

# Računanje tangencijalnog naprezanja u koronarnim arterijama primjenom računalne mehanike fluida

---

Ištvanović, Josip

Undergraduate thesis / Završni rad

2021

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:432579>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Josip Ištvanović**

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Željko Tuković, dipl. ing.

Student:

Josip Ištvanović

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr. sc. Željku Tukoviću, te prof. dr. sc. Zdravku Viragu na stručnim savjetima i pruženoj pomoći pri izradi ovog rada.

Josip Ištvanović



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
 Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
 procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Josip Ištvanović**

Mat. br.: 0035208526

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Računanje tangencijalnog naprezanja u koronarnim arterijama primjenom računalne mehanike fluida**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Calculation of wall shear stress in coronary artery using computational fluid dynamics**

Opis zadatka:

Koronarne arterije su krvne žile koje opskrbljuju srčani mišić. Začepljenje krvnih žila oko srca najčešće je uzrokovano aterosklerozom koronarnih arterija, gdje dolazi do formiranja plaka nakupljanjem masnoća na unutarnjoj stijenci arterije. Ukoliko aterosklerotski plak smanji poprečni presjek lumena koronarne arterije za više od 75% nije moguće postići puni intenzitet protoka krvi pri pojačanoj potrebi miokarda za kisikom. Istraživanja pokazuju da smanjena razina tangencijalnog naprezanja na stijenci koronarne arterije pogoduje razvoju plaka.

U sklopu ovog završnog rada potrebno je provesti numeričke simulacije strujanja krvi kroz koronarne arterije s ciljem određivanja raspodjele tangencijalnih naprezanja. Polazeći od geometrije koronarne arterije u STL formatu, u sklopu završnog rada, potrebno je provesti diskretizaciju prostorne domene, postaviti numerički model s realnim rubnim uvjetima, te provesti proračun i usporedbu rezultata za različite pacijente.

Dodatne informacije i nacrti dostupni su prema potrebi.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.


Zadatak zadan:  
30. studenoga 2020.

Datum predaje rada:  
**1. rok:** 18. veljače 2021.  
**2. rok (izvanredni):** 5. srpnja 2021.  
**3. rok:** 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 22.2. – 26.2.2021.  
**2. rok (izvanredni):** 9.7.2021.  
**3. rok:** 27.9. – 1.10.2021.

Zadatak zadao:

  
 Prof.dr.sc. Željko Tuković

Predsjednik Povjerenstva:  
  
 Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK.....	V
SUMMARY .....	VI
1. UVOD.....	1
2. OSNOVE KRVOŽILNOGA SUSTAVA .....	2
2.1. Srce.....	2
2.2. Krvne žile.....	3
2.3. Krv .....	7
3. TEORIJSKE OSNOVE DINAMIKE FLUIDA .....	8
3.1. Materijalni volumen .....	8
3.2. Zakon očuvanja mase.....	8
3.3. Zakon očuvanja količine gibanja .....	9
3.4. Zakon očuvanja energija .....	9
3.5. Reynoldsov broj .....	9
3.6. Tangencijalno (smično) naprezanje .....	12
4. RAČUNALNE SIMULACIJE U MEHANICI FLUIDA.....	14
4.1. Metoda konačnih volumena .....	15
5. RAČUNALNI MODEL.....	19
5.1. Geometrijska mreža .....	20
5.2. Rubni uvjeti.....	25
5.2.1. Windkessel model .....	26
5.2.2. Windkessel model s 2 elementa.....	27
5.2.3. Windkessel model s 3 elementa.....	28
5.2.4. windkesselPressure rubni uvjet.....	29
5.3. Postavke numeričkog rješavača .....	32
6. PRIKAZ I ANALIZA REZULTATA PRORAČUNA .....	33
6.1. Prikaz fizikalnih veličina na ulaznim i izlaznim presjecima.....	33
6.1.1. Volumni protok $Q$ .....	34
6.1.2. Brzina $v$ .....	36
6.1.3. Tlak $p$ .....	42
6.1.4. Tangencijalno naprezanje $\tau_w$ .....	44
7. ZAKLJUČAK.....	50
LITERATURA.....	51

**POPIS SLIKA**

Slika 2.1.	Građa srca [3] .....	3
Slika 2.2.	Mali (venski) i veliki (arterijski) krvotok [5] .....	4
Slika 2.3.	Koronarne arterije [6] .....	5
Slika 2.4.	Koronarna ateroskleroza [7] .....	6
Slika 3.1.	Shematski prikaz razvoja graničnog sloja uz ravnu ploču [9].....	10
Slika 3.2.	Usporedni prikaz stacionarnog i nestacionarnog laminarnog strujanja [9].....	12
Slika 3.3.	Definicija smičnog naprezanja fluida.....	13
Slika 4.1.	Shema postupka modeliranja računalne simulacije [10].....	14
Slika 4.2.	Prikaz dijela geometrijske mreže [10].....	16
Slika 5.1.	Geometrija pacijenta 1.....	19
Slika 5.2.	Geometrija pacijenta 2.....	20
Slika 5.3.	Mreža konačnih volumena pacijenta 1 .....	22
Slika 5.4.	Mreža na ulazu u lijevu koronarnu arteriju pacijenta 1 .....	22
Slika 5.5.	Mreža na grani lijeve koronarne arterije pacijenta 1 .....	23
Slika 5.6.	Mreža konačnih volumena pacijenta 2 .....	23
Slika 5.7.	Mreža na ulazu u lijevu koronarnu arteriju pacijenta 2.....	24
Slika 5.8.	Mreža na grani lijeve koronarne arterije pacijenta 2 .....	24
Slika 5.9.	Volumni protok krvi u koronarnim arterijama za osobe u adolescentnoj, srednjovječnoj i staroj dobi tijekom jednog otkucaja srca .....	26
Slika 5.10.	Shema Windkessel modela [15].....	26
Slika 5.11.	Ekvivalentna električna shema Windkessel modela [16] .....	27
Slika 5.12.	Električna shema Windkessel modela s 2 elementa.....	28
Slika 5.13.	Hidraulička shema Windkessel modela s 3 elementa [17] .....	28
Slika 5.14.	Električna shema Windkessel modela s 3 elementa.....	29
Slika 5.15.	Električna shema sustava .....	30
Slika 6.1.	Prikaz konvergencije periodičnosti rješenja .....	33
Slika 6.2.	Volumni protok na ulaznom presjeku - pacijent 1 .....	34
Slika 6.3.	Volumni protok na ulaznom presjeku - pacijent 2 .....	34
Slika 6.4.	Volumni protok na izlaznim presjecima - pacijent 1 .....	35
Slika 6.5.	Volumni protok na izlaznim presjecima - pacijent 2 .....	35
Slika 6.6.	Brzina na ulaznom presjeku – pacijent 1 .....	37
Slika 6.7.	Brzina na ulaznom presjeku - pacijent 2.....	37
Slika 6.8.	Brzina na izlaznim presjecima - pacijent 1 .....	38
Slika 6.9.	Brzina na izlaznim presjecima - pacijent 2 .....	38
Slika 6.10.	Prikaz promjene polja brzine na izlazu 3 - pacijent 1 .....	40
Slika 6.11.	Prikaz promjene polja brzine na izlazu 4 - pacijent 2 .....	41
Slika 6.12.	Tlak po presjecima - pacijent 1 .....	42
Slika 6.13.	Tlak po presjecima - pacijent 2 .....	42
Slika 6.14.	Tangencijalno naprezanje lijeve koronarne arterije - pacijent 1 .....	45
Slika 6.15.	Tangencijalno naprezanje lijeve koronarne arterije - pacijent 2 .....	45
Slika 6.16.	Tangencijalno naprezanje grane koronarne arterije - pacijent 1 .....	46
Slika 6.17.	Tangencijalno naprezanje grane koronarne arterije - pacijent 2 .....	46
Slika 6.18.	Grana s najvećom vrijednosti tangencijalnog naprezanja - pacijent 1 .....	47
Slika 6.19.	Grana s najvećom vrijednosti tangencijalnog naprezanja - pacijent 2.....	47
Slika 6.20.	Odvajanje strujanja prilikom grananja - pacijent 1 .....	48
Slika 6.21.	Odvajanje strujanja prilikom grananja - pacijent 2.....	49

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 5.1	Rubne plohe oba pacijenta .....	21
Tablica 5.2	Vrsta granica i rubni uvjeti .....	25
Tablica 6.1.	Vrijednosti srednjih brzina po površini presjeka - pacijent 1 .....	39
Tablica 6.2.	Vrijednosti srednjih brzina po površini presjeka - pacijent 2.....	39
Tablica 6.3.	Srednje vrijednosti tlaka po površinama presjeka – pacijent 1 .....	43
Tablica 6.4.	Srednje vrijednosti tlaka po površinama presjeka – pacijent 2 .....	43



**POPIS OZNAKA**

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
$A_{in}$	[m <sup>2</sup> ]	površina ulaznog presjeka aorte
$C$	[s <sup>2</sup> m <sup>4</sup> /kg]	podatljivost arterija
$D_n$	[kg/s]	jačina difuzije
$F_n$	[kg/s]	jačina konvekcije
$f_i$	[N/kg]	komponente vektora specifične masene sile
$J_i$	[-]	vektor fluksa fizikalne veličine
$Pe$	[-]	Pecletov broj
$p$	[N/m <sup>2</sup> ]	tlak
$\bar{p}$	[N/m <sup>2</sup> ]	statistički osrednjeno polje tlaka
$R_{per}$	[kg/m <sup>4</sup> s]	periferni otpor cijelog koronarnog stabla
$R_{tot}$	[kg/m <sup>4</sup> s]	totalni otpor na izlazu koronarne arterije
$R_{ch}$	[kg/m <sup>4</sup> s]	karakteristična impedancija
$R$	[kg/m <sup>4</sup> s]	periferni otpor
$Re$	[-]	Reynoldsov broj
$r$	[m]	radijus
$S$	[m <sup>2</sup> ]	površina
$T$	[s]	vremenski ciklus
$t$	[s]	vrijeme
$u$	[m/s]	brzina
$V$	[m <sup>3</sup> ]	volumen fluida
$v_i$	[m/s]	komponente vektora brzine strujanja
$v_n$	[m/s]	projekcija vektora brzine u smjeru vanjske normale
$q_i$	[W/m <sup>2</sup> ]	vektor površinske gustoće toplinskog toka
$Q$	[m <sup>3</sup> /s]	volumni protok
$\delta_{ij}$	[-]	Kroneckerov simbol
$\Sigma_{ij}$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor viskoznih naprezanja
$\varphi$	[-]	polje fizikalne veličine
$\Delta n$	[m]	udaljenost između čvorova konačnog volumena
$\Gamma$	[kg/ms]	koeficijent difuzije
$\mu$	[Pas]	dinamička viskoznost
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća
$\sigma_{ji}$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor naprezanja
$\tau_w$	[N/m <sup>2</sup> ]	tangencijalno naprezanje
$\tau$	[s]	vremenska konstanta Windkessel modela

---

**SAŽETAK**

Razvojem računala i računalnih alata stvoreni su uvjeti za rješavanje fizikalnih problema računalnim simulacijama. Time se bitno skraćuje vrijeme projektiranja, smanjuje se trošak te se dobiva veća količina informacija za razliku od eksperimenata. U ovom radu potrebno je analizirati hemodinamiku koronarnih arterija za dva pacijenta. Hemodinamika, područje biomehanike, je grana fizike koja proučava strujanje krvi u kardiovaskularnom sustavu. Arterije su krvne žile koje se mogu prilagoditi i mijenjati u različitim hemodinamičkim uvjetima. Normalan tok u arterijama je laminaran, no u patološkim hemodinamičkim uvjetima arterije stvaraju abnormalan biološki odgovor. Ateroskleroza je bolest koja uzrokuje nastanak plaka na stijenci arterije čime se sužava poprečni presjek lumena zvan stenoza. Stenoza uzrokuje porast brzine strujanja krvi koje može dovesti do turbulentnog toka uz pojavu šuma, ali također može dovesti i do prekida strujanja te uzrokovati srčani udar. Istraživanja pokazuju da smanjena razina tangencijalnog napreznja na stijenci koronarne arterije pogoduje razvoju plaka. U budućnosti će proučavanje arterijskog krvotoka dovesti do predviđanja pojedinačnih hemodinamičkih tokova kod pacijenata, razvoja dijagnostičkih alata za kvantificiranje bolesti i dizajna uređaja koji oponašaju ili mijenjaju protok krvi. Ovo je polje bogato izazovnim problemima u mehanici fluida koji uključuju trodimenzionalne, pulsirajuće tokove na rubu turbulencije.

Zadatak ovog rada bio je provesti numeričku simulaciju strujanja krvi kroz koronarne arterije s ciljem određivanja raspodjele tangencijalnog napreznja na stijenci. Geometrija je preuzeta u STL formatu, a iz nje je potrebno izraditi geometrijsku mrežu za proračun. Korišten je model nestlačivog nestacionarnog laminarnog strujanja. Numerička simulacija provedena je u softverskom paketu OpenFOAM, a rezultati su post-procesirani u ParaView-u. U analizi rezultata prikazano je polje brzine, polje tlaka te raspodjela tangencijalnog napreznja po stijenci koronarnih arterija.

Ključne riječi: hemodinamika, koronarne arterije, tangencijalno napreznje, računalna dinamika fluida

---

**SUMMARY**

The development of computers and computer tools has created the conditions for solving physical problems using computer simulations. This significantly shortens design time, reduces costs, and provides a greater amount of information compared to the experiment. In this thesis, it is necessary to analyze the hemodynamics of coronary arteries for two patients. Hemodynamics, the field of biomechanics, is a branch of physics that studies blood flow in the cardiovascular system. Arteries are blood vessels that can adapt and change with the varying hemodynamic conditions. Normal arterial flow is laminar, but under pathological hemodynamic conditions arteries create an abnormal biological response. Atherosclerosis is a disease that causes plaque to form on the artery wall, narrowing the cross section of the artery lumen called stenosis. Stenosis causes an increase in blood flow velocity and can lead to turbulent flow with the appearance of noise, but it can also lead to blockage of flow and cause heart attack. Studies show that reduced level of wall shear stress on the coronary artery wall favor plaque development. In the future, the study of arterial blood flow will lead to the prediction of individual hemodynamic flows in any patient, the development of diagnostic tools to quantify the disease and the design of devices that mimic or alter blood flow. This field is rich in challenging problems in fluid mechanics involving three-dimensional, pulsating flows at the edge of turbulence.

The task of this thesis was to perform a numerical simulation of blood flow through the coronary arteries with aim to determine the distribution of wall shear stress on the wall. The geometry was downloaded in STL format and it is used to create a calculation grid. An incompressible transient laminar flow model was used. The numerical simulation was performed in the software package OpenFOAM, and the results were post-processed in ParaView. Analysis of the results shows the velocity field, the pressure field, and the distribution of wall shear stress along the coronary artery wall.

Key words: hemodynamics, coronary arteries, wall shear stress, computational fluid dynamics (CFD)

## 1. UVOD

Biomehanika je znanstvena disciplina koja se bavi primjenom zakona mehanike u rješavanju bioloških problema. Proučava mehanička svojstva i ponašanje bioloških organizama u normalnom i patološkom stanju te biološke reakcije na mehaničke podražaje. Interdisciplinarnog i multidisciplinarnog je karaktera te obuhvaća područja bioloških, fizičkih, matematičkih, tehničkih te fundamentalnih i kliničkih medicinskih znanosti. Služi razumijevanju normalnih funkcija organizma, predviđanju promjena zbog poremećaja te predlaganju metoda intervencija. Zakonitosti biomehanike istražuju se u biljnome (fitobiomehanika), životinjskome (zoobiomehanika) i ljudskome organizmu (humana biomehanika). Biomehanički pristup temelji se na kvantifikaciji i proračunima. Matematičko modeliranje omogućuje simuliranje različitih stanja s ciljem optimiranja različitih terapijskih postupaka i zahvata, pokreta u sportu i sl. Biomehanika ima važnu ulogu ne samo u teorijsko-znanstvenim istraživanjima problema mehaničkoga funkcioniranja organizma i njegovih dijelova nego i u svakodnevnim kliničkim postupcima, ponajviše u ortopediji, kirurgiji, traumatologiji, rehabilitaciji i protetici.[1] Hemodinamika je grana biomehanike koja proučava strujanje krvi u krvožilnom sustavu, odnose između krvnog tlaka, viskoznosti, protoka krvi i otpora strujanju.

U ovom završnom radu analizirani su modeli strujanja krvi kroz krvne žile za dva pacijenta koje se može zamisliti kao strujanje fluida kroz cijev složene geometrije. Kako je većina problema vezana na strujanje fluida opisana je nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama koje nemaju opće analitičko rješenje, ovaj problem rješavat se primjenom softverskog paketa OpenFOAM koji je posebno prilagođen za tu namjenu. Poštuju se osnovni zakoni mehanike fluida kao što su zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja momenta količine gibanja, zakon očuvanja energije te drugi zakon termodinamike. Na jednadžbe za strujanje primijenit će se numerička metoda - metoda konačnih volumena.

Mehanika fluida je teorijsko eksperimentalna znanost koja se bavi proučavanjem strujanja fluida. Zbog velikog broja pojava i njihove kompleksnosti koje mehanika fluida pokušava opisati, potrebno je uvesti niz pojednostavljenja u fizikalne i matematičke modele. Pri fizikalnom modeliranju potrebno je uzeti u obzir sve značajne fenomene za promatrani problem uvođenjem određenih pretpostavki i zanemarivanjem nebitnih efekata. Rezultat fizikalnog modela je matematički model koji se nastoji što više pojednostaviti. Pri modeliranju se balansira između jednostavnosti matematičkog modela te vjernosti prikaza stvarnosti fizikalnog modela.

## 2. OSNOVE KRVOŽILNOGA SUSTAVA

Krvožilni sustav građen je od srca, krvi i krvnih žila te obavlja sljedeće funkcije:

- transport deoksidirane krvi (siromašna kisikom) od srca do pluća i oksigenirane krvi (bogata kisikom) od pluća do srca
- transport oksigenirane krvi od srca do tkiva kao i transport deoksigenirane od tkiva do srca
- distribucija nutrijenata do stanica
- odstranjivanje otpadnih produkata (ugljični dioksid, ureja, laktati) od radnih stanica za eliminaciju ili ponovnu upotrebu
- regulacija pH-a i kontrola kiselosti
- transport hormona i enzima za regulaciju fiziološke funkcije
- održavanje ravnoteže tekućine za prevenciju dehidracije
- održavanje tjelesne temperature apsorpcijom topline i redistribucijom do površine tijela

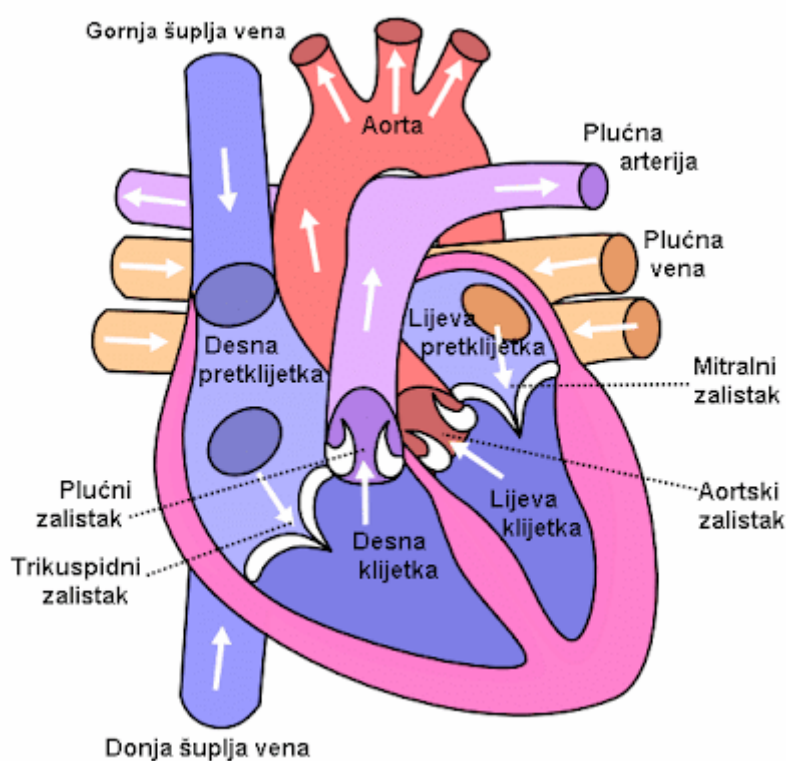
### 2.1. Srce

Srce je središnji organ krvožilnoga sustava, koji svojim kontrakcijama omogućuje protjecanje krvi po tijelu. Smješteno je u sredini prsnog koša, iza prsne kosti i između dvaju plućnih krila. Veličine je stisnute šake i kod prosječnog odraslog čovjeka teži oko 300 grama. Sastoji se od srčane stijenke i četiriju šupljina, a izvana ga obavija vezivna ovojnica, osrčje ili perikard. Srčanu stijenku čine tri sloja: unutarnji (endokard), srednji mišićni (miokard) i vanjski sloj (epikard). Srčane su šupljine lijeva i desna pretklijetka (atrij) te lijeva i desna klijetka (ventrikul). Desna pretklijetka i klijetka odvojene su od lijeve pretklijetke i klijetke tankom mišićnom pregradom. Između pretklijetki i klijetki nalaze se zalisci, koji omogućuju protjecanje krvi samo u jednom smjeru, iz pretklijetki u klijetke.[2] Prosječan broj otkucaja srca odrasle osobe iznosi 60-80 puta u minuti. U slučaju napora, rad srca se ubrzava i prilagođava trenutnim potrebama tijela.

Srce radi kao dvostruka pumpa. Funkcija desne strane srca je prikupljanje deoksigenirane krvi u desnoj pretklijetki koja dolazi iz tijela i njezino potiskivanje preko desne klijetke u pluća tako da može doći do izmjene plinova, kisika i ugljikova dioksida. Ovo se događa pasivnim procesom difuzije. Lijeva strana prikuplja oksigeniranu krv iz pluća u lijevu pretklijetku. Iz lijeve pretklijetke krv odlazi u lijevu klijetku koja je potiskuje van u tijelo preko aorte. Obje klijetke su snažnije i deblje od pretklijetki. Mišićni zid lijeve klijetke deblji je od zida desne klijetke zbog

jače sile potrebne za potiskivanje krvi kroz sistemsku cirkulaciju. Pretkljetke primarno olakšavaju cirkulaciju omogućujući neprekinut venski protok do srca i sprečavajući inerciju prekinutog venskog toka koji bi se inače zbivao pri svakoj ventrikularnoj sistoli.

Iz desne pretkljetke krv teče kroz trikuspidni zalistak u desnu klijetku. Zatim se potiskuje kroz plućni zalistak i putuje kroz plućnu arteriju u pluća. Iz pluća krv teče natrag kroz plućne vene u lijevu pretkljetku. Krv zatim teče kroz mitralni zalistak u lijevi klijetku, a od tamo se potiskuje kroz aortni zalistak u aortu i ostatak tijela. Deoksigenirana krv se zatim ponovno vraća u srce kroz donju i gornju šuplju venu.



Slika 2.1. Građa srca [3]

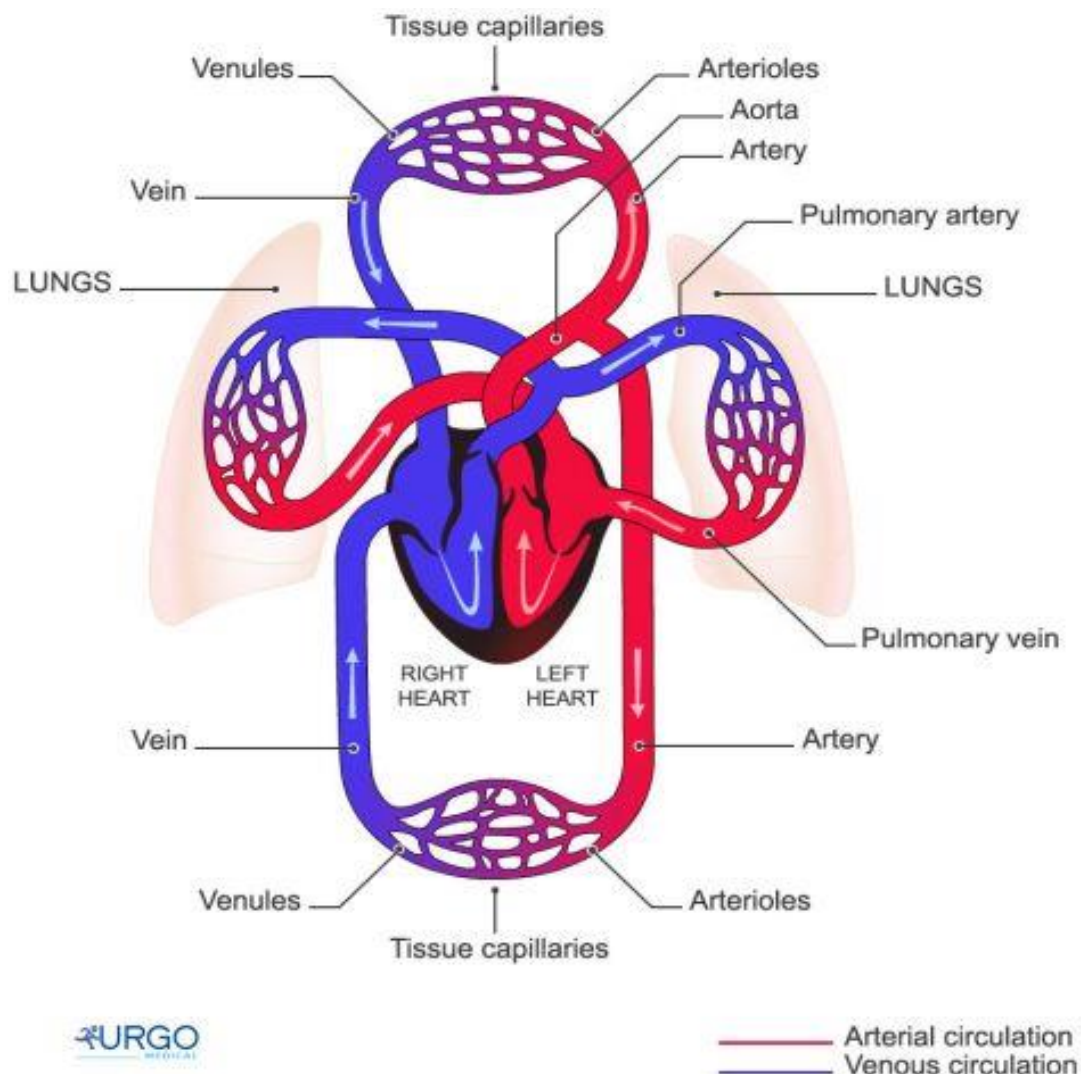
## 2.2. Krvne žile

Krvne žile su dio krvožilnog sustava čija je funkcija prenošenje krvi kroz tijelo. Postoje tri vrste krvnih žila: arterije, vene i kapilare.

- Arterije su najveće krvne žile koje odnose krv iz srca i odvođe je po tijelu. Krv u arterijama je bogata kisikom i svijetlocrvene je boje. Najveća arterija izlazi iz lijeve srčane klijetke i zove se aorta.

- Vene su krvne žile koje dovode krv iz tijela u srce. Venska krv sadrži ugljikov dioksid i tamnocrvene je boje. Krv struji prema srcu suprotno djelovanju sile teže. Zbog toga se u njima nalaze zalisci koji sprečavaju povratak krvi u suprotnom smjeru.
- Kapilare su najtanje krvne žile koje povezuju ogranke najsitnijih arterija i vena. U njima se obavlja izmjena plinova između eritrocita i stanica u tkivima tj. izmjena hranjivih i otpadnih tvari.

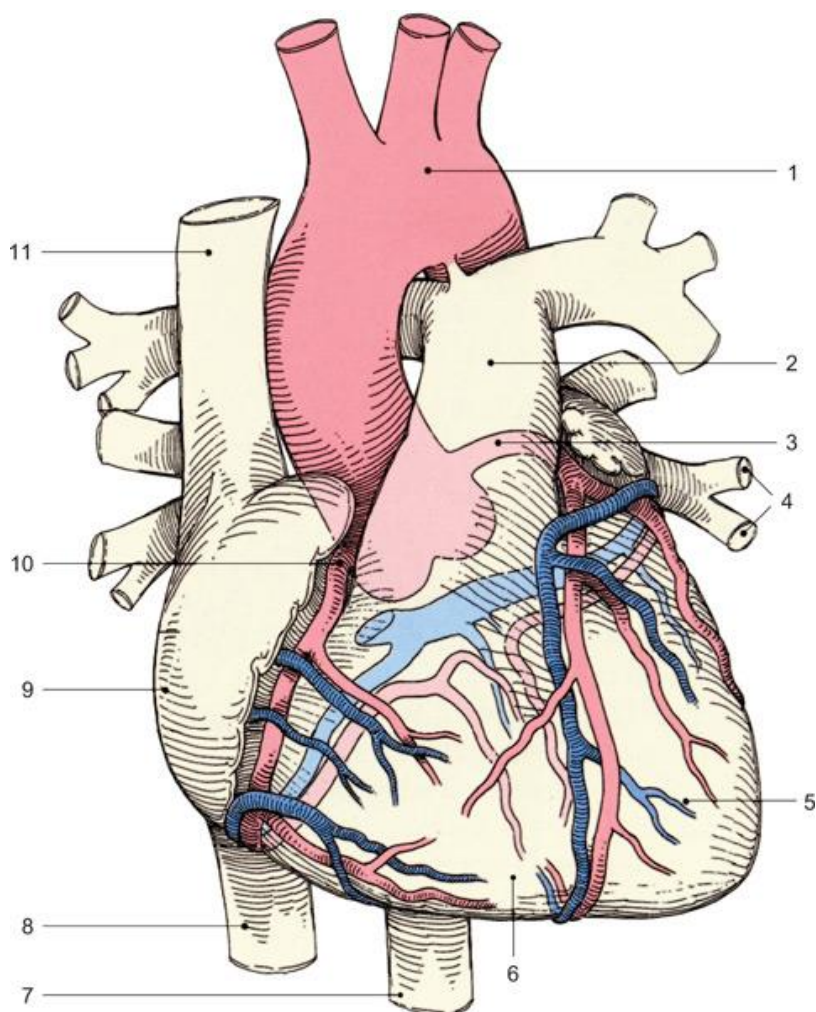
Krvotok se dijeli na dva dijela: mali i veliki krvotok. Funkcija velikog krvotoka je dovođenje kisika i hranjivih tvari do svake stanice u tkivu kako bi se omogućilo stanično disanje te odvođenje ugljikova dioksida i otpadnih tvari iz stanica. Funkcija malog krvotoka je oslobađanje organizma od ugljikova dioksida i obogaćivanje krvi kisikom. Mali krvotok je izuzetno važna veza između krvožilnog i dišnog sustava.



**Slika 2.2. Mali (venski) i veliki (arterijski) krvotok [5]**

### 2.2.1 Koronarne arterije

Koronarne arterije su dvije krvne žile dovodnice koje opskrbljuju srce krvlju. Desna i lijeva koronarna arterija izlaze iz aorte dajući mnoge ogranke koji poput vijenca obavijaju srce. I dok tijelo miruje, srce je organ koji u svojem radu troši najviše kisika, a pri naporu, povećana potreba za kisikom zahtijeva povećanje protoka krvi kroz koronarne arterije i do šest puta. Koronarni protok mnogim se mehanizmima prilagođuje potrebama metabolizma srčanoga mišića. Protok, širina i prohodnost koronarnih arterija, kao i bolesne promjene na njima dijagnostički se utvrđuju koronarografijom.[6]

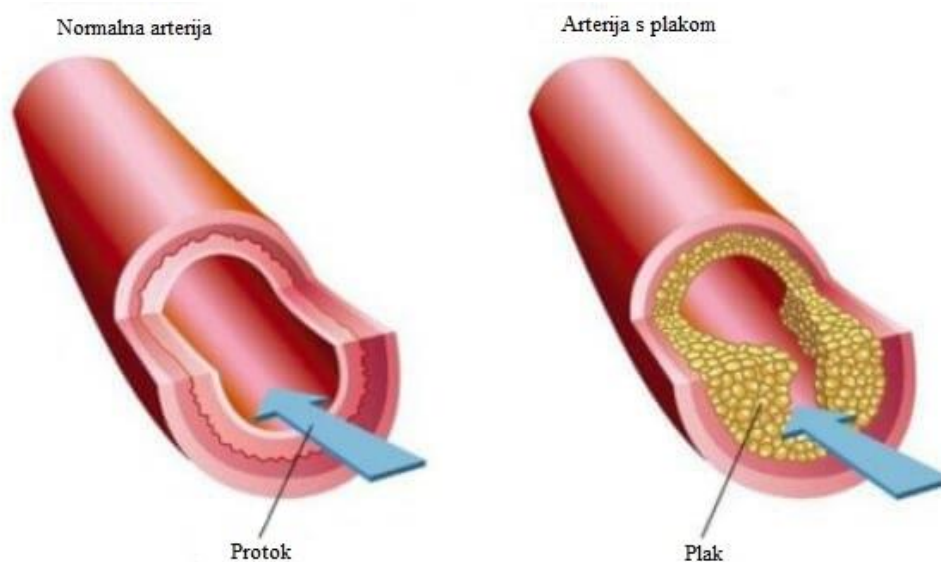


**Slika 2.3. Koronarne arterije, 1. luk aorte, 2. plućna arterija, 3. lijeva koronarna arterija, 4. plućne vene, 5. lijeva klijetka, 6. desna klijetka, 7. silazna aorta, 8. donja šuplja vena, 9. desna pretklijetka, 10. desna koronarna arterija, 11. gornja šuplja vena [6]**

Začepljenje krvnih žila oko srca najčešće je uzrokovano aterosklerozom koronarnih arterija. Ateroskleroza je bolest krvnih žila u kojoj dolazi do nakupljanja lipida (masnoća) na unutarnje stijenke arterija. Arterije tada postanu krute i sužava im se promjer. Začepljenje krvnih žila može



biti kao stenoza (smanjenje promjera) ili okluzija (potpuno začepljenje). Pojam ishemija odnosi se na stanje pomanjkanja kisika. Aterosklerotski plak sužava lumen koronarne arterije i ukoliko se presjek lumena smanji za oko 75%, tada više nije moguće postići pun intenzitet protoka krvi pri pojačanoj potrebi miokarda za kisikom (pri fizičkoj aktivnosti). Ako se presjek lumena smanji za više od 80% tada će protok krvi biti smanjen i u mirovanju.



**Slika 2.4. Koronarna ateroskleroza [7]**

Rizični čimbenici za nastanak ateroskleroze su:

- visok krvni tlak – hipertenzija,
- visoke vrijednosti kolesterola – hiperkolesterolemija,
- visoke vrijednosti triglicerida,
- povišena razina lipoproteina niske gustoće (LDL),
- snižena razina lipoproteina visoke gustoće (HDL),
- koronarna bolest srca u obitelji,
- pušenje,
- dijabetes (šećerna bolest),
- prekomjerna tjelesna težila i pretilost,
- fizička neaktivnost.

Kronična ishemijska bolest srca očituje se kao stabilna angina pektoris. Akutna manifestacija ishemijske bolesti srca podrazumijeva akutni koronarni sindrom – infarkt miokarda tj. srčani udar. Angina pektoris je sindrom koji označava bolove u prsima (stenokardije) koji nastaju kada mišićna stijenka srca (miokard) privremeno ostane bez kisika.

Srčani udar se događa kada krvni ugrušak začepi koronarnu arteriju i u potpunosti blokira protok krvi prema miokardu. Zbog začepljenih krvnih žila oko srca, stanice srčanog mišića ne dobivaju kisik i odumiru, tj. razvija se nekroza miokarda. [7]

Istraživanja pokazuju da smanjena razina tangencijalnog naprezanja na stijenci koronarne arterije pogoduje razvoju plaka.

### 2.3. Krv

Krv je tekuće tkivo crvene boje koje teče kroz krvožilni sustav. Sastoji se od krvnih stanica koje plivaju u krvnoj plazmi:

- krvne stanice: eritrociti, trombociti i leukociti
- krvna plazma je tekući dio krvi i sastoji se od vode, ugljikohidrata, masti, bjelanjčevina, hormona, minerala i vitamina

Ukupni volumen krvi u odrasle osobe je oko 5 litara. Volumen krvnih stanica iznosi oko 45%, a krvne plazme oko 55% ukupnog volumena krvi. Osnovna funkcija krvi je opskrba tkiva kisikom i hranjivim tvarima, kao i odstranjivanje ugljičnog dioksida i svih metaboličkih produkata.

Krvni tlak je pritisak krvi na stijenke krvnih žila (arterija) u svakom dijelu tijela. Krv teče kroz krvne žile upravo zato što se nalazi pod određenim tlakom. Tlak se stvara radom srca kao pumpe. Pri svakom izbacivanju krvi iz srca (sistola), tlak se povisuje, a kod ulijevanja krvi u srce (dijastola), tlak se snižava. Stoga se mjere dvije vrijednosti krvnoga tlaka, gornja (sistolčki) i donja vrijednost (dijastolički).[8] Normalan vrijednost krvnoga tlaka je prosječno 120/80 milimetara stupca živa (mmHg) ili 16/10,7 kilopaskala (kPa). Krvni tlak je važan pokazatelj funkcije srca i zdravstvenog stanja krvožilnog sustava.

### 3. TEORIJSKE OSNOVE DINAMIKE FLUIDA

Dinamika fluida je dio mehanike fluida koji se bavi silama koje djeluju na fluide, gibanjima koje nastaju djelovanjem tih sila i interakcijama između čvrstih tijela i fluida u gibanju. Dinamika fluida bazirana je na pet osnovnih zakona koji su definirani za materijalni volumen:

1. Zakon očuvanja mase
2. Zakon očuvanja količine gibanja
3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja
4. Zakon očuvanja energije
5. Drugi zakon termodinamike

Za slučaj da nema momenata raspodijeljenih po masi i površini materijalnog volumena zakon momenta količine gibanja se svodi na činjenicu simetričnosti tenzora naprezanja tj. to znači da je jednačba momenta količine gibanja već zadovoljena, pa ju nećemo uključivati u skup osnovnih jednačbi. S obzirom da se entropija ne pojavljuje u ostalim osnovnim zakonima dinamike fluida, jednačba drugog zakona termodinamike može se rješavati nezavisno od ostalih jednačbi, pa se ona naziva „pasivnom“ jednačbom. U tom smislu ga se neće uzimati u skup osnovnih jednačbi, nego će ga se primjenjivati ukoliko postoji potreba za ispitivanjem fizikalnosti procesa.

#### 3.1. Materijalni volumen

Materijalni volumen  $V_M$  (fluidno tijelo) je uočeni dio prostora ispunjen fluidom koji se tijekom gibanja sastoji stalno od jednih te istih čestica. Ekvivalent je sustavu materijalnih točaka u mehanici, te zatvorenom termodinamičkom sustavu u termodinamici, pa će svi zakoni mehanike i termodinamike biti direktno primjenjivi. Materijalni volumen tijekom gibanja mijenja svoj položaj, oblik i veličinu, pa je za opis njegova gibanja potrebno opisati gibanje svake njegove čestice.

#### 3.2. Zakon očuvanja mase

Zakon očuvanja mase za materijalni volumen glasi: brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli. Zakon očuvanja mase naziva se još jednačbom kontinuiteta te za česticu fluida glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

U danoj jednadžbi  $\rho$  predstavlja gustoću fluida dok  $v_j$  vektor brzine fluida. Za nestlačivo strujanje jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.2)$$

### 3.3. Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja za materijalni volumen glasi: brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen. Prikazan je jednadžbom 3.3:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ji} + \Sigma_{ji}) + \rho f_i \quad (3.3)$$

gdje  $\Sigma_{ji}$  predstavlja simetrični tenzor viskoznih naprezanja koji glasi (prema Newtonovom zakonu viskoznosti):

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji} \quad (3.4)$$

### 3.4. Zakon očuvanja energija

Zakon očuvanja energija za materijalni volumen glasi: brzina promjene zbroja kinetičke i unutrašnje energije materijalnog volumena jednaka je snazi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, te brzini izmjene topline materijalnog volumena s okolinom. Primjenom na česticu fluida, zakon očuvanja energije glasi:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j e)}{\partial x_j} = \rho f_i v_i + \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (3.5)$$

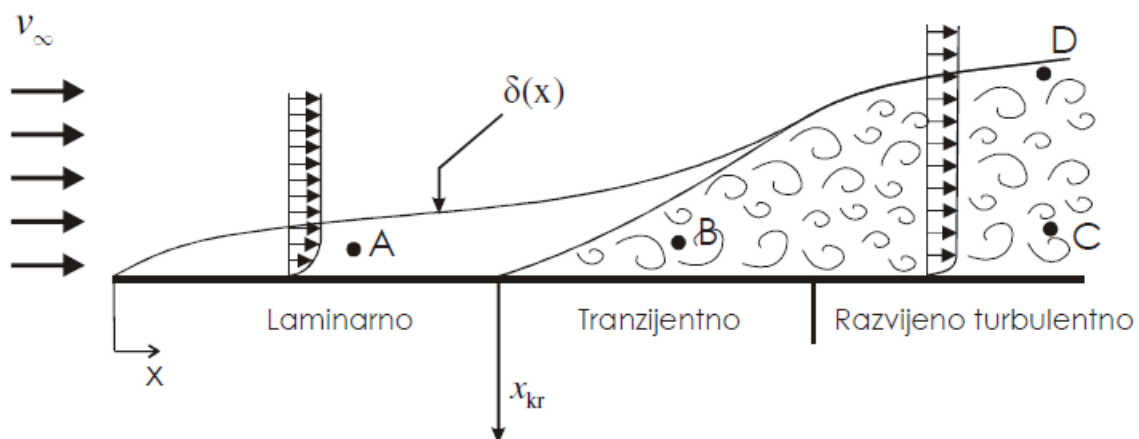
### 3.5. Reynoldsov broj

Reynoldsov broj je najvažniji bezdimenzijski parametar za određivanje režima strujanja. Predstavlja omjer inercijskih i viskoznih sila te je glavni kriterij prelaska laminarnog u turbulentno strujanje. U režimu laminarnog strujanja čestice se gibaju pravilno u slojevima, a putanje čestica su glatke krivulje. Turbulentno strujanje je izrazito nestacionarno strujanje u kojem se čestice fluida gibaju po vrlo nepravilnim putanjama i intenzivno se miješaju, a brzina, tlak i ostale veličine pokazuju slučajne pulsacije. Laminarno strujanje se pojavljuje pri niskom vrijednostima

Reynoldsova broja, dok se turbulentno pojavljuje pri viskom vrijednostima. Reynoldsov broj se računa prema sljedećem izrazu:

$$Re = \frac{u \cdot x \cdot \rho}{\mu} = \frac{u \cdot x}{\nu} = \frac{\text{inercijske sile}}{\text{viskozne sile}} \quad (3.6)$$

gdje  $u$  označuje brzinu fluida,  $x$  karakterističnu duljinu,  $\rho$  gustoću fluida,  $\mu$  dinamičku viskoznost, a  $\nu$  kinematičku viskoznost. Mogu se definirati dvije vrijednosti kritičnog Reynoldsova broja: donja i gornja vrijednost. Donja vrijednost kritičnog Reynoldsova broja je ona ispod koje se ne pojavljuje nestabilnost strujanja tj. ispod koje nije zabilježeno turbulentno strujanje, a gornja vrijednost je ona iznad koje nije zabilježeno laminarno strujanje. Za okrugle cijevi s oštrim ulaznim bridom se za donju vrijednost kritičnog Reynoldsova broja uzima vrijednost  $Re_{krd}=2320$ , a za gornju vrijednost približno  $Re_{krg}=40000$ . Kritična vrijednost Reynoldsova broja je različita za različita strujanja. Kad Reynoldsov broj poraste iznad 200 do 400, na mjestu grananja krvnih žila može doći do turbulentnog strujanja koji će nestati ili prijeći u laminarni tok u ravnim dijelovima krvne žile. Kad se Reynoldsov broj povisi na vrijednost od 2000, turbulencija će se najvjerojatnije pojaviti i u ravnom i u glatkom dijelu krvne žile. U uskim krvnim žilama Reynoldsov broj praktički nikad nije tako velik da se mogu dogoditi turbulencije. Turbulencije se najčešće javljaju kod anemije jer je viskoznost krvi niža i to objašnjava čestu pojavu buke.



**Slika 3.1. Shematski prikaz razvoja graničnog sloja uz ravnu ploču [9]**

Gornja slika prikazuje prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje u graničnom sloju uz ravnu ploču. Na početku se razvija laminarni granični sloj koji pri određenoj vrijednosti Reynoldsova broja  $Re_{kr}$  postaje nestabilan. U presjeku  $x_{kr}$  dolazi do periodičkih pulsacija brzine i tlaka te daljnjim udaljavanjem od presjeka pulsacije postaju sve češće i gušće. Nakon određenog presjeka

dolazi do prijelaza iz tranzijentnog u potpuno razvijeno turbulentno strujanje. Potrebno je naglasiti da i u laminarnom i u turbulentnom strujanju postoji granični sloj koji se nalazi u neposrednoj blizini tijela i u kojem se brzina fluida mijenja od nule (na samoj površini tijela, zbog viskoznosti fluida koji se lijepi za stijenku), do brzine neporemećenog strujanja. Unutar graničnog sloja se ni u turbulentnom strujanju, gdje su inercijske sile dominantne nad viskoznim, ne mogu zanemariti viskozne sile. Ipak, zbog izraženije difuzije, koja ima tendenciju ujednačavanja profila, u turbulentnom strujanju profil brzine je ujednačeniji, pa je, zbog izraženijeg gradijenta brzine na stijenci veće i tangencijalno naprezanje.

U ovom radu promatra se nestlačivo pulsirajuće strujanje, a radi jednostavnosti se krv promatra kao newtonski fluid. U tom slučaju svojstva krvi opisana su gustoćom i dinamičkom viskoznošću koji se smatraju konstantnima, a njihovim omjerom se dobije koeficijent kinematičke viskoznosti:

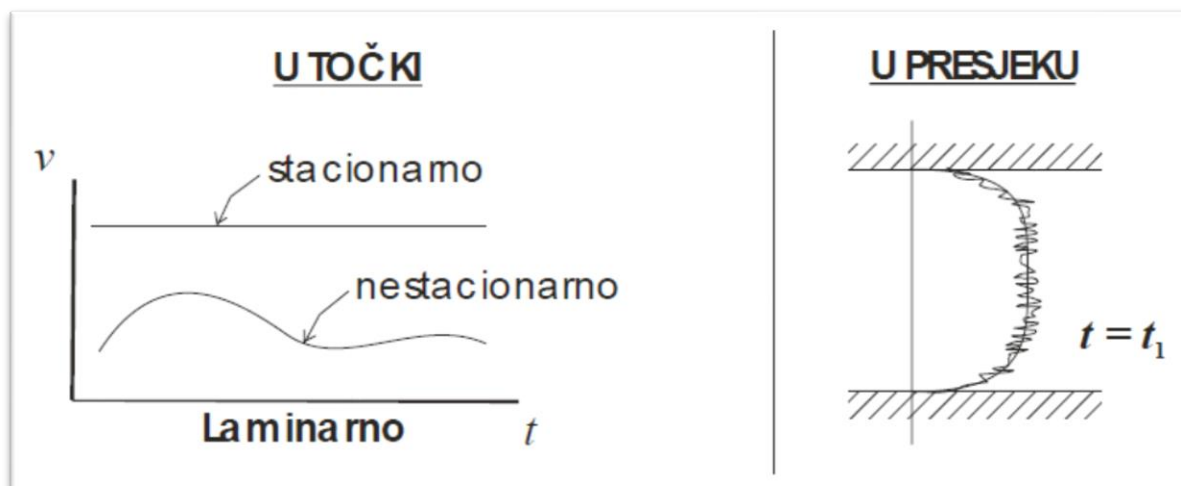
- Gustoća  $\rho = 1060 \text{ kg/m}^3$
- Dinamička viskoznost  $\mu = 4,24 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$
- Kinematička viskoznost  $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Prosječni volumni protok krvi iznosi  $\bar{Q} = 2,00855 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ , dok maksimalni volumni protok tijekom vrhunca sistole iznosi  $Q_{\max} = 8,7646 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ . Hidraulički promjer na ulazu u lijevu koronarnu arteriju za pacijenta 1 iznosi  $d_1 = 3,7557 \text{ mm}$ . Iz toga slijede prosječni i maksimalni Reynoldsov broj za pacijenta 1:

$$\overline{Re} = \frac{4 \cdot \bar{Q}}{d_1 \cdot \pi \cdot \nu} = 170,23 \quad (3.7)$$

$$Re_{\max} = \frac{4 \cdot Q_{\max}}{d_1 \cdot \pi \cdot \nu} = 742,84 \quad (3.8)$$

što nam ukazuje da su vrijednosti daleko ispod donje kritične vrijednosti Reynoldsova broja  $Re_{\text{krd}} = 2320$ , te će se iz tog razloga strujanje smatrati laminarnim i nestacionarnim. Reynoldsovi brojevi za pacijenta 2 poprimaju manje vrijednosti te zbog toga nisu prikazani.



Slika 3.2. Usporedni prikaz stacionarnog i nestacionarnog laminarnog strujanja [9]

### 3.6. Tangencijalno (smično) naprezanje

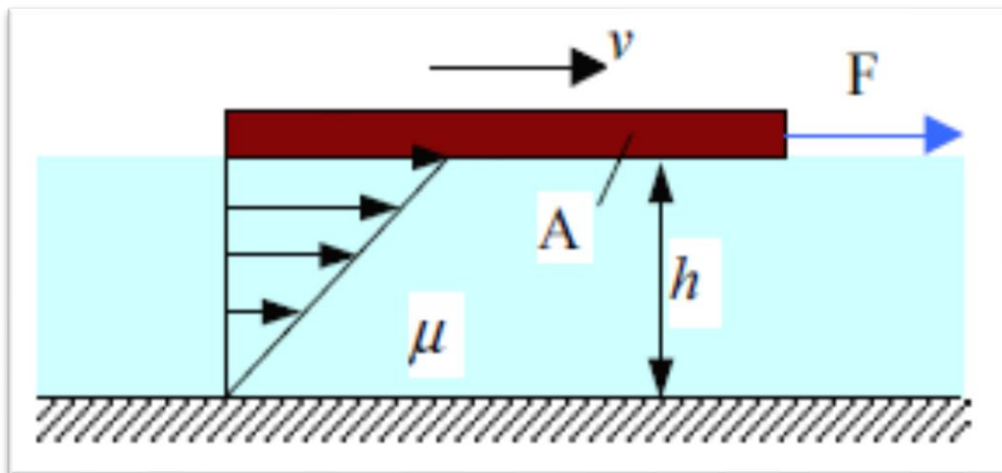
Elastična tijela se pod djelovanjem vanjskog opterećenja deformiraju, a uslijed deformacije u tijelu se pojavljuju unutrašnje sile koje se opiru vanjskom opterećenju. Za elastičnu deformaciju vrijedi Hookov zakon koji uspostavlja linearnu vezu između naprezanja i deformacije. Djelovanjem vanjskih smičnih naprezanja fluid se neprekidno deformira i time se opire vanjskom opterećenju brzinom deformacije. Newtonov zakon viskoznosti uspostavlja linearnu vezu između simetričnog tenzora naprezanja i tenzora brzine deformacije. Tenzor naprezanja može se prikazati u sljedećem obliku:

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji} \quad (3.9)$$

gdje  $p$  predstavlja termodinamički tlak,  $\delta_{ji}$  Kroneckerov jedinični tenzor, a  $\Sigma_{ji}$  simetrični tenzor viskoznih naprezanja. U nestlačivom strujanju viskozna naprezanja opisana su sljedećim izrazom:

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.10)$$

Komponente na glavnoj dijagonali tenzora  $\sigma_{ji}$  predstavljaju normalna tlačna naprezanja dok komponente izvan dijagonale predstavljaju tangencijalna (smična) viskozna naprezanja.



Slika 3.3. Definicija smičnog naprezanja fluida

Smična sila se računa prema sljedećem izrazu:

$$F = \mu \frac{vA}{h} \quad (3.11)$$

u kojem  $\mu$  predstavlja dinamičku viskoznost,  $v$  brzinu fluida,  $A$  karakterističnu površinu, a  $h$  visinu. Iz toga slijedi generalizirani Newtonov zakon viskoznosti:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{v}{h} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.12)$$

U osnosimetričnom strujanju kroz cijev tangencijalna naprezanja definirana su sljedećim izrazom:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.13)$$

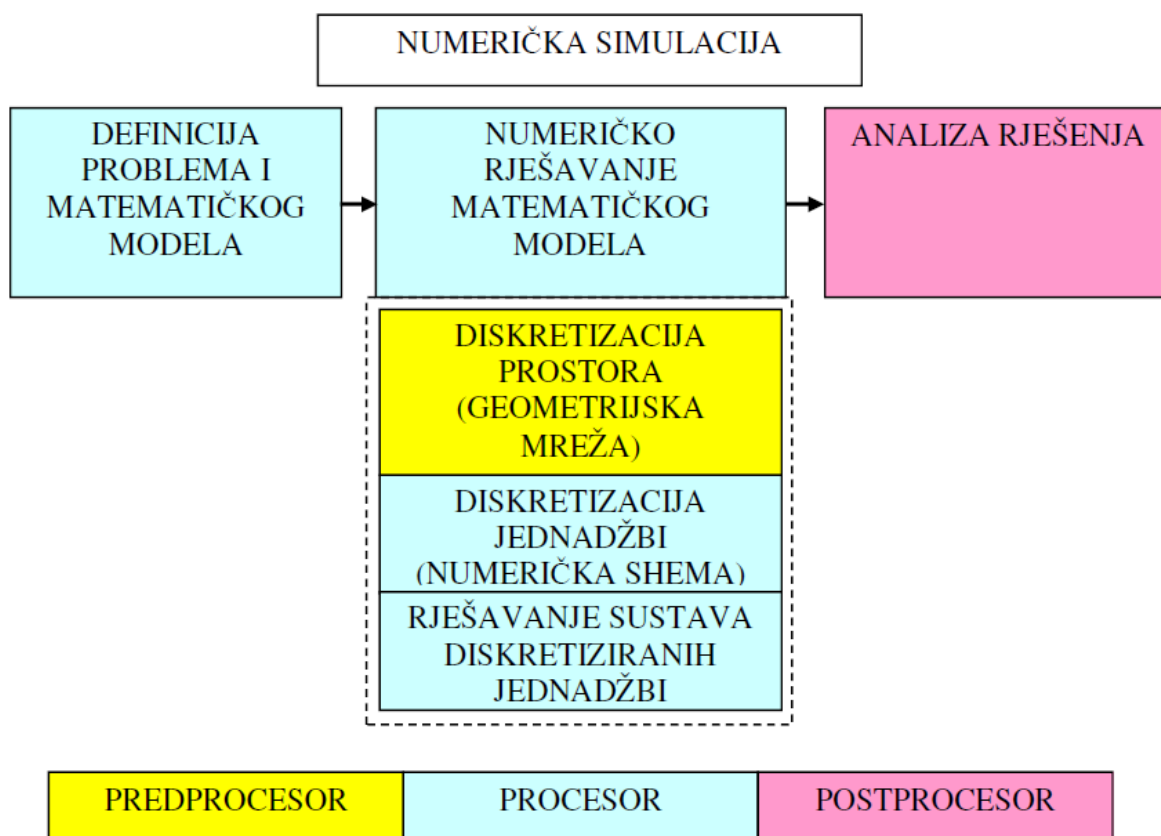
gdje  $\mu$  predstavlja dinamičku viskoznost,  $u$  brzinu strujanju fluida, a  $r$  radijus cijevi. Tangencijalno naprezanje na stijenci se označava:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (3.14)$$



#### 4. RAČUNALNE SIMULACIJE U MEHANICI FLUIDA

Mehanika fluida je teorijsko eksperimentalna znanost čiji se teorijski pristup temelji na analitičkom rješavanju matematičkih modela strujanja fluida. Analitička rješenja omogućuju kompletan uvid u fiziku nekog problema, no većina problema povezana sa strujanjem fluida opisana je nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama koje je nemoguće riješiti analitički. Zbog toga se u prošlosti uglavnom pribjeglo eksperimentalnom pristupu koji je dosta ograničen prilikom analize rezultata. Razvojem računala stvoreni su uvjeti za razvoj numeričkih metoda rješavanja matematičkih modela strujanja i time počinje razvoj treće grane mehanike fluida tj. računalne dinamike fluida.



Slika 4.1. Shema postupka modeliranja računalne simulacije [10]

#### 4.1. Metoda konačnih volumena

Matematički model prikazan je sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Svaki sustav jednadžbi ima opće i partikularno rješenje. Partikularno rješenje definirano je početnim i rubnim uvjetima specifičnim za promatrani problem. Numeričko rješavanje sastoji se od tri koraka. U prvom koraku diskretizira se područje proračuna što znači da se područje podjeli na određeni broj volumena te se njima dodijeli jedan ili više čvorova u kojima će se računati vrijednosti polja fizikalnih veličina. Time je definirana geometrijska mreža proračuna. U drugom koraku slijedi diskretizacija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi na geometrijskoj mreži jednom od numeričkih metoda. Najpoznatije numeričke metode su: metoda konačnih volumena, metoda konačnih elemenata, metoda konačnih razlike i dr. Rezultat diskretizacije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je sustav algebarskih jednadžbi. U trećem koraku slijedi analiza dobivenog numeričkog rješenja koja podrazumijeva prikaz skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja, integraciju protoka, sile, momenata, toplinskih tokova te dijagramski prikaz željenih veličina.

Metoda konačnih volumena najzastupljenija je metoda u području povezanim sa strujanjem fluida. Temelji se na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednadžbi po konačnim volumenima na geometrijskoj mreži. Polazana opća konveksijsko-difuzijska jednadžba glasi:

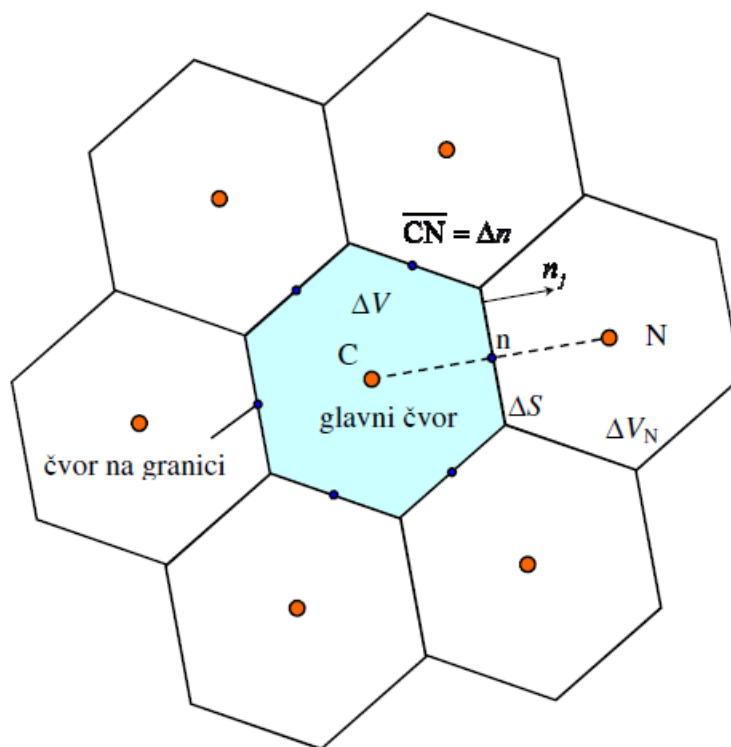
$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} - \Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = S_\varphi \quad (4.1)$$

gdje  $\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}$  predstavlja član lokalne promjene,  $\frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j}$  konveksijski član,  $\Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_j}$  difuzijski član,  $\left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$  vektor fluksa, a  $S_\varphi$  izvorski član. Integriranjem jednadžbe (4.1) po konačnom volumenu dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV \quad (4.2)$$

gdje član s lijeve strane jednadžbe predstavlja brzinu promjene fizikalne veličine  $\varphi$  u konačnom volumenu  $\Delta V$ , prvi član s desne strane jednadžbe predstavlja konveksijski i difuzijski protok fizikalne veličine  $\varphi$  kroz površine kontrolnog volumena  $\Sigma \Delta S$ , a drugi član s desne strane predstavlja izvor fizikalne veličine  $\varphi$ . Iz jednadžbe (4.2) je jasno da je brzina promjene sadržaja fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena razmjerna brzini protoka tog fizikalnog svojstva

kroz granice konačnog volumena i brzini nastajanja (izvor) ili nestajanja (ponor) tog fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena. Protok fizikalnog svojstva je definiran kao pozitivan kad se odvija od konačnog volumena prema okolini, a minus ispred integrala ukazuje da će se uslijed takvog protoka sadržaj fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena smanjivati.



Slika 4.2. Prikaz dijela geometrijske mreže [10]

U izrazu (4.2) se pojavljuju volumenski i površinski integrali koji se mogu aproksimirati srednjom integralnom vrijednošću. Za slučaj nestlačivog strujanja, integral člana lokalne promjene može se pisati sljedećim izrazom:

$$\int_{\Delta V} \varphi dV = \bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V \quad (4.3)$$

gdje  $\bar{\varphi}_{\Delta V}$  predstavlja srednju integralnu vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  unutar konačnog volumena. Pod pretpostavkom da je konačni volumen dovoljno mali, promjena veličine  $\varphi$  unutar konačnog volumena  $\Delta V$  može se aproksimirati linearnom raspodjelom tj. prvom potencijom razvoja u Taylorov red oko vrijednosti u čvoru C:

$$\varphi(x_j) = \varphi_c + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_c (x_j - x_j^c) \quad (4.4)$$

gdje član  $x_j$  predstavlja vektor položaja bilo koje točke unutar konačnog volumena. Uvrštavanjem jednadžbe (4.4) u (4.3) slijedi izraz:

$$\bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V = \varphi(x_j) = \varphi_C + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_C (x_j^T - x_j^C) \quad (4.5)$$

Ako je točka C težište volumena  $\Delta V$ , drugi član desne strane otpada i iz stoga proizlazi da će za slučaj linearne raspodjele unutar  $\Delta V$  biti  $\bar{\varphi}_{\Delta V} = \varphi_C$ .

Član lokalne promjene aproksimira se na sljedeći način:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV \approx \rho \frac{d\varphi_C}{dt} \Delta V \quad (4.6)$$

Analogno slijedi i za integral izvorskog člana:

$$\int_{\Delta V} S_\varphi dV \approx S_C \Delta V \quad (4.7)$$

gdje član  $S_C$  predstavlja vrijednost izvorskog člana u čvoru C kao aproksimacija srednje vrijednosti izvorskog člana unutar volumena  $\Delta V$ .

Zbroj vektora konvekcijskog toka  $\rho v_j \varphi$  i vektora difuzijskog toka  $\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$  čine ukupni vektor toka  $J_j$ . Protoku fizikalnog svojstva doprinosi samo normalna komponenta vektora toka  $J_j n_j$  i on glasi:

$$\Delta J_n = \left[ \rho (\overline{v_n \varphi})_{\Delta S} - \Gamma \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Delta S} \right] \Delta S \quad (4.8)$$

gdje se član  $(\overline{v_n \varphi}) \approx v_{n,n} \varphi_n$  može aproksimirati kao umnožak srednjih vrijednosti normalne komponente brzine i vrijednosti fizikalne veličine u težištu površine  $\Delta S$ . Sličnim postupkom se aproksimira i derivacija  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Delta S} \approx \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_n$ . U izraz za normalnu derivaciju uvodi se bezdimenzijska koordinata  $\tilde{n} = n/\Delta n$ , gdje  $\Delta n$  predstavlja udaljenost čvorova C i N prema slici 4.2. Vektor toka se u tome slučaju može raspisati:

$$\Delta J_n = \rho v_{n,n} \Delta S \varphi_n - \frac{\Gamma \Delta S}{\Delta n} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right|_n = F_n \varphi_n - D_n \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \right|_n \quad (4.9)$$

gdje član  $F_n = \rho v_{n,n} \Delta S$  predstavlja jačinu konvekcije, a  $D_n = \frac{\Gamma \Delta S}{\Delta n}$  jačinu difuzije.

Omjer  $Pe_\Delta = \frac{F_n}{D_n} = \frac{\rho v_{n,n} \Delta n}{\Gamma}$  naziva se lokalnim Pecletovim brojem. Pecletov broj služi za ocjenu važnosti pojedinog transporta tj. govori o dominantnosti konvekcije nad difuzijom ili obrnuto. S obzirom da se u numeričkom postupku pamte i računaju samo čvorne vrijednosti polja  $\varphi$  i to u glavnim čvorovima ( $\varphi_C, \varphi_N$ ), bit će potrebno aproksimirati tražene vrijednosti na stranicama

konačnih volumena s pomoću vrijednosti u glavnim čvorovima, a to se naziva shemom diferencije ili numeričkom shemom. Aproximacija će biti najtočnija ako je točka  $n$  težište površine  $\Delta S$ .

Uvrštavanjem izraza (4.3), (4.7) i (4.9) u jednadžbu (4.2) slijedi izraz:

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_C}{dt} = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left( F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n \right)^{nb} + S_C \Delta V \quad (4.10)$$

gdje suma po  $nb$  označuje zbrajanje po svih  $N_{nb}$  stranica konačnog volumena.

Primjenom neke od shema diferencije koje koriste samo čvorne vrijednosti  $\varphi_C$  i  $\varphi_N$ , izraz za ukupni protok fizikalnog svojstva  $\varphi$  može se prikazati u obliku

$$\Delta J_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N) \quad (4.11)$$

gdje koeficijent  $a_N$  ovisi od primijenjene sheme diferencije.

Naknadnim sređivanjem jednadžbi dolazi se do linearne algebarske jednadžbe za jedan volumen koja glasi:

$$a_C \varphi_C = \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + b \quad (4.12)$$

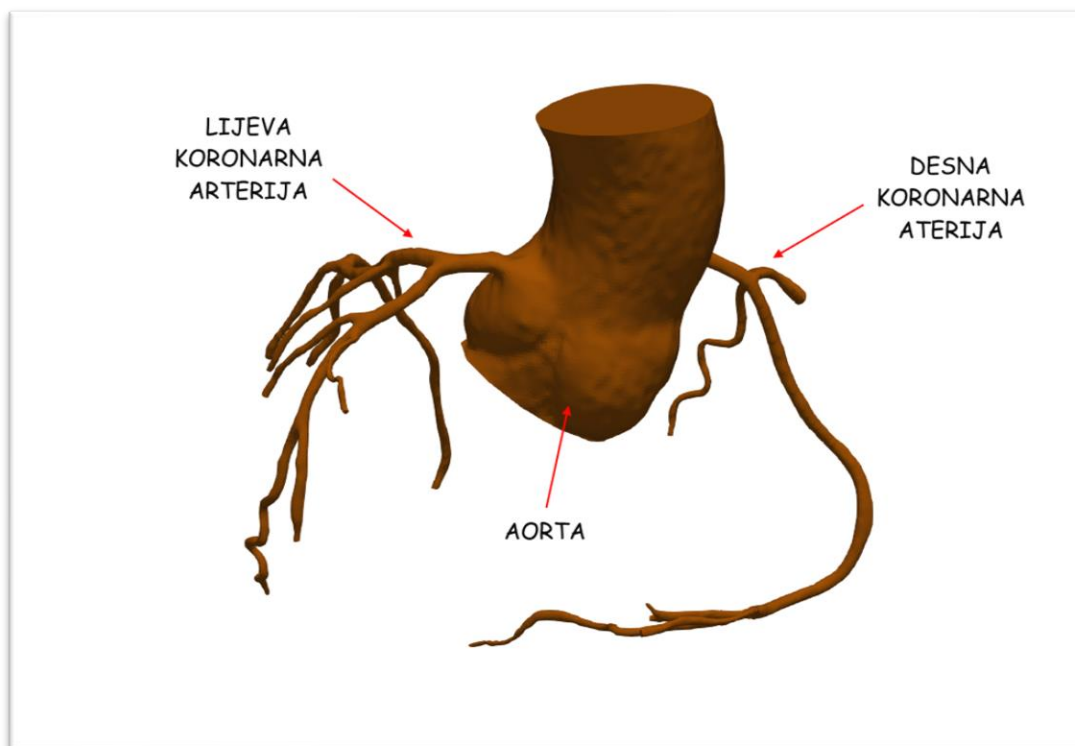
Ponavljanjem postupka za se konačne volumene unutar područja proračuna dobit će se sustav linearnih algebarskih jednadžbi koji se može zapisati u matričnom obliku:

$$[A_{ji}][\varphi_i] = [b_j] \quad (4.13)$$

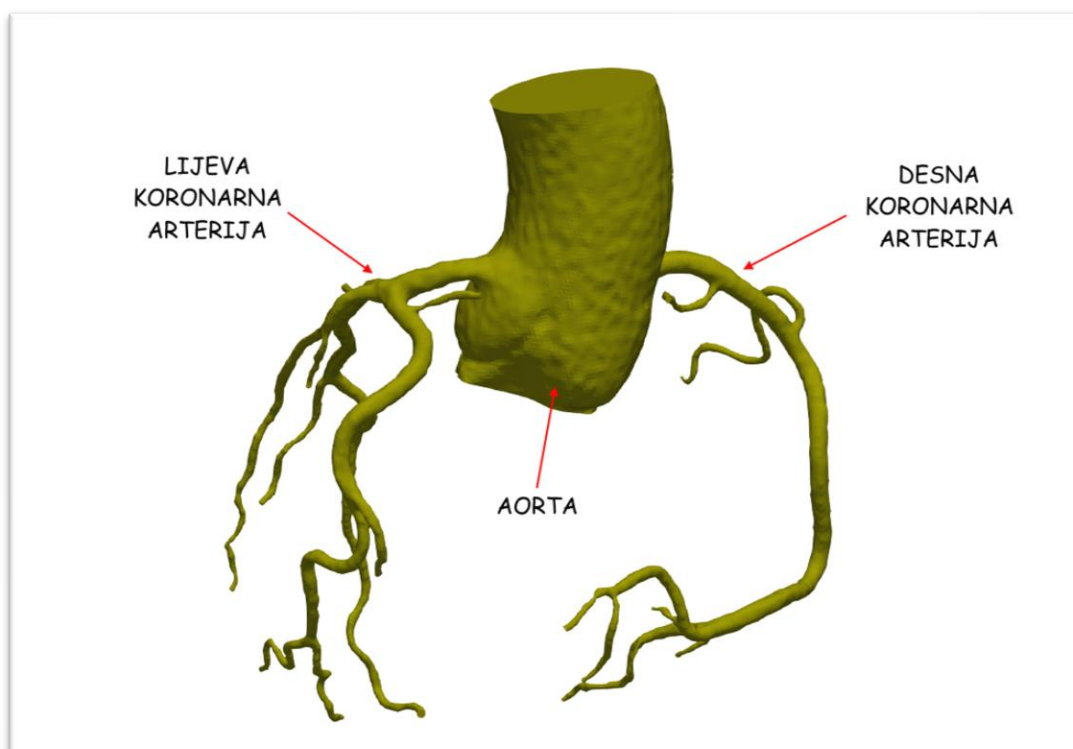
gdje matrica  $[A_{ji}]$  sadrži koeficijente na glavnoj dijagonali  $a_C$  i koeficijente  $a_N^{nb}$ ,  $[b_j]$  vektor desne strane u kojeg ulaze sve poznate veličine dok  $[\varphi_i]$  označuje vektora nepoznanica tj. čvornih vrijednosti polja  $\varphi$ . Polje  $\varphi$  mora zadovoljavati rubne uvjete koje će trebati ugraditi u diskretizirane jednadžbe prije njihova rješavanja. Informacije o rubnim uvjetima se pretežno ugrađuju kroz desnu stranu sustava jednadžbi. Ako je izvorski član bio nelinearna funkcija od  $\varphi$ , tada će numerički postupak imati iterativni karakter.

## 5. RAČUNALNI MODEL

U ovome poglavlju definirana je geometrija, geometrijska mreža, rubni uvjeti i ostale postavke koje su korištene za rješavanje zadanog problema. Geometrija koronarnih arterija preuzeta je u STL formatu i njezina izrada nije bila dio ovog rada. Geometrija je dobivena iz CT skenova u DICOM formatu koja se sastoji od velike količine 2D slika, svaka predstavljajući dio geometrije. Izrada 3D modela dobivena je volumenskim renderiranjem CT skenova te naknadnim detaljnim uređivanjem. Vađenje geometrije detaljno je opisano u izvješću „An informal guide to coronary artery geometry extraction“ od mag. ing. mech. Philippa Milovića. Slike 5.1 i 5.2 prikazuju geometrijske modele za dva pacijenta:



Slika 5.1. Geometrija pacijenta 1



**Slika 5.2. Geometrija pacijenta 2**

Zbog kompleksnosti problema i ograničenosti računalnih resursa, u ovom je radu provedena simulacija kroz lijevu koronarnu arteriju za oba pacijenta, stoga je i mreža rađena samo za lijeve grane.

### **5.1. Geometrijska mreža**

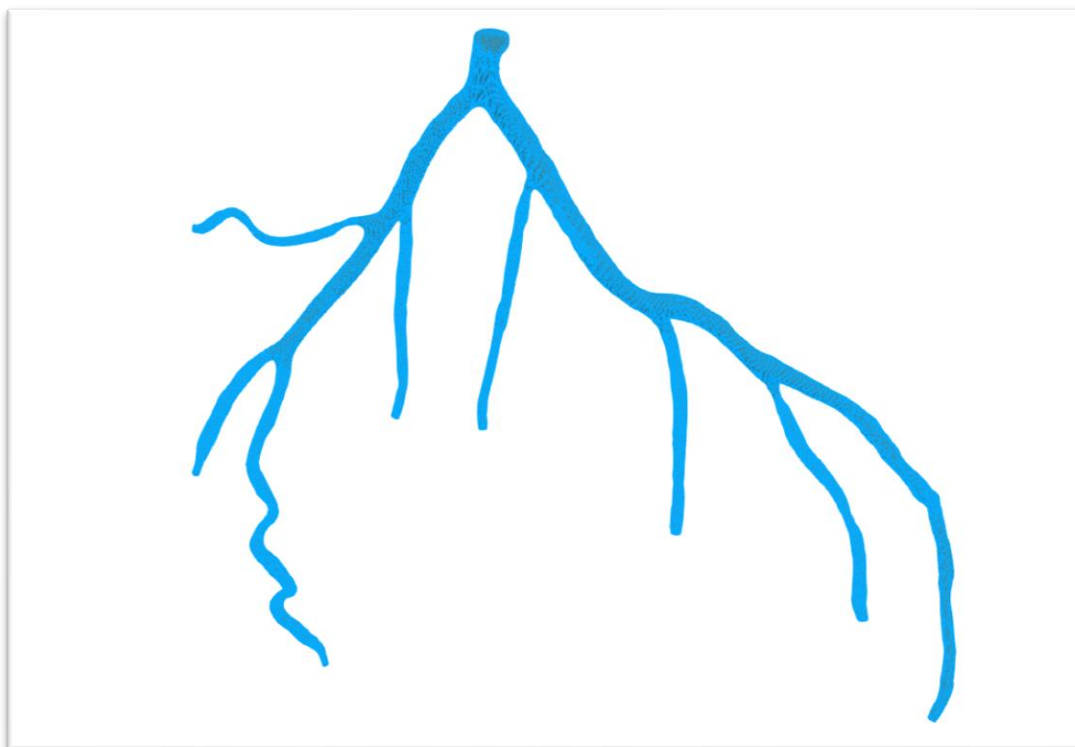
Diskretizacija proračunskog područja je zbog komplicirane geometrije napravljena uz pomoć višepatformske biblioteke za automatsko generiranje mreže cfMesh koja se nalazi u sklopu novijih verzija OpenFOAM paketa. Geometriju, koja se sastoji od više dijelova u STL formatu, potrebno je povezati u jednu cjelinu te spremiti u *fms* format jer je najpoželjniji za rad u cfMesh-u. Cilj ovog rada je izračun tangencijalnog naprežanja na stijenki koronarnih arterija, stoga je na stijenki koronarnih arterija potrebna dodatna finoća mreže koja je kontrolirana u biblioteci *meshDict*. Generiranje mreže obavljam naredbom *cartesianMesh*. Mreža prvog pacijenta sastoji se od 1280517 konačnih volumena, dok se mreža drugog pacijenta sastoji od 1592955 konačnih volumena. Geometrija lijeve koronarne arterije sastoji se od ulaznog presjeka, stijenke i 9 izlaznih presjeka. U tablici 5.1 dana su kratka pojašnjenja svake rubne plohe.

**Tablica 5.1 Rubne plohe oba pacijenta**

<b>Rubna ploha</b>	<b>Objašnjenje</b>
lca_in	Ulazni presjek lijeve koronarne arterije, presjek u kojem započinje strujanje
walls	Stijenka lijeve koronarne arterije
lca_0_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 0
lca_1_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 1
lca_2_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 2
lca_3_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 3
lca_4_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 4
lca_5_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 5
lca_6_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 6
lca_7_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 7
lca_8_out	Izlazni presjek lijeve koronarne arterije, grana 8



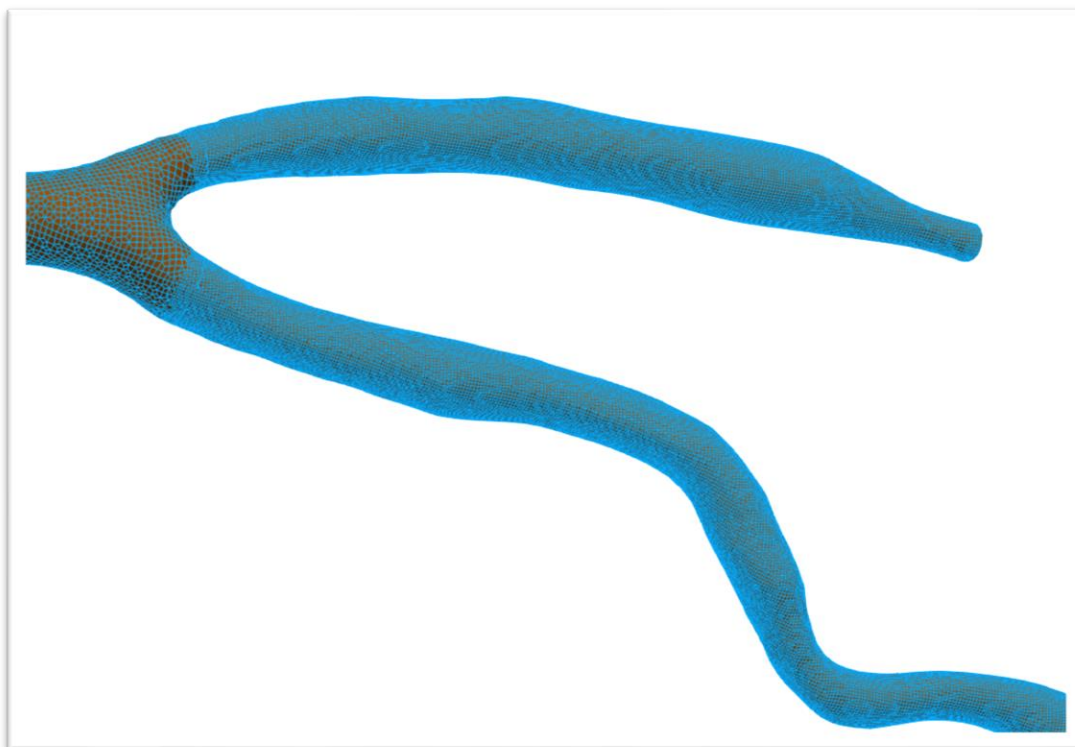
Prikaz mreža dan je na sljedećim slikama:



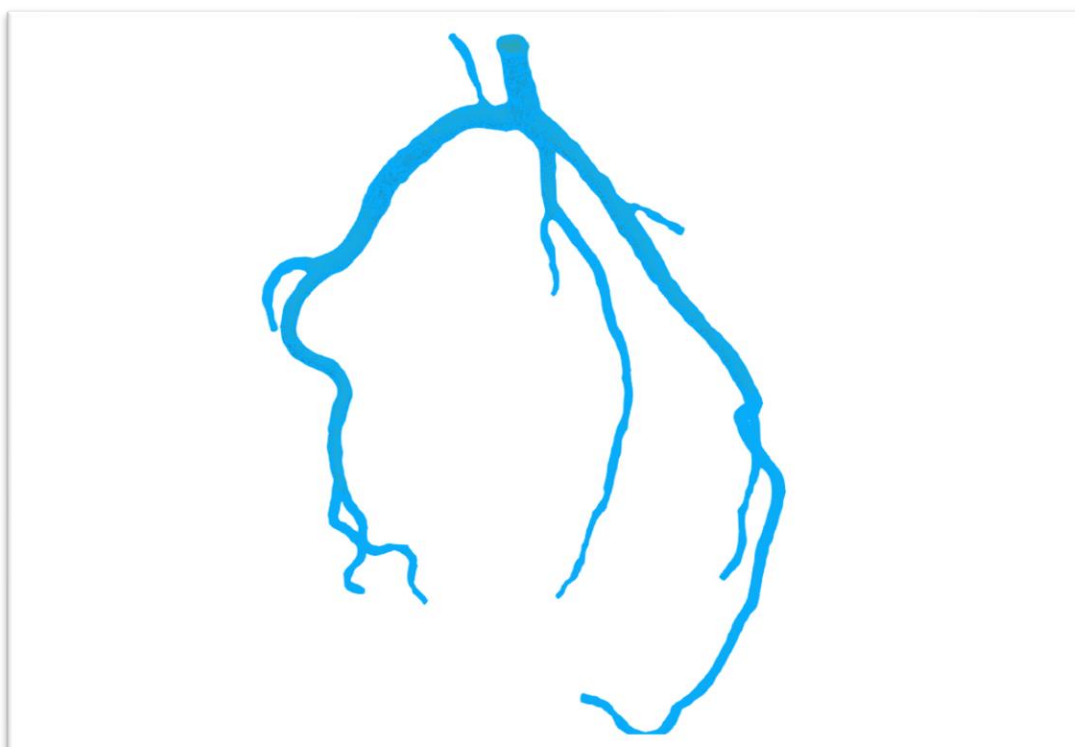
**Slika 5.3. Mreža konačnih volumena pacijenta 1**



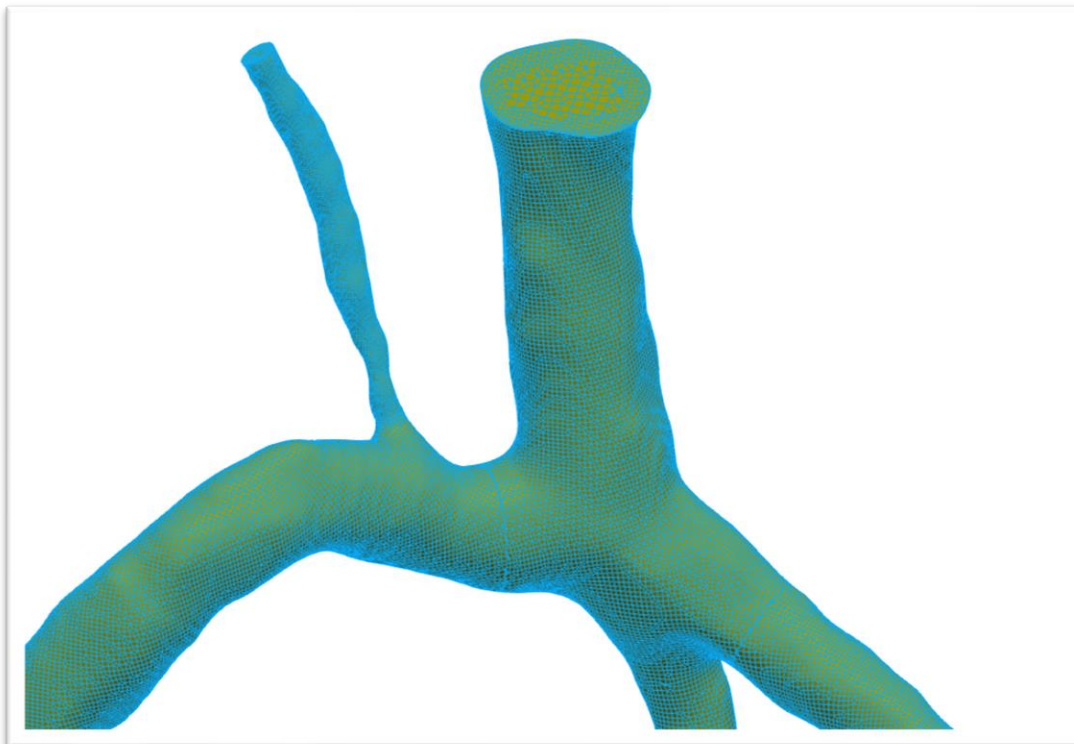
**Slika 5.4. Mreža na ulazu u lijevu koronarnu arteriju pacijenta 1**



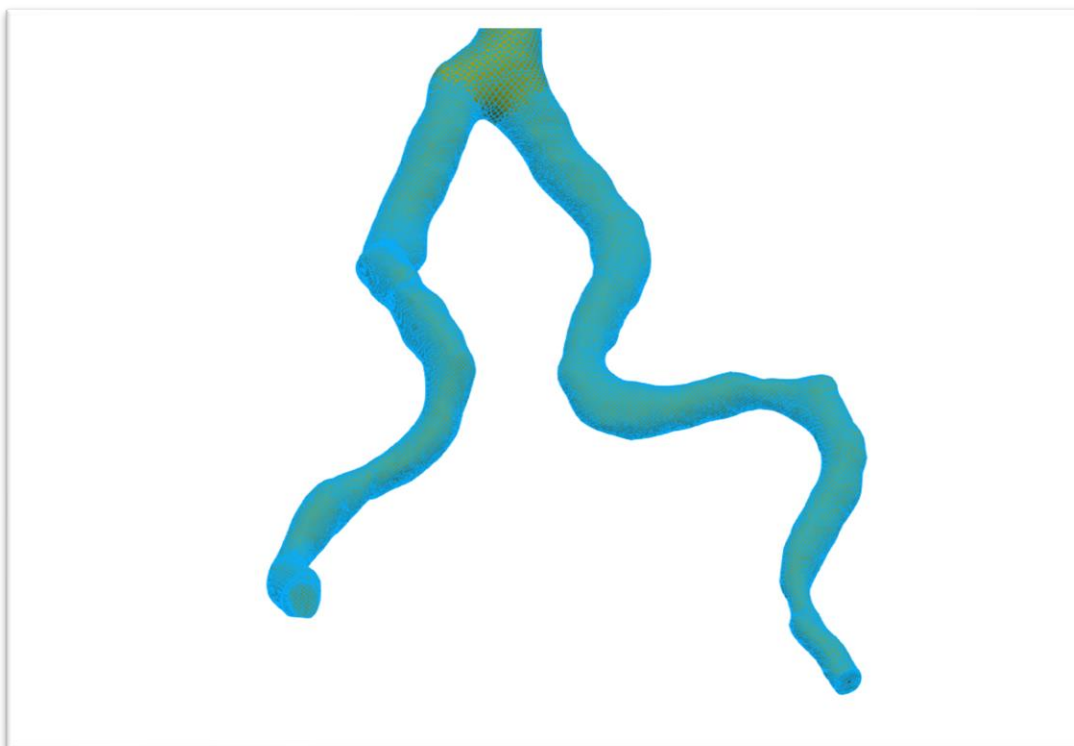
**Slika 5.5. Mreža na grani lijeve koronarne arterije pacijenta 1**



**Slika 5.6. Mreža konačnih volumena pacijenta 2**



**Slika 5.7. Mreža na ulazu u lijevu koronarnu arteriju pacijenta 2**



**Slika 5.8. Mreža na grani lijeve koronarne arterije pacijenta 2**

Iz prethodnih slika vidljivo je da grananjem mreža postaje gušća i profinjenija.

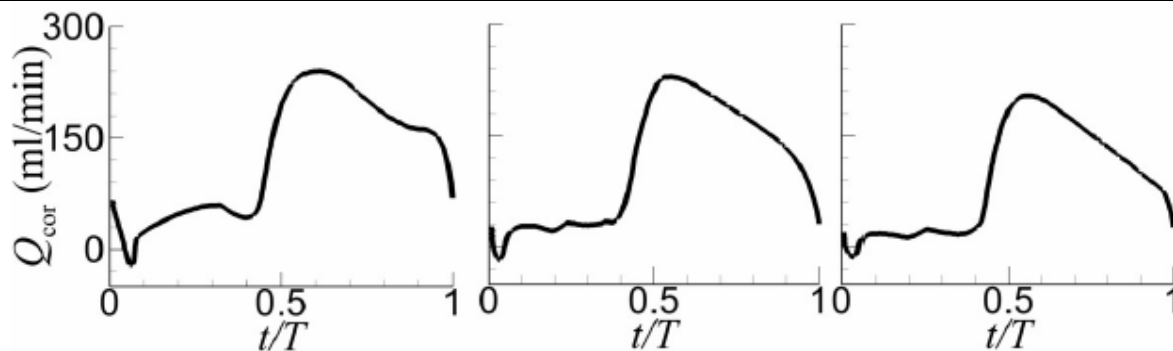
## 5.2. Rubni uvjeti

Postavljanje rubnih uvjeta jedan je od najvažnijih zadataka prilikom provođenja numeričke simulacije. Rubni uvjeti bitno utječu na rješenja jednadžbi strujanja, stoga je potrebno pravilno odabrati rubne uvjete da bi se što vjerodostojnije prikazalo stvarno ponašanje u prirodi. U domeni geometrijske mreže inicijaliziraju se polja nekom vrijednošću, a na rubne plohe se zadaju specifični rubni uvjeti. Kao što je već rečeno, radi se o nestlačivom nestacionarnom laminarnom strujanju, stoga je potrebno definirati veličinu brzine  $U$  i tlaka  $p$ . Na ulaznim i izlaznim presjecima postavljen je uvjet koji ne sadrži geometrijske i topološke informacije o mreži (eng. patch), dok je na stijenci arterija korišten rubni uvjet nepropusne stijenske (eng. wall). Kroz nepropusnu stijenu nema protoka fluida, a zbog viskoznosti fluida se formira granični sloj. U tablici 5.2 dan je popis granica i njima pripisanih rubnih uvjeta. Sve granice prema tablici 5.1 koje završavaju nastavkom *out* će radi jednostavnosti biti zvane *outlet*, granica koja završava nastavkom *in* će se zvati *inlet*, dok će *walls* granica ostati nepromijenjena.

**Tablica 5.2 Vrsta granica i rubni uvjeti**

Naziv granice	Vrsta granice	Rubni uvjet	
		$U$	$p$
inlet	patch	flowRateInletVelocity	zeroGradient
outlet	patch	zeroGradient	windkesselPressure
walls	wall	noSlip	zeroGradient

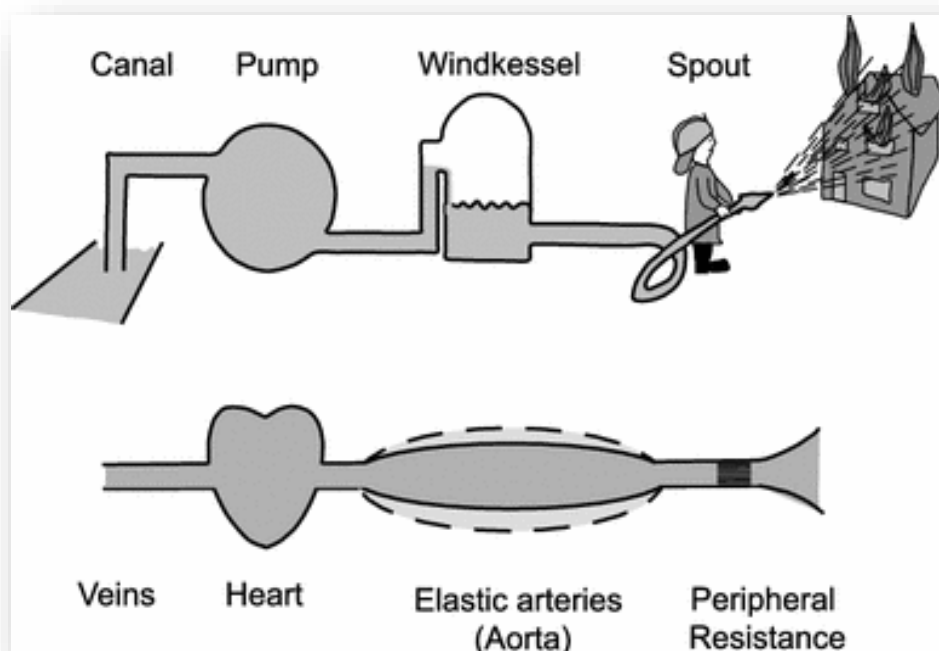
*noSlip* rubni uvjet govori da nema relativne brzine između krvi i stijenske. Kao što je već rečeno, strujanje je pulsirajućeg karaktera što znači da volumni protok na ulazu koronarne arterije ovisi o vremenu. Rubni uvjet *flowRateInletVelocity* uzima prethodno izračunate volumne protoke iz tablice zapisane u tekstualnoj datoteci, koji su različiti tijekom jednog vremenskog ciklusa  $T$ , i postavlja ih na ulazni presjek koronarne arterije. Time je rubni uvjet brzine zadan volumnim protokom koji je funkcija vremena. U slučaju različitog vremenskog koraka numeričke simulacije i podataka iz tablice, međuvrijednosti se linearno interpoliraju. Prikaz mjerenih volumnih protoka u koronarnim arterijama dan je na slici 5.9.



Slika 5.9. Volumni protok krvi u koronarnim arterijama za osobe u adolescentnoj, srednjovječnoj i staroj dobi tijekom jednog otkucaja srca

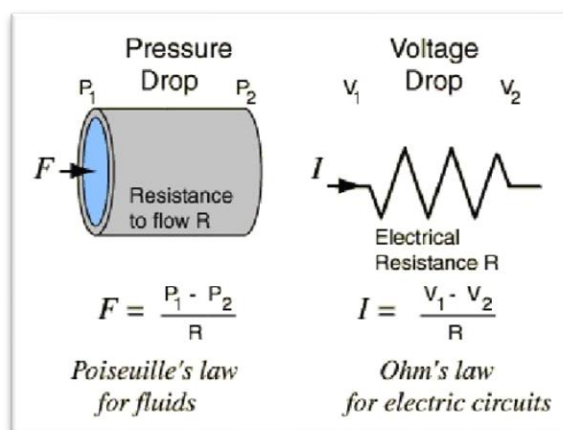
### 5.2.1. Windkessel model

Windkessel model je izraz koji se koristi u medicini kako bi se objasnio valni oblik arterijskog krvnog tlaka u smislu interakcije udarnog volumena srca, podatljivosti aorte i velikih elastičnih arterija te otpora manjih arterija i arteriola. Windkessel u doslovnom prijevodu s njemačkog označuje zračnu komoru. Model je krajem 19. stoljeća razvio njemački fiziolog Otto Frank nastojeći opisati srce i arterijski sustav kao zatvoreni hidraulički krug. Po njegovoj analogiji, krug je sadržavao pumpu za vodu spojenu na zračnu komoru. Sustav je ispunjen vodom, osim džepa zraka u zračnoj komori. Pumpanjem vode istovremeno se tlači zrak u zračnoj komori koji zauzvrat potiskuje vodu van iz spremnika. Shema je prikazana na slici 5.10.



Slika 5.10. Shema Windkessel modela [15]

Ova analogija podsjeća na mehaniku rada srca. Windkessel modeli obično se koriste za predstavljanje opterećenja koje srce preuzima tijekom srčanog ciklusa. Povezuje krvni tlak i protok krvi u aorti, a karakterizira arterijsku podatljivost, periferni otpor zalistaka i inerciju protoka krvi. To je važno u kontekstu razvoja mehaničkih pomagala za rad srca, uređaja koji povezuju rad srca i pluća te učinka vazodilatatora ili vazokonstriktornih lijekova. U modelu srce predstavlja pumpu, dok tlačenje zraka predstavlja elastičnost i istežljivost arterija. Efekt tlačenja zraka se jednom riječju naziva podatljivost arterija. Sav otpor na koji krv nailazi dok teče kroz arterijski sustav naziva se periferni otpor. Windkessel model analogan je Poiseuilleovom zakonu za hidraulički sustav. Opisuje protok krvi kroz arterije kao i protok tekućine kroz cijev. Budući da postoji analogija između električnih i hidrauličkih veličina, za ove modele koriste se električne sheme u kojima električna struja odgovara protoku, a napon tlaku. Na slici 5.11 prikazan je ekvivalentni električni model.

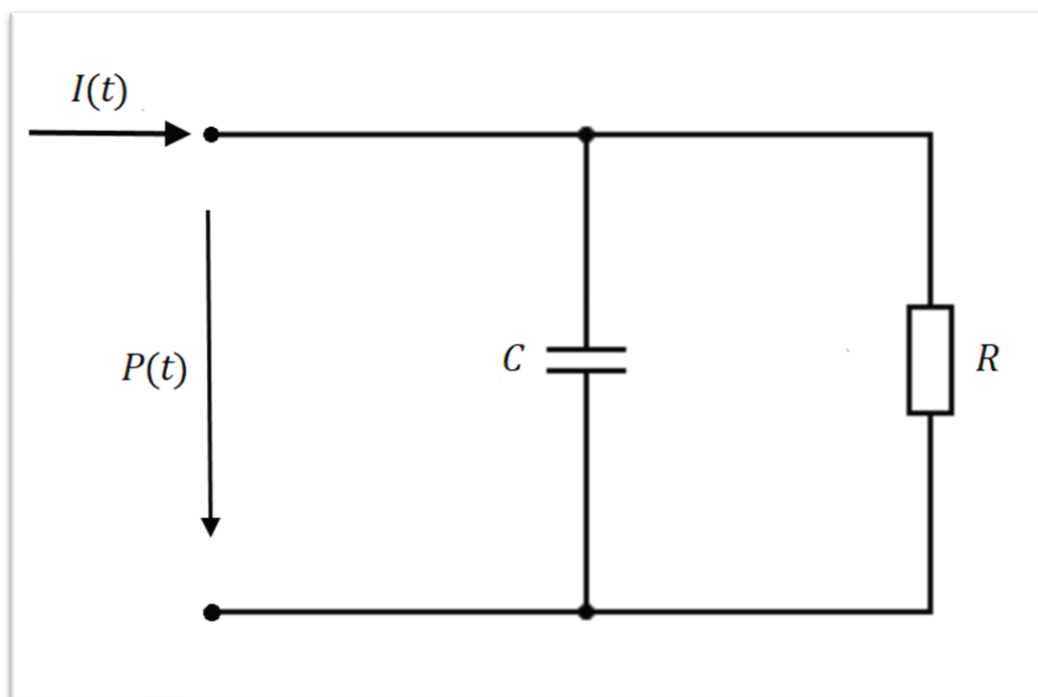


Slika 5.11. Ekvivalentna električna shema Windkessel modela [16]

### 5.2.2. Windkessel model s 2 elementa

Windkessel model s 2 elementa najjednostavniji je Windkessel model koji opisuje hemodinamiku srca. Tijekom srčanog ciklusa uzima u obzir učinak podatljivosti arterija i ukupni periferni otpor. U analognom električnom krugu, podatljivost arterija predstavljena je kao kondenzator  $C$  ( $\text{cm}^3/\text{mmHg}$ ) sa svojstvima pohrane električnog naboja, dok je periferni otpor predstavljen kao otpornik  $R$  ( $\text{mmHg s}/\text{cm}^3$ ) koji rasipa energiju. Kao što je već rečeno, protok krvi iz srca ( $\text{cm}^3/\text{s}$ ) analogan je protoku struje  $I(t)$  u krugu, a krvni tlak u aorti  $P(t)$  ( $\text{mmHg}$ ) modeliran je kao vremenski promjenjiv električni potencijal tj. napon. Prikaz električne sheme dan je na slici 5.12. Uz prethodne pretpostavke i pretpostavku Poiseuilleovog zakon, odnos protoka i tlaka određen je diferencijalnom jednačbom:

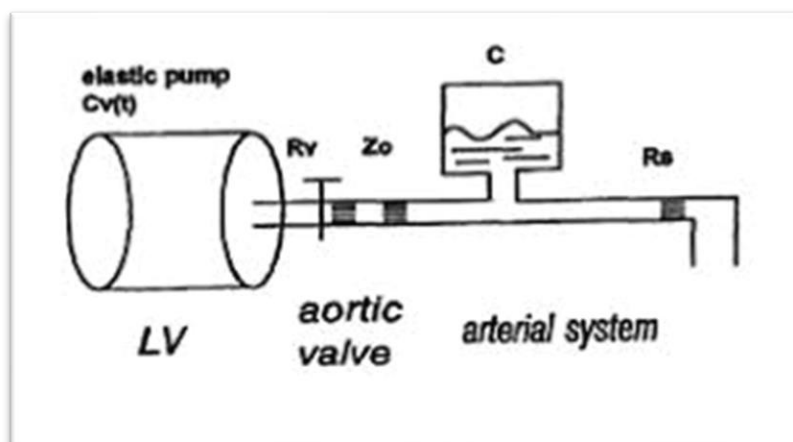
$$I(t) = \frac{P(t)}{R} + C \frac{dP(t)}{dt} \quad (5.1)$$



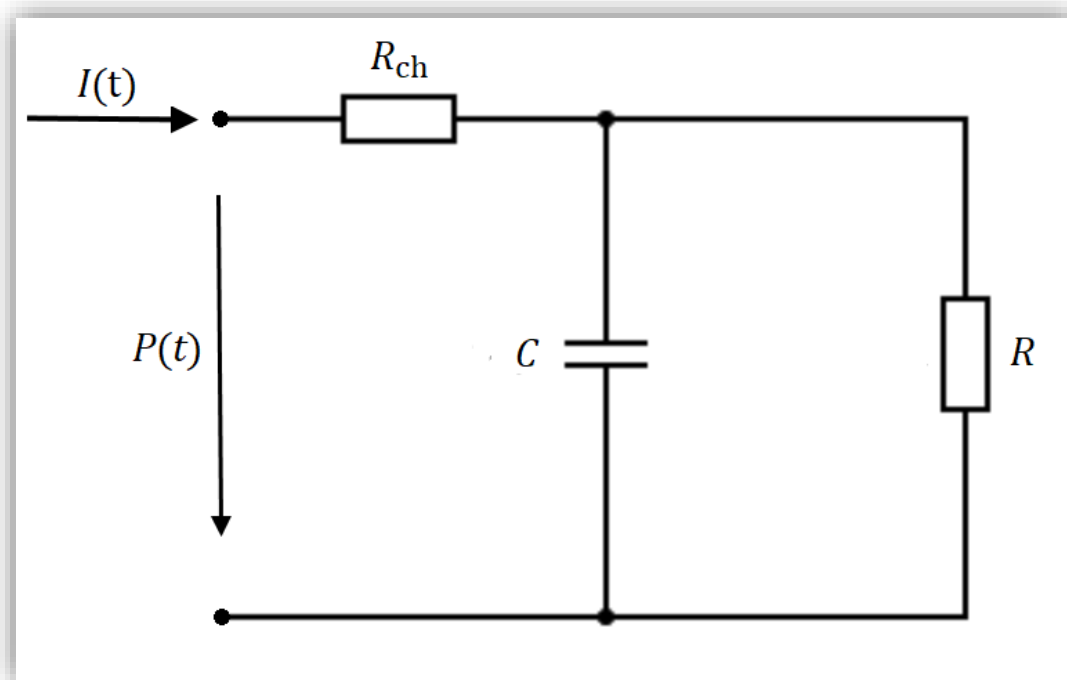
Slika 5.12. Električna shema Windkessel modela s 2 elementa

### 5.2.3. Windkessel model s 3 elementa

Windkessel model s 3 elementa, za razliku od modela s 2 elementa, simulira karakterističnu impedanciju proksimalne aorte. Dodavanjem otpornika u seriju objašnjava se otpor strujanju krvi zbog prolaska kroz aortni zalistak. Hidraulička i električna shema prikazane su na slikama 5.13 i 5.14.



Slika 5.13. Hidraulička shema Windkessel modela s 3 elementa [17]



Slika 5.14. Električna shema Windkessel modela s 3 elementa

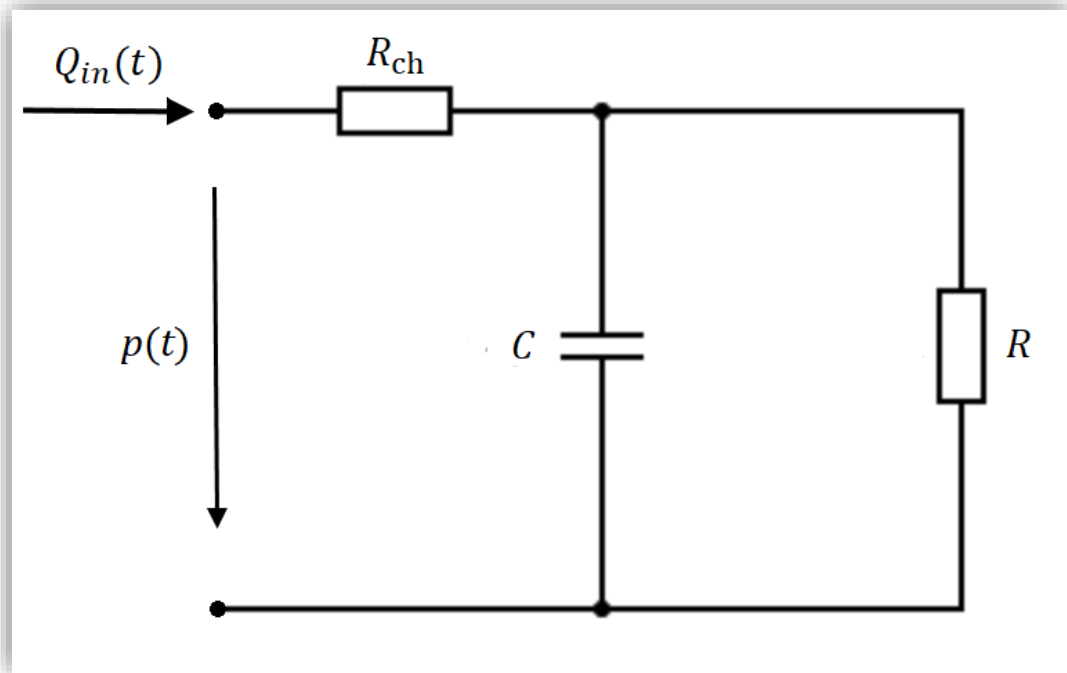
Diferencijalna jednadžba ovog modela glasi:

$$\left(1 + \frac{R_{ch}}{R}\right)I(t) + CR_{ch} \frac{dI(t)}{dt} = \frac{P(t)}{R} + C \frac{dP(t)}{dt} \quad (5.2)$$

#### 5.2.4. *windkessel*Pressure rubni uvjet

Modeliranje rubnih uvjeta na izlaznim presjecima napravljeno je pomoću Windkessel modela s 3 elementa. Sastoji se od otpora  $R$  i  $R_{ch}$  te kapaciteta  $C$ .  $R$  predstavlja periferni otpor tj. otpor svih manjih arterija, arteriola i kapilara u koronarnom stablu te se smatra primarnim otporom strujanju.  $R_{ch}$  predstavlja karakterističnu impedanciju proksimalne aorte tj. predstavlja otpor strujanju zbog prolaska kroz aortni zalistak koji je tijekom sistole otvoren, a tijekom dijastole zatvoren. Kapacitet  $C$  predstavlja podatljivost arterijskog stabla, a u rubnom uvjetu označuje kapacitet krvnih žila promatranom sustavu. Električna shema sustava dana je na slici 5.15 te odgovara sustavu na slici 5.14.





Slika 5.15. Električna shema sustava

Brzina smanjenja tlaka tijekom dijastole definirana je jednačbom:

$$p(t) = p_d \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.3)$$

u kojoj  $p_d$  označava dijastolički tlak,  $t$  označava vrijeme, a  $\tau$  vremensku konstantu. Eksperimentalne vrijednosti vremenske konstante  $\tau$  pokazuju da se kreće u vrijednostima  $\tau \approx 0,8 \div 1,5$  s. U sklopu ovoga rada uzeto je da vrijedi:

$$\tau = T = 1 \text{ s} \quad (5.4)$$

U cijelom arterijskom stablu pretpostavljen je srednji tlak  $p_{sr}=13332 \text{ Pa}=100 \text{ mmHg}$  i predstavlja relativno dobru aproksimaciju stvarnosti.

Periferni otpor  $R_{per}$  u cijelom koronarnom stablu jednak je:

$$R_{per} = \frac{p_{sr}}{Q_{sr}} = \frac{13332}{2,00855 \cdot 10^{-6}} = 6,63762 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4\text{s}} \quad (5.5)$$

Totalni otpor  $R_{tot}$  predstavlja otpore na izlazima iz koronarnih arterija. Otpori na izlazima računaju se preko omjera protoka. Što je protok veći, to je otpor manji.

Uz pretpostavku  $p_{sr} = \text{konst.}$  vrijedi:

$$p_{sr} = R_{\text{tot}}Q_{\text{out}} = R_1Q_1 = R_2Q_2 = \dots = R_nQ_n \quad (5.6)$$

Na svim izlazima iz koronarne arterije su pretpostavljeni jednaki protoci, stoga vrijedi:

$$Q_{\text{out}} = Q_n = \frac{1}{n}Q_{sr} = \frac{1}{9}Q_{sr} \quad (5.7)$$

u kojoj  $n$  predstavlja broj izlaza iz koronarne arterije.

Iz jednadžbe (5.7) slijedi izraz za otpore na izlazu  $R_{\text{tot}}$ :

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{ch}} + R = \frac{p_{sr}}{Q_{\text{out}}} = \frac{p_{sr}}{\frac{1}{9}Q_{sr}} = 9 \cdot R_{\text{per}} = 5,97386 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^4\text{s}} \quad (5.8)$$

Karakteristična impedancija  $R_{\text{ch}}$  poprima vrijednosti u rasponu  $R_{\text{ch}} = 0,03 \div 0,07R_{\text{tot}}$ .

U ovom radu uzeta je vrijednost:

$$R_{\text{ch}} = 0,05 \cdot R_{\text{tot}} = 2,98693 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4\text{s}} \quad (5.9)$$

Iz jednadžbe (5.8) slijedi vrijednost perifernog otpora  $R$ :

$$R = R_{\text{tot}} - R_{\text{ch}} = 5,675167 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^4\text{s}} \quad (5.10)$$

Umnožak totalnog otpora  $R_{\text{tot}}$  i podatljivosti  $C$  jednak je vremenskoj konstanti  $\tau$ .

$$\tau = R_{\text{tot}} \cdot C \quad (5.11)$$

Iz jednadžbe (5.11) slijedi vrijednost podatljivosti arterija  $C$ :

$$C = \frac{\tau}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{5,97386 \cdot 10^{10}} = 1,67396 \cdot 10^{-11} \frac{\text{s}^2\text{m}^4}{\text{kg}} \quad (5.12)$$

Time su određeni svi parametri Windkessel rubnog uvjeta.

### 5.3. Postavke numeričkog rješavača

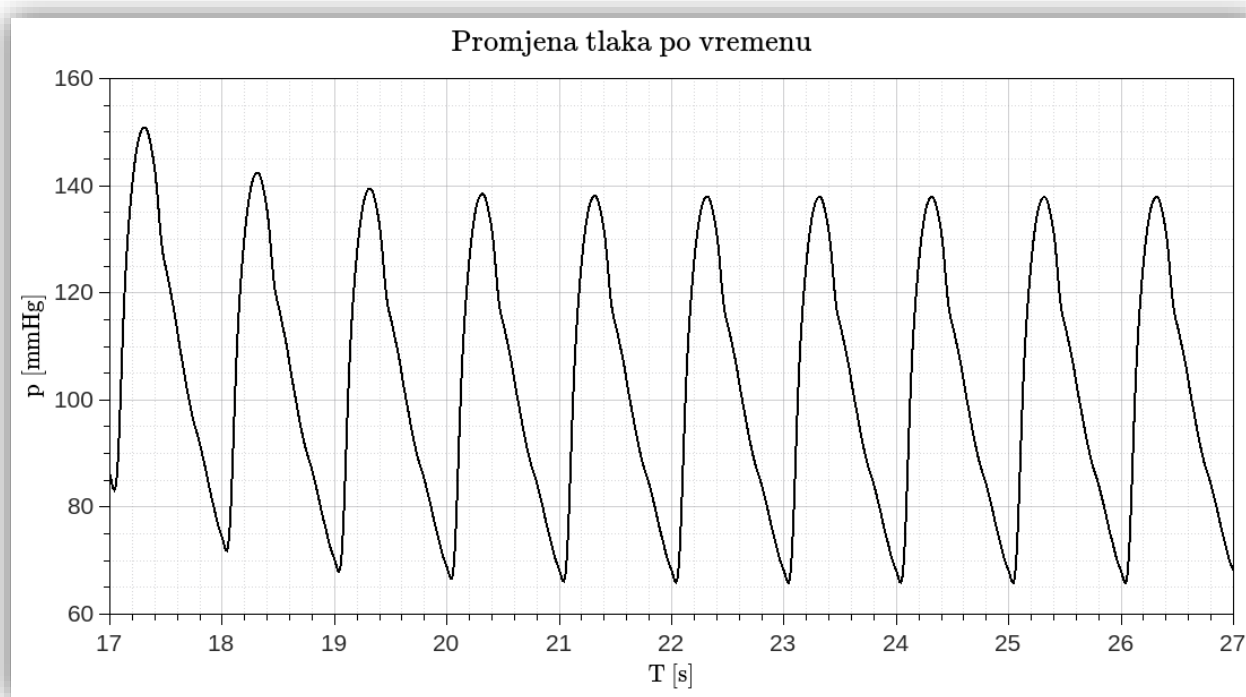
Proračuni su provedeni koristeći numerički rješavač *pimpleFoam* za nestlačiva nestacionarna strujanja. PIMPLE algoritam je kombinacija PISO (eng. Pressure Implicit with Splitting of Operator) i SIMPLE (eng. Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) algoritma. SIMPLE algoritam se koristi za stacionarna, dok se PISO koristi za nestacionarna strujanja. PIMPLE algoritam može se zamisliti kao SIMPLE za svaki vremenski korak i iz toga razloga se postiže bolja stabilnost nad PISO, posebno kad se radi o velikim vremenskim koracima u kojima maksimalni Courantov broj može neprekidno biti iznad 1 ili kada je priroda rješenja svojstveno nestabilna. PIMPLE algoritam daje vezu između tlaka i brzine, dok GAMG (eng. Geometric Agglomerated Algebraic Multigrid Solver) rješavač vrši korekciju tlaka. Oba proračuna provedena su u ukupno 27 vremenskih ciklusa u kojima je zadovoljen uvjet da rezidual tlaka padne ispod  $\varepsilon < 10^{-3}$ , a reziduali brzine ispod  $\varepsilon < 10^{-4}$  te se rezultati ustale u trećoj tj. četvrtoj značajnoj znamenici. Proračun je definiran implicitnom *backward* vremenskom shemom, gradijenti *cellLimited leastSquares* shemom, a divergens brzine definiran je pomoću *bounded Gauss linearUpwindV leastSquares* sheme. Sve sheme su drugog reda točnosti. Nedostatak shema prvog reda točnosti jest da unose „lažnu“ difuziju u numeričko rješenje. Dobra strana je da nikad neće davati nefizikalna oscilatorna rješenja, niti će praviti probleme vezane uz konvergenciju numeričkog postupka. Sheme drugog i višeg reda točnosti ne unose u rješenje numeričku difuziju, ali su neomeđene, što znači da u blizini diskontinuiteta mogu generirati nefizikalno oscilirajuće rješenje koje dovodi do divergencije numeričkog postupka. U slučaju divergencije rješenja potrebno je korigirati podrelaksacijske faktore u *fvSolution* datoteci kojima se ograničava promjena vrijednosti fizikalne veličine iz iteracije u iteraciju. Vrijednost podrelaksacijskih faktora se kreće između 0 i 1. Preniske vrijednosti usporit će konvergenciju, a previsoke vrijednosti mogu za posljedicu imati divergenciju numeričkog postupka. Za jednadžbe brzine korištena je vrijednost faktora od 0,5 dok je za jednadžbe tlaka korištena vrijednost od 0,2. U slučaju divergencije numeričkog postupka podrelaksacijske faktore treba smanjivati. Time su definirane postavke numeričke simulacije i proračun može započeti.

## 6. PRIKAZ I ANALIZA REZULTATA PRORAČUNA

Proračuni strujanja izvedeni su u programskom paketu OpenFOAM. Rezultati su dobiveni za 27 vremenskih ciklusa. Za grafiku i vizualizaciju simulacije korišten je programski paket ParaView, slobodno dostupan softver otvorenog koda te standardan za post-procesiranje rezultata u računalnoj dinamici fluida. Za crtanje grafova je zbog svoje jednostavnosti korišten programski paket QtiPlot, višeploformski softver za interaktivno znanstveno grafičko prikazivanje i analizu podataka.

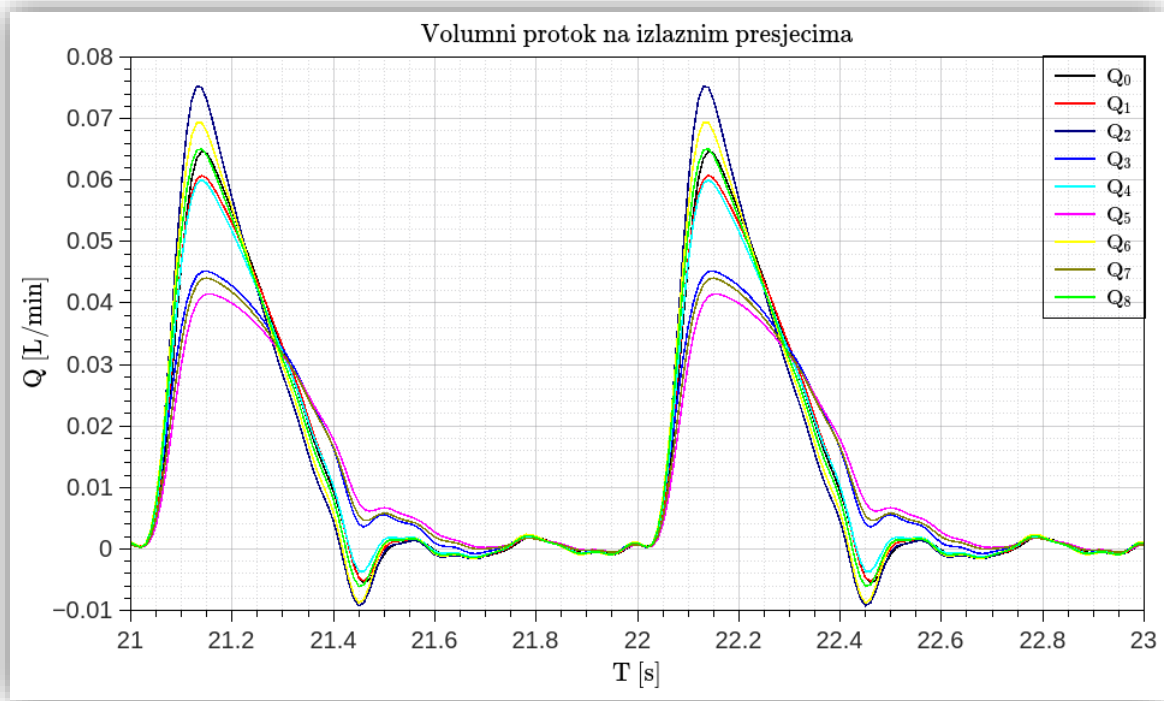
### 6.1. Prikaz fizikalnih veličina na ulaznim i izlaznim presjecima

Za strujanje krvi u kardiovaskularnom sustavu karakteristična je nestacionarnost, ali i periodičnost. To znači da će strujanje biti pulsirajuće te će se ponavljati iz ciklusa u ciklus koji ima svoj određeni period  $T$ . Za postizanje periodičnosti potrebno je provesti simulaciju tijekom dovoljno dugo vremena integracije sve dok ne iščezne utjecaj početnih uvjeta. Periodičnost strujanja postignuta je nakon 20 vremenskih ciklusa, a rezultati fizikalnih veličina prikazani su za dva vremenska ciklusa  $T = 21 \div 23$  s.

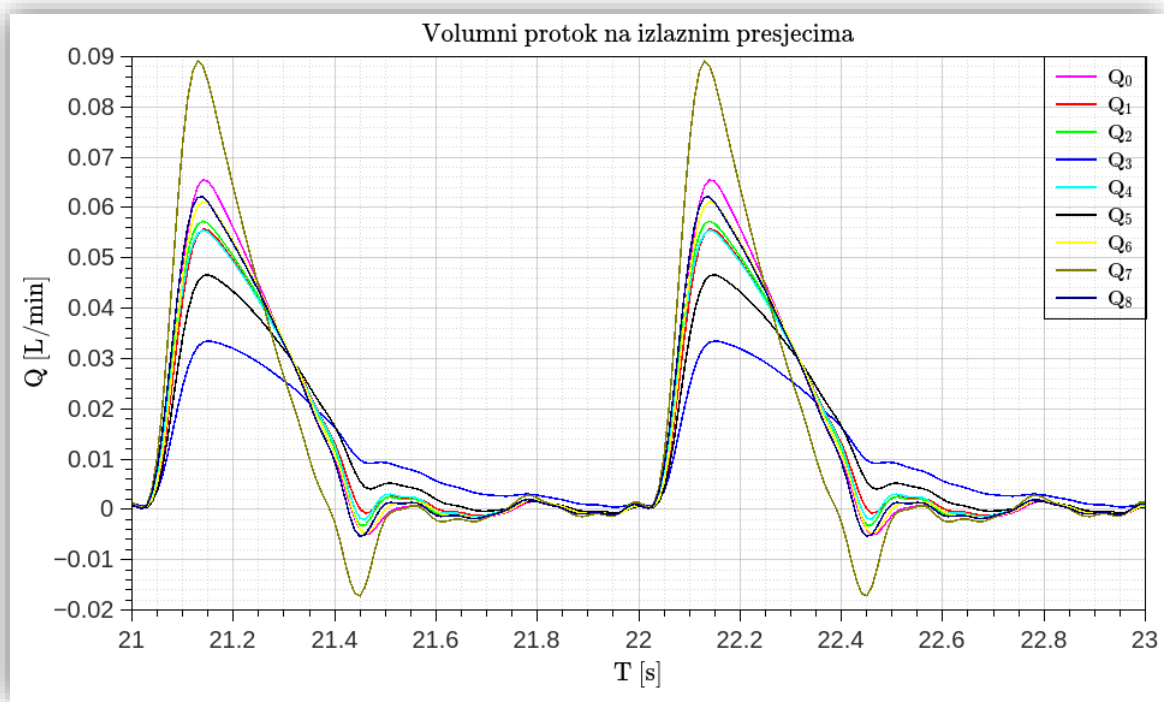


Slika 6.1. Prikaz konvergencije periodičnosti rješenja

**6.1.1. Volumni protok  $Q$** **Slika 6.2. Volumni protok na ulaznom presjeku - pacijent 1****Slika 6.3. Volumni protok na ulaznom presjeku - pacijent 2**



Slika 6.4. Volumni protok na izlaznim presjecima - pacijent 1



Slika 6.5. Volumni protok na izlaznim presjecima - pacijent 2

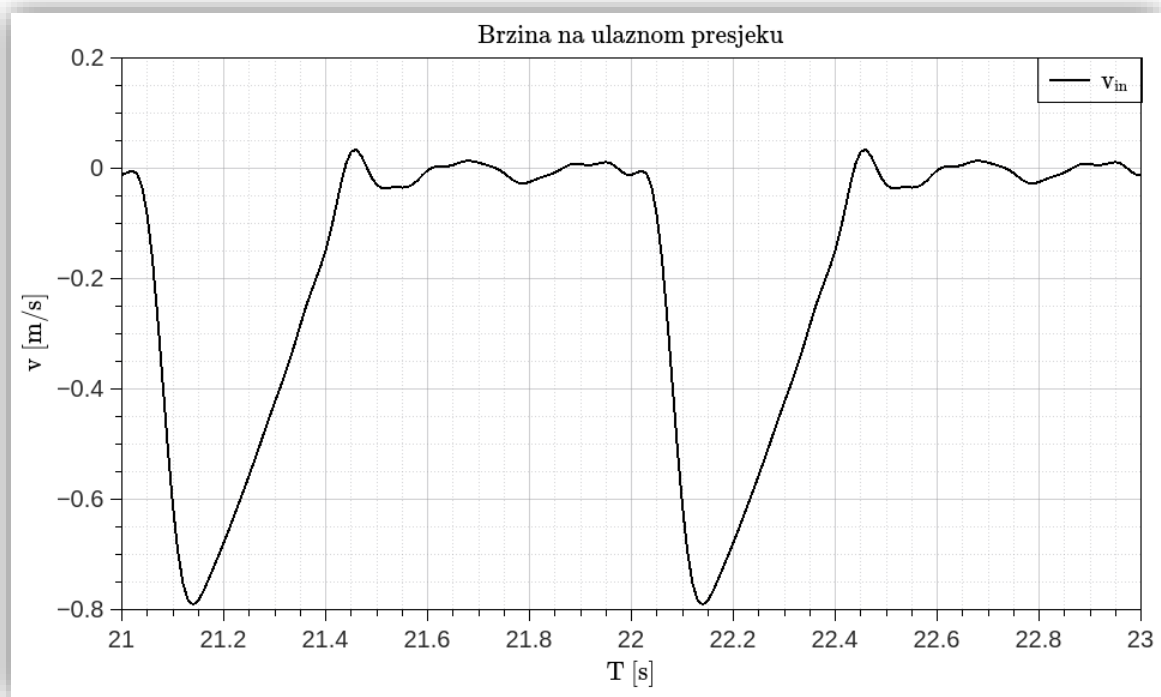
Potrebno je uzeti u obzir da krivulje predstavljaju srednje integralne vrijednosti volumnih protoka po površinama presjeka, a grafovi njihovu vremensku promjenu. Iz slika 6.2 i 6.3 vidljivo je da su ulazni protoci kvalitativno i kvantitativno jednaki što bi i trebalo biti tako budući da su zadani istom funkcijom. Izlazni presjeci na slikama 6.4 i 6.5 pokazuju samo kvalitativnu sličnost, dok su kvantitativne vrijednosti istog reda veličine što i ima smisla zbog razlike u geometriji pacijenata. Potrebno je naglasiti da prethodne slike ne prikazuju stvarnu sliku strujanja kroz koronarne arterije. U ovom radu računato je s 2% ulaznog protoka aorte što odgovara realnosti strujanja, ali valja primijetiti da je vremenski profil koronarnog protoka bitno različit od profila ulaznog protoka i profila u sistemskim arterijama. To se može objasniti činjenicom da se koronarne arterije nalaze u mišićnoj stijenci srca pa kad je srce u fazi kontrakcije, dolazi do stezanja koronarnih arterija pa je njihov otpor strujanju krvi velik, a u fazi dijastole, kada je srčani mišić relaksiran, otpor se smanjuje i protok raste. Dolazi do paradoksa, pri visokom tlaku u korijenu aorte (za vrijeme kontrakcije srca) je koronarni protok mali, a tijekom relaksacije srca, koronarni protok raste. To znači da se otpor koronarnih arterija mijenja tijekom srčanog takta (moguće da im se značajnije mijenja i promjer), što nije slučaj kod arterija u tijelu, gdje možemo računati s konstantnim perifernim otporom. Stoga je i model strujanja u koronarnim arterijama složeniji od modela strujanja u sistemskim arterijama. Slika 5.9 iz prethodnog poglavlja pokazuje stvarni koronarni protok, što znači da će vrijednosti fizikalnih veličina razlikovati o dijelu vremenskog perioda u kojem se nalaze od onih stvarnih.

### 6.1.2. Brzina $v$

Brzine, kao i volumni protok, također predstavljaju srednje integralne vrijednosti po površinama presjeka. Valja primijetiti da su grafovi brzina kvalitativno slični onima od volumnog protoka što je i logično budući da se brzina dobije dijeljenjem protoka s površinom presjeka.

$$\bar{v}_n = \frac{\bar{Q}_n}{A_n} \quad (6.1)$$

u kojoj  $n$  označuje indeks poprečnog presjeka. Grafovi vremenske promjene brzina su prikazani na sljedećim slikama.

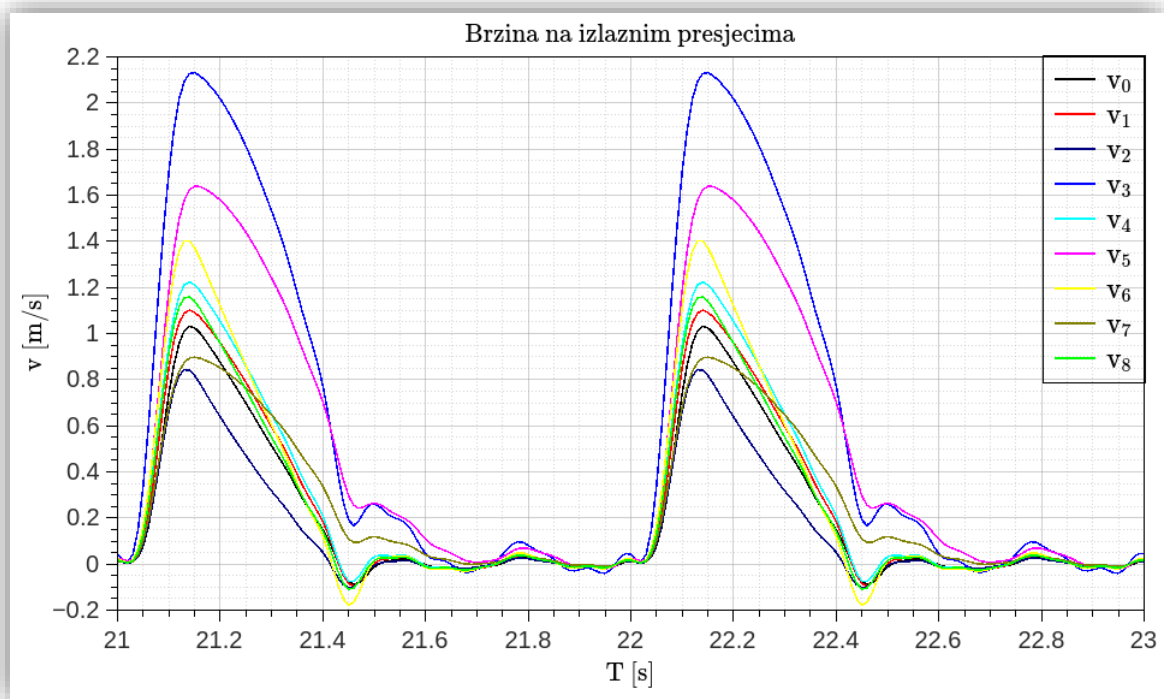


Slika 6.6. Brzina na ulaznom presjeku – pacijent 1

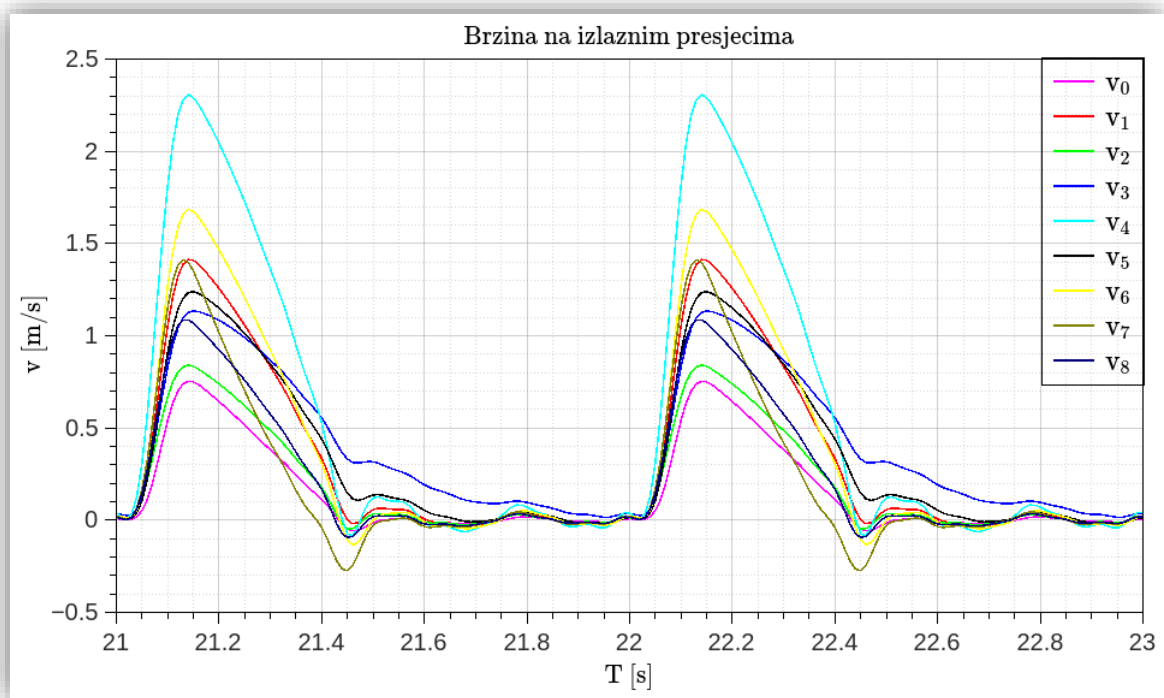


Slika 6.7. Brzina na ulaznom presjeku - pacijent 2





Slika 6.8. Brzina na izlaznim presjecima - pacijent 1



Slika 6.9. Brzina na izlaznim presjecima - pacijent 2

**Tablica 6.1. Vrijednosti srednjih brzina po površini presjeka - pacijent 1**

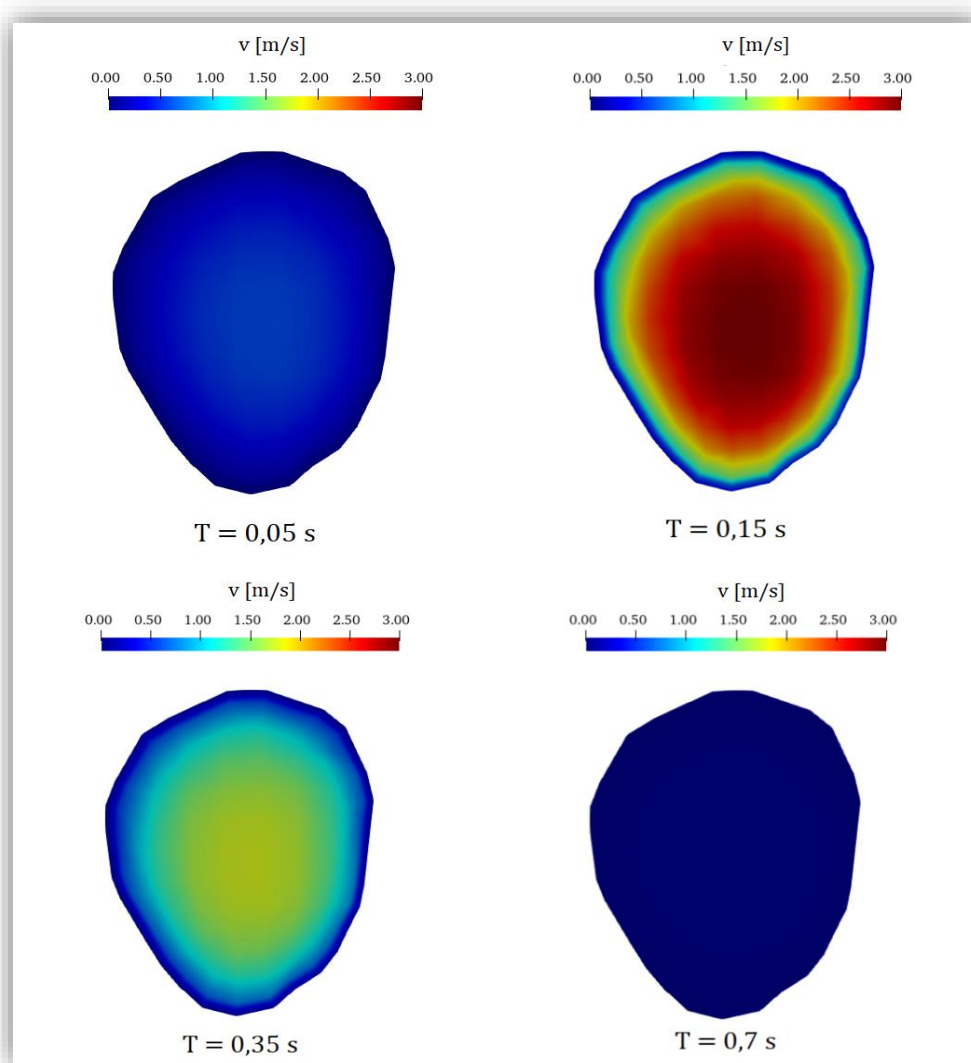
Presjek	$v_{\max}$ [m/s]	$v_{\text{avg}}$ [m/s]	$v_{\min}$ [m/s]
Ulaz	0,0341	-0,1806	-0,7911
Izlaz 0	1,0313	0,2156	-0,0875
Izlaz 1	1,1007	0,2442	-0,0948
Izlaz 2	0,8429	0,1549	-0,1035
Izlaz 3	2,1314	0,6107	-0,03998
Izlaz 4	1,2232	0,2734	-0,0752
Izlaz 5	1,6386	0,4975	-0,0198
Izlaz 6	1,4014	0,2772	-0,1774
Izlaz 7	0,8972	0,2594	0,0111
Izlaz 8	1,1593	0,2423	-0,1082
Izlaz <sub>avg</sub>	1,26956	0,30836	-0,07725

**Tablica 6.2. Vrijednosti srednjih brzina po površini presjeka - pacijent 2**

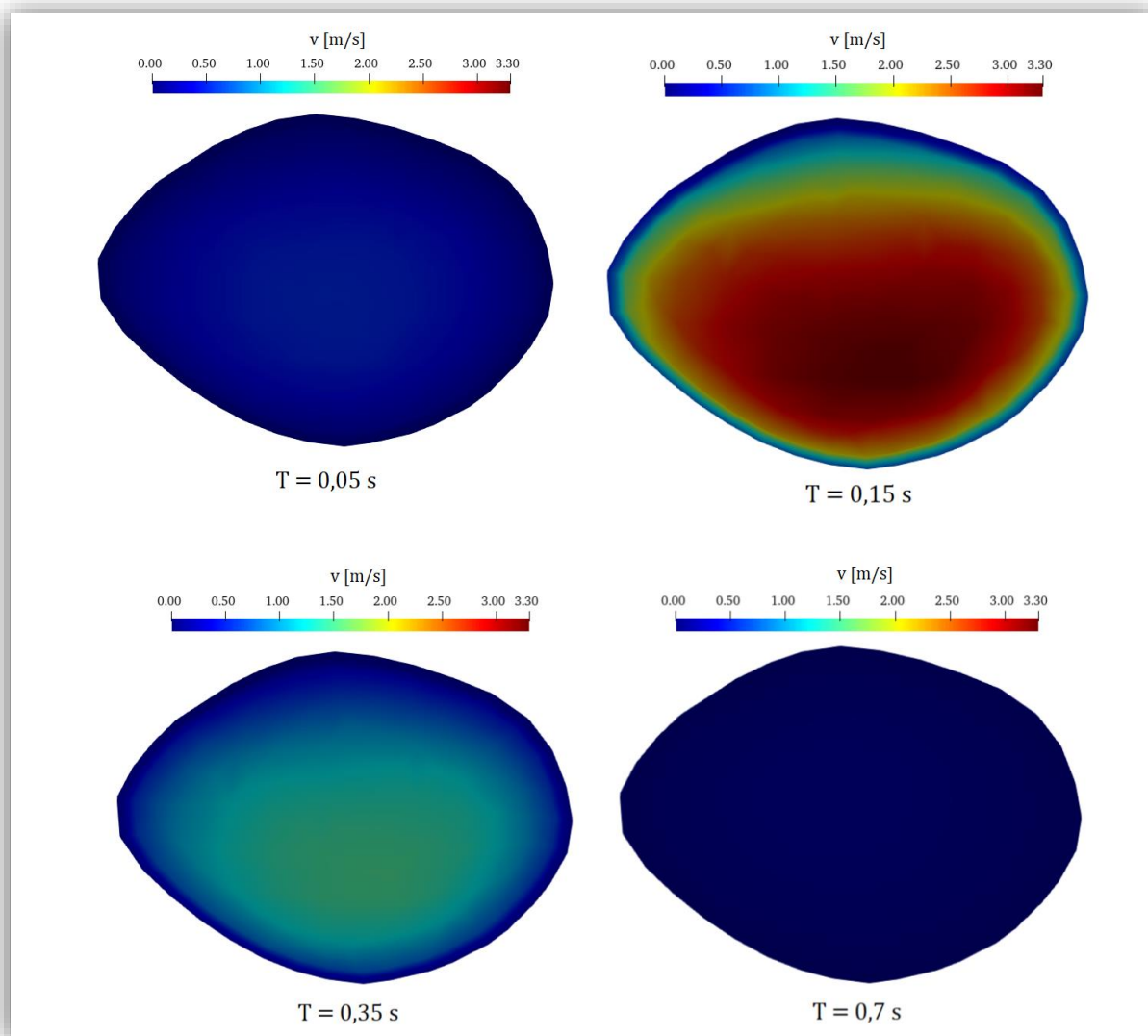
Presjek	$v_{\max}$ [m/s]	$v_{\text{avg}}$ [m/s]	$v_{\min}$ [m/s]
Ulaz	0,0283	-0,1501	-0,6576
Izlaz 0	0,7535	0,157	-0,0579
Izlaz 1	1,4127	0,337	-0,03093
Izlaz 2	0,8405	0,1977	-0,04627
Izlaz 3	1,1345	0,3974	0,01578
Izlaz 4	2,3066	0,555	-0,0832
Izlaz 5	1,2388	0,3416	-0,01796
Izlaz 6	1,6841	0,3727	-0,13404
Izlaz 7	1,4135	0,2277	-0,2726
Izlaz 8	1,0862	0,2384	-0,09398
Izlaz <sub>avg</sub>	1,31893	0,31383	-0,08012

Iz grafova ulaznih brzina (također i volumnih protoka) vidljivo je da one poprimaju negativne vrijednosti, dok izlazne brzine poprimaju pozitivne vrijednosti. To se jednostavno objašnjava tako što strujanje teče suprotno od vanjske normale ulaznog presjeka, tj. u smjeru vanjske normale izlaznih presjeka.

Brzina na ulazu pacijenta 1 poprima veće vrijednosti od pacijenta 2, iako su zadani jednaki ulazni protoci. Razlika dolazi zbog različite ulazne površine čiji omjer je  $\frac{A_{in2}}{A_{in1}} = 1,203$ . Na izlazima su zadani jednaki otpori strujanju, ali zbog razlike u geometriji dobivene se drugačije vrijednosti. Zbog toga je najbolje pratiti prosječne vrijednosti za sve izlaze (Izlaz<sub>avg</sub>) kako bi dobili informacije o razlikama između dva pacijenta. Iz tablica 6.1 i 6.2 vidi se da je prosječna brzina na izlazima  $\sim 0,31$  m/s za oba pacijenta, dok se minimalna i maksimalna brzina zanemarivo razlikuju. Valja napomenuti da brojčane vrijednosti izlaza ne predstavljaju ekvivalentne grane žila između pacijenata te se zbog toga ne uspoređuju pojedini izlazi zasebno.



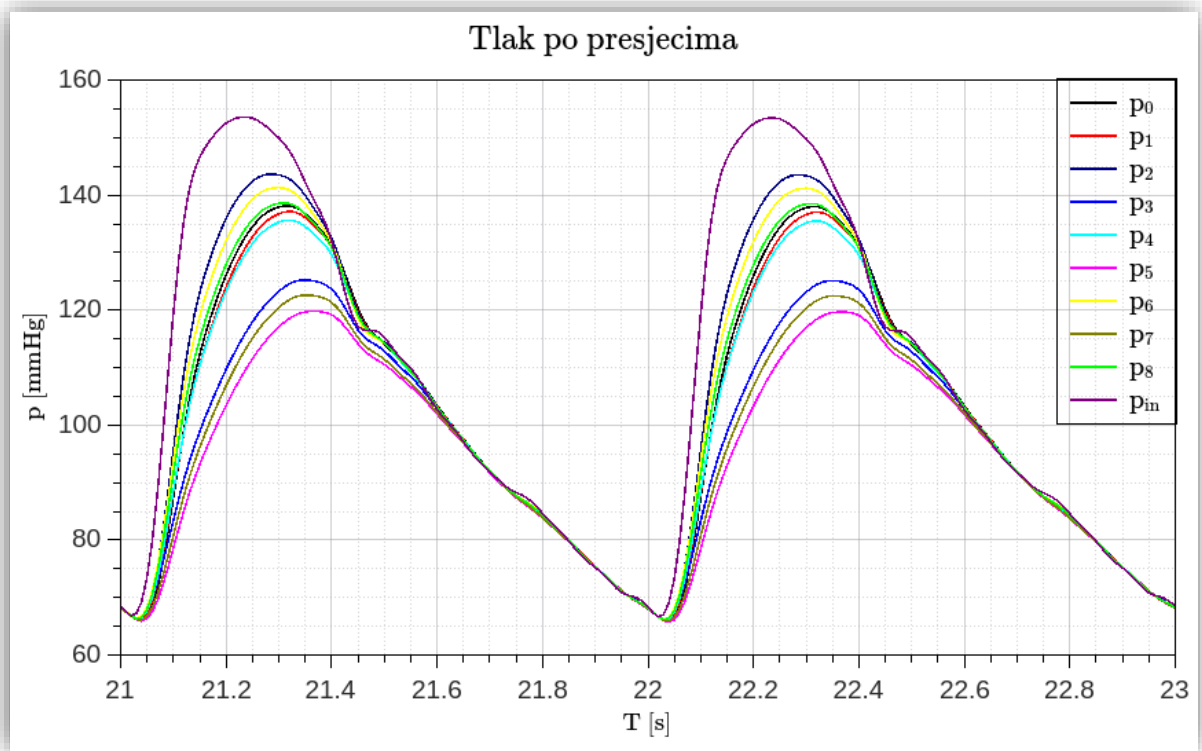
**Slika 6.10. Prikaz promjene polja brzine na izlazu 3 - pacijent 1**



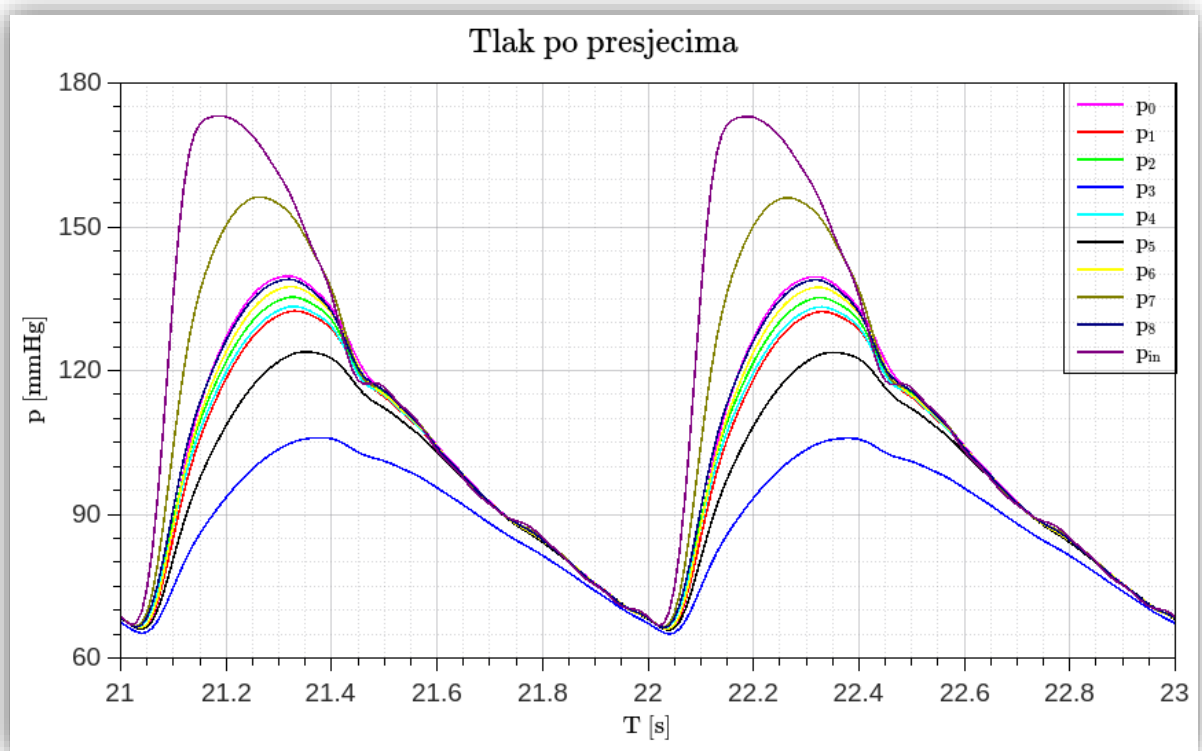
**Slika 6.11. Prikaz promjene polja brzine na izlazu 4 - pacijent 2**

Slike 6.11 i 6.12 prikazuju vremensku promjenu polja brzine na presjecima s maksimalnom promjenom brzine. Vremenski trenutak  $T = 0,05$  s označuje početak kontrakcije srca u kojem se može vidjeti relativno niska brzina po presjeku. U trenutku  $T = 0,15$  s dolazi maksimuma brzine te taj trenutak predstavlja vrhunac sistole. Trenutak  $T = 0,35$  s predstavlja trenutak prije završetka sistole i početka dijastole. Može se vidjeti da dolazi do brzog pada vrijednosti brzine koja u ovom trenutku iznosi oko pola maksimalne brzine. U trenutku  $T = 0,4 \div 0,45$  s započinje dijastola tj. relaksacija srca te iz grafova na slikama 6.8 i 6.9 vidi se da brzine na izlazima teže prema nuli. Trenutak  $T = 0,7$  s predstavlja sredinu dijastole i može se vidjeti da su brzine približno nula što označava da nema protoka kroz površinu.

6.1.3. Tlak  $p$



Slika 6.12. Tlak po presjecima - pacijent 1



Slika 6.13. Tlak po presjecima - pacijent 2

**Tablica 6.3. Srednje vrijednosti tlaka po površinama presjeka – pacijent 1**

Presjek	$p_{\max}$ [mmHg]	$p_{\text{avg}}$ [mmHg]	$p_{\min}$ [mmHg]
Ulaz	153,56	108,29	66,66
Izlaz 0	137,98	101,38	65,94
Izlaz 1	137,17	101,25	84,26
Izlaz 2	143,64	103,95	66,19
Izlaz 3	125,22	97,11	66,19
Izlaz 4	135,65	100,92	66,13
Izlaz 5	119,8	94,62	65,73
Izlaz 6	141,3	103,03	66,21
Izlaz 7	122,58	95,83	65,94
Izlaz 8	138,64	102,09	66,17
Izlaz <sub>avg</sub>	133,55	100,02	68,084

**Tablica 6.4. Srednje vrijednosti tlaka po površinama presjeka – pacijent 2**

Presjek	$p_{\max}$ [mmHg]	$p_{\text{avg}}$ [mmHg]	$p_{\min}$ [mmHg]
Ulaz	173,17	113,56	66,76
Izlaz 0	139,7	102,37	65,95
Izlaz 1	132,44	99,86	66,06
Izlaz 2	135,33	101,1	66,31
Izlaz 3	106	88,24	65,01
Izlaz 4	133,4	100,34	66,26
Izlaz 5	123,9	96,54	66,08
Izlaz 6	137,51	101,58	66,08
Izlaz 7	156,22	108	66,4
Izlaz 8	139,04	102,38	66,31
Izlaz <sub>avg</sub>	133,727	100,046	66,05

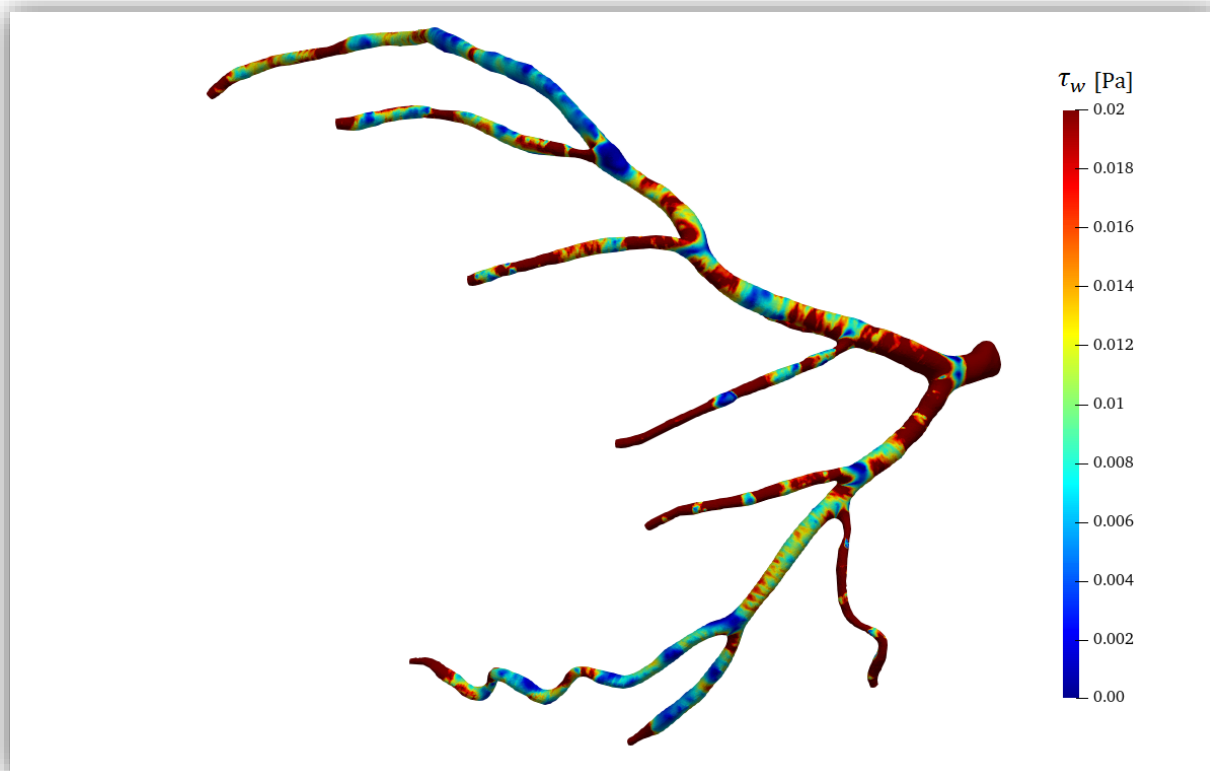
Ulazni tlak pacijenta 2 poprima veće vrijednosti od pacijenta 1. Razlog tome je što su na izlaznim presjecima zadani jednaki rubni uvjeti za oba pacijenta. Duljinske dimenzije koronarne arterije pacijenta 2 su veće od dimenzija pacijenta 1, stoga da bi se postigli jednaki uvjeti na izlazu potrebna je veća razlika tlaka između ulaza i izlaza kod pacijenta 2. To se može vidjeti u tablicama 6.3 i 6.4 kod kojih su prosječne izlazne vrijednosti tlaka svih grana ( $Izlaz_{avg}$ ) gotovo jednake za oba pacijenta.

Prosječna vrijednost tlaka iznosi 100 mmHg za oba pacijenta što relativno dobro opisuje stvarnu sliku tlaka, ali minimalni i maksimalni tlak kreće se između 66 i 133 mmHg (na ulazu 66 i 173) za razliku od stvarnog tlaka kod zdravog čovjeka koji se kreće u rasponu od 80 i 120 mmHg.

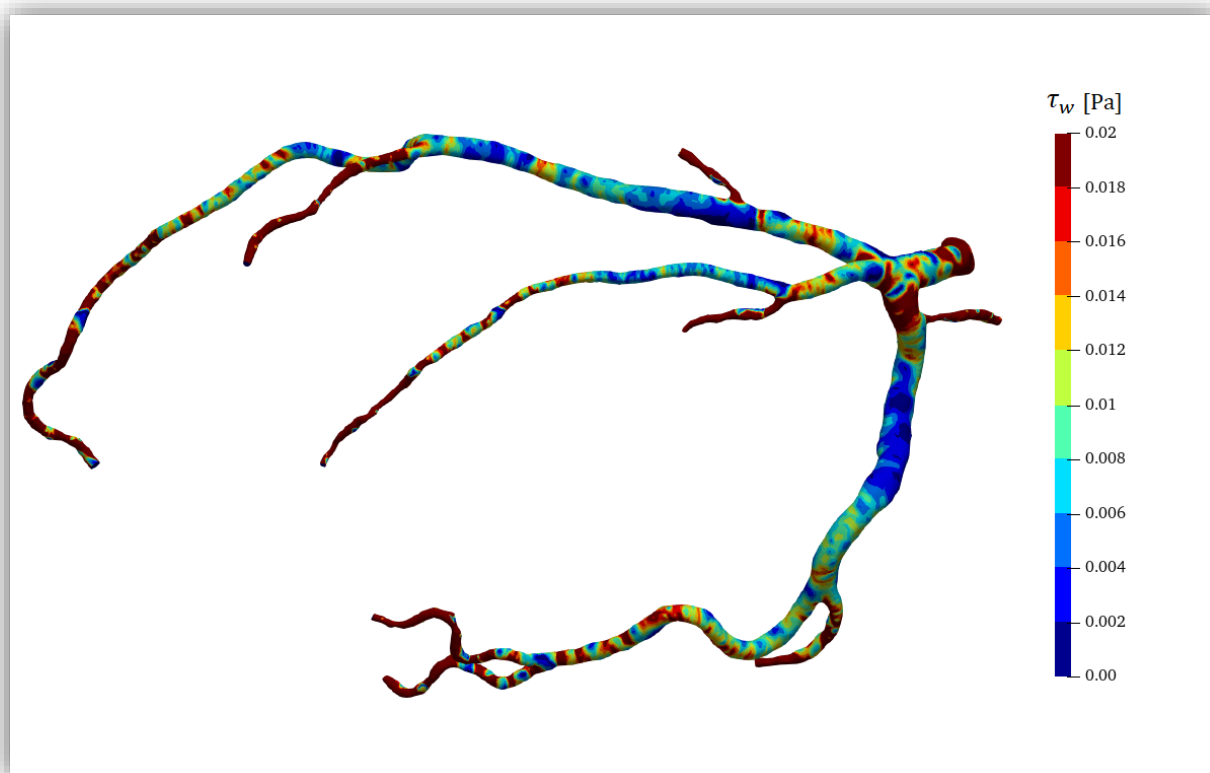
#### **6.1.4. Tangencijalno naprezanje $\tau_w$**

Tangencijalno naprezanje u krvnim žilama je mjera kojom se krv vuče po stijenci arterije, a računa se na temelju intrakoronarnog ultrazvuka i mjerenja protoka krvi. Normalno naprezanje tj. krvni tlak utječe na ljepljivost stanica te na nakupljanje leukocita i masnoća na arterijskim zidovima. Istraživanja pokazuju kako niske razine tangencijalnog naprezanja stvaraju pogodne uvjete za nakupljanje aterosklerotskog plaka. Nasuprot tome, unutar plaka se najčešće nalaze područja visokog tangencijalnog naprezanja. Zreli plak ima komponente vlaknaste kapice, gustog kalcija te nekrotične jezgre umirućih stanica i masti. Tanka kapica i nekrotične jezgre predstavljaju značajke ranjivosti plaka na pucanje. Cilj je identificirati „ranjivi plak“ koji će se vjerojatno raspršiti i stvoriti krvni ugrušak iza kojeg slijedi srčani ili moždani udar. Rezultati istraživanja pokazuju da su niske i visoke razine tangencijalnog naprezanja povezane s različitim stadijima ateroskleroze i da su za određeni stupanj plaka niske vrijednosti naprezanja povezane s većom ranjivošću plaka.

Sljedeće slike prikazat će vrijednosti tangencijalnog naprezanja za vrijeme vrhunca sistole pri kojem su gradijenti brzina najveći, stoga će i naprezanje na stijenci arterija biti najveće. Dan je prikaz u različitim skalama kako bi se što bolje uočile razlike u vrijednostima naprezanja.

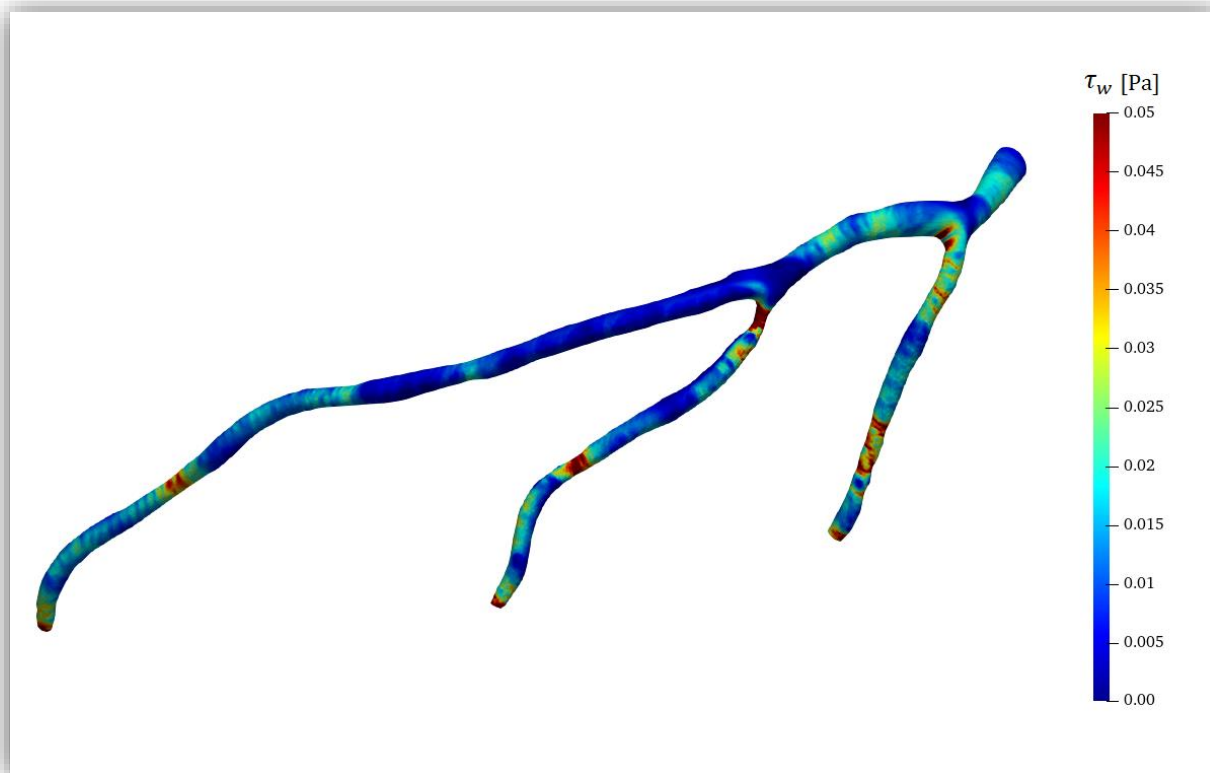


**Slika 6.14. Tangencijalno naprezanje lijeve koronarne arterije - pacijent 1**

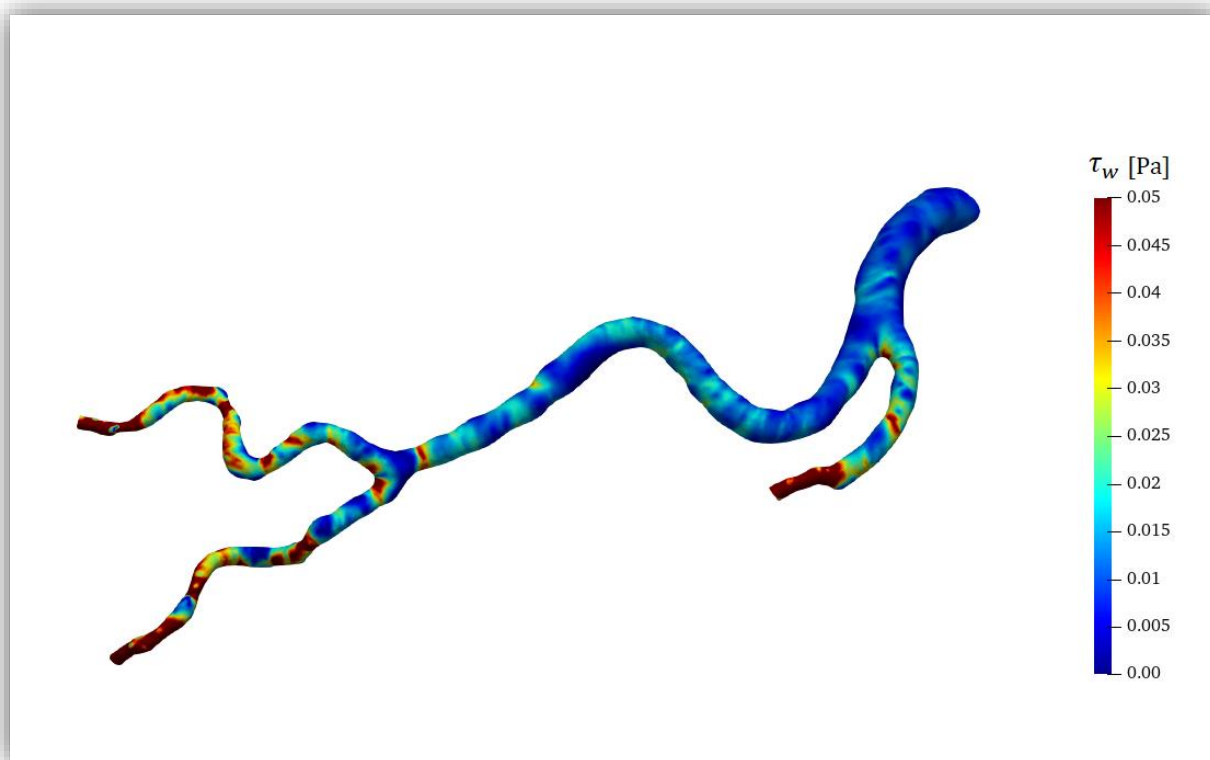


**Slika 6.15. Tangencijalno naprezanje lijeve koronarne arterije - pacijent 2**

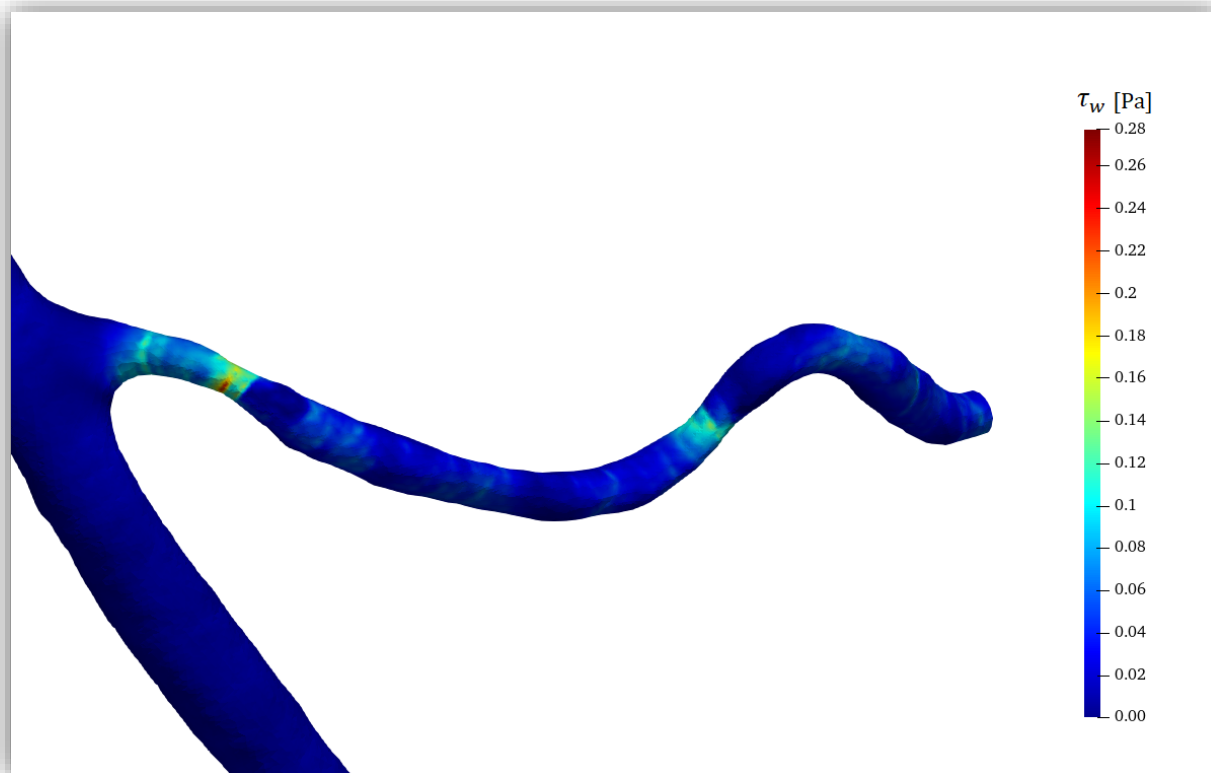




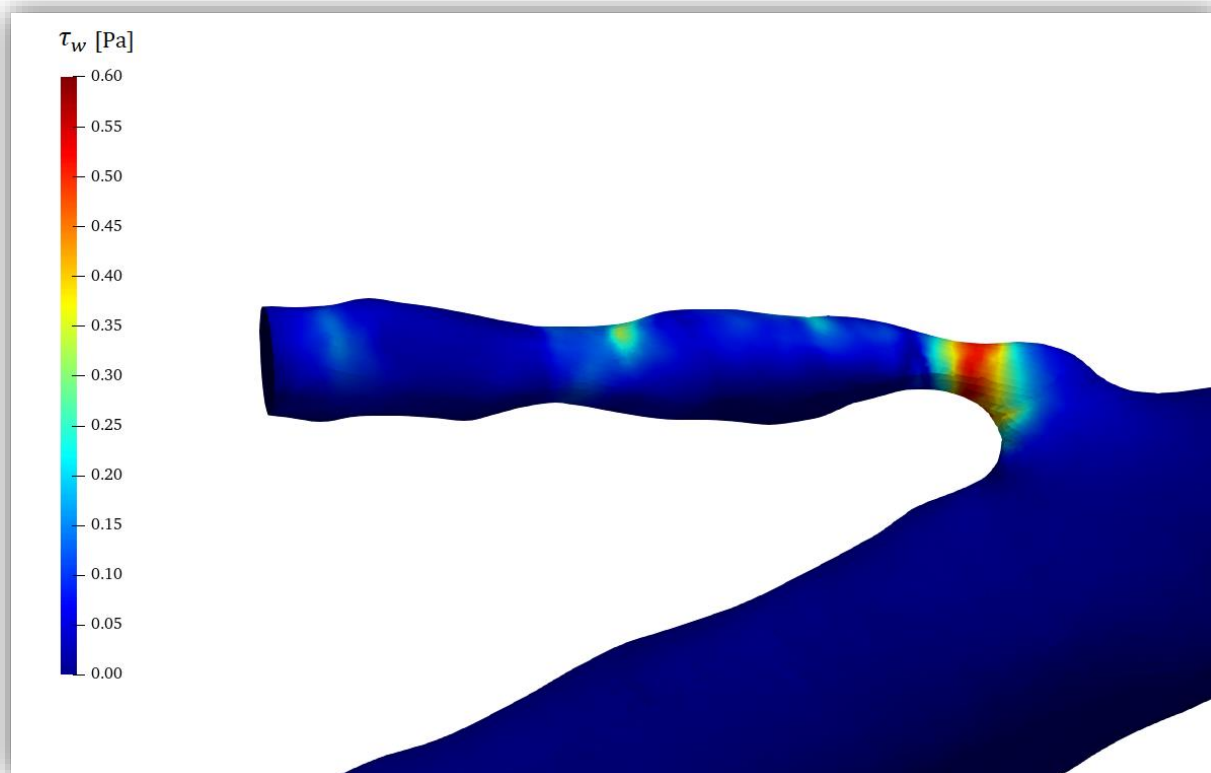
**Slika 6.16. Tangencijalno naprezanje grane koronarne arterije - pacijent 1**



**Slika 6.17. Tangencijalno naprezanje grane koronarne arterije - pacijent 2**

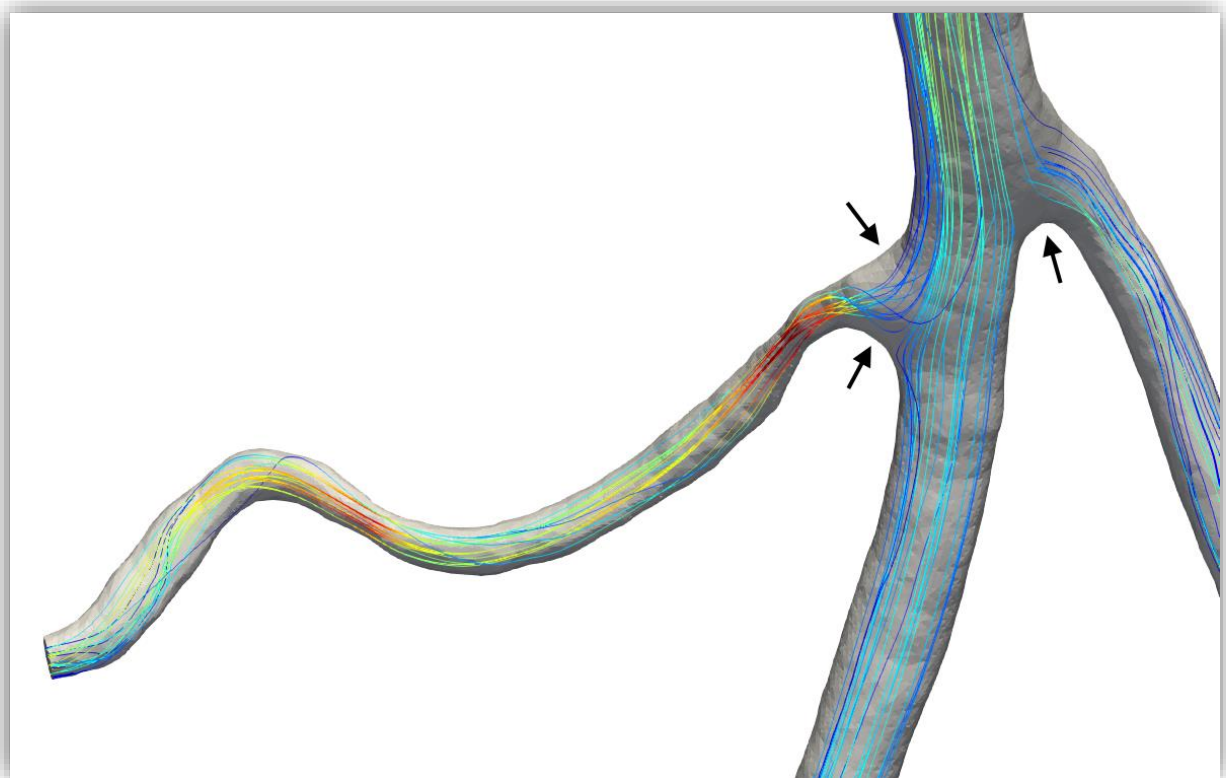


Slika 6.18. Grana s najvećom vrijednosti tangencijalnog naprezanja - pacijent 1

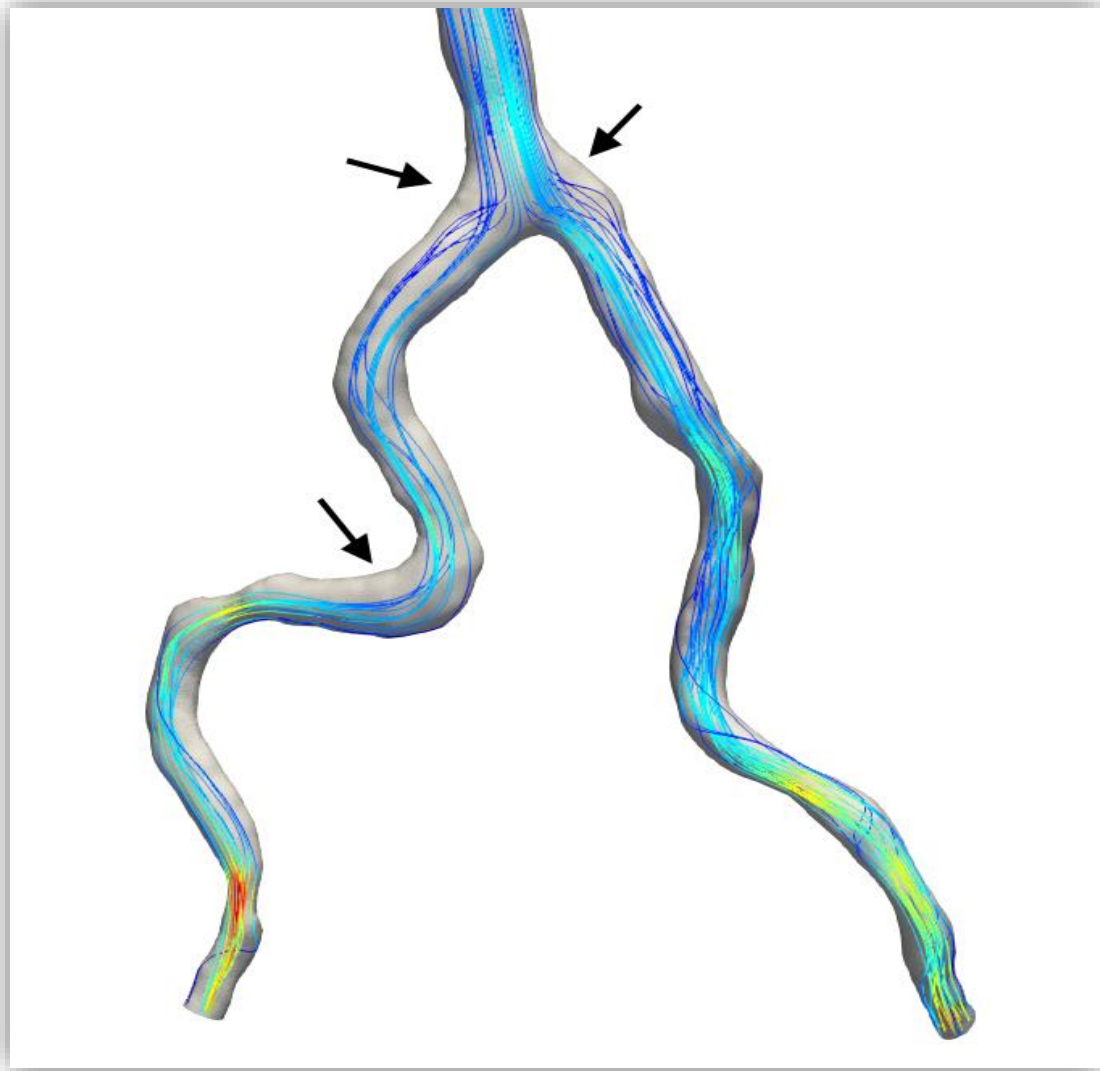


Slika 6.19. Grana s najvećom vrijednosti tangencijalnog naprezanja - pacijent 2

Iz prethodnih slika vidljivo je da se maksimalna naprezanja javljaju kod suženja arterija. Razlog tome je što tangencijalna naprezanja ovise o gradijentu brzine. Kod suženja dolazi do naglog ubrzanja strujanja krvi kako bi protok ostao konstantan tj. kako bi jednadžba očuvanja mase i dalje bila valjana. U ravnijim dijelovima arterija naprezanja poprimaju niže vrijednosti, dok se kod grananja i skretanja pojavljuju više vrijednosti. U ravnim dijelovima dolazi do formiranja profila brzine, stoga neće dolaziti do značajnih promjena naprezanja. Kod grananja i nagle promjene smjera strujanja, profil brzine će biti nesimetričan po presjeku što dovodi do koncentracije naprezanja. Problem mogu predstavljati i odvajanja strujanja prilikom grananja. Odvajanja strujanja mogu dovesti do dijelova žila u kojima krv ne dolazi u kontakt sa stijenkom i time se stvaraju povoljni uvjeti za formiranje plaka. Primjeri odvajanja strujanja su dani na slikama 6.20 i 6.21.



**Slika 6.20. Odvajanje strujanja prilikom grananja - pacijent 1**



**Slika 6.21. Odvajanje strujanja prilikom grananja - pacijent 2**

Dakle, ubrzanje dovodi do rasta tangencijalnog naprezanja na stijenci uz povoljne ateroprotektivne učinke na endotelnu strukturu arterije, dok usporenje toka rezultira manjim naprežanjem uz dokazane aterogene učinke. Usporenje toka također dovodi i do produžetka vremena u kojem su stanične i molekularne čestice u kontaktu sa zidom arterije što rezultira pojačanim ulazom istih u arterijsko stablo te njihovu pojačanu akumulaciju.

---

## 7. ZAKLJUČAK

Arterijsko stablo predstavlja dio kardiovaskularnog sustava koji opskrbljuje tijelo krvlju bogatu kisikom. Radi što ranijeg dijagnosticiranja bolesti koje se javljaju u arterijama, počele su se razvijati nove tehnike koje se temelje na modeliranju krvotoka. Tim se tehnikama na jednostavan način opisuje kompleksni arterijski sustav pri čemu se zadržava realno stanje i fiziologija sustava. Važnost dobrog modela krvotoka pridonosi sigurnijem i kvalitetnijem liječenju pacijenata što je od velike pomoći liječnicima i zdravstvenim radnicima.

Cilj ovog rada bio je analizirati strujanje u koronarnim arterijama dvaju pacijenata te prikazati i usporediti raspodjelu tangencijalnih napreznja po površini stijenke. U numeričkoj simulaciji korišten je model nestlačivog nestacionarnog laminarnog strujanja. Iako su krvne žile anizotropne i hiperelastične, koronarna arterija je radi jednostavnosti modelirana kao kruta stijenka, a krv kao newtonski fluid. Ova pojednostavljenja su nužna zbog ograničenih računalnih resursa i vremena računanja.

Pokazani rezultati obuhvaćaju vremensku promjenu tlaka i brzine na ulaznom te izlaznim presjecima uz prikaz raspodjele tangencijalnog napreznja na stijenci arterija. Vrijednosti tangencijalnog napreznja smatraju se ključnom poveznicom za nastanak aterosklerotskog plaka. Plak uzrokuje smanjenje poprečnog presjeka lumena koronarne arterije čime se onemogućuje puni intenzitet protoka krvi. Zaključeno je da su srednje vrijednosti tlaka i brzine na izlaznim presjecima približno jednake za oba pacijenta, a vrijednosti na ulaznom presjeku se djelomično razlikuju zbog različite geometrije pacijenata. Dobivena raspodjela tangencijalnih napreznja može poslužiti kao osnova za određivanje kritičnih mjesta u kojima se mogu razviti uvjeti za formiranje plaka.

U budućim istraživanjima poželjno je odrediti kritične presjeke u kojima se najčešće formira aterosklerotski plak kako bi se detaljno ispitale fizikalne veličine i njihove vrijednosti koje utječu na njegov nastanak. S obzirom da su bolesti kardiovaskularnog sustava najčešći uzrok smrti u svijetu, napredak u području hemodinamike od iznimne je važnosti za medicinsku struku. S obzirom da su ova istraživanja još u ranoj fazi, za njihov nastavak bit će potrebna suradnja između stručnjaka tehničkih znanosti i medicine.

---

**LITERATURA**

- [1] *Biomehanika*, <https://tehnika.lzmk.hr/biomehanika/>, 13.01.2021.
- [2] *Srce*, <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=57570>, 13.01.2021.
- [3] *Srce*, <https://hr.wikipedia.org/wiki/Srce>, 13.01.2021.
- [4] *Mali i veliki krvotok*, <https://sites.google.com/site/hdugwedji/mali-i-veliki-krvotok>, 13.01.2021.
- [5] *Krvožilni sustav*, <https://terrapromo.eu/utjecaj-cellianta-na-krvozilni-sustav/>, 13.01.2021.
- [6] *Koronarne arterije*, <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=33239>, 13.01.2021.
- [7] *Koronarne arterije; ateroskleroza*, <https://www.krenizdravo.hr/zdravlje/bolesti-zdravlje/zacepljenje-krvnih-zila-oko-srca-koronarna-bolest-srca-rizici-simptomi-i-lijecenje>, 13.01.2021.
- [8] *Krvni tlak*, <https://www.plivazdravlje.hr/tekst/clanak/7926/Sto-je-krvni-tlak.html>, 13.01.2021.
- [9] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I.: *Mehanika fluida II predavanja*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2018.
- [10] Virag, Z., Džijan, I.: *Računalna dinamika fluida*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2014.
- [11] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I.: *Mehanika fluida I predavanja*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2017.
- [12] *Hemodinamika*, [https://sh.wikipedia.org/wiki/Cirkulacija\\_krvi](https://sh.wikipedia.org/wiki/Cirkulacija_krvi), 28.01.2021.
- [13] Milović, P.: *An informal guide to coronary artery geometry extraction*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2020.
- [14] *CFD; Pimple algorithm*, <https://www.simscale.com/forum/t/cfd-pimple-algorithm/81418>, 10.02.2021.
- [15] *Windkessel model*, <https://link.springer.com/article/10.1007/s11517-008-0359-2/figures/1>, 10.02.2021.
- [16] *Windkessel model*, [https://www.researchgate.net/figure/Fluid-dynamics-and-electrical-circuit-equivalents\\_fig2\\_338697877](https://www.researchgate.net/figure/Fluid-dynamics-and-electrical-circuit-equivalents_fig2_338697877), 10.02.2021.
- [17] Catanho, M., Sinha, M., Vijayan, V.: *Model of Aortic Blood Flow Using the Windkessel Effect*, BENG 221 – Mathematical methods of bioengineering report, 2012
- [18] *Aterosklerotski plak; smično naprezanje*, <https://hr.sciencedc.com/84434-111115094612-72>, 16.02.2021.