

# Upravljanje robotskim manipulatorom primjenom aktivne kompenzacije poremećaja

---

**Fiolić, Borna**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:485811>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Borna Fiočić**

Zagreb, 2021. godina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Josip Kasać, dipl. ing.

Student:

Borna Fiolić

Zagreb, 2021. godina

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr. sc. Josipu Kasaću, na susretljivosti, stručnim savjetima i pružanoj pomoći pri izradi ovoga rada, kao i na cjelokupnom znanju koje mi je prenio tijekom studija.

Također, zahvaljujem se svojoj obitelji koja mi je oduvijek bila podrška pa tako i tokom cijelog studija.

Borna Fiolić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	602-04/21-6/1
Ur. broj:	15-1703-21

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **BORNA FIOLIĆ**

Mat. br.: 0035195144

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Upravljanje robotskim manipulatorom primjenom aktivne kompenzacije poremećaja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Active disturbance rejection control of robot manipulator**

Opis zadatka:

Dinamički modeli robotskih manipulatora s više rotacijskih stupnjeva slobode gibanja izrazito su nelinearni i složeni. Upravljanje konvencionalnim metodama poput eksterne linearizacije ili adaptivnog upravljanja neprimjenjivo je u praksi zbog izrazite računske složenosti kao i zbog nerobusnosti na neodređenosti dinamičkog modela. Konvencionalni linearni PID regulatori primjenjivi su isključivo u slučaju konstantnih referentnih stanja. Robusni regulatori s kliznim režimom (engl. sliding-mode) omogućuju slijeđenje vremenski varijabilnih referentnih trajektorija. Međutim, točnost slijeđenja robusnih regulatora ograničena je zbog diskontinuiranog zakona upravljanja i primjene estimatora brzine. U ovom radu razmatraju se performanse upravljanja robotskim manipulatorom primjenom aktivne kompenzacije poremećaja. Performanse navedenog regulatora uspoređuju se s performansama adaptivnog i robusnog regulatora u kombinaciji s filterom za estimaciju brzine.

U radu je potrebno:

- Izvesti i implementirati dinamički model robotskog manipulatora s dva rotacijska stupnja slobode gibanja.
- Implementirati klasično adaptivno i robusno upravljanje robotskim manipulatorom uz pretpostavku mjerljivih brzina.
- Implementirati adaptivno i robusno upravljanje robotskim manipulatorom u kombinaciji s filterima za estimaciju brzina.
- Implementirati upravljanje robotskim manipulatorom primjenom aktivne kompenzacije poremećaja.
- Usporediti performanse upravljanja primjenom aktivne kompenzacije poremećaja s performansama adaptivnog i robusnog upravljanja u kombinaciji s filterima za estimaciju brzina.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
4. ožujka 2021.

Rok predaje rada:  
6. svibnja 2021.

Predviđeni datum obrane:  
10. svibnja do 14. svibnja 2021.

Zadatak zadao:  
*Kasac Josip*  
prof. dr. sc. Josip Kasac

Predsjednica Povjerenstva:  
*Runje*  
prof. dr. sc. Biserka Runje

## SADRŽAJ

SADRŽAJ . . . . .	<b>II</b>
POPIS SLIKA . . . . .	<b>IV</b>
POPIS OZNAKA . . . . .	<b>V</b>
SAŽETAK . . . . .	<b>VIII</b>
SUMMARY . . . . .	<b>IX</b>
1. Uvod . . . . .	<b>1</b>
2. Dinamika robotskog manipulatora . . . . .	<b>3</b>
2.1 Dinamička svojstva robotskih manipulatora . . . . .	5
2.2 Dinamički model RR robota . . . . .	7
2.3 Klasične metode upravljanja robotima . . . . .	11
2.3.1 PD regulator . . . . .	12
2.3.2 PID regulator . . . . .	13
2.3.3 Metoda eksterne linearizacije . . . . .	14
3. Adaptivno i robusno upravljanje . . . . .	<b>17</b>
3.1 Adaptivno upravljanje robotima . . . . .	17
3.2 Adaptivno upravljanje RR robotom . . . . .	19
3.3 Robusno (sliding-mode) upravljanje . . . . .	25
3.4 Robusno upravljanje RR robotom . . . . .	27
4. Adaptivno i robusno upravljanje primjenom estimatora brzine . . . . .	<b>31</b>
4.1 Estimatori brzine . . . . .	31
4.1.1 Dirty derivative filter . . . . .	31
4.1.2 Sliding-mode filter . . . . .	32
4.1.3 Super-twisting filter . . . . .	33
4.2 Adaptivno upravljanje (RR robotom) primjenom estimatora brzine . . . . .	34
4.3 Robusno upravljanje (RR robotom) primjenom estimatora brzine . . . . .	36
4.3.1 Simulacijski rezultati za dirty derivative filter . . . . .	37
4.3.2 Simulacijski rezultati za sliding-mode filter . . . . .	38
4.3.3 Simulacijski rezultati za super-twisting filter . . . . .	39
5. Upravljanje primjenom aktivne kompenzacije poremećaja . . . . .	<b>42</b>
5.1 Aktivna kompenzacija poremećaja za sustave drugog reda . . . . .	44
5.2 Poopćeni ADRC za sustave drugog reda . . . . .	46

---

5.3 Upravljanje RR robotom primjenom aktivne kompenzacije poremećaja . . . . .	48
5.3.1 Podsustav 1 . . . . .	49
5.3.2 Podsustav 2 . . . . .	51
5.4 Usporedba upravljačkih performansi ADRC-a sa robusnim upravljanjem (sa estimatorima brzina) . . . . .	54
5.4.1 Simulacijski rezultati za ADRC upravljanje . . . . .	55
5.4.2 Simulacijski rezultati sliding-mode upravljanja . . . . .	58
6. Zaključak . . . . .	61
LITERATURA . . . . .	63
PRILOG . . . . .	65

## POPIS SLIKA

Slika 2.1. Shema robotskog manipulatora s dva rotacijska stupnja slobode gibanja . . .	7
Slika 3.1. Odziv adaptivnog regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) . . . . .	23
Slika 3.2. Regulacijska pogreška adaptivnog regulatora u logaritamskoj skali . . . . .	23
Slika 3.3. Upravljački signal $u_1$ i $u_2$ adaptivnog regulatora . . . . .	23
Slika 3.4. Adaptivna estimacija parametara dinamičkog modela . . . . .	24
Slika 3.5. Odziv sliding mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) . . . . .	28
Slika 3.6. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali . . . . .	29
Slika 3.7. Upravljački signal $u_1$ i $u_2$ sliding-mode regulatora . . . . .	29
Slika 4.1. Shematski prikaz Dirty derivative filtera . . . . .	32
Slika 4.2. Shematski prikaz Sliding-mode filtera . . . . .	33
Slika 4.3. Odziv adaptivnog regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (SM filter) . . . . .	35
Slika 4.4. Regulacijska pogreška adaptivnog regulatora u logaritamskoj skali (SM filter)	35
Slika 4.5. Upravljački signal $u_1$ i $u_2$ adaptivnog regulatora (SM filter) . . . . .	35
Slika 4.6. Adaptivna estimacija parametara dinamičkog modela (SM filter) . . . . .	36
Slika 4.7. Odziv sliding mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (DD filter) . . . . .	37
Slika 4.8. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali (DD filter) . . . . .	37
Slika 4.9. Upravljački signal $u_1$ i $u_2$ sliding-mode regulatora (DD filter) . . . . .	38
Slika 4.10. Odziv sliding mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (SM filter) . . . . .	38
Slika 4.11. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali (SM filter) . . . . .	39
Slika 4.12. Upravljački signal $u_1$ i $u_2$ sliding-mode regulatora (SM filter) . . . . .	39



<b>Slika 4.13. Odziv sliding mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (ST filter)</b> . . . . .	40
<b>Slika 4.14. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali (ST filter)</b> . . . . .	40
<b>Slika 4.15. Upravljački signal <math>u_1</math> i <math>u_2</math> sliding-mode regulatora (ST filter)</b> . . . . .	40
<b>Slika 5.1. Odziv ADRC regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno)</b> . . . . .	56
<b>Slika 5.2. Regulacijska pogreška ADRC regulatora u logaritamskoj skali</b> . . . . .	56
<b>Slika 5.3. Upravljački signal <math>u_1</math> i <math>u_2</math> ADRC regulatora</b> . . . . .	56
<b>Slika 5.4. Ovisnost točnosti slijeđenja referentne trajektorije o redu proširenog observera stanja</b> . . . . .	57
<b>Slika 5.5. Odziv sliding mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (saturacija)</b> . . . . .	58
<b>Slika 5.6. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali (saturacija)</b> . . . . .	59
<b>Slika 5.7. Upravljački signal <math>u_1</math> i <math>u_2</math> sliding-mode regulatora (saturacija)</b> . . . . .	59

## POPIS OZNAKA

$\mathbf{A}$	-	Matrica koeficijenata sustava
$\mathbf{B}$	-	Ulazna matrica
$\mathbf{C}$	-	Izlazna matrica
$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$	Coriolisova matrica
$c_{ijk}(q)$	$\text{kg m}$	Christoffelov simbol prve vrste
$d(t)$	$\text{N m}$	Totalni poremećaj
$\hat{d}(t)$	$\text{N m}$	Estimirani totalni poremećaj
$e(t)$	-	Regulacijska pogreška
$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$	$\text{N m}$	Vektor poopćenih sila viskoznog trenja
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	-	Kontinuirana vektorska funkcija
$\mathbf{G}(\mathbf{x})$	-	Kontinuirana matrična funkcija
$\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$	-	Vektorske funkcije matrice $\mathbf{G}(\mathbf{x})$
$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$	$\text{N m}$	Vektor gravitacije
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	-	Kontinuirana vektorska funkcija
$K(\theta, \dot{\theta})$	$\text{J}$	Kinetička energija
$K_P$	-	Konstanta proporcionalnog djelovanja
$K_D$	-	Konstanta derivativnog djelovanja
$K_I$	-	Konstanta integralnog djelovanja
$K_f$	-	Koeficijent pojačanja filtera za estimaciju brzina
$\mathbf{K}_D$	-	Pozitivno definitna matrica pojačanja
$\mathbf{K}_d$	-	Matrica s pojačanjima većim od nule
$L(\theta, \dot{\theta})$	$\text{J}$	Lagrangianova funkcija
$\mathbf{L}$	-	Matrica pojačanja observera stanja
$l_1, l_2$	$\text{m}$	Duljine članaka RR robota
$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$	$\text{kg m}^2$	Matrica inercije
$m_1, m_2$	$\text{kg}$	Mase članaka RR robota
$P(\theta)$	$\text{J}$	Potencijalna energija

$\mathbf{p}$	$\text{kg m}^2$	Vektor nepoznatih parametara dinamičkog modela
$\hat{\mathbf{p}}$	$\text{kg m}^2$	Vektor estimiranih parametara modela
$\mathbf{q}$	rad	Vektor unutrašnjih poopćenih koordinata
$\dot{\mathbf{q}}$	$\text{rad s}^{-1}$	Vektor unutrašnjih poopćenih brzina
$R(\dot{\mathbf{q}})$	W	Rayleighova disipacijska funkcija
$\mathbf{r}$	-	Vektor sliding varijabli
$u_1, u_2$	Nm	Upravljačke varijable
$\mathbf{u}$	Nm	Vektor upravljačkih varijabli
$x_1$	m	$x$ koordinata pozicije mase $m_1$ u $x - y$ koordinatnom sustavu
$x_2$	m	$x$ koordinata pozicije mase $m_2$ u $x - y$ koordinatnom sustavu
$\dot{x}_1$	$\text{m s}^{-1}$	Brzina mase $m_1$ u smjeru $x$ osi
$\dot{x}_2$	$\text{m s}^{-1}$	Brzina mase $m_2$ u smjeru $x$ osi
$x(t)$	-	Varijabla stanja
$x_d$	-	Referentna varijabla stanja
$\mathbf{x}$	-	Vektor varijabli stanja
$\hat{\mathbf{x}}$	-	Estimirani vektor varijabli stanja
$\mathbf{x}_o$	-	Prošireni vektor varijabli stanja
$y_1$	m	$y$ koordinata pozicije mase $m_1$ u $x - y$ koordinatnom sustavu
$y_2$	m	$y$ koordinata pozicije mase $m_2$ u $x - y$ koordinatnom sustavu
$\dot{y}_1$	$\text{m s}^{-1}$	Brzina mase $m_1$ u smjeru $y$ osi
$\dot{y}_2$	$\text{m s}^{-1}$	Brzina mase $m_2$ u smjeru $y$ osi
$\mathbf{y}$	-	Vektor izlaznih varijabli
$\hat{\mathbf{y}}$	-	Estimirani vektor izlaznih varijabli
$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r)$	$\text{s}^{-2}$	Regresijska matrica
$\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$	-	Pozitivno definitna matrica
$\theta_1, \theta_2$	rad	Kutne pozicije članaka RR robota
$\boldsymbol{\theta}$	rad	Vektor kutnih pozicija članaka RR robota
$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$	$\text{rad s}^{-1}$	Kutne brzine članaka RR robota
$\dot{\boldsymbol{\theta}}$	$\text{rad s}^{-1}$	Vektor kutnih brzina članaka RR robota

$\tilde{\theta}$	rad	Vektor regulacijskog odstupanja kutnih pozicija zglobova RR robota
$\theta_d$	rad	Vektor referentnih kutnih pozicija zglobova RR robota
$\dot{\tilde{\theta}}$	rad s <sup>-1</sup>	Vektor regulacijskog odstupanja kutnih brzina članaka RR robota
$\dot{\theta}_d$	rad s <sup>-1</sup>	Vektor referentnih kutnih brzina članaka RR robota
$\ddot{\tilde{\theta}}$	rad <sup>-2</sup>	Vektor regulacijskog odstupanja kutnih ubrzanja članaka RR robota
$\ddot{\theta}_d$	rad s <sup>-2</sup>	Vektor referentnih kutnih ubrzanja članaka RR robota
$\dot{\theta}_r$	-	Vektor supstitucijskih varijabli
$\ddot{\theta}_r$	-	Derivirani vektor supstitucijskih varijabli
$\hat{\dot{\theta}}$	rad s <sup>-1</sup>	Estimirana brzina pomoću filtera
$\lambda_m\{\mathbf{M}\}$	-	Pozitivna minimalna vlastita vrijednost od $\mathbf{M}(\mathbf{q})$
$\lambda_M\{\mathbf{M}\}$	-	Pozitivna maksimalna vlastita vrijednost od $\mathbf{M}(\mathbf{q})$
$\lambda$	-	Vektor koeficijenata sliding varijabli
$\rho$	-	Pojačanje sliding-mode regulatora

## SAŽETAK

U ovome radu razmatra se upravljanje robotskim manipulatorom s dva rotacijska stupnja slobode gibanja u horizontalnoj ravnini primjenom aktivne kompenzacije poremećaja zasnovane na proširenom observeru stanja. Izveden je matematički model robotskog manipulatora koji se koristi za računalno simuliranje upravljačkih performansi pri slijeđenju proizvoljne, vremenski promjenjive, referentne trajektorije. Prvo je implementiran klasični adaptivni regulator uz pretpostavku poznavanja regresijske matrice robotskog manipulatora. Zatim je implementiran robusni regulator uz pretpostavku nepoznate dinamike robotskog manipulatora. Performanse upravljanja adaptivnog i robusnog regulatora testirane su za slučaj mjerljivih brzina i u slučaju primjene filtera za estimaciju brzina. Na kraju je implementirano upravljanje primjenom aktivne kompenzacije poremećaja s proširenim observerom stanja proizvoljnog reda. Simulacijski rezultati upravljanja primjenom aktivne kompenzacije poremećaja uspoređeni su sa rezultatima upravljanja robusnog regulatora u kombinaciji sa sliding-mode filterom za estimaciju brzina.

Ključne riječi: Upravljanje primjenom aktivne kompenzacije poremećaja, Prošireni observer stanja, Adaptivno upravljanje, Robusno upravljanje, Robotski manipulatori.

## **SUMMARY**

In this thesis, an active disturbance rejection control of a robotic manipulator, based on an extended state observer, is considered. A mathematical model of a robotic manipulator in the horizontal plane with two rotational degrees of freedom is derived. The model is used for testing and evaluating the performance of control algorithms, on a computer simulation, by following an arbitrary, time-varying, reference trajectory. First, a classical adaptive controller was implemented with the assumption of knowing the regression matrix of the robotic manipulator. Then a sliding mode controller was implemented assuming unknown dynamics of the robotic manipulator. The control performance of the adaptive and sliding mode controller has been tested for measurable velocities and for the application of velocity estimation filters. Finally, an active disturbance rejection control based on extended state observer of arbitrary order was implemented. The simulation results from performance testing of active disturbance rejection control are compared with control performance results of a sliding-mode controller in combination with a sliding mode filter for velocity estimation.

Key words: Active disturbance rejection control, Extended state observer, Adaptive control, Sliding mode control, Robotic manipulators.

# 1. Uvod

Dinamički sustavi sastavni su dio prirodnih procesa te se kao takvi javljaju u gotovo svim granama prirodnih i društvenih znanosti. Samo neki od primjera uključuju rast populacije, klimatske promjene, tržište kapitala, širenje epidemije, kemijske reakcije, kretanje nebeskih tijela, ovjes automobila i slično. Razumijevanje ovih sustava stoga je od velike koristi te donosi mnoge prednosti: omogućuje stvaranje predikcija kretanja njegovih elemenata, razvoj algoritama za regulaciju i upravljanje tim sustavima kao i modeliranje novih sustava.

U ovome radu razmatra se nekoliko metoda upravljanja modelom robotskog manipulatora s dva rotacijska stupnja slobode gibanja ili skraćeno RR robotom. Dinamički modeli robotskih manipulatora s više rotacijskih stupnjeva slobode izrazito su nelinearni i složeni. Konvencionalni linearni PID regulatori omogućuju praćenje samo konstantnih referentnih stanja što u pravilu ne zadovoljava potrebe upravljanja današnjih industrijskih robota. Metoda eksterne linearizacije zahtjeva apsolutno poznavanje matematičkog modela upravljanog sustava, dok metoda adaptivnog upravljanja podrazumijeva poznavanje matematičkog modela na neodređenost njegovih parametara. To izrazito povećava računsku složenost implementacije ovih metoda, ali ih i čini nerobusnima na neodređenost dinamičkog modela radi čega ove metode nisu primjenjive u praksi. Povećanjem složenosti proizvodnih procesa u današnjoj industriji, također rastu i zahtjevi upravljanja robotskih manipulatora. Oni često podrazumijevaju slijeđenje proizvoljne, vremenski promjenjive, referentne trajektorije uz zadovoljavanje osnovnih zahtjeva pri regulaciji kao što su asimptotska stabilnost, točnost, zadovoljavajuća brzina odziva i optimalan karakter prijelazne pojave. Kao rješenje na postavljene zahtjeve, u sklopu ovoga rada, predlaže se metoda upravljanja primjenom aktivne kompenzacije poremećaja (ADRC) koja je zasnovana na proširenom observeru stanja (ESO). Riječ je o naprednoj metodi upravljanja primjenjivoj na nelinearnim sustavima čiji dinamički model nije poznat, a koja u posljednjih nekoliko godina pronalazi primjenu u širokom spektru automatskog upravljanja. U sklopu ovoga rada, performanse navedenog regulatora uspoređuju se s performansama adaptivnog i robusnog regulatora s kliznim režimom rada u kombinaciji s filterom za estimaciju brzina. Za potrebe ispitivanja i simulacije performansi upravljačkih metoda, izveden je matematički model RR robotskog manipulatora. Sve računalne simulacije

odvijaju se u programskom paketu MATLAB.

## **Pregled po poglavljima**

U drugom poglavlju navedena su dinamička svojstva robotskih manipulatora koja vrijede za opću klasu robota s rotacijskim stupnjevima slobode te je izveden dinamički model RR robota koji u ovome radu služi kao temelj za ispitivanje performansi upravljanja. Zatim su obrađene klasične metode upravljanja robotima koje uključuju linearni PD i PID regulator te metodu eksterne linearizacije.

U trećem poglavlju obrađeno je adaptivno i robusno upravljanje kao napredne metode upravljanja nelinearnim sustavima. Upravljački algoritmi ovih metoda prvo su opisani za opći slučaj primjene, a zatim su obje metode implementirane na dinamičkom modelu RR robotskog manipulatora za slučaj da su brzine članaka RR robota mjerljive. Prikazani su simulacijski rezultati pri slijeđenju proizvoljne, vremenski promjenjive, referentne trajektorije.

U četvrtom poglavlju ispituju se razlike u upravljačkim performansama adaptivnog i robusnog regulatora ako se pretpostavi da brzine članaka RR robotskog manipulatora nisu mjerljive. Za potrebe implementacije upravljačkih zakona, brzine se estimiraju primjenom filtera za estimaciju brzina. Razmatraju se tri tipa filtera za estimaciju brzina: dirty derivative filter, sliding-mode filter i super-twisting filter.

Konačno, u petom poglavlju opisano je upravljanje primjenom aktivne kompenzacije poremećaja. Na primjeru općenitog nelinearnog dinamičkog sustava drugog reda, prikazana je distinkcija kompenzacije konstantnog totalnog poremećaja u odnosu na kompenzaciju totalnih poremećaja složenijeg oblika. ADRC upravljački zakon implementiran je na dinamičkom modelu RR robota. Simulacijski rezultati pri slijeđenju proizvoljne, vremenski promjenjive, referentne trajektorije, uspoređeni su sa rezultatima upravljanja robusnog regulatora u kombinaciji sa sliding-mode filterom za estimaciju brzina.



## 2. Dinamika robotskog manipulatora

Dinamički sustavi se s obzirom na njihovo ponašanje mogu podijeliti na dvije osnovne kategorije: linearne i nelinearne. Linearni sustavi karakterizirani su svojstvima homogenosti i aditivnosti. Uobičajeni primjeri modeliranih tehničkih linearnih sustava su RLC strujni krugovi, pojačala ili filteri prisutni u elektronici te MDS sustav kao glavni predstavnik linearnih mehaničkih sustava. Uspostavljanje uzročne veze između ulaza i izlaza linearnih sustava je relativno jednostavno. Međutim, većina dinamičkih sustava u općem obliku je nelinearna. U odnosu na linearne sustave, promjena elemenata nelinearnih sustava u vremenu je kaotična i nepredvidljiva. Dinamika RR robota razmatranog u sklopu ovog rada, kao i većine robotskih manipulatora, je nelinearna što je bitan čimbenik sa stanovišta upravljanja detaljnije opisanog u sklopu trećeg poglavlja.

Početni korak u analizi dinamičkog sustava je izvod njegovog matematičkog modela. On opisuje odnose između elemenata sustava i ponašanje sustava u realnosti što je osnova za provođenje regulacije i ispitivanja performansi upravljačkih algoritama. Proces izvođenja dinamičkog modela oslanja se na niz poznatih zakona i principa klasične mehanike. Dva su glavna pristupa u izvođenju dinamičkog modela robota, Euler-Lagrangeova formulacija i Newton-Eulerova formulacija. Dok Newtonovska formulacija zahtjeva eksplicitan prikaz konzervativnih sila i prikladna je za Kartezijeve koordinate, Lagrangeova mehanika može se upotrebljavati u bilo kojem koordinatnom sustavu. Newton-Eulerova formulacija pogodnija je sa stajališta rekurzivnog dobivanja dinamičkog modela, posebice sustava s velikim brojem stupnjeva slobode gibanja. S druge strane, Euler-Lagrangeova formulacija pogodnija je sa stanovišta upravljanja s obzirom da aktuatori djeluju direktno na unutrašnje koordinate mehaničkog sustava. Iz nje se direktno mogu dobiti izrazi za kinetičku i potencijalnu energiju sustava, čija suma je ujedno i Lyapunovljeva funkcija sustava [1].

U općenitom slučaju, dinamiku robota s  $n$  stupnjeva slobode gibanja možemo prikazati primjenom Euler-Lagrangeovih jednadžbi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial R(\dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = u_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

gdje je  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  vektor unutrašnjih (poopćenih) koordinata,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]^T$  vektor unutrašnjih (poopćenih) brzina, a  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$  vektor upravljačkih sila ili momenata.  $R(\dot{\mathbf{q}})$  je Rayleighova disipacijska funkcija. Lagrangeova funkcija sustava

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - P(\mathbf{q}), \quad (2.2)$$

jednaka je razlici kinetičke  $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  i potencijalne  $P(\mathbf{q})$  energije. Kinetička energija je kvadratična forma po poopćenim brzinama

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (2.3)$$

gdje je  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  pozitivno definitna simetrična inercijska matrica mehaničkog sustava dimenzije  $n \times n$ . Raspisivanjem izraza (2.1) dobiju se dinamičke jednadžbe koje se uobičajeno prikazuju u matricnom obliku

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u} \quad (2.4)$$

gdje je  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  vektor poopćenih gravitacijskih sila

$$g_k(q) = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

,a  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$  vektor poopćenih sila viskoznog trenja

$$f_k(\dot{q}) = \frac{\partial R(\dot{q})}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$  je matrica Coriolisovih i centrifugalnih članova dimenzije  $n \times n$ . Elementi matrice  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  definirani su kao

$$c_{kj}(q) = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}(q)}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i. \quad (2.7)$$

gdje je  $c_{ijk}(q)$  Christoffelov simbol prve vrste [1].

Iako prikaz modela robota (2.4) izgleda relativno jednostavno, radi se o vrlo složenoj i nelinearnoj dinamici posebno za veći broj stupnjeva slobode gibanja. U nastavku su navedena svojstva mehaničkih sustava koja vrijede općenito i pridonose pojednostavljenju analize složene dinamike robotskih manipulatora.

## 2.1. Dinamička svojstva robotskih manipulatora

Bez obzira na računsku složenost dinamičkog modela robota, za analizu stabilnosti dovoljno je poznavanje ocjene gornje granice inercijske i Coriolisove matrice te vektora poopćenih gravitacijskih sila. Svojstva navedena u nastavku vrijede za sve praktično korištene konfiguracije robota [1].

**Svojstvo 1.** Inercijska matrica  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  je pozitivno definitna simetrična matrica koja zadovoljava slijedeću ocjenu

$$a_1 \|\mathbf{z}\|^2 \leq \mathbf{z}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{z} \leq (a_2 + c_2 \|\mathbf{q}\| + d_2 \|\mathbf{q}\|^2) \|\mathbf{z}\|^2, \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

gdje su  $a_1, a_2 > 0$  i  $c_2, d_2 \geq 0$ . Ocjena inercijske matrice iz (2.8) primjenjiva je za robote s rotacijskim i translacijskim stupnjevima slobode gibanja. Ako robot nema translacijskih stupnjeva slobode gibanja tada su  $c_2, d_2 = 0$ , odnosno

$$\lambda_m \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \leq \lambda_M \{\mathbf{M}\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

gdje su  $\lambda_m \{\mathbf{M}\}$  i  $\lambda_M \{\mathbf{M}\}$  striktno pozitivna minimalna i maksimalna vlastita vrijednost od  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ .

**Svojstvo 2.** Matrica  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  je antisimetrična [2]

$$\mathbf{z}^T \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{z} = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

Kao posljedica antisimetričnosti matrice  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  slijedi

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T. \quad (2.11)$$

Navedeno svojstvo antisimetričnosti matrice  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  je povezano s činjenicom da vektor Coriolisovih sila i centrifugalnih sila ne može vršiti rad.

**Svojstvo 3.** Vektor Coriolisovih i centrifugalnih sila  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  zadovoljava slijedeću ocjenu

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq (c_1 + d_1\|\mathbf{q}\|)\|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.12)$$

gdje su  $c_1, d_1 \geq 0$ . Ako robot nema translacijskih stupnjeva slobode tada je  $d_1 = 0$  odnosno

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq k_c\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \quad (2.13)$$

gdje je  $k_c$  neka pozitivna konstanta. Iz izraza (2.7) vidimo da Christoffelov simbol sadrži parcijalne derivacije elemenata matrice inercije po poopćenim koordinatama. U skladu s time ocjena vektora Coriolisovih sila i centrifugalnih sila je direktna posljedica ocjene matrice inercije.

**Svojstvo 4.** Za kombinaciju translacijskih i rotacijskih stupnjeva slobode gibanja, poopćena gravitacijska sila zadovoljava slijedeću ocjenu

$$\|g(\mathbf{q})\| \leq k_v, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

$$\left\| \frac{\partial g(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leq k_g \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.15)$$

gdje konstante  $k_v$  i  $k_g$  mogu biti ocjenjene slijedećim izrazima

$$k_v \geq n \left( \max_{i,q} |g_i(q)| \right) \quad (2.16)$$

$$k_g \geq n \left( \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right). \quad (2.17)$$

Ako na izraz (2.15) primijenimo teorem srednje vrijednosti dobivamo

$$\|g(\mathbf{q}) - g(\mathbf{q}_d)\| \leq k_g\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|, \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Ocjena poopćene gravitacijske sile, posljedica je činjenice da je potencijalna energija linearna kombinacija članova koji imaju linearnu ovisnost o translacijskim koordinatama i članova koji imaju trigonometrijsku ovisnost o rotacijskim koordinatama [1].

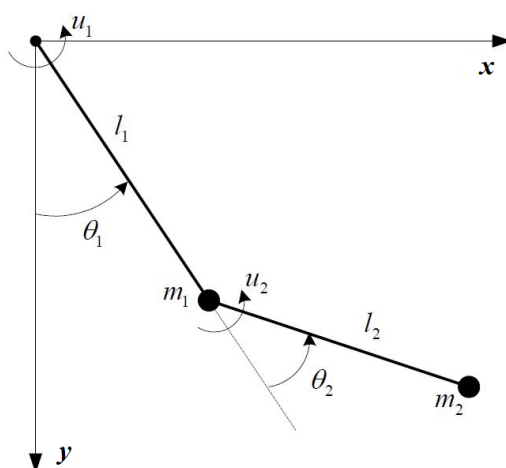
**Svojstvo 5.** Dinamički model robota iz (2.4), uz uvjet  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = 0$ , može biti linearno parametriziran na slijedeći način

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\mathbf{p} \quad (2.19)$$

gdje je  $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  regresijska matrica dimenzije  $n \times m$ , a  $\mathbf{p}$  vektor konstantnih parametara robota dimenzije  $m \times 1$ . Svojstvo linearne parametrizacije dinamičnog modela ključno je za implementaciju upravljačkog zakona kod klasičnog adaptivnog upravljanja što će biti pokazano u sklopu trećeg poglavlja u nastavku rada.

Navedena svojstva dinamičnog modela ključna su za analizu stabilnosti i omogućuju izvođenje kriterija stabilnosti koji vrijede za opću klasu robota s rotacijskim stupnjevima slobode gibanja.

## 2.2. Dinamički model RR robota



Slika 2.1. Shema robotskog manipulatora s dva rotacijska stupnja slobode gibanja

Model se sastoji od tri čvora i dva pomična članka (štapni elementi) duljine  $l_1$  i  $l_2$ . Oba članka povezani su rotacijskim zglobovima čije su osi rotacije okomite na ravninu  $x$ - $y$  po kojoj se članci gibaju. Ishodište koordinatnog sustava smješteno je u čvoru 1 gdje su baza robota i članak 1 povezani nepomičnim rotacijskim zglobovima. Članak 1 i članak 2 povezani su pomičnim rotacijskim zglobovima u čvoru 2 na udaljenosti  $l_1$  od ishodišta. Masa  $m_1$  koncentrirana je u čvoru 2, a masa  $m_2$  u čvoru 3 udaljenom za duljinu  $l_2$  od čvora 2. Aktuatori u čvorovima 1 i 2 stvaraju zakretne momente  $u_1$  i  $u_2$  te mijenjaju poziciju štapova izraženu preko kutova  $\theta_1$  i  $\theta_2$ .

Dinamička analiza povezuje gibanje tijela sa silama koje djeluju na tijelo. Postoji nekoliko temeljnih

zakona za rješavanje dinamičkih problema. U ovome radu koristit će se varijacijski pristup baziran na kinetičkoj i potencijalnoj energiji robota izražen preko Lagrangiana:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - P(\theta), \quad (2.20)$$

gdje  $K$  predstavlja kinetičku energiju,  $P$  potencijalnu energiju sustava. Da bi se dobio izraz za kinetičku i potencijalnu energiju, potrebno je prvo izvesti jednadžbe pozicija i brzina masa  $m_1$  i  $m_2$ .

Pozicija mase  $m_1$  određena je koordinatama  $x$  i  $y$  na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Derivacijom prethodnih izraza dobiva se brzina mase  $m_1$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 \\ -l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \quad (2.22)$$

Primjenom istog postupka za masu  $m_2$ , dobiva se pozicija i brzina određena koordinatama  $x_2$  i  $y_2$ :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

gdje su  $\dot{\theta}_1$  i  $\dot{\theta}_2$  kutne brzine članka 1 i članka 2 izražene u  $[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$ .

Pomoću dobivenih izraza pozicija i brzina možemo izračunati kinetičku energiju i potencijalnu energiju. Izraz za kinetičku energiju mase  $m_1$  dan je sljedećim izrazom

$$K_1(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2, \quad (2.25)$$

a izraz za kinetičku energiju mase  $m_2$  glasi

$$\begin{aligned}
K_2(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\
&= \frac{1}{2}m_2 \left( l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2 \right). \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Jednadžbama (2.27) i (2.28) u nastavku, dani su izrazi za potencijalnu energiju masa  $m_1$  i  $m_2$ :

$$P_1(\theta) = -m_1gl_1 \cos\theta_1, \tag{2.27}$$

$$P_2(\theta) = -m_2gl_1 \cos\theta_1 - m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{2.28}$$

Konačno, Lagrangian iz (2.2) sada možemo izraziti kao razliku suma svih kinetičkih i suma svih potencijalnih energija

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \left( K_1(\dot{\theta}) + K_2(\theta, \dot{\theta}) \right) - (P_1(\theta) + P_2(\theta)). \tag{2.29}$$

Robotski manipulator razmatran u sklopu ovog rada upravljanje vrši pomoću aktuatora smještenih u zglobovima. Pošto se radi o potpuno aktuiranom sustavu, električni signal preko aktuatora uzrokuje zaseban zakretni moment u svakom zglobu. Zakretni momenti u zglobovima ujedno su upravljačke varijable sustava te ih možemo izraziti parcijalnim derivacijama Lagrangiana prema izrazu

$$u_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad i = 1, 2 \tag{2.30}$$

pri čemu je  $u_i$  upravljačka varijabla,  $\theta_i$  vektor pozicije i  $\dot{\theta}_i$  vektor brzine.

Raspisivanjem izraza (2.30) dobiju se složene jednadžbe gibanja koje se radi preglednosti mogu zapisati u sljedećem općem obliku

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{u}. \tag{2.31}$$

Matrica  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$  zove se **matrica inercije** i sadrži elemente ovisne o akceleraciji zglobova, odnosno elemente koji se opiru promjenama gibanja

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos\theta_2 & m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos\theta_2 \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos\theta_2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

Matrica  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$  je **Coriolisova matrica** i njeni elementi ovisni su o produktu brzina zglobova

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 & -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Vektor  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$  je **vektor gravitacije** te nije ovisan o brzini ni akceleraciji zglobova

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Dane jednadžbe opisuju dinamički model RR robota u vertikalnoj ravnini gdje je smjer djelovanja gravitacije paralelan sa ravninom gibanja robotskih članaka.

Dinamički model robota u horizontalnoj ravnini razlikuje po tome što nema djelovanja gravitacije pošto je gravitacija okomita na smjer kretanja robota. U skladu s time dinamički model RR robota u horizontalnoj ravnini poprima oblik

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{u}. \quad (2.35)$$

gdje je  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$  iz (2.32), a  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$  iz (2.33).

Parametri korišteni u prethodnim jednadžbama odnose se na karakteristike modela RR robota u horizontalnoj ravnini, a u svrhu simulacije odziva njihove odabrane vrijednosti su:

- $m_1 = 2$  kg - Masa prvog članka,
- $m_2 = 1$  kg - Masa drugog članka,
- $l_1 = 0.3$  m - Duljina prvog članka,
- $l_2 = 0.2$  m - Duljina drugog članka.

Ovime je dinamički model sustava robota s dva rotacijska stupnja slobode gibanja definiran. Idući korak je primjena upravljačkih algoritama na dinamički model što će se detaljnije razmatrati u nastavku rada.



## 2.3. Klasične metode upravljanja robotima

Dinamički sustavi sastoje se od varijabla stanja koje predstavljaju elemente sustava promjenjive u vremenu. Kod mehaničkih sustava varijable stanja su fizikalne veličine koje opisuju gibanje sustava. Ponašanje dinamičkog sustava prepuštenog samome sebi ovisit će o njegovom matematičkom modelu, vrijednostima početnih uvjeta te vanjskim utjecajima. Međutim, svaki modelirani dinamički sustav ima određenu namjenu i svrhu. Primjerice termostat postiže i održava zadanu temperaturu prostorije, elektromotor tokarilice održava zadanu brzinu vrtnje u radu dok tempomat automobila postiže i održava zadanu brzinu vozila. Kod industrijskih robota, jedan od osnovnih ciljeva upravljanja je pozicioniranje robota u prostoru. Princip rada svih navedenih primjera je sličan – trenutnu vrijednost neke fizikalne veličine potrebno je dovesti na zadanu željenu vrijednost. Da bismo to postigli nužno je u sustavu koristiti regulator. Razliku između trenutne i željene vrijednosti nazivamo regulacijskom pogreškom. Cilj svih upravljačkih zakona odnosno regulatora je svesti regulacijsku pogrešku na nulu uz zadovoljavanje potrebnih zahtjeva regulacije. Osnovni zahtjevi pri regulaciji su stabilnost, točnost, zadovoljavajuća brzina odziva i optimalan karakter prijelazne pojave.

Preduvjet za uvođenje regulacije sustava je postojanje negativne povratne veze. Povratna veza podrazumijeva poznavanje vrijednosti varijabli stanja na izlazu iz sustava i njihovo preslikavanje na ulaz. Negativna povratna veza omogućuje da se izlazne vrijednosti varijabli stanja oduzimaju od ulaznih vrijednosti (željenih, referentnih), a dobivenu razliku koristi upravljački algoritam s ciljem da ju svede na nulu. Željena vrijednost tražene fizikalne veličine može biti konstanta, ali i vrijednost promjenjiva u vremenu.

Ovisno o zahtjevima upravljanja, kompleksnosti i vrsti upravljanog sustava razlikovat će se i korišteni upravljački algoritmi.

### 2.3.1. PD regulator

Proporcionalno-derivacijski (PD) regulator jedan je od najjednostavnijih praktično primijenjenih regulatora. Ovisno o zahtjevima upravljanja i kompleksnosti upravljanog sustava, PD regulatorom mogu se postići relativno zadovoljavajuće performanse. Ovaj tip regulatora regulacijsko djelovanje ostvaruje uvođenjem proporcionalnog i derivacijskog člana u upravljački zakon. Općeniti oblik PD regulatora dan je sljedećim izrazom

$$u(t) = -K_P e(t) - K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (2.36)$$

gdje je  $u(t)$  upravljačka varijabla,  $e(t) = x(t) - x_d(t)$  je regulacijska pogreška, odnosno razlika između izlazne (mjerene) varijable stanja  $x(t)$  i referentne varijable stanja  $x_d(t)$ .  $K_P$  je konstanta proporcionalnog (P) djelovanja, a  $K_D$  je konstanta derivativnog (D) djelovanja.

Svrha proporcionalnog djelovanja je da generira vrijednost koja je proporcionalna vrijednosti pogreške. Pojačanjem proporcionalnog djelovanja  $K_P$  ubrzava se odziv zatvorenog kruga, no pri tome se smanjuje stupanj prigušenja (za sustave drugog ili višeg reda) i tako povećava maksimalni prebačaj odziva. Za sustave trećeg ili višeg reda velike vrijednosti konstante  $K_P$  mogu često dovesti do nestabilnosti zatvorenog kruga. Zbog toga za postizanje stabilnog odziva sustava iznos  $K_P$  člana u pravilu ima gornju granicu. Unatoč tome, pod uvjetom da je zatvoreni krug stabilan, veće vrijednosti proporcionalnog djelovanja dat će manju trajnu regulacijsku pogrešku.

D djelovanje generira vrijednost temeljenu na brzini promjene pogreške umjesto na samoj vrijednosti pogreške. To ubrzava reakciju upravljačkog signala u slučaju da se iznos regulacijske pogreške naglo mijenja. Time se općenito poboljšava stabilnost zatvorenog sustava. U kombinaciji sa proporcionalnim djelovanjem, derivacijsko djelovanje smanjuje maksimalni prebačaj i skraćuje vrijeme potrebno za smirivanje odziva. Optimalnim podešavanjem P i D djelovanja regulacijska pogreška svodi se na minimalnu s obzirom na kompleksnost upravljanog sustava i ograničenja samog regulatora.

PD regulator neovisan je o dinamičkom modelu sustava. Međutim, nedostaci ovog regulatoru su nemogućnost slijeđenja promjenjivih ulaznih signala te nemogućnost kompenzacije poremećaja. Zbog toga se uglavnom koristi u primjenama koje ne zahtijevaju visoku točnost. S PD regulatorom moguća

je asimptotska regulacija samo za robote s gibanjem u horizontalnoj ravnini (SCARA). Za opću klasu robota s rotacijskim stupnjevima slobode gibanja u vertikalnoj ravnini prisutno je trajno regulacijsko odstupanje [1].

### 2.3.2. PID regulator

Proporcionalno-integralno-derivacijski (PID) regulator je najkorišteniji regulator u svijetu automatizacije. U odnosu na PD regulator dodaje se integracijsko djelovanje koje znatno proširuje regulacijske mogućnosti. Kombinacija P, I i D regulacijskih djelovanja svojim kompromisom često može pružiti zadovoljavajuću kvalitetu odziva. To jest, odziv će biti dovoljno brz i točan, sa dopustivim oscilacijama (prebačajem) [3]. Osnovni elementi djelovanja PID regulatora prisutni su i u vrlo složenim, naprednim upravljačkim algoritmima.

Općeniti oblik linearnog PID regulatora opisan je sljedećim izrazom:

$$u(t) = -K_P e(t) - K_D \frac{de(t)}{dt} - K_I \int e(t) dt \quad (2.37)$$

gdje je  $u(t)$  upravljačka varijabla, a  $e(t) = x(t) - x_d(t)$  regulacijska pogreška.  $K_P$  je konstanta proporcionalnog (P) djelovanja,  $K_D$  je konstanta derivativnog (D) djelovanja i  $K_I$  je konstanta integralnog (I) djelovanja. Performanse regulacije mijenjaju se podešavanjem konstanti pojačanja  $K_P, K_D$  i  $K_I$ .

I djelovanje predstavlja sumiranje iznosa pogreške u vremenu. Zbrajanjem pogreški preostalih nakon djelovanja P i D komponenti postupno se povećava vrijednost upravljačke varijable  $u$ . Integralni član raste sve dok greška ne postane jednaka nuli odnosno dok se ne postigne stacionarna točnost. Svrha integralnog regulacijskog djelovanja je uklanjanje ili barem smanjivanje trajne regulacijske pogreške čime se ostvaruje poboljšanje točnosti zatvorenog kruga. Međutim, to ide na teret ugrožavanja stabilnosti sustava, odnosno povećanja prebačaja, te dužeg vremena smirivanja odziva zatvorenog sustava.

Postoji nekoliko metoda za podešavanje parametara PID regulatora. Postoje razvijene iskustvene metode poput Ziegler-Nichols, Takahashi i CHR metode, koje do optimalnih parametara dolaze eksperimentalnim putem te ne zahtijevaju poznavanje matematičkog modela. Kod sustava koji nemaju

kompleksan matematički model, parametri PID regulatora mogu se odrediti pomoću metoda koje koriste matematički model poput metode podešavanja polova, metode optimuma dvostrukog odnosa i druge. Iz sigurnosnih razloga je odziv sustava na regulacijsko djelovanje uvijek poželjno prvo provjeriti u računalnoj simulaciji upravljanog sustava, prije nego što se krene sa implementacijom algoritma na realni sustav.

PID regulator potpuno je nezavisan o matematičkom modelu sustava kojim upravlja. To automatski smanjuje računsku složenost njegove implementacije i proširuje mogućnost primjene na niz različitih automatiziranih i upravljanih sustava. Međutim, linearni regulatori generalno nisu primjenjivi na nelinearne sustave. Budući je gotovo svaki tehnički sustav u općem obliku nelinearan, prije sinteze linearnog regulatora potrebno je primijeniti postupak linearizacije dinamike sustava oko željene radne točke. Međutim, za sustave kod kojih su nelinearnosti vrlo izražene ili kod kojih linearizacija nije moguća, upotreba linearnih regulatora vrlo je ograničena. Kod regulacije nelinearnih dinamičkih sustava poput robota, linearni PID regulator omogućuje samo lokalnu stabilizaciju, dok je za globalno stabilnu regulaciju nužna nelinearna modifikacija PID regulatora [4]. Također, kao i u slučaju PD regulatora, ograničenje linearnog PID regulatora jest u tome da može slijediti samo konstantne referentne trajektorije i kompenzirati samo konstantne nepoznate vanjske poremećaje.

Zbog navedenih nedostataka linearni PID regulator nije primjeren za zahtjeve upravljanja zadane u kontekstu ovog diplomskog zadatka. Naime, dinamika RR robota je izrazito nelinearna, a zadana referentna trajektorija je kontinuirana i vremenski promjenjiva.

### 2.3.3. Metoda eksterne linearizacije

Ključna ideja eksterne linearizacije (feedback linearization) je algebarska transformacija nelinearnog dinamičkog sustava u ekvivalentni linearni sustav. Nakon navedene transformacije primjenjuju se standardne metode sinteze linearnih sustava. Ova metoda može biti primijenjena na nelinearne sustave s linearnom ovisnošću o upravljačkoj varijabli. Takav sustav u matričnom obliku dan je sljedećim izrazima

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2.39)$$

gdje je  $\mathbf{x}$  vektor stanja,  $\mathbf{u}$  vektor upravljačkih varijabli,  $\mathbf{y}$  je izlazna varijabla,  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{h}$  su kontinuirane vektorske funkcije, dok je  $\mathbf{G}$  kontinuirana matična funkcija. Stupci matrice  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  sadrže vektorske funkcije  $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ .

Postupak linearizacije provodi se na način da se izlazna varijabla  $\mathbf{y}$  derivira sve dok se ne pojavi njena eksplicitna ovisnost o upravljačkim varijablama. Zatim je na ulaz upravljačke varijable potrebno dovesti svu nelinearnu dinamiku iz navedenog izraza, suprotnog predznaka, kao i komponente željene linearne dinamike (ovisno o redu sustava). Relativni stupanj  $r$  je broj derivacija izlazne varijable potrebnih za eksplicitno pojavljivanje upravljačke varijable  $u$ . Potpuna eksterna linearizacija moguća je kod sustava koji imaju relativan stupanj jednak redu sustava,  $r = n$ . U slučaju kada je  $r < n$  možemo ostvariti parcijalnu eksternu linearizaciju. Parcijalnom linearizacijom možemo stabilizirati samo  $r$  varijabli stanja. Da bi se nelinearni sustav relativnog stupnja  $r < n$  mogao stabilizirati primjenom parcijalne eksterne linearizacije, njegova interna dinamika mora biti stabilna [1].

Poznati tip regulatora često korišten za upravljanje robotskih manipulatora je "Computed torque control" regulator baziran na metodi eksterne linearizacije. Njegov princip rada je linearizacija nelinearnog dinamičkog modela robota nakon čega je moguća implementacija linearnih regulatora poput PD i PID regulatora za upravljanje robotom. "Computed torque control" može se demonstrirati na dinamičkom modelu RR robota (2.31). Izraz (2.31) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \left[ \mathbf{u} - \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \right] \quad (2.40)$$

Idući korak je odabir upravljačkog zakona kojim se postiže kompenzacija nelinearnosti:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.41)$$

gdje je  $\boldsymbol{\lambda}$  linearni regulator. Za odabrani linearni PD regulator:

$$\boldsymbol{\lambda} = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d - \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (2.42)$$

gdje je  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_d$  regulacijsko odstupanje, a  $\boldsymbol{\theta}_d$  vektor referentnih kutnih pozicija, izraz (2.41) postaje:

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \left( \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d - \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \right) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.43)$$

Uvrštavanjem izraza (2.43) u (2.40) dobiva se jednažba pogreške:

$$\ddot{\tilde{\theta}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\theta}} + \mathbf{K}_P \tilde{\theta} = 0. \quad (2.44)$$

Za razliku od izravne primjene PD i PID regulatora, metoda eksterne linearizacije omogućuje regulaciju praćenjem proizvoljne referentne trajektorije. Međutim, nužan uvjet je apsolutno poznavanje dinamičkog modela, njegovih parametara te točno mjerenje svih nelinearnih efekata koji se pojavljuju u sustavu što značajno otežava njenu primjenu. Alternativno, postoji specijalna klasa regulatora [5] koja omogućuje slijeđenje periodičkih referentnih trajektorija bez potrebe za poznavanjem modela robota. Računska složenost vezana uz izvod dinamičkog modela te naknadne matematičke operacije svrstavaju metodu eksterne linearizacije u relativno komplicirane algoritme upravljanja. Zbog toga je ova metoda primjenjiva na sustave do maksimalno trećeg ili četvrtog reda. Također, bitno je napomenuti da sve metode upravljanja navedene u sklopu drugog poglavlja podrazumijevaju da su brzine elemenata sustava mjerljive.

Klasične metode upravljanja prikladne su za automatsku regulaciju velikog broja automatiziranih sustava te još uvijek spadaju u najčešće korištene metode. Zbog ubrzanog napretka tehnologije, modeli današnjih sustava sve su kompleksniji, a potrebe automatiziranog upravljanja sve zahtjevnije. Time ograničenja ovih regulatora sve više dolaze do izražaja.

U nastavku rada razmatrati će se regulatori iz klase nelinearnih regulatora koji imaju mogućnosti slijeđenja proizvoljnih referentnih trajektorija te analizirati njihova implementacija na model robotskog manipulatora sa dva rotacijska stupnja slobode gibanja.

### 3. Adaptivno i robusno upravljanje

Kod dizajniranja regulacijskih sustava i upravljačkih zakona uvijek se treba voditi računa o nesavršenostima koje su u realnoj primjeni neizbježne. Složenost prirodnih i tehničkih sustava koje nalazimo u praktičnoj primjeni najčešće je iznimno velika. Matematička analiza takvih sustava bez pojednostavljenja u većini slučajeva bila bi nemoguća ili vrlo složena i dugotrajna, čime sam proces postaje nepraktičan. Također, radni uvjeti realnog sustava su u većini slučajeva promjenjivi, a ponekad i nepredvidljivi zbog čega ih je teško precizno definirati i implementirati. Procesi trošenja automatiziranih strojeva u radu neizbježna su pojava. Promjene materijala i mehaničkih svojstava konstrukcijskih elemenata značajno mijenjaju parametre sustava. Temperaturne varijacije tokom rada negativno utječu na performanse implementiranih senzora koji su kalibrirani za rad u pretpostavljenim radnim uvjetima, a svaka značajnija odstupanja rezultiraju smanjenjem točnosti.

Uzimajući u obzir sve prethodno navedene čimbenike, jasno je da je svojstvo prilagođavanja upravljačkog zakona promjenama radnih uvjeta presudno. Takve metode upravljanja koje su dizajnirane za ispravno funkcioniranje kada model sustava ili njegovi parametri nisu poznati nazivaju se robusnim metodama upravljanja. Adaptivno upravljanje i robusno upravljanje s kliznim režimom rada spadaju u napredne metode regulacije prilagođene za regulaciju dinamičkih sustava sa izraženom nelinearnom dinamikom. Zbog različitih karakteristika i temeljnih zahtjeva za implementaciju, svaka od ovih metoda davat će drugačije rezultate zavisno o dinamičkom modelu i radnim scenarijima. Problematika vezana uz implementaciju ovih metoda i performanse upravljanja nad modelom RR robota u horizontalnoj ravnini, obrađene su u sklopu trećeg i četvrtog poglavlja.

#### 3.1. Adaptivno upravljanje robotima

Adaptivno upravljanje je metoda upravljanja koja se koristi kada se regulator mora prilagoditi sustavu kojim upravlja i čiji parametri se mijenjaju ili su inicijalno neizvjesni. U praksi se može očekivati da se parametri procesa mijenjaju tokom rada u većoj ili manjoj mjeri. Naime, zbog nelinearnosti koje se javljaju u procesu, različitim radnim točkama odgovaraju različiti parametri modela procesa.

To znači da se promjenom radne točke mijenjaju i parametri procesa na temelju kojih su određeni parametri regulatora. Sustavi s negativnom povratnom vezom inherentno su robusni do neke mjere, kako na poremećaje tako i na greške modeliranja procesa, te u najvećem broju slučajeva regulator s konstantnim parametrima određenim za neku nominalnu radnu točku osigurava zadovoljavajuće odzive sustava upravljanja. Međutim, ima slučajeva kada su promjene parametara procesa toliko izražene da regulator s konstantnim parametrima ne daje zadovoljavajuće odzive. U praksi postoji mnogo različitih uzroka promjena parametara procesa, a često se radi i o kombinaciji različitih pojava. U mnogim slučajevima, uzroci promjena parametara procesa nisu potpuno objašnjeni.

Zakon upravljanja adaptivnog regulatora dan je sljedećim izrazom

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{K}_D \mathbf{r} \quad (3.1)$$

gdje je

$$\mathbf{r} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

i

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \tilde{\mathbf{q}}. \quad (3.3)$$

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  je vektor stanja,  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$  je vektor referentnih stanja,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je konstantna pozitivno definitna dijagonalna matrica, a  $\hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^p$  je procjena vektora parametara modela [6].  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  je regresijska matrica dobivena svojstvom linearne parametrizacije modela sustava. Definirana je izrazom (2.19) u drugom poglavlju.

Vektor estimiranih parametara  $\hat{\mathbf{p}}$  izračunava se pomoću zakona adaptivnog podešavanja parametara

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\Gamma^{-1} \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)^T \mathbf{r} \quad (3.4)$$

gdje je  $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$  neka konstantna pozitivno definitna matrica.

Adaptivni zakon upravljanja omogućuje globalno asimptotsko praćenje proizvoljne kontinuirane trajektorije za bilo koji izbor pozitivno definitnih matrica  $\mathbf{K}_D$ ,  $\Lambda$ ,  $\Gamma$ . Na prvi pogled to djeluje kao vrlo jednostavan kriterij stabilnosti. Međutim, adaptivni zakon izveden je na osnovnu Lyapunovljeve analize stabilnosti u kojoj ključnu ulogu ima pretpostavka linearne parametrizacije dinamičkog modela



robotu. Navedena pretpostavka podrazumijeva poznavanje dinamičkog modela na neodređenost njegovih parametara [1]. Sama Lyapunovljeva analiza znatno je složenija od analize stabilnosti linearnih sustava što je glavni razlog prevladavanja upotrebe metoda linearizacije nelinearnih sustava oko radne točke u primjenama gdje je to prihvatljivo.

Adaptivni regulator zbog svoje karakteristike prilagođavanja neočekivanim promjenama i novonastalim uvjetima rada daje odlične performanse u mnogim slučajevima primjene. Međutim, zakon upravljanja primjenjiv je samo za točno određenu konfiguraciju za koju je izveden. Zbog visoke računске složenosti i nužnosti poznavanja matematičkog modela, adaptivno upravljanje zahtjevno je sa stajališta implementacije algoritma. Također, zbog složenosti implementacije primjena je ograničena na sustave nižih redova (obično do trećeg reda).

### 3.2. Adaptivno upravljanje RR robotom

Klasično adaptivno upravljanje podrazumijeva asimptotsko praćenje vremenski promjenjivog referentnog signala, uz pretpostavku nepoznatih parametara modela. Iako nije potrebno poznavanje parametara, matematički model treba biti poznat. Za implementaciju adaptivnog zakona upravljanja koristit će se dinamički model sustava RR robotu u horizontalnoj ravnini (2.35). Prvi korak kod implementacije je korištenje dinamički model drugog reda transformirati u ekvivalentni model prvog reda. Izvode se jednadžbe pogreške vođenja:

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta_d, \quad (3.5)$$

tako da vrijedi

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d \quad (3.6)$$

i

$$\ddot{\tilde{\theta}} = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d. \quad (3.7)$$

$\tilde{\theta}$  iz (3.5) je vektor pogreške pozicije zglobova,  $\theta$  je vektor trenutnih pozicija, a  $\theta_d$  je vektor referentnih stanja. Sukladno tome  $\dot{\tilde{\theta}}$  je vektor brzina zglobova, a  $\ddot{\tilde{\theta}}$  vektor ubrzanja zglobova.

Iz (3.6) i (3.7) slijedi

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}_d \quad (3.8)$$

i

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \ddot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d. \quad (3.9)$$

Uvrštavanjem (3.8) i (3.9) u (2.35) dobiva se

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}_d = \mathbf{u} \quad (3.10)$$

Uvodi se novi vektor  $\mathbf{r}$  koji sadrži tzv. sliding varijable, jednu za svaki stupanj slobode zasebno. Sliding varijabla je linearna kombinacija pogreške pozicije i njene derivacije

$$\mathbf{r} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.11)$$

tako da vrijedi

$$\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \boldsymbol{\Lambda}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (3.12)$$

$\boldsymbol{\Lambda}$  je konstantna pozitivno definitna dijagonalna matrica.

Iz (3.11) i (3.12) slijedi

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.13)$$

i

$$\ddot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\Lambda}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (3.14)$$

Uvrštavanjem (3.13) i (3.14) u (3.10) dobiva se

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{r} + \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_d - \boldsymbol{\Lambda}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})(\dot{\boldsymbol{\theta}}_d - \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{u}. \quad (3.15)$$

Radi pojednostavljenja izraza uvodimo supstitucijsku varijablu

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_r = \dot{\boldsymbol{\theta}}_d - \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.16)$$

tako da vrijedi

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d - \boldsymbol{\Lambda}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \quad (3.17)$$

Uvrštavanjem (3.16) i (3.17) izraz (3.15) poprima sljedeći oblik

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{r} + \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}_r = \mathbf{u}. \quad (3.18)$$

Primjenom linearne parametrizacije dobiva se

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r)\mathbf{p} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}_r + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}_r. \quad (3.19)$$

gdje je  $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r)$  regresijska matrica

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{1r} & (2\ddot{\theta}_{1r} + \ddot{\theta}_{2r}) \cos \theta_2 - [\dot{\theta}_{1r}\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{2r}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)] \sin \theta_2 & \ddot{\theta}_{2r} \\ 0 & \ddot{\theta}_{1r} \cos \theta_2 + \dot{\theta}_{1r}\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 & \ddot{\theta}_{1r} + \ddot{\theta}_{2r} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

, a  $\mathbf{p}$  vektor nepoznatih parametara dinamičkog modela

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 \\ m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Jedna od najvećih prednosti ovog regulatora je sposobnost "on-line" estimacije i prilagođavanja nepoznatih parametara sustava. Zakon za adaptivno podešavanje parametara dan je sljedećim izrazom

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r)^T \mathbf{r} \quad (3.22)$$

gdje je  $\boldsymbol{\Gamma}$  pozitivno definitna matrica.

Konačno, zakon adaptivnog upravljanja glasi

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r, \ddot{\boldsymbol{\theta}}_r)\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{K}_D \mathbf{r} \quad (3.23)$$

gdje je  $\mathbf{K}_D$  pozitivno definitna matrica pojačanja [1].

Dokaz stabilnosti sustava i zakon za adaptivno podešavanje parametara (3.22) određuju su postupkom definiranja Lyapunovljeve funkcije i provedbom Lyapunovljeve analize stabilnosti kojom se dokazuje stabilnost dinamičkim sustava.

U nastavku su prikazani rezultati simulacije adaptivnog upravljanja dinamičkim modelom RR robota u horizontalnoj ravnini. Za implementaciju upravljačkog zakona te simulaciju rezultata korišten je

MATLAB programski paket. Numerička simulacija provedena je pomoću ODE15s iterativne metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Ukupno vrijeme trajanja simulacije iznosi  $T = 30$  sekundi.

Prikazani odzivi dobiveni su za sljedeće parametre regulatora:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Početne vrijednosti nepoznatih parametara sustava su  $p_1 = 1$  [kg m<sup>2</sup>],  $p_2 = 2$  [kg m<sup>2</sup>],  $p_3 = 3$  [kg m<sup>2</sup>]. Egzaktna vrijednosti istih parametara sustava nakon estimacije pomoću zakona za adaptivno podešavanje parametara iznose  $p_1 = 0.31$  [kg m<sup>2</sup>],  $p_2 = 0.06$  [kg m<sup>2</sup>],  $p_3 = 0.04$  [kg m<sup>2</sup>]. Početne kutne pozicije robota su  $\theta_{10} = 1$  [rad],  $\theta_{20} = -1$  [rad], a početne brzine jednake su nuli. Dobiveni rezultati upravljanja vrijede za pretpostavku da su sve brzine sustava mjerljive. Referentne vremenski promjenjive trajektorije koje regulator mora slijediti dane su sljedećim izrazima:

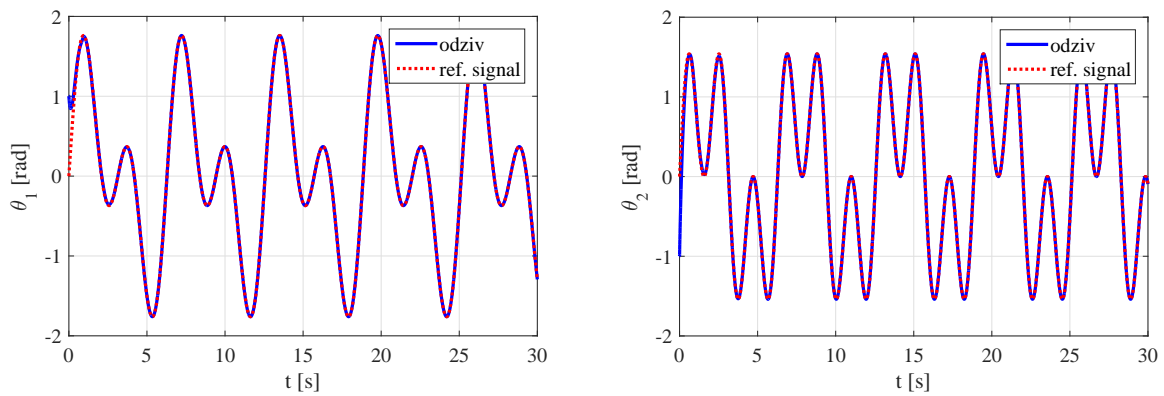
$$\theta_{d1} = \sin(t) + \sin(2t) \quad (3.27)$$

$$\theta_{d2} = \sin(t) + \sin(3t)$$

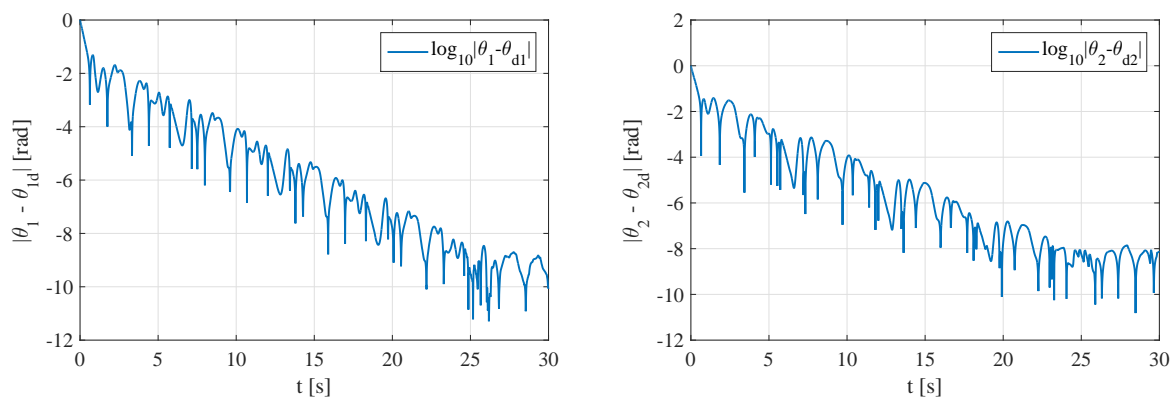
$$\dot{\theta}_{d1} = \cos(t) + 2 \cos(2t) \quad (3.28)$$

$$\dot{\theta}_{d2} = \cos(t) + 3 \cos(3t)$$

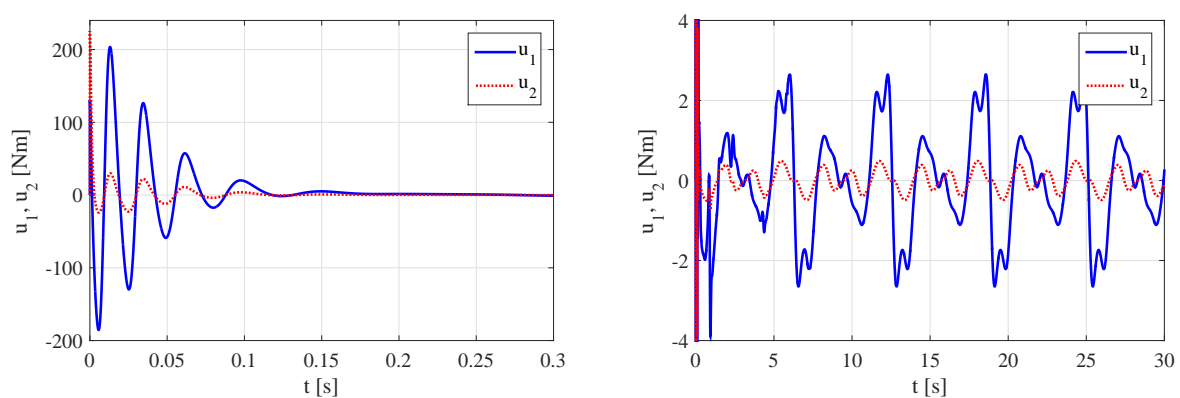
Slika 3.1 prikazuje slijeđenje zadane referentne trajektorije za oba članka RR robota. Na slici 3.2 prikazana su regulacijska odstupanja pri slijeđenju referenci. Grafovi odstupanja su radi preglednosti prikazani u logaritamskom mjerilu. Grafovi sa slike 3.3 prikazuju odziv upravljačkih varijabli na zadani referentni signal. Lijevi graf radi bolje razlučivosti prikazuje početni skok upravljačkih varijabli unutar kraćeg vremenskog intervala. Na desnom grafu prikazane su oscilacije upravljačkih varijabli nakon prvobitnog skoka, a tokom kompletnog vremena trajanja simulacije. Konačno, na slici 3.4 prikazana je "on-line" adaptivna estimacija nepoznatih parametara sustava.



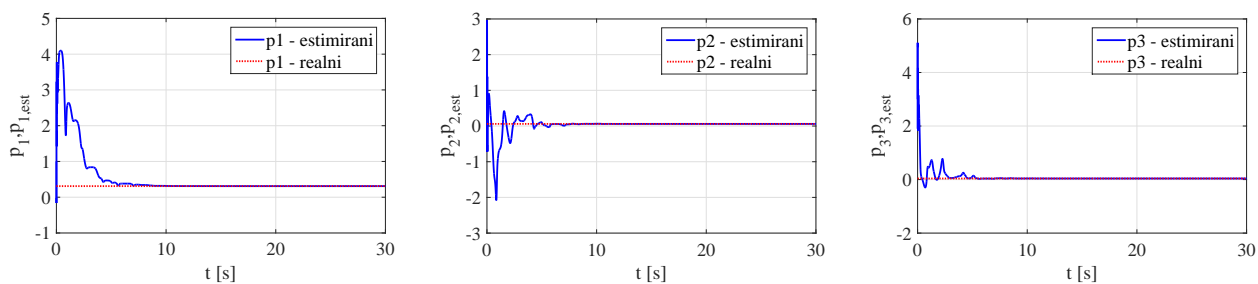
Slika 3.1. Odziv adaptivnog regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno)



Slika 3.2. Regulacijska pogreška adaptivnog regulatora u logaritamskoj skali



Slika 3.3. Upravljački signal  $u_1$  i  $u_2$  adaptivnog regulatora



Slika 3.4. Adaptivna estimacija parametara dinamičkog modela

Rezultati simulacija pokazuju veliku točnost slijeđenja referentnih signala. Regulacijska pogreška s vremenom se značajno smanjuje te konvergira u nulu. Jedan od razloga je taj što su s vremenom estimirani parametri dinamičkog modela sustava sve bliži realnom stanju zahvaljujući zakonu za adaptivno podešavanje parametara. Upravljače varijable u početnoj fazi simulacije pokazuju veliki skok što u realnoj primjeni nije dopustivo. Početni skok upravljačkih varijabli i pretpostavka da su brzine mjerljive zasigurno pridonose brzini odziva i točnosti.

### 3.3. Robusno (sliding-mode) upravljanje

Dok je adaptivno upravljanje često odlična metoda za sustave s nepreciznim matematičkim modelom, nije ju moguće implementirati u slučaju kada je dinamika sustava potpuno nepoznata. Upravljački zakon koji je potpuno neovisan o matematičkom modelu, a ujedno omogućuje eliminaciju vanjskih utjecaja bio bi idealan za velik slučaj praktičnih primjena.

Jedna vrsta takvih robusnih regulatora je upravo regulator sa kliznim režimom rada, odnosno sliding-mode regulator. Implementacija sliding-mode regulatora iz aspekta računske složenosti mnogo je jednostavnija u odnosu na adaptivni. Također, pošto je neovisan o matematičkom modelu, primjenjiv je na mnogo složenijim sustavima.

Princip rada regulatora s kliznim režimom rada je da odabire onu krivulju u ravnini varijabli stanja koja zadovoljava performanse sustava koje želimo postići. Zatim se odabire upravljački zakon koji će varijable stanja sustava prisiliti da slijede odabranu krivulju, odnosno tzv. kliznu površinu. Time se sustav efektivno prisiljava da slijedi željenu dinamiku. Način rada u kojoj varijable stanja sustava "klizu" zadanom krivuljom naziva se klizni režim rada. Klizni režim rada održava se visokofrekventnim prebacivanjem između dva regulacijska djelovanja čime se varijable stanja prisiljavaju na klizanje duž zadane klizne površine. Takav princip osigurava asimptotsku konvergenciju regulacijske pogreške u nulu, a regulatoru omogućuje potpunu neovisnost o dinamici sustava koji regulira. Zbog toga je ovaj tip regulatora izrazito robusan u odnosu na promjene parametara modela, greške modela te vanjske poremećaje.

Klizna površine je funkcija varijabli stanja čija svrha je osigurati željeni dinamički odziv sustava. Kada je potrebno osigurati praćenje referentne trajektorije, klizna površina definira se kao funkcija pogreške praćenja trajektorije  $e$  i određenog broja njenih derivacija

$$r = r(e^k, e^{k-1}, \dots, \dot{e}, e). \quad (3.29)$$

Ako se sa  $n$  označi relativan stupanj sustava tj. red derivacije izlaza umanjeno za red derivacije ulaza,

tada se parametar  $k$  definira kao  $k = n - 1$ . Generalni izraz za odabir oblika klizne površine je:

$$r = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^k e \quad (3.30)$$

iz koje slijedi

$$k = 1, \quad r = \dot{e} + \lambda e \quad (3.31)$$

$$k = 2, \quad r = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e \quad (3.32)$$

$$k = 3, \quad r = e^{(3)} + 3\lambda\ddot{e} + 3\lambda^2\dot{e} + \lambda^3 e \quad (3.33)$$

Koeficijent  $\lambda$  izravno utječe na brzinu konvergencije varijabli stanja u nulu djelovanjem na polove sustava. Da bi sustav bio stabilan potrebno je zadovoljiti uvjet  $\lambda > 0$ . U praktičnoj primjeni koeficijent  $\lambda$  se obično povećava sve dok se ne dobije zadovoljavajući odziv [7].

Upravljački zakon regulatora s kliznim režimom rada prvog reda definira se kao

$$u = -\rho \cdot \text{sign}(r), \quad \text{gdje je} \quad u = \begin{cases} -\rho & \text{ako } r > 0, \\ \rho & \text{ako } r < 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Može se protumačiti kao dva međusobno isključiva regulacijska djelovanja između kojih se sustav prebacuje zavisno o trenutnom stanju [8]. Funkcija  $\text{sign}(r)$  definirana je sa

$$\text{sign}(r) = \frac{r}{|r|}. \quad (3.35)$$

Parametar  $\rho$  predstavlja konstantno i dovoljno veliko pojačanje regulatora. Egzaktna vrijednost parametra  $\rho$  odabire se provedbom Lyapunovljeve analize stabilnosti.

Negativni aspekti ovakvog upravljačkog zakona vezani su upravo uz visokofrekventno prebacivanje između regulacijskih djelovanja koje rezultira izrazito nelinearnim i diskontinuiranim upravljačkim signalom. Ovaj efekt poznat je pod nazivom "chattering". U praktičnoj primjeni chattering efekt dolazi do izražaja kod sustava sa zanemarenom brzom dinamikom ili kada je frekvencija uzorkovanja korištenog digitalnog kontrolera premala u odnosu na dinamiku upravljanog sustava. To dovodi do smanjene točnosti regulacijskog djelovanja, velikog trošenja pokretnih mehaničkih dijelova i velikih gubitaka topline u strujnim krugovima [9].



U nastojanju da se prevladaju navedeni nedostaci, diskontinuirana funkcija signum može se zamijeniti njenom kontinuiranom aproksimacijom u obliku funkcije tangens hiperbolni. U tom slučaju zakon upravljanja poprima idući oblik

$$u = \rho \cdot \tanh(K \cdot x) \quad (3.36)$$

gdje je  $K$  dovoljno veliki koeficijent pojačanja. Međutim, posljedica navedene aproksimacije je regulacijsko odstupanje odnosno gubitak asimptotske konvergencije pogreške. "Chattering" efekt je moguće izbjeći, i pri tome zadržati asimptotsku konvergenciju pogreške, primjenom tzv. "Integral sliding-mode regulatora" [10].

### 3.4. Robusno upravljanje RR robotom

Slično kao i kod adaptivnog upravljanja, dinamički model RR robota drugog reda može se svesti na ekvivalentni model prvog reda pomoću sliding varijable. Definiraju se jednadžbe pogreške vođenja (3.5), (3.6) i (3.7). Dobiveni vektor pogreške pozicije  $\tilde{\theta}$  te njegove derivacije  $\dot{\tilde{\theta}}$  i  $\ddot{\tilde{\theta}}$ , koriste se za definiranje vektora sliding varijable  $\mathbf{r}$  i njegove derivacije  $\dot{\mathbf{r}}$  prema (3.11) i (3.12).

Zakon upravljanja ima sljedeći oblik

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_D \mathbf{r} - \rho \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}). \quad (3.37)$$

Matrica  $\mathbf{K}_D$  je pozitivno definitna dijagonalna matrica pojačanja, a iznos koeficijenata sa dijagonale  $k_{d1}$  i  $k_{d2}$  direktno utječe na brzinu odziva. Parametar  $\rho$  predstavlja konstantno i dovoljno veliko pojačanje regulatora. Iznos pojačanja  $\rho$  mora biti veći od ukupnog utjecaja akumuliranih nepoznanica koje djeluju na dinamiku pogreške za svaki od upravljanih stupnjeva slobode gibanja kako bi odziv bio stabilan. Nužan uvjet za pojačanjem regulatora  $\rho$  proizlazi iz Lyapunovljeve analize stabilnosti ali u praksi do njega se može doći i iterativnom metodom pokušaja pri simulaciji odziva sustava na dinamičkom modelu. Vektor  $\mathbf{s}$  ima sljedeći oblik

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \tanh(K_k \cdot r_1) \\ \tanh(K_k \cdot r_2) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

, gdje su  $K_k$  koeficijenti pojačanja dovoljno veliki za aproksimaciju signum funkcije.

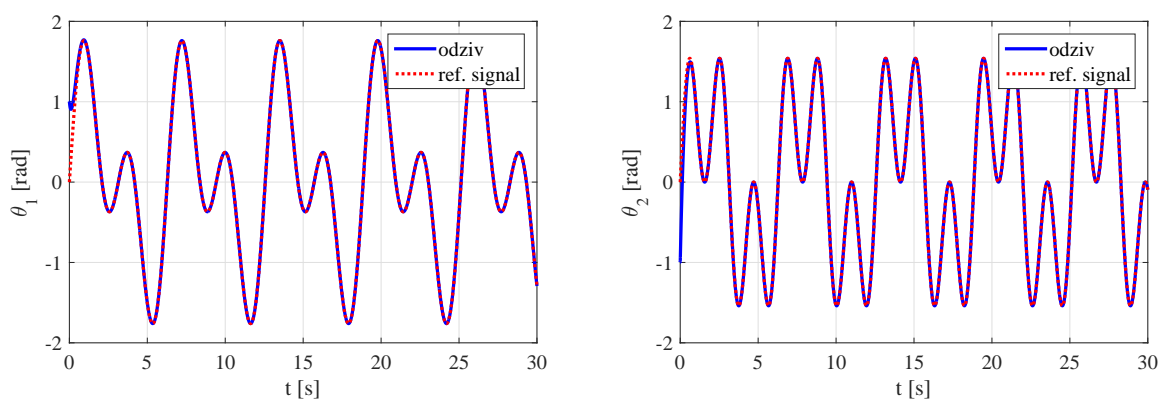
Rezultati simulacije sliding-mode upravljanja dinamičkim modelom RR robota u horizontalnoj ravnini prikazani su u nastavku. Numerička simulacija provedena je pomoću ODE15s iterativne metode za rješavanje diferencijalnih jednačbi. Ukupno vrijeme trajanja simulacije iznosi  $T = 30$  sekundi. Prikazani odzivi dobiveni su za sljedeće parametre regulatora:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

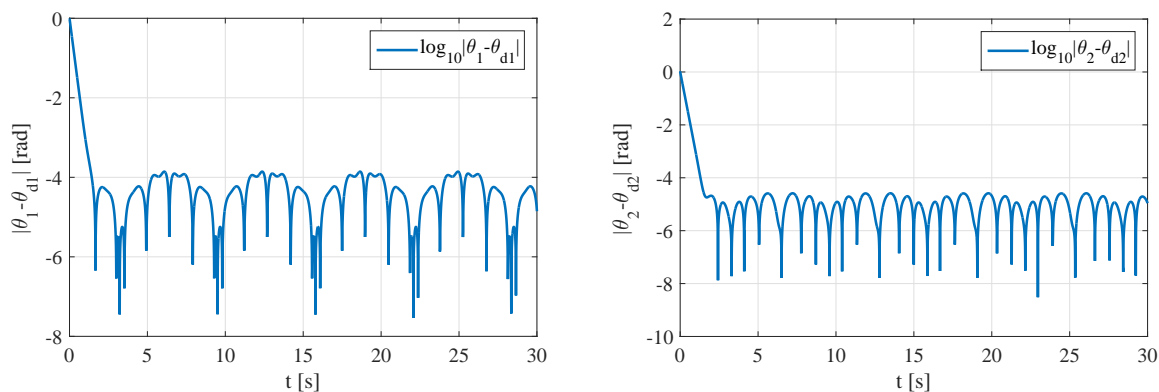
$$\mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Iznos konstantnog pojačanja regulatora  $\rho = 100$ , dok je koeficijent pojačanja  $K_k = 25$ . Početne kutne pozicije robota su  $\theta_{10} = 1$  [rad],  $\theta_{20} = -1$  [rad], a početne brzine jednake su nuli. Dobiveni rezultati upravljanja vrijede za pretpostavku da su sve brzine sustava mjerljive. Referentne vremenski promjenjive trajektorije koje regulator mora slijediti dane su izrazima (3.27) i (3.28).

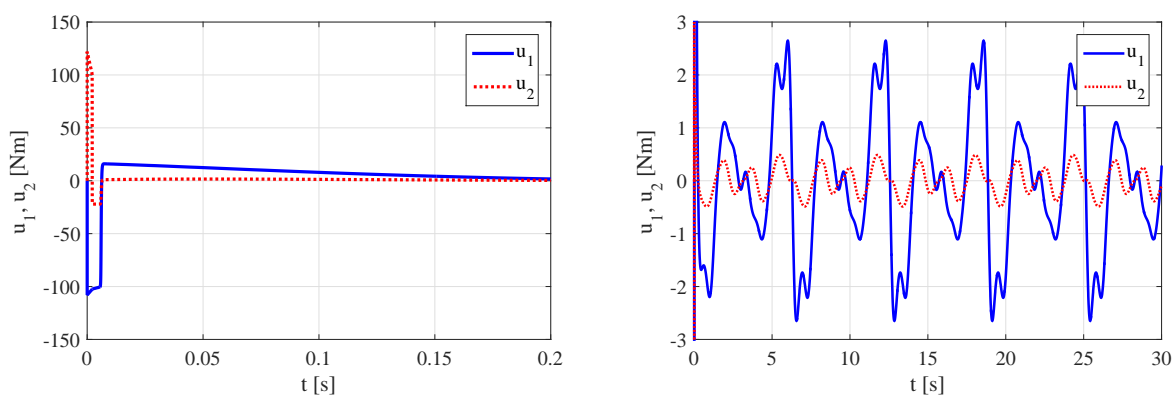
Slika 3.5 prikazuje slijedenje zadane referentne trajektorije za oba članka RR robota. Na slici 3.6 prikazana su regulacijska odstupanja pri slijedenju referenci. Grafovi odstupanja su radi preglednosti prikazani u logaritamskom mjerilu. Grafovi sa slike 3.7 prikazuju odziv upravljačkih varijabli na zadani referentni signal. Lijevi graf radi bolje razlučivosti prikazuje početni skok upravljačkih varijabli unutar kraćeg vremenskog intervala. Na desnom grafu prikazane su oscilacije upravljačkih varijabli nakon prvobitnog skoka, a tokom kompletnog vremena trajanja simulacije.



Slika 3.5. Odziv sliding mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno)



Slika 3.6. Regulacijska pogreška sliding mode regulatora u logaritamskoj skali



Slika 3.7. Upravljački signal  $u_1$  i  $u_2$  sliding mode regulatora

Rezultati simulacija i u ovom slučaju pokazuju veliku točnost slijeđenja referentnih signala. Regulacijska odstupanja tokom prve dvije sekunde približno linearno padaju do  $10^{-4}$  [rad] nakon čega variraju u području između  $10^{-4}$  [rad] i  $10^{-8}$  [rad]. Upravljačke varijable u početnoj fazi simulacije pokazuju veliki skok, no otprilike duplo manji nego u slučaju adaptivnog upravljanja. Također, početne oscilacije upravljačkih varijabli oko nule nakon "peak-a", manje su i kraće traju u slučaju sliding-mode upravljanja. Amplitude oscilacija upravljačkih varijabli nakon smirivanja prvobitnog skoka slične su onima kod adaptivnog upravljanja.

Kod sliding-mode upravljanja visoka točnost regulacije postiže se ranije, ali s vremenom ne konvergira u nulu kao što je slučaj kod adaptivnog upravljanja. U oba slučaja rezultati praćenja referenci mogu se okarakterizirati kao zadovoljavajući. Međutim, navedeni skokovi upravljačkih varijabli ovakve

odzive čine neprimjenjivima za realne aplikacije, a pretpostavka mjerljivih brzina dodatno je ograničavajuća.

U idućem poglavlju razmatrat će se primjena istih algoritama upravljanja, ali za slučaj da brzine sustava nisu mjerljive već će biti estimirane primjenom različitih filtera za estimaciju brzina.

## 4. Adaptivno i robusno upravljanje primjenom estimatora brzine

Osnovna funkcija robotskih manipulatora je pozicioniranje u prostoru. Industrijski roboti često koriste senzore pozicija poput optičkih enkodera gdje preko uzastopnih mjerenja položaja u poznatim vremenskim intervalima mogu izračunati brzinu promjene vrijednosti položaja. Međutim, derivacija pozicije mjerene optičkim enkoderom drastično povećava šum mjerenja. S druge strane ugradnja senzora brzine je nepraktična iz aspekta konstrukcijskih rješenja prilikom implementacije senzora i cijene. Također, senzori brzina obično gube preciznost kod jako velikih i jako malih brzina. Radi navedenih razloga filteri za estimaciju brzina predstavljaju dobru alternativu za potrebe implementacije upravljačkih algoritama.

### 4.1. Estimatori brzine

Ako pretpostavimo da je pozicija jedina mjerljiva fizikalna veličina, vektor brzine  $\dot{\theta}$  i vektor ubrzanja  $\ddot{\theta}$  postaju nepoznati. Pošto su članovi navedenih vektora nužni dijelovi sliding varijabli, a time i upravljačkog zakona, potrebno ih je estimirati. U sklopu ovog rada razmatraju se tri tipa filtera za estimaciju brzine: Dirty derivative filter, Sliding-mode filter i Super-twisting filter.

#### 4.1.1. Dirty derivative filter

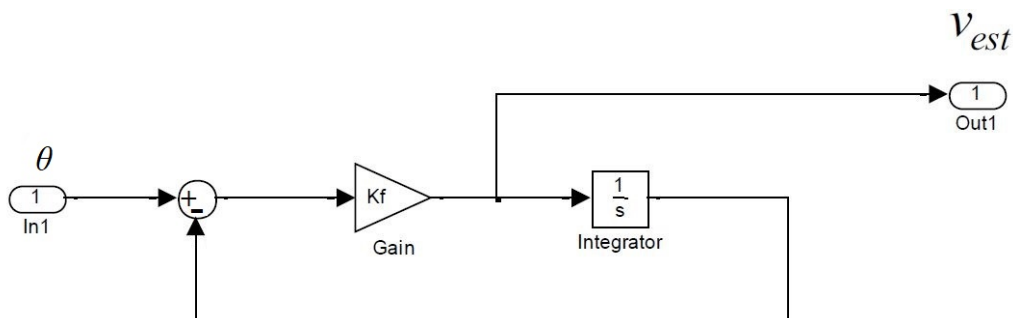
Estimacija brzine pomoću ovog filtera dana je izrazom

$$\hat{v} = \dot{\hat{\theta}} = -K_f(\hat{\theta} - \theta). \quad (4.1)$$

Način rada ovog filtera identičan je regulatoru s proporcionalnim djelovanjem. Na ulaz regulatora dovodi se kutna pozicija članaka robota. Promjena vrijednosti pozicije stvara regulacijsku pogrešku

$$e = \hat{\theta} - \theta \quad (4.2)$$

gdje je  $\hat{\theta}$  estimacija pozicije. Regulacijska pogreška množena sa koeficijentom pojačanja  $K_f$  daje estimirani iznos brzine članka robota  $\hat{\dot{\theta}}$  što je ujedno i izlaz regulatora. Estimacija pozicije  $\hat{\theta}$  dobivena je integracijom estimirane brzine. Shema filtera prikazana je na slici 4.1.



Slika 4.1. Shematski prikaz Dirty derivative filtera [11]

#### 4.1.2. Sliding-mode filter

Estimacija brzine sliding-mode filterom prikazana je sljedećim izrazom

$$\hat{v} = \hat{\dot{\theta}} = -K_f \text{sign}(\hat{\theta} - \theta). \quad (4.3)$$

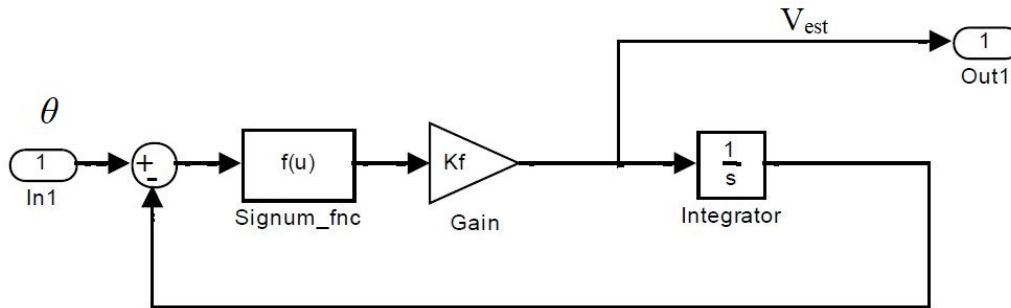
Vidljivo je da je sliding-mode filter sličan sliding-mode upravljačkom zakonu prvog reda iz (3.34) uz razliku da kod filtera argument signum funkcije nije sliding varijabla već razlika estimirane kutne pozicije  $\hat{\theta}$  i stvarne kutne pozicije  $\theta$ . Signum funkcija množena sa koeficijentom pojačanja  $K_f$  daje estimiranu brzinu  $\hat{\dot{\theta}}$ . Estimirana pozicija  $\hat{\theta}$  dobivena je integracijom estimirane brzine.

U sklopu ovog rada korišten je sliding-mode filter kojemu je signum funkcija zamijenjena njenom aproksimacijom pa izraz poprima oblik

$$\hat{\dot{\theta}} = -K_f \tanh(K_p(\hat{\theta} - \theta)) \quad (4.4)$$

gdje je  $K_p$  dovoljno veliki koeficijent pojačanja.

Shema sliding-mode filtera prikazana je na slici 4.2.



Slika 4.2. Shematski prikaz Sliding-mode filtera [11]

### 4.1.3. Super-twisting filter

Super-twisting filter prikazan je sljedećim izrazima

$$\hat{v} = \dot{\hat{\theta}} = -K_f \sqrt{|\hat{\theta} - \theta_d|} \text{sign}(\hat{\theta} - \theta) + w \quad (4.5)$$

$$\dot{w} = -K_w \text{sign}(\hat{\theta} - \theta). \quad (4.6)$$

Izraz 4.5 možemo podijeliti na dva dijela koji se mogu promatrati kao nelinearno P i I djelovanje. Nelinearno P djelovanje sastoji se od klasične signum funkcije i pojačanja ovisnog o razlici estimerane pozicije  $\hat{\theta}$  i stvarne pozicije  $\theta$ , što predstavlja analog linearnom P djelovanju koje ovisi o iznosu pogreške. U drugi dio spada integralno djelovanje koje je analogno linearnom integralnom djelovanju.  $K_f$  i  $K_w$  su koeficijenti pojačanja. U ovom radu filter je implementiran sa hiperbolnom tangens funkcijom

$$\hat{v} = \dot{\hat{\theta}} = -K_f \sqrt{|\hat{\theta} - \theta_d|} \tanh(K_p(\hat{\theta} - \theta)) + w \quad (4.7)$$

$$\dot{w} = -K_w \tanh(K_n(\hat{\theta} - \theta)). \quad (4.8)$$

gdje je su  $K_p$  i  $K_n$  dovoljno veliki koeficijenti pojačanja.

## 4.2. Adaptivno upravljanje (RR robotom) primjenom estimatora brzine

U nastavku su prikazani rezultati simulacije adaptivnog upravljanja RR robotom u horizontalnoj ravnini primjenom sliding-mode filtera za estimaciju brzine. Za implementaciju upravljačkog zakona te simulaciju rezultata korišten je MATLAB programski paket. Numerička simulacija provedena je pomoću ODE15s iterativne metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Ukupno vrijeme trajanja simulacije iznosi  $T = 30$  sekundi. Prikazani odzivi dobiveni su za sljedeće parametre regulatora:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

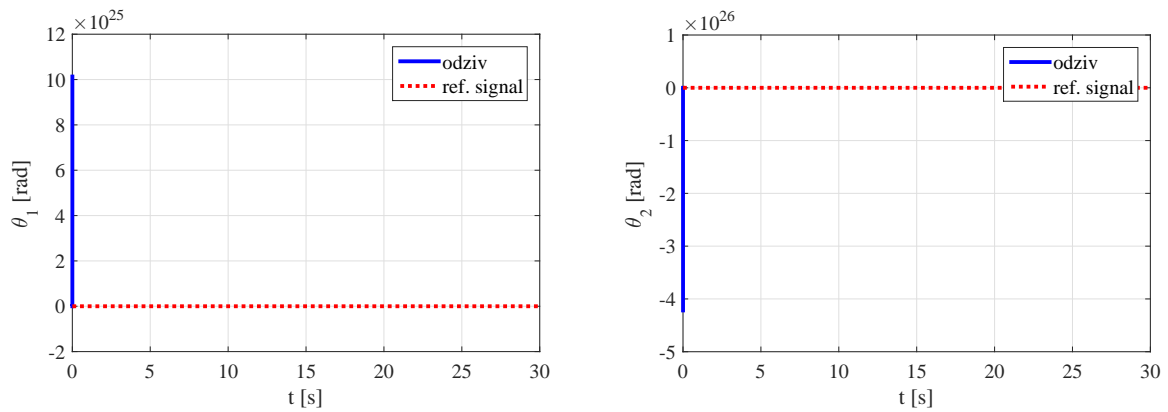
$$\mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

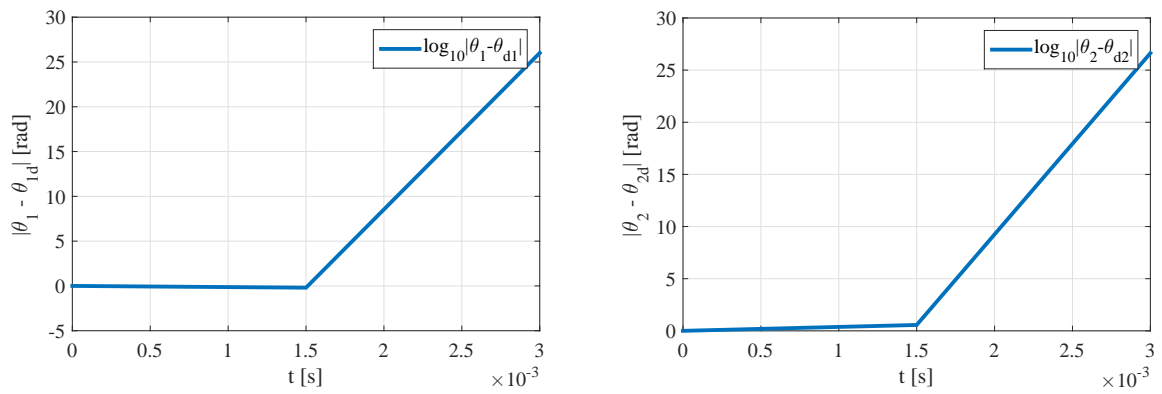
Za estimaciju brzina  $\dot{\theta}_1$  i  $\dot{\theta}_2$  koeficijent pojačanja iznosi  $K_f = 100$ , a parametar  $K_p = 50$ . Početne vrijednosti nepoznatih parametara sustava su  $p_1 = 1$  [kg m<sup>2</sup>],  $p_2 = 2$  [kg m<sup>2</sup>],  $p_3 = 3$  [kg m<sup>2</sup>]. Početne kutne pozicije robota su  $\theta_{10} = 1$  [rad],  $\theta_{20} = -1$  [rad], a početne brzine jednake su nuli. Referentne vremenski promjenjive trajektorije koje regulator mora slijediti dane su izrazima (3.27) i (3.28).

Na slikama 4.3 - 4.6 prikazani su rezultati simulacije za primjenu sliding-mode filtera, a uključuju slijeđenje referentnih pozicija (slika 4.3), regulacijska odstupanja (slika 4.4), upravljačke signale (slika 4.5) i estimaciju nepoznatih parametara (slika 4.6).

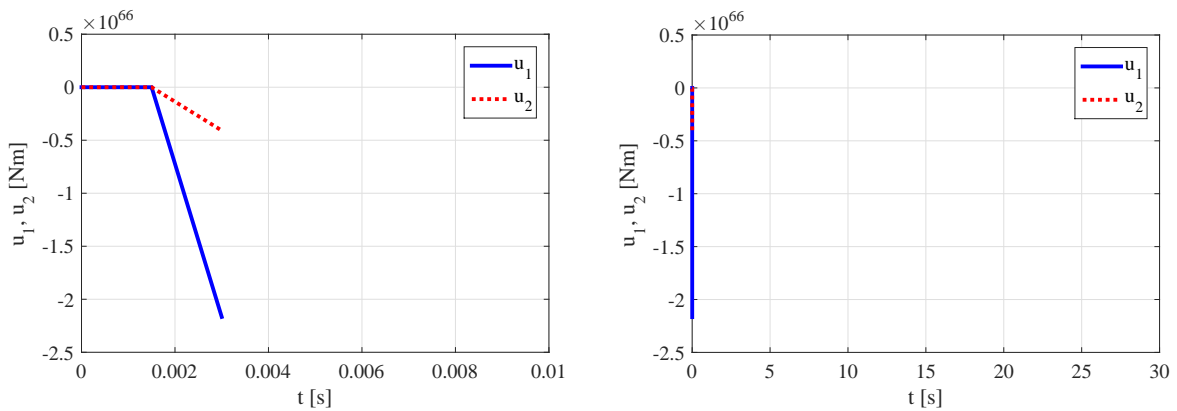




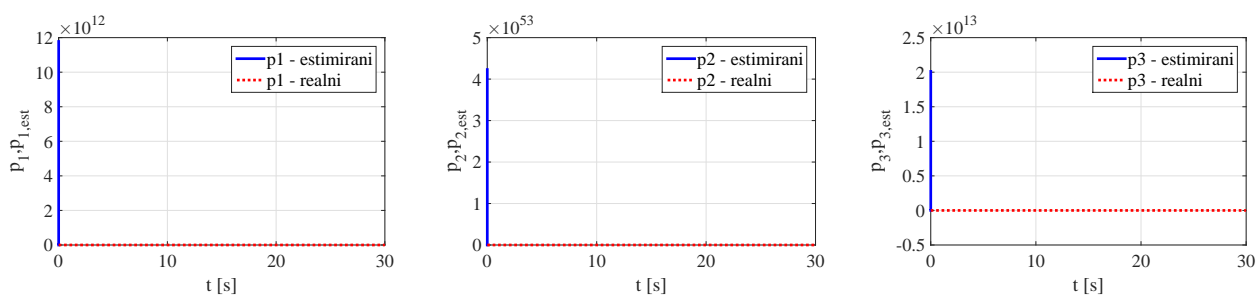
Slika 4.3. Odziv adaptivnog regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (SM filter)



Slika 4.4. Regulacijska pogreška adaptivnog regulatora u logaritamskoj skali (SM filter)



Slika 4.5. Upravljački signal  $u_1$  i  $u_2$  adaptivnog regulatora (SM filter)



Slika 4.6. Adaptivna estimacija parametara dinamičkog modela (SM filter)

Rezultati simulacija pokazuju izrazito nestabilan odziv. Regulacijska odstupanja pri slijeđenju referentnih pozicija nakon samo 0.003 sekunde trajanja simulacije postižu vrijednost reda  $10^{26}$ . Upravljački signali  $u_1$  i  $u_2$  također eksponencijalno rastu kao i vrijednosti estimiranih nepoznatih parametara sustava. Programsko okruženje MATLAB nakon 0.003 sekunde prekida izvođenje simulacije pošto vrijednosti svih simuliranih varijabli naglo rastu u beskonačnost. Nestabilan odziv dobiva se za bilo koju kombinaciju parametara adaptivnog regulatora i sliding-mode filtera za estimaciju brzina.

Slični nestabilni odzivi dobiveni su za slučajeve primjene preostala dva filtera za estimaciju brzina. Na temelju dobivenih rezultata dolazi se do zaključka da primjenom klasičnog adaptivnog regulatora uz korištenje filtera za estimaciju brzina na dinamičkom modelu RR robota u horizontalnoj ravnini nije moguće postići stabilan odziv. Razlog tomu je što vrlo mala odstupanja elemenata regresijske matrice od njihove egzaktno vrijednosti bitno pogoršavaju performanse klasičnog regulatora. Pošto su brzine elementi regresijske matrice, a regresijska matrica dio adaptivnog upravljačkog zakona, korištenje estimiranih vrijednosti brzina umjesto egzaktnih jako narušava performanse regulacije.

### 4.3. Robusno upravljanje (RR robotom) primjenom estimatora brzine

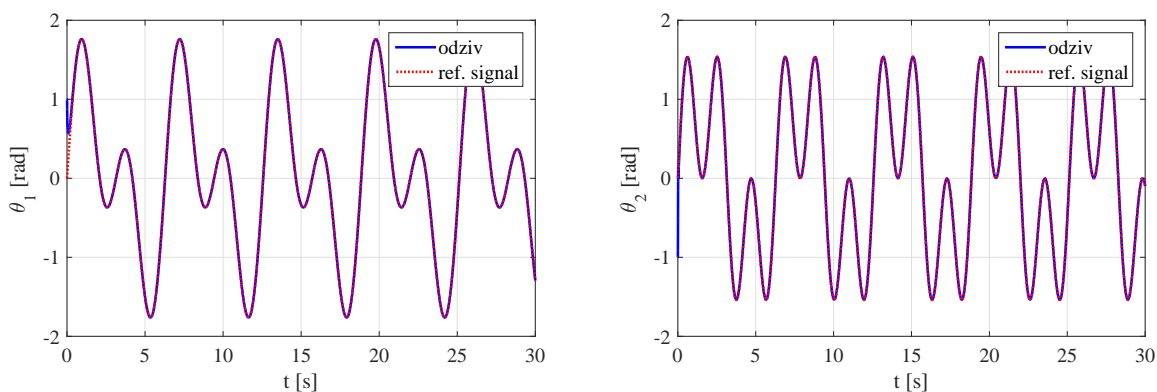
U nastavku su prikazani rezultati simulacije sliding-mode upravljanja primjenom različitih estimatora brzina. Numerička simulacija provedena je pomoću ODE15s iterativne metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Ukupno vrijeme trajanja simulacija iznosi  $T = 30$  sekundi. Za testiranje sva tri estimatora brzina korištene su iste referentne trajektorije iz (3.27) i (3.28).

### 4.3.1. Simulacijski rezultati za dirty derivative filter

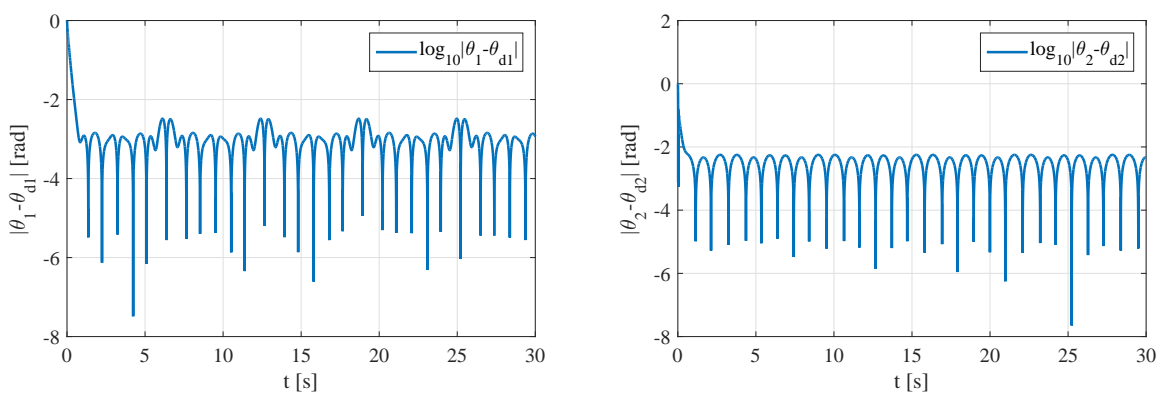
Prikazani odzivi dobiveni su za sljedeće parametre regulatora:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

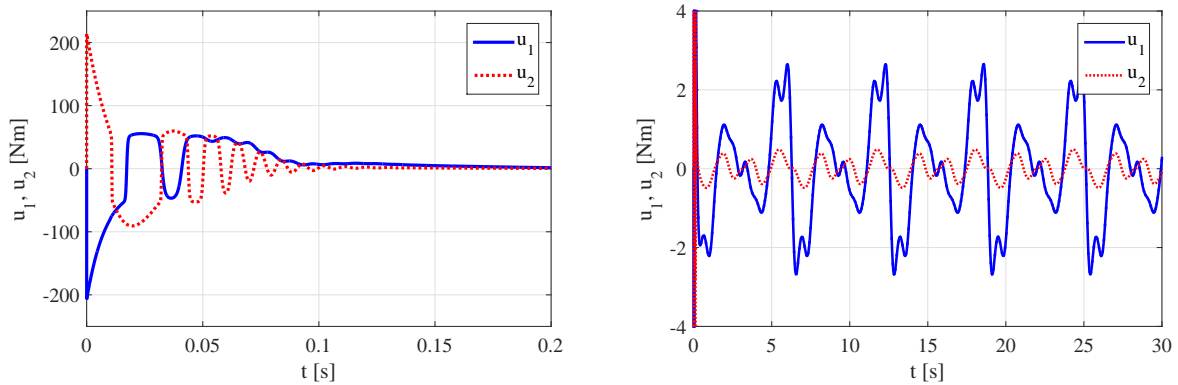
Iznos konstantnog pojačanja regulatora  $\rho = 50$ , dok je koeficijent pojačanja  $K_k = 1$ . Početne kutne pozicije robota su  $\theta_{10} = 1$  [rad],  $\theta_{20} = -1$  [rad], a početne brzine jednake su nuli. Koeficijent pojačanja estimatora brzine iznosi  $K_f = 150$  za  $\hat{\theta}_1$  i  $\hat{\theta}_2$ . Na slikama 4.7 - 4.9 prikazani su rezultati simulacije za primjenu dirty derivative filtera, a uključuju slijeđenje referentnih pozicija (slika 4.7), regulacijska odstupanja (slika 4.8) i upravljačke signale (slika 4.9).



Slika 4.7. Odziv sliding mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (DD filter)



Slika 4.8. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali (DD filter)

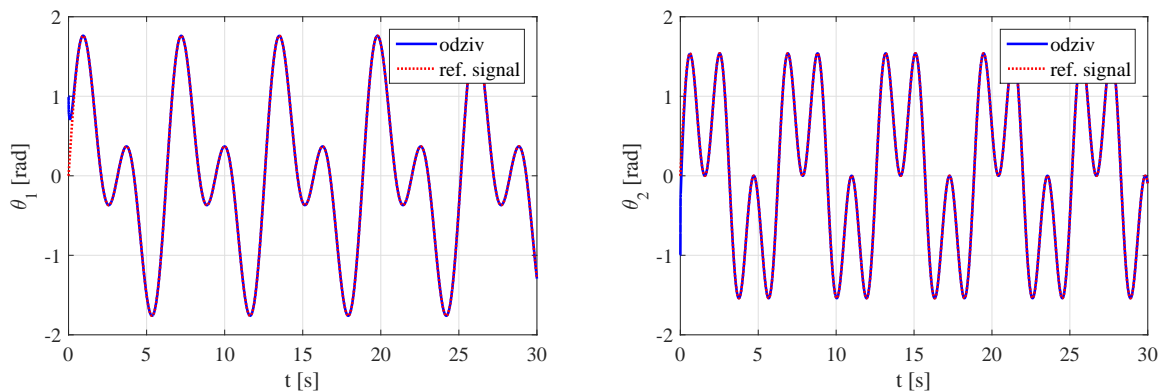
Slika 4.9. Upravljački signal  $u_1$  i  $u_2$  sliding-mode regulatora (DD filter)

### 4.3.2. Simulacijski rezultati za sliding-mode filter

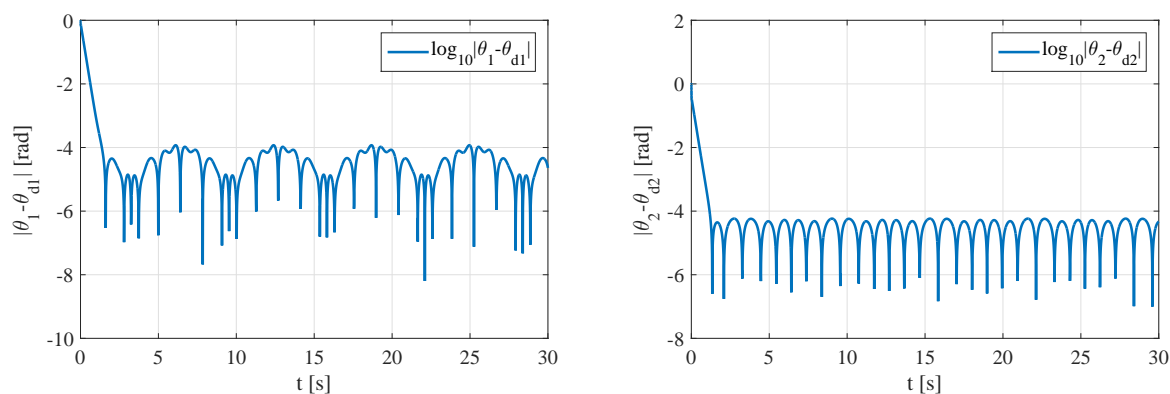
Prikazani odzivi dobiveni su za sljedeće parametre regulatora:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

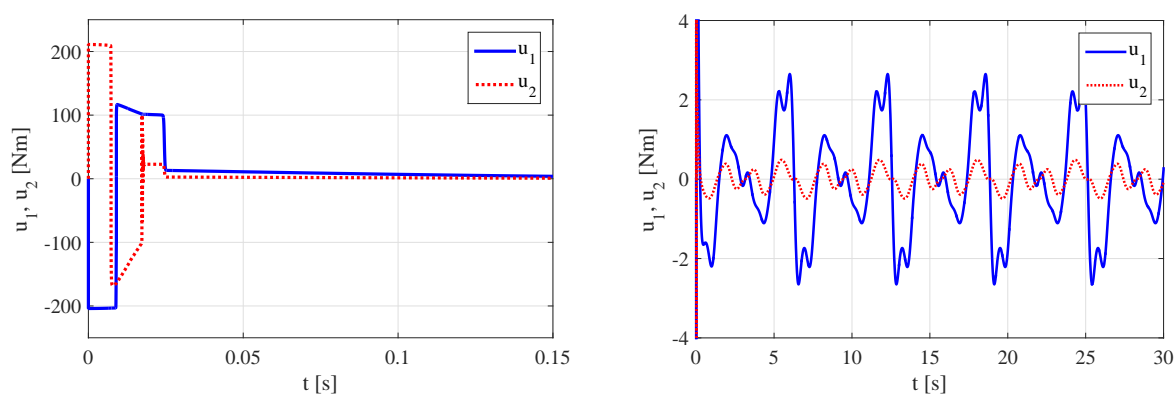
Iznos konstantnog pojačanja regulatora  $\rho = 100$ , dok je koeficijent pojačanja  $K_k = 25$ . Početne kutne pozicije robota su  $\theta_{10} = 1$  [rad],  $\theta_{20} = -1$  [rad], a početne brzine jednake su nuli. Za estimaciju brzina  $\hat{\theta}_1$  i  $\hat{\theta}_2$  koeficijent pojačanja iznosi  $K_f = 100$ , a parametar  $K_p = 180$ . Na slikama 4.10 - 4.12 prikazani su rezultati simulacije za primjenu sliding-mode filtera, a uključuju slijeđenje referentnih pozicija (slika 4.10), regulacijska odstupanja (slika 4.11) i upravljačke signale (slika 4.12).



Slika 4.10. Odziv sliding-mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (SM filter)



Slika 4.11. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali (SM filter)

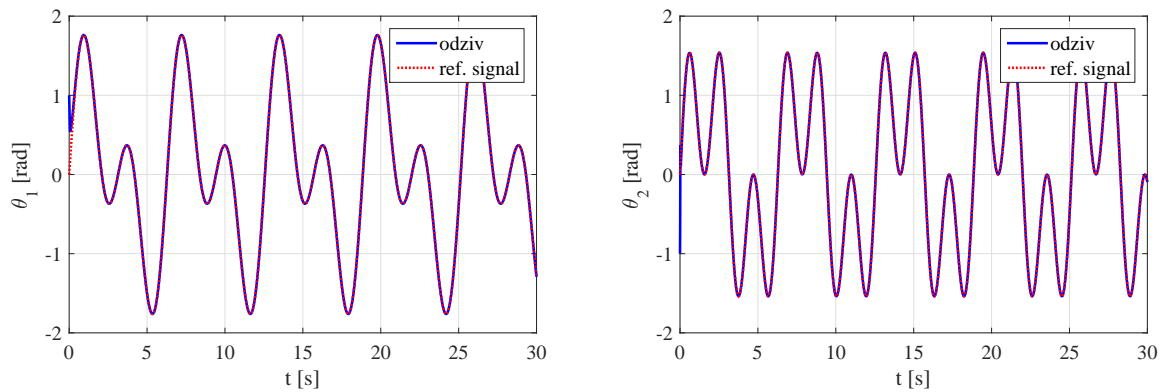
Slika 4.12. Upravljački signal  $u_1$  i  $u_2$  sliding-mode regulatora (SM filter)

### 4.3.3. Simulacijski rezultati za super-twisting filter

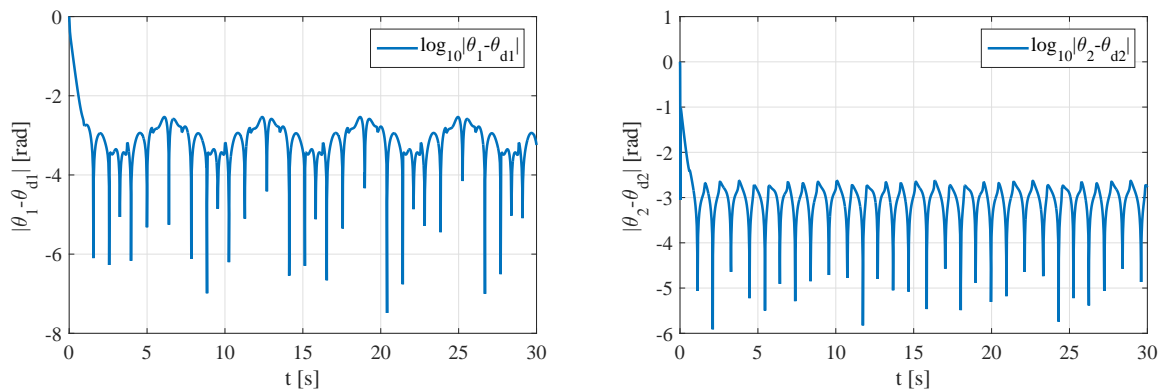
Prikazani odzivi dobiveni su za sljedeće parametre regulatora:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

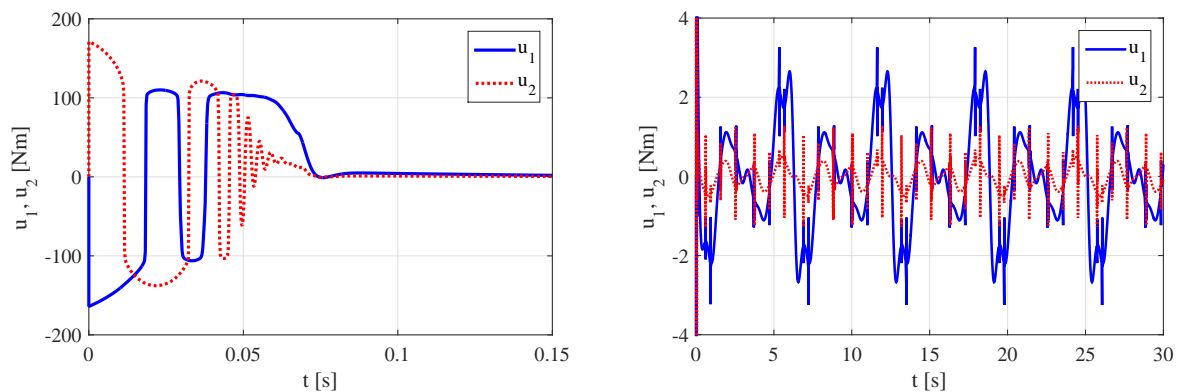
Iznos konstantnog pojačanja regulatora  $\rho = 100$ , dok je koeficijent pojačanja  $K_k = 1$ . Početne kutne pozicije robota su  $\theta_{10} = 1$  [rad],  $\theta_{20} = -1$  [rad], a početne brzine jednake su nuli. Za estimaciju brzina  $\hat{\theta}_1$  i  $\hat{\theta}_2$  korišteni su sljedeći parametri:  $K_f = 60$ ,  $K_p = 180$ ,  $K_w = 1$  i  $K_n = 8$ . Na slikama 4.13 - 4.15 prikazani su rezultati simulacije za primjenu super-twisting filtera, a uključuju slijeđenje referentnih pozicija (slika 4.13), regulacijska odstupanja (slika 4.14) i upravljačke signale (slika 4.15).



Slika 4.13. Odziv sliding-mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (ST filter)



Slika 4.14. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali (ST filter)



Slika 4.15. Upravljački signal  $u_1$  i  $u_2$  sliding-mode regulatora (ST filter)

Rezultati pokazuju da je najmanje regulacijsko odstupanje ostvareno u slučaju korištenja sliding-mode filtera za estimaciju brzina, a najveće u slučaju dirty derivative filtera. Početno oscilatorno ponašanje u

fazi smirivanja prvobitnog skoka upravljačke varijable najkraće je kod sliding-mode filtera, a najduže kod dirty derivative filtera. Prema slikama 4.9 i 4.12 oscilacije upravljačkih signala oko nule nakon početnog "peak-a" u slučaju sliding-mode i dirty derivative filtera slične su oblikom, amplitudom i frekvencijom. Kod uporabe super-twisting filtera upravljači signal  $u_2$  pokazuje visokofrekventni skok i pad u približnim razmacima od jedne sekunde tokom cijelog trajanja simulacije kao što je vidljivo iz slike 4.15.

Najbolje performanse regulatora ostvarene u slučaju estimacije brzine primjenom sliding-mode filtera (Slike 4.10 - 4.12). Na slici 4.11 se vidi da je regulacijska pogreška skoro identična onoj u slučaju kada su brzine sustava mjerljive (slika 3.6). Međutim, ovakve performanse idu na cijenu još većeg početnog skoka upravljačkih varijabli, koje su skoro dva puta veće kod primjene estimatora brzine.

Za razliku od adaptivnog regulatora, sliding-mode regulator postiže stabilan odziv i dobre performanse kada brzine sustava nisu mjerljive, već dobivene estimacijom na temelju vrijednosti sa senzora za mjerenje pozicije. Razlog tomu je što sliding-mode upravljački zakon koristi samo sliding varijablu  $r$  (izraz 3.11) za regulaciju što ovu metodu čini neovisnom o dinamičkom modelu i robusnijom na promjene parametara.

U idućem poglavlju razmatra se upravljanje RR robotom primjenom aktivne kompenzacije poremećaja (ADRC) zasnovane na proširenom observeru stanja. Rezultati ADRC upravljanja usporedit će se sa rezultatima sliding-mode regulatora uz korištenje estimatora brzine i saturacije kako bi se izbjegli visoki skokovi upravljačkih signala.

## 5. Upravljanje primjenom aktivne kompenzacije poremećaja

Aktivna kompenzacija poremećaja, poput adaptivnog i sliding-mode upravljanja, spada u napredne metode upravljanja prilagođene za regulaciju dinamičkih sustava sa izraženom nelinearnom dinamikom. Ovu metodu prvi je predložio Jingqing Han pred kraj osamdesetih godina dvadesetog stoljeća, no nagli rast i široku industrijsku primjenu doživljava tek u posljednjih nekoliko godina. Han-ova motivacija temeljila se na želji za unaprijeđenjem upravljačkih sposobnosti i performansi linearnog PID regulatora. Konkretno, želio je omogućiti PID regulaciju nelinearne dinamike i zaobići problematiku D člana vezanu uz pojačanje šuma mjernog signala. U konačnici je razvio ADRC metodu koja u odnosu na PID regulator ima sposobnost kompenzacije vremenski promjenjivih nepoznatih vanjskih poremećaja zajedno sa nesavršenostima matematičkog modela vezanima uz nemodeliranu dinamiku sustava [12].

Početni korak metode upravljanja primjenom aktivne kompenzacije poremećaja je maksimalno pojednostavljenje matematičkog modela sustava na način da se sva neželjena i nepoznata dinamika sustava, kao i svi nepoznati vanjski poremećaji zajedno tretiraju kao totalni poremećaj. Zatim se uvodi prošireni observer stanja (eng. *Extended State Observer - ESO*) koji pored estimacije stanja sustava istovremeno estimira i totalni poremećaj sustava [13]. Ta se estimacija zatim koristi kao dodatni član regulatora s ciljem kompenzacije poremećaja.

Prošireni observer stanja u suštini je konvencionalni Luenbergerov observer stanja sustava, proširen dodatnom varijablom za estimaciju totalnog poremećaja. Način rada Luenbergerovog observera stanja objasniti će se na primjeru linearnog multivarijabilnog sustava:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx},\end{aligned}\tag{5.1}$$

gdje su elementi vektora  $\mathbf{y}$  mjerljivi izlazi iz kojih se želi rekonstruirati vektor stanja  $\mathbf{x}$ . Ako je dimenzija izlaznog vektora  $\mathbf{y}$  manja od dimenzije vektora stanja, primjenjuje se Luenbergerov observer stanja za estimaciju stanja sustava



$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{5.2}$$

gdje je  $\mathbf{L}$  matrica pojačanja observera. Ako se od 5.1 oduzme 5.2 dobiva se jednačba dinamike pogreške

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}\tag{5.3}$$

gdje je  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ . Iz 5.3 slijedi izraz za karakterističnu jednačbu

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}) = 0\tag{5.4}$$

prema kojoj se ustanovljuje stabilnost, a metodom podešavanja polova određuju vrijednosti elemenata matrice pojačanja observera  $\mathbf{L}$ . Prošireni observer stanja je modificirani oblik Luenbergerovog observera gdje se osim varijabli stanja estimira i ukupni poremećaj koji se tretira kao dodatna varijabla stanja

$$x_{n+1} = d(t)\tag{5.5}$$

gdje je  $d(t)$  totalni poremećaj, a  $n$  broj varijabli stanja sustava. Implementacija proširenog observera detaljnije je opisana u sklopu poglavlja 5.1 i 5.2 u nastavku rada.

Posebnost ADRC metode je upravo u njoj prirodi estimacije i poništavanja poremećaja pomoću povratne veze po pogrešci stanja. Za razliku od metoda kompenzacije poremećaja koje su zasnovane na principu internog modela, poput [14], ADRC metoda ne zahtijeva poznavanje internog modela poremećaja. Dakle, kao i u slučaju sliding-mode upravljanja, nije potrebno poznavati matematički model eksternih poremećaja. Međutim, dok ADRC metoda konstantno estimira iznos ukupnog poremećaja u svrhu njegove kompenzacije, sliding-mode metoda je dizajnirana na principu sposobnosti kompenzacije nesigurnosti u slučaju najgoreg scenarija što može uzrokovati nepotrebne utroške energije.

U skladu sa spomenutim prednostima i posebnostima, ADRC metoda u posljednjih nekoliko godina pronalazi primjenu u širokom spektru automatskog upravljanja. Neki od primjera uključuju upravljanje autonomnim letjelicama, upravljanje radom termoelektrana i vjetroelektrana te upravljanje radom elektromotora raznih kućanskih i medicinskih uređaja kao i električnih automobila. Poboljšanja rada uređaja koji koriste ADRC metodu upravljanja očituju se najčešće unaprijeđenjem performansi uz bitno smanjenje potrošnje energije [12].

## 5.1. Aktivna kompenzacija poremećaja za sustave drugog reda

U sklopu ovog potpoglavlja prikazana je implementacija aktivne kompenzacije poremećaja na općenitom dinamičkom sustavu drugog reda. Ova metoda primjenjiva je na sve potpuno aktuirane mehaničke sustave što znači da za svaki stupanj slobode gibanja postoji zaseban aktuator koji djeluje na njega. U skladu s time sustav s dva stupnja slobode gibanja može biti dekomponiran u dva podsustava. Tako, na primjer, robot s dva stupnja slobode gibanja i dvije upravljačke varijable može biti dekomponiran u dva podsustava u kojima se pojavljuje pozicija jednog članka i upravljačka sila koja djeluje na taj članak. Dinamički model tog podsustava može imati nelinearne članove koji, između ostaloga, sadrže i varijable stanja drugog članka koji je u interakciji s prvim člankom.

Općeniti nelinearni dinamički SISO sustav drugog reda može se zapisati na sljedeći način:

$$m(y, \dot{y}, t)\ddot{y} + f(y, \dot{y}, t) = b(y, \dot{y}, t)u(t) + d_{ext}(t) \quad (5.6)$$

gdje je  $u(t)$  upravljačka varijabla,  $f(y, \dot{y}, t)$  je nepoznata dinamika sustava,  $d_{ext}(t)$  je nepoznati vanjski poremećaj,  $m(y, \dot{y}, t)$  je nepoznata masa (ili moment inercije) za koju se pretpostavlja poznavanje maksimalne vrijednosti, odnosno:  $0 < m(y, \dot{y}, t) \leq \bar{m}$ .  $b(y, \dot{y}, t)$  je koeficijent pogona ovisan o karakteristikama aktuatora, a pretpostavlja se poznavanje njegove minimalne vrijednosti  $b(y, \dot{y}, t) > \bar{b} > 0$ .

Svrstavanjem sve nepoznate dinamike sustava i vanjskih poremećaja u jednu varijablu za ukupni poremećaj, dobiva se pojednostavljeni zapis matematičkog modela sustava (5.6) pogodan za upravljanje

$$\ddot{y} = \bar{k}u(t) + d(t) \quad (5.7)$$

gdje je  $\bar{k} = \frac{\bar{b}}{\bar{m}}$ , a  $d(t)$  totalni poremećaj.  $d(t)$  definiran je izrazom

$$d(t) = \left( \frac{b(y, \dot{y}, t)}{m(y, \dot{y}, t)} - \bar{k} \right) u(t) + \frac{d_{ext}(t) - f(y, \dot{y}, t)}{m(y, \dot{y}, t)}. \quad (5.8)$$

Budući da je cilj upravljanja slijeđenje proizvoljne referentne trajektorije  $y_d$ , pogrešku slijeđenja  $\tilde{y} = y - y_d$  potrebno je svesti na nulu. Ako se pretpostavi da je mjerljiva samo pozicija  $y$ , ostale varijable stanja, kao i totalni poremećaj  $d(t)$ , potrebno je estimirati pomoću proširenog observera sta-

nja. Pojednostavljeni model sustava iz (5.7) sada se može zapisati u obliku prostora stanja gdje je totalni poremećaj tretiran kao dodatna varijabla stanja  $x_3 = d(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}u + \mathbf{E}h, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{5.9}$$

gdje je  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ ,  $x_3 = d(t)$ ,  $h = \dot{d}(t)$ ,  $\mathbf{y} = y = x_1$ ,  $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$  i

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\tag{5.10}$$

Prošireni observer stanja sustava iz (5.9) ima oblik

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}},\end{aligned}\tag{5.11}$$

gdje je  $\mathbf{L} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$  matrica pojačanja observera. Oduzimanjem izraza (5.9) i (5.11) dobiva se jednadžba dinamike pogreške praćenja referentne pozicije

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e} + \mathbf{E}h\tag{5.12}$$

gdje je  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ . U slučaju kada je totalni poremećaj sustava vremenski konstantan, odnosno  $h = 0$ , karakteristična jednadžba ima sljedeći oblik:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}) = s^3 + \lambda_1 s^2 + \lambda_2 s + \lambda_3 = 0,\tag{5.13}$$

Iz karakteristične jednadžbe je vidljivo da će odziv biti stabilan za  $\lambda_1 \lambda_2 > \lambda_3$ , a karakter prijelazne pojave odziva može se konfigurirati metodom podešavanja polova. Bitno je naglasiti da polovi observera uvijek moraju biti nekoliko puta više lijevo u Gauss-ovoj 's' ravnini od polova regulatora, pošto dinamika observera mora biti brža od dinamike regulatora. Konačno, zakon upravljanja kojim se postiže stabilnost sustava i kompenzacija nepoznatog totalnog poremećaja je

$$u = \frac{1}{k} (\ddot{y}_d - \hat{x}_3 - K_P (\hat{x}_1 - y_d) - K_D (\hat{x}_2 - \dot{y}_d)),\tag{5.14}$$

gdje je  $\hat{x}_3 = \hat{d}(t)$  estimacija totalnog poremećaja,  $\hat{x}_1 = \hat{y}^{(0)}$  estimacija pozicije,  $\hat{x}_2 = \hat{y}^{(1)}$  estimacija brzine, a  $K_P$  i  $K_D$  su koeficijenti pojačanja regulatora također određeni metodom podešavanja polova.

Ako jednadžbu dinamike pogreške iz (5.12) zapišemo u SISO obliku:

$$\ddot{e} + \lambda_1 \dot{e} + \lambda_2 e + \lambda_3 e = \dot{d}(t), \quad (5.15)$$

gdje je  $e = y - \hat{y}$ , vidljivo je da je asimptotska konvergencija pogreške  $e$  u nulu moguća samo ako je totalni poremećaj konstantan, odnosno  $\dot{d}(t) = 0$ . Iz toga slijedi da je korišteni ESO sa samo jednim proširenim stanjem sposoban točno kompenzirati samo konstantne ukupne poremećaje.

U idućem potpoglavlju razmatrat će se ADRC upravljanje sustavom s nepoznatim vremenski promjenjivim totalnim poremećajem.

## 5.2. Poopćeni ADRC za sustave drugog reda

Kao i u prethodnom potpoglavlju, potpuno aktuiran sustav drugog reda može se dekomponirati u dva podsustava te upravljati svakim podsustavom zasebno. Poopćena forma ADRC metode upotrebljava se u slučaju kada je potrebno kompenzirati totalne poremećaje složenijeg oblika. Vremenska funkcija takvog totalnog poremećaja može se generalno zapisati u obliku polinoma višeg stupnja:

$$d(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_{m-1} t^{m-1}. \quad (5.16)$$

Pošto ADRC metoda radi na principu estimacije i poništavanja poremećaja, za kompenzaciju poremećaja poput (5.16), potrebno je prvo osigurati točnu estimaciju pomoću ESO-a. Osnovna ideja je prošireno stanje za estimaciju totalnog poremećaja dodatno proširiti. Time raste broj integratora proširenog stanja pa sukladno tome varijabla  $h$  iz (5.9) jednaka je  $m$ -toj derivaciji totalnog poremećaja  $x_3^{(m)} = h = d^{(m)}(t)$ , gdje je  $m$  dimenzija proširenog stanja ESO-a. Prošireni model dinamičkog sustava drugog reda ( $n = 2$ ) u obliku prostora stanja jednak je izrazu (5.9) gdje su:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)}, \quad (5.17)$$

$$\text{a } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times (n+m-1)} \end{bmatrix}.$$

Generalni oblik ESO-a za sustav iz (5.17) se ne mijenja, odnosno ostaje isti kao i u slučaju kompenzacije konstantnog poremećaja (5.11). Ono što se mijenja je broj varijabli stanja pa je sada vektor estimiranih varijabli stanja  $\hat{\mathbf{x}}$  dimenzije  $n + m$  gdje je  $n = 2$  broj stvarnih varijabli stanja, a  $m$  broj proširenih stanja. Uštımavanje observera vrši se metodom podešavanja polova, a karakteristična jednadžba glasi

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}) = s^{n+m} + \lambda_1 s^{n+m-1} + \lambda_2 s^{n+m-2} + \dots + \lambda_{n+m} = (s + \omega_0)^{n+m} \quad (5.18)$$

gdje su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+m}$  elementi matrice pojačanja  $\mathbf{L}$ , a  $\omega_0$  je stabilan višestruki pol observera.

Jednadžba dinamike pogreške ima sljedeći oblik

$$e^{(n+m)} + \lambda_1 e^{(n+m-1)} + \lambda_2 e^{(n+m-2)} + \dots + \lambda_{n+m} e = d^{(m)}(t), \quad (5.19)$$

gdje je  $e = y - \hat{y}$ . Vidljivo je da je asimptotska konvergencija pogreške u nulu moguća ako je totalni poremećaj oblika (5.16), pošto je  $d^{(m)}(t) = 0$ . Generalno pravilo je da se pogreška estimacije poremećaja smanjuje sa povećanjem dimenzije proširenog stanja  $m$ . Međutim, problem koji se javlja kod primjene ESO-a, pogotovo kod većih dimenzija, je tzv. "peaking phenomenon", odnosno pojava visoko amplitudnih tranzientnih oscilacija. Taj problem se može riješiti primjenom algebarskog proširenog observera stanja [15].

### 5.3. Upravljanje RR robotom primjenom aktivne kompenzacije poremećaja

Početni korak je matematički model sustava RR robota u horizontalnoj ravnini svesti u oblik prikladan za implementaciju ADRC upravljačkog zakona. Matematički model robota

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{u}, \quad (5.20)$$

može se zapisati u sljedećem obliku

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (5.21)$$

gdje je vektor kutnih ubrzanja RR robota  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$  prikazan u ovisnosti o dinamici robota. Prethodni izraz može se maksimalno pojednostaviti na način da se sva nelinearna dinamika robota tretira kao totalni poremećaj  $\mathbf{d}(t)$ . Uvođenjem totalnog poremećaja izraz (5.21) poprima oblik

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{d}(t), \quad (5.22)$$

gdje je

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

a

$$\mathbf{d}(t) = (\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1} - \mathbf{K})\mathbf{u} - \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (5.24)$$

Za elemente matrice koeficijenata  $\mathbf{K}$  moraju biti zadovoljeni uvjeti  $k_1 < m_{11max}$  i  $k_2 < m_{22max}$ , gdje su  $m_{11}$  i  $m_{22}$  elementi inverzne matrice inercije  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$  prema

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

za koje su poznate njihove granice:  $m_{11min} \leq m_{11} \leq m_{11max}$  i  $m_{22min} \leq m_{22} \leq m_{22max}$ .

Pošto je razmatrani RR robot potpuno aktuiran mehanički sustav s dva stupnja slobode gibanja, može se dekomponirati na dva podsustava s jednim ulazom i jednim izlazom te izvesti upravljački zakon za svaki podsustav zasebno. Dekomponiranjem izraza (5.22) u dva podsustava dobiva se:

$$\ddot{\theta}_1 = k_1 u_1 + d_1(t), \quad (5.26)$$

$$\ddot{\theta}_2 = k_2 u_2 + d_2(t). \quad (5.27)$$

gdje su  $u_1$  i  $u_2$  upravljačke varijable podsustava 1 i 2,  $d_1(t)$  totalni poremećaj podsustava 1, a  $d_2(t)$  totalni poremećaj podsustava 2.

### 5.3.1. Podsustav 1

Budući da je cilj regulacije osigurati praćenje referentne trajektorije, potrebno je osigurati da dinamika pogreške bude stabilna i konvergira prema nuli. U skladu s time podsustav 1 izražen preko pogreške odstupanja  $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_{d1}$  ima sljedeći oblik:

$$\ddot{\tilde{\theta}}_1 = \bar{u}_1 + \bar{d}_1(t) \quad (5.28)$$

gdje je  $\bar{u}_1 = k_1 u_1$  pomoćna upravljačka varijabla, a  $\bar{d}_1(t) = d_1(t) - \ddot{\theta}_{d1}$  novi totalni poremećaj podsustava 1.

Jednadžba (5.28) može se prikazati u obliku prostora stanja

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_{s1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_{s1} (\bar{u}_1 + \bar{d}_1(t)) \\ \tilde{y}_1 &= \mathbf{c}_{s1} \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (5.29)$$

gdje su

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

a vektor  $\mathbf{c}_{s1} = [1 \ 0]$ .

Budući da vrijedi svojstvo separacije, odnosno dinamika regulatora ne utječe na dinamiku observera, sintezu ADRC regulatora za podsustav 1 već je moguće provesti uz pretpostavku da je vektor stanja  $\mathbf{x}_1$  u potpunosti mjerljiv. ADRC upravljački zakon za podsustav 1 glasi:

$$u_1 = -\frac{1}{k_1} \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{x}_1 + \hat{\bar{d}}_1(t) \right) \quad (5.31)$$

gdje je  $\mathbf{k}_1 = [k_{11} \ k_{12}]$  vektor pojačanja, a  $\hat{\bar{d}}_1(t)$  estimirani totalni poremećaj podsustava 1.

Uvrštavanjem izraza (5.31) u (5.29) dobije se dinamika zatvorenog kruga

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_{s1} - \mathbf{b}_{s1} \mathbf{k}_1) \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_{s1} \tilde{\bar{d}}_1(t) \quad (5.32)$$

gdje je  $\tilde{d}_1(t) = \bar{d}_1(t) - \hat{d}_1(t)$  pogreška estimacije totalnog poremećaja.

Da bi regulacijsko odstupanje bilo što manje potrebno je uštimiti regulator optimalnim odabirom vektora pojačanja  $\mathbf{k}_1$  i osigurati što točniju estimaciju nemjerljivih varijabli stanja i totalnog poremećaja  $\hat{d}_1(t)$ . Vektor pojačanja određuje se metodom podešavanja polova tako da se karakteristični polinom dinamike zatvorenog regulacijskog kruga izjednači s željenim polinomom:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{s1} + \mathbf{b}_{s1}\mathbf{k}_1) = (s + \lambda_1)^2 \quad (5.33)$$

gdje je  $-\lambda_1$  stabilan dvostruki pol. U sklopu programskog paketa MATLAB, naredba za izračun vektora pojačanja  $\mathbf{k}_1$  je:  $\mathbf{k}_1 = \text{acker}(\mathbf{A}_{s1}, \mathbf{b}_{s1}, \boldsymbol{\lambda}_1)$ , gdje je  $\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_1 \end{bmatrix}$  vektor željenih polova.

Sljedeći korak je sinteza proširenog observera stanja. Kao što je već spomenuto, ESO radi na način da totalni poremećaj tretira kao novo prošireno stanje koje za potrebe točnije estimacije možemo dodatno proširiti. Za sustav RR robota u horizontalnoj ravnini najbolji rezultati ADRC regulacije postignuti su za ESO dimenzije 4. U skladu s time, podsustav 1 može se također zapisati u obliku prostora stanja na idući način:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{o1} &= \mathbf{A}_{o1}\mathbf{x}_{o1} + \mathbf{b}_{o1}\bar{u}_1 \\ \tilde{y}_{o1} &= \mathbf{c}_{o1}\mathbf{x}_{o1} \end{aligned} \quad (5.34)$$

gdje su

$$\mathbf{x}_{o1} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \dot{\tilde{\theta}}_1 \\ \bar{d}_1 \\ \dot{\bar{d}}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

a vektor  $\mathbf{c}_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{x}_{o1}$  je prošireni vektor stanja,  $\mathbf{A}_{o1}$  je proširena matrica koeficijenata,  $\mathbf{b}_{o1}$  je prošireni vektor ulaza, a  $\mathbf{c}_{o1}$  je prošireni vektor izlaza.

Prošireni observer stanja za sustav (5.34) izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{o1} &= \mathbf{A}_{o1}\hat{\mathbf{x}}_{o1} + \mathbf{b}_{o1}\bar{u}_1 + \mathbf{L}_1\mathbf{c}_{o1}(\mathbf{x}_{o1} - \hat{\mathbf{x}}_{o1}) \\ \hat{y}_{o1} &= \mathbf{c}_{o1}\hat{\mathbf{x}}_{o1} \end{aligned} \quad (5.36)$$



gdje su

$$\hat{\mathbf{x}}_{o1} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_1 \\ \hat{d}_1(t) \\ \dot{\hat{d}}_1(t) \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \\ L_{13} \\ L_{14} \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{o1}$  je estimirani prošireni vektor stanja, a  $\mathbf{L}_1$  matrica pojačanja proširenog observera stanja.

Oduzimanjem (5.36) od (5.34) dobije se dinamika pogreške estimacije

$$\dot{\mathbf{e}}_{x1} = (\mathbf{A}_{o1} - \mathbf{L}_1 \mathbf{c}_{o1}) \mathbf{e}_{x1} \quad (5.38)$$

gdje je  $\mathbf{e}_{x1} = \mathbf{x}_{o1} - \hat{\mathbf{x}}_{o1}$ . Da bi dinamika pogreške bila stabilna, a pogreška estimacije što manja, potrebno je odrediti optimalne koeficijente matrice pojačanja  $\mathbf{L}_1$  metodom podešavanja polova. Karakteristični polinom dinamike pogreške estimacije proširenog observera izjednačuje se s željenim polinomom prema izrazu

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{o1} + \mathbf{L}_1 \mathbf{c}_{o1}) = (s + \bar{\lambda}_1)^4 \quad (5.39)$$

gdje je  $-\bar{\lambda}_1$  četverostruki stabilan pol. U sklopu programskog paketa MATLAB, naredba za izračun elemenata matrice pojačanja  $\mathbf{L}_1$  je:  $\mathbf{L}_1 = \text{acker}(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{c}_{o1}, \bar{\lambda}_1)$ , gdje je  $\bar{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} -\bar{\lambda}_1 & -\bar{\lambda}_1 \end{bmatrix}$ . S obzirom da dinamika observera mora biti brža od dinamike regulatora, nužan uvjet je da su polovi observera nekoliko puta više lijevo u kompleksnoj ravnini od polova regulatora  $\bar{\lambda}_1 \geq 3\lambda_1 > 0$ .

Konačni izgled ADRC regulatora s estimiranim varijablama stanja pomoću ESO-a za podsustav 1 glasi

$$u_1 = -\frac{1}{k_1} \left( \mathbf{k}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{d}_1(t) \right) = -\frac{1}{k_1} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{o1}. \quad (5.40)$$

### 5.3.2. Podsustav 2

Postupak izvoda ADRC upravljačkog algoritma za podsustav 2 sličan je onome za podsustav 1. Podsustav 2 izražen preko pogreške odstupanja  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_{d2}$  ima sljedeći oblik

$$\ddot{\tilde{\theta}}_2 = \bar{u}_2 + \bar{d}_2(t) \quad (5.41)$$

gdje je  $\bar{u}_2 = k_2 u_2$  pomoćna upravljačka varijabla, a  $\bar{d}_2(t) = d_2(t) - \ddot{\theta}_{d2}$  novi totalni poremećaj podsustava 2.

Jednadžba (5.41) može se prikazati u obliku prostora stanja

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_{s2}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_{s2}(\bar{u}_2 + \bar{d}_2(t)) \\ \tilde{y}_2 &= \mathbf{c}_{s2}\mathbf{x}_2\end{aligned}\quad (5.42)$$

gdje su

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{s2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

a vektor  $\mathbf{c}_{s2} = [1 \ 0]$ .

Svojstvo separacije i kod podsustava 2 omogućuje sintezu ADRC regulatora u ovoj fazi uz pretpostavku da je vektor stanja  $x_2$  u potpunosti mjerljiv. ADRC upravljački zakon za podsustav 2 glasi

$$u_2 = -\frac{1}{k_1} \left( \mathbf{k}_2 \mathbf{x}_2 + \hat{d}_2(t) \right) \quad (5.44)$$

gdje je  $\mathbf{k}_2 = [k_{21} \ k_{22}]$  vektor pojačanja, a  $\hat{d}_2(t)$  estimirani totalni poremećaj podsustava 2.

Uvrštavanjem izraza (5.44) u (5.42) dobije se dinamika zatvorenog kruga

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = (\mathbf{A}_{s2} - \mathbf{b}_{s2}\mathbf{k}_2)\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}_{s2}\tilde{d}_2(t) \quad (5.45)$$

gdje je  $\tilde{d}_2(t) = \bar{d}_2(t) - \hat{d}_2(t)$  pogreška estimacije totalnog poremećaja.

Vektor pojačanja  $\mathbf{k}_2$  određuje se tako da se karakteristični polinom dinamike zatvorenog regulacijskog kruga izjednači s željenim polinomom:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{s2} + \mathbf{b}_{s2}\mathbf{k}_2) = (s + \lambda_2)^2 \quad (5.46)$$

gdje je  $-\lambda_2$  stabilan dvostruki pol.

Sljedeći korak je sinteza proširenog observera stanja. Za potrebe ESO-a dimenzije 4, podsustav 2 može se također zapisati u obliku prostora stanja na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{o2} &= \mathbf{A}_{o2}\mathbf{x}_{o2} + \mathbf{b}_{o2}\bar{u}_2 \\ \tilde{y}_{o2} &= \mathbf{c}_{o2}\mathbf{x}_{o2}\end{aligned}\quad (5.47)$$

gdje su

$$\mathbf{x}_{o2} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_2 \\ \dot{\tilde{\theta}}_2 \\ \bar{d}_2 \\ \dot{\bar{d}}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

a vektor  $\mathbf{c}_{o2} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ .  $\mathbf{x}_{o2}$  je prošireni vektor stanja,  $\mathbf{A}_{o2}$  je proširena matrica koeficijenata,  $\mathbf{b}_{o2}$  je prošireni vektor ulaza, a  $\mathbf{c}_{o2}$  prošireni vektor izlaza.

Prošireni observer stanja za sustav (5.47) izgleda ovako

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{o2} &= \mathbf{A}_{o2}\hat{\mathbf{x}}_{o2} + \mathbf{b}_{o2}\bar{u}_2 + \mathbf{L}_2\mathbf{c}_{o2}(\mathbf{x}_{o2} - \hat{\mathbf{x}}_{o2}) \\ \hat{y}_{o2} &= \mathbf{c}_{o2}\hat{\mathbf{x}}_{o2} \end{aligned} \quad (5.49)$$

gdje su

$$\hat{\mathbf{x}}_{o2} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_2 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 \\ \hat{d}_2(t) \\ \dot{\hat{d}}_2(t) \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \\ L_{23} \\ L_{24} \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{o2}$  je estimirani prošireni vektor stanja, a  $\mathbf{L}_2$  matrica pojačanja proširenog observera stanja.

Oduzimanjem (5.49) od (5.47) dobije se dinamika pogreške estimacije

$$\dot{\mathbf{e}}_{x2} = (\mathbf{A}_{o2} - \mathbf{L}_2\mathbf{c}_{o2})\mathbf{e}_{x2} \quad (5.51)$$

gdje je  $\mathbf{e}_{x2} = \mathbf{x}_{o2} - \hat{\mathbf{x}}_{o2}$ .

Da bi dinamika pogreške bila stabilna, a pogreška estimacije što manja, potrebno je odrediti optimalne koeficijente matrice pojačanja  $\mathbf{L}_2$  metodom podešavanja polova. Karakteristični polinom dinamike pogreške estimacije proširenog observera izjednačuje se s željenim polinomom prema izrazu

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{o2} + \mathbf{L}_2\mathbf{c}_{o2}) = (s + \bar{\lambda}_2)^4 \quad (5.52)$$

gdje je  $-\bar{\lambda}_2$  četverostruki stabilan pol za koji vrijedi  $\bar{\lambda}_2 \geq 3\lambda_2 > 0$  kako bi se osigurala brža dinamika observera od dinamike regulatora.

Konačni izgled ADRC regulatora s estimiranim varijablama stanja pomoću ESO-a za podsustav 2 glasi

$$u_2 = -\frac{1}{k_2} \left( \mathbf{k}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{d}_2(t) \right) = -\frac{1}{k_2} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{o2}. \quad (5.53)$$

## 5.4. Usporedba upravljačkih performansi ADRC-a sa robusnim upravljanjem (sa estimatorima brzina)

U sklopu ovog poglavlja uspoređene su performanse ADRC regulatora i sliding-mode regulatora pri upravljanju dinamičkim modelom RR robota u horizontalnoj ravnini. Budući da ADRC regulator podrazumijeva estimaciju varijabli stanja preko ESO-a, te ne zahtjeva da su brzine članaka robota mjerljive, korišteni sliding-mode regulator također je implementiran s estimatorom brzina. Nadalje, pošto u realnoj primjeni korišteni aktuatori imaju propisana fizikalna ograničenja s obzirom na tip njihove izvedbe i specifikacije, amplitude upravljačkog signala moraju biti ograničene na prihvatljive vrijednosti u skladu s aktuatorom. Iz tog razloga upravljački signali sliding-mode regulatora ograničeni su saturacijskim filterom na maksimalni iznos amplitude od  $\pm 5$  [N m], dok amplituda upravljačkih signala ADRC regulatora ima prihvatljive vrijednosti tokom cijele simulacije.

Referentne trajektorije koje regulatori moraju slijediti u ovom simulacijskom testiranju, promijenjene su u odnosu na reference korištene u prethodnim testiranjima, a prikazane su sljedećim izrazima:

$$\theta_{d1} = \sin(0.5t) \quad (5.54)$$

$$\theta_{d2} = \sin(0.5t),$$

$$\dot{\theta}_{d1} = 0.5 \cos(0.5t) \quad (5.55)$$

$$\dot{\theta}_{d2} = 0.5 \cos(0.5t).$$

Za implementaciju upravljačkih zakona te simulaciju rezultata korišten je MATLAB programski paket. Numerička simulacija provedena je pomoću ODE15s iterativne metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Ukupno vrijeme trajanja simulacije iznosi  $T = 30$  sekundi.

### 5.4.1. Simulacijski rezultati za ADRC upravljanje

Simulacijski rezultati dobiveni su za parametre regulatora navedene u nastavku.

Za oba podsustava korišten je proširen observer stanja četvrtog reda:  $n_{o1} = 4$ ,  $n_{o2} = 4$ . Polovi za sintezu regulatora i proširenog observera stanja odabrani su kao višestruki polovi, jednaki za sve podsustave. Odabrani polovi regulatora su:  $\lambda_1 = \lambda_2 = [-4 \quad -4]$ , dok su odabrani polovi ESO-a:  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = [-12 \quad -12]$ , čime je osigurana brža dinamika observera stanja i zadovoljen nužan uvjet  $\bar{\lambda}_i \geq 3\lambda_i > 0$ .

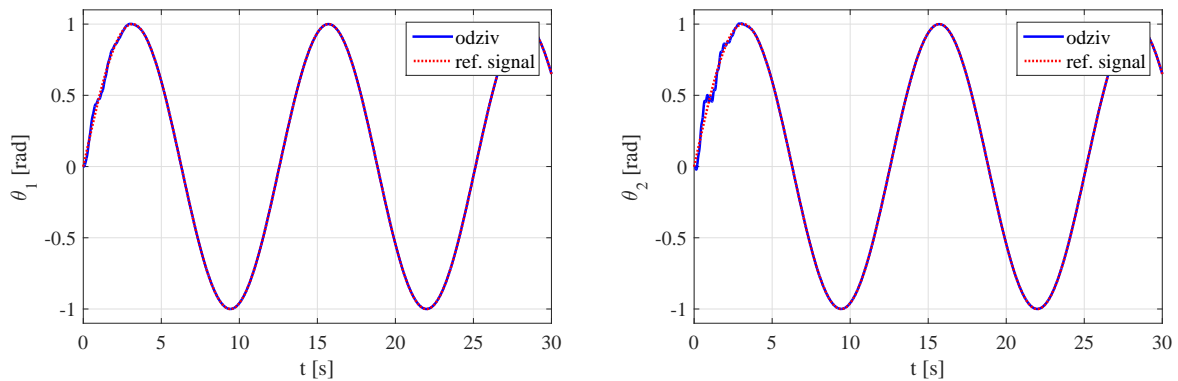
S obzirom da su matrice koeficijenata sustava i vektori ulaza sustava jednaki za oba podsustava  $\mathbf{A}_{s1} = \mathbf{A}_{s2}$  i  $\mathbf{b}_{s1} = \mathbf{b}_{s2}$ , za odabrane jednake polove podsustava dobiveni su jednaki vektori pojačanja regulatora:  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = [16 \quad 8]$ . Istom analogijom, za jednake odabrane polove te jednake matrice koeficijenata  $\mathbf{A}_{o1} = \mathbf{A}_{o2}$  i vektore izlaza proširenog observera stanja  $\mathbf{c}_{o1} = \mathbf{c}_{o2}$ , dobivene su jednake matrice pojačanja ESO-a:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 48 \\ 864 \\ 6912 \\ 20736 \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

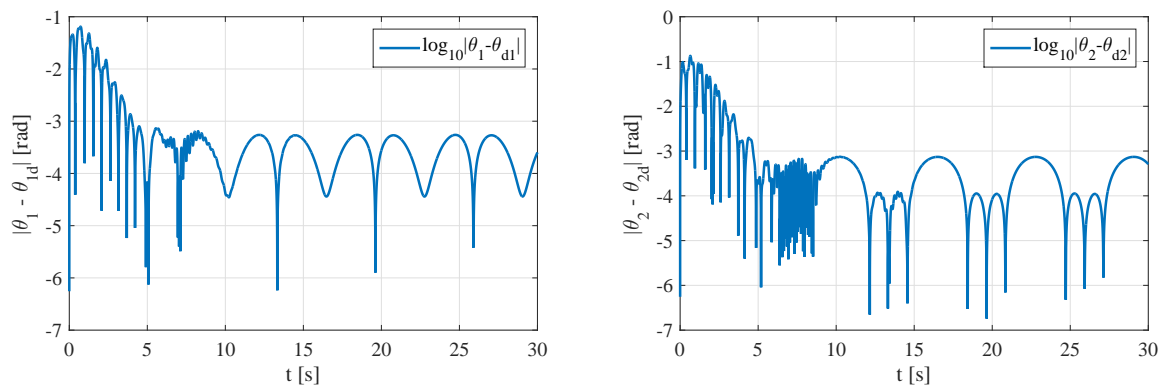
Podesivi parametri  $k_1$  i  $k_2$  moraju zadovoljiti uvjet stabilnosti  $k_1 < m_{11max}$  i  $k_2 < m_{22max}$ , gdje su  $m_{11}$  i  $m_{22}$  iz (5.25), a njihove egzaktno vrijednosti  $k_1 = 3$  i  $k_2 = 20$  odabrane su na temelju najboljih eksperimentalno dobivenih rezultata upravljanja. Početne kutne pozicije robota su  $\theta_{10} = 0$  [rad],  $\theta_{20} = 0$  [rad], a početne brzine jednake su nuli.

Na slikama 5.1 - 5.3 prikazani su rezultati simulacije ADRC upravljanja RR robotom u horizontalnoj ravnini. Slika 5.1 prikazuje slijeđenje zadane referentne trajektorije za oba članka RR robota. Na slici 5.2 prikazana su regulacijska odstupanja pri slijeđenju referenci u logaritamskom mjerilu. Grafovi sa slike 5.3 prikazuju odziv upravljačkih varijabli na zadani referentni signal. Lijevi graf radi bolje razlučivosti prikazuje početni skok upravljačkih varijabli unutar kraćeg vremenskog intervala. Na desnom grafu prikazane su oscilacije upravljačkih varijabli nakon prvobitnog skoka, a tokom kompletnog

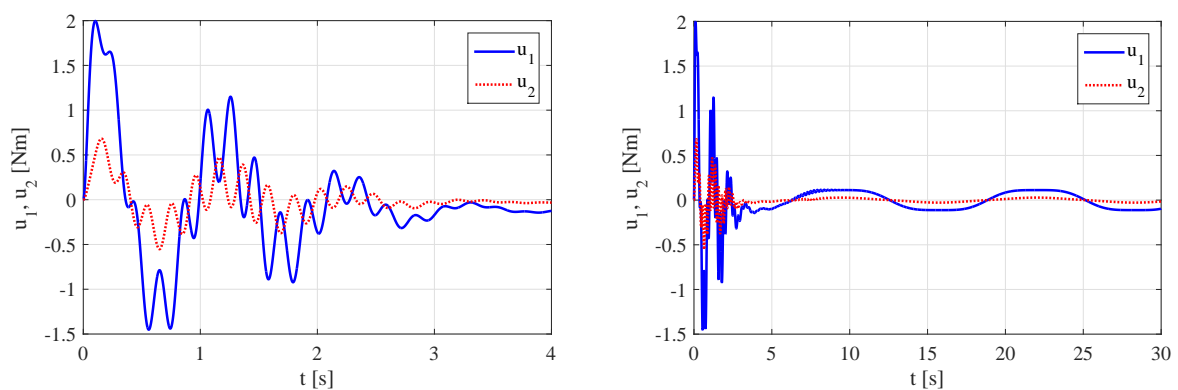
vremena trajanja simulacije.



Slika 5.1. Odziv ADRC regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno)

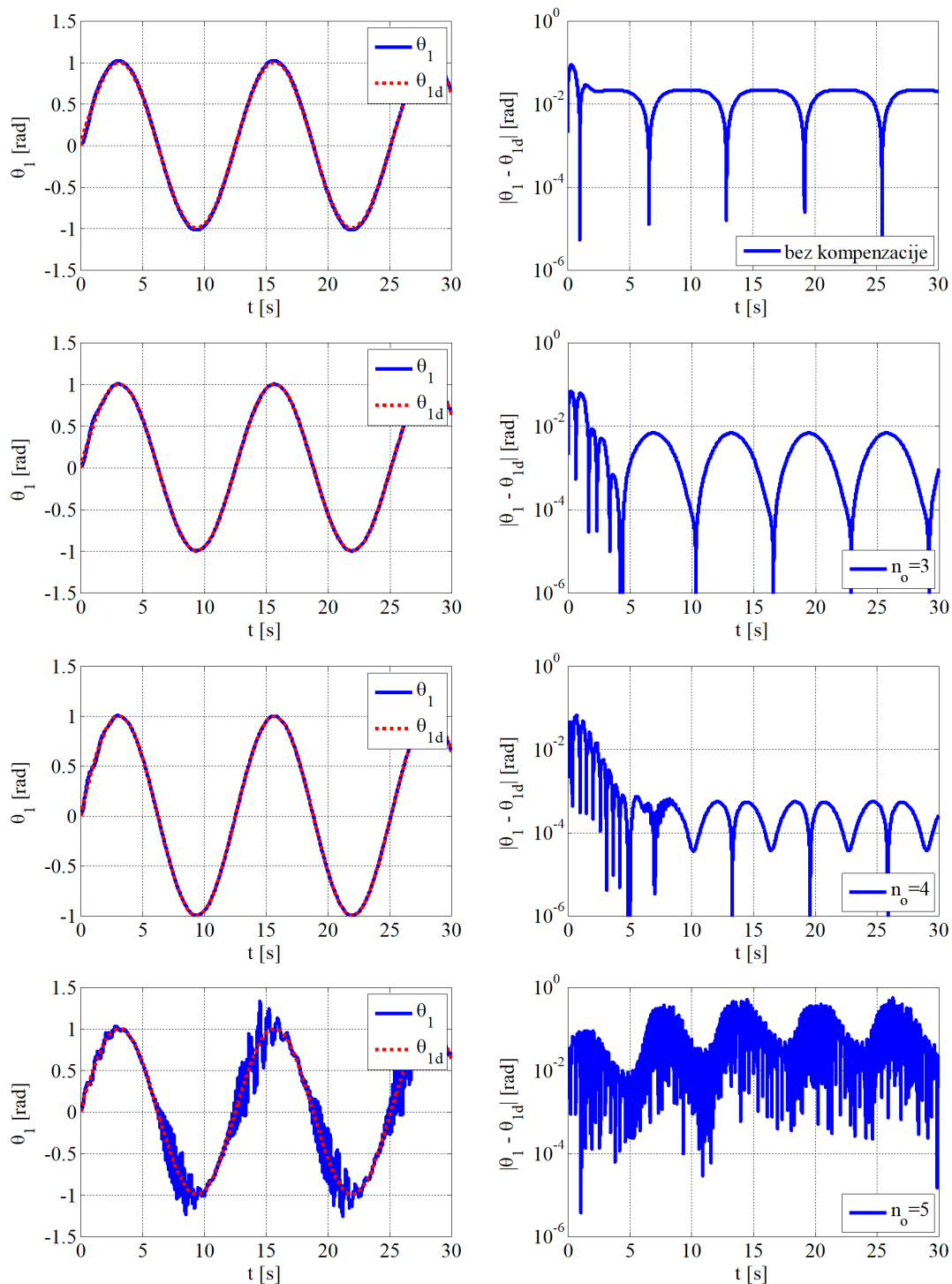


Slika 5.2. Regulacijska pogreška ADRC regulatora u logaritamskoj skali



Slika 5.3. Upravljački signal  $u_1$  i  $u_2$  ADRC regulatora

Slika 5.4 u nastavku ilustrira točnost pri slijeđenju referentne trajektorije prvog članka u ovisnosti o redu proširenog observera stanja. Grafovi na lijevoj strani prikazuju slijeđenje zadane referentne trajektorije, dok su na desnoj strani prikazana regulacijska odstupanja u logaritamskom mjerilu.



Slika 5.4. Ovisnost točnosti slijeđenja referentne trajektorije o redu proširenog observera stanja

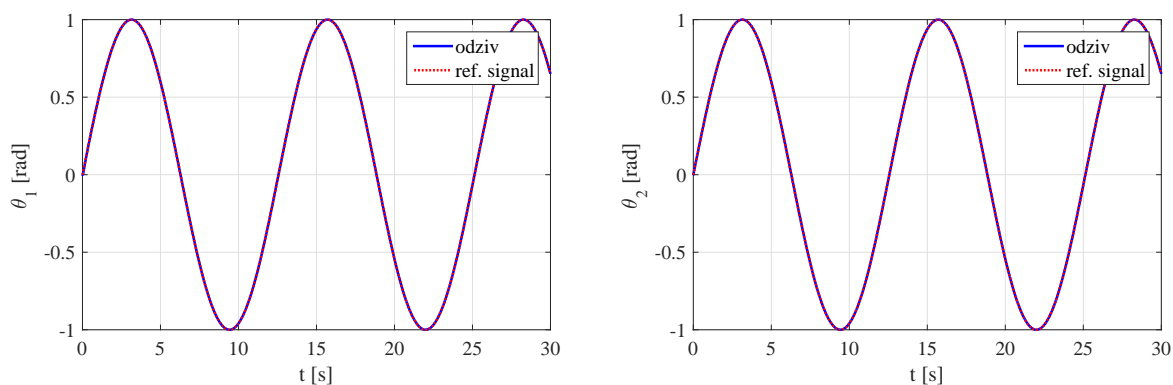
### 5.4.2. Simulacijski rezultati sliding-mode upravljanja

Simulacijski rezultati dobiveni su za parametre regulatora navedene u nastavku.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

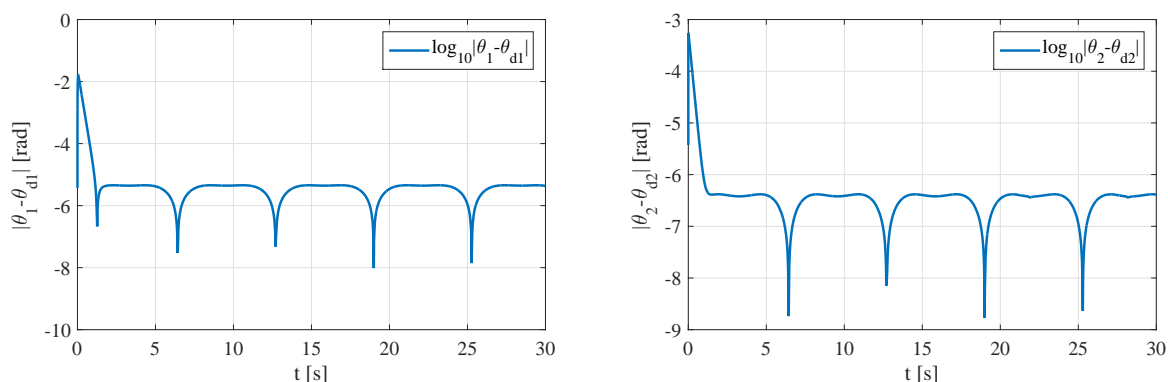
$$\mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Iznos konstantnog pojačanja regulatora  $\rho = 100$ , dok je koeficijent pojačanja  $K_k = 25$ . Početne kutne pozicije robota su  $\theta_{10} = 0$  [rad],  $\theta_{20} = 0$  [rad], a početne brzine jednake su nuli. Za estimaciju brzina  $\dot{\theta}_1$  i  $\dot{\theta}_2$  koeficijent pojačanja iznosi  $K_f = 100$ , a parametar  $K_p = 180$ . Na slikama 5.5 - 5.7 prikazani su rezultati simulacije za primjenu sliding-mode filtera i saturacijskog filtera ( $\max(u_1) = \max(u_2) = \pm 5$  [N m]), a uključuju slijeđenje referentnih pozicija (slika 5.5), regulacijska odstupanja u logaritamskom mjerilu (slika 5.6) i upravljačke signale (slika 5.7).

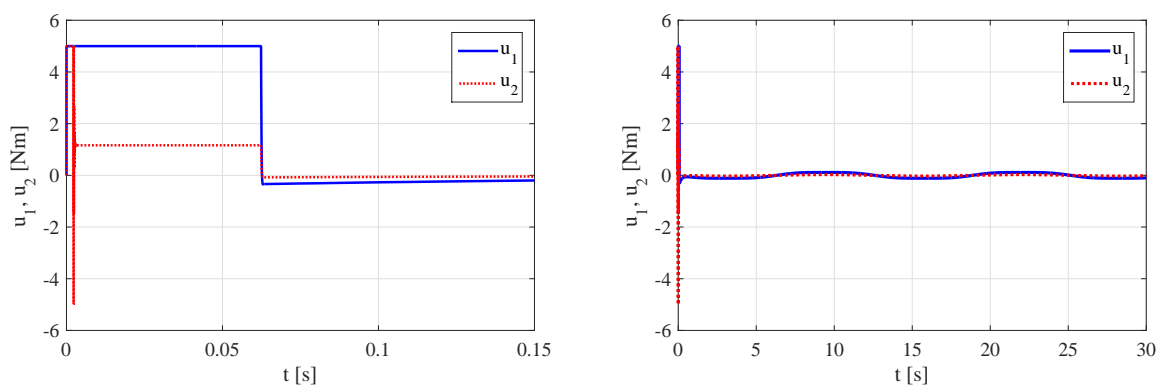


Slika 5.5. Odziv sliding mode regulatora na referentne pozicije zgloba 1 (lijevo) i zgloba 2 (desno) (saturacija)





Slika 5.6. Regulacijska pogreška sliding-mode regulatora u logaritamskoj skali (saturacija)



Slika 5.7. Upravljački signal  $u_1$  i  $u_2$  sliding-mode regulatora (saturacija)

Rezultati pokazuju da je manje regulacijsko odstupanje ostvareno u slučaju sliding-mode regulacije. Početni skok upravljačkih varijabli veći je u slučaju sliding-mode upravljanja (slika 5.7) gdje signal odmah dosiže ograničenje saturacijskog filtera od  $\pm 5$  N m, dok upravljački signal ADRC regulatora (slika 5.3) postiže maksimalnu vrijednost od 2 N m. Međutim, vrijeme smirivanja početnog "peak"-a upravljačkog signala mnogo je kraće u slučaju sliding-mode regulacije te iznosi samo 0.065 sekundi (slika 5.7), za razliku od ADRC regulacije gdje faza smirivanja upravljačkih varijabli traje 3 sekunde (slika 5.3). U skladu s time regulacijska odstupanja kod ADRC upravljanja oscilatorno se smanjuju tokom prvih 5 sekundi simulacije nakon čega variraju između  $10^{-3}$  [rad] i  $10^{-4}$  [rad] (slika 5.2), a u slučaju sliding-mode upravljanja regulacijska odstupanja nakon prve sekunde padaju ispod  $10^{-5.3}$  [rad], nakon čega variraju između  $10^{-5.3}$  [rad] i  $10^{-6.5}$  [rad] (slika 5.6). Amplitude oscilacija upravljačkih varijabli nakon početnog skoka identične su kod oba regulatora.

Ključan čimbenik koji objašnjava relativno loše performanse ADRC regulatora je činjenica da ADRC regulator u slučaju regulacije gibanja RR robota u horizontalnoj ravnini, za zadane referentne trajektorije, gubi točnost za dimenzije ESO-a veće od četvrtog reda (slika 5.4), a postaje nestabilan za dimenzije ESO-a veće od petog reda. Naime, kao što je već spomenuto u poglavlju 5.2, pogreška estimacije totalnog poremećaja smanjuje se povećanjem dimenzije ESO-a. Međutim rezultati simulacija upućuju da za sustave s izrazito nelinearnom dinamikom poput RR robota u horizontalnoj ravnini to nije uvijek slučaj. Kako bi nelinearna dinamika došla manje do izražaja, kao referentna trajektorija pozicije za ispitivanje ADRC regulatora korištena je sinus funkcija smanjene frekvencije (5.54) u odnosu na regulacijski zahtjevniju referentnu trajektoriju pozicije (3.27) korištenu u prijašnjim testiranjima. U odnosu na RR robota, ADRC regulacija dinamičkih sustava poput dronova daje značajno bolje rezultate zbog manjih vrijednosti kutova kod kojih nelinearna dinamika ne dolazi toliko do izražaja. To je vjerojatno razlog zašto je u robotici malo radova vezanih uz upravljanje primjenom aktivne kompenzacije poremećaja.

## 6. Zaključak

U ovome radu, pokazane su performanse regulacije robotskog manipulatora pri slijeđenju proizvoljnih, vremenski promjenjivih, referentnih trajektorija, primjenom nekoliko različitih algoritama upravljanja. Budući da je za testiranje razmatranih upravljačkih algoritama kao i za provođenje valjanih simulacija potrebno poznavanje matematičkog modela robota, izveden je dinamički model robota s dva rotacijska stupnja slobode gibanja. Na izvedeni dinamički model prvo je implementiran klasični adaptivni regulator te testiran za slučaj mjerljivih brzina. Simulacijski rezultati upravljačkih performansi adaptivnog regulatora za spomenuti slučaj pokazuju veliku točnost pri slijeđenju referentnih signala, a koja raste proporcionalno s vremenom trajanja simulacije. Međutim, adaptivna metoda podrazumijeva poznavanje regresijske matrice, te u slučaju primjene filtera za estimaciju brzina njome nije moguće postići stabilan odziv. Zbog toga klasičan adaptivni regulator u praksi nije primjenjiv na sustavu RR robotskog manipulatora. Idući je implementiran robusni (sliding-mode) regulator s kliznim režimom rada. Njegove performanse upravljanja testirane su za slučaj da su brzine mjerljive i u kombinaciji sa tri različita filtera za estimaciju brzina: dirty derivative filterom, sliding-mode filterom i super-twisting filterom. Simulacijskim testiranjem pokazano je da sliding-mode regulator postiže visoku točnost regulacije u slučaju mjerljivih brzina i stabilan odziv u kombinaciji sa svakim od navedenih estimatora brzina. Za pretpostavku nemjerljivih brzina, najbolje performanse sliding-mode regulatora ostvarene su u kombinaciji sa sliding-mode filterom za estimaciju brzina, gdje su dobiveni rezultati slični onima u slučaju mjerljivih brzina. Na kraju je implementirano upravljanje primjenom aktivne kompenzacije poremećaja s proširenim observerom stanja proizvoljnog reda. Računalnim simulacijama ustanovljeno je da su najbolji rezultati ADRC regulacije postignuti za prošireni observer stanja četvrtog reda. ADRC regulator je nestabilan za dimenzije proširenog observera stanja veće od četvrtog reda radi izrazite nelinearnosti dinamike robota s dva rotacijska stupnja slobode gibanja. Rezultati upravljanja ADRC regulatora uspoređeni su s rezultatima upravljanja sliding-mode regulatora u kombinaciji sa sliding-mode filterom za estimaciju brzina i saturacijskim filterom. Iako je sinteza oba regulatora neovisna o matematičkom modelu sustava, analizom rezultata ustanovljeno je da sliding-mode regulator pokazuje veću robusnost pri kompenzaciji izrazito nelinearne dinamike

te postiže bolje rezultate upravljanja.

## Literatura

- [1] J. Kasać, “Vođenje tehničkih sustava, materijali za predavanja i vježbe,” *Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb*, 2007.
- [2] D. Koditschek, “Natural motion for robot arms,” in *The 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 733–735, Las Vegas, 1984.
- [3] J. Petrić, “Automatska regulacija: Uvod u analizu i sintezu,” *Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb*, 2012.
- [4] J. Kasać, B. Novaković, D. Majetić, and D. Brezak, “Global positioning of robot manipulators with mixed revolute and prismatic joints,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 6, pp. 1035–1040, 2006.
- [5] J. Kasać, B. Novaković, D. Majetić, and D. Brezak, “Passive finite-dimensional repetitive control of robot manipulators,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 3, pp. 570–576, 2008.
- [6] D. Majetić, J. Kasać, and D. Brezak, “Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja - više-varijabilni sustavi,” *Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb*, 2016.
- [7] V. Utkin, J. Guldner, and M. Shijun, *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, vol. 34. CRC press, 1999.
- [8] J. Kasać, S. Stevanović, T. Žiljić, and J. Stepanić, “Robust output tracking control of a quadrotor in the presence of external disturbances,” *Transactions of FAMENA*, vol. 37, no. 4, pp. 29–42, 2013.
- [9] V. Utkin and H. Lee, “Chattering problem in sliding mode control systems,” in *International Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 346–350, Alghero, Sardinia, Italy, 2006.
- [10] J. Kasać, T. Zilić, V. Milić, A. Jokić, and M. Lobrović, “Robust decentralized global asymptotic tracking control of a class of nonlinear mechanical systems,” in *2016 American Control Conference (ACC)*, Boston, USA, 2016.

- 
- [11] J. Kasać, “Neizravno upravljanje, materijali za predavanja i vježbe,” *Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb*, 2007.
- [12] B.-Z. Guo and Z.-L. Zhao, *Active disturbance rejection control for nonlinear systems: An introduction*, pp. 1–9. John Wiley & Sons, 2016.
- [13] Y. Huang and W. Xue, “Active disturbance rejection control: Methodology and theoretical analysis,” *ISA Transactions*, vol. 53, no. 4, pp. 963–976, 2014.
- [14] J. Kasać, B. Novaković, and V. Milić, “On equivalence between internal and external model-based repetitive learning controllers for nonlinear passive systems,” *Asian Journal of Control*, vol. 13, no. 1, pp. 15–24, 2011.
- [15] J. Kasać, A. Pender, M. Pranjić, and D. Kotarski, “Frequency-shifting-based algebraic approach to extended state observer design,” in *Asian Journal of Control*, <https://doi.org/10.1002/asjc.2516>, 2021.

***PRILOG***

*CD-R disk*