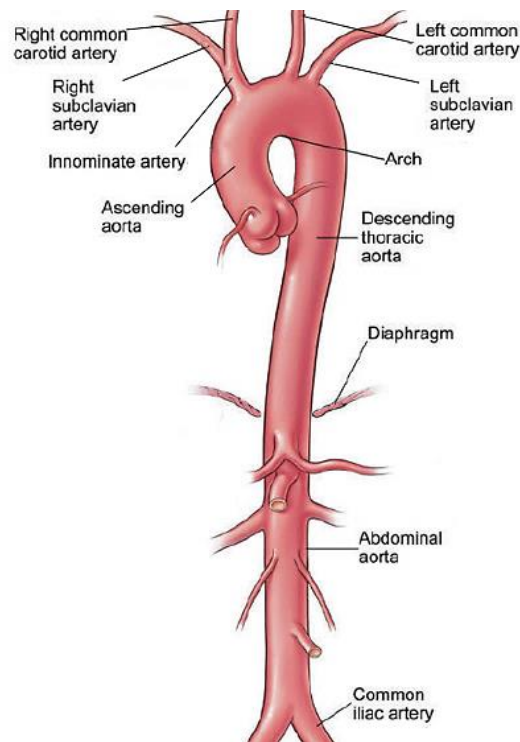




Slika 2. Organi i krvne žile u krvožilnom sustavu [3]

Aorta je glavna i najveća arterija ljudskog tijela koja izlazi iz lijeve srčane klijetke i proteže se do trbušne šupljine u visini četvrtog slabinskog kralješka, gdje se dijeli na dvije bočne arterije koje opskrbljuju zdjelice organe i donje ekstremitete, i u jednu malu granu koja se spušta do trtične kosti, a odvodi krv bogatu kisikom u sve dijelove tijela. Jedna od podjela aorte je prema smjeru strujanja krvi, te se može podijeliti na ulaznu (ascendentnu) aortu, luk aorte, silaznu (descendentnu) torakalnu i abdominalnu aortu. Silazna torakalna aorta je dio aorte od luka aorte do dijafragme (ošita), a silazna abdominalna je od dijafragme do grananja na dvije bočne arterije.

Stijenku aorte čine tri sloja: unutarnji sloj do lumena (tunica intima) koji se sastoji od jednog sloja endotelnih stanica, srednji sloj (tunica media) koji se sastoji od glatkih mišićnih stanica i vanjski sloj (tunica adventitia) koji se sastoji od kolagenih i elastičnih vlakana.



**Slika 3. Dijelovi aorte [4]**

## 2.4. Krv

Krv je tekuće tkivo crvene boje koje teče kroz krvožilni sustav, a građena je od krvne plazme, crvenih (eritrociti) i bijelih (leukociti) krvnih stanica te krvnih pločica (trombociti). Krvna plazma je tekućina sastavljena najvećim dijelom od vode, oko 90%, i u njoj otopljenih različitih organskih i anorganskih tvari poput soli, bjelančevina, hranjivih tvari, otpadnih tvari i hormona. Volumen krvi u odrasle osobe iznosi oko 5 litara, od kojih oko 60% zauzima krvna plazma, a 40% krvne stanice.

Osnovna funkcija krvi je opskrba tkiva kisikom i preuzimanje ugljičnog dioksida i ostalih otpadnih produkata iz tkiva.

## 2.5. Disekcija aorte

Disekcija aorte je bolest kod koje dolazi do prodora krvi kroz razdor intime uslijed uzdužnog odvajanja slojeva aorte (intime i medije), te stvaranje lažnog lumena. Disekcije aorte se klasificiraju kao tip A, koji zahvaća uzlaznu aortu, i tip B koji uglavnom zahvaća silaznu aortu.

Disekciji aorte pridonose aterosklerotski čimbenici rizika kao npr. hipertenzija, dislipidemija, pušenje itd.; stečene bolesti vezivnog tkiva kao npr. Behçetov sindrom, Arteritis orijaških

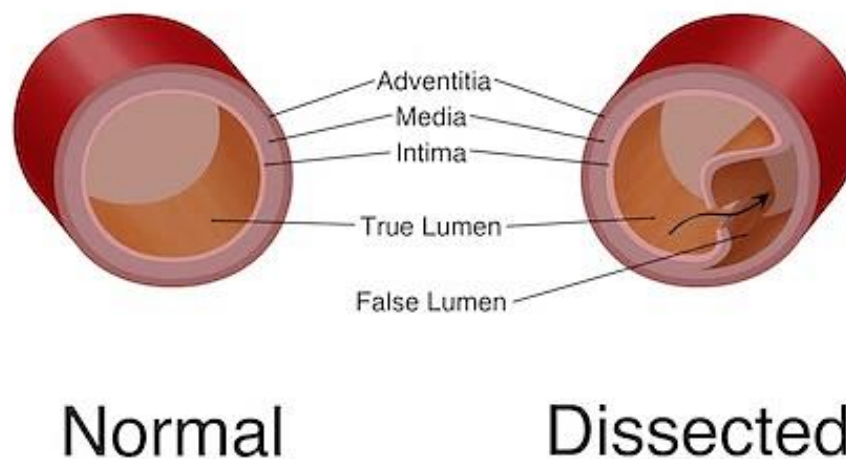
stanica, Sifilis itd.; prirođene bolesti vezivnog tkiva kao npr. Bikuspidni aortni zalistak, Koarktacija aorte, Marfanov sindrom itd.; iatrogeni kao npr. kateterizacija aorte, operacija aortnog zaliska itd. i traume kao npr. deceleracijske ozljede. [5]

Simptomi su najčešće iznenadna bol u predjelu prsnog koša sa širenjem u vrat i leđa ili obje ruke, te u noge, ovisno o lokalizaciji disekcije.

Ako se ne liječi, disekcija ima veliku smrtnost, pa tako oko 1-3% pacijenata umire u prva 24 sata, 30% u prvom tjednu, 80% u drugom tjednu i oko 90% unutar godine dana. Oko 20% bolesnika sa disekcijom aorte umire prije dolaska u bolnicu. [5]

Farmakoterapija (terapija medikamentima) se primjenjuje za nekomplicirane, stabilne disekcije, ograničene na silaznu aortu tipa B, i za stabilne, izolirane disekcije luka aorte. Kirurškim putem se liječe tip A i komplicirane disekcije tipa B. [6]

Za dijagnostiku disekcije koriste se EKG, RTG pluća i srca, transtorakalna i transezofagusna ehokardiografija, magnetna rezonancija (MR), aortografija i MSCT (multislice CT). Treperenje intime i dvostruki lumen potvrđuju disekciju.



Slika 4. Ilustracija disekcije aorte [7]

### 3. MATEMATIČKI MODEL

Matematički modeli primjenjeni za simuliranje ponašanja fluida i čvrstog tijela (stijenke krvne žile, solida) bazirani su na zakonima održanja fizikalnih veličina i korišteni su za promatrani problem. Uz zakone održanja koriste se još i konstitutivne jednadžbe koje pružaju dodatne potrebne relacije u ovisnosti o promatranom problemu i materijalu, kako bi se matematički model mogao adekvatno riješiti, tj. kako bi se mogao zatvoriti sustav jednadžbi.

#### 3.1. Matematički model čvrstog tijela

##### 3.1.1. Zakoni održanja za domenu čvrstog tijela

Zakon održanja količine gibanja govori da je promjena količine gibanja jednaka zbroju svih sila.

Ako se uzme u obzir proizvoljno tijelo volumena  $V$ , omeđenog površinom  $S$ , s jediničnom normalom usmjerenom prema van  $\mathbf{n}$ , jednadžba održanja mase i jednadžba održanja količine gibanja mogu se zapisati u strogo konzervativnoj integralnoj formi kao [8]:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (3.2)$$

gdje je  $\rho$  gustoća,  $\boldsymbol{\sigma}$  Cauchyjev tenzor naprezanja,  $\mathbf{v}$  vektor brzine i  $\mathbf{f}$  su masene sile. Održanje momenta količine gibanja svodi se na simetričnost Cauchyjevog tenzora naprezanja  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ .

Primjenom Reynoldsovog transportnog teorema, potpune derivacije se zamjenjuju sa parcijalnim derivacijama kako slijedi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \rho [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S)] dS = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \oint_S \rho \mathbf{v} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S)] dS = \oint_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV, \quad (3.4)$$

gdje je  $\mathbf{v}_S$  brzina površine  $S$ . U Lagrangeovom pristupu, koji će se koristiti za opis ponašanja stijenke, brzina površine  $S$  se pretpostavlja da je jednaka brzini cijele domene pa je tako:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_S = 0, \quad (3.5)$$

što znači da u jednadžbama (3.3) i (3.4) konvekcijski članovi, tj. drugi članovi na lijevim stranama jednadžbi otpadaju, za razliku od Eulerovog pristupa kod kojeg ostaju u jednadžbama.

Ako se pretpostavi nelinearno ponašanje tijela (stijenke), onda se može primjeniti Nansonova relacija kako slijedi:

$$\mathbf{n} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0, \quad (3.6)$$

gdje je  $\mathbf{F}$  gradijent deformiranja,  $J$  je Jacobijan koji je definiran kao determinanta gradijenta deformiranja  $J = \det(\mathbf{F})$ , a  $\mathbf{n}$  i  $\mathbf{n}_0$  su trenutni i referentni vektori površina.

Nansonova relacija povezuje deformiranu i nedeformiranu konfiguraciju, pa se tako jednadžba (3.4) može zapisati u odnosu na referentnu konfiguraciju kao:

$$\int_{V_0} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV_0 = \oint_{S_0} (\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma} dS_0 + \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV_0, \quad (3.7)$$

gdje je vektor brzine izražen kao vremenska derivacija vektora pomaka  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ . Indeks 0 predstavlja referentnu (početnu) konfiguraciju.

Opisani pristup kod kojeg se jednadžba održanja količine gibanja (3.7) integrira po referentnoj (početnoj) konfiguraciji naziva se potpuni Lagrangeov pristup ili TL (eng. *total Lagrangian approach*).

Analogno, jednadžba održanja količine gibanja može se zapisati i za trenutnu konfiguraciju, gdje Nansonova relacija povezuje deformiranu i ažuriranu konfiguraciju preko izraza:

$$\mathbf{n} = \mathbf{j}\mathbf{f}^{-T} \cdot \mathbf{n}_u, \quad (3.8)$$

u kojoj indeks  $u$  ima značenje *updated* (ažurirano), te je relativni Jacobijan  $j$  izražen preko relativnog gradijenta deformiranja  $\mathbf{f}$  kako slijedi:

$$j = \det(\mathbf{f}), \quad (3.9)$$

pa se konačno može zapisati:

$$\int_{V_u} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) dV_u = \oint_{S_u} (\mathbf{j}\mathbf{f}^{-T} \cdot \mathbf{n}_u) \cdot \boldsymbol{\sigma} dS_u + \int_{V_u} \rho \mathbf{f} dV_u. \quad (3.10)$$

Kod ažuriranog Lagrangeovog pristupa ili UL (eng. *updated Lagrangian approach*) jednadžba (3.10) se integrira po trenutnoj (ažuriranoj) konfiguraciji. Razlika između deformirane i ažurirane (trenutne) konfiguracije je što je ažurirana konfiguracija zadnja poznata konfiguracija, a deformirana konfiguracija je konfiguracija prije ažurirane.

Razlika između potpunog i ažuriranog Lagrangeovog pristupa je samo u numeričkoj efikasnosti jednog naspram drugog pristupa, dok su oba pristupa matematički ekvivalentna. Zakon održanja mase je sadržan u oba pristupa, tj. konvekcijski član je jednak nuli.

Kako se kod ažuriranog Lagrangeovog pristupa (UL) jednadžba (3.10) integrira po trenutnoj konfiguraciji tako se i računaska mreža mora pomicati na kraju svakog računskog vremenskog koraka, što kod metode konačnih volumena sa računanjem u centru volumena nije brz i jednostavan postupak jer se vrijednosti pomaka iz centra volumena moraju interpolirati u čvorove koristeći se npr. metodom najmanjih kvadrata, a alternativno se može geometrija direktno ažurirati preko pretpostavljenih kinematičkih odnosa. [8]

U ovom radu će se koristiti potpuni Lagrangeov pristup radi jednostavnijeg i bržeg numeričkog rješavanja, a uslijed ograničenog vremena.

Jednadžba (3.7) je izražena preko vektora ukupnog pomaka  $\mathbf{u}$ , a može se izraziti i preko vektora prirasta pomaka kako slijedi:

$$\int_{V_0} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}_{[m-1]} + \Delta \mathbf{u}) dV_0 = \oint_{S_0} (\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma} dS_0 + \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV_0, \quad (3.11)$$

gdje je vektor prirasta pomaka izražen kao  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{[m-1]}$ .

Razlika između jednadžbe (3.7) izražene preko ukupnih pomaka i jednadžbe (3.11) preko prirasta pomaka je u numeričkoj efikasnosti koja ovisi o promatranom problemu. U sklopu ovoga rada jednadžbe će se rješavati preko ukupnog pomaka.

Definicija Cauchyjevog tenzora naprezanja može se zadati u oba pristupa (TL i UL) preko bilo koje konstitutivne relacije koja vrijedi za velike deformacije.

Postoje najmanje dva izvora nelinearnosti u formulacijama potpunog i ažuriranog Lagrangeovog pristupa, a to su geometrijska nelinearnost i materijalna nelinearnost. Kako je geometrija funkcija polja pomaka, nelinearnost proizlazi iz toga što je Cauchyjev tenzor naprezanja pomnožen sa članovima  $\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}$  kod TL ili  $\mathbf{j}\mathbf{f}^{-T}$  kod UL koji su funkcije pomaka, a materijalna nelinearnost je sadržana u definiciji Cauchyjevog tenzora naprezanja, gdje je  $\boldsymbol{\sigma}$

nelinearna funkcija vektora pomaka  $\mathbf{u}$ . Dodatnu nelinearnost mogu uzrokovati rubni uvjeti koji ovise o vektoru pomaka, kao npr. kontaktni ili kohezivni rubni uvjet.

### 3.1.2. Konstituirne jednadžbe čvrstog tijela

Kako bi se jednadžbe iz prethodnog poglavlja 3.1.1. mogle riješiti, potrebne su konstitutivne jednadžbe koje dovode u odnos naprezanje i deformaciju, a kako će se u ovom radu stijenka aorte modelirati kao izotropni, hiperelastični materijal, tako će se za konstitutivnu relaciju implementirati stlačivi Neo-Hooke model.

Za promatranje problema velikih deformacija koristiti će se gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  i relativni gradijent deformiranja  $\mathbf{f}$ , koji su definirani u odnosu na referentnu konfiguraciju izrazima:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_{[m-1]}^{-1}, \quad (3.13)$$

gdje  $\nabla_0$  predstavlja gradijent u odnosu na početnu, nedeformiranu konfiguraciju.  $\mathbf{F}_{[m-1]}$  je gradijent deformiranja sa kraja prethodnog vremenskog koraka. [8]

Koristeći stlačivi Neo-Hooke model, Cauchyjev tenzor napreznja može se zapisati preko sljedećeg izraza:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}] + \frac{K}{2} \left( \frac{J^2 - 1}{J} \right) \mathbf{I}, \quad (3.14)$$

gdje je  $\mu$  modul smicanja ( $G$ ),  $K$  je modul stlačivosti (eng. *bulk modulus*),  $\mathbf{I}$  jedinični tenzor drugog reda,  $J$  je Jacobijan i  $\bar{\mathbf{b}}$  je volumna komponenta lijevog Cauchy-Greenovog tenzora deformiranosti dana preko izraza:

$$\bar{\mathbf{b}} = J^{-2/3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (3.15)$$

U slučaju malih deformacija, nelinearna ovisnost u stlačivom Neo-Hooke modelu se reducira na linearnu ovisnost Hookeovog modela kod kojeg se Cauchyjev tenzor napreznja svodi na:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{I}, \quad (3.16)$$

gdje je  $\boldsymbol{\varepsilon}$  tenzor malih deformacija, a  $\mu$  i  $\lambda$  su Lamove konstante.

### 3.2. Matematički model fluida

Gibanje kontinuuma definirano je zakonima održanja koji opisuju transport nekog promatranog fizikalnog svojstva. Skalarna transportna jednadžba opisuje transport proizvoljne skalarne veličine i obično se koristi kao početna točka u definiranju relevantnog zakona održanja za dani problem u mehanici fluida. Integralni oblik zakona održanja fizikalnog svojstva  $\phi$  (skalarnе jednadžbe) za materijalni volumen  $V_M$  ograničen zatvorenom površinom  $S_M$  izražen je jednadžbom:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M} \rho \phi dV = - \oint_{S_M} \mathbf{n} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dS + \int_{V_M} s_\phi dV, \quad (3.17)$$

gdje je  $\rho$  gustoća,  $\mathbf{n}$  vanjska jedinična normala površine  $S_M$ ,  $\Gamma_\phi$  koeficijent difuzije i  $s_\phi$  volumni izvor/ponor fizikalnog svojstva  $\phi$ .

Primjenom Reynoldsovog teorema jednadžba (3.17) prelazi u integralni oblik zakona održanja fizikalnog svojstva  $\phi$  za proizvoljni volumen  $V$ , omeđen površinom  $S$  kako slijedi:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \oint_S \mathbf{n} \cdot \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \phi dS = - \oint_S \mathbf{n} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dS + \int_V s_\phi dV, \quad (3.18)$$

gdje je  $\mathbf{v}$  brzina gibanja kontinuuma, a  $\mathbf{v}_s$  je brzina površine  $S$ .

Zakoni održanja koji će opisivati mehaniku fluida mogu se izvesti iz jednadžbe održanja fizikalnog svojstva (3.18) zamjenom fizikalnog svojstva  $\phi$  za bilo koju transportiranu veličinu.

#### 3.2.1. Zakoni održanja za domenu fluida

Zakoni održanja koji će se koristiti u ovom radu za domenu fluida su:

- Zakon održanja mase
- Zakon održanja količine gibanja
- Zakon održanja momenta količine gibanja
- Zakon održanja prostora

Zakon održanja mase govori da je brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka nuli ako unutar volumena ne postoje izvori ili ponori mase. Jednadžba održanja mase ili jednadžba



kontinuiteta može se izvesti iz jednadžbe (3.18) uz izjednačavanje izvorskog člana sa nulom, te glasi:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \oint_S \mathbf{n} \cdot \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) dS = 0. \quad (3.19)$$

Zakon održanja količine gibanja govori da je brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka sumi svih sila koje djeluju na volumen, te ako se izvede iz jednadžbe (3.18) može se zapisati kao:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \oint_S \mathbf{n} \cdot \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \mathbf{v} dS = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS, \quad (3.20)$$

gdje je  $\boldsymbol{\sigma}$  tenzor naprezanja, a  $\mathbf{g}$  je gravitacijsko ubrzanje.

Zakon održanja momenta količine gibanja govori da je brzina promjene momenta količine gibanja materijalnog volumena jednaka sumi momenata svih sila koje djeluju na volumen. Jeznadžba održanja momenta količine gibanja izvedena iz jednadžbe (3.18) glasi:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV + \oint_S \mathbf{n} \cdot \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dS = \int_V \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{g}) dV + \int_V (\mathbf{r} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV, \quad (3.21)$$

gdje je  $\mathbf{r}$  vektor položaja.

Iz jednadžbi (3.20) i (3.21) slijedi svojstvo simetričnosti tenzora naprezanja  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (3.22)$$

U slučaju kada prostorna domena mijenja svoj oblik tijekom vremena, mora biti zadovoljen i tzv. zakon održanja prostora:

$$\frac{d}{dt} \int_V dV - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s dS = 0, \quad (3.23)$$

koji izražava odnos između brzine promjene volumena prostorne domene i brzine njene granice.

[9]

### 3.2.2. Konstitutivne jednadžbe fluida

U ovom radu krv će se razmatrati kao nestlačivi fluid uz pretpostavku izotermnog, turbulentnog, tranzijentnog strujanja. Tenzor naprezanja za nestlačivi Newtonski fluid definiran je generaliziranim Newtonovim zakonom viskoznosti [8]:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (3.24)$$

gdje je  $p$  tlak,  $\mathbf{I}$  jedinični tenzor drugog reda, a  $\boldsymbol{\tau}$  je tenzor viskoznog naprezanja definiran kao:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}. \quad (3.25)$$

U jednadžbi (3.25)  $\mu$  je dinamička viskoznost fluida, a  $\mathbf{D}$  je simetrični dio tenzora brzine deformacije i glasi:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right]. \quad (3.26)$$

U slučaju strujanja nestlačivog fluida kada je  $\rho = \text{konst.}$ , i uz pretpostavku konstantne dinamičke viskoznosti  $\mu = \text{konst.}$ , zakoni održanja mase (3.19) i održanja količine gibanja (3.20) mogu se transformirati u sljedeći oblik:

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV + \oint_S \mathbf{n} \cdot \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \mathbf{v} \, dS = \oint_S \mathbf{n} \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}) \, dS + \int_V \rho \mathbf{g} \, dV - \int_V \nabla p \, dV. \quad (3.28)$$

Jednadžba (3.28) predstavlja integralni oblik Navier-Stokesove jednadžbe za izotermno strujanje nestlačivog Newtonskog fluida i zajedno s jednadžbom kontinuiteta (3.27) čini zatvoreni sustav jednadžbi.

### 3.2.3. Rubni uvjeti Navier-Stokesovih jednadžbi

Rubnim uvjetima koji se zadaju na granicama domene osigurava se jedinstvenost rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi. Dva su osnovna tipa rubnih uvjeta iz kojih se mogu dobiti različiti oblici izvedenih rubnih uvjeta, a to su Dirichletov rubni uvjet, koji propisuje vrijednost varijable na granici domene i von Neumannov rubni uvjet koji propisuje vrijednost gradijenta varijable na granici domene. Najčešći tipovi granica su ulazna granica, izlazna granica, zid i ravnina simetrije. Ulazna granica predstavlja ulaz fluida u domenu te je najčešće zadana preko Dirichletovog rubnog uvjeta brzine, te von Neumannovim rubnim uvjetom za tlak. Izlazna granica predstavlja izlaz fluida iz domene i na njoj se najčešće postavlja von Neumannov rubni uvjet za tlak i brzinu. Zid predstavlja nepropusnu granicu domene, te je u viskoznom strujanju brzina na zidu jednaka nuli. Ravnina simetrije se koristi kod simetričnih domena, te uvelike smanjuje vrijeme proračuna.

### 3.2.4. $k$ - $\omega$ SST model turbulencije

U ovom radu koristiti će se  $k$ - $\omega$  SST (eng. *Shear Stress Transport*) model turbulencije koji je spoj klasičnih  $k$ - $\omega$  i  $k$ - $\varepsilon$  modela. Kako oba modela, i  $k$ - $\omega$  i  $k$ - $\varepsilon$ , imaju mane u različitim područjima opisa strujanja pojavila se potreba za nalaženjem novog modela koji bi iskoristio prednosti i eliminirao mane oba modela.  $k$ - $\omega$  model bolje opisuje ponašanje strujanja blizu zida i uspješno se koristi za strujanja sa srednje izraženim gradijentima tlaka, ali ne opisuje dobro probleme kod kojih dolazi do odvajanja strujanja uzrokovanih tlakom. Također, u slobodnoj struji, podalje od graničnog sloja,  $\omega$  jednadžba pokazuje veliku osjetljivost na vrijednosti  $\omega$ , i zbog toga ne može u potpunosti zamjeniti  $\varepsilon$ -jednadžbu usprkos svojoj superiornosti blizu zida. To je bio jedan od glavnih razloga za razvoj SST modela koji preko tzv. blending funkcija omogućuje automatsko reguliranje između utjecaja jednog modela naspram drugog. Jedina dodatna kompleksnost kod formulacije ovoga modela naspram standardnih modela je nužnost za računanjem udaljenosti od zida koja je potrebna za blending funkcije. [10]

Transportna jednadžba kinetičke energije turbulencije  $k$  glasi:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u k)}{\partial x} = \tilde{P}_k - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x} \right]. \quad (3.29)$$

Transportna jednadžba za  $\omega$ :

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\omega)}{\partial x} = \alpha\rho S^2 - \beta\rho\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial\omega}{\partial x} \right] + 2(1 - F_1)\rho\sigma_{\omega 2} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad (3.30)$$

gdje je  $F_1$  prva blending funkcija definirana kao:

$$F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right\}^4 \right\}, \quad (3.31)$$

gdje je  $y$  udaljenost od zida, a  $CD_{k\omega}$ :

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial x}, 10^{-10} \right). \quad (3.32)$$

Funkcija  $F_1$  je jednaka nuli podalje od zida što predstavlja k- $\epsilon$  model, a približavanjem zidu i graničnom sloju vrijednost postaje jedan, što predstavlja k- $\omega$  model.

Turbulentna viskoznost definirana je kao:

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}, \quad (3.33)$$

gdje je  $S$  invarijantna vrijednost brzine deformacije, a  $F_2$  je druga blending funkcija:

$$F_2 = \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right]. \quad (3.34)$$

U SST modelu produkcijski limiter  $P_k$  se koristi za spriječavanje razvoja turbulencije u zonama stagnacije, a definiran je kao:

$$P_k = \mu_t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \rightarrow \tilde{P}_k = \min(P_k, 10\beta^* \rho k \omega). \quad (3.35)$$

Sve konstante se također računaju preko blending funkcija za k- $\omega$  i k- $\epsilon$  modele prema modelu:

$$\alpha = \alpha_1 F + \alpha_2 (1 - F). \quad (3.36)$$

Koeficijenti za  $k-\omega$  SST model su prikazani u tablici 1.

**Tablica 1. Koeficijenti  $k-\omega$  SST modela**

$\alpha_{k,1}$	$\alpha_{k,2}$	$\alpha_{\omega,1}$	$\alpha_{\omega,2}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta^*$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$a_1$	$b_1$	$c_1$
0.85	1.0	0.5	0.856	0.075	0.0828	0.09	5/9	0.44	0.31	1.0	10.0

### 3.2.4.1. Ponašanje blizu zida

Jedna od bitnijih značajki inženjerski korisnog modela turbulencije je precizan opis ponašanja blizu zida gdje dolazi do značajnijeg mješanja, što uzorkuje povećanje vrijednosti gradijenata.

Turbulentno strujanje blizu zida može se podijeliti u tri područja:

- Viskozni sloj:  $0 < y^+ \leq 5$ ,
- Prijelazni sloj:  $5 < y^+ \leq 30$ ,
- Inercijski sloj:  $30 < y^+ \leq 200$ ,

gdje je bezdimenzijska udaljenost od zida  $y^+$  dana sljedećim izrazom:

$$y^+ = \frac{v_\tau y}{\nu}, \quad (3.37)$$

gdje je  $v_\tau$  tangencijalna brzina na zidu,  $y$  je stvarna udaljenost od zida, a  $\nu$  je kinematička viskoznost fluida.

Kako bi se numerički mogao riješiti problem turbulencije blizu zida, nužno je korištenje dovoljno guste mreže konačnih volumena koja može potpuno opisati strujanje, a fizikalno gledano to znači da prva računaska točka u mreži treba biti unutar viskoznog sloja u kojemu je molekularna viskoznost dominantna, a efekti turbulencije su neznatni. Taj pristup zove se *Low-Reynolds Number* i za implementaciju zahtjeva korištenje modela turbulencije koji se može integrirati kroz viskozno sloj, što  $k-\omega$  SST model zadovoljava.

Rubni uvjet za izračun specifične brzine disipacije kinetičke energije turbulencije na zidu za  $y=0$  glasi:

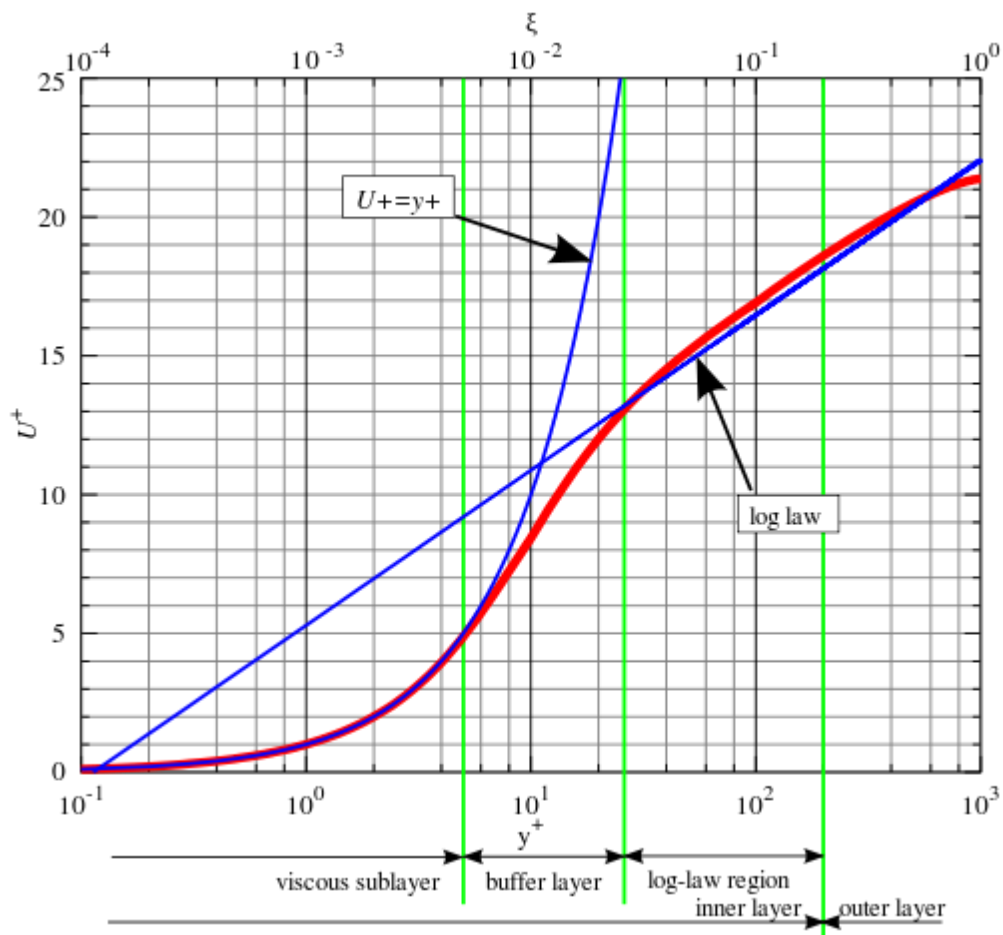
$$\omega_{wall} = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 (\Delta y)^2}, \quad (3.38)$$

gdje je  $\Delta y$  udaljenost od zida do sljedeće točke. [11]

Rubni uvjet za kinetičku energiju turbulencije na zidu jednak je:

$$k_{wall} = 0. \quad (3.39)$$

U ovom radu korištena je `nutLowReWallFunction` unutar software-a OpenFOAM, koja se koristi za izračunavanje turbulentne viskoznosti blizu zida.



Slika 5. Zakon zida [12]

## 4. NUMERIČKI MODEL

### 4.1. Metoda konačnih volumena

Parcijalne diferencijalne jednačbe koje predstavljaju matematički model postavljen u poglavlju 3. su nerješive analitičkim putem, pa se stoga koristi numerička metoda rješavanja tih jednačbi, kojom se dolazi do približnih, inženjerski prihvatljivih rješenja. U ovom poglavlju opisati će se najkorištenija numerička metoda za rješavanje problema računalne dinamike fluida, metoda konačnih volumena. Metodom konačnih volumena prostorna domena se diskretizira sa konačnim brojem proizvoljnih konačnih volumena koji se još nazivaju i kontrolni volumeni. Također se i vrijeme, kod promatranja nestacionarnih problema, dijeli na konačan broj vremenskih intervala, koji se nazivaju računskim vremenskim koracima. Na taj se način dobiva numerička mreža sa diskretiziranim područjem prostora i vremena u kojoj se traži rješenje. Nakon prostora i vremena, diskretiziraju se i jednačbe, a svrha diskretizacije je pretvaranje diferencijalne jednačbe u sustav algebarskih jednačbi čijim se rješavanjem dobiva skup vrijednosti koje odgovaraju približnom rješenju izvorne jednačbe u definiranim točkama vremena i prostora.

Diskretizacijska metoda konačnih volumena za slučaj vremenski promjenjive prostorne domene ima sljedeća osnovna svojstva:

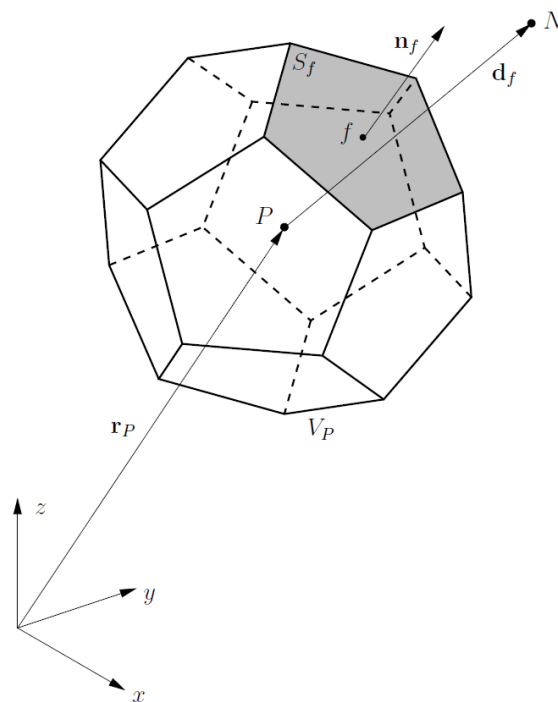
- Integralni oblik transportnih jednačbi primjenjuje se na svaki pokreni kontrolni volumen u mreži
- Jednačbe se rješavaju na mreži koja mijenja oblik tijekom vremena. Promjenom oblika mreže ne mijenja se njena topologija
- Konačni volumeni mogu imati proizvoljni oblik, a u težištu konačnog volumena se računaju sve zavisne varijable
- Sustav vezanih transportnih jednačbi rješava se u odvojenom postupku, pri čemu se diskretizirani članovi koji povezuju jednačbe u sustavu tretiraju eksplicitno
- Moguća je paralelizacija računanja koja je bazirana na dekompoziciji (podjeli) prostorne domene. [9]

Diskretizacijom vremenske domene dobiva se konačan broj jednakih ili promjenjivih vremenskih koraka  $\Delta t$ , čime su definirane vremenske računске točke u kojima će se računati vrijednosti zavisnih varijabli. Nestacionarni problemi rješavaju se po vremenskim koracima, a

počinje se od poznatog rješenja u početnom trenutku  $t = t^0$  i kao rezultat se dobiva rješenje u novom vremenskom trenutku  $t = t^n = t^0 + \Delta t$ .

#### 4.1.1. Diskretizacija prostorne domene

Diskretizacijom prostorne domene dobiva se računaska mreža sa konačnim skupom konačnih volumena, koji potpuno ispunjavaju domenu i pri tome se međusobno ne preklapaju.



Slika 6. Konačni volumen [9]

Konačni volumen ima konveksni poliedarski oblik i može biti omeđen proizvoljnim brojem konveksnih poligonalnih stranica. Mreža koju sačinjavaju ovako definirani konačni volumeni se naziva proizvoljnom nestrukturiranom mrežom. Primjer konačnog volumena prikazan je na slici 6. gdje su  $P$  i  $N$  težišta dva susjedna konačna volumena koji dijele stranicu  $f$  na kojoj je označeno njeno težište. Težište konačnog volumena predstavlja prostornu računsku točku i zadovoljava sljedeći uvjet:

$$\int_{V_P} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) dV = 0, \quad (4.1)$$



gdje je  $V_p$  volumen konačnog volumena  $P$ , a  $\mathbf{r}_p$  je vektor položaja njegovog težišta. Analogno vrijedi i za težište stranice konačnog volumena:

$$\int_{S_f} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_f) dS = 0 \quad (4.2)$$

gdje je  $S_f$  površina stranice  $f$ , a  $\mathbf{r}_f$  je vektor položaja njenog težišta.

Općenito stranice nisu ravne, što otežava računanje geometrijskih svojstava konačnih volumena i pripadajućih stranica, pa je stoga uveden pristup kod kojeg se stranice jednoznačno definiraju rastavljanjem na trokute. Svojstva konačnog volumena računaju se iz odgovarajućih svojstava tetraedara koji čine konačni volumen, a koji se dobivaju korištenjem centralnog čvora i trokuta nastalih rastavljanjem pripadajućih stranica. Veličina konačnog volumena se računa kao suma volumena tetraedara, a težište kao srednja vrijednost težišta tetraedara.

Za definiranje računске mreže koristi se adresiranje po stranicama konačnih volumena, a sastoji se od sljedećih elemenata:

- Lista čvorova – u kojoj su čvorovi definirani prostornim koordinatama
- Lista poligonalnih stranica – u kojoj su stranice definirane listom oznaka pripadajućih čvorova
- Lista konačnih volumena (ćelija) – u kojoj su ćelije definirane listom oznaka pripadajućih stranica
- Lista graničnih zona – u kojoj su granične zone definirane listom oznaka pripadajućih graničnih stranica.

Kako se oblik prostorne domene mijenja u ovisnosti o vremenu, mora se sukladno mijenjati i mreža koja se u tom slučaju naziva dinamička mreža. U ovom radu se koristi mreža koja ne mijenja svoju topologiju, tj. mreža se prilagođava obliku prostorne domene isključivo promjenom položaja njenih čvorova.

Geometrijska valjanost mreže provjerava se sljedećim kriterijima:

- Svi konačni volumeni i stranice moraju biti konveksni (spojnica bilo koje dvije točke objekta ostaje unutar granica tog objekta)
- Svi konačni volumeni moraju biti geometrijski potpuno zatvoreni
- Granica mora biti geometrijski zatvorena

- Za sve unutarnje stranice skalarni produkt normale  $\mathbf{n}_f$  i vektora  $\mathbf{d}_f$  mora biti pozitivan. To je tzv. test ortogonalnosti stranice konačnog volumena. Ortogonalnost stranica konačnih volumena se najčešće izražava preko kuta neortogonalnosti koji je definiran kao:

$$\alpha_f = \arccos \left( \frac{\mathbf{d}_f \cdot \mathbf{n}_f}{|\mathbf{d}_f|} \right). \quad (4.3)$$

#### 4.1.2. Diskretizirani model jednadžbi

Nakon provedene diskretizacije nestacionarnog, konvekcijskog, difuzijskog i izvorskog člana, kao i vremenske diskretizacije dobiva se potpuno diskretizirana opća transportna jednadžba za konačni volumen koja se može zapisati u sljedećem obliku:

$$a_p \phi_p^n + \sum_N a_N \phi_N^n = r_p, \quad (4.4)$$

gdje je  $a_p$  dijagonalni (centralni) koeficijent,  $a_N$  vandijagonalni (susjedni) koeficijent, a  $r_p$  desna strana koja sadrži one članove diskretizirane transportne jednadžbe koji se tretiraju eksplicitno.

Za svaki konačni volumen se formira po jedna jednadžba (4.4), pa se stoga u konačnici dobije sustav algebarskih jednadžbi na zadanoj mreži:

$$[A] \cdot \{\phi\} = \{r\}, \quad (4.5)$$

gdje je  $[A]$  matrica sustava u kojoj su koeficijenti  $a_p$  dijagonalni, a  $a_N$  su vandijagonalni. Vektor s desne strane jednadžbe  $\{r\}$  obuhvaća izvorske članove, koji za sve konačne volumene u mreži sadrži diskretizirane članove transportne jednadžbe koji se tretiraju eksplicitno. Vektor  $\{\phi\}$  sadrži vrijednosti zavisne varijable  $\phi$  za sve konačne volumene u mreži. Matrica koeficijenata  $[A]$  je tzv. rijetka matrica u kojoj je većina koeficijenata jednaka nuli, a struktura popunjenosti matrice ovisi o redosljedu označavanja konačnih volumena u mreži. Matematička svojstva matrice  $[A]$  ovise o strukturi transportne jednadžbe, načinu diskretizacije i geometriji računске mreže.

## 4.2. Numeričko rješavanje domene stijenske

U ovom poglavlju obraditi će se diskretizacija matematičkog modela čvrstog tijela (stijenske, solida) iz poglavlja 3.1. metodom konačnih volumena sa računskom točkom u težištu volumena (eng. *cell centered finite volume method*). Proces diskretizacije je odvojen u dva dijela, a to su diskretizacija proračunske domene i diskretizacija jednadžbi. Diskretizacija proračunske domene sastoji se od prostorne i vremenske diskretizacije koja je objašnjena u poglavlju 4.1.

Kako bi se omogućila implementacija postupka odvojenog rješavanja, kod kojeg se jednadžba količine gibanja rješava rastavljanjem na tri skalarnu komponente jednadžbe, difuzijski član iz jednadžbe (3.4) je podjeljen na implicitni i eksplicitni dio:

$$\int_{V_0} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV_0 = \oint_{S_0} \mathbf{T}_\sigma dS_0 + \oint_{S_0} (\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \cdot \boldsymbol{\sigma} dS_0 - \oint_{S_0} \mathbf{T}_\sigma dS_0 + \int_{V_0} \rho f dV_0 \quad (4.6)$$

gdje se prvi član s desne strane jednadžbe tretira implicitno, a drugi i treći član se tretiraju eksplicitno. [8] Prvi i treći član jednadžbe (4.6) se ne poništavaju, a razlika između ta dva člana rezultira dodatnom numeričkom difuzivnošću, koja teži eliminaciji pogrešnih oscilacija u polju rješenja varijabli [13].

Član  $\mathbf{T}_\sigma$  u jednadžbi (4.6) predstavlja aproksimaciju (linearizaciju) polja naprezanja  $\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , u odnosu na polje pomaka. U ovom slučaju implicitno znači da član doprinosi matrici rezultata linearnog sustava jednadžbi sa koeficijentima, a eksplicitno da je član izračunat koristeći zadnje poznate vrijednosti i jedino doprinosi izvorskom vektoru rezultirajućeg linearnog sustava. Vanjske iteracije se provode nad jednadžbom (4.6) sve dok eksplicitni članovi jednadžbe ne padnu ispod zadane vrijednosti tolerancije, a kada se to ostvari, prvi i treći član jednadžbe se međusobno poništavaju i izračunato polje pomaka zadovoljava jednadžbu (3.4). Moguća je i dodatna provjera konvergencije kako bi se osiguralo da su konstitutivne relacije konvergirale.

Konačna diskretizirana forma jednadžbe količine gibanja za svaki konačni volumen  $P$  se može spojiti u formu od  $M$  linearnih algebarskih jednadžbi:

$$a_p \Delta u_p + \sum_F a_N \Delta u_N = r_p, \quad (4.7)$$

gdje je  $F$  broj unutarnjih stranica konačnog volumena  $P$ ,  $a_p$  je centralni koeficijent,  $a_N$  je susjedni koeficijent koji predstavlja interakciju sa nepoznanicama u težištu susjednog konačnog

volumena, a  $r_p$  je izvorski vektor. Algebarske linearne jednadžbe opisane iznad se sastavljaju za sve konačne volumene i tvore sustav linearnih jednadžbi:

$$[A] \cdot \{\phi\} = \{r\}, \quad (4.8)$$

gdje je  $[A]$  rijetka matrica  $M \times M$  sa slabim dijagonalnim utjecajem, gdje  $M$  predstavlja ukupni broj konačnih volumena. Koeficijenti  $a_p$  su dijagonalni, a  $a_N$  vandijagonalni koeficijenti matrice  $[A]$ . Vektor rješenja  $\{\phi\}$  sadrži nepoznate pomake  $\mathbf{u}$  u težištima konačnih volumena, a  $\{r\}$  je izvorski vektor koji se sastoji od eksplicitnih diskretiziranih članova, obujamnih sila i utjecaja rubnih uvjeta.

Linearni sustav jednadžbi rješava se odvojenim pristupom, u kojem se svaka komponenta polja prirasta pomaka rješava zasebno. Vanjske iteracije se provode kako bi se povezale unutarne, rastavljene, jednadžbe i linearizirani nelinearni članovi. Unutarnji linearni sustav rješava se iterativnim postupkom, obično koristeći nepotpunu metodu Cholesky preduvjetovanog konjugiranog gradijenta (ICCG) [13]. Unutarnji sustav se ne mora rješavati sa malom tolerancijom zbog toga što se koeficijenti i izvorski članovi aproksimiraju iz prethodnog koraka. Vanjske iteracije se provode sve dok se ne postigne zadana tolerancija. Ova metoda je ugrađena u OpenFOAM software.

Procedura numeričkog rješavanja domene stijenke je opisana u slijedećem algoritmu [8]:

- 1) **Za sve vremenske korake radi;**
- 2)     **Dok** eksplicitni članovi ne konvergiraju **radi;**
- 3)         Jednadžba količine gibanja: sastavi i riješi u odnosu na  $\mathbf{u}$ ; (jednadžba (4.6))
- 4)         Ažuriraj kinematičke veze (npr.  $\nabla \mathbf{u}$ );
- 5)         Ažuriraj naprezanja; (za odabrani model, npr. stlačivi Neo-Hooke model)
- 6)     Završi **dok** petlju;
- 7) **Završi.**

### 4.3. Rješavanje promjenjive domene fluida primjenom SIMPLE postupka

Brzina i tlak u domeni fluida povezani su diskretiziranom jednadžbom količine gibanja i diskretiziranom jednadžbom tlaka. Taj vezani sustav jednadžbi rješava se u odvojenom postupku u kojemu se jednadžba količine gibanja rješava nezavisno od jednadžbe tlaka. Povezanost između brzine i tlaka ostvaruje se pomoću SIMPLE postupka (SIMPLE loop).

U nastavku slijedi opis postupka rješavanja nestacionarnog problema u kojemu je oblik prostorne domene unaprijed poznat i vremenski promjenjiv. Postupak rješavanja nestacionarnog problema, uz uvjet da su zadane početne vrijednosti svih zavisnih varijabli, može se opisati na sljedeći način [9]:

- 1) Prijelaz u sljedeći vremenski korak  $t = t^n$ , pri čemu se zavisne varijable inicijaliziraju s vrijednostima iz prethodnog vremenskog koraka  $t = t^o$ ;
- 2) Računaju se pomaci graničnih čvorova mreže preko nove pozicije granice prostorne domene i koriste se kao rubni uvjet za problem pomicanja mreže. Rješava se pomicanje mreže, te se čvorovi mreže pomiču u novi položaj, koji odgovara novom obliku prostorne domene;
- 3) Započinje SIMPLE postupak koji se sastoji od sljedećih koraka:
  - Sastavljanje sustava lineariziranih algebarskih jednadžbi koji odgovara diskretiziranoj jednadžbi količine gibanja, pri čemu se polje tlaka i maseni tok kroz stranice konačnih volumena uzimaju iz prethodne iteracije. Na dobiveni sustav algebarskih jednadžbi se primjenjuje implicitna podrelaksacija
  - Približno polje brzina iz prethodnog koraka koristi se za sastavljanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi koji odgovara diskretiziranoj jednadžbi tlaka. Rješavanjem jednadžbe tlaka dobiva se novo približno polje tlaka, koje se koristi za računanje masenog toka kroz stranice konačnog volumena i za korekciju polja brzine. Prije upotrebe u prethodnoj točki ovog postupka, na polje tlaka se primjenjuje eksplicitna podrelaksacija:

$$p^n = p^p + \alpha_p (p - p^p), \quad (4.9)$$

gdje je  $p^p$  polje tlaka iz prethodne vanjske iteracije,  $p$  rješenje jednadžbe tlaka, a  $\alpha_p$  je faktor podrelaksacije ( $0 \leq \alpha_p \leq 1$ )

- Završava vanjska iteracija, provjerava se konvergencija rješenja i ako razina reziduala nije ispod zadane, postupak se vraća na prvu točku, tj. na početak vanjske iteracije
- 4) Ako nije dostignut zadnji vremenski korak, postupak se vraća u točku 1.

#### 4.4. Međudjelovanje fluida i stijenke (FSI)

Problemi interakcije fluida i stijenke su najčešće prekompleksni da bi se mogli rješavati analitičkim putem, pa se stoga primjenjuju numeričke metode. Postoje dva pristupa numeričkog rješavanja FSI problema, a to su monolitni i odvojeni. U monolitnom pristupu, jednadžbe obje domene se rješavaju simultano, tj. sa jednim rješavačem ili solverom (eng. *solver*), dok se odvojeni pristup zasniva na rješavanju domene fluida i domene stijenke odvojeno, svaka domena sa svojim rješavačem. U ovom radu će se koristiti odvojeni pristup, a za obje domene biti će implementirana metoda konačnih volumena. Kako bi se ostvarila interakcija fluida i stijenke, na granicama između dvije domene prenose se sile i pomaci koji se uzimaju u obzir kao rubni uvjeti u rješavačima. FSI simulacija zahtjeva dvije računске mreže konačnih volumena, jedna za domenu fluida, druga za domenu stijenke, koje se na granici dodiruju i preko koje se prenose sile i pomaci s jedne na drugu domenu.

Fluid i solid modeli su povezani preko kinematičkih i dinamičkih uvjeta koji moraju biti zadovoljeni na granici dviju domena.

Kinematički uvjet glasi da brzine i pomaci duž granice moraju biti neprekidni kako je dano izrazima:

$$\mathbf{v}_{\text{fluid}}^{[i]} = \mathbf{v}_{\text{solid}}^{[i]}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{u}_{\text{fluid}}^{[i]} = \mathbf{u}_{\text{solid}}^{[i]}, \quad (4.11)$$

gdje su  $\mathbf{v}$  brzine,  $\mathbf{u}$  pomaci, a indeks  $i$  označava granicu (eng. *interface*).

Dinamički uvjet slijedi iz zakona održanja količine gibanja i govori da su sile na granici domene u ravnoteži :

$$\mathbf{n}^{[i]} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{fluid}}^{[i]} = \mathbf{n}^{[i]} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{solid}}^{[i]}, \quad (4.12)$$

gdje je  $\mathbf{n}^{[i]}$  jedinični vektor normale na granici.

U odvojenom pristupu rješavanja FSI problema, domena fluida i stijenke se rješavaju odvojeno i koristi se algoritam spajanja (eng. *coupled algorithm*) preko kojega se ostvaruju kinematičke i dinamičke veze na granici fluida i stijenke. Sile se računaju na granici sa strane domene fluida i prenose se kao rubni uvijet na granicu sa strane domene stijenke. Sile se računaju preko tenzora naprezajna fluida koji se sastoji od sferne (izotropne) i devijatorske (viskozne) komponente.

Devijatorska (viskozna) komponenta, definirana Newtonovim zakonom viskoznosti je [14]:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu [\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T], \quad (4.13)$$

gdje je  $\mu = \rho \nu$  dinamička viskoznost fluida. Nastavno, tenzor naprezanja za nestlačivi Newtonski fluid glasi:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{fluid}}^{[i]} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T], \quad (4.14)$$

iz čega se može izvesti sila na granici:

$$\mathbf{t}_{\text{fluid}}^{[i]} = \mathbf{n}^{[i]} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{fluid}}^{[i]} = -p\mathbf{n}^{[i]} + \mu \mathbf{n}^{[i]} \cdot \nabla \mathbf{v}_t - 2\mu (\nabla_s \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}^{[i]} + \mu \nabla_s \mathbf{v}_n, \quad (4.15)$$

gdje je:

$$\mathbf{v}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{u} \quad (4.16)$$

tangencijalna komponenta brzine, a:

$$\nabla_s = \nabla - \mathbf{nn} \cdot \nabla \quad (4.17)$$

je površinski tangencijalni gradijenti operator, a  $\mathbf{v}_n$  je normalna komponenta brzine zadana kao:

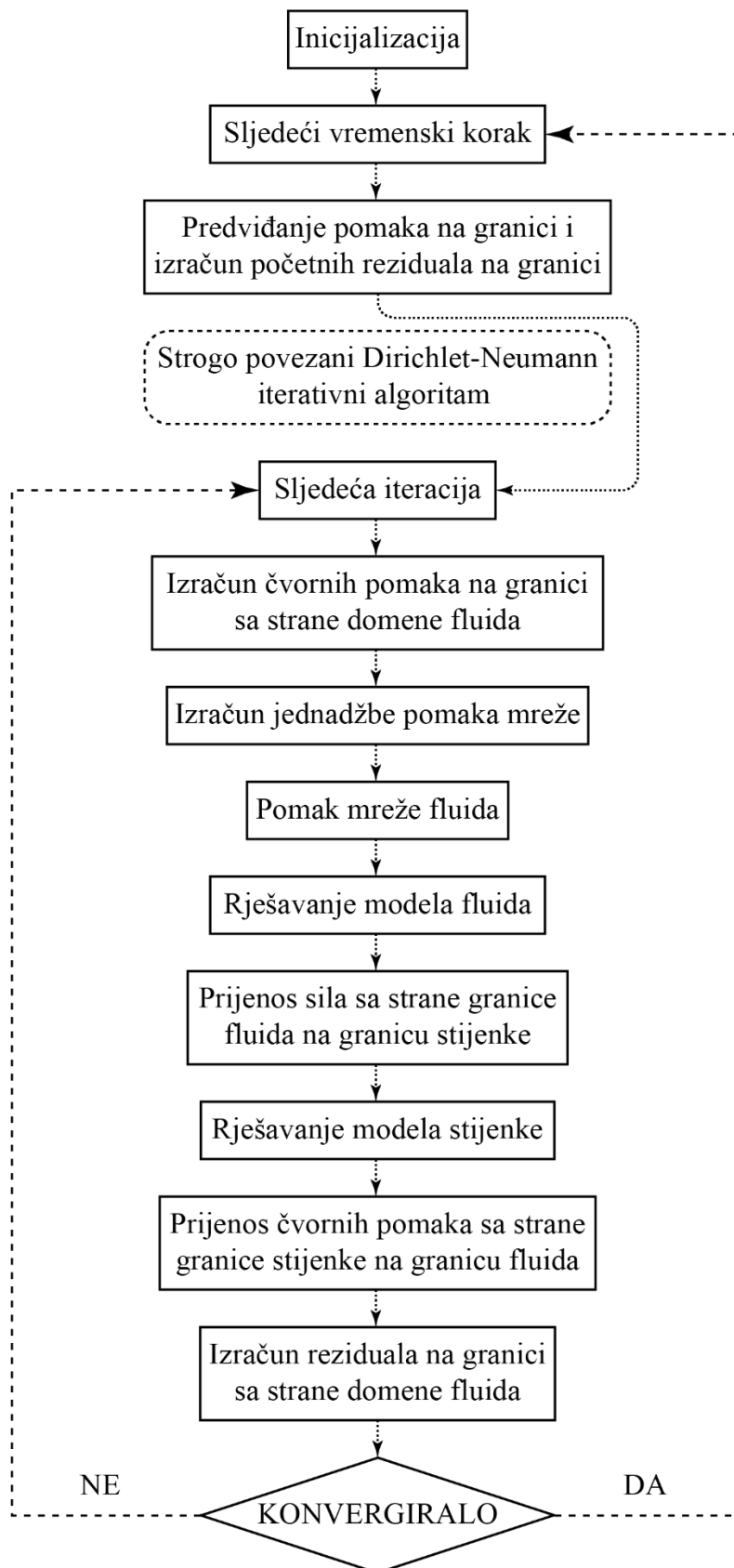
$$\mathbf{v}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.18)$$

Treći i četvrti član s desne strane jednadžbe (4.15) se obično mogu izostaviti, a inače se mogu izračunati direktno na granici sa strane stijenke, uzimajući u obzir da je ispunjen kinematički uvjet.

Za algoritam spajanja koristiti će se *Dirichlet-Neumannov* pristup. U tom pristupu domena fluida se rješava preko Dirichletovog rubnog uvjeta brzine na granici, a domena stijenke se rješava preko Neumannovog rubnog uvjeta pomaka na granici. [15]

Na slici 7., blok dijagramom je prikazan algoritam za iterativno rješavanje FSI problema implementiran u ovom radu.





Slika 7. Algoritam za iterativno rješavanje FSI problema

U svakom koraku moraju konvergirati rješavači za fluid, stijenku i pomak mreže fluida. Kako bi se postigla ili poboljšala konvergencija *Dirichlet-Neumannovog* algoritma spajanja, uvodi se podrelaksacija za brzine na granici tijekom prijenosa sa stijenke na fluid. Trenutno je u korištenom programskom paketu moguće koristiti tri različite metode podrelaksacije:

- fiksirana podrelaksacija
- dinamična (Aitken) podrelaksacija
- granična-kvazi-Newton sa inverznim Jacobijanom iz metode najmanjih kvadrata

Mapiranje polja vrijednosti, kao što su sile, brzine i pomaci na granicama domena općenito se izvodi sa interpolacijom na razini stranica i čvorova konačnih volumena. Vrijednosti polja koje se računaju na granici domena sa strane fluida, prenose se na stranu stijenke kao rubni uvjeti za domenu stijenke. Kako mreže fluida i stijenke općenito nisu konformne na granicama tako je potrebno provoditi interpolaciju između dva modela, za što postoje dvije tehnike:

- Interpolacija stranica – za interpolaciju stranica rubnih konačnih volumena na granici sa strane fluida na stranice rubnih konačnih volumena na granici sa strane stijenke
- Interpolacija čvorova – za interpolaciju polja čvornih pomaka na granici sa strane stijenke na čvorove na granici sa strane fluida.

Prijenos nekog polja sa centra stranice između fluida i stijenke na granici domena provodi se korištenjem metode direktnog mapiranja. Vrijednost nekog polja u centru stranice na granici sa strane domene stijenke računa se preko vrijednosti u centru stranice na granici sa strane domene fluida kako slijedi [14]:

$$\phi_{S,j} = \sum_k w_{j,k} \phi_{F,k}, \quad (4.19)$$

gdje je  $\phi_{S,j}$  vrijednost polja u centru na stanici stijenke  $j$ , a  $\phi_{F,k}$  je vrijednost polja u centru na stranici fluida  $k$ . Zbrajanje se provodi preko svih stranica sa strane fluida  $k$  koje se preklapaju sa stranicom stijenke  $j$ . Težinski faktor  $w_{j,k}$  za stranicu fluida  $k$  je definiran kao:

$$w_{j,k} = \frac{S_{S,j} \cap S_{F,k}}{S_{S,j}}, \quad (4.20)$$

gdje je  $S_{S,j} \cap S_{F,k}$  površina preklapanja područja između stranice stijenke  $j$  i stranice fluida  $k$ , a  $S_{S,j}$  je površina stranice stijenke  $j$ .

Interpolacija čvornih pomaka sa strane granice stijenke na granicu sa strane fluida provodi se sljedećom procedurom:

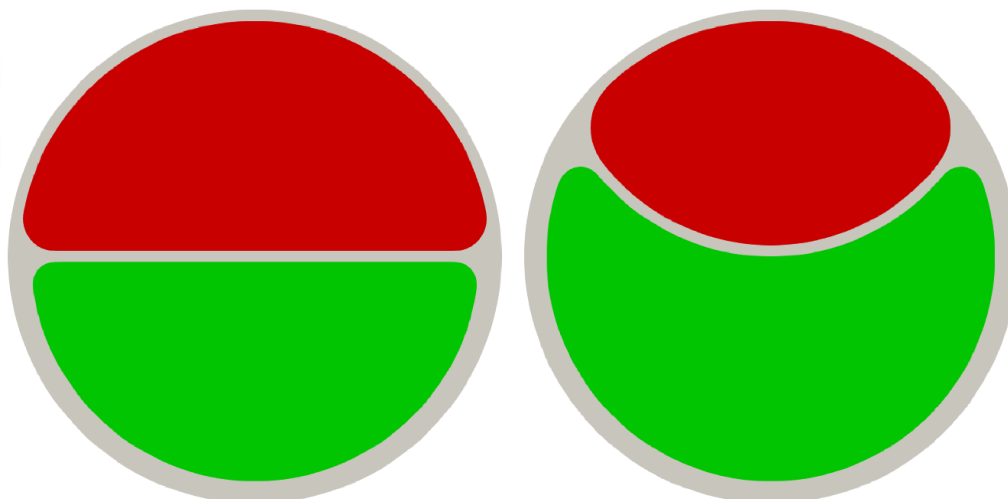
- Poligonalne stranice na granici sa strane domene stijenke se rastavljaju na trokute pomoću dodatne centralne točke (centar poligonalne stranice)
- Čvorovi na granici sa strane domene fluida se projeciraju na najbliži trokut na granici sa strane domene stijenke
- Vrijednosti pomaka u projeciranim točkama se računaju linearnom interpolacijom koristeći poznate vrijednosti pomaka u čvorovima trokuta.

## 5. RAČUNALNI MODEL

U ovom poglavlju pokazati će se postavke FSI simulacija. Opisati će se karakteristike korištenih geometrija modela, računске mreže, primjenjeni rubni uvjeti te svojstva materijala. Sve numeričke simulacije provedene su u programskom paketu OpenFOAM v1912, a za simulacije međudjelovanja fluida i stijenke korištena je eksterna biblioteka solids4foam unutar OpenFOAM-a.

### 5.1. Geometrija modela

U sklopu ovog rada numerička simulacija međudjelovanja fluida i stijenke provoditi će se na dvije različite idealizirane geometrije silazne aorte. Razlika između dvije geometrije je u položaju membrane odvojenog sloja aorte (eng. *intimal flap*) između stvarnog i lažnog lumena, pa će se tako koristiti jednostavnija geometrija u kojoj, gledano iz poprečnog presjeka, membrana disekcije pravocrtno povezuje vanjsku stijenku žile i koja će se zbog jednostavnosti kolokvijalno u daljem tekstu zvati simetrična geometrija ili simetrična disekcija, napram asimetrične geometrije ili asimetrične disekcije koja je kompliciranije geometrije, u kojoj gledano iz poprečnog presjeka, središnja membrana nepravocrtno povezuje vanjsku stijenku žile, što je bliže realnom problemu. Geometrija simetrične disekcije u ovom modelu nije idealno geometrijski simetrična zbog debljine vanjske stijenke. Na slici 8. prikazani su poprečni presjeci obje geometrije koji će se koristiti u numeričkoj simulaciji, gdje zelena boja označava stvarni lumen (eng. *true lumen*), crvena boja lažni lumen (eng. *false lumen*), a sivom bojom je označena stijenka aorte.



Slika 8. Simetrična i asimetrična geometrija disekcije

Zajedničke karakteristike obje geometrije dane su u tablici 2.

**Tablica 2. Zajedničke karakteristike obje geometrije**

Unutarnji promjer $D$	Duljina domene	Debljina stijenke stvarnog lumena	Debljina stijenke lažnog lumena	Debljina odvojene stijenke ( <i>intimal flap</i> )
0.02m	0.1m ( $5D$ )	0.001m	0.0005m	0.0005m

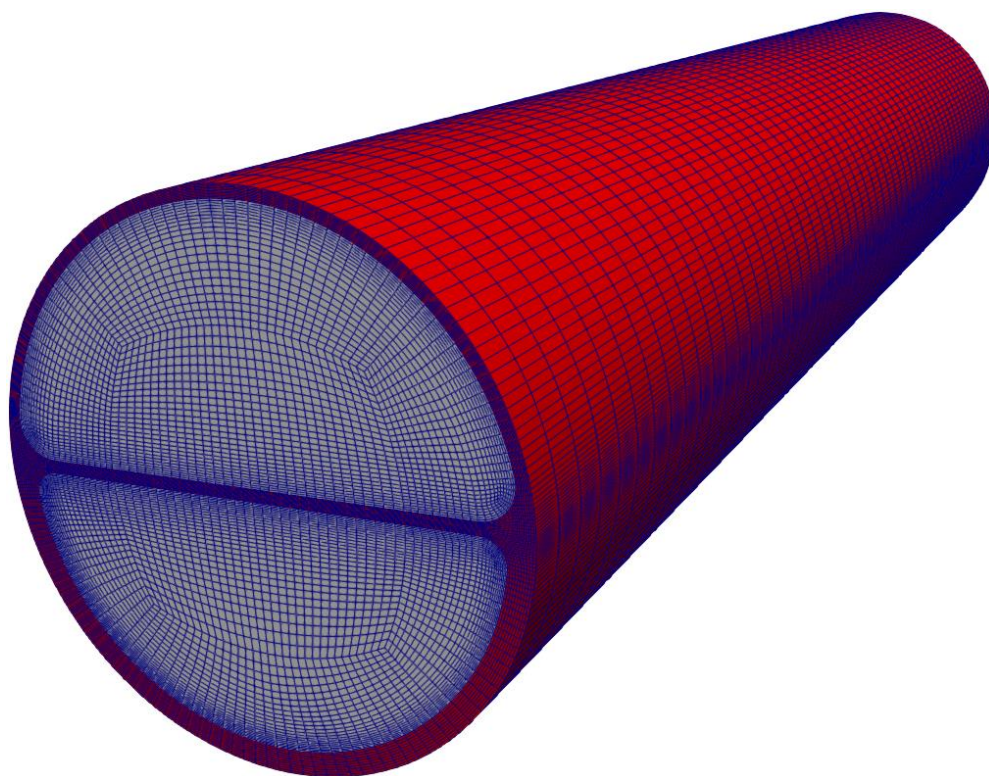
## 5.2. Računske mreže

Za rješavanje problema simetrične i asimetrične disekcije u ovome radu prostorna domena je diskretizirana metodom konačnih volumena kako u domeni fluida, tako i u domeni stijenke. Obje korištene mreže su strukturirane, a u cijeloj domeni korišteni su heksaedarski konačni volumeni sa 6 stranica. Na granicama domena fluida i domene stijenke konačni volumeni su geometrijski potpuno kompatibilni, tj. stranice konačnih volumena na granici sa strane fluida potpuno odgovaraju stranicama konačnih volumena na granici sa strane stijenke. Geometrijska kompatibilnost na granicama je napravljena radi implementacije direktnog mapiranja FSI rješavača kako bi se izbjegla interpolacija kod prijenosa vrijednosti na granicama sa jedne strane domene na drugu stranu domene. Analiza neovisnosti rezultata o mreži nije rađena u sklopu ovoga rada, nego je pretpostavljeno da su mreže adekvatne za ispitivanje i opis zadanog problema. Da bi se moglo dobro opisivati ponašanje strujanja blizu zida osigurana je dovoljno mala bezdimenzijska udaljenost od zida  $y^+$  čija vrijednost je u prosjeku manja od 0.5.

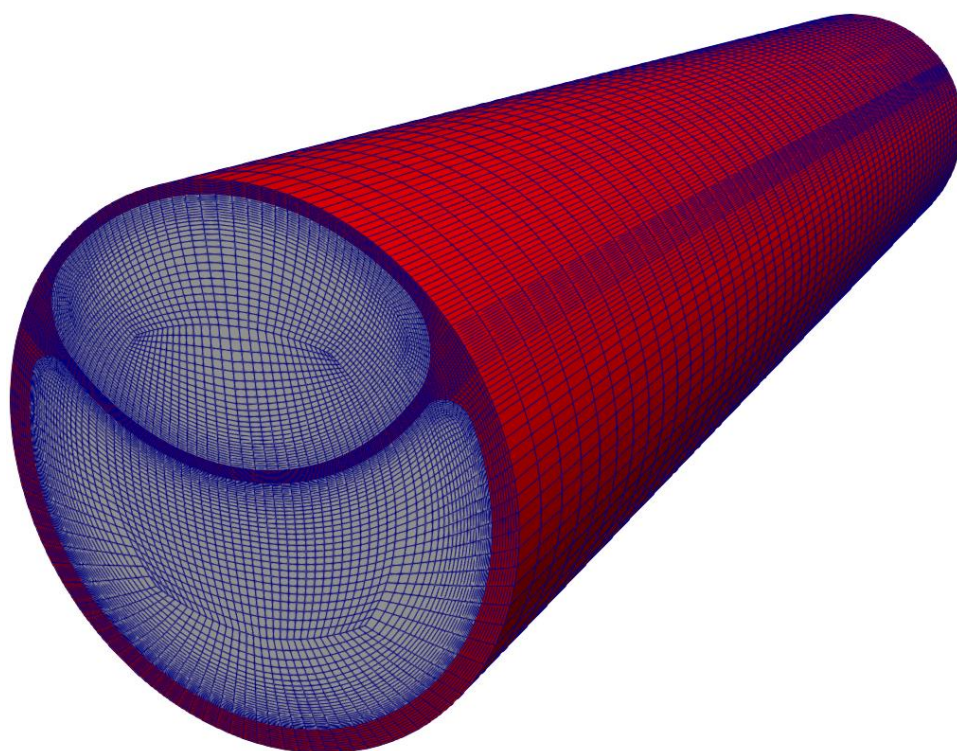
U tablici 3. prikazani su osnovni podaci za obje korištene mreže u FSI simulacijama.

**Tablica 3. Podaci o mrežama korištenima u FSI simulacijama**

	Simetrična disekcija			Asimetrična disekcija		
	Domena fluida		Domena stijenke	Domena fluida		Domena stijenke
	Stvarni lumen	Lažni lumen		Stvarni lumen	Lažni lumen	
Broj ćelija	160160	151800	159720	176000	154880	153120
Broj čvorova	179547	176448	194140	183288	161336	168392
Broj stranica	978437		512250	1006136		474464
Volumen [ $m^3$ ]	1.51E-05	1.67E-05	6.16E-06	1.9E-05	1.21E-05	6.91E-06
Broj graničnih površina	3	3	5	3	3	5
Granične površine	inlet_1 outlet_1 wall_1	inlet_0 outlet_0 wall_0	inlet_solid outlet_solid wall_in_0 wall_in_1 wall_out	inlet_1 outlet_1 wall_1	inlet_0 outlet_0 wall_0	inlet_solid outlet_solid wall_in_0 wall_in_1 wall_out



**Slika 9. Prikaz mreže simetrične disekcije**



**Slika 10. Prikaz mreže asimetrične disekcije**

### 5.3. Rubni uvjeti

Od iznimne važnosti za rješavanje problema međudjelovanja fluida i stijenke numeričkom simulacijom je određivanje i postavljanje adekvatnih rubnih i početnih uvjeta. Ukoliko se rubni i početni uvjeti ne postave ispravno nije moguće očekivati fizikalno smisljena rješenja. Zbog kompleksnosti i dugotrajnosti računalne simulacije međudjelovanja fluida i stijenke, u ovom radu duljina geometrije je kraća nego što je inače zadovoljavajuće u sličnim slučajevima simulacije strujanja fluida. Kako bi se nadomjestila potrebna duljina domene za razvijanje stabilnog strujanja, provedena je numerička simulacija strujanja krvi (kasnije u tekstu referirano kao CFD simulacija) kroz disekciju duljine  $40D$  uz pretpostavku krute stijenke za 10 srčanih ciklusa, tj. 10 sekundi (jedan srčani ciklus traje 1 sekundu), sa vremenskim korakom  $\Delta t = 0.005s$ , te su ti rezultati korišteni u FSI simulaciji kao rubni uvjeti.

Rubni uvjeti korišteni u FSI simulaciji su dobiveni iz CFD simulacije koristeći prethodno opisane postavke tako što su na ulazu disekcije kod FSI simulacije uzete vrijednosti tlaka, kinetičke energije turbulencije ( $k$ ) i specifične brzine disipacije kinetičke energije turbulencije ( $\omega$ ) na poprečnom presjeku udaljenom  $5D$  od izlaznog presjeka disekcije. Sve vrijednosti su izračunate kao osrednjene površinske vrijednosti.

Ulazne i izlazne vrijednosti fizikalnih veličina dobivenih CFD simulacijom zadane su u FSI simulaciji tablično u formatu vrijeme - vrijednost fizikalne veličine, gdje je vremenski korak  $\Delta t = 0.005s$ . Kako se radi o tranzijentnom cikličnom strujanju krvi, iste vrijednosti se ciklički ponavljaju svakih jednu sekundu, pa je pri zadavanju čitanja vrijednosti podataka zadano periodičko čitanje. Uslijed promjene smjera strujanja krvi u jednom dijelu srčanog ciklusa (dijastola), a što će biti prikazano na dijagramima protoka, ulazni rubni uvjet kinetičke energije turbulencije i specifične brzine disipacije kinetičke energije turbulencije mijenja svoj položaj sa ulaza na izlaz, te izlaz postaje ulaz. Na mjestu gdje je protok pozitivan ili nula  $k$  i  $\omega$  su zadani tablično kao uniformne vrijednosti po presjeku u ovisnosti o vremenu, a na mjestima gdje je protok negativan  $k$  i  $\omega$  su zadani preko von Neumannovog nultog gradijenta.

Brzina strujanja na zidu uz stijenkku definirana je Dirichletovim rubnim uvjetom koji uzima u obzir pomicanje mreže, te za svaki novi pomak mreže zadaje iste vrijednosti na novoj granici mreže. Na ulazima u domene fluida za brzine strujanja zadan je von Neumannov rubni uvjet koji propisuje nultu vrijednost gradijenta, a isti rubni uvjet je zadan i za tlak na zidovima uz stijenkku.

Za izračun turbulentne viskoznosti na zidovima uz stijenku korištena je `nutLowReWallFunction` koja zahtjeva male vrijednosti  $y^+$ , a što je osigurano računskom mrežom i objašnjeno u poglavlju 3.2.4.1. Kako se koristi  $k-\omega$  SST model turbulencije, specifična brzina disipacije kinetičke energije turbulencije ( $\omega$ ) je na zidu definirana sa `omegaWallFunction` koji omogućuje blending opciju mješanja u ovisnosti o udaljenosti od zida, a kinetička energija turbulencije ( $k$ ) je na zidu zadana kao fiksirana vrijednost približno jednaka nuli.

Na ulazu i izlazu domene stijenke propisani su nulti pomaci, a na zidovima uz domene fluida inicijalno je postavljen rubni uvjet nultog pomaka i tlaka.

U tablici 4. prikazani su korišteni rubni uvjeti unutar programskog paketa OpenFOAM za obje simulacije.

**Tablica 4. Rubni uvjeti FSI simulacije za obje geometrije**

Veličina	Patch	Tip	Vrijdnost
Tlak [Pa]	internalField	uniform	12985
	inlets, outlets	fixedMean	tablično (CFD)
	walls	zeroGradient	
Brzina strujajna [m/s]	internalField	uniform	(0 0 1E-17)
	inlets, outlets	zeroGradient	
	walls	newMovingWallVelocity	uniform (0 0 0)
Kinetička energija turbulencije [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	internalField	uniform	1.50E-15
	inlets, outlets	freestream	tablično (CFD)
	walls	fixedValue	uniform 1E-17
Turbulentna viskoznost [m <sup>2</sup> /s]	internalField	uniform	0
	inlets, outlets	calculated	0
	walls	nutLowReWallFunction	0
Specifična brzina disipacije kinetičke ene. turb. [s <sup>-1</sup> ]	internalField	uniform	2.00E-03
	inlets, outlets	freestream	tablično (CFD)
	walls	omegaWallFunction	2.00E-03
Brzina pomaka čvorova [m/s]	inlets, outlets, walls	fixedValue	uniform (0 0 0)
Pomaci [m]	internalField	uniform	(0 0 0)
	inlets, outlets	fixedDisplacement	uniform (0 0 0)
	walls	solidTraction	traction (0 0 0) pressure 0



Krv se razmatra u ovom radu kao nestlačivi Newtonski fluid uz pretpostavku izoternog, turbulentnog, tranzijentnog strujanja. Gustoća krvi je  $1060 \text{ kg/m}^3$ , a dinamička viskoznost je  $3.5\text{E-}3 \text{ Pas}$  [16, 17, 18]. Omjer protoka lažnog i stvarnog lumena je 30% : 70% [19], a intenzitet turbulencije na ulazu je 1.5% [18, 20].

Stijenka aorte je u ovome radu definirana unutar računalnog modela kao blago stlačiva sa Poissonovim koeficijentom od 0.49 i Youngovim modulom elastičnosti od  $9 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$  [21]. Gustoća stijenke je uzeta iskustveno  $1060 \text{ kg/m}^3$ . Za model stijenke odabran je stlačivi Neo-Hookeov model koji je u OpenFOAM-u pod nazivom neoHookeanElastic.

U tablici 5. su pokazane zadane vrijednosti tolerancija rješavača za obje domene, te za FSI rješavač.

**Tablica 5. Zadane vrijednosti tolerancija rješavača**

FSI	Solid	Fluid			
		Tlak	Ux, Uy, Uz	k	omega
1.00E-03	1.00E-03	1.00E-06	1.00E-07	1.00E-07	1.00E-07

## 6. REZULTATI

U narednim poglavljima obrađeni su rezultati dvije FSI simulacije disekcije aorte za dvije različite idealizirane geometrije. Rezultati provjere FSI simulacija pomoću metode konačnih elemenata napravljeni su u komercijalnom FEM programskom paketu. Obrada rezultata je podijeljena prema geometriji u dva glavna poglavlja, a to su simetrična disekcija i asimetrična disekcija. Rezultati su prikazani dijagramima, tablično i vizualizacijama. U prvim dijelovima su pokazane distribucije brzina strujanja i obrađeni rezultati koji ukazuju na trendove ponašanja promatranih fizikalnih veličina, a zatim rezultati koji prikazuju raspodjele fizikalnih veličina u geometriji za neke ključne vremenske trenutke od interesa, kao što su trenuci maksimalnih i minimalnih vrijednosti tlaka i protoka u ciklusu.

U domeni fluida dominantno su praćene vrijednosti brzine strujanja, tlaka i kinetičke energije turbulencije, a u domeni stijenke pomaci i gradijenti pomaka.

### 6.1. Simetrična disekcija

U ovom poglavlju obraditi će se rezultati dobiveni FSI numeričkom simulacijom za geometriju simetrične disekcije. Rezultati će radi lakšega praćenja biti podjeljeni u dva dijela, a to su domena fluida i domena stijenke.

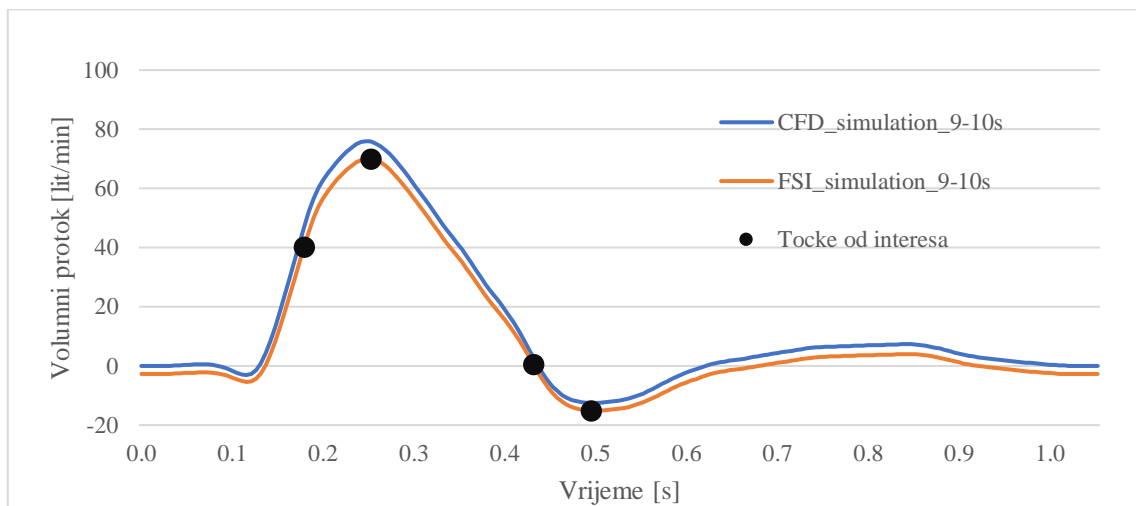
#### 6.1.1. Domena fluida

Nakon provedene simulacije prvo su analizirani dobiveni volumni protoci u oba lumena kao bitan podatak o točnosti postavljenih parametara simulacije. Kako je opisano u postavkama računalnog modela, na ulazima i izlazima stvarnog i lažnog lumena zadani su tlakovi kao osrednjene vrijednosti na relevantnim poprečnim presjecima, a brzine su puštene da se slobodno razvijaju unutar domene. Sukladno tome, volumni protok je zanimljiva veličina za usporedbu FSI i CFD simulacije iz koje su zadani rubni uvjeti i koja služi kao referentna točka.

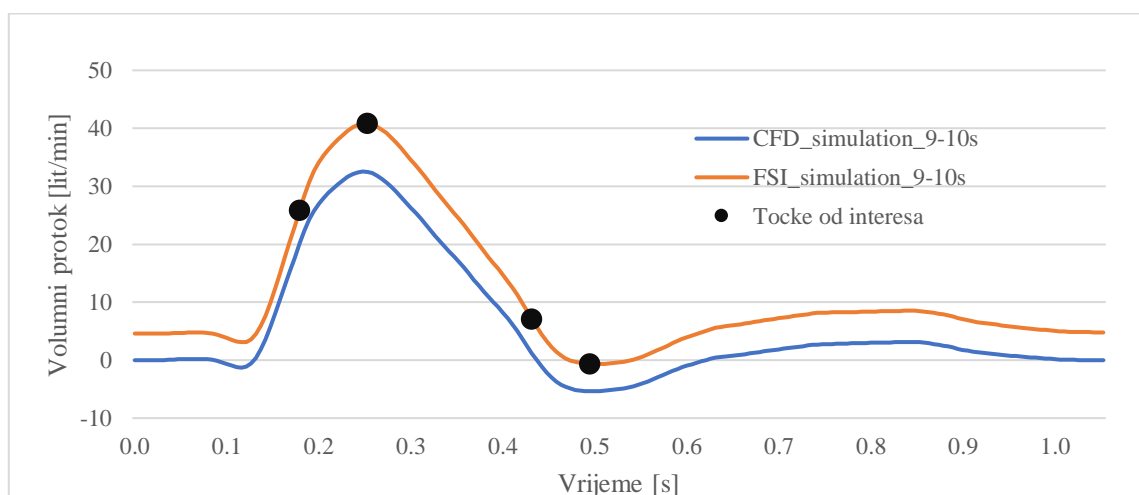
Na slikama 11. i 12. dijagramima su prikazane usporedbe volumnih protoka krvi kod CFD simulacije opisane u poglavlju 5.3. i FSI simulacije simetrične disekcije. Protoci su mjereni na ulaznim i izlaznim presjecima domena, a uzeti su protoci iz zadnjeg ciklusa od devete do desete sekunde simulacije. Iz dijagrama je vidljivo da su protoci FSI simulacije bliži onima iz CFD simulacije u stvarnom lumenu, a veća razlika je u lažnom lumenu. Mogući razlog razlike u protocima dolazi zbog razlike u geometriji kod CFD i FSI simulacija, tj. CFD simulacija je

rađena uz pretpostavku krute (nepomične) stijenke, a FSI simulacija uzima u obzir pomake stijenke što dovodi do promjene geometrije domene fluida. Uz razlike u geometrijama mogući razlog odsupanja vrijednosti je nedovoljno trajanje vremena simulacije, te nemogućnost da se vrijednosti u potpunosti ustabile.

Na slikama 11. i 12. crnim točkama su prikazani karakteristični vremenski trenuci u kojima će se pokazivati raspodjele fizikalnih veličina po poprečnim i uzdužnim presjecima. Točke s lijeva na desno su: maksimalni tlakovi u lumenima ( $t=0.17s$ ), maksimalni protoci u lumenima ( $t=0.24$ ), minimalni tlakovi u lumenima ( $t=0.41s$ ) i minimalni protoci u lumenima ( $t=0.47s$ ).

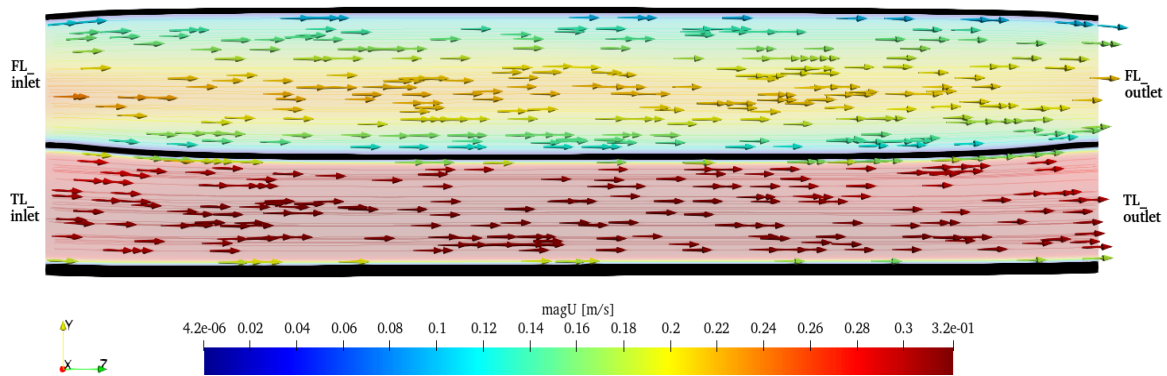


**Slika 11. Usporedba protoka dobivenih CFD i FSI simulacijama u stvarnom lumeni sa naznačenim točkama od interesa**

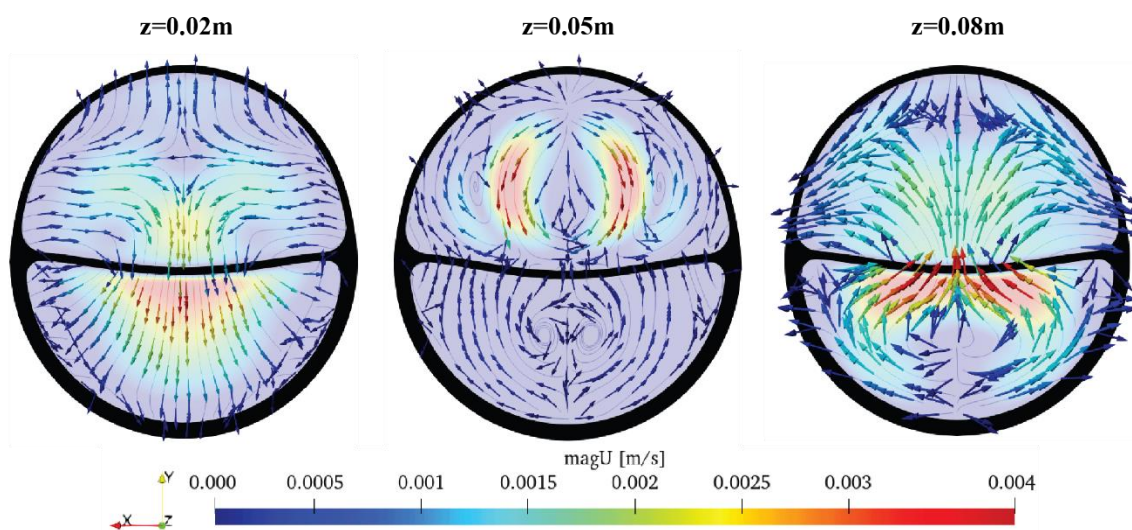


**Slika 12. Usporedba protoka dobivenih CFD i FSI simulacijama u lažnom lumeni sa naznačenim točkama od interesa**

Na slikama 13. i 14. prikazane su magnituda brzina strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije i tri poprečna presjeka na udaljenostima 0.02m, 0.05m i 0.08m od ulaznog presjeka u trenutku maksimalnih tlakova za  $t=9.17s$ . Na slici 14. je vidljivo da distribucije brzina na poprečnim presjecima nisu jednake na različitim promatranim udaljenostima i da dolazi do vrtloženja i strujanja u različitim smjerovima. Smjerovi strujanja po presjecima se u potpunosti razlikuju, te se može zaključiti da se nije razvilo uniformno strujanje duž aorte.



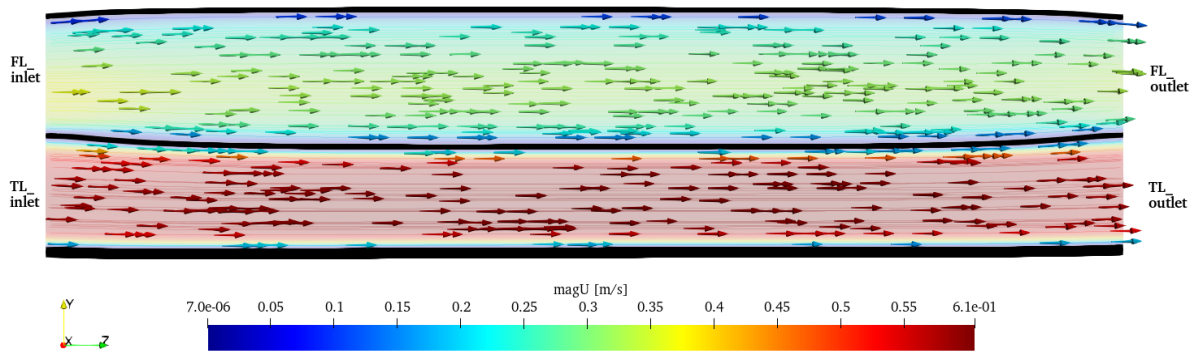
**Slika 13. Prikaz brzine strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije u  $t=9.17s$**



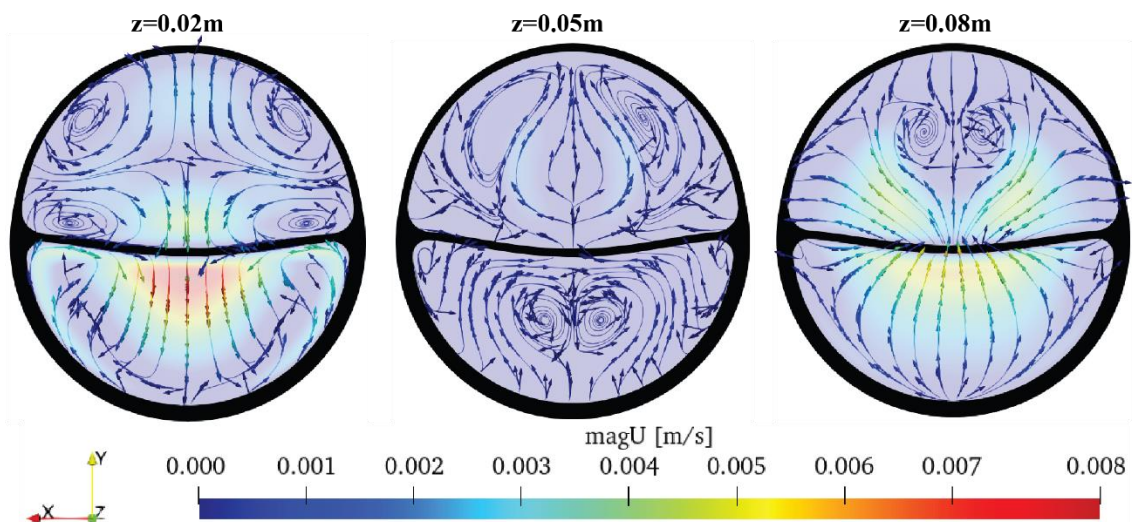
**Slika 14. Prikaz brzine strujanja po poprečnim presjecima u  $t=9.17s$**

Na slikama 15. i 16. su prikazane magnituda brzina strujanja na istim presjecima kao na slikama 13. i 14. u trenutku maksimalnih volumnih protoka za  $t=9.24s$ . Na slici 15. je vidljivo da su brzine strujanja u  $t=9.24s$  gotovo duplo veće nego u  $t=9.17s$ , a na slici 16. se vidi da na poprečnom presjeku na  $z=0.05m$  dolazi do minimalnog strujanja u poprečnom smjeru, tj. do minimalnog vrtloženja, za razliku od prethodnog promatranog trenutka u kojemu se na istom

presjeku pojavljuje značajnije vrtloženje. Do manjeg strujanja u x-y smjeru dolazi zbog dominantne brzine strujanja u z smjeru duž aorte.



Slika 15. Prikaz brzine strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije u  $t=9.24s$

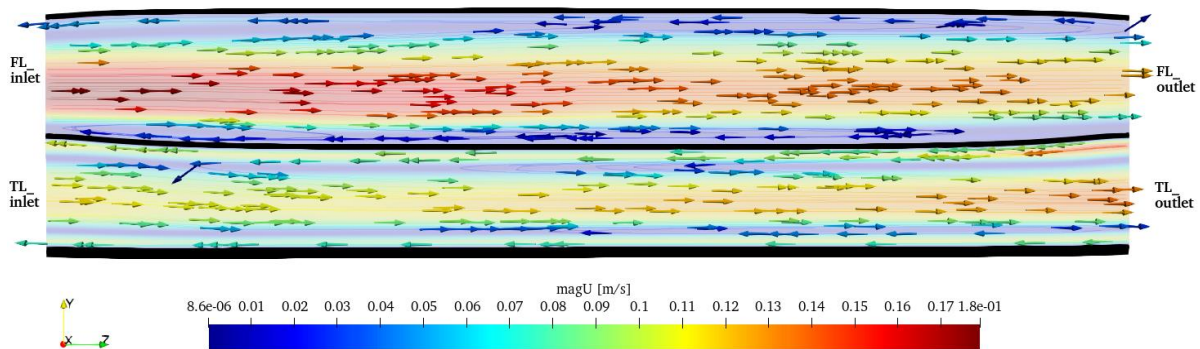


Slika 16. Prikaz brzine strujanja po poprečnim presjecima u  $t=9.24s$

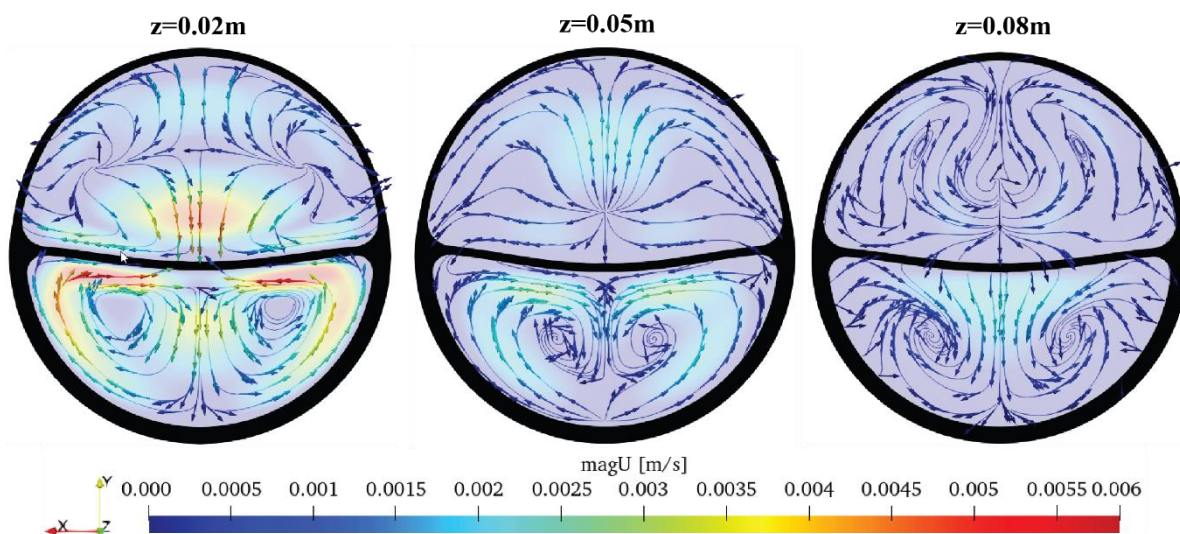
Na slikama 17. i 18. su prikazane magnitude brzina strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije i tri poprečna presjeka na promatranim udaljenostima od ulaznog presjeka u trenutku minimalnih tlakova za  $t=9.41s$ . Na slici 17. vidi se promjena smjera strujanja u graničnim slojevima do stijenke u oba lumena koje se događa uslijed usporavanja glavnog strujanja i pada protoka u lažnom lumenu (Stokesov rubni sloj), te veća brzina strujanja u lažnom lumenu naspram stvarnog lumena. Na slici 18. je vidljivo da distribucije brzina nisu iste na različitim udaljenostima aorte kao i kod prethodna dva trenutka, te da dolazi do značajnijeg vrtloženja na poprečnom presjeku na  $z=0.02m$  zbog najvećih razlika između brzine strujanja u graničnom



sloju i u slobodnoj struji podalje od stijenke. U stvarnom lumenu je volumni protok u  $t=9.41s$  gotovo jednak nuli, što je vidljivo i na slici 11.



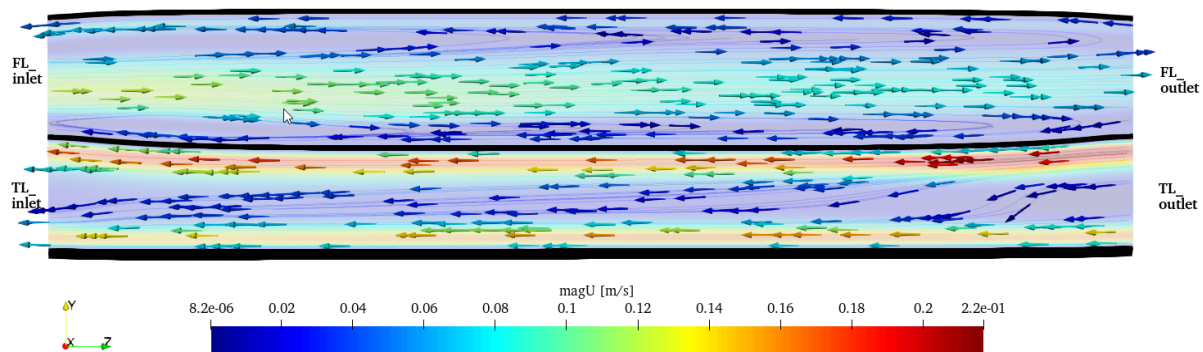
**Slika 17.** Prikaz brzine strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije u  $t=9.41s$



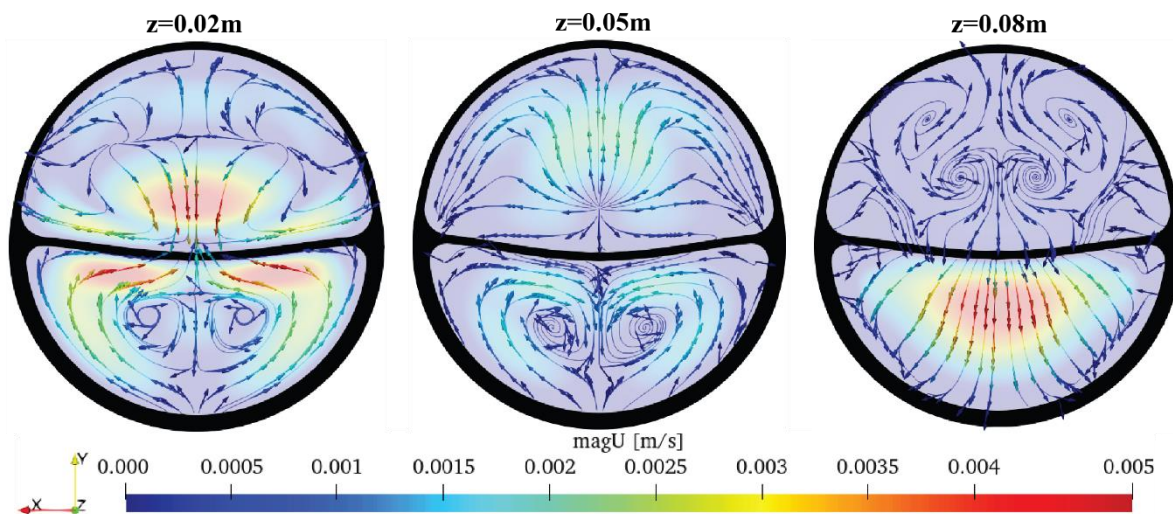
**Slika 18.** Prikaz brzine strujanja po poprečnim presjecima u  $t=9.41s$

Na slikama 19. i 20. su prikazane magnitude brzina strujanja na istim presjecima kao i u prethodna tri slučaja za trenutak minimalnog volumnog protoka u  $t=9.47s$ . Za razliku od slike 17., na slici 19. se vidi dominantno strujanje u suprotnom smjeru u stvarnom lumenu, te pomješano strujanje u oba smjera u lažnom lumenu, te da su brzine strujanja u stvarnom lumenu veće uz stijenku nego podalje od stijenke, što nije bio slučaj u ostalim vremenskim trenucima, a što se događa zbog okretanja strujanja u suprotnom smjeru. Na slici 20. je vidljivo da distribucije brzina nisu jednake na različitim udaljenostima kao i kod ranijih slučajeva, te na sva tri poprečna presjeka dolazi do značajnih vrtloženja, uzrokovanih promjenom smjera

strujanja. U oba lumena je u  $t=9.47s$  volumni protok negativan kao što se i vidi na dijagramima na slikama 11. i 12.



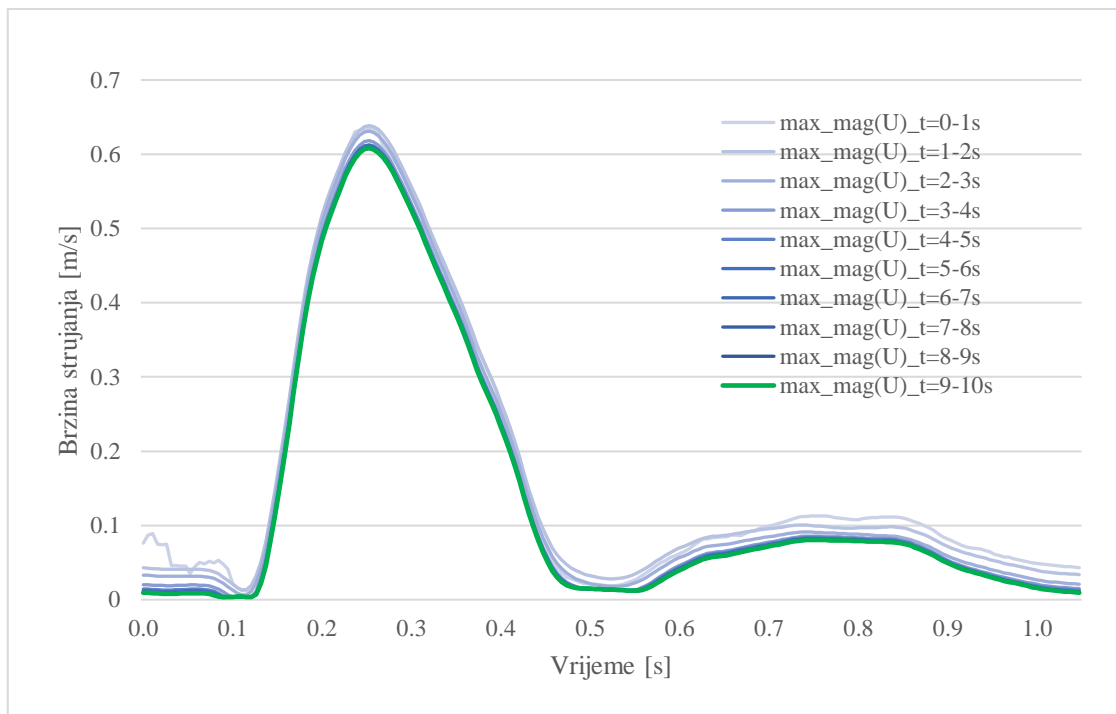
**Slika 19.** Prikaz brzine strujanja na uzdužnom presjeku po sredini geometrije u  $t=9.47s$



**Slika 20.** Prikaz brzine strujanja po poprečnim presjecima u  $t=9.47s$

Nakon prikazanih dijagrama volumnih protoka i slika uzdužnih i poprečnih presjeka s distribucijama brzina strujanja slijedi ispitivanje konvergencije fizioloških podataka koji su se pratili tijekom simulacije. Maksimalne vrijednosti brzine strujanja, kinetičke energije turbulencije i posmičnog naprezanja prikazane su preklapljenim vrijednostima unutar jedne sekunde za sve cikluse radi boljeg prikaza brzine konvergencije. Dijagrami tlakova nisu prikazani za maksimalne vrijednosti jer se one pojavljuju upravo na ulaznom presjeku gdje su tlakovi zadani kao rubni uvjet simulacije. Prvo će se prikazivati kretanje maksimalnih vrijednosti brzine strujanja, kinetičke energije turbulencije i posmičnih naprezanja, a zatim tlakovi u točkama sa najvećim oscilacijama.

Na dijagramu na slici 21. prikazani su odnosi maksimalnih brzina strujanja u stvarnom lumenu tako da su preklapljene magnitude brzina strujanja iz svih deset ciklusa simulacije unutar jedne sekunde kako bi se mogla promatrati brzina kretanja vrijednosti u odnosu na zadnji ciklus. Vidljivo je da se vrijednosti brzina strujanja u stvarnom lumenu periodički relativno brzo približavaju zadnjem ciklusu, i to nakon svega nekoliko ciklusa simulacije.

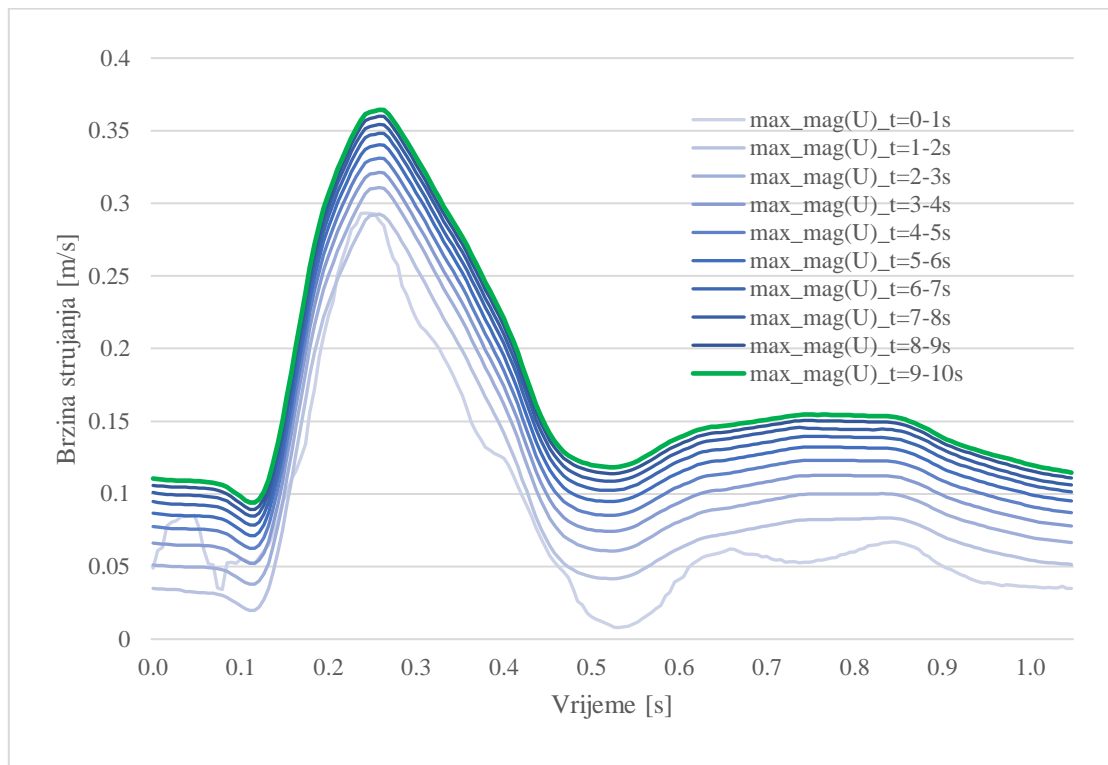


**Slika 21. Odnosi maksimalnih brzina strujanja u stvarnom lumenu po ciklusima**

Slika 22. prikazuje odnose magnituda maksimalnih brzina strujanja u lažnom lumenu, te je vidljivo da se vrijednosti magnituda brzina strujanja u lažnom lumenu sporije kreću prema zadnjem ciklusu nego u stvarnom lumenu, te da imaju tendenciju danjeg rasta i nakon završetka simulacije.

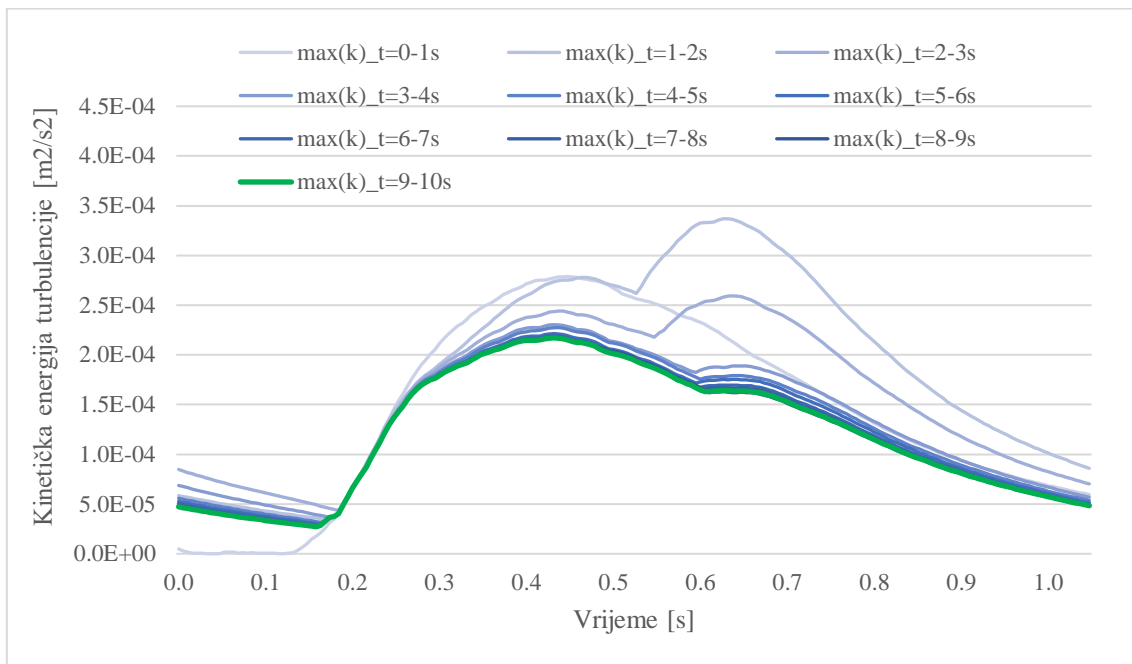
Na oba dijagrama, na slikama 21. i 22., zadnji ciklus je prikazan zelenom bojom radi lakšeg praćenja, a isti način prikaza korišten je i kod prikaza maksimalnih vrijednosti kinetičke energije turbulencije i posmičnih naprezanja.



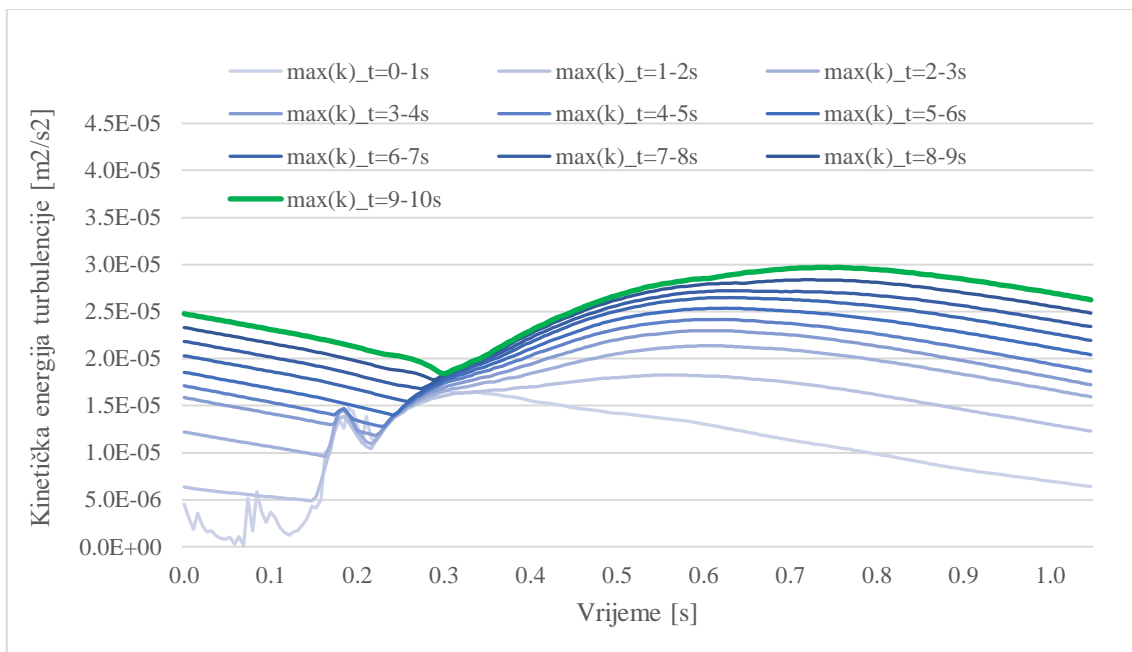


**Slika 22. Odnosi maksimalnih brzina strujanja u lažnom lumenu po ciklusima**

Na dijagramima sa slika 23. i 24. prikazani su odnosi maksimalnih vrijednosti kinetičke energije turbulencije u stvarnom i lažnom lumenu po ciklusima. Iz dijagrama je vidljivo da su se vrijednosti kinetičke energije turbulencije, slično kao i brzine strujanja periodički brzo primakle vrijednostima iz zadnjeg ciklusa u stvarnom lumenu, te nemaju tendenciju danje promjene nakon završetka simulacije. Za razliku od stvarnog lumena, u lažnom lumenu se maksimalne vrijednosti kinetičke energije turbulencije sporije primiču vrijednostima iz zadnjeg ciklusa, te imaju tendenciju danjeg rasta i nakon završetka simulacije.

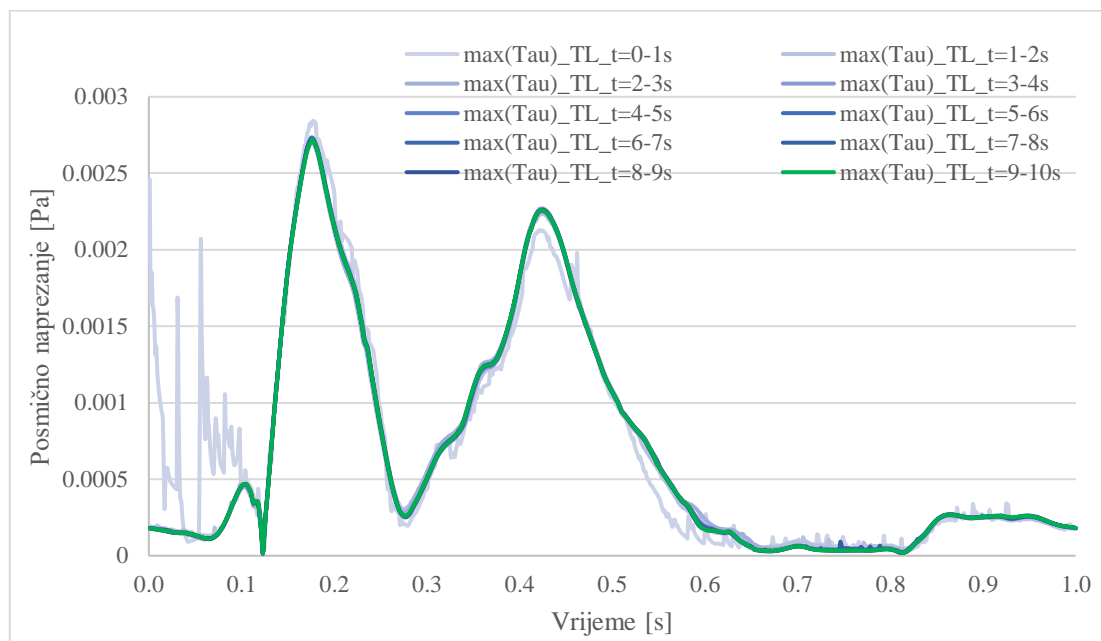


Slika 23. Odnosi maksimalnih kinetičkih energija turbulencije u stvarnom lumenu po ciklusima

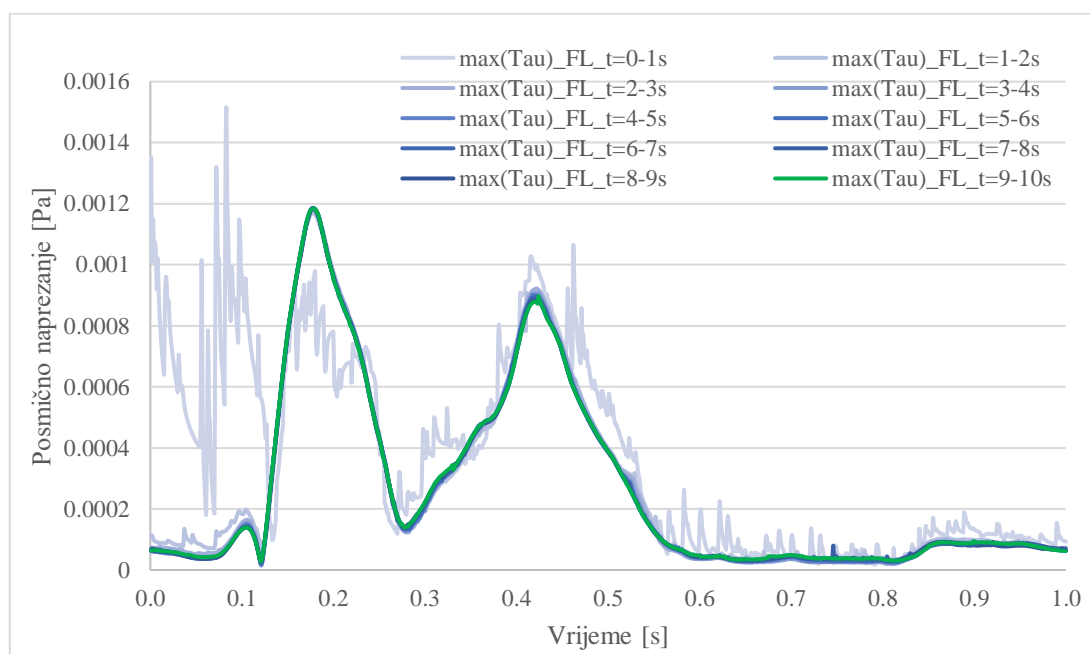


Slika 24. Odnosi maksimalnih kinetičkih energija turbulencije u lažnom lumenu po ciklusima

Na slikama 25. i 26. dijagramima su prikazane vrijednosti maksimalnih posmičnih naprezanja na stijenkama lumena po ciklusima, te je vidljivo da su se vrijednosti već nakon drugog ciklusa primaknule vrijednostima iz zadnjeg ciklusa u oba lumena. Može se zaključiti da se nakon par ciklusa simulacije maksimalne vrijednosti posmičnih naprezanja periodički ponavljaju uz zanemariva odstupanja, te da vrijednosti nemaju tendenciju daljnjeg rasta ili pada nakon završetka simulacije.



**Slika 25. Odnosi maksimalnih posmičnih naprezanja u stvarnom lumenu po ciklusima**

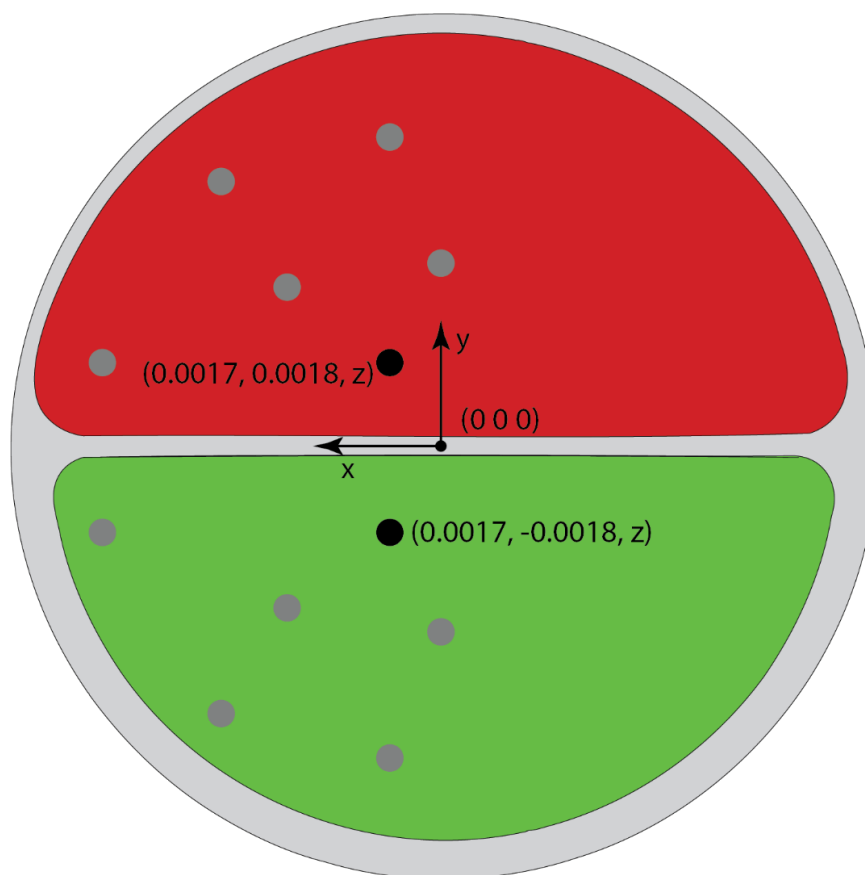


**Slika 26. Odnosi maksimalnih posmičnih naprezanja u stvarnom lumenu po ciklusima**

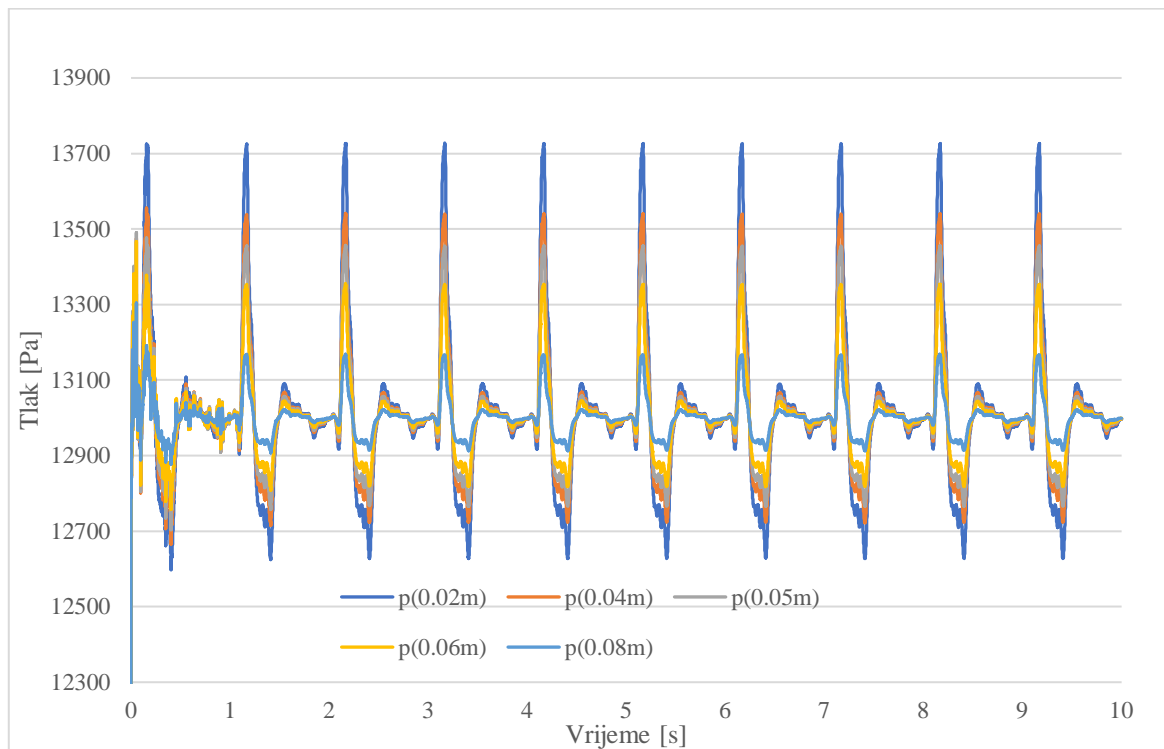
Kako je tlak u simulaciji zadan kao rubni uvjet na ulaznom i izlaznom presjeku kao osrednjena površinska vrijednost, tako se maksimalne i minimalne vrijednosti tlakova pojavljuju upravo na tim presjecima u oba lumena, pa se stoga te vrijednosti nisu pratile dijagramima. Umjesto maksimalnih vrijednosti, pratili su se tlakovi u točkama na presjeku sa najvećim oscilacijama.

Na dijagramima sa slika 28. i 29. prikazane su vrijednosti tlakova u promatranim točkama na poprečnim presjecima duž aorte u kojima dolazi do najvećih oscilacija vrijednosti od promatranih točaka na pola duljine geometrije u  $z=0.05\text{m}$ . Točke u kojima su uzete vrijednosti za sve dijagrame pokazane su na slici 27. crnom bojom. Sivom bojom su prikazane točke u kojima dolazi do manjih oscilacija izmjerenih vrijednosti tlakova u  $z=0.05\text{m}$ . Crveno je lažni, a zeleno stvarni lumen.

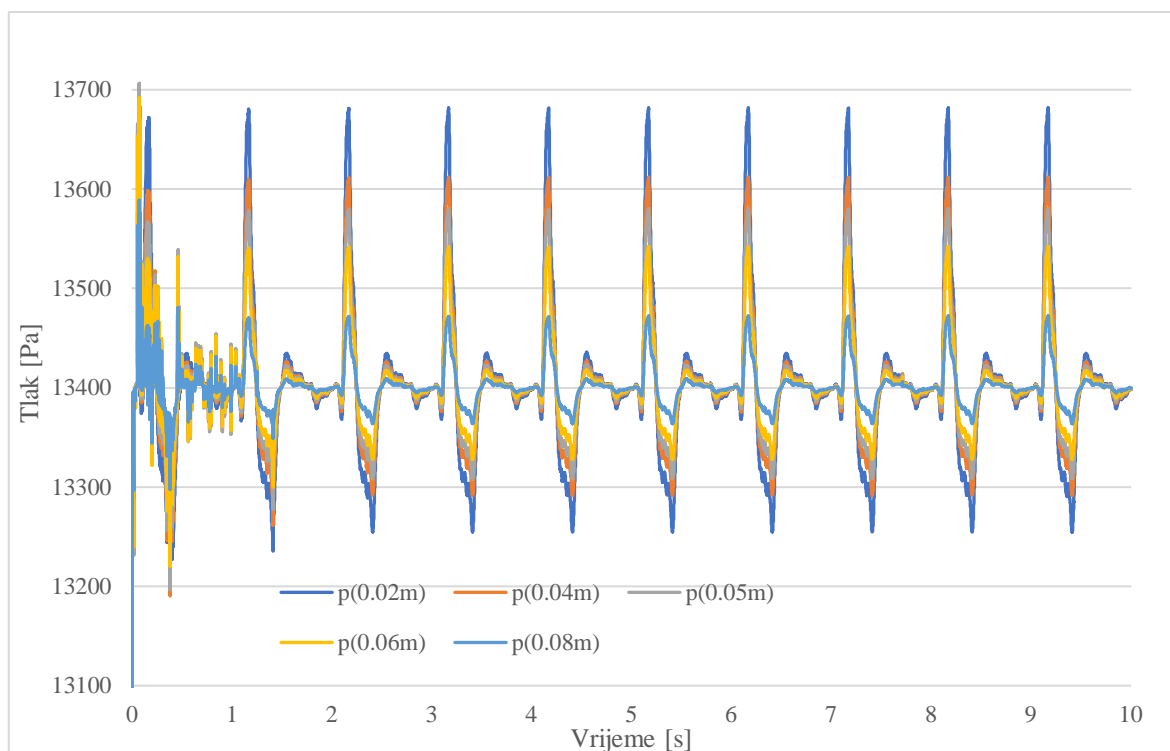
U prikazanim točkama sa slike 27. također su praćene i vrijednosti brzina strujanja i kinetičke energije turbulencije, ali te vrijednosti nisu prikazane dijagramima jer pokazuju iste tendencije kretanja kao na već prikazanim vrijednostima dijagrama maksimalnih vrijednosti.



**Slika 27. Točke na poprečnom presjeku sa najvećim oscilacijama vrijednosti tlakova**



**Slika 28. Tlakovi na presjecima u točkama s najvećim oscilacijama u stvarnom lumenu**

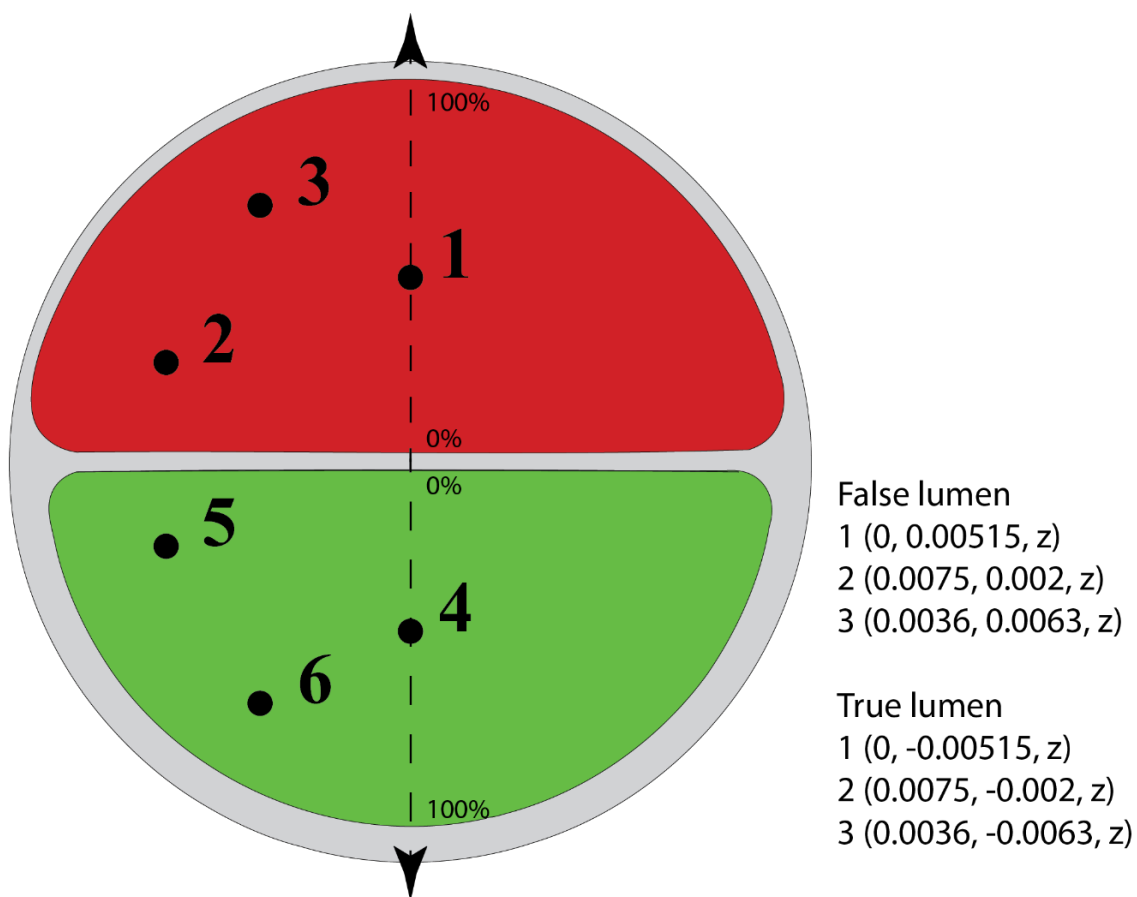


**Slika 29. Tlakovi na presjecima u točkama s najvećim oscilacijama u lažnom lumenu**

Iz prikazanih dijagrama sa slika 28. i 29. vidi se da se vrijednosti tlakova u promatranim točkama relativno brzo stabiliziraju nakon svega dva ciklusa, što je za očekivati jer su tlakovi zadani kao rubni uvjeti simulacije. Značajne oscilacije događaju se samo u prvom ciklusu.

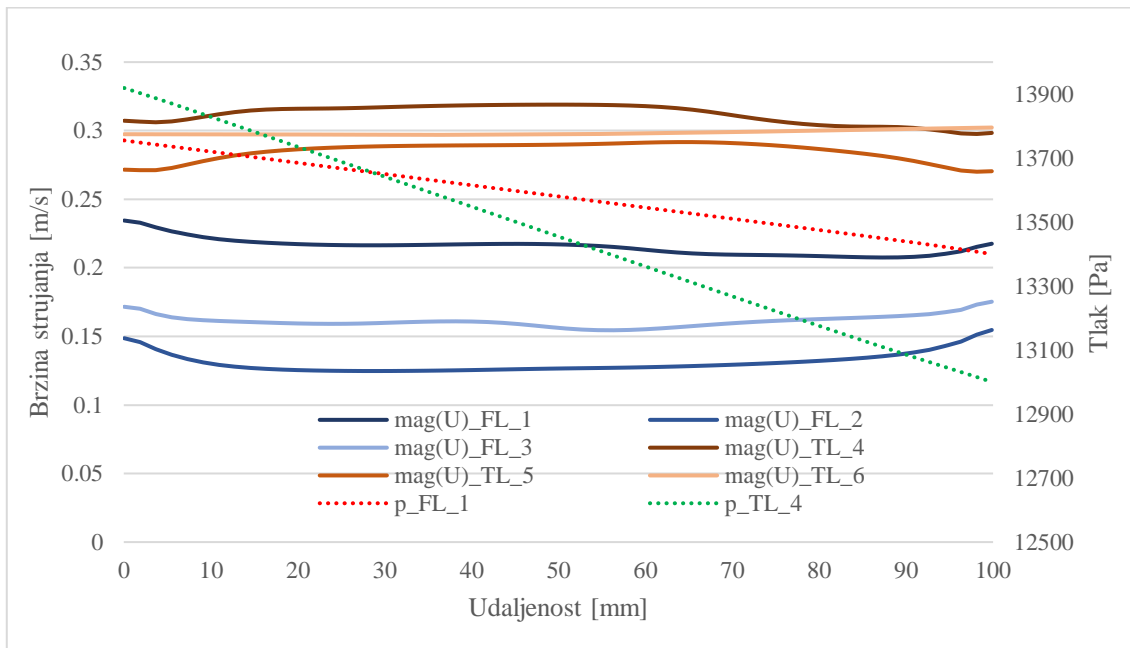
Na sljedećim slikama prikazane su raspodjele vrijednosti promatranih veličina duž aorte i na poprečnim presjecima kako bi se mogao donijeti zaključak o valjanosti duljine proračunske domene za promatrani problem.

Na slici 30. prikazan je poprečni presjek sa ucrtanim točkama numeriranim od jedan do šest u kojima će se mjeriti vrijednosti veličina duž aorte, te dvije crtkane linije u kojima će se pratiti vrijednosti veličina na poprečnim presjecima od središnje mrebrane prema van, kako je naznačeno strelicama. Točke 1 i 4 se nalaze u središtima lumena, a točke 2, 3, 5 i 6 su uzete kao podjednako razmaknute jedne od drugih kako bi se vrijednosti u njima mogle uspoređivati s vrijednostima u središnjim točkama. Kako je računski mreža fluida pomična u ovisnosti o vremenu, tako su radijalni grafovi normalizirani, pa se udaljenost mjeri u postocima udaljenosti od 0 do 100 posto.

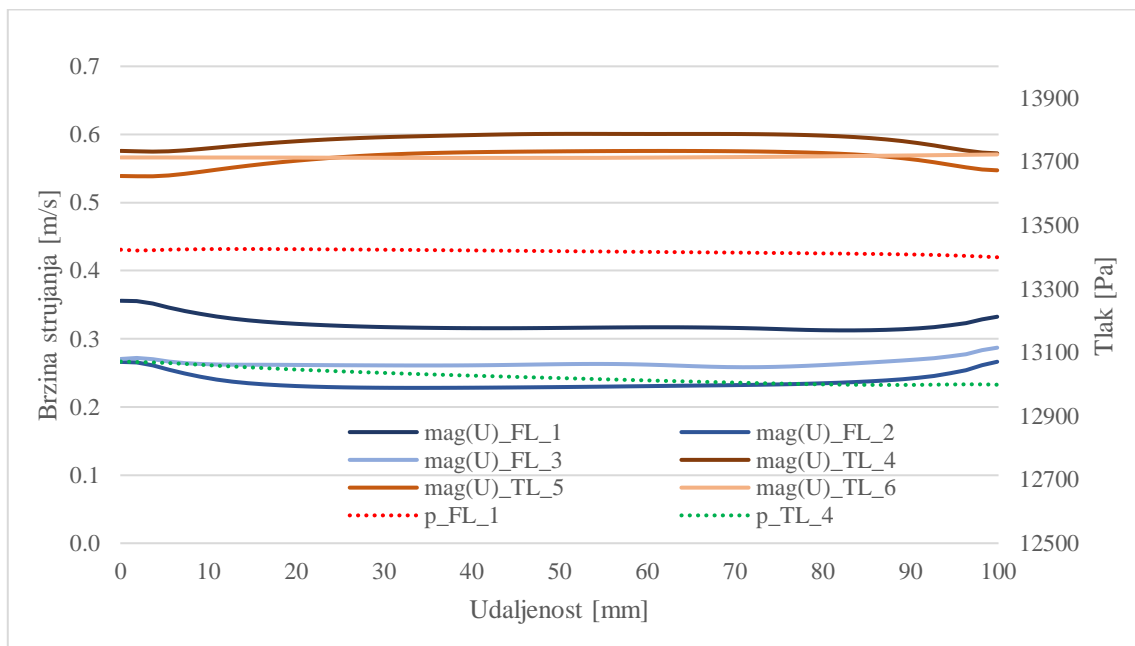


Slika 30. Točke dijagrama duž aorte i pravci radijalnih grafova po presjecima

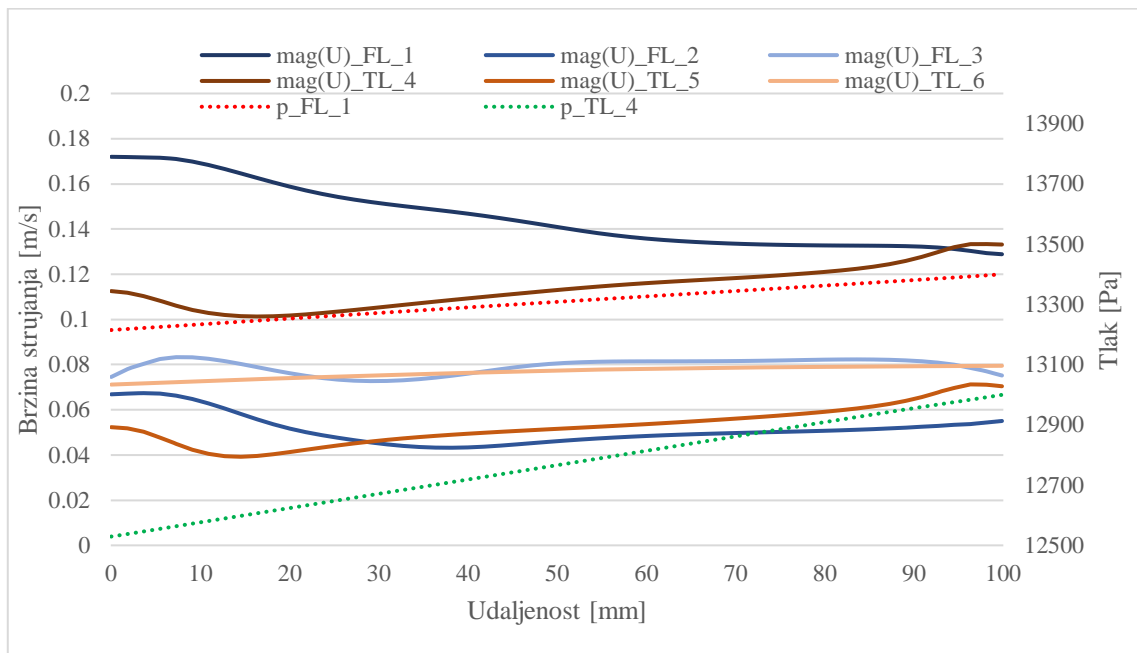
Prvi set dijagrama na slikama od 31. do 34. odnositi će se na tlakove u točkama 1 i 4 koje se nalaze na sredinama lumena i magnitudo brzina strujanja u lumenima u svih šest točaka duž cijele aorte u četiri vremenska trenutka od interesa.



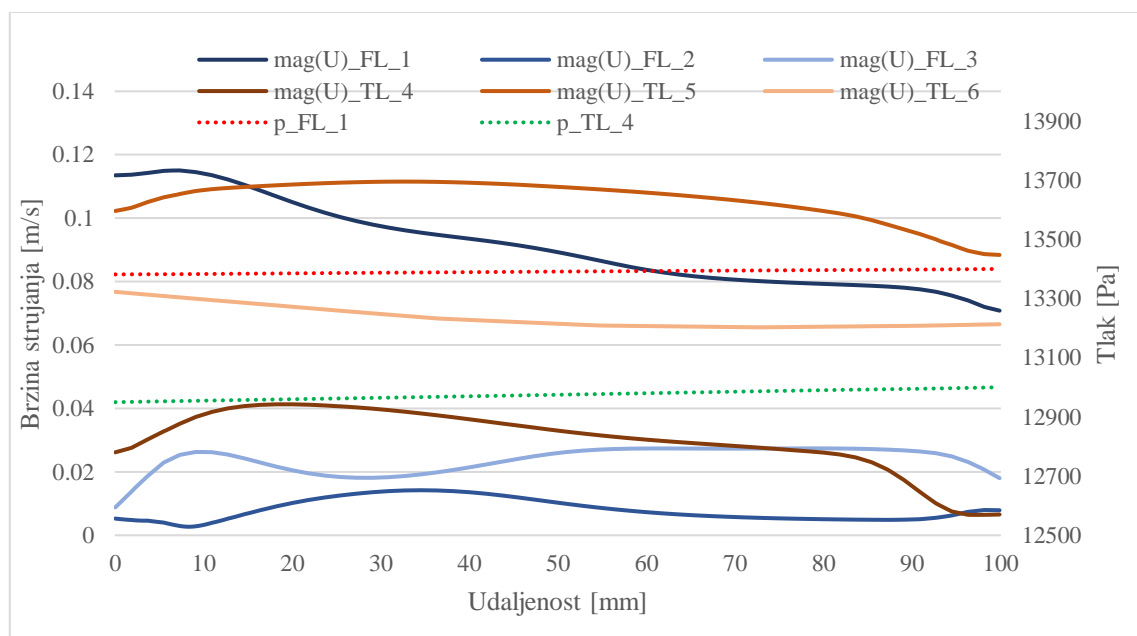
Slika 31. Brzina strujanja i tlak duž aorte u  $t=9.17s$



Slika 32. Brzina strujanja i tlak duž aorte u  $t=9.24s$



Slika 33. Brzina strujanja i tlak duž aorte u t=9.41s



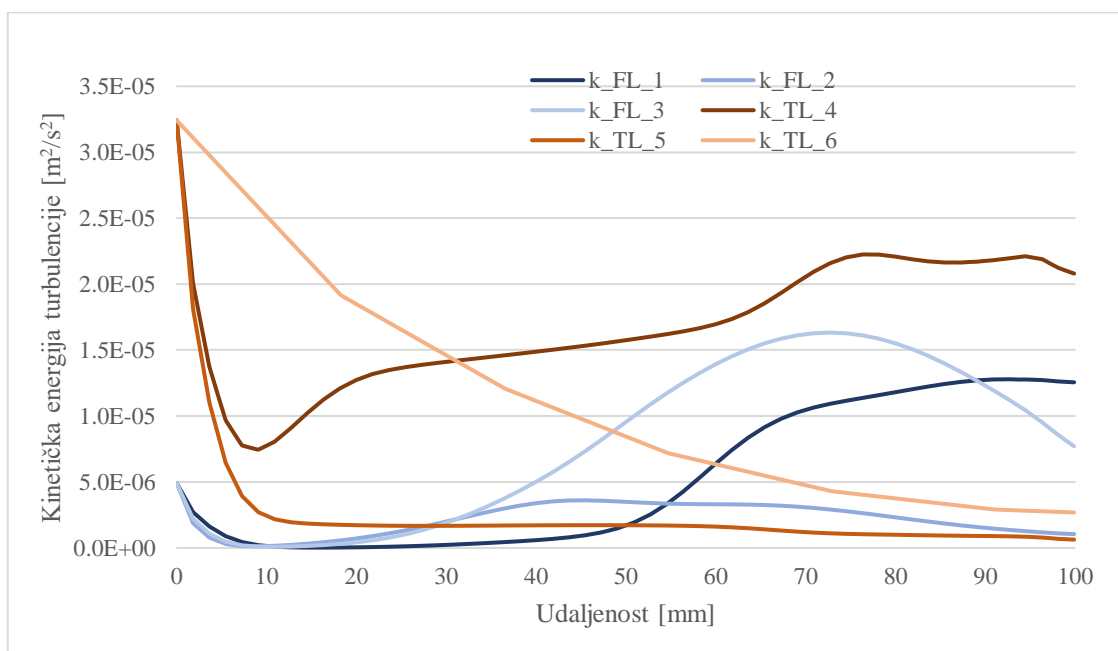
Slika 34. Brzina strujanja i tlak duž aorte u t=9.47s

Iz dijagrama sa slika od 31. do 34. vide se raspodjele vrijednosti magnituda brzina strujanja duž cijele domene aorte, te padovi tlaka u promatranim točkama 1 i 4 duž aorte. Najstabilnije distribucije brzina duž aorte su u trenutku t=9.24s kada dolazi do najvećeg volumnog protoka i

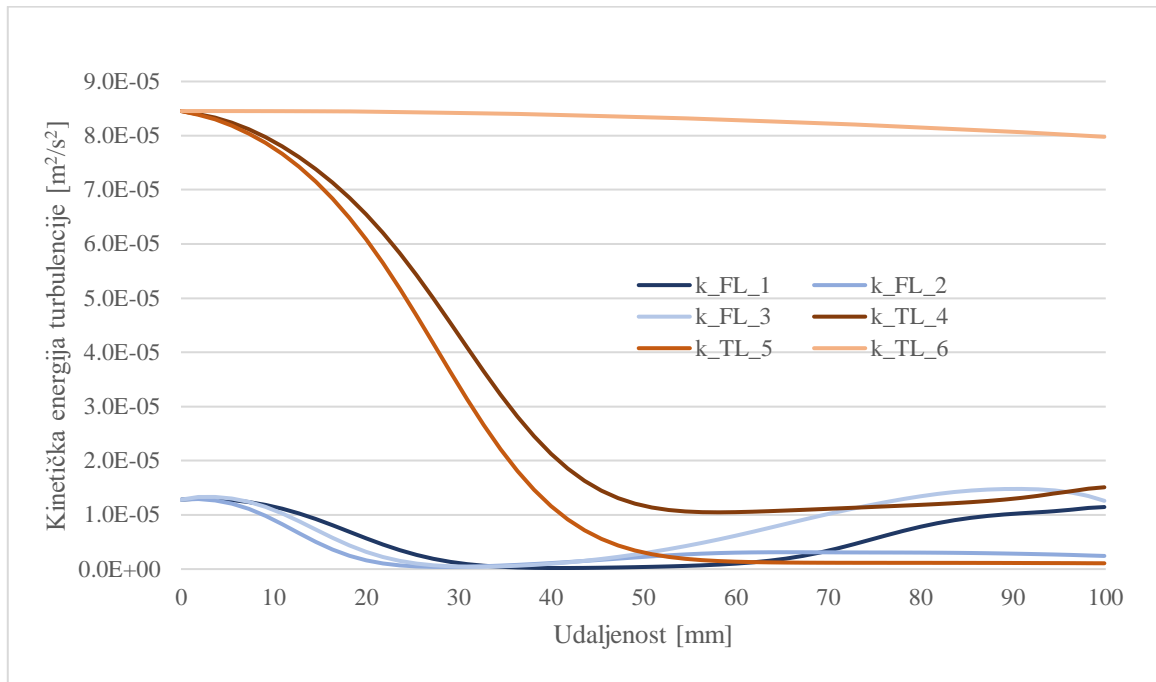


najvećih brzina strujanja krvi, a promjena vrijednosti tlaka kroz domenu je zanemariva. Sa dijagrama je vidljivo da su najveće razlike u distribucijama magnituda brzina strujanja u trenucima malih protoka, što je očekivano jer dolazi do manje dominantnog strujanja po z-osi duž aorte, te do okretanja strujanja. Na dijagramu sa slike 34. vidljivo je da dolazi do veće brzine strujanja u točki 5, koja je bliže stijenci, nego u točki 4 koja je u središtu stvarnog lumena zbog formiranja Stokesovog rubnog sloja uzrokovanog okretanjem strujanja.

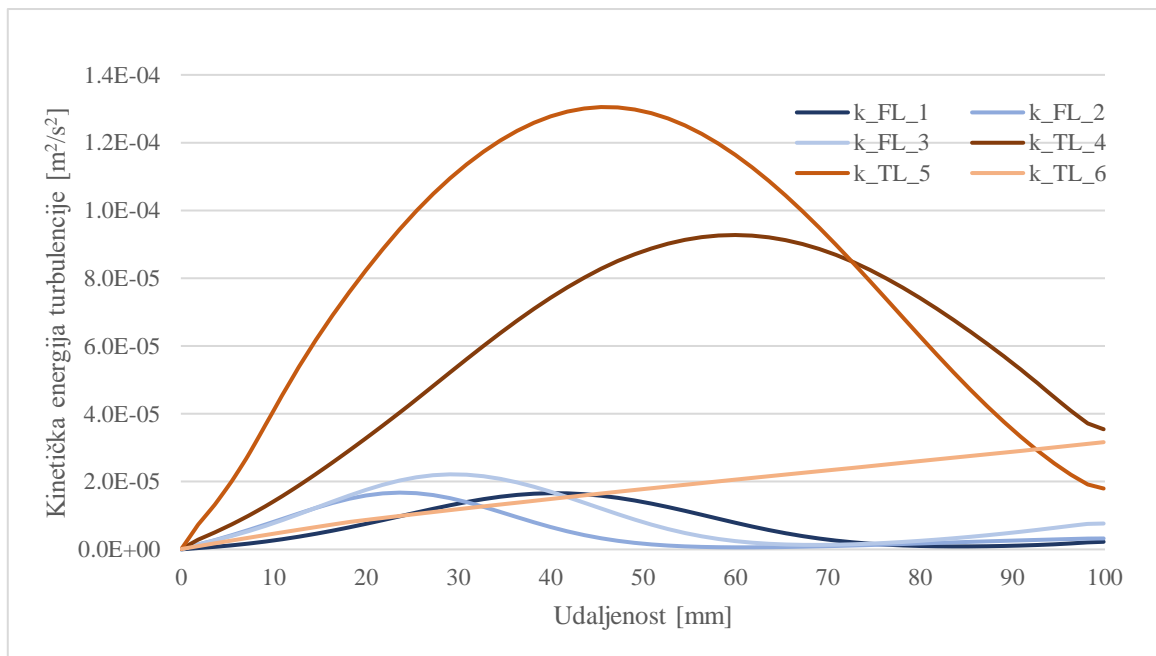
Na drugom setu dijagrama na slikama od 35. do 38. prikazani su odnosi vrijednosti kinetičke energije turbulencije duž aorte u četiri vremenska trenutka od interesa kroz iste točke kao i brzine strujanja i tlakovi. Vrijednosti kinetičke energije turbulencije su iste u svim točkama pojedinog lumena na ulazu u domenu, a pozicija ulaza ovisi o smjeru strujanja kako je pojašnjeno u poglavlju 5.3. Okretanje strujanja je vidljivo na slici 38. kada su jednake vrijednosti kinetičke energije turbulencije na strani izlaznog presjeka u  $z=0.1\text{m}$ . Vrijednosti kinetičke energije se nakon zadane vrijednosti na ulazu slobodno razvijaju duž aorte, te dolazi do velikih i nepravilnih oscilacija vrijednosti u svim trenucima osim u trenutku najvećeg volumnog protoka u  $t=9.24\text{s}$  u kojemu distribucije po duljini aorte imaju najmanje oscilacije, što je vidljivo i na slikama 15. i 16. gdje dolazi do najmanje izraženih vrtloženja u strujanju. Do većih oscilacija vrijednosti kinetičke energije turbulencije naspram brzine strujanja dolazi zbog drugačije zadanih rubnih uvjeta.



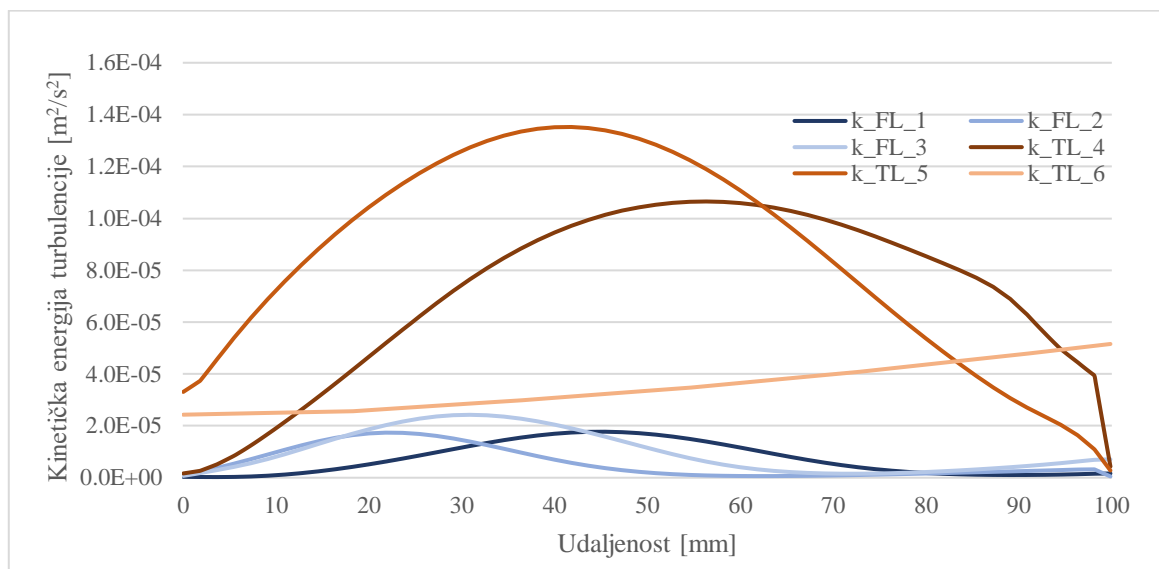
Slika 35. Kinetička energija turbulencije duž aorte u  $t=9.17\text{s}$



Slika 36. Kinetička energija turbulencije duž aorte u  $t=9.24\text{s}$

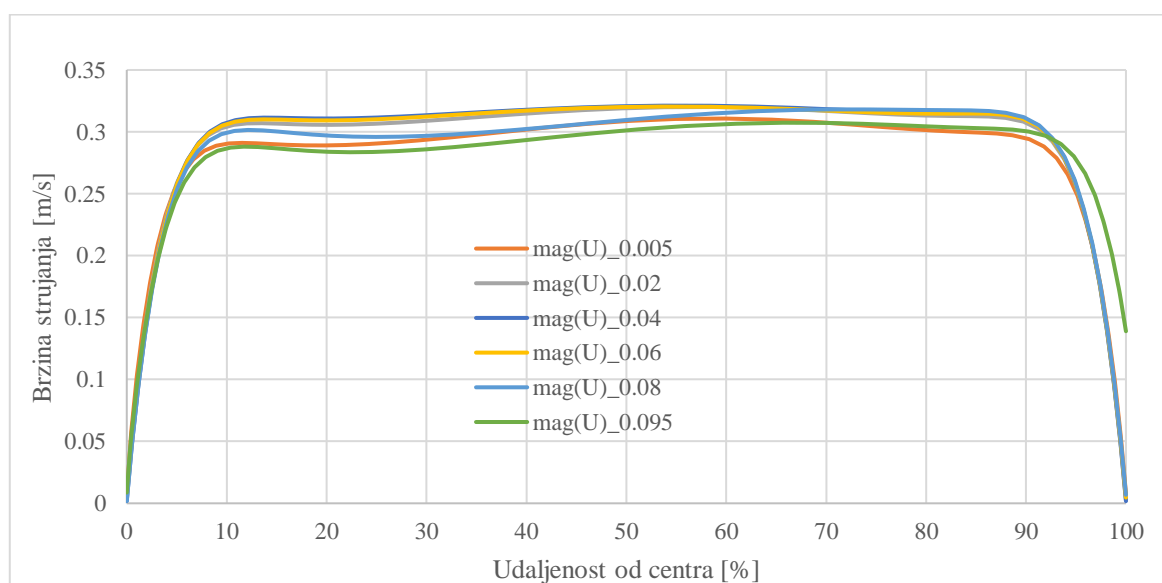


Slika 37. Kinetička energija turbulencije duž aorte u  $t=9.41\text{s}$

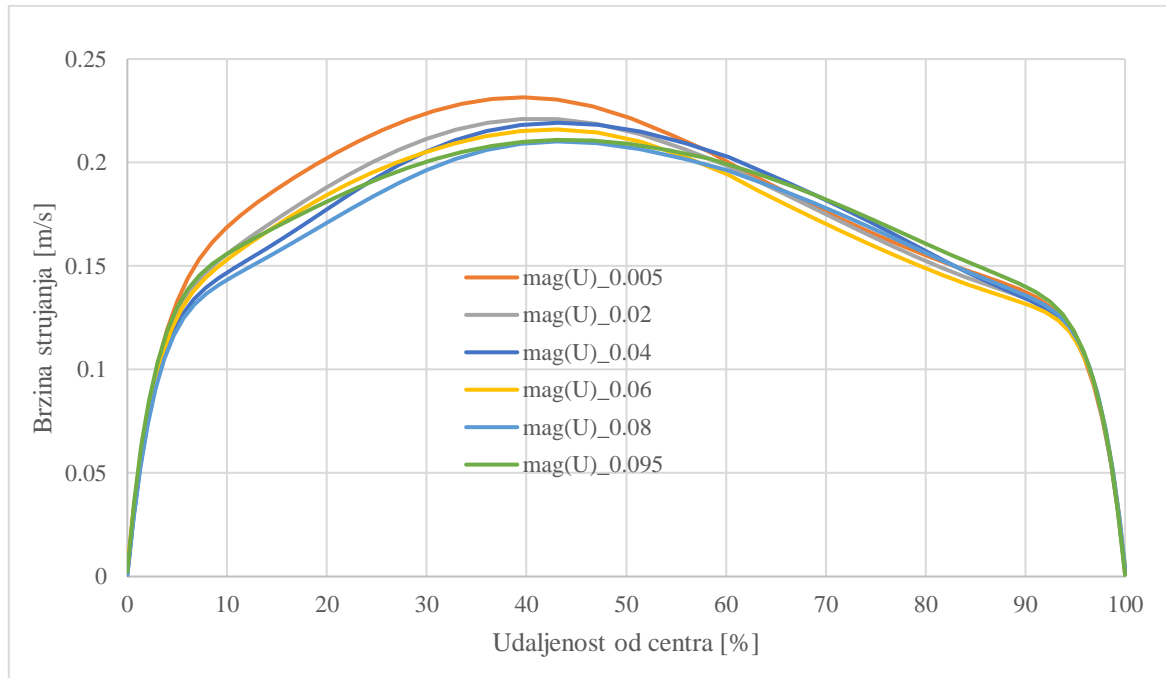


**Slika 38. Kinetička energija turbulencije duž aorte u  $t=9.47s$**

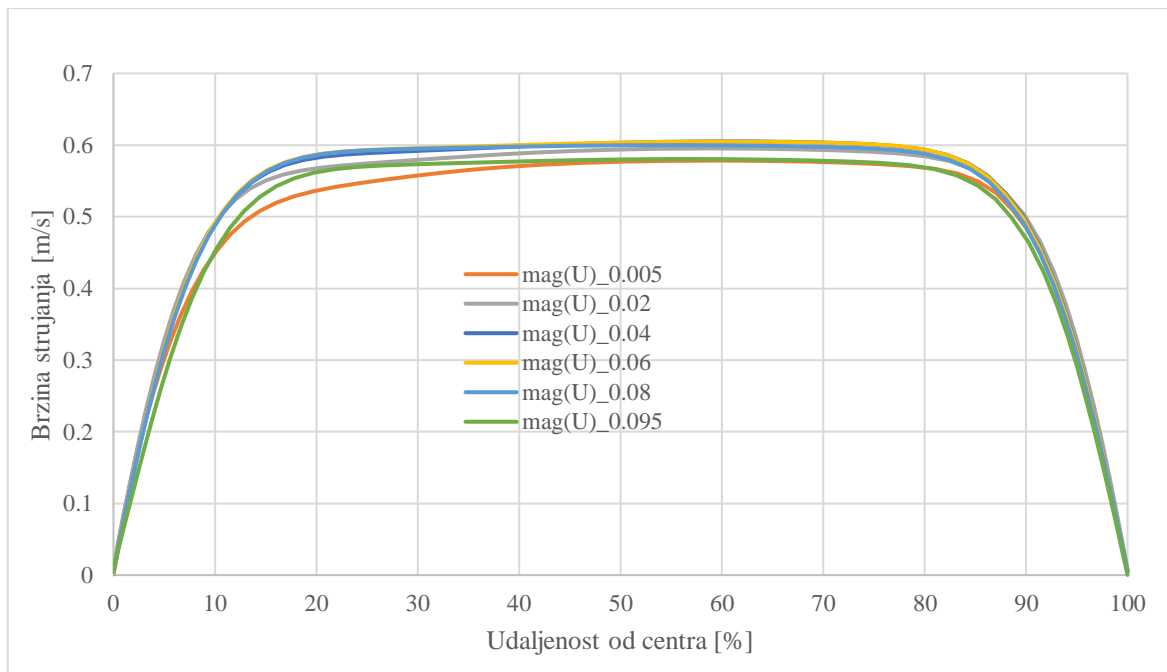
Na sljedećim dijagramima od slike 39. do 46. prikazani su radijalni profili magnituda brzina strujanja u stvarnim i lažnim lumenima u trenucima od interesa. Pravci na kojima su uzete vrijednosti su prikazani crtkanim linijama na slici 30., a uzeti su na poprečnim presjecima svakih 0.02m i dodatnim presjecima udaljenima 0.005m od ulaznih i izlaznih presjeka. Radijalni dijagrami brzina strujanja i kinetičke energije turbulencije koristiti će se za procjenu valjanosti duljine geometrije postavljenog modela.



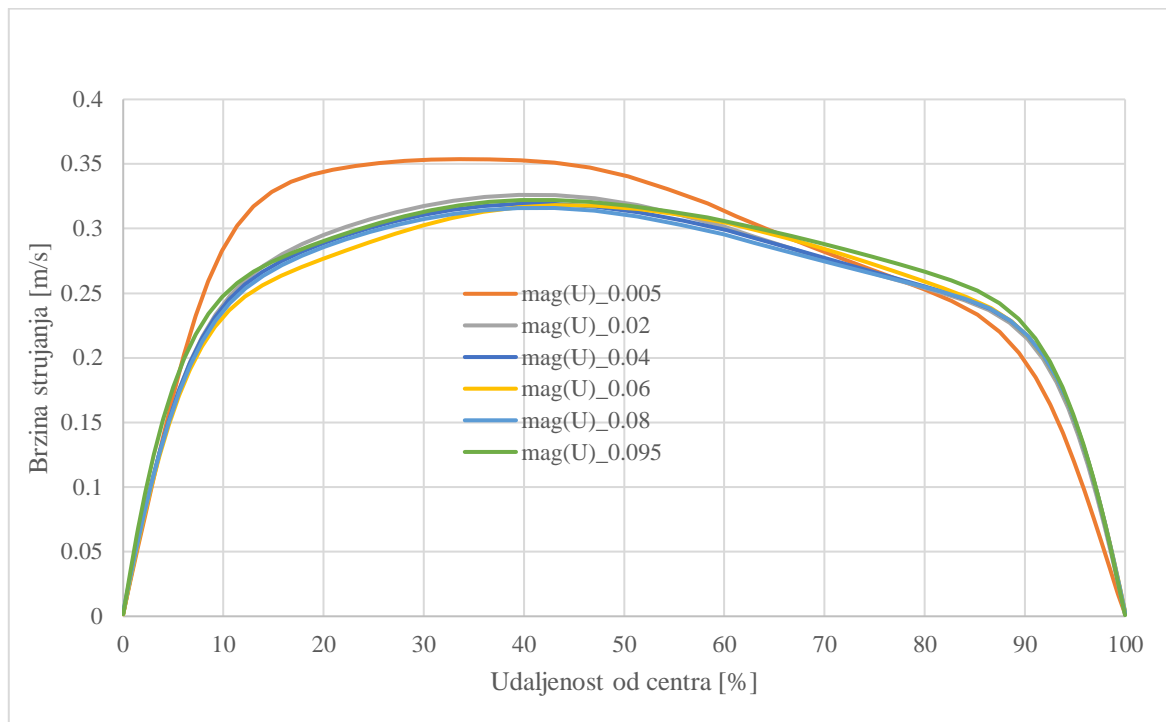
**Slika 39. Radijalna raspodjela brzine strujanja u stvarnom lumeni po presjecima u  $t=9.17s$**



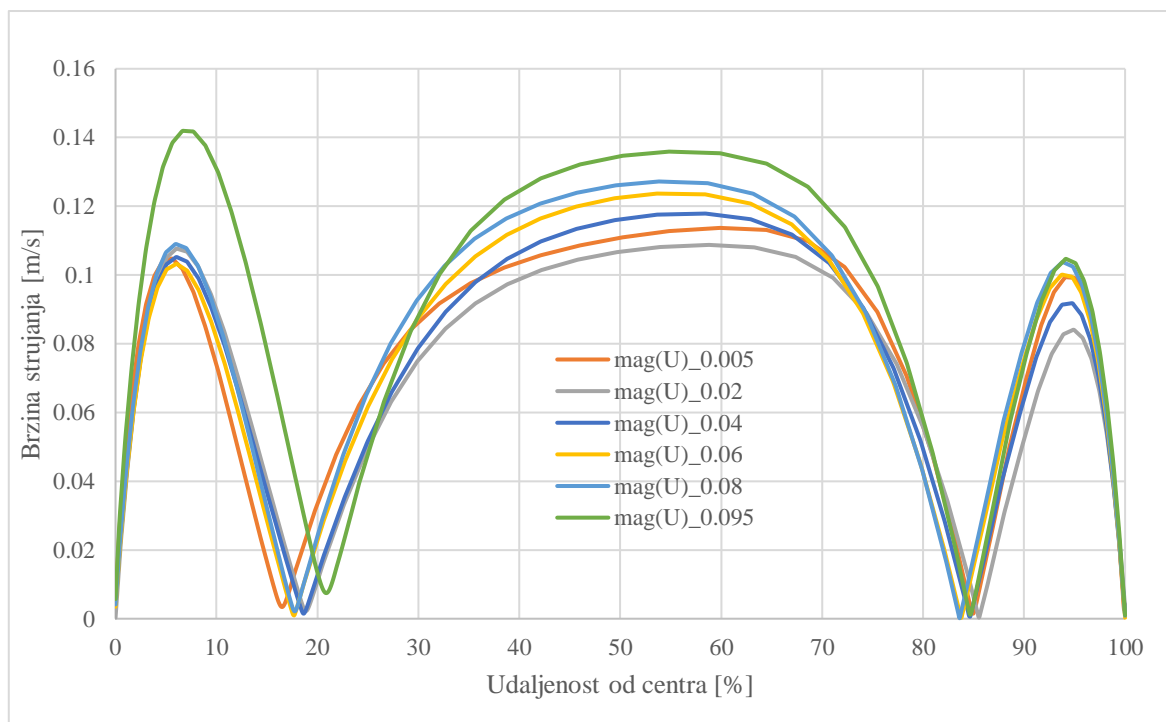
Slika 40. Radijalna raspodjela brzine strujanja u lažnom lumenu po presjecima u  $t=9.17s$



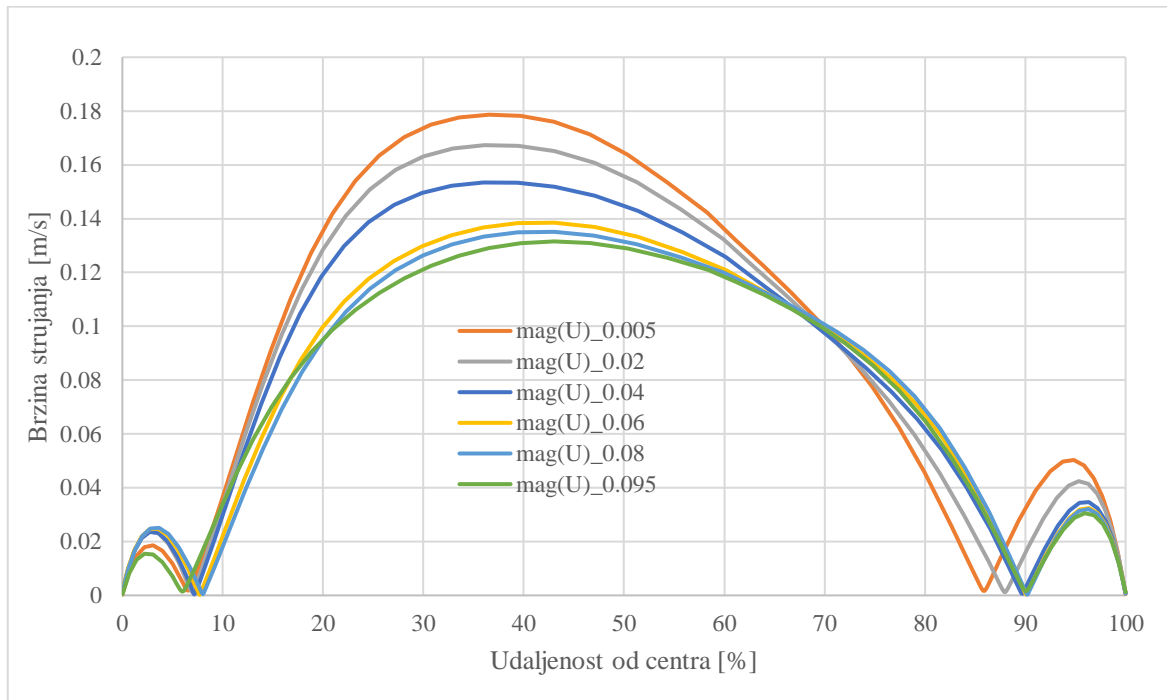
Slika 41. Radijalna raspodjela brzine strujanja u stvarnom lumenu po presjecima u  $t=9.24s$



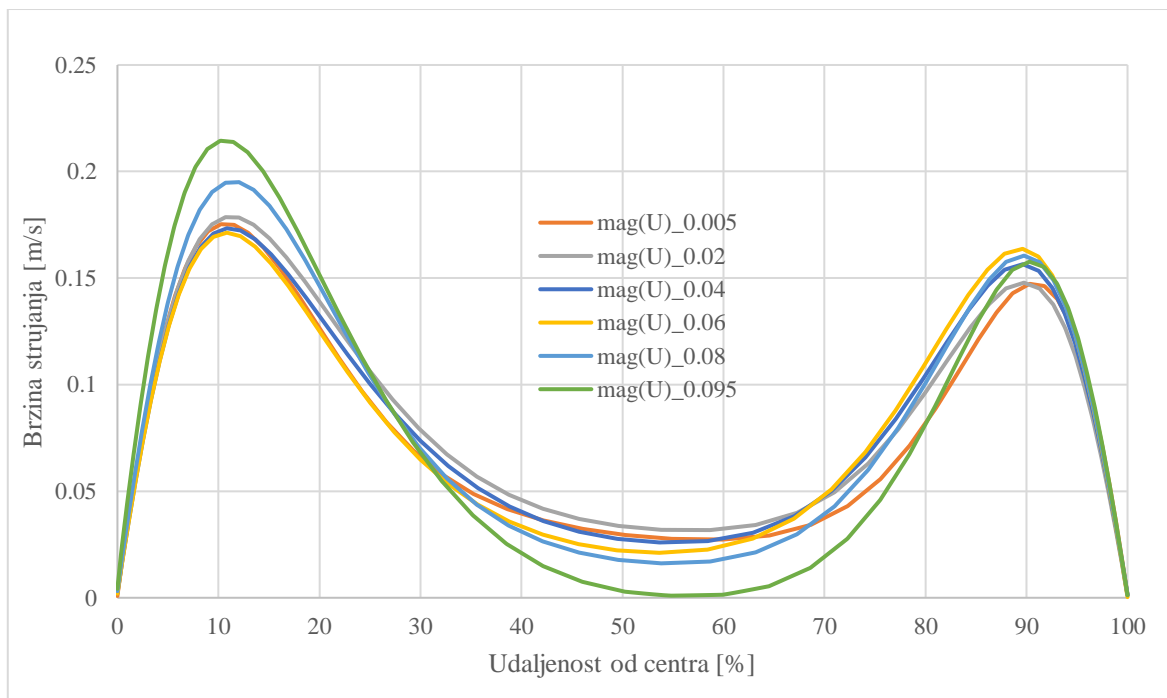
Slika 42. Radijalna raspodjela brzine strujanja u lažnom lumenu po presjecima u  $t=9.24s$



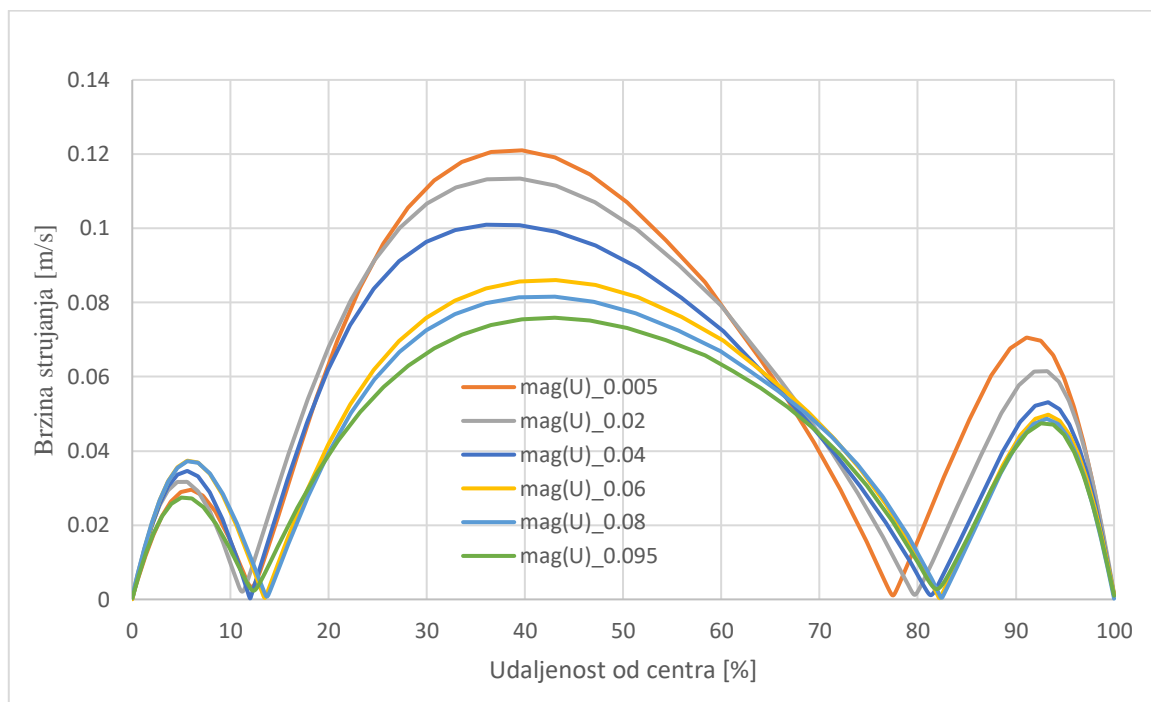
Slika 43. Radijalna raspodjela brzine strujanja u stvarnom lumenu po presjecima u  $t=9.41s$



Slika 44. Radijalna raspodjela brzine strujanja u lažnom lumenu po presjecima u  $t=9.41s$



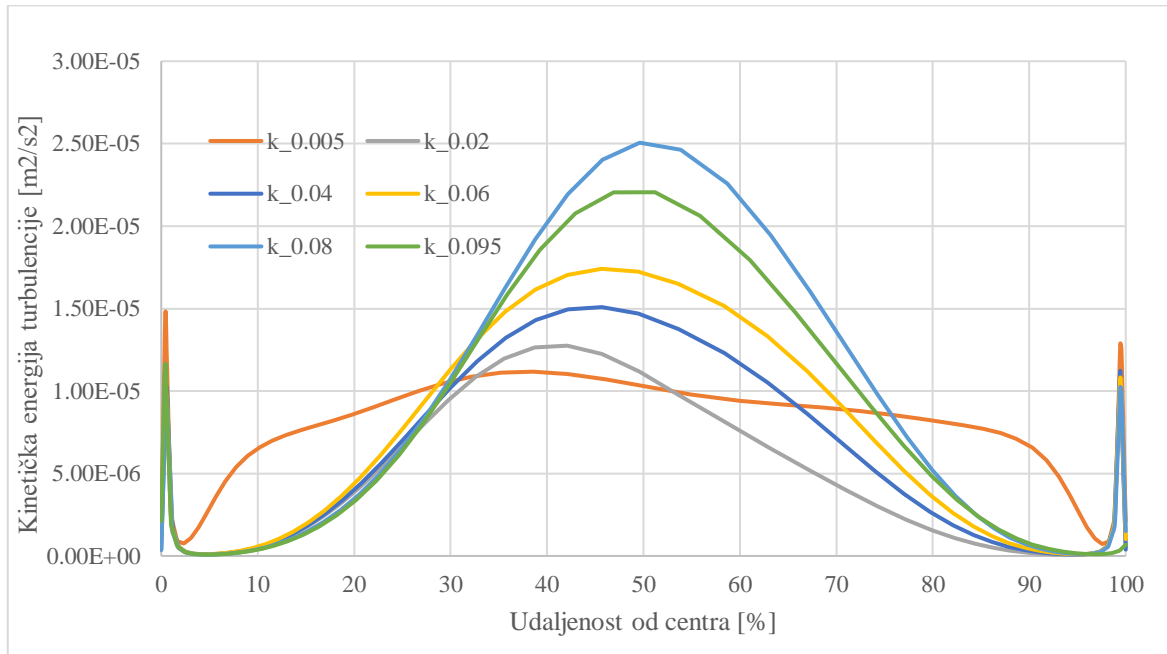
Slika 45. Radijalna raspodjela brzine strujanja u stvarnom lumenu po presjecima u  $t=9.47s$



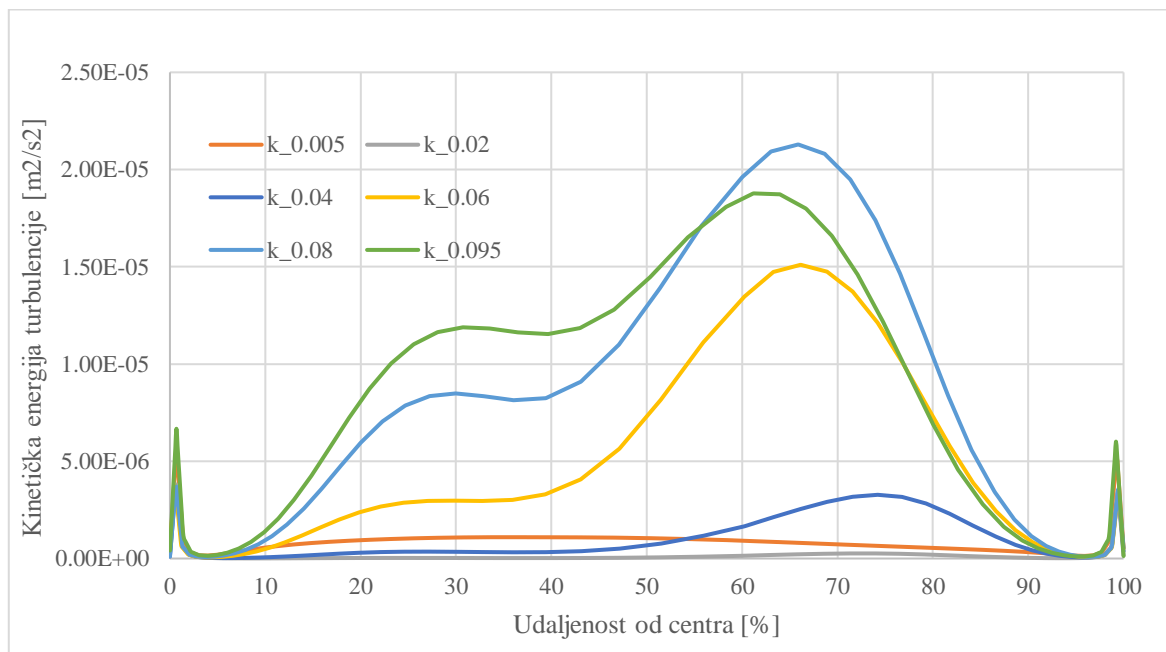
**Slika 46. Radijalna raspodjela brzine strujanja u lažnom lumenu po presjecima u  $t=9.47s$**

Na prethodno prikazanim dijagramima radijalnih profila brzine strujanja vidljivo je da profili brzina nisu isti po promatranim presjecima, a također se razlikuju u različitim promatranim vremenskim trenucima. Do većih razlika u profilima dolazi u lažnom lumenu, dok su profili u stvarnom lumenu uniformniji. U trenutku maksimalnog volumnog protoka u  $t=9.24s$  dolazi do najuniformnijih profila kroz presjek, zbog dominantne brzine strujanja u z smjeru duž aorte. Brzina strujanja je zadana u postavkama simulacije preko von Neumannovog rubnog uvjeta nultog gradijenta da se slobodno razvija pa se krivulje bolje poklapaju nego što će to biti kod kinetičke energije turbulencije koja se zadaje uniformno na ulazu. Na slikama 43., 44. i 46. jasno je vidljivo formiranje Stokesovog rubnog sloja do kojeg dolazi uslijed osciliranja tlakom preko rubnih uvjeta, tj. dolazi do faznog pomaka između jezgre (centra) strujanja i rubnog sloja. Iz prikazanih dijagrama radijalnih raspodjela brzina strujanja može se zaključiti da geometrija nije dovoljno dugačka da se razviju uniformni profili brzina po presjecima, te je vidljiv utjecaj rubnih uvjeta na rezultate.

Na sljedećim dijagramima od slike 47. do 54. prikazane su radijalne raspodjele kinetičke energije turbulencije u lumenima u karakterističnim trenucima.

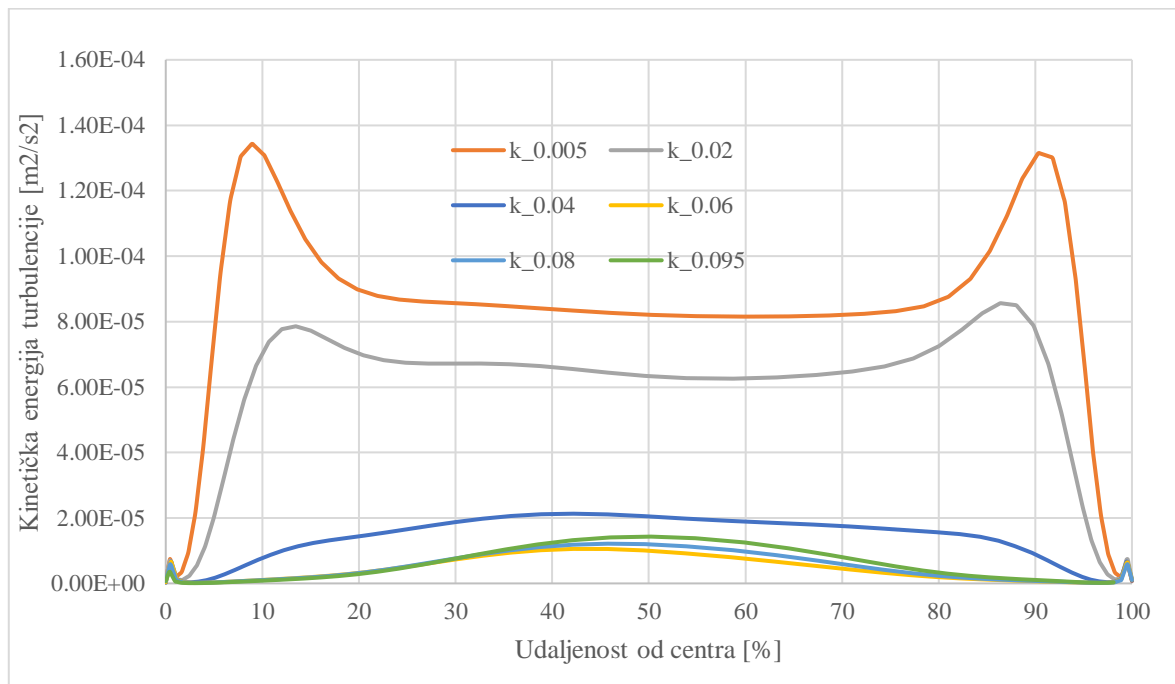


**Slika 47. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u stvarnom lumeni po presjecima u  $t=9.17s$**

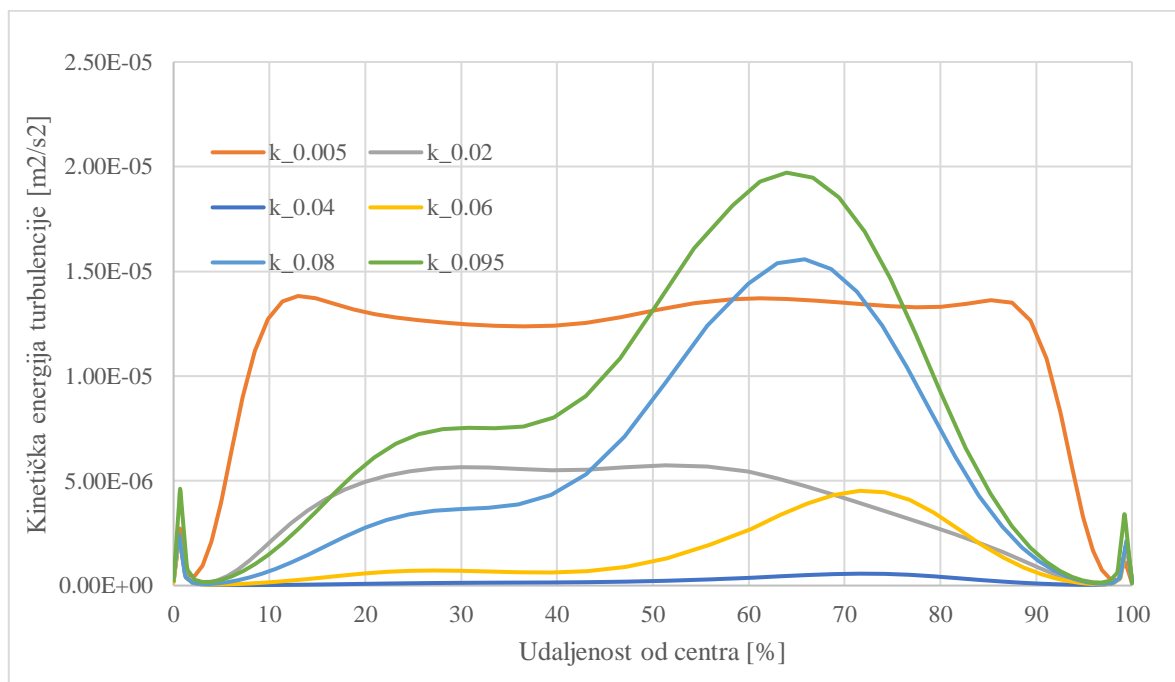


**Slika 48. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u lažnom lumeni po presjecima u  $t=9.17s$**

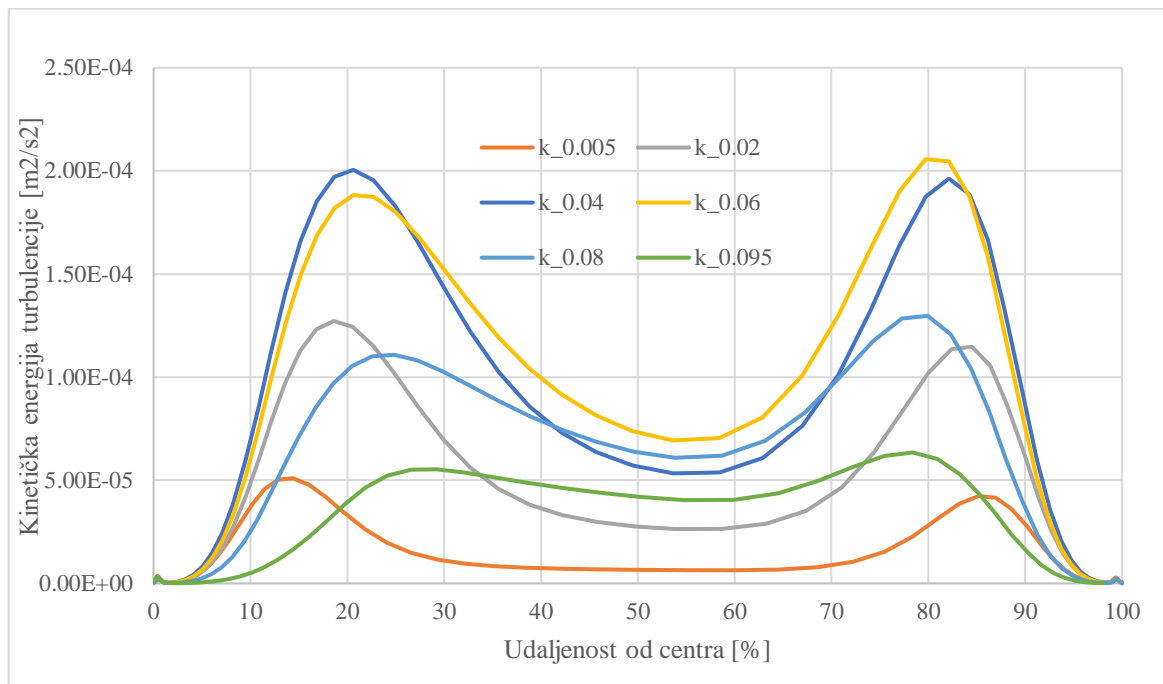




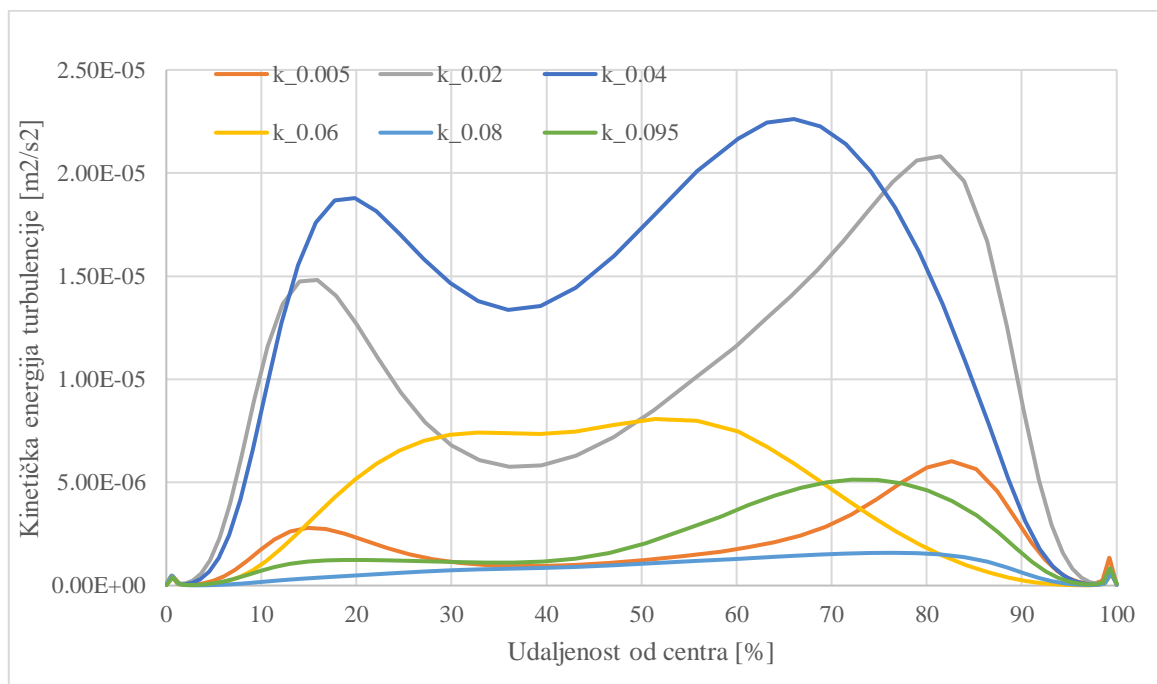
**Slika 49. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u stvarnom lumenu po presjecima u  $t=9.24s$**



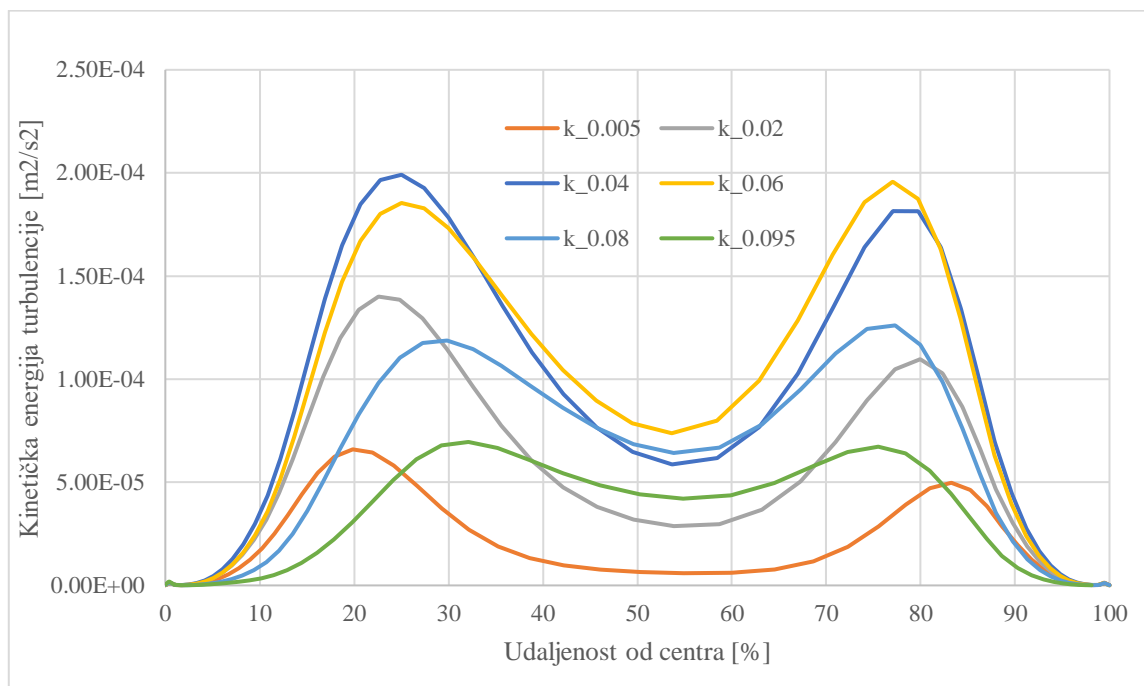
**Slika 50. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u lažnom lumenu po presjecima u  $t=9.24s$**



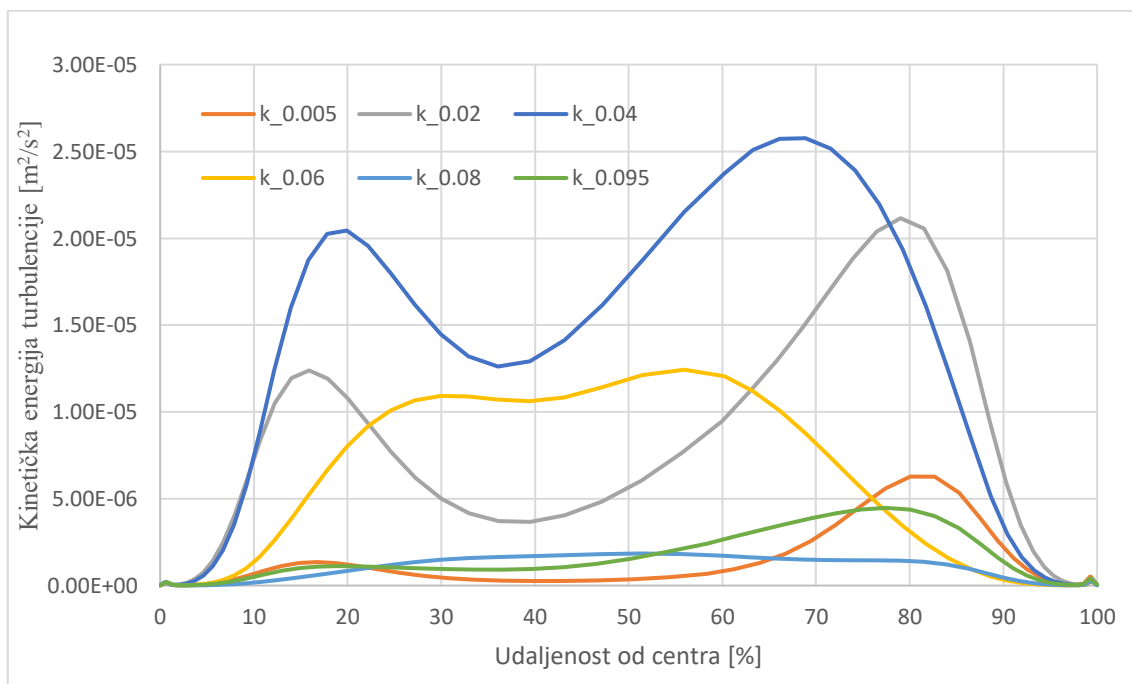
**Slika 51. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u stvarnom lumenu po presjecima u  $t=9.41s$**



**Slika 52. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u lažnom lumenu po presjecima u  $t=9.41s$**



**Slika 53. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u stvarnom lumenu po presjecima u  $t=9.47s$**



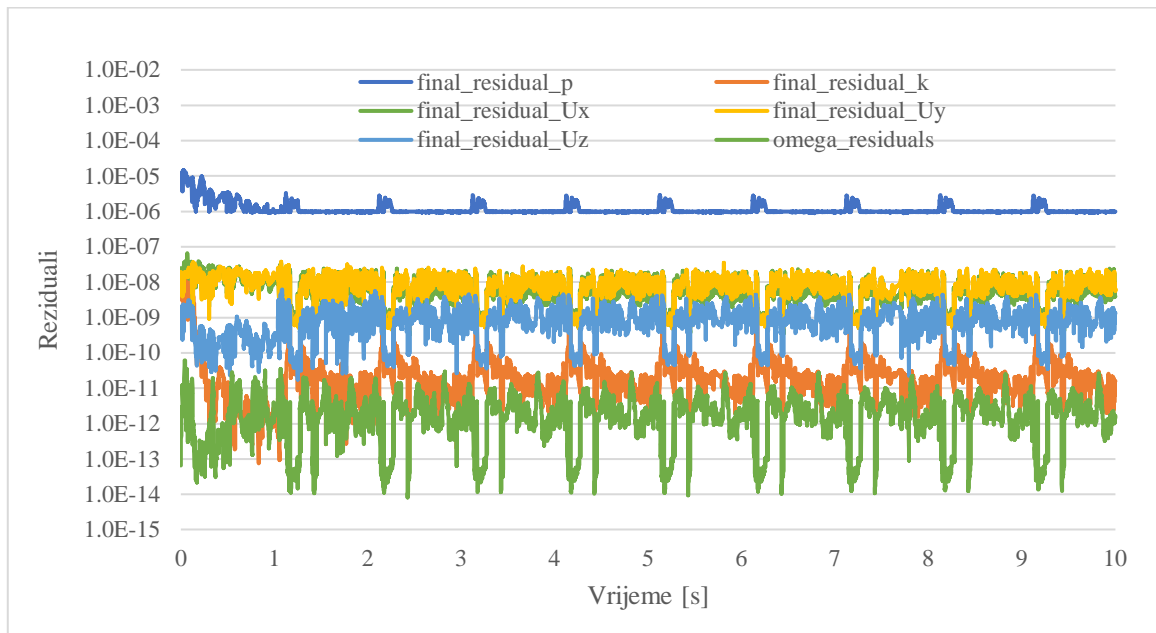
**Slika 54. Radijalna raspodjela kinetičke energije turbulencije u lažnom lumenu po presjecima u  $t=9.47s$**

Na prikazanim dijagramima radijalnih profila kinetičke energije turbulencije izraženije su vidljive oscilacije vrijednosti na promatranim presjecima nego kod brzina strujanja. Razlog većih oscilacija radijalnih profila kinetičke energije turbulencije je u postavkama simulacije u kojima je kinetička energija turbulencije zadana kao uniformna vrijednost na ulazu fluida u domenu i preko nultog gradijenta na izlazu fluida iz domene, a kako je ranije objašnjeno pozicija ulaza se mijenja u ovisnosti o smjeru strujanja krvi koje ovisi o vremenskoj poziciji u srčanom ciklusu, tj. o vrijednostima volumnog protoka.

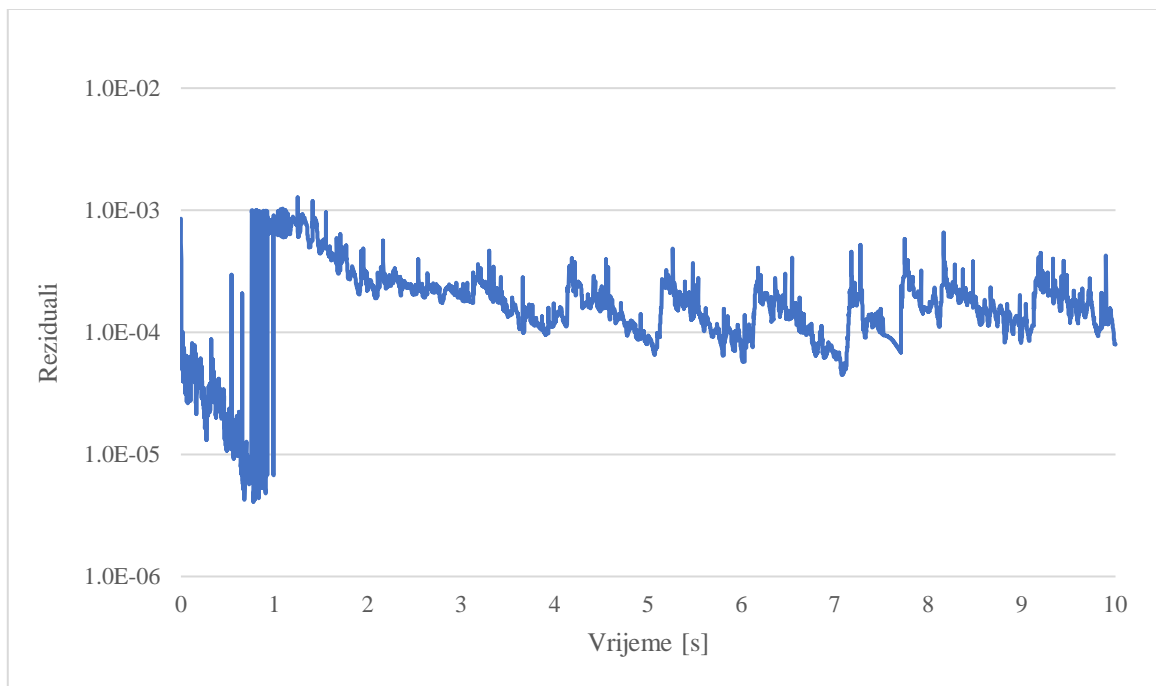
Iz prikazanih dijagrama radijalnih raspodjela vrijednosti kinetičke energije turbulencije i magnituda brzina strujanja može se zaključiti da geometrija duljine od pet unutarnjih promjera aorte nije dovoljno dugačka za ovaj konkretni promatrani problem, te bi se za bolji fizikalni opis problema trebalo pristupiti rješavanju simulacija s većim duljinama domene u kojima bi se smanjio utjecaj rubnih uvjeta i/ili rješavanju simulacija sa izmjenjenim rubnim uvjetima.

U samom početku razmatranja problema i postavljanja simulacije pretpostavljeno je da geometrija neće biti dovoljno dugačka za razvijanje uniformnih profila fizikalnih veličina pa se nedostatak duljine geometrije pokušao nadomjestiti rubnim uvjetima tako što su se na ulazima i izlazima zadale vrijednosti prethodno obavljene CFD simulacije uz pretpostavku krute (nepomične) stijenke koja je imala duljinu četrdeset promjera aorte. Iz rezultata je vidljivo da se na taj način nije uspjelo nadomjestiti potrebnu duljinu geometrije, a za danju analizu valjanosti ovakvog načina zadavanja rubnih uvjeta je potrebno provoditi dodatne simulacije, što nije tema ovoga rada.

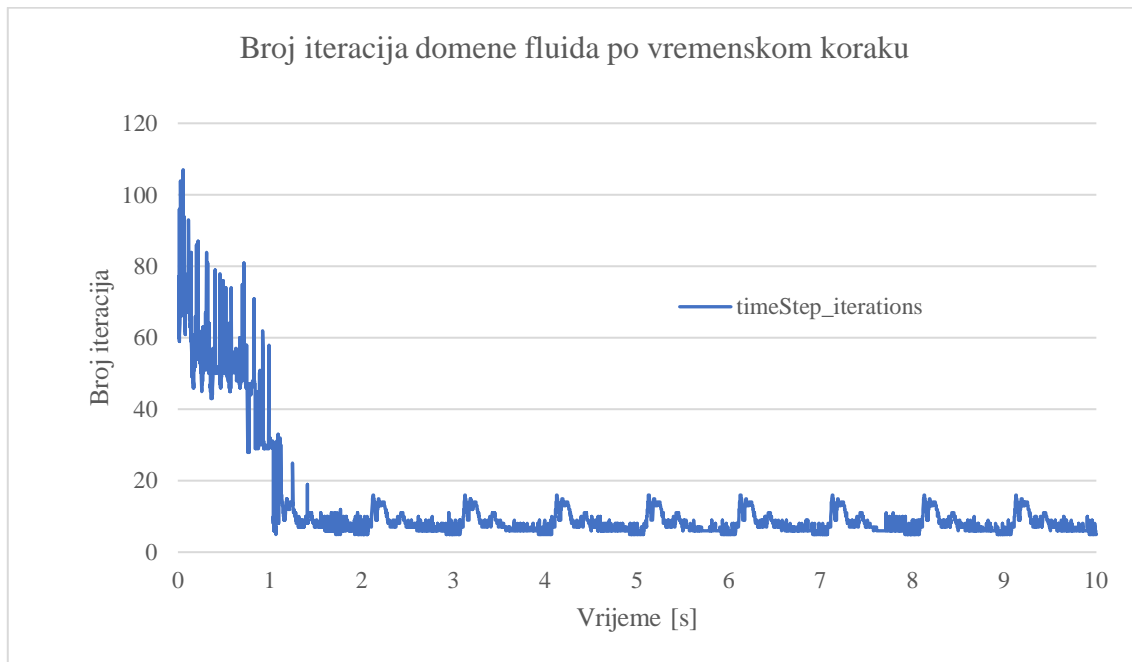
U posljednjem dijelu ovoga poglavlja prikazani su reziduali izračunati u zadnjim iteracijama za rješavače domene fluida i FSI rješavača. Reziduali domene fluida i FSI reziduali su prikazani u logaritamskim mjerilima.



Slika 55. Reziduali domene fluida u zadnjim iteracijama



Slika 56. FSI reziduali



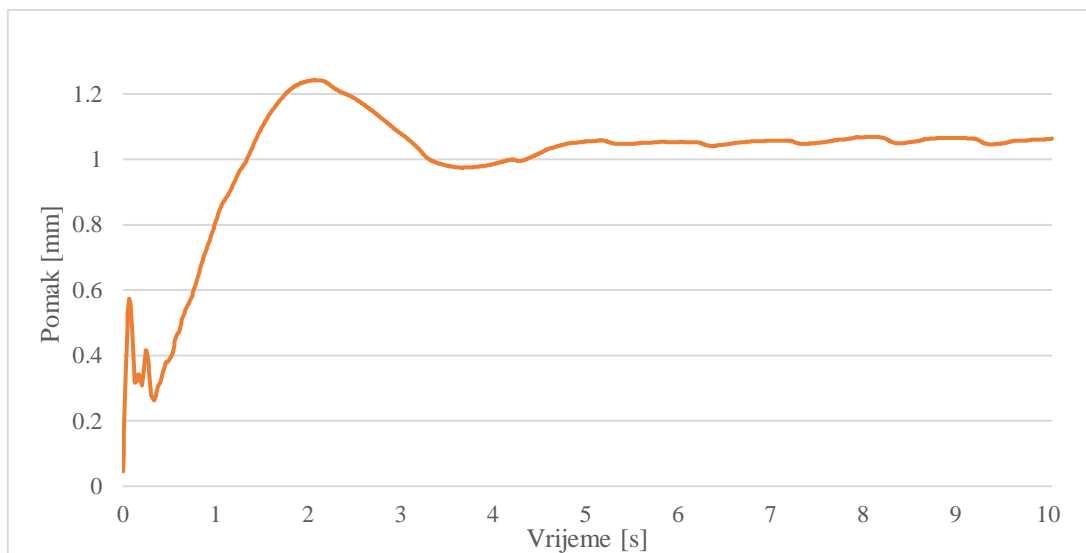
**Slika 57. Broj iteracija domene fluida**

Iz dijagrama sa slika 55. i 56. vidi se da su reziduali pali ispod zadanih tolerancija u postavkama simulacije, koje su prikazane u tablici 5., a sa slike 57. vidi se da se nakon drugog ciklusa smanjuje broj iteracija u domeni fluida. Tlak ima najveće vrijednosti reziduala zbog najveće zadane tolerancije, a razlog tome je kako bi se postiglo brže rješenje domene fluida jer tlak najsporije konvergira. Vrijednosti FSI reziduala također padaju nakon dva ciklusa, a vidljive su povremene oscilacije vrijednosti koje su ispod zadane tolerancije.

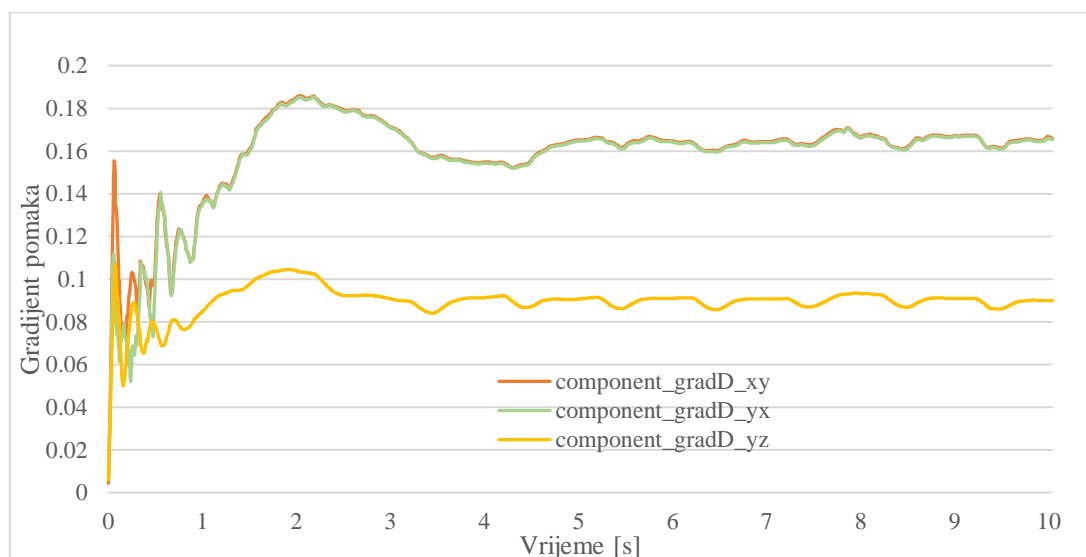
### 6.1.2. *Domena stijenke*

Nakon obrađenih rezultata domene fluida, u ovom poglavlju obraditi će se rezultati domene stijenke. Pokazati će se konvergencija rezultata domene stijenke, te raspodjele pomaka po poprečnim presjecima i duž aorte.

Na slici 58. prikazani su maksimalni pomaci u domeni stijenke kao funkcija vremena za cijelo trajanje simulacije. Nakon petog ciklusa je vidljivo da se maksimalni pomaci stabiliziraju uz male periodičke oscilacije koje su uzrokovane tranzijentnim strujanjem fluida koji djeluje na stijenkku.



Slika 58. Maksimalni pomaci u cijeloj domeni stijenke

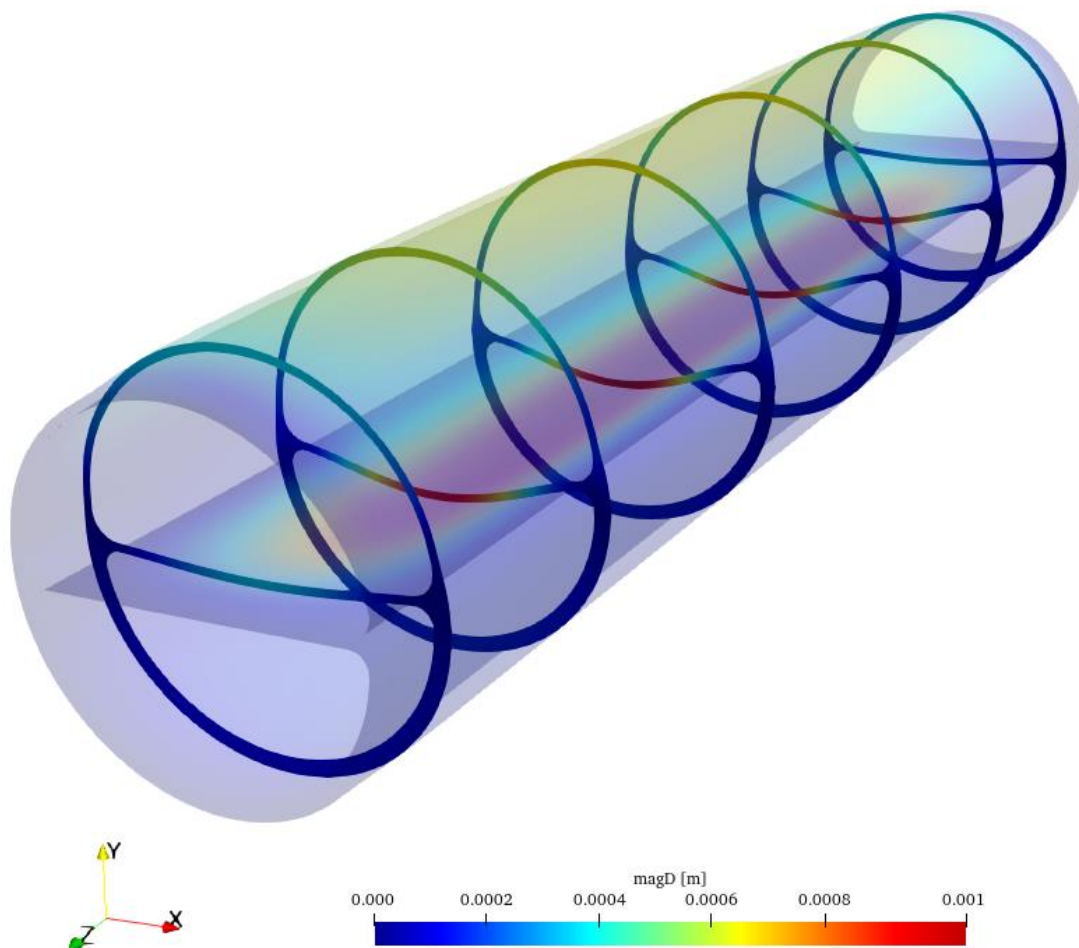


Slika 59. Komponente maksimalnog gradijenta pomaka sa najvećim oscilacijama

Na slici 59. prikazane su vrijednosti komponenti maksimalnog gradijenta pomaka u cijeloj domeni stijenke s najvećim oscilacijama tijekom cijelog trajanja simulacije. Kao i kod maksimalnih pomaka, i kod komponenti gradijenta pomaka dolazi do stabilizacije vrijednosti nakon petog ciklusa uz male periodičke oscilacije. Iz dijagrama sa slika 58. i 59. može se zaključiti da je postignuto zadovoljavajuće periodičko osciliranje vrijednosti.

Nakon provjerenih tendencija kretanja rezultata u domeni stijenke prikazati će se vizualizacija deformirane aorte i raspodjela vrijednosti magnitude pomaka u ključnim trenutcima od interesa.

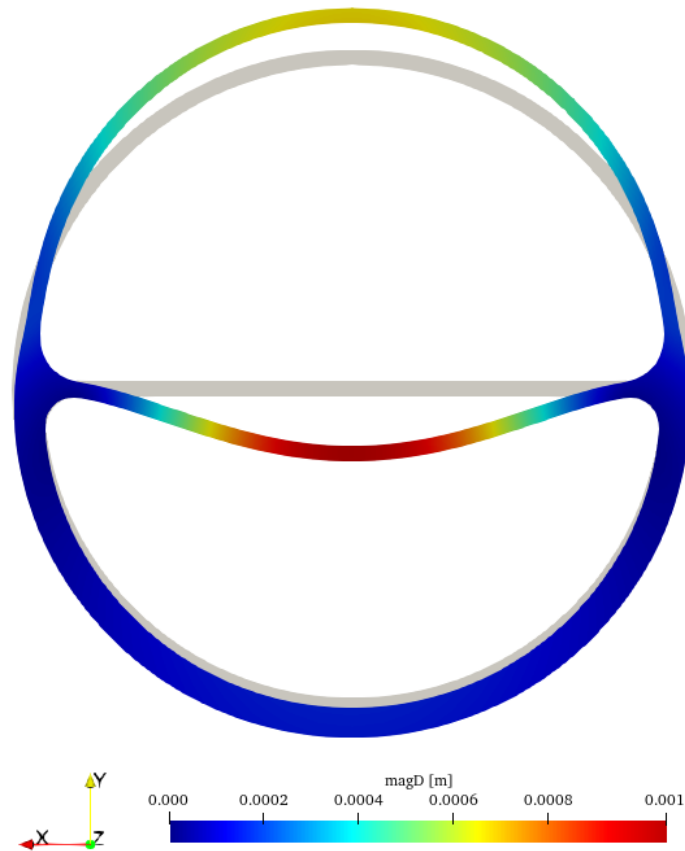
Na slici 60. prikazana je vizualizacija deformirane aorte sa raspodjelom vrijednosti magnitude pomaka u cijeloj domeni stijenke u trenutku  $t=9.17s$ , kada dolazi do najvećeg tlaka i vrijednosti pomaka, te poprečni presjeci sa pripadajućim magnitudama pomaka na odabranim pozicijama svakih  $0.02m$  i dodatnim presjecima udaljenima  $0.005m$  od ulaznog i izlaznog presjeka.



**Slika 60. Prikaz deformirane aorte sa presjecima u trenutku maksimalnog tlaka u  $t=9.17s$**



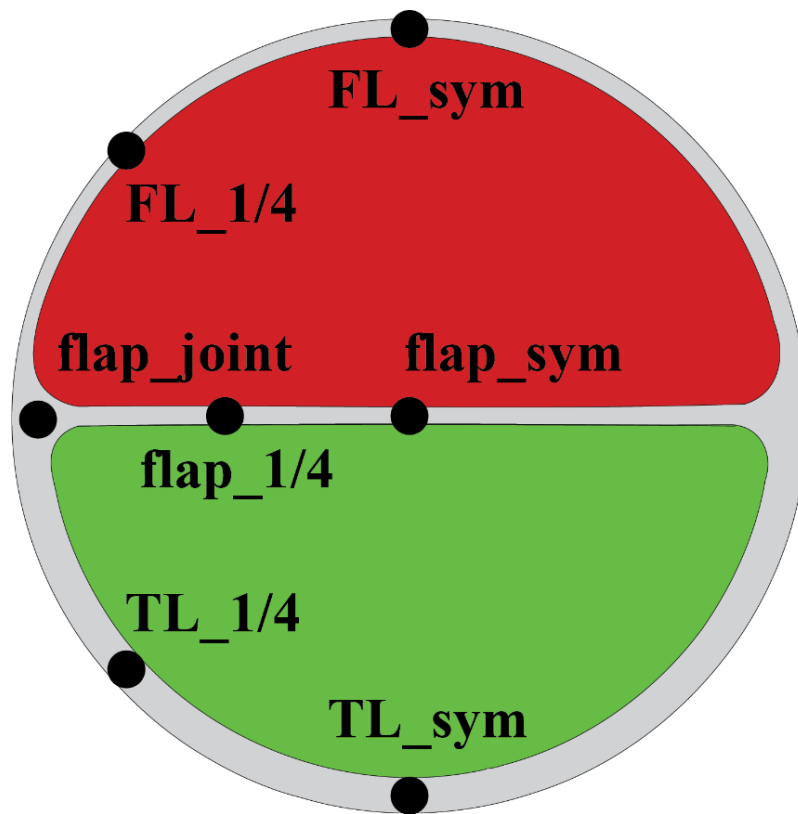
Slika 61. prikazuje poprečni presjek deformirane aorte u trenutku  $t=9.17s$  na polovici domene u  $z=0.05m$  u odnosu na nedeformirani, početni oblik. Grafički prikaz pomaka je uvećan u odnosu na stvarni kako bi se jasnije vidjela deformacija.



**Slika 61. Raspodjela pomaka na poprečnom presjeku na sredini domene**

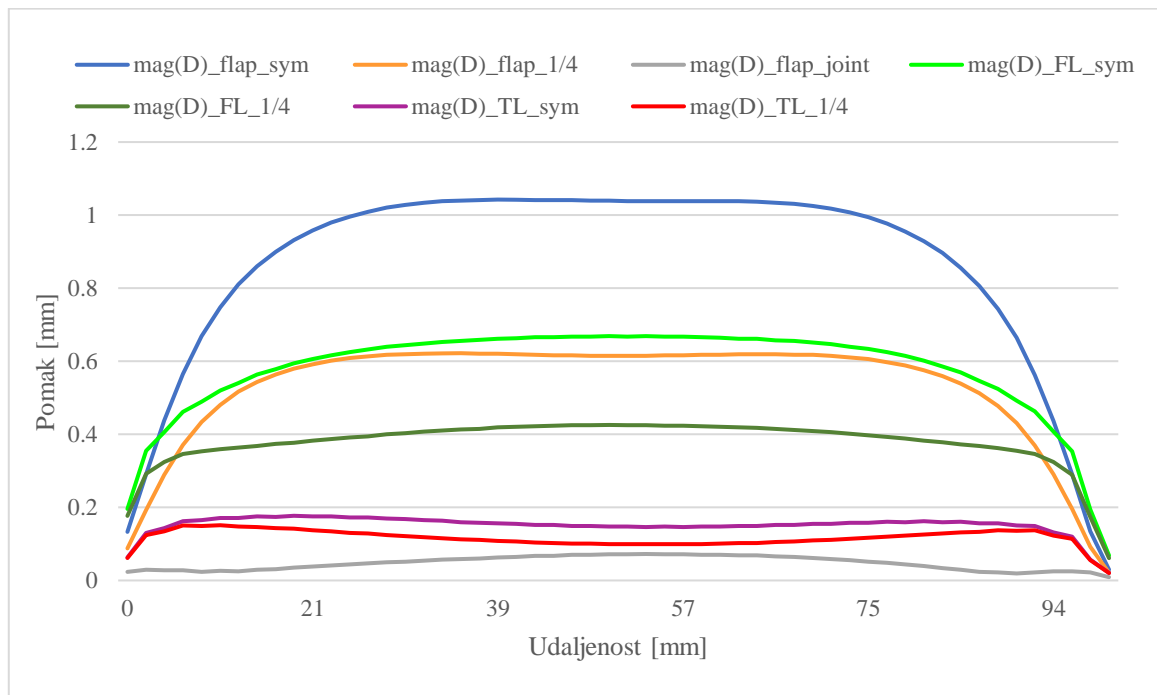
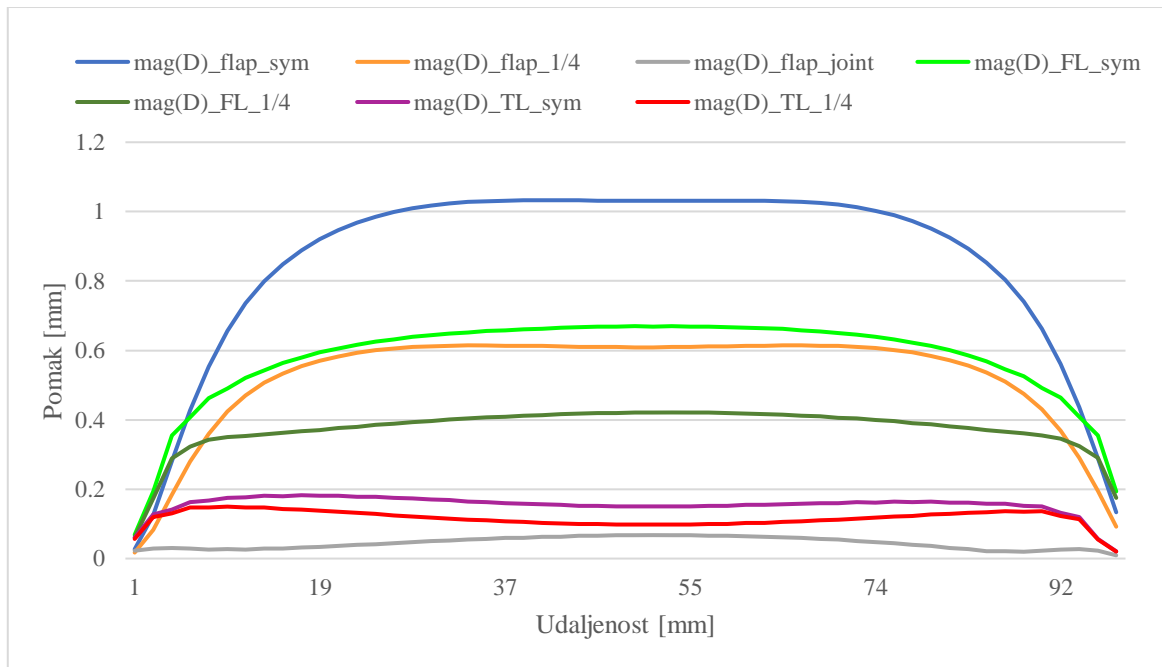
Na slikama 60. i 61. vidljivo je da do najvećih pomaka dolazi na središnjoj membrani, a zatim na vanjskoj stijenci lažnog lumena, dok se stijenka stvarnog lumena minimalno deformira. Također je vidljivo da je deformacija simetrična u odnosu na  $xy$  i  $yz$  ravnine.

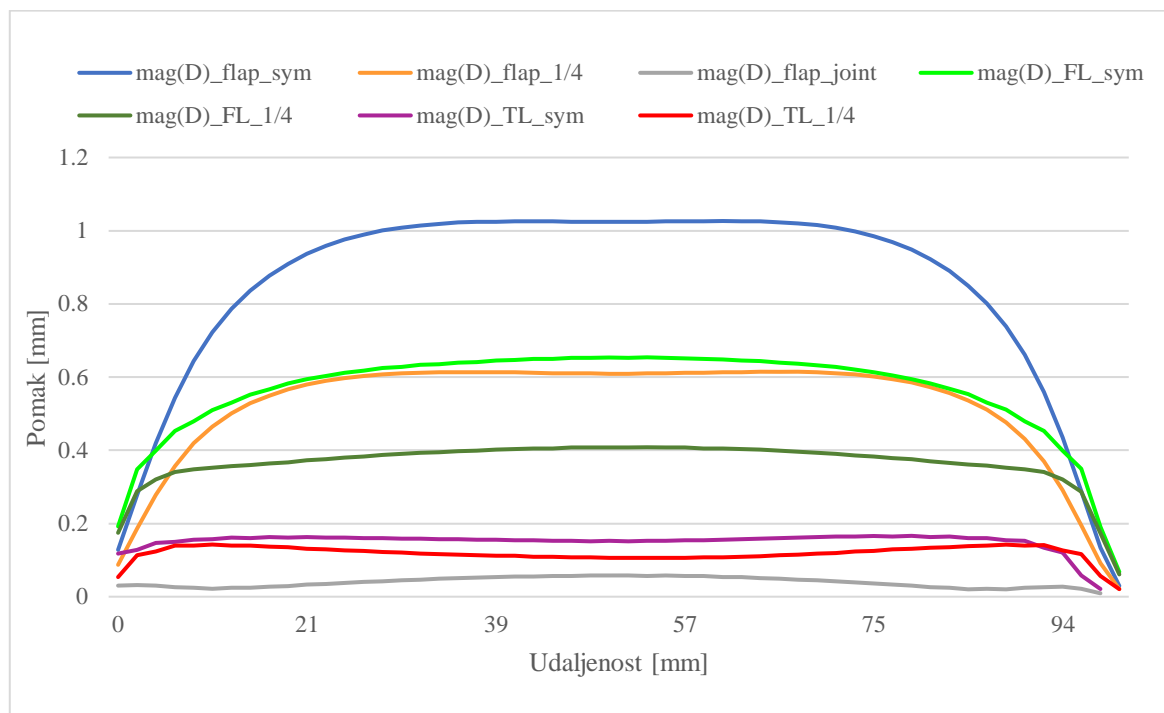
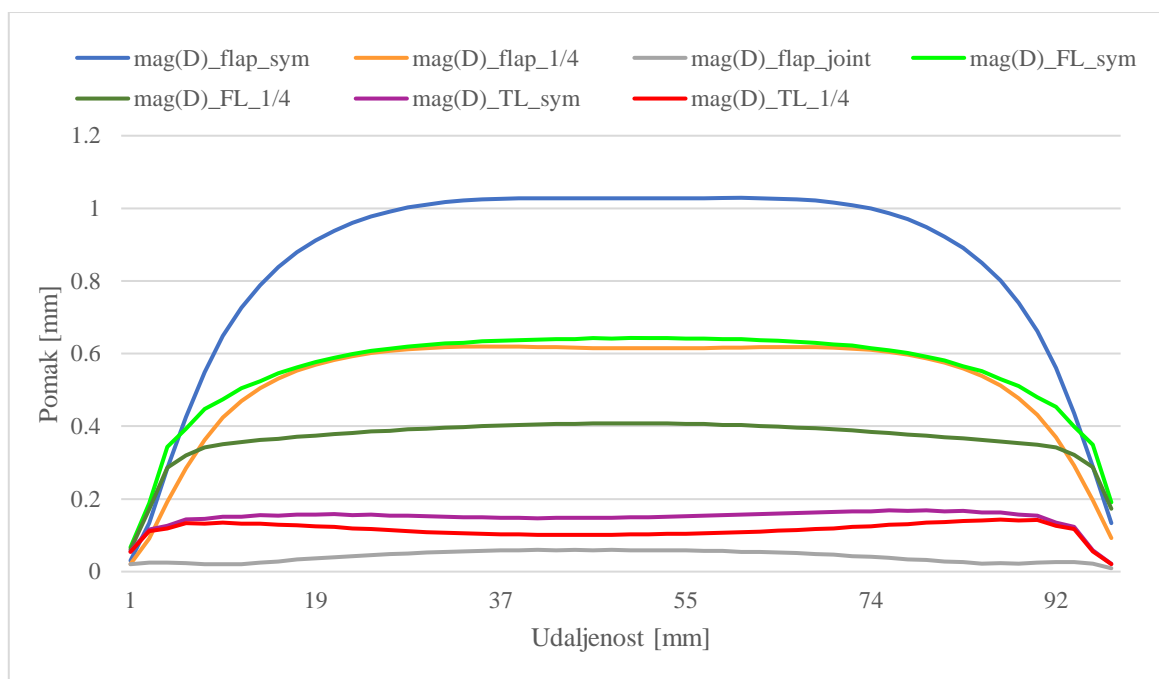
Na sljedećim dijagramima prikazane su uzdužne raspodjele magnituda pomaka u promatranim karakterističnim točkama prikazanim slikom 62. Odabrane karakteristične točke nalaze se na osi simetrije (oznaka  $\_sym$ ), na spoju središnje membrane i vanjske stijenke (oznaka  $\_joint$ ) i na točkama koje se nalaze na pola udaljenosti od točaka na osi simetrije i točke na spoju središnje membrane i vanjske stijenke (oznaka  $\_1/4$ ).



Slika 62. Točke dijagrama promatranih pomaka duž aorte

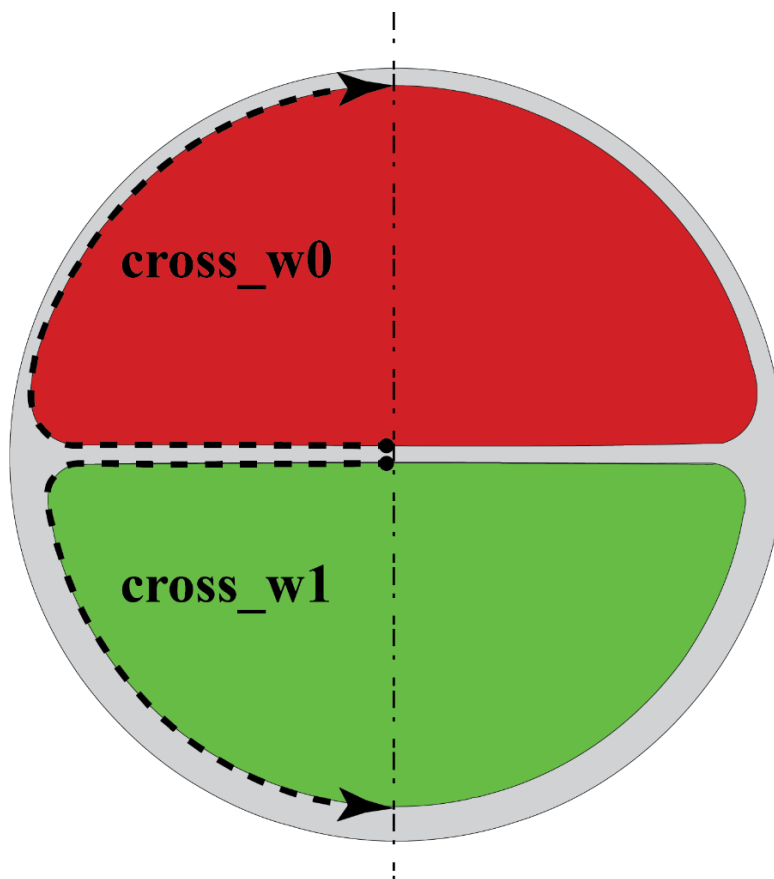
Iz dijagrama sa slika od 63. do 66. je vidljivo da nakon inicijalne deformacije stijenke više ne dolazi do velikih promjena u pomacima, bez obzira na promatrani vremenski trenutak. Najveći pomaci se pojavljuju na središnjoj membrani na osi simetrije, a najmanji na spojnici membrane i vanjske stijenke. Do deformacije membrane dolazi uslijed razlike tlaka između stvarnog i lažnog lumena koja je nametnuta preko rubnih uvjeta. Tlak u lažnom lumenu je veći od tlaka u stvarnom lumenu, kao što se može vidjeti na dijagramima sa slika od 31. do 34., te upravo zbog toga dolazi do deformacije središnje membrane u smjeru stvarnog lumena.

Slika 63. Raspodjela pomaka po duljini aorte u  $t=9.17s$ Slika 64. Raspodjela pomaka po duljini aorte u  $t=9.24s$

Slika 65. Raspodjela pomaka po duljini aorte u  $t=9.41s$ Slika 66. Raspodjela pomaka po duljini aorte u  $t=9.47s$

Kao što je i ranije spomenuto, nakon inicijalne deformacije stijenke ne dolazi do većih promjena vrijednosti pomaka zbog toga što su razlike tlakova između lumena vrlo slične tokom svih promatranih vremenskih trenutaka, pa će se kao relevantni vremenski trenutak promatrati trenutak maksimalnog tlaka u lumenima u  $t=9.17s$  u kojem se pojavljuju i najveći pomaci na stijenci.

Na sljedećim dijagramima prikazati će se raspodjela pomaka duž unutarnjih rubova stijenke stvarnog i lažnog lumena na odabranim promatranim poprečnim presjecima svakih 0.02m od ulaznog presjeka.

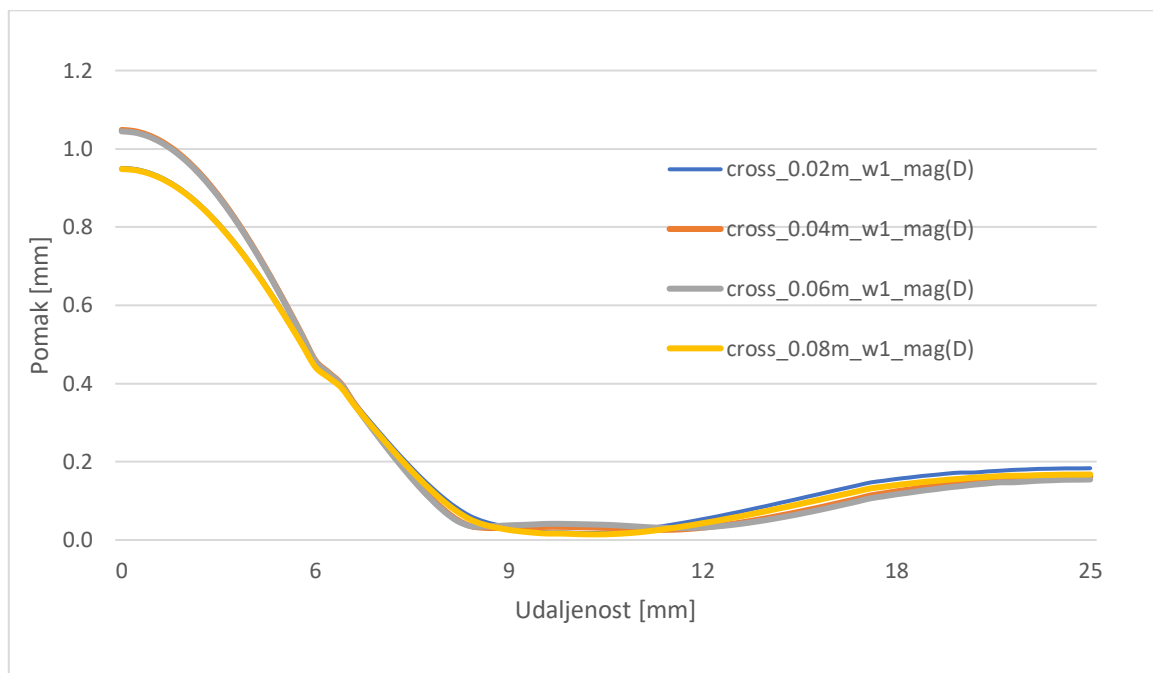


**Slika 67. Krivulje promatranih pomaka na poprečnim presjecima**

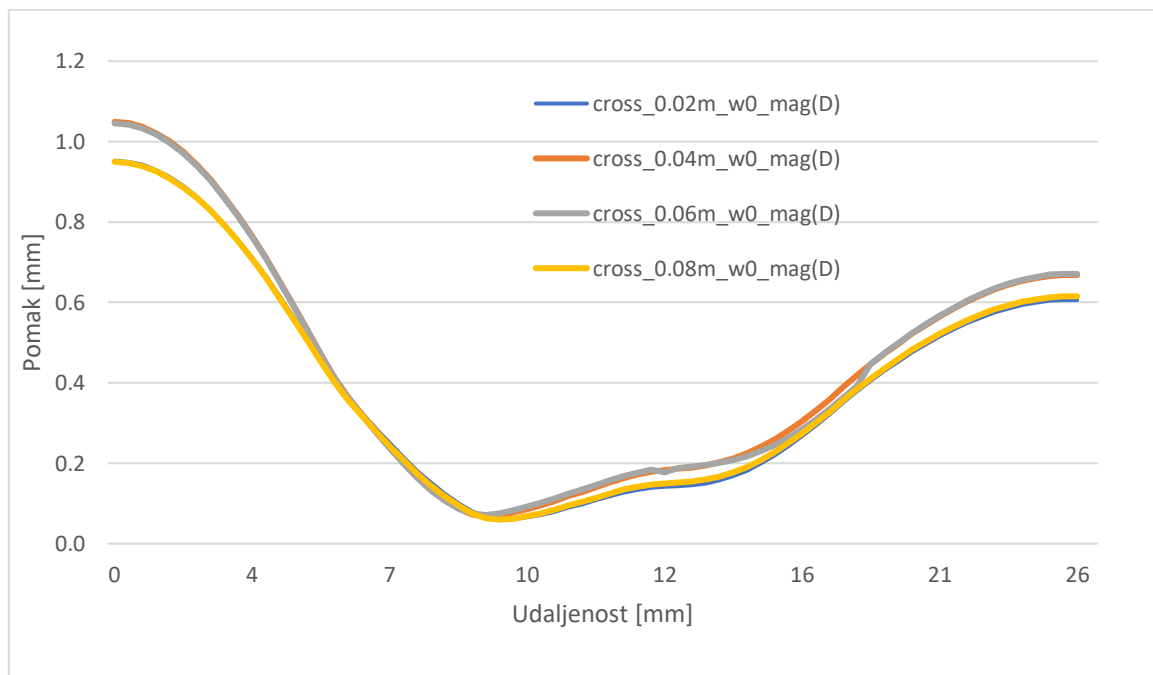
Na slici 67. crtkanim linijama prikazane su krivulje na granicama domena fluida i stijenke po kojima su praćene magnitude pomaka na stijenci oba lumena. Početne točke su na središnjoj membrani na osi simetrije, a završne na vanjskim stijenkama na osi simetrije.

Raspodjele magnituda pomaka na poprečnim presjecima prikazane su dijagramima na slikama 68. i 69. za vremenski trenutak maksimalnog pomaka za  $t=9.17s$ . Promatrani su poprečni

presjeci svakih 0.02m, isključujući presjeka na ulazu i izlazu iz domene jer su pomaci na tim mjestima jednaki nuli kako je zadano preko rubnih uvjeta opisanih u poglavlju 5.3.



Slika 68. Raspodjela pomaka po presjecima stvarnog lumena u  $t=9.17$



Slika 69. Raspodjela pomaka po presjecima lažnog lumena u  $t=9.17$

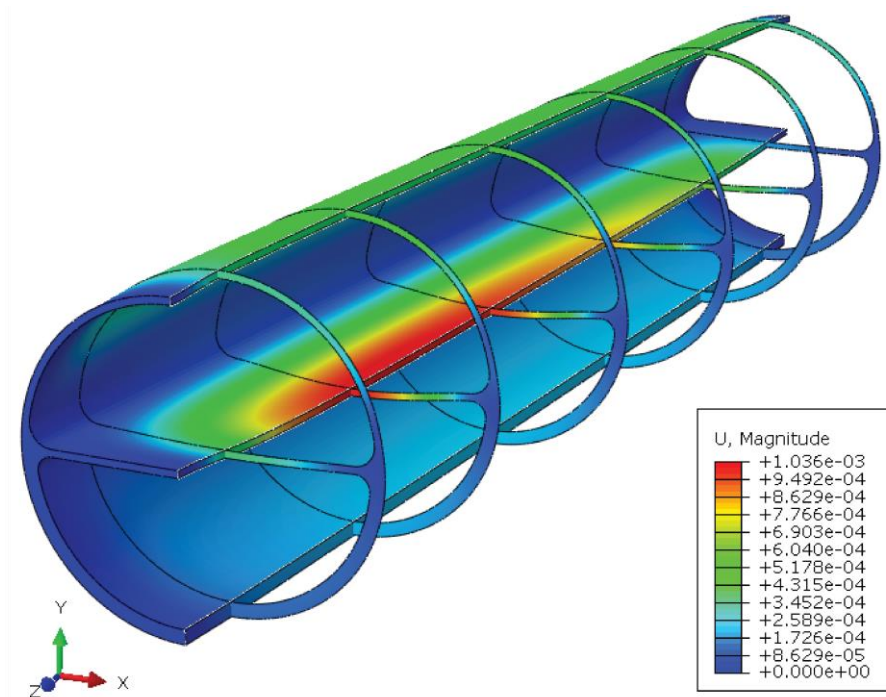
Iz dijagrama sa slika 68. i 69. može se vidjeti da su raspodjele pomaka duž ruba na poprečnim presjecima vrlo slične. Do malog odstupanja dolazi u pomacima na membrani na osi simetrije i na stijenci lažnog lumena između presjeka bližih rubovima i unutarnjih presjeka što je fizikalno opravdano zbog zadanih rubnih uvjeta nutlog pomaka na krajevima.

### 6.1.3. Usporedba rezultata FSI i FEM analize

U ovom poglavlju pokazati će se rezultati analize simetrične disekcije dobiveni metodom konačnih elemenata. Za opterećenje će se koristiti tlakovi na zidovima domene fluida dobiveni FSI analizom u odabranim vremenskim trenutcima. Na rubovima aorte koristiti će se isti rubni uvjeti kao i kod FSI analize, tj. pomaci u sva tri smjera su jednaki nuli.

Kako je mreža domene fluida u FSI analizi pomična tokom vremena, tako su vrijednosti tlakova koji su generirani u točkama na granicama domena preneseni na točke u referentnoj (početnoj) konfiguraciji kako bi se mogli zadati na granicama domene stijenke. Tlakovi su generirani u točkama u centrima graničnih stranica graničnih konačnih volumena na granicama domena u oba lumena. U FEM analizi korišteno je 84800 heksaedarskih konačnih elemenata.

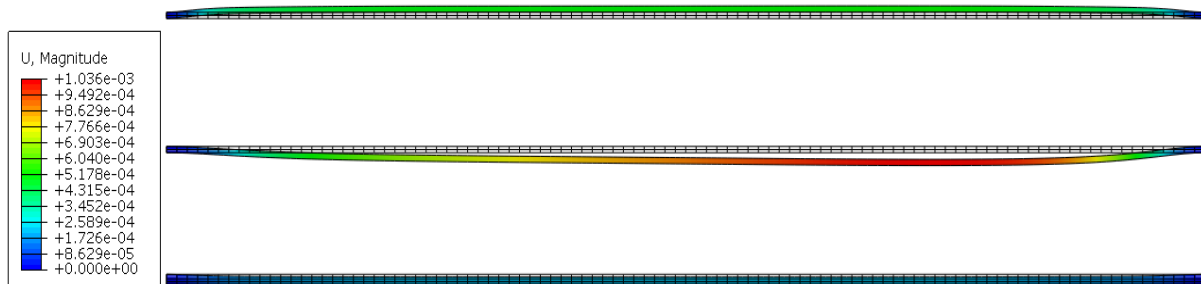
Na slici 70. prikazana je raspodjela pomaka u cijeloj domeni stijenke sa šest dodatnih poprečnih presjeka po uzoru na sliku 60. Uspoređujući slike 70. i 60. vidljivo je da su vrijednosti maksimalnih pomaka gotovo iste i iznose nešto više od 1mm, ali kod FEM analize dolazi do nešto drugačije raspodjele pomaka u geometriji. Maksimalni pomaci u obje domene nalaze se na središnjoj membrani koja dijeli lumene, ali kod FEM analize, u trenutku maksimalnih tlakova u lumenima u  $t=9.17s$ , pomaci nisu simetrično raspodjeljeni na membrani kao kod FSI analize, nego su maksimalni pomaci pomaknuti u stranu veće razlike tlakova u lumenima kao što se vidi na dijagramu na slici 31.



Slika 70. Prikaz deformirane aorte sa presjecima u  $t=9.17s$  FEM analize

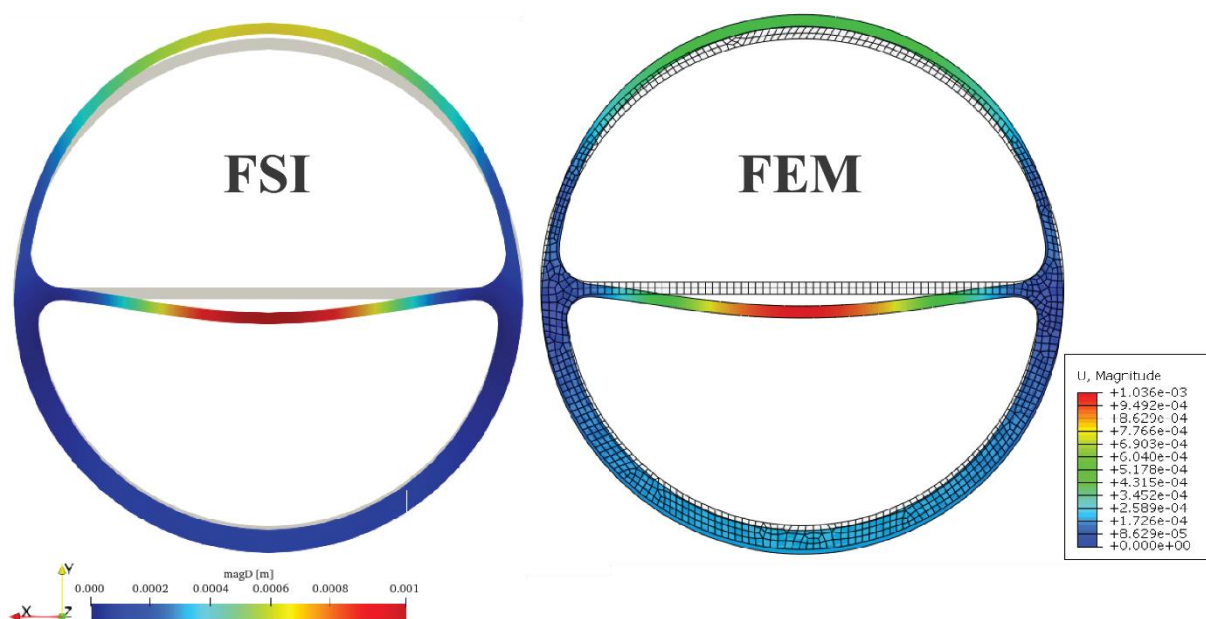


Slika 71. prikazuje uzdužni presjek po sredini deformirane aorte za isti trenutak maksimalnog tlaka dobiven FEM analizom. Na ovoj slici se može bolje vidjeti razina deformacije u usporedbi sa nedeformiranim oblikom, kao i asimetričnost pomaka na središnjoj membrani.



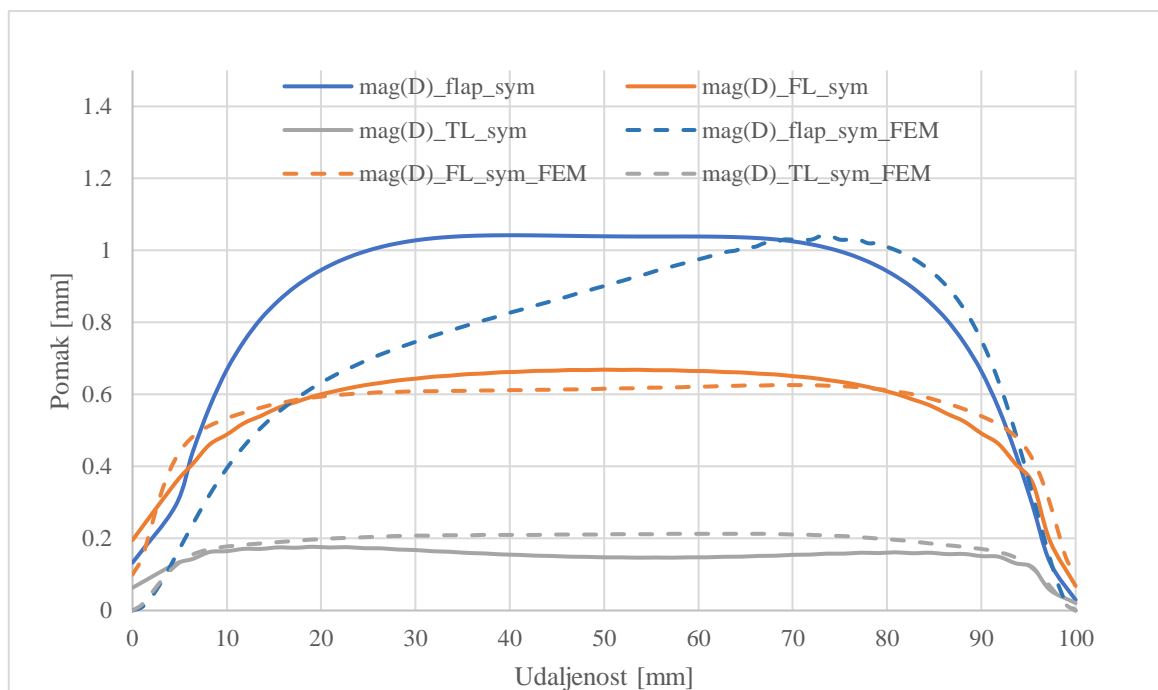
**Slika 71. Uzdužni presjek aorte sa deformiranim i nedeformiranim oblikom u  $t=9.17s$**

Poprečni presjek deformirane aorte u  $t=9.17s$  na duljini od 0.08m prikazan je na slici 72. Na slici je dana usporedba sa slikom 61. koja prikazuje poprečni presjek aorte dobiven FSI analizom, te je vidljivo da u obje analize dolazi do slične deformacije poprečnog presjeka. Razlika u ova dva presjeka je što kod FEM analize dolazi do malo manjih pomaka na vanjskoj stijenci lažnog lumena i većih pomaka na stijenci stvarnog lumena, što će kasnije biti prikazano i dijagramima.



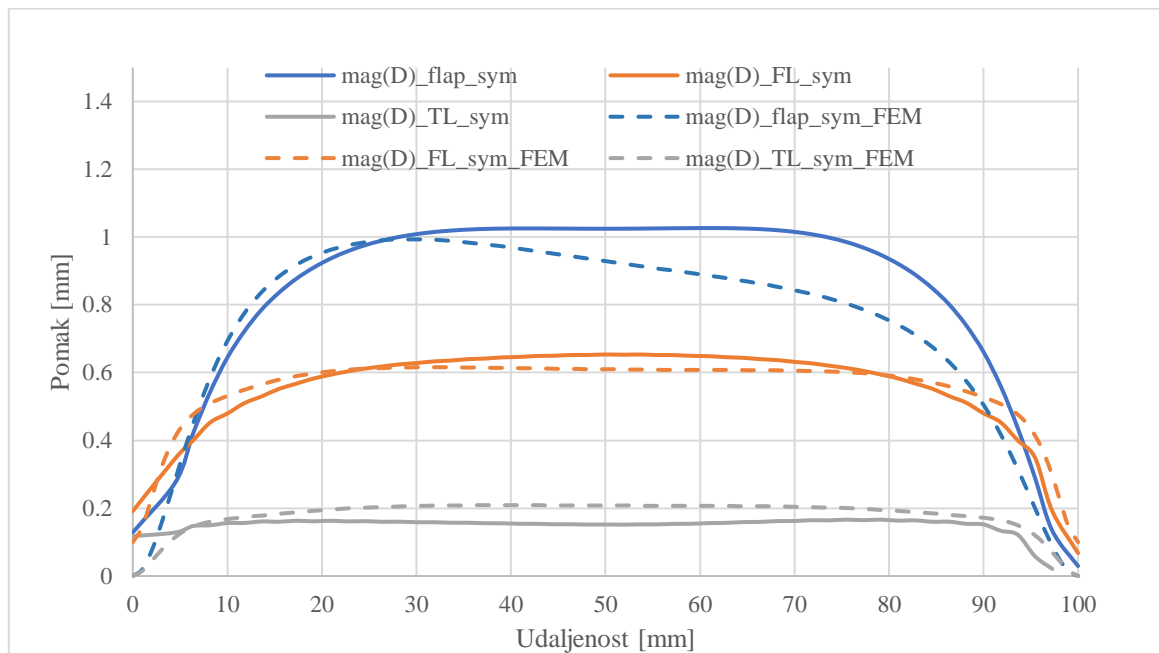
**Slika 72. Poprečni presjek deformirane aorte u  $t=9.17s$  na  $z=0.08m$  FEM analize**

Dijagramima na slikama 73. i 74. prikazana je usporedba pomaka dobivenih FSI i FEM analizom. Promatrane su raspodjele pomaka duž aorte u tri karakteristične točke na osi simetrije, prema slici 62. Sa dijagrama je vidljivo da su pomaci na vanjskim stijenka vrlo slični i po vrijednostima i po raspodjeli, ali do razlike dolazi kod raspodjele pomaka na središnjoj membrani. U oba promatrana vremenska trenutka maksimalne vrijednosti pomaka na membrani su gotovo iste, ali dolazi do većeg odstupanja u raspodjeli pomaka duž membrane, tj. maksimalni pomaci se poklapaju samo na mjestu gdje dolazi do najveće razlike tlakova između stvarnog i lažnog lumena.



**Slika 73. Usporedba rezultata FSI i FEM analize u t=9.17s**

Razlika kod raspodjele pomaka između trenutka maksimalnog i minimalnog tlaka unutar lumena je u poziciji maksimalnog pomaka membrane kod FEM analize, što je rezultat drugačijeg odnosa tlakova između dva lumena na promatranoj udaljenosti duž aorte. Razlike tlakova između lumena vidljive su na slikama 30. i 32.



**Slika 74. Usporedba rezultata FSI i FEM analize u  $t=9.41s$**

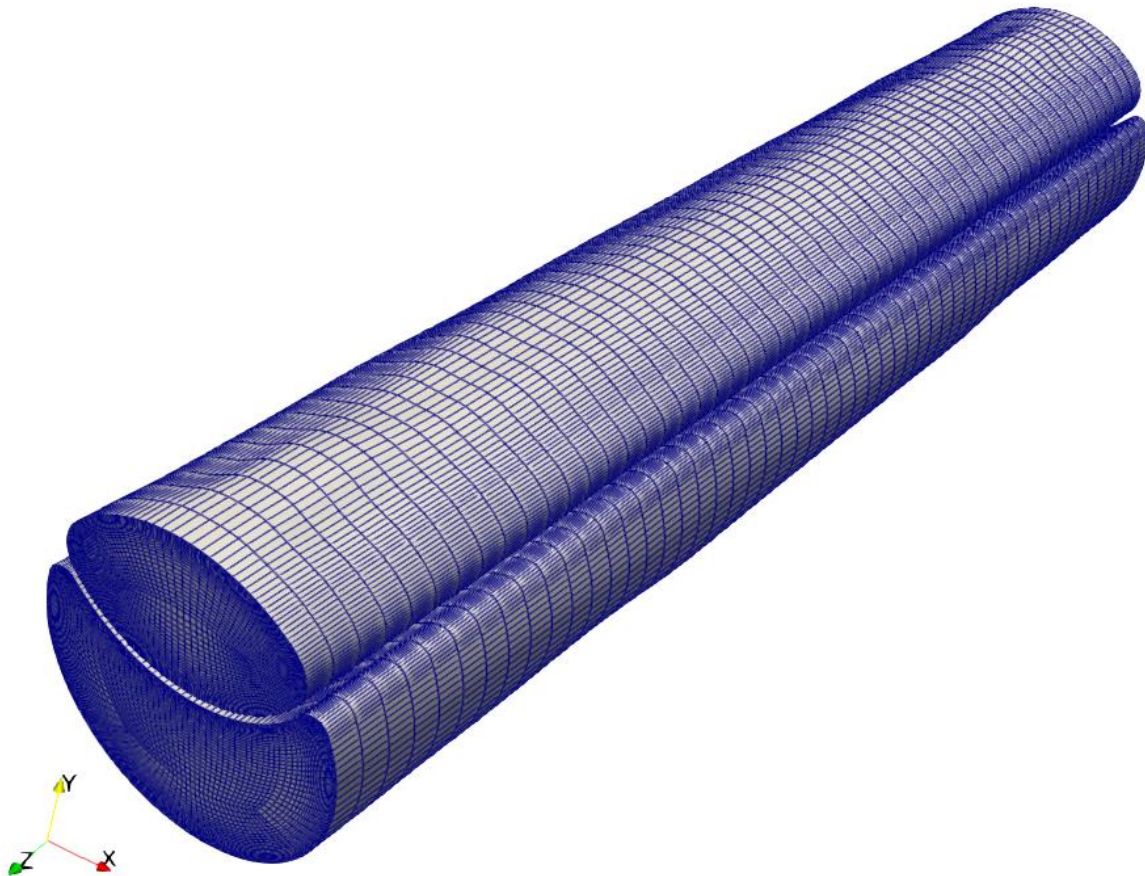
Na dijagramu sa slike 74. vidljivo je da se pozicija maksimalnog pomaka na membrani pomaknula bliže ulazu, te da je manje odstupanje u ostalim djelovima membrane naspram dijagrama sa slike 73., a razlog tome je manja razlika tlakova između stvarnog i lažnog lumena duž aorte u trenutku  $t=9.41s$  što je vidljivo na dijagramu na slici 33. Moguća razlika između raspodjele pomaka na membrani kod FSI i FEM analize leži u tome što je FSI analiza rađena kao dinamička analiza u kojoj se uzimaju u obzir pomaci dobiveni u prethodnom vremenskom računskom koraku, a za FEM analizu su uzete vrijednosti tlakova iz jednog vremenskog trenutka i rađena je statička analiza na nedeformiranoj geometriji aorte. Druga moguća razlika između raspodjele pomaka leži u postupku prenošenja vrijednosti tlakova sa granica deformirane geometrije fluida na granice nedeformirane geometrije stijenke, koja je provedena na način da su uzete vrijednosti tlakova iz točaka na granici sa strane domene fluida i postavljene u točke sa strane domene stijenke na način da su točke sortirane prema pozicijama na kojima se nalaze. Treća moguća razlika između raspodjele pomaka FSI i FEM analize je u tome što su se kod FSI analize uzimala u obzir posmična naprezanja, dok u FEM analizi nisu. Za potvrdu navedenih pretpostavki potrebno je provesti dodatne analize metodom konačnih elemenata sa dinamičkim opterećenjem i analizirati razlike statičke i dinamičke analize, te uzeti u obzir utjecaj posmičnih naprezanja.

## 6.2. Asimetrična disekcija

U ovom poglavlju obraditi će se dobiveni rezultati FSI numeričke simulacije asimetrične disekcije i iznijeti pretpostavke zbog kojih dolazi do prijevremenog prekida simulacije. Zbog kompleksnosti problema potrebno je iznesene pretpostavke potvrditi danjim simulacijama za koje u sklopu ovog rada nije bilo potrebnog vremena. Opisati će se promjene u postavkama simulacije kojima se pokušalo doći do boljeg rješenja i do kraja simulacije.

Radi prekida simulacije prije predviđenog broja ciklusa ovo poglavlje biti će obrađeno nešto drugačije od poglavlja 6.1. simetrične disekcije, te će biti navedeni izmjenjeni parametri kojima su se pokušali eliminirati problemi.

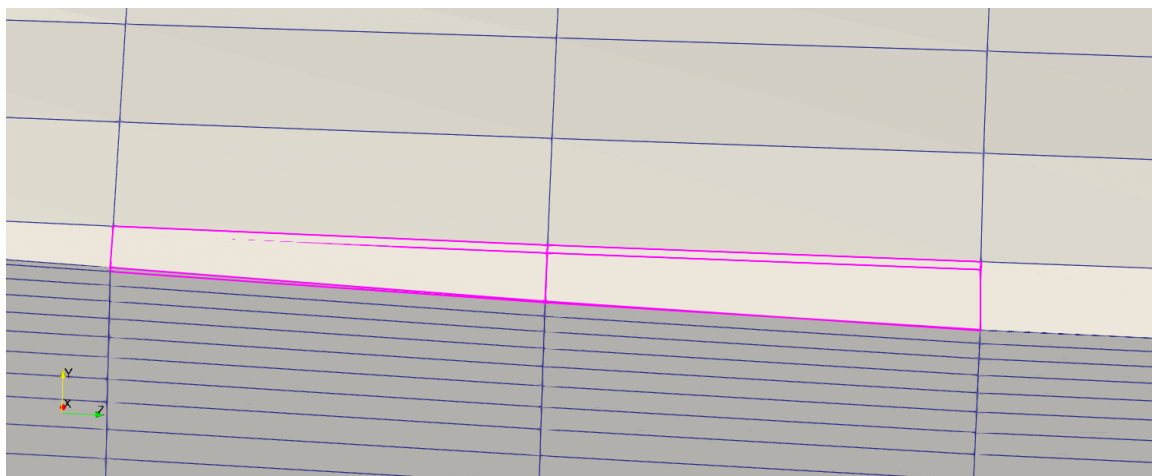
Na slici 75. prikazana je domena fluida za deformiranu geometriju modela asimetrične disekcije u trenutku  $t=1.99s$ , kada je došlo do prekida simulacije.



Slika 75. Deformirana geometrija domene fluida u  $t=1.99s$

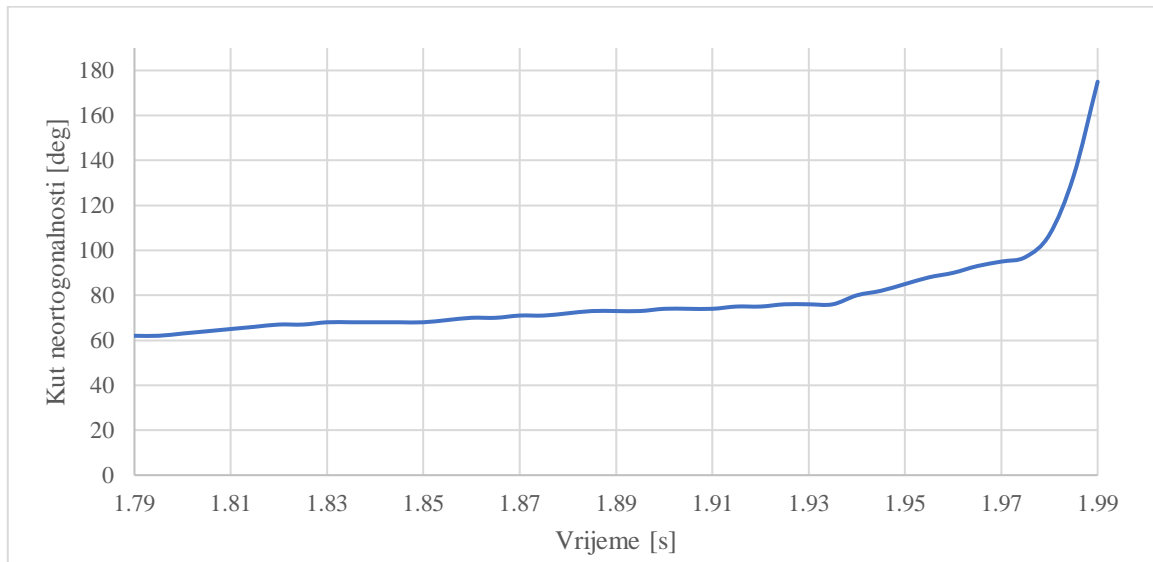
Na slici 75. vidljiva je značajna deformacija domene fluida i oscilacije u pomacima mreže, za razliku od simetrične disekcije kod koje ne dolazi do većih oscilacija u deformaciji mreže.

Algoritam FSI rješavača nakon rješavanja modela stijenke prenosi čvorne pomake sa strane stijenke na stranu fluida na granicama te dvije domene. Nakon preuzetih vrijednosti pomaka sa strane stijenke slijedi rješavanje jednadžbe pomaka mreže fluida, te se pomaci difundiraju sa granice domene kroz cijelu mrežu. Do prekida simulacije dolazi u trenutku kada se nakon pomicanja mreže fluida granični konačni volumeni previše izdeformiraju, te se formiraju negativni volumeni kod kojih vanjske stranice prolaze kroz unutarnje, kao što je prikazano na slici 76., a što dovodi do numeričke greške i nemogućnosti rješavanja jednadžbi u takvim konačnim volumenima.



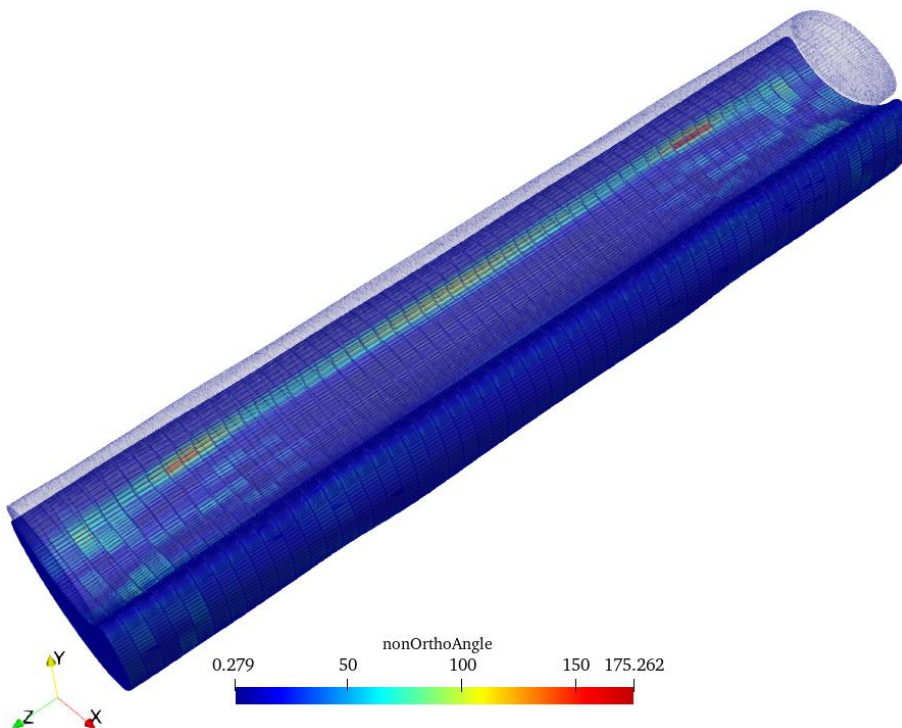
**Slika 76. Deformacija ćelija u mreži u graničnom sloju do stijenke**

Na slici 77. dijagramom su prikazane vrijednosti maksimalnog kuta neortogonalnosti u domeni fluida za zadnjih 0.2 sekunde simulacije prije prekida. Sa dijagrama je vidljivo da do porasta vrijednosti maksimalnog kuta neortogonalnosti dolazi par trenutaka prije prekida simulacije, točnije, vrijednosti kuta veće od 90 stupnjeva se pojavljuju nakon vremenskog trenutka  $t=1.96s$ , a zadnjih 0.01 sekundu dolazi do eksponencijalnog rasta vrijednosti i do konačnog prekida u  $t=1.99s$ .



**Slika 77. Iznosi maksimalnog kuta neortogonalnosti u mreži prije prekida**

Na slici 78. prikazana je domena stvarnog lumena sa naznačenim mjestima maksimalnih vrijednosti kuta neortogonalnosti. Do pojave negativnih volumena dolazi u stvarnom lumenu na granici sa središnjom mrežom na mjestima maksimalnih vrijednosti kuta neortogonalnosti označenih crvenom bojom.



**Slika 78. Kutovi neortogonalnosti u domeni stvarnog lumena u  $t=1.99s$**

Nakon rješavanja jednadžbi pomaka mreže domene fluida ne dolazi do provjere ispravnosti novodobivene mreže, nego algoritam ulazi u sljedeći korak, koji je rješavanje jednadžbi modela fluida u kojemu dolazi do prekida simulacije u  $t=1.99s$  zbog nemogućnosti izračuna jednadžbi u deformiranim konačnim volumenima.

Kako bi se nastojao riješiti problem stvaranja negativnih i izričito izdeformiranih konačnih volumena, generirane su finije mreže koje su davale slične rezultate, tj. završavale su prije zadanog vremena trajanja simulacije. Zbog kompleksnosti rješavanja FSI problema i posljedično sporosti, u sklopu ovoga rada nije bilo dovoljno potrebnog vremena da se nađe adekvatna mreža konačnih volumena s kojom bi se mogao opisati zadani problem.

Drugi pristup rješavanju problema pomicanja mreže je bilo podešavanje parametra za izračun koeficijenta difuzivnosti. Korišteni su svi dostupni modeli i rješavači za izračun pomaka kroz mrežu, ali nisu davali bolje rezultate.



## 7. ZAKLJUČAK

Zadatak ovoga rada bio je sprovesti numeričke simulacije međudjelovanja fluida i stijenke za dvije idealizirane geometrije disekcije aorte i analizirati dobivene rezultate, te provjeriti rezultate FSI analize metodom konačnih elemenata u komercijalnom programskom paketu.

Rezultati simulacije simetrične disekcije pokazali su djelomičnu konvergenciju promatranih fizikalnih veličina, te osjetljivost rezultata na duljinu geometrije, tj. na utjecaj rubnih uvjeta. Bolja konvergencija rezultata se događa u stvarnom lumenu, dok u lažnom lumenu rezultati imaju tendenciju danje promjene i nakon završetka simulacije. Pomaci dobiveni metodom konačnih elemenata djelomično prate rezultate dobivene FSI analizom na domeni stijenke, a do većih promjena dolazi na središnjoj membrani, na koju fluid djeluje sa dvije strane njene granice različitim tlakovima.

Iz rezultata simulacije asimetrične disekcije u kojoj dolazi do prijevremenog prekida je teško detektirati točan razlog zbog čega dolazi do prijevremenog prekida, ali se može pretpostaviti da je u najvećoj mjeri razlog mreža konačnih volumena koja nije adekvatna za rješavanje ovako kompleksnog problema. Generiranjem finijih mreža nije se uspio eliminirati problem u zadanom roku, a kako simulacija promatranog problema iziskuje puno vremena za provedbu na ograničenim računalnim resursima, tako u sklopu ovoga rada nije bilo potrebnog vremena za pronalazak adekvatne proračunske mreže.

Kompleksnost promatranog problema u ovome radu proizlazi iz načina rješavanja problema međudjelovanja fluida i stijenke u kojemu se te dvije domene rješavaju odvojenim postupkom, tj. koristeći dva rješavača uz dvije računske mreže, od kojih je mreža fluida promjenjiva u ovisnosti o vremenu i ovisi o pomacima stijenke, te iz kompleksnosti prirode tranzijentnog strujanja u kojemu dolazi do promjene smjera strujanja fluida unutar jednog srčanog ciklusa, što stvara dodatne oscilirajuće efekte.

Kako se analizom dobivenih rezultata može zaključiti neadekvatnost duljine geometrije i utjecaj rubnih uvjeta na rezultate, potrebno je provoditi danje analize sa većim duljinama geometrije i sa drugačije zadanim rubnim uvjetima, te promatrati utjecaje pojedinačnih promjena u postavkama simulacije na dobivene rezultate. Također je potrebno i dodatno ispitati način zadavanja rubnih uvjeta preko prethodno puštene CFD simulacije sa pretpostavkom krute stijenke.



## LITERATURA

- [1] T. Luebke, J. Brunkwall. Type B aortic dissection: A review of prognostic factors and meta-analysis of treatment options, 2014. DOI: 10.12945/j.aorta.2014.14-040
- [2] Basic anatomy of the human heart, Cardiology Associates of Michigan, <https://www.cardofmich.com/anatomy-human-heart-fun-facts> (preuzeto travanj, 2021.)
- [3] R. Hrašćan, Krvožilni sustav, Prehrambeno-biotehnološki fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska, 2013., <http://users.pbf.hr/content/download/25980/100804/version/1/file/Krvozilni+i+disni+sustav+2013-14.pdf> (preuzeto travanj, 2021.)
- [4] Aorta Anatomy, Cleveland Clinic, <https://my.clevelandclinic.org/-/scassets/775f03fd954741afb92d7720b73c40a1.ashx> (preuzeto travanj, 2021.)
- [5] MSD priručnik dijagnostike i terapije, Disekcija aorte, <http://www.msd-prirucnici.placebo.hr/msd-za-pacijente/bolesti-srca-i-krvnih-zila/aneurizme-i-disekcija-aorte/disekcija-aorte> (preuzeto travanj, 2021.)
- [6] J. Vincelj, Disekcija aorte, <https://www.zdravobudi.hr/clanak/kardiologija/disekcija-aorte-16445> (preuzeto travanj 2021.)
- [7] University of Florida Health, Dissection tear crosssection, <https://ufhealth.org/sites/default/files/media/Aorta-center/dissection-tear-crosssection.jpg> (preuzeto travanj 2021.)
- [8] P.Cardiff, A. Karač, P. De Jaeger, H. Jasak, J. Nagy, A. Ivanković, Ž. Tuković. An open-source finite volume toolbox for solid mechanics and fluid-solid interaction simulations, 2018. arXiv: 1808.10736 [math.NA].
- [9] Ž. Tuković. Metoda kontrolnih volumena na domenama promjenjivog oblika. Doktorski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska, 2005.
- [10] F. R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. U K. Hanjalic, Y.Nagano and M.Tummers (Editors). Begell House, Inc., 2003.

- [11] F. R. Menter. Zonal two equation  $k$ - $\omega$  turbulence models for aerodynamic flows. Elort Institute Sunnyvale, CA, 1993.
- [12] Law of the wall, Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Law\\_of\\_the\\_wall](https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_the_wall) (preuzeto travanj 2021.)
- [13] P. Cardiff, Ž. Tuković, P. De Jaeger, M. Clancy, A. Ivanković. A Lagrangian cellcentred finite volume method for metal forming simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 109(13):1777-1803, 2017. ISSN: 1097-0207. DOI: 10.1002/NME.5345.
- [14] Ž. Tuković, A. Karač, P. Cardiff, H. Jasak, A. Ivanković. OpenFOAM finite volume solver for fluid-solid interaction. ISSN: 1333-1124. DOI: 10.21278/TOF.42301
- [15] P. Cardiff. Solid mechanics and fluid-solid interaction using the solids4foam toolbox training. Schools of Mechanical and Materials Engineering, and Computer Science, University College Dublin. 2020.
- [16] C. Karmonik, R. Klucznik, G. Benndorf. Blood flow in cerebral aneurysms: Comparison of phase contrast magnetic resonance and computational fluid dynamics – preliminary experience. DOI: 10.1055/s-2008-1027135
- [17] H. Meng, D. D. Swartz, Z. Wang, Y. Hoi, J. Kolega, E. M. Metaxa, M. P. Szymanski, J. Yamamoto, E. Sauvageau, E. I. Levy. A model system for mapping vascular responses to complex hemodynamics at arterial bifurcations in vivo. DOI: 10.1227/01.NEU.0000245599.92322.53
- [18] Z. Cheng, F. P. P. Tan, C. V. Riga, C. D. Bicknell, M. S. Hamady, R. G. J. Gibbs, N. B. Wood, and X. Y. Xu. Analysis of flow patterns in a patient-specific aortic dissection model. *Journal of Biomechanical Engineering*, 132(5):051007, 2010. ISSN: 0148-0731. DOI: 10.1115/1.4000964.
- [19] N. S. Burris, D. A. Nordsletten, J. A. Sotelo, R. Grogan-Kaylor, I. B. Houben, C. A. Figueroa, S. Uribe, and H. J. Patel. False lumen ejection fraction predicts growth in type b aortic dissection: preliminary results. *European Journal of Cardio-Thoracic Surgery*, 57(5):896-903, 2019. ISSN: 1010-7940. DOI: 10.1093/ejcts/ezz343.

[20] Z. Cheng, C. Juli, N. B. Wood, R. G. J. Gibbs, and X. Y. Xu. Predicting flow in aortic dissection: comparison of computational model with PC-MRI velocity measurements. *Medical Engineering & Physics*, 36(9):1176-1184, 2014. ISSN: 1350-4533.  
DOI: 10.1016/j.medengphy.2014.07.006.

[21] K. Khanafer, A. Duprey, M. Zainal, M. Schlicht, D. Williams, R. Berguer. Determination of the elastic modulus of ascending thoracic aortic aneurysm at different ranges of pressure using uniaxial tensile testing. DOI: 10.1016/j.jtcvs.2010.09.068