

# Robusno upravljanje gibanjem krutog tijela

---

**Tomić, Teodor**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2010**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:653905>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# DIPLOMSKI RAD

Voditelj rada:

doc. dr. sc. Josip Kasać

Teodor Tomić

Zagreb, 2010.

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# DIPLOMSKI RAD

Teodor Tomić

Zagreb, 2010.

*Goodbye and thanks for all the fish!*

**Douglas Adams**, *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

# Izjava

Izjavljujem da sam ovaj diplomski rad izradio samostalno znanjem stečenim tijekom dosadašnjeg studija na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu.

T.T.

# Zahvala

Zahvaljujem mentoru doc. dr. sc. Josipu Kasaću na korisnim savjetima, diskusijama, strpljenju i mentorstvu tijekom cijeloga studija, a pogotovo tijekom izrade ovoga rada. Uvelike zahvaljujem firmi Hipersfera d.o.o. bez koje se zadnjih 18 mjeseci ne bih bio u mogućnosti baviti ovako zanimljivom problematikom.

Želio bih zahvaliti i svim istaknutim profesorima tijekom mog studija, prvenstveno prof. dr. sc. Mariu Essertu na iskazanom povjerenju, iznimnom strpljenju, podršci i sveopćoj dobroći, prof. dr. sc. Mladenu Crnekoviću koji je zaslužan što sam na ovom smjeru i uopće na strojarstvu, te uveo me u svijet mehatronike, prof. dr. sc. Borisu Halaszu među ostalim na oblikovanju inženjerskog načina razmišljanja, te prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću na približavanju svijeta mehanike, kao i ostalim profesorima i asistentima koji su posebno utjecali na mene. Komunikacija s njima proširila mi je vidike i smatram da me učinila potpunijim inženjerom. Također zahvaljujem profesorima Carlu L. Bottassu i Lorenzu Trainelliu sa Sveučilišta u Milanu, Italija, na neizmjereno korisnim materijalima o kinematici krutog gibanja.

Želim zahvaliti svim kolegama i prijateljima koji su ovo putovanje učinili zanimljivijim. Najviše zahvaljujem svojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci tijekom studija.

T.T.

# Sažetak

U radu je obrađena kinematika i dinamika gibanja krutog tijela, s naglaskom na ne-singularne parametrizacije i njihovu primjenu u simulaciji i regulaciji gibanja bespilotnih podvodnih vozila u šest stupnjeva slobode. Prikazane su eksponencijalna i Euler-Rodriguesova parametrizacija krutog gibanja, pri čemu je eksponencijalna parametrizacija iskorištena za izvod dinamike gibanja podvodnog vozila pod utjecajem sila fluida na novi način, a Euler-Rodriguesova je parametrizacija razrađena za primjenu u regulaciji gibanja krutog tijela kao izravno proširenje regulacije orijentacije tijela primjenom Euler-Rodriguesovih parametara, što je novi znanstveni rezultat. Uspoređene su performanse regulatora kliznog stanja, regulatora s vremenskim pomakom i njihova kombinacija za problem pozicioniranja i slijeđenja trajektorije podvodnog vozila pod utjecajem morske struje i pogreškom modeliranja, te utjecaj korištenja različitih parametrizacija gibanja na iste. Prikazan je problem raspodjele upravljačke sile koji povećava robusnost povratne veze, te su uspoređene performanse robusnog regulatora kliznog stanja s algoritmom raspodjele u povratnoj vezi i njegova robusnost na otkazivanje aktuatora. Obrađena je metoda sinteze parametara regulatora za aperiodski odziv pogreške.

**Ključne riječi:** robusno upravljanje, kinematika i dinamika krutog tijela, alokacija aktuatora, podvodno vozilo

# Sadržaj

|   |          |
|---|----------|
| Sažetak   | iii      |
| Sadržaj   | iv       |
| Popis slika   | viii     |
| Popis tablica   | xii      |
| Popis algoritama  | xiii     |
| Popis oznaka  | xiv      |
| <b>1 Uvod</b>   | <b>1</b> |
| 1.1 Objekt upravljanja . . . . .                        | 1        |
| 1.2 Neodređenosti i vanjske sile . . . . .              | 2        |
| 1.3 Organizacija po poglavljima . . . . .               | 4        |
| <b>2 Kinematika</b>                                     | <b>6</b> |
| 2.1 Osnovni pojmovi . . . . .                           | 7        |
| 2.1.1 Koordinatni sustavi i notacija . . . . .          | 7        |
| 2.1.2 Operator antisimetrične matrice . . . . .         | 10       |
| 2.1.3 Ortogonalne transformacije . . . . .              | 11       |
| 2.1.4 Rotacijska matrica . . . . .                      | 13       |
| 2.2 Reprerentacija orijentacije krutog tijela . . . . . | 16       |
| 2.2.1 Os i kut rotacije . . . . .                       | 16       |
| 2.2.2 Eulerovi kutevi . . . . .                         | 17       |



---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.2.3    | Eulerovi parametri . . . . .  | 21        |
| 2.2.4    | Ostali zapisi orijentacije . . . . .  | 28        |
| 2.3      | Pogreška orijentacije . . . . .   | 29        |
| 2.3.1    | Pogreška pomoću Eulerovih parametara . . . . .  | 30        |
| 2.3.2    | Pogreška pomoću Eulerovih kuteva . . . . .  | 31        |
| 2.4      | Kinematika krutog gibanja . . . . .   | 33        |
| 2.4.1    | Odvojeno razmatranje translacije i rotacije . . . . .                                 | 34        |
| 2.4.2    | Vijčano gibanje . . . . .   | 35        |
| 2.4.3    | Tenzorski zapis konfiguracije . . . . .   | 36        |
| 2.4.4    | Brzina tijela i poopćeni vektorski produkti . . . . .                                 | 40        |
| 2.4.5    | Euler-Rodriguesova parametrizacija gibanja . . . . .                                  | 42        |
| <b>3</b> | <b>Dinamika i vanjske sile</b>  | <b>50</b> |
| 3.1      | Dinamika krutog tijela . . . . .  | 51        |
| 3.2      | Dinamika pod utjecajem sila fluida . . . . .  | 56        |
| 3.3      | Disipativne sile fluida . . . . .   | 60        |
| 3.4      | Sile ispravljanja . . . . .   | 62        |
| 3.5      | Ukupni dinamički model . . . . .  | 63        |
| 3.6      | Dinamika u inercijskom koordinatnom sustavu . . . . .                                 | 64        |
| <b>4</b> | <b>Regulacija vozila u šest stupnjeva slobode</b>                                     | <b>66</b> |
| 4.1      | Robusni regulatori . . . . .  | 68        |
| 4.1.1    | Regulator kliznog stanja . . . . .  | 68        |
| 4.1.2    | Regulator s vremenskim pomakom . . . . .  | 74        |
| 4.2      | Upravljanje gibanjem tijela . . . . .   | 74        |
| 4.2.1    | Regulacija orijentacije primjenom Eulerovih kuteva . . . . .                          | 75        |
| 4.2.2    | Regulacija orijentacije primjenom Eulerovih parametara . . . . .                      | 75        |
| 4.2.3    | Regulacija konfiguracije u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gi-<br>banja . . . . . | 76        |
| 4.2.4    | Regulacija pomoću inverzne dinamike . . . . .   | 77        |
| 4.3      | Robusno upravljanje stanja vozila . . . . .   | 79        |
| 4.3.1    | Regulator kliznog moda s estimatorom poremećaja . . . . .                             | 79        |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.3.2    | Sinteza dinamike pogreške . . . . .                          | 81         |
| 4.4      | Pregled korištenih regulatora . . . . .                      | 84         |
| 4.5      | Raspodjela sile upravljanja . . . . .                        | 85         |
| 4.5.1    | Konfiguracijska matrica . . . . .                            | 86         |
| 4.5.2    | Nelinearnosti aktuatora . . . . .                            | 88         |
| 4.5.3    | Iterativni algoritam raspodjele . . . . .                    | 90         |
| 4.5.4    | Primjer konfiguracijske matrice . . . . .                    | 93         |
| 4.5.5    | Konvergencija iterativnog algoritma . . . . .                | 96         |
| 4.5.6    | Zaključak . . . . .  | 100        |
| <b>5</b> | <b>Simulacijski model i rezultati</b>                        | <b>102</b> |
| 5.1      | Model i parametri sustava . . . . .                          | 102        |
| 5.1.1    | Simulacijski model . . . . .                                 | 102        |
| 5.1.2    | Parametri vozila . . . . .                                   | 103        |
| 5.1.3    | Poremećaj . . . . .  | 104        |
| 5.1.4    | Numerička integracija . . . . .                              | 104        |
| 5.2      | Odziv u otvorenoj petlji . . . . .                           | 109        |
| 5.3      | Pozicioniranje . . . . .                                     | 115        |
| 5.3.1    | Pozicioniranje u idealnim uvjetima . . . . .                 | 115        |
| 5.3.2    | Pozicioniranje u Euler–Rodriguesovim parametrima . . . . .   | 121        |
| 5.3.3    | Pozicioniranje pod utjecajem poremećaja . . . . .            | 126        |
| 5.3.4    | Usporedba robusnih regulatora . . . . .                      | 128        |
| 5.3.5    | Kombinirani SMC+TDC regulator . . . . .                      | 132        |
| 5.3.6    | Utjecaj raspodjele upravljačke sile na performanse . . . . . | 133        |
| 5.4      | Slijeđenje trajektorije . . . . .                            | 141        |
| 5.4.1    | Idealno upravljanje . . . . .                                | 142        |
| 5.4.2    | Robusno upravljanje pod utjecajem poremećaja . . . . .       | 143        |
| 5.4.3    | Usporedba robusnih regulatora . . . . .                      | 145        |
| 5.4.4    | Kombinirani SMC i TDC regulator . . . . .                    | 149        |
| 5.5      | Usporedba pogrešaka i trajektorija regulatora . . . . .      | 151        |
| <b>6</b> | <b>Zaključak</b>   | <b>154</b> |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>A Dodatak</b>   | <b>156</b> |
| A.1 Pretvorba između Eulerovih kuteva i parametara . . . . .         | 156        |
| A.2 Dodane inercije . . . . .  | 158        |
| A.2.1 Izduženi elipsoid . . . . .                                    | 158        |
| A.2.2 Spljošteni elipsoid . . . . .                                  | 159        |
| A.3 Linearna parametrizacija dinamike krutog tijela . . . . .        | 161        |
| A.4 Identifikacija sustava pomoću linearne parametrizacije . . . . . | 163        |
| <b>B Izvorni kôd</b>   | <b>166</b> |
| B.1 Simulacijski model . . . . .                                     | 166        |
| B.2 Regulatori . . . . .   | 175        |
| B.3 Referentne trajektorije i poremećaj . . . . .                    | 180        |
| B.4 Pomoćne funkcije . . . . .                                       | 183        |
| <b>Literatura</b>  | <b>185</b> |

# Popis slika

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Organizacija diplomskog rada po poglavljima. . . . .  | 4  |
| 2.1 | Koordinatni sustavi vezani uz zemlju i tijelo, s naznačenim translacijskim<br>( $u, v, w$ ) i kutnim ( $p, q, r$ ) brzinama tijela. . . . . | 8  |
| 2.2 | Rotacija vektora $\mathbf{r}$ rotacijskom matricom $\mathbf{R}$ u $\mathbf{r}'$ . . . . .   | 12 |
| 2.3 | Projekcija koordinatnog sustava $B$ na koordinatni sustav $A$ . . . . .   | 14 |
| 2.4 | Rotacija vektora $\mathbf{r}$ oko osi $\mathbf{n}$ za kut $\varphi$ u vektor $\mathbf{r}'$ . . . . .  | 16 |
| 2.5 | Redoslijed rotacija u XYZ konvenciji Eulerovih kuteva. . . . .  | 18 |
| 2.6 | Transformacije koordinatnih sustava vezane uz pogreške stava $\tilde{\mathbf{R}}_1$ i $\tilde{\mathbf{R}}_2$ . . . . .                      | 30 |
| 2.7 | Vijčano gibanje . . . . .   | 36 |
| 3.1 | Fiksni i pomični koordinatni sustav, te točke i brzine na krutom tijelu u<br>pokretu. . . . .   | 52 |
| 3.2 | Brzina i inercija tijela i fluida koji djeluje na tijelo. . . . .   | 57 |
| 3.3 | Stabilizirajuće sile na zračnom brodu. . . . .  | 62 |
| 4.1 | Signum funkcija i njene aproksimacije . . . . .   | 69 |
| 4.2 | Dinamika pogreške za različite parametre. . . . .   | 83 |
| 4.3 | Žiroskopski moment kod zakretanja propelera. . . . .  | 89 |
| 4.4 | Konfiguracija aktuatora uz primjer raspodjele sile upravljanja. . . . .   | 94 |
| 4.5 | Konvergencija pogreške sila upravljanja za sva četiri slučaja. . . . .  | 97 |
| 4.6 | Konvergencija potiska i kuta zakreta za kada su svi motori ispravni i<br>tražena sila je unutar skupa ostvarivih (slučaj 1). . . . .        | 99 |
| 4.7 | Konvergencija potiska i kuta zakreta za kada je motor 3 u kvaru i tražena<br>sila je unutar skupa ostvarivih (slučaj 2). . . . .            | 99 |

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.8  | Konvergencija potiska i kuta zakreta za kada su svi motori ispravni i tražena sila je na rubu skupa ostvarivih (slučaj 3). . . . .                                      | 100 |
| 4.9  | Konvergencija potiska i kuta zakreta za kada je motor 3 u kvaru i tražena sila je na rubu ostvarivih (slučaj 4). . . . .  | 100 |
| 5.1  | Kinetička energija sustava pod utjecajem konzervativnih sila bez početnih brzina za različite metode numeričke integracije, $h = 0,1$ s. . . . .                        | 108 |
| 5.2  | Kinetička energija sustava pod utjecajem konzervativnih sila s početnom translacijskom brzinom za različite metode numeričke integracije, $h = 0,1$ s. . . . .          | 109 |
| 5.3  | Translacijske brzine i akceleracije simulirane morske struje. . . . .   | 110 |
| 5.4  | Kutne brzine i akceleracije simulirane morske struje. . . . .   | 110 |
| 5.5  | Položaj tijela kada postoje samo linearne brzine poremećaja (a), te kada postoje i linearne i kutne brzinama (b). . . . .   | 111 |
| 5.6  | Translacijske brzine tijela kada postoje samo linearne brzine poremećaja (a), te kada postoje i linearne i kutne brzinama (b). . . . .                                  | 112 |
| 5.7  | Eulerovi kutevi kada postoje samo linearne brzine poremećaja (a), te kada postoje i linearne i kutne brzine (b). . . . .  | 113 |
| 5.8  | Kutne brzine tijela kada postoje samo linearne brzine poremećaja (a), te kada postoje i linearne i kutne brzine (b). . . . .  | 114 |
| 5.9  | Putanja i orijentacije vozila tijekom simulacije za dva tipa poremećaja. . . . .  | 114 |
| 5.10 | Željena dinamika pogreške. . . . .  | 116 |
| 5.11 | Odziv položaja i brzina na odskočnu funkciju za regulaciju položaja u u kartezijskim koordinatama (a) i Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja (b). . . . .        | 117 |
| 5.12 | Odziv translacijskih brzina na odskočnu funkciju za regulaciju položaja u kartezijskim koordinatama (a) i Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja (b). . . . .      | 117 |
| 5.13 | Odziv pogreške položaja na odskočnu referencu za regulaciju položaja u kartezijskom koordinatnom sustavu (a) i Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja (b). . . . . | 118 |

---

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 5.14 | Upravljačke sile za regulaciju položaja u inercijskom koordinatnom sustavu (a) i u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja. . . . .        | 118 |
| 5.15 | Eulerovi kutevi za povratnu vezu Eulerovim kutevima (a) i Eulerovim parametrima (b). . . . .   | 119 |
| 5.16 | Eulerovi parametri za povratnu vezu Eulerovim kutevima (a) i Eulerovim parametrima (b). . . . .  | 120 |
| 5.17 | Kutne brzine za povratnu vezu Eulerovim kutevima (a) i Eulerovim parametrima (b). . . . .  | 120 |
| 5.18 | Upravljački momenti za povratnu vezu Eulerovim kutevima (a) i Eulerovim parametrima (b). . . . .   | 121 |
| 5.19 | Projekcije trajektorije vozila za pozicioniranje s povratnom vezom Euler-Rodriguesovim parametrima, za različite postavne vrijednosti. . . . . | 123 |
| 5.20 | Projekcije trajektorije vozila za pozicioniranje s povratnom vezom Euler-Rodriguesovim parametrima, za različite početne vrijednosti. . . . .  | 123 |
| 5.21 | Prostorne trajektorije vozila za pozicioniranje s povratnom vezom Euler-Rodriguesovim parametrima, za različite postavne vrijednosti. . . . .  | 124 |
| 5.22 | Prostorne trajektorije vozila za pozicioniranje s povratnom vezom Euler-Rodriguesovim parametrima, za različite početne vrijednosti. . . . .   | 125 |
| 5.23 | Morska struja koja djeluje na vozilo tijekom pozicioniranja i slijeđenja trajektorije. . . . .   | 127 |
| 5.24 | Pogreške pozicioniranja položaja pod utjecajem vanjskog poremećaja. . .  | 128 |
| 5.25 | Pogreške pozicioniranja orijentacije pod utjecajem vanjskog poremećaja. . .  | 129 |
| 5.26 | Upravljačke sile pozicioniranja pod utjecajem vanjskog poremećaja. . . .   | 130 |
| 5.27 | Upravljački momenti pozicioniranja pod utjecajem vanjskog poremećaja. . .  | 131 |
| 5.28 | Pogreška pozicioniranja položaja i orijentacije za kombinirani SMC+TDC regulator pod utjecajem vanjskog poremećaja. . . . .                    | 132 |
| 5.29 | Upravljačke sile i momenti pozicioniranja za kombinirani SMC+TDC regulator pod utjecajem vanjskog poremećaja. . . . .                          | 133 |
| 5.30 | Iznosi potiska i kuteva zakreta propelera za povratnu vezu u kartezijskom koordinatnom sustavu sa svim funkcionalnim propelerima. . . . .      | 135 |

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.31 | Iznosi potiska i kuteva zakreta propelera za povratnu vezu Euler-Rodriguesovim parametrima sa svim funkcionalnim propelerima. . . . .   | 136 |
| 5.32 | Iznosi potiska i kuteva zakreta propelera za povratnu vezu Euler-Rodriguesovim parametrima s jednim propelerom u kvaru. . . . .   | 137 |
| 5.33 | Pogreška pozicioniranja za povratnu vezu kartezijskim koordinatama sa potpuno funkcionalnim aktuatorima, te za povratnu vezu Euler-Rodriguesovim parametrima sa svim funkcionalnim i jednim propelerom u kvaru. . . . . | 138 |
| 5.34 | Pogreška orijentacije za povratnu vezu kartezijskim koordinatama sa potpuno funkcionalnim aktuatorima, te za povratnu vezu Euler-Rodriguesovim parametrima sa svim funkcionalnim i jednim propelerom u kvaru. . . . .   | 139 |
| 5.35 | Pogreške praćenja trajektorije položaja i orijentacije u idealnim uvjetima. . . . .   | 142 |
| 5.36 | Upravljačke sile i momenti praćenja za idealne uvjete. . . . .  | 143 |
| 5.37 | Pogreške praćenja trajektorije položaja za SMC i TDC regulator. . . . .   | 145 |
| 5.38 | Pogreške praćenja trajektorije orijentacije za robusne regulatore. . . . .  | 146 |
| 5.39 | Upravljačke sile praćenja trajektorije za robusne regulatore. . . . .   | 147 |
| 5.40 | Upravljački momenti praćenja trajektorije za robusne regulatore. . . . .  | 148 |
| 5.41 | Pogreške praćenja trajektorije položaja i orijentacije za kombinirani SMC+TDC regulator. . . . .  | 149 |
| 5.42 | Upravljačke sile i momenti praćenja za kombinirani SMC+TDC regulator. . . . .   | 150 |
| 5.43 | Usporedba norme pogreške i upravljačkih sila za različite regulatore. . . . .   | 151 |
| 5.44 | Trajektorije vozila u horizontalnoj ravnini s različitim robusnim regulatorima. . . . .   | 152 |
| 5.45 | Prostorne trajektorije vozila s različitim robusnim regulatorima. . . . .   | 153 |
| A.1  | Geometrija izduženog elipsoida. . . . .   | 158 |
| A.2  | Geometrija spljoštenog elipsoida. . . . .   | 159 |

# Popis tablica

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Notacija kod morskih vozila. . . . .  | 9   |
| 2.2 | Oznake antisimetrične matrice u literaturi. . . . .   | 11  |
| 3.1 | Konfiguracijski vektor i ekvivalent inverza kinematske transformacijske matrice za različite parametrizacije gibanja. . . . . | 64  |
| 4.1 | Iznosi relativne pogreške rješenja iterativnog algoritma raspodjele nakon 20 iteracija. . . . .                               | 98  |
| 5.1 | Parametri simuliranog vozila. . . . .   | 103 |
| 5.2 | Referentne i početne orijentacije za pozicioniranje u Euler-Rodriguesovim parametrima gibanja. . . . .                        | 122 |



# Popis algoritama

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Iterativna raspodjela sile upravljanja. . . . . | 92 |
|---|---|----|

# Popis oznaka

| Oznaka                 | Opis  | Jedinica  |
|------------------------|---|---|
| $\mathcal{A}(\cdot)$   | Operator rotacije u SR(6)   | -   |
| $\mathcal{A}_4(\cdot)$ | Operator rotacije u SE(3)   | -   |
| $B$                    | Koordinatni sustav tijela   | -   |
| $B$                    | Sila uzgona   | N   |
| $B$                    | Konfiguracijska matrica aktuatora   | -   |
| $B_e$                  | Proširena konfiguracijska matrica aktuatora   | -   |
| $C_4$                  | Konfiguracijski tenzor tijela u SE(3)   | -   |
| $C$                    | Konfiguracijski tenzor tijela u SR(6)   | -   |
| $C(\nu)$               | Tenzor centripetalnih i Coriolisovih sila tijela i dodane inercije                    | -   |
| $C_\xi(\nu)$           | Tenzor centripetalnih i Coriolisovih sila tijela i dodane inercije u inercijskom k.s. | -   |
| $C_{RB}(\nu)$          | Tenzor centripetalnih i Coriolisovih sila krutog tijela                               | -   |
| $\mathcal{D}_4(\cdot)$ | Operator krutog pomaka u SE(3)  | -   |
| $\mathcal{D}(\cdot)$   | Operator krutog pomaka u SR(6)  | -   |
| $D(\nu)$               | Tenzor ukupnih disipativnih sila  | -   |
| $D_\xi(\nu)$           | Tenzor ukupnih disipativnih sila u inercijskom k.s.                                   | -   |
| $D_L(\nu)$             | Tenzor linearnih disipativnih sila  | N s/m, N s  |
| $D_Q(\nu)$             | Tenzor kvadratičnih disipativnih sila   | N s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> , N s <sup>2</sup> |
| $\underline{f}$        | Dualni dio Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja                                 | -   |

---

|  |  |                      |
|--|--|----------------------|
| $\underline{\tilde{f}}$                    | Pogreška dualnog dijela Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja     | -                    |
| $\mathbf{f}_b$                             | Projekcija sile uzgona na k.s. tijela                                  | N                    |
| $\underline{\mathbf{f}}_d$                 | Referentni dualni dio Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja       | -                    |
| $\mathbf{f}_g$                             | Projekcija težine na k.s. tijela                                       | N                    |
| $g$  | Ubrzanje sile teže   | m/s <sup>2</sup>     |
| $\underline{g}$                            | Dualni kvaternion Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja           | -                    |
| $\underline{\tilde{g}}$                    | Pogreška konfiguracije u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja   | -                    |
| $g$  | Vektorski zapis dualnog kvaterniona                                    | -                    |
| $\underline{g}_d$                          | Referentna konfiguracija u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja | -                    |
| $h$  | Vremenski korak numeričke integracije                                  | s                    |
| $\mathbf{h}$                               | Kinetički moment krutog tijela   | kg m <sup>2</sup> /s |
| $\hat{\mathbf{h}}$                         | Estimacija poremećaja  | N, N m               |
| $I$  | Inercijski koordinatni sustav  | -                    |
| $\mathbf{I}_B$                             | Tenzor inercije krutog tijela  | kg m <sup>2</sup>    |
| $\mathbf{I}_C$                             | Tenzor inercije krutog tijela oko centra mase                          | kg m <sup>2</sup>    |
| $\mathbf{I}_D$                             | Tenzor inercije istisnutog fluida                                      | kg m <sup>2</sup>    |
| $\mathbf{J}$                               | Kinematska transformacijska matrica                                    | -                    |
| $\mathbf{J}_\psi$                          | Kinematska transformacijska matrica Eulerovih kuteva                   | -                    |
| $J_p$                                      | Moment inercije propelera  | kg m <sup>2</sup>    |
| $\underline{\mathbf{k}}$                   | Jedinični kvaternion Eulerovih parametara                              | -                    |
| $\underline{\tilde{\mathbf{k}}}$           | Pogreška orijentacije u Eulerovim parametrima                          | -                    |
| $\underline{\mathbf{k}}_d$                 | Referentna orijentacija u Eulerovim parametrima                        | -                    |
| $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$   | Pojačanje regulatora kliznog stanja                                    | -                    |
| $\mathbf{K}_D \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ | Derivacijsko pojačanje regulatora                                      | -                    |
| $\mathbf{K}_P \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ | Proporcionalno pojačanje regulatora                                    | -                    |

---

|  |   |                              |
|--|---|------------------------------|
| $\mathbf{K}_I \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ | Integracijsko pojačanje regulatora  | -                            |
| $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ | Viskozno pojačanje regulatora   | -                            |
| $l$  | Količina gibanja krutog tijela  | kg m/s                       |
| $L$  | Vremenski pomak   | s                            |
| $m$  | Masa tijela   | kg                           |
| $m_D$                                      | Masa istisnutog fluida  | kg                           |
| $\mathbf{m}_g$                             | Žiroskopski momenti   | N m                          |
| $\mathbf{M}$                               | Poopćeni tenzor inercije tijela s dodanom inercijom                       | kg, kg m <sup>2</sup>        |
| $\mathbf{M}_\xi$                           | Poopćeni tenzor inercije tijela s dodanom inercijom<br>u inercijskom k.s. | kg, kg m <sup>2</sup>        |
| $\mathbf{M}_A$                             | Poopćeni tenzor dodane inercije   | kg, kg m <sup>2</sup>        |
| $\mathbf{M}_D$                             | Poopćeni tenzor inercije istisnutog fluida                                | kg, kg m <sup>2</sup>        |
| $\mathbf{M}_{RB}$                          | Poopćeni tenzor inercije krutog tijela                                    | kg, kg m <sup>2</sup>        |
| $\mathcal{M}_l(\cdot)$                     | Linearni operator lijevog množenja kvaterniona                            | -                            |
| $\mathcal{M}_r(\cdot)$                     | Linearni operator desnog množenja kvaterniona                             | -                            |
| $\mathbf{n}$                               | Os rotacije krutog tijela   | -                            |
| $\mathbf{p}$                               | Poopćeni kinetički moment krutog tijela                                   | kg m/s, kg m <sup>2</sup> /s |
| $\underline{\mathbf{q}}$                   | Kvaternion  | -                            |
| $\mathbf{r}_b$                             | Vektor položaja centra uzgona   | m                            |
| $\mathbf{r}_D$                             | Vektor položaja centra mase istisnutog fluida                             | m                            |
| $\mathbf{r}_g$                             | Vektor položaja centra mase krutog tijela                                 | m                            |
| $\mathbf{R}$                               | Rotacijska matrica  | -                            |
| $\mathbf{R}_{AB}$                          | Rotacijska matrica iz k.s. $B$ u k.s. $A$                                 | -                            |
| $\mathbf{R}_{BI}$                          | Rotacijska matrica iz inercijskog k.s. u k.s. tijela                      | -                            |
| $\mathbf{R}_x$                             | Rotacijska matrica oko $x$ -osi   | -                            |
| $\mathbf{R}_y$                             | Rotacijska matrica oko $y$ -osi   | -                            |
| $\mathbf{R}_z$                             | Rotacijska matrica oko $z$ -osi   | -                            |
| $\mathcal{S}(\cdot)$                       | Operator antisimetrične matrice   | -                            |
| $\underline{\mathbf{t}}$                   | Kvaternion koji odgovara translaciji tijela                               | -                            |
| $\mathcal{T}(\cdot)$                       | Operator translacije u SR(6)  | -                            |
| $\mathcal{T}_4(\cdot)$                     | Operator translacije u SE(3)  | -                            |

---

|  |  |            |
|--|--|------------|
| $T_i$  | Potisak $i$ -tog propelera   | N          |
| $T_s$  | Vrijeme uzorkovanja diskretnog regulatora                                      | s          |
| $\mathbf{u}$   | Vektor upravljačkih sila na aktuatorima  | N          |
| $\mathbf{u}_e$   | Prošireni vektor upravljačkih sila na aktuatorima                              | N          |
| $U(\cdot)$   | Kinematska transformacijska matrica Eulerovih parametara                       | -          |
| $U_d(\cdot)$   | Kinematska transformacijska matrica Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja | -          |
| $\mathbf{v} = [u \ v \ w]^T$                                       | Vektor translacijskih brzina tijela  | m/s        |
| $W$  | Težina tijela  | N          |
| $\mathbf{W}$   | Težinska matrica algoritma raspodjele upravljačke sile                         | -          |
| $\mathbf{W}_e$   | Proširena težinska matrica algoritma raspodjele upravljačke sile               | -          |
| $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$                                       | Položaj tijela u inercijskom k.s.  | m          |
| $\mathbf{x}_0$   | Početni položaj tijela   | m          |
| $\mathbf{x}_d$   | Referentni položaj tijela  | m          |
| $\boldsymbol{\alpha}$  | Kutevi zakreta propelera   | rad        |
| $\boldsymbol{\alpha}_{\max}$                                       | Maksimalni kut zakreta propelera   | rad        |
| $\boldsymbol{\alpha}_{\min}$                                       | Minimalni kut zakreta propelera  | rad        |
| $\epsilon$   | Dualna jedinica  | -          |
| $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]^T$ | Vektorski dio Eulerovih parametara   | -          |
| $\epsilon$   | Širina graničnog sloja   | -          |
| $\varphi$  | Kut zakreta oko osi rotacije   | rad        |
| $\phi$   | Kut valjanja   | rad        |
| $\eta$   | Skalarni dio Eulerovih parametara  | -          |
| $\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{v}^T \ \boldsymbol{\omega}^T]^T$      | Poopćena brzina tijela   | m/s, rad/s |
| $\boldsymbol{\nu}_d$   | Poopćena referentna brzina gibanja tijela                                      | m/s, rad/s |
| $\boldsymbol{\nu}_r$   | Poopćena relativna brzina gibanja tijela                                       | m/s, rad/s |
| $\boldsymbol{\nu}_w$   | Poopćena brzina strujanja fluida   | m/s, rad/s |
| $\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^T$                              | Vektor kutnih brzina tijela  | rad/s      |

---

|   |  |                   |
|---|--|-------------------|
| $\omega_s$  | Brzina zakretanja osi propelera                              | rad/s             |
| $\omega_p$  | Rotacijska brzina propelera                                  | rad/s             |
| $\psi$  | Kut skretanja  | rad               |
| $\boldsymbol{\psi} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$              | Vektor Eulerovih kuteva                                      | rad               |
| $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$                                 | Pogreška orijentacije u Eulerovim kutevima                   | rad               |
| $\boldsymbol{\psi}_d$                                       | Referentna orijentacija u Eulerovim kutevima                 | rad               |
| $\boldsymbol{\rho}$   | Vektor Rodriguesovih parametara                              | -                 |
| $\rho_o$  | Gustoća okolnog fluida                                       | kg/m <sup>3</sup> |
| $\rho_w$  | Gustoća vode   | kg/m <sup>3</sup> |
| $\theta$  | Kut poniranja  | rad               |
| $\tau$  | Korak vijka  | -                 |
| $\boldsymbol{\tau}$   | Poopćene upravljačke sile i momenti                          | N, N m            |
| $\boldsymbol{\tau}_1 = [X \ Y \ Z]^T$                       | Upravljačke sile   | N                 |
| $\boldsymbol{\tau}_2 = [K \ M \ N]^T$                       | Upravljački momenti  | Nm                |
| $\boldsymbol{\tau}_A$                                       | Sile i momenti dodane inercije                               | N, N m            |
| $\boldsymbol{\tau}_D$                                       | Sile i momenti istisnutog fluida                             | N, N m            |
| $\boldsymbol{\tau}_g$                                       | Poopćeni vektor žiroskopskih momentaza                       | N, N m            |
| $\boldsymbol{\tau}_{RB}$                                    | Sile i momenti koji djeluju na kruto tijelo                  | N, N m            |
| $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{\psi}]^T$ | Konfiguracijski vektor tijela primjenom Eulerovih kuteva     | m, rad            |
| $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{x} \ \boldsymbol{k}]^T$    | Konfiguracijski vektor tijela primjenom Eulerovih parametara | m, -              |
| $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$                                  | Pogreška konfiguracije                                       | -                 |
| $\boldsymbol{\xi}_d$  | Referentna konfiguracija                                     | -                 |
| $(\cdot) \otimes$   | Operator sjeveroistočnog vanjskog produkta                   | -                 |
| $(\cdot) \otimes$   | Operator jugoistočnog vanjskog produkta                      | -                 |
| $(\cdot) \otimes$   | Operator jugozapadnog vanjskog produkta                      | -                 |

## 1.1 Objekt upravljanja

Vozila čija se dinamika može opisati dinamikom krutog tijela često djeluju u uvjetima neodređenosti. Dinamikom krutog tijela daju se opisati vozila koja imaju 6 stupnjeva slobode gibanja, a to među ostalim uključuje satelite, zrakoplove, rakete, brodove, podvodna vozila, zračne brodove i slično. Gibanje po nekim stupnjevima slobode može biti ograničeno. Primjerice, kod brodova je gibanje po vertikalnoj komponenti određeno visinom morskih valova i nije direktno upravljivo. Zato se pri sintezi regulatora neki stupnjevi slobode mogu zanemariti. Ipak, u ovom će se radu sinteza regulatora vršiti za svih 6 stupnjeva slobode gibanja. Neki od navedenih vozila su dinamički stabilni, odnosno moraju se gibati nekom minimalnom brzinom da bi bili operativni. Primjerice, sateliti se moraju gibati nekom minimalnom brzinom kako bi održali orbitu. Zrakoplovi ovise od dinamičkoj sili uzgona na krilu, koja među ostalim ovisi o brzini strujanja zraka preko istog. Sinteza regulatora takvih sustava klasično se vrši oko nekih ravnotežnih stanja (radnih točaka), npr. zrakoplova u horizontalnom letu pri određenoj brzini. Takav pristup zahtijeva dobro poznavanje parametara sustava i opsežnu sintezu za razne radne

točke.

Za razliku od dinamički stabilnih, statički su stabilna vozila na koja djeluje statička sila uzgona. To uključuje morska vozila – brodove, podvodna vozila (ROV<sup>1</sup>, AUV<sup>2</sup>, UUV<sup>3</sup>) – kao i balone i zračne brodove. Takva će vozila bez utjecaja pogonskih sila biti stabilna do određene granice, pošto na njih djeluju tzv. *sile ispravljanja* (engl. *restoring forces*) ograničenog iznosa koje imaju efekt sličan opruzi. Na tijela koja su u potpunosti uronjena u fluid (podmornice i zračni brodovi) djeluju sile fluida (hidrodinamičke i aerodinamičke sile) koje ovise od brzini strujanja fluida oko tijela i tako mogu dinamički destabilizirati vozilo. Taj je efekt posebno izražen kod vozila koja nemaju upravljačke površine, već upravljanje postižu diferencijalnim potiskom pogonskih jedinica, a taj je trend posebno izražen kod bespilotnih podvodnih vozila.

U ovom će se radu razmatrati prvenstveno dinamika i regulacija vozila na koje djeluje sila statičkog uzgona, a to su podvodna vozila i zračni brodovi.

## 1.2 Neodređenosti i vanjske sile

Cilj ovog rada je izvršiti sintezu globalnog nelinearnog regulatora koji ne zahtijeva točno poznavanje parametara sustava i otporan je na nepoznate vanjske poremećaje.

Sustavi koji se mogu opisati kinematikom i dinamikom krutog tijela su, primjerice, sateliti, zrakoplovi, podvodna vozila (engl. *underwater vehicles*), brodovi i zračni brodovi (engl. *airships*).

Osnovu analize navedenih sustava čini *kinematika* krutog tijela, koja opisuje dinamiku konfiguracije tijela s obzirom na neki referentnim koordinatnim sustavom. Za upravljanje je najbitnija kinematika greške.

U literaturi koja se bavi upravljanjem morskim vozilima uobičajeno je koristiti *regula-*

---

<sup>1</sup>engl. *ROV = Remotely Operated Vehicle* – daljinski upravljano vozilo

<sup>2</sup>engl. *AUV = Autonomous Underwater Vehicle* – autonomno podvodno vozilo

<sup>3</sup>engl. *UUV = Unmanned Underwater Vehicle* – bespilotno podvodno vozilo



tor svih 6 stupnjeva slobode gibanja, te taj pristup predstavlja regulaciju kompletnog stanja krutog tijela. Pošto realna vozila na različite načine ostvaruju upravljačke sile i imaju različit smještaj upravljačkih jedinica (aktuatora), potrebno je željene upravljačke sile i momente rasporediti na postojeće aktuatorne. Taj se proces odvija u bloku *Alokacija aktuatora*. Ovakav pristup omogućuje veoma jednostavnu kompenzaciju neispravnih aktuatora, što povećava robusnost cjelokupnog upravljačkog sustava.

Poremećaji su uvjetovani okolišnim uvjetima i vrsti vozila. Primjerice, poremećaji u satelitskim sustavima uključuju otpor Zemljine atmosfere, Zemljino magnetsko polje i zračenje nabijenih Sunčevih čestica [1]. Kod zrakoplova to su različiti atmosferski uvjeti koji negativno utječu na dinamičku silu uzgona, odnosno nepovoljno utječu na strujanje zraka preko aerodinamičkih površina zrakoplova. Kod brodova i morskih vozila koja su blizu morske površine ili blizu obale, glavni su poremećaj morski valovi i vjetar [2]. Vozila koja funkcioniraju na osnovi sile statičkog uzgona, a to su podvodna vozila i zračni brodovi, javljaju se dodatne poremećajne sile zbog relativno bliske gustoće vozila i okolnog fluida. Na takva vozila također veoma nepovoljno utječu sile morskih valova, odnosno sile vjetra. Takvi sustavi imaju tendenciju biti statički stabilni, no dinamički nestabilni. Zbog najinteresantnijeg modela poremećaja, u ovom će se radu modelirati vozila bazirana na uzgonu (podvodna vozila i zračni brodovi), kao i odgovarajući poremećaji.

Neophodan dio regulacijske petlje su navigacijski sustavi, koji su izvan opsega ovog diplomskog rada. Za mnogo praktičnih regulatora potrebne su informacije o svim stanjima sustava, no sva se stanja ne mogu direktno mjeriti. Zato se navigacijski sustavi većinom baziraju na nelinearnom Kalmanovom filtru, koristeći informacije iz akcelerometara, žiroskopa, magnetometara, barometra, GPS<sup>4</sup> uređaja i slično. U novije su vrijeme relativno jeftino dostupni postali integrirani uređaji koji koriste senzore bazirane na MEMS<sup>5</sup> tehnologiji izrade, a imaju ugrađeno filtriranje i estimaciju stanja na mikroprocesorima.

Oznake sila, brzina i konfiguracije pretežno su jednake u svojoj literaturi koja se bavi modeliranjem i upravljanjem sustava krutog tijela. Postoje razlike u označavanju među

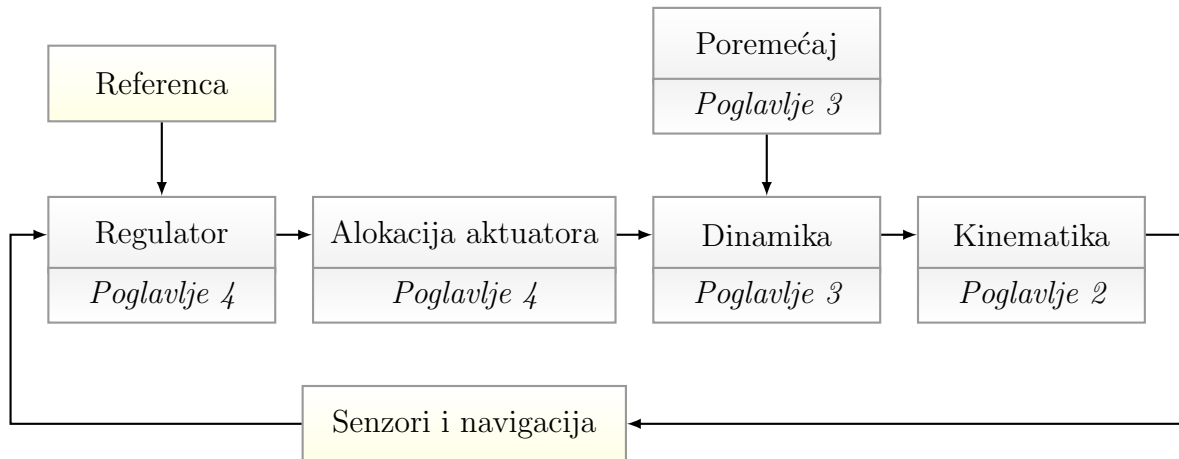
---

<sup>4</sup>engl. *Global Positioning System* - globalni sustav pozicioniranja

<sup>5</sup>engl. *Micro Electro-Mechanical System* - mikro elektromehanički sustav

industrijama. U radu se zbog autorove preferencije koristi notacija uobičajena za morska vozila.

## 1.3 Organizacija po poglavljima



Slika 1.1: Organizacija diplomskog rada po poglavljima.

Diplomski rad organiziran je prema regulacijskoj petlji s povratnom vezom.

- U poglavlju 2 prvo su obrađene osnove notacije u kinematici gibanja krutog tijela. Potom je obrađena kinematika rotacije tijela, te parametrizacije Eulerovim kutovima i Eulerovim parametrima. Nakon toga obrađeno je kruto gibanje u smislu vijčanog gibanja, te eksponencijalna i Euler-Rodriguesova parametrizacija krutog gibanja.
- U poglavlju 3 obrađena je dinamika krutog tijela korištenjem poopćenog tenzora inercije i poopćenog vektora brzina, što je uobičajena praksa u literaturi. Zbog jasnoće je u prikazu korištena eksponencijalna parametrizacija krutog gibanja, koja je iskorištena za izvod dinamike podvodnog vozila pod utjecajem poremećajnih sila morske struje.
- Poglavlje 4 bavi se regulacijom gibanja tijela. Prvo je prikazana eksterna linearizacija dinamike krutog tijela. Potom su obrađene dvije metode robusnog upravljanja

- regulator kliznog stanja i estimator s vremenskim kašnjenjem, koji su primijenjeni na regulaciju gibanja. Na kraju poglavlja obrađen je problem raspodjele (alokacije) upravljačkih sila na aktuatore, s algoritmom i primjerom.
- U poglavlju 5 prikazan je potpun kinematski i dinamički model korišten u simulacijama. Prikazani su rezultati simulacija za pozicioniranje i slijeđenje trajektorije, i to prvo za PD regulator u idealnim uvjetima bez poremećajnih sila te potom za različite robusne regulatore u uvjetima velikih neodređenosti.

## Kinematika

---

Specifičnost gibanja krutog tijela leži u činjenici da se konfiguracija tijela (njegov položaj i orijentacija) ne može dobiti direktnim vremenskim integriranjem translacijskih i kutnih brzina tijela. Promjena položaja kroz vrijeme u nekom fiksnom (tzv. *inercijskom*) koordinatnom sustavu, najčešće nepomično vezanim uz Zemlju, ovisi o relativnoj orijentaciji fiksnog koordinatnog sustava i onog vezanog uz gibajuće tijelo. Pošto kod krutog tijela vrijedi pretpostavka da su sve točke na tijelu kruto vezane uz isto, dakle njihov relativni položaj je nepromjenjiv kroz vrijeme, njegovo se gibanje može opisati kao gibanje jednog koordinatnog sustava u odnosu na drugi.

Najbitniji dio kinematike krutog tijela je određivanje njegove orijentacije. U pravilu se promjena orijentacije razmatra neovisno o promjeni položaja.

Položaj i orijentacija tijela te njihova promjena mogu se promatrati zajedno. Postoji mnogo pristupa i matematičkih pristupa da se to ostvari. Mnogi od tih pristupa zasnivaju se na principu tzv. helikoidalnog gibanja, odnosno gibanja po vijku, prema kojem se svako gibanje krutog tijela može opisati pomoću osi rotacije, promjerom vijka, njegovim korakom i kutem zakreta po prostornoj spirali koju taj vijak opisuje. Pristup koji se često koristi u analizi industrijskih robota je povezivanje informacija o rotaciji i translaciji

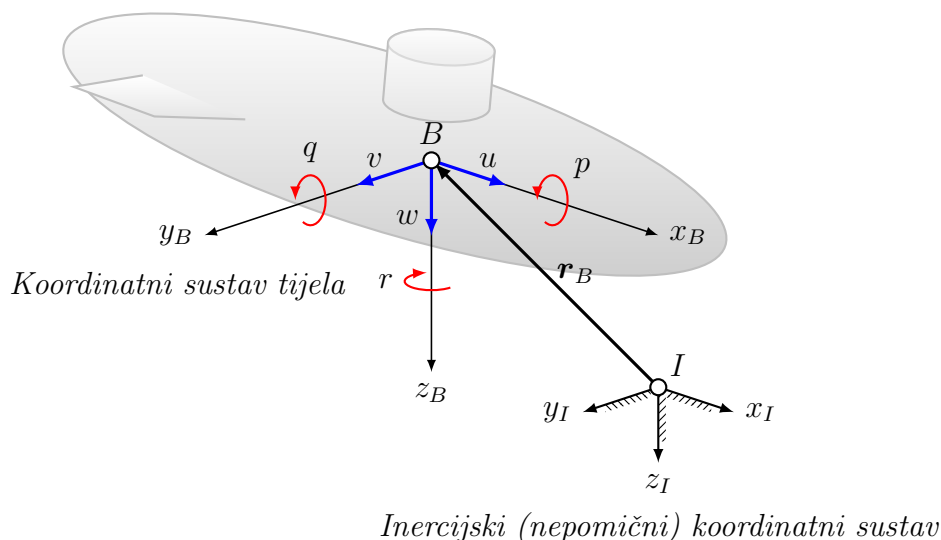
u jednu matricu. U ovom ćemo radu koristiti pristup koji nije raširen u literaturi, a predstavlja veoma elegantno poopćenje gibanja.

Na početku poglavlja objasniti će se notacija i koordinatni sustavi korišteni u ovom radu. Opisat će se načini zapisa relativne orijentacije dvaju koordinatnih sustava, kao i vremenska promjena istih. Također će se opisati načini određivanja razlike u orijentaciji koordinatnih sustava, koji su potrebni da bi se odredio signal greške u regulaciji stava. Na kraju će se opisati poopćeni zapis gibanja krutog tijela, koji će se kasnije koristiti za izvod dinamike krutog tijela.

## 2.1 Osnovni pojmovi

### 2.1.1 Koordinatni sustavi i notacija

U analizi gibanja vozila razmatraju se dva osnovna prostora. Operacijski, odnosno radni prostor (engl. *work/operational space*) jest fizički prostor odnosno okoliš u kojem se vozilo kreće, dok je konfiguracijski prostor (engl. *configuration/joint space*) skup varijabli dovoljan da opiše sve točke vozila, odnosno krutog tijela, u operacijskom prostoru. Operacijski je prostor najčešće se veže uz nepomičan (fiksni) referentni koordinatni sustav, u kojem vrijede zakoni klasične mehanike. Zbog toga se takav koordinatni sustav veoma često naziva inercijskim (engl. *inertial coordinate frame*). Konfiguracijski je prostor vezan uz tijelo i pomičan je u odnosu na operacijski. Zato se govori o koordinatnom sustavu tijela (engl. *body-fixed coordinate frame*). Slika 2.1 prikazuje inercijski koordinatni sustav  $I$  (engl. *inertial*) i koordinatni sustav tijela  $B$  (engl. *Body*), te brzine tijela vezane uz taj sustav. Sve upravljačke i pogonske, kao i poremećajne sile, svode se na taj koordinatni sustav pošto je u njemu opisana dinamika gibanja tijela. Kinematika gibanja povezuje pomični koordinatni sustav vezan uz tijelo s onim nepomičnim. Stanje vozila u operacijskom prostoru, dakle njegov položaj i orijentaciju, nazivamo konfiguracijom tijela.



Slika 2.1: Koordinatni sustavi vezani uz zemlju i tijelo, s naznačenim translacijskim ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) i kutnim ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) brzinama tijela.

U literaturi se koriste standardne oznake za stanja tijela. Translacijske brzine (engl. *translational / linear velocity*) u smjeru osi  $x_B$ ,  $y_B$  i  $z_B$  označavaju se redom varijablama  $u$ ,  $v$  i  $w$ . Rotacijske se brzine (engl. *angular velocity* oko istih osi označavaju se varijablama  $p$ ,  $q$  i  $r$ . Sile i momenti označavaju se velikim slovima  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  za sile, te  $K$ ,  $M$  i  $N$  za momente. Ovakva notacija odgovara SNAME<sup>1</sup> standardu iz 1950. za morska vozila. Identična se notacija koristi u mehanici leta. Konfiguracija je opisana komponentama vektora položaja tijela  $\mathbf{x}$  ( $x$ ,  $y$  i  $z$ ), te varijablama koje jednoznačno opisuju orijentaciju tijela. Najčešće se za to primjenjuju tzv. Eulerovi kutevi, koji ovise o redosljedu osnovnih rotacija. Tzv. XYZ konvencija koristi se za morska vozila i zrakoplove, a u mehanici leta također je poznata pod nazivom de Sparreovi kutevi [3]. Ovisno o primjeni koriste se različite konvencije Eulerovih kuteva.

<sup>1</sup>The Society of Naval Architects and Marine Engineers

Tablica 2.1: Notacija kod morskih vozila.

| SS <sup>2</sup> |                                   | Sile i momenti | Brzine | Konfiguracija |
|-----------------|-----------------------------------|----------------|--------|---------------|
| 1               | Translacija u smjeru $x$ -osi     | $X$            | $u$    | $x$           |
| 2               | Translacija u smjeru $y$ -osi     | $Y$            | $v$    | $y$           |
| 3               | Translacija u smjeru $z$ -osi     | $Z$            | $w$    | $z$           |
| 4               | Rotacija oko $x$ -osi (valjanje)  | $K$            | $p$    | $\phi$        |
| 5               | Rotacija oko $y$ -osi (posrtanje) | $M$            | $q$    | $\theta$      |
| 6               | Rotacija oko $z$ -osi (skretanje) | $N$            | $r$    | $\psi$        |

Vektorski zapis kraći je i pregledniji od zapisa po komponentama, pa se u ovom radu koriste sljedeće oznake za pojedine skupine varijabli:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= [\boldsymbol{\xi}_1^T, \boldsymbol{\xi}_2^T]^T, & \boldsymbol{\xi}_1 &= [x, y, z]^T, & \boldsymbol{\xi}_2 &= [\phi, \theta, \psi]^T, \\ \boldsymbol{\nu} &= [\boldsymbol{\nu}_1^T, \boldsymbol{\nu}_2^T]^T, & \boldsymbol{\nu}_1 &= [u, v, w]^T, & \boldsymbol{\nu}_2 &= [p, q, r]^T, \\ \boldsymbol{\tau} &= [\boldsymbol{\tau}_1^T, \boldsymbol{\tau}_2^T]^T, & \boldsymbol{\tau}_1 &= [X, Y, Z]^T, & \boldsymbol{\tau}_2 &= [K, M, N]^T \end{aligned}$$

Navedeni zapis koristi se u [2, 4]. U literaturi koja se bavi upravljanjem podvodnih vozila konfiguracija se učestalo označava vektorom  $\boldsymbol{\eta}$ . U ovom se radu koristi zapis orijentacije pomoću Eulerovih parametara, čiji se skalarni dio označava varijablom  $\eta$ . Iz tog se razloga konfiguracija označava vektorom  $\boldsymbol{\xi}$  kako bi se oznaka razlikovala od skalarnog dijela Eulerovih parametara.

Translacijske se brzine označavaju i kao vektor  $\boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{v}$ , a kutne kao  $\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\omega}$ . Takav je zapis jasniji od zapisa s indeksima. Vektor  $\boldsymbol{\tau}$  kao oznaka poprečnih sila i momenata uobičajen je u literaturi o automatskoj regulaciji robota.

Postoji veći broj reprezentacija orijentacije krutog tijela. Minimalni broj parametara koji mogu opisati orijentaciju krutog tijela u trodimenzionalnom prostoru jest tri, no svaka minimalna reprezentacija orijentacija sadrži singularnosti koje su nepoželjne prilikom simulacija i prilikom regulacije pošto se s takvom parametrizacijom ne mogu opisati sve orijentacije tijela. Ukoliko dođe do singularnosti tijekom simulacije, što je veoma moguće

ako na tijelo djeluje vanjski poremećaj, simulacija "puca" i ne može se nastaviti. Upravljački zakon zasnovan na singularnoj konfiguraciji neće dobro funkcionirati blizu točke singularnosti. Minimalne reprezentacije su Eulerovi kutevi, Rodriguesovi parametri i još neke koje su izvan opsega ovog rada. Među najraširenijim nesingularnim reprezentacijama su Eulerovi parametri, koji će se u ovom radu koristiti i u simulaciji i u regulaciji gibanja tijela.

Osim rotacija, postoji i više zapisa krutog gibanja, odnosno konfiguracije tijela, od kojih su ovdje prikazani eksponencijalni zapis i Euler-Rodriguesova parametrizacija. Zajedničko razmatranje položaja i orijentacije ima uporište u geometrijskoj kinematici, i donosi prednosti prvenstveno u prikazu dinamike tijela.

### 2.1.2 Operator antisimetrične matrice

U literaturi koja se bavi modeliranjem kinematike i dinamike krutih tijela često se radi konciznijeg zapisa uvodi operator antisimetrične (engl. *skew-symmetric*) matrice. Pomoću antisimetrične matrice  $\mathcal{S}(\cdot)$  zapisuje se vektorski produkt kao umožak matrice i vektora, tako da vrijedi

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}) \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2.1)$$

Antisimetrična matrica  $\mathcal{S}(\mathbf{a}) = -\mathcal{S}(\mathbf{a})^\top$  definirana je kao

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.2)$$

Postoji razlika u označavanju ove matrice među granama znanosti. Tako se, primjerice, u zapadnoj literaturi o mehanici leta često koristi oznaka s tildom  $\tilde{\mathbf{a}}$  ili  $[\tilde{\mathbf{a}}]$ . U literaturi više vezanoj uz robotiku često se koristi oznaka vektorskog produkta kao indeks ili potencija vektora ( $\mathbf{a}_\times, \mathbf{a}^\times$ ). U literaturi o morskim vozilima antisimetrična se matrica naznačuje kao funkcija vektora  $\mathcal{S}(\mathbf{a})$ , što pravi jasniju distinkciju između matrice i vektora od ostalih zapisa, te naznačava svojstvo matematičkog operatora. Iz tog razloga se potonja notacija koristi u ovome radu.



Tablica 2.2: Oznake antisimetrične matrice u literaturi.

| Oznaka  | Izvori   |
|---|----------|
| $\mathcal{S}(\mathbf{a})$                                 | [2], [4] |
| $\tilde{\mathbf{a}}, [\tilde{\mathbf{a}}]$                | [3]      |
| $\mathbf{a} \times, \mathbf{a}^\times, \mathbf{a}_\times$ | [5]      |

**Svojstvo 1** Za sve vektore  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  i skalare  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , operator antisimetrične matrice zadovoljava

$$\mathcal{S}(\mathbf{a})\mathbf{b} = -\mathcal{S}(\mathbf{b})\mathbf{a} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{S}(\beta\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b}) = \beta\mathcal{S}(\mathbf{a}) + \gamma\mathcal{S}(\mathbf{b}) \quad (2.4)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{a})\mathcal{S}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{b}\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{S}(\mathbf{a})\mathbf{b}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T \quad (2.7)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{a})\mathbf{b} = -\mathcal{S}(\mathbf{b})\mathbf{a} \quad (2.8)$$

Može se definirati i inverzni postupak stvaranja antisimetrične matrice, tako da vrijedi

$$\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(\mathbf{a})) = \mathbf{a} \quad (2.9)$$

odnosno, raspisano po komponentama

$$\mathcal{S}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

### 2.1.3 Ortogonalne transformacije

Za dva koordinatna sustava  $I$  i  $B$ , te proizvoljni vektor  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ , vektor  $\vec{r}$  može se dekomponirati u bilo koji od navedenih koordinatnih sustava. Koordinatni zapis vektora  $\vec{r}$  u koordinatnom sustavu  $I$  je  ${}^I\mathbf{r}$ , a u koordinatnom sustavu  $B$  je  ${}^B\mathbf{r}$ . Ovakvo označavanje

sukladno je SNAME standardu, gdje su  $I$  i  $B$  oznake koordinatnih sustava u kojem su zapisane komponente vektora  $\vec{r}$ .

Transformacija između tih dvaju dekomponiranih reprezentacija vektora  $\vec{r}$  je rotacija koordinatnog sustava  $I$  tako da se podudara s koordinatnim sustavom  $B$ . U koordinatnoj formi ta se transformacija može zapisati pomoću kvadratne matrice  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{IB}$ , što implicira

$${}^I\mathbf{r} = \mathbf{R}_{IB} {}^B\mathbf{r} \quad (2.11)$$

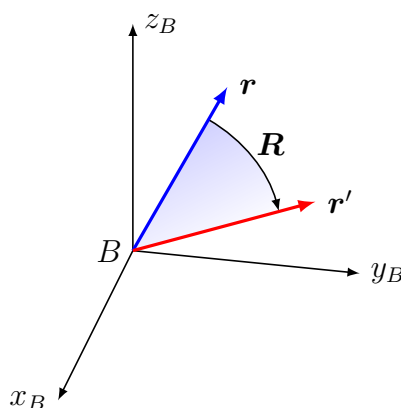
Važno je napomenuti pomalo neintuitivnu notaciju ortogonalnih matrica. Matrica  $\mathbf{R}_{BI}$  označava transformaciju iz  $I$  u  $B$ , dok matrica  $\mathbf{R}_{IB}$  označava transformaciju iz  $B$  u  $I$ .

Pošto ta transformacija ne mijenja duljinu vektora  $\vec{r}$  i ne mijenja ortogonalnost koordinatnih osi, rotacijska matrica  $\mathbf{R}$  je ortogonalna. Nadalje vrijedi važno svojstvo koje se uvelike koristi u praksi:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (2.12)$$

Matrica  $\mathbf{R}$  može se interpretirati kao operator nad koordinatnim sustavima. Ekvivalentno,  $\mathbf{R}$  se može interpretirati kao operator nad vektorima, tako da može uzeti vektor  $\mathbf{r}$  i rotirati ga u nekom koordinatnom sustavu da bi se dobio vektor  $\mathbf{r}'$  kao na slici 2.2, odnosno

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r} \quad (2.13)$$



Slika 2.2: Rotacija vektora  $\mathbf{r}$  rotacijskom matricom  $\mathbf{R}$  u  $\mathbf{r}'$ .

Determinanta ortogonalne matrice  $\mathbf{Q}$  je  $\det \mathbf{Q} = \pm 1$ .

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_{3 \times 3} \implies \det \mathbf{Q}^2 = \det \mathbf{I}_{3 \times 3} = 1 \quad (2.14)$$

Ortogonalna matrica s determinantom  $+1$  odgovara rotaciji kao što je opisano iznad. S druge strane, ortogonalna matrica s determinantom  $-1$  opisuje zrcaljenje (refleksiju). Nadalje, takva matrica transformira desnokretni koordinatni sustav u ljevokretni i obrnuto. Pošto takva transformacija ne odgovara nijednoj mogućoj radnji nad krutim tijelom, u literaturi se razmatraju ortogonalne matrice s pozitivnim determinantama koje opisuju transformacije nad desnokretnim koordinatnim sustavima.

Skupina svih ortogonalnih matrica  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  čini *ortogonalnu grupu 3. reda*  $O(3)$ , u kojoj matrično množenje predstavlja binarnu operaciju grupe. Rotacijske matrice s  $\det \mathbf{R} = +1$  čine podgrupu koja se naziva *specijalna ortogonalna grupa 3. reda*  $SO(3)$ . Sve orijentacije krutog tijela nasljeđuju svojstva (2.11), (2.12) i (2.14).

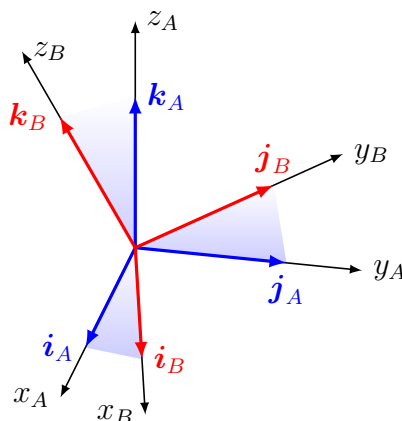
U praksi se koristi nekoliko različitih parametrizacija  $SO(3)$ , među kojima su rotacijske matrice, os i kut rotacije, Eulerovi kutevi i Eulerovi parametri (jedinični kvaternioni, odnosno versori). Parametrizacije se prvenstveno razlikuju po broju parametara, opisu kompozitnih rotacija, kinematskim diferencijalnim jednadžbama, singularnostima i strukturi greške stava. Pošto razmatrani koordinatni sustavi imaju 3 osi, minimalne parametrizacije  $SO(3)$  sadrže tri parametra. No, glavni nedostatak svake minimalne parametrizacije je postojanje singularnosti za neku orijentaciju. Postoji još nekoliko relevantnih zapisa grupe, poput Rodriguesovih parametara, modificiranih Rodriguesovih parametara, Gibbsovih parametara i slično, no pošto se radi o minimalnim parametrizacijama grupe, oni se neće obrađivati u ovom radu.

#### 2.1.4 Rotacijska matrica

Prethodno spomenuta rotacijska matrica, također poznata pod nazivom matrica kosinusa smjera (engl. *DCM = Direction Cosine Matrix*), predstavlja projekciju jediničnih vektora  $\mathbf{i}_B$ ,  $\mathbf{j}_B$  i  $\mathbf{k}_B$  koordinatnog sustava  $B$  na jedinične vektore  $\mathbf{i}_A$ ,  $\mathbf{j}_A$  i  $\mathbf{k}_A$  koordinatnog sustava  $A$ . U matematičkom smislu, projekcija se dobiva skalarnim produktom

pojedinih vektora. Rotacijska matrica koja transformira vektor iz koordinatnog sustava  $A$  u koordinatni sustav  $B$  može se zapisati kao

$$\mathbf{R}_{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{i}_A & \mathbf{j}_B \cdot \mathbf{i}_A & \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{j}_A & \mathbf{j}_B \cdot \mathbf{j}_A & \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{j}_A \\ \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{k}_A & \mathbf{j}_B \cdot \mathbf{k}_A & \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{k}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1^\top \\ \rho_2^\top \\ \rho_3^\top \end{bmatrix} \quad (2.15)$$



Slika 2.3: Projekcija koordinatnog sustava  $B$  na koordinatni sustav  $A$ .

Rotacijska matrica je ortogonalna matrica koja spada u grupu  $SO(3)$ , i nasljeđuje sva svojstva navedena u podnaslovu 2.1.3. To znači da se vektor  $\mathbf{x}$  može transformirati iz koordinatnog sustava  $A$  u sustav  $B$  pomoću

$${}^B\mathbf{x} = \mathbf{R}_{BA} {}^A\mathbf{x} \quad (2.16)$$

Opet se naglašava notacija rotacijske matrice. Lijevo slovo u indeksu je koordinatni sustav  $u$  koji se transformira, dok je desno slovo sustav  $iz$  kojeg se transformira. Nadalje se za transformaciju u suprotnom smjeru može koristiti svojstvo

$$\mathbf{R}_{AB}^{-1} = \mathbf{R}_{BA} = \mathbf{R}_{AB}^\top \quad (2.17)$$

Kinematska diferencijalna jednadžba rotacijske matrice, odnosno vremenska promjena orijentacije tijela uslijed kutne brzine  $\boldsymbol{\omega}$  je

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{S}({}^L\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R} \quad (2.18)$$

Kutna brzina  $\boldsymbol{\omega}$  zapisana je u koordinatnom sustavu tijela, dok je  ${}^I\boldsymbol{\omega}$  njena projekcija na inercijski sustav. Kutna je brzina vektor, pa se ona također može ortogonalnom transformacijom projicirati s jednog koordinatnog sustava na drugi.

Jednadžba (2.18) svojstvena je za grupu  $SO(3)$  i pokazuje strukturu grupe. Proširenje ovakvog zapisa na cjelokupno gibanje tijela nalazi se u kasnijem poglavlju rada.

Zbog grešaka zaokruživanja i pogrešaka metoda numeričke integracije diferencijalnih jednadžbi dolazi do odstupanja norme i determinante rotacijske matrice od jedinice, dakle dolazi do nejednakosti  $\|\mathbf{R}\| \neq 1$ , pa je stoga prilikom numeričke integracije rotacijsku matricu potrebno normalizirati u svakom simulacijskom koraku kako bi se održalo svojstvo ortogonalnosti matrice. Ovisno o metodi numeričke integracije, do gubitka ortogonalnosti dolazi već nakon nekoliko simulacijskih koraka, što veoma lako može prouzrokovati nestabilnost simulacije.

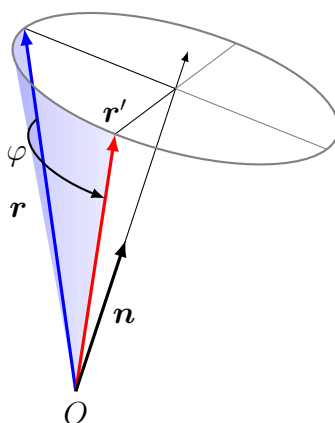
Radi jasnoće se u indeks rotacijske matrice stavljaju oznake koordinatnog sustava iz kojeg i u koji se transformira. Tako matrica  $\mathbf{R}_{BA}$  transformira iz koordinatnog sustava  $A$  u koordinatni sustav  $B$ , dok matrica  $\mathbf{R}_{AB}$  čini obrnutu transformaciju. Ovo je važno naglasiti radi smanjenja zabune i zato se u ovom radu ponavlja na više mjesta.

U mehanici leta rotacijska se matrica označava i simbolom  $\mathbf{L}_{BA}$ , npr. u [3]. Među ostalim načinima označavanja rotacijske matrice su  $\mathbf{C}_A^B$  i  $\mathbf{C}_{A \rightarrow B}$ , npr. u [6].

## 2.2 Reprerentacija orijentacije krutog tijela

### 2.2.1 Os i kut rotacije

Eulerov teorem rotacije kaže da je svako gibanje krutog tijela s jednom fiksiranom točkom rotacija, te da se svaka relativna promjena orijentacije između dvaju koordinatnih sustava  $A$  i  $B$  može opisati kao rotacija sustava  $B$  u sustavu  $A$  za određeni kut  $\varphi$  oko neke osi rotacije  $\mathbf{n}$ , kao na slici 2.4. Drugim riječima, *svaka se prostorna rotacija može opisati kao ravninska (planarna) rotacija oko određene osi*. U tom smislu os rotacije  $\mathbf{n}$  predstavlja normalu ravnine rotacije.



Slika 2.4: Rotacija vektora  $\mathbf{r}$  oko osi  $\mathbf{n}$  za kut  $\varphi$  u vektor  $\mathbf{r}'$ .

Dakle, svaka se rotacija može opisati pomoću osi rotacije i kutom zakreta oko te osi. Zbog matematičkih pojednostavljanja se uzima da je os rotacije  $\mathbf{n}$  jedinični vektor, odnosno da vrijedi  $\|\mathbf{n}\| = 1$ . Kut zakreta može biti pozitivnog i negativnog predznaka. Iz toga proizlazi da je rotacija oko osi  $\mathbf{n}$  za kut  $\varphi$  istovjetna rotaciji oko osi  $-\mathbf{n}$  za kut  $-\varphi$ , što ukazuje na redundantnost ovakvog zapisa orijentacije. Redundantnost zapisa znači da se ista orijentacija može zapisati na više načina, što zahtijeva uvođenje dodatnih ograničenja tijekom vremenske integracije kinematske diferencijalne jednadžbe. Svaki zapis orijentacije tijela koji koristi više od tri vrijednosti je redundantan.

Komponente vektora  $\mathbf{r}'$  prema slici 2.4 mogu se dobiti pomoću *Rodriguesove formule*

$$\mathbf{r}' = \underbrace{[\cos \varphi \mathbf{I}_{3 \times 3} + (1 - \cos \varphi) \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \mathcal{S}(\mathbf{n})]}_{\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)} \mathbf{r} \quad (2.19)$$

gdje je  $\mathcal{S}(\cdot)$  operator antisimetrične matrice. Izvod izraza (2.19) može se pronaći u [4].

Iz (2.19) se korištenjem svojstva  $\|\mathbf{n}\| = 1$  može dobiti često korišten izraz za rotacijsku matricu pomoću osi i kuta rotacije.

$$\mathbf{R}_{BI}(\mathbf{n}, \varphi) = \mathbf{I}_{3 \times 3} + (\sin \varphi) \mathcal{S}(\mathbf{n}) + (1 - \cos \varphi) \mathcal{S}(\mathbf{n})^2 \quad (2.20)$$

što je izraz poznat kao *Euler-Rodriguesova formula*. Koristeći zapis  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]^T$ , dobivamo

$$\mathbf{R}_{BI}(\mathbf{n}, \varphi) = \begin{bmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) c\varphi & n_1 n_2 (1 - c\varphi) - n_3 s\varphi & n_1 n_3 (1 - c\varphi) + n_2 s\varphi \\ n_1 n_2 (1 - c\varphi) + n_3 s\varphi & n_2^2 + (1 - n_2^2) c\varphi & n_2 n_3 (1 - c\varphi) - n_1 s\varphi \\ n_1 n_3 (1 - c\varphi) - n_2 s\varphi & n_2 n_3 (1 - c\varphi) + n_1 s\varphi & n_3^2 + (1 - n_3^2) c\varphi \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

gdje je  $c \bullet = \cos \bullet$  i  $s \bullet = \sin \bullet$ . Ovakav zapis orijentacije rijetko se koristi u praktičnoj primjeni pošto nije definiran za kut  $\varphi = 0$ . Os i kut rotacije su osnova za razumijevanje drugih zapisa orijentacije, kao što su Eulerovi i Rodriguesovi parametri, koji sadrže informaciju o osi i kutu rotacije, ali na praktičniji način.

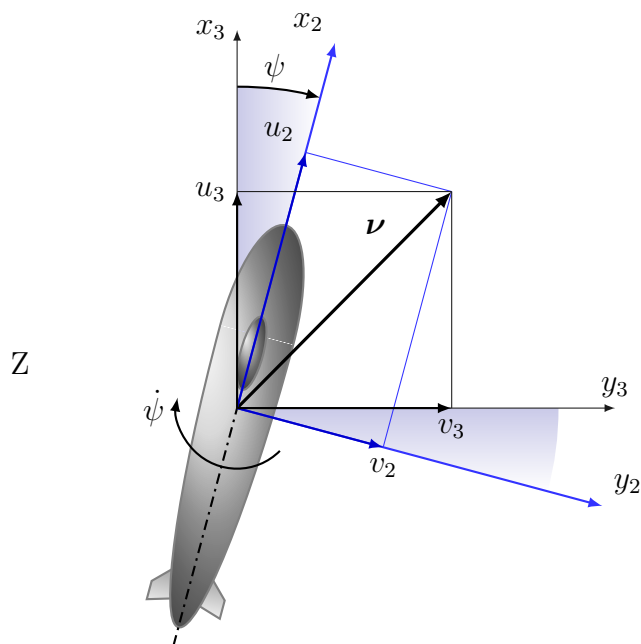
## 2.2.2 Eulerovi kutevi

U praktičnoj je primjeni veoma raširen intuitivni zapis orijentacije tijela pomoću tri tzv. Eulerova kuta. Značenje pojedinih kuteva, kao i rezultirajuća rotacijska matrica, ovise o redosljedu rotacija. Ukupna rotacijska matrica dobiva se kombinacijom osnovnih rotacija (engl. *principal rotations*) oko osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  koordinatnog sustava. Osnovne rotacije definirane su pomoću rotacijskih matrica  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  i  $\mathbf{R}_z$  kako slijedi.

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

gdje je  $s \cdot = \sin(\cdot)$  i  $c \cdot = \cos(\cdot)$ . U mehanici leta, kao i pomorskih vozila, učestal je tzv. XYZ ili RPY<sup>3</sup> redosljed rotacija.

<sup>3</sup>engl. *Roll-Pitch-Yaw* - valjanje, poniranje, skretanje

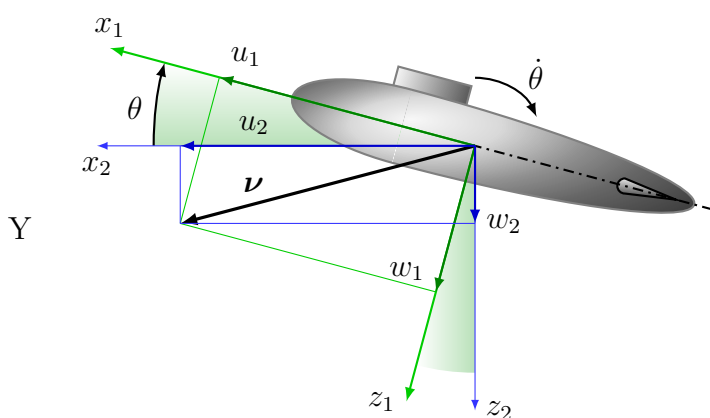
**Skretanje.**

Rotacija oko osi  $z$  za kut  $\psi$ .

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_z(\psi)$$

Brzina  $w_3 = w_2$ .

$$\text{Brzina } \boldsymbol{\nu}_{2,2} = [0, 0, \dot{\psi}]^T.$$

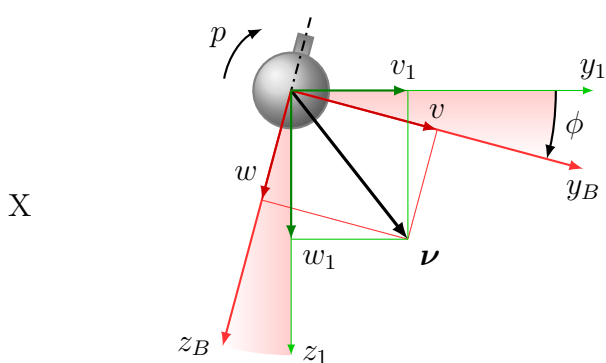
**Propinjanje.**

Rotacija oko osi  $y$  za kut  $\theta$ .

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_2$$

Brzina  $v_2 = v_1$ .

$$\text{Brzina } \boldsymbol{\nu}_{2,1} = [0, \dot{\theta}, 0]^T.$$

**Valjanje.**

Rotacija oko osi  $x$  za kut  $\phi$ .

$$\mathbf{R}_{IB} = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_1$$

Brzina  $u_1 = u$ .

$$\text{Brzina } \boldsymbol{\nu}_{2,0} = [\dot{\phi}, 0, 0]^T.$$

Slika 2.5: Redosljed rotacija u XYZ konvenciji Eulerovih kuteva.



U mehanici leta se tako definirani Eulerovi kutevi nazivaju i de Sparreovi kutevi [3]. Redosljed rotacija je prikazan na slici 2.5.

Slika 2.5 pokazuje redosljed rotacija koji je potreban da bi se došlo iz inercijskog koordinatnog sustava u koordinatni sustav tijela. Neka je koordinatni sustav  $x_3y_3z_3$  dobiven translacijom fiksnog koordinatnog sustava  $x_Iy_Iz_I$  do ishodišta koordinatnog sustava tijela. Rotacijom oko  $z$ -osi za *kut skretanja*  $\psi$  dobiva se koordinatni sustav  $x_2y_2z_2$ . Daljnjom rotacijom oko  $y$ -osi za *kut propinjanja* dobiva se koordinatni sustav  $x_1y_1z_1$ . Konačno, rotacijom oko  $x$ -osi za *kut valjanja*  $\phi$  dolazi se u koordinatni sustav tijela  $x_0y_0z_0 \equiv x_By_Bz_B$ . Ukupna rotacijska matrica dobiva se množenjem osnovnih rotacijskih matrica.

$$\mathbf{R}_{BI} = \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{R}_z(\psi) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{R}_{BI} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ -s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Pošto rješenje dinamike daje brzine u koordinatnom sustavu tijela, češće je korištena rotacijska matrica  $\mathbf{R}_{IB}$ , koja se može dobiti pomoću identiteta  $\mathbf{R}_{IB} = \mathbf{R}_{BI}^T$ , odnosno

$$\mathbf{R}_{IB} = \mathbf{R}_z^T(\psi) \mathbf{R}_y^T(\theta) \mathbf{R}_x^T(\phi) \quad (2.25)$$

Zbog redosljeda rotacija iz koordinatnog sustava tijela u inercijski ova se konvencija može naći i pod skraćenicom ZYX ili engl. *Yaw-Pitch-Roll*. Umnožak svih triju matrica daje rotacijsku matricu koja projicira vektore iz inercijskog koordinatnog sustava u koordinatni sustav tijela. Raspisano po komponentama imamo

$$\mathbf{R}_{IB} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

U literaturi je uobičajeno skraćeno pisati  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{BI}$ , što uz nepažnju može dovesti do zabune i grešaka. Pod pretpostavkom da se sinusi i kosinusi kuteva izračunaju i spreme u privremene varijable prije zbrajanja i množenja, stvaranje rotacijske matrice pomoću Eulerovih kuteva iziskuje računanje 6 trigonometrijskih funkcija, 5 zbrajanja i 16 množenja.

### Transformacija kutne brzine

Vektor kutne brzine tijela  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nu}_2 = [p, q, r]^\top$  ne može se direktno integrirati da bi se dobila orijentacija tijela. Ona je povezan s promjenom Eulerovih kuteva  $\dot{\boldsymbol{\psi}} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^\top$  preko transformacijske matrice  $\mathbf{J}_\psi$ :

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{J}_\psi(\boldsymbol{\psi}) \boldsymbol{\omega} \quad (2.27)$$

Vremenska promjena orijentacije koordinatnog sustava tijela u odnosu na inercijski dobiva se sljedećim izrazom:

$$\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_x(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_x(\phi) \mathbf{R}_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_\psi^{-1}(\boldsymbol{\psi}) \dot{\boldsymbol{\psi}} \quad (2.28)$$

Raspisivanjem dobivamo

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Kinematska diferencijalna jednadžba Eulerovih kuteva glasi

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

odnosno,

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{J}_\psi(\boldsymbol{\psi}) \boldsymbol{\omega} \quad (2.31)$$

gdje je  $s \cdot = \sin(\cdot)$ ,  $c \cdot = \cos(\cdot)$  i  $t \cdot = \tan(\cdot)$ .

Koordinatna transformacijska matrica  $\mathbf{J}_\psi$  nije rotacijska matrica, odnosno vrijedi  $\mathbf{J}_2^{-1} \neq \mathbf{J}_\psi^\top$ . Bitno je naglasiti da je matrica singularna za  $\cos \theta = 0$ , odnosno za kuteve  $\theta = \pm 90^\circ$ . Mjesto singularnosti kod Eulerovih kuteva ovisi o redoslijedu rotacija, tako da različite primjene iziskuju različite konvencije Eulerovih kuteva. U slučajevima kada su kutevi propinjanja mnogo manji od navedenog iznosa, primjerice kod brodova, XYZ konvencija

je prihvatljiva. Nasuprot tome, podvodna vozila i zrakoplovi mogu funkcionirati blizu singularne točke XYZ Eulerovih kuteva, što može dovesti do nestabilnosti simulacije. Ukoliko se Eulerovi kutevi koriste u povratnoj vezi, u takvim situacijama može doći do katastrofalnih rezultata. Zbog toga se, kako za simulacije, tako i za estimacije stanja vozila, koriste drugi zapisi stava. Eulerovi kutevi koriste se u povratnoj vezi kad se očekuju mali kutevi propinjanja.

### 2.2.3 Eulerovi parametri

Učestalo korištena alternativa Eulerovim kutevima je zapis orijentacije pomoću jediničnog kvaterniona (engl. *quaternion*), odnosno versora. Takav se zapis u [2, 4] naziva Eulerovim parametrima, a u [3] Hamilton-Rodriguesovim parametrima .

#### Kvaternioni

Kvaternion je proširenje kompleksnog broja na tri imaginarne osi. Definirao ga je i razradio Hamilton u 19. stoljeću. Iz kvaterniona je kasnije nastao vektor, koji je u mnogim situacijama matematički praktičniji. S pojavom računalnih simulacija i grafike, kvaternion je dobio na popularnosti zbog poželjnih matematičkih svojstava.

Kvaternion je definiran kao kompleksni broj sa skalarnim i vektorskim dijelom

$$\underline{\mathbf{q}} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (2.32)$$

gdje se  $q_0$  naziva skalarni, a  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$  vektorski dio. Praktično je kvaternion zapisati u vektorskom obliku kao

$$\underline{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Kvaternion kojem je skalarni dio jednak nuli naziva se čisti ili vektorski kvaternion (engl. *pure quaternion*). Iz čistih kvaterniona su se razvili vektori i vektorska algebra. Zbog

jasnoće čiste kvaternione s komponentama vektora  $\mathbf{a}$  radi jasnoće notacije zapisivat ćemo kao  $\underline{\mathbf{a}}$ , tako da je

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Operacija množenja kvaterniona  $\underline{\mathbf{q}}_A = [q_{A0}, \mathbf{q}_A^\top]^\top$  i  $\underline{\mathbf{q}}_B = [q_{B0}, \mathbf{q}_B^\top]^\top$  definirana je kao

$$\underline{\mathbf{q}}_B \circ \underline{\mathbf{q}}_A = \begin{bmatrix} q_{A0} q_{B0} - \mathbf{q}_A \cdot \mathbf{q}_B \\ q_{A0} \mathbf{q}_B + q_{B0} \mathbf{q}_A - \mathbf{q}_A \times \mathbf{q}_B \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Uvođenjem linearnih operatora

$$\mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^\top \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_r(\underline{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^\top \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{S}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

množenje kvaterniona se može izraziti kao standardno množenje matrice i vektora uzimanjem "lijevog" ( $l$ , engl. *left*) ili "desnog" ( $r$ , engl. *right*) pravila množenja:

$$\underline{\mathbf{q}}_B \circ \underline{\mathbf{q}}_A = \mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{q}}_B) \underline{\mathbf{q}}_A = \mathcal{M}_r(\underline{\mathbf{q}}_A) \underline{\mathbf{q}}_B \quad (2.37)$$

Iz čega je vidljivo da operatori  $\mathcal{M}_l$  i  $\mathcal{M}_r$  komutiraju. Kompleksna konjugacija kvaterniona  $\underline{\mathbf{q}}$  definirana je kao

$$\underline{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

a njegova norma,  $|\underline{\mathbf{q}}|$ , definirana je kao

$$|\underline{\mathbf{q}}| = \|\underline{\mathbf{q}} \circ \underline{\mathbf{q}}^*\| = q_0^2 + \mathbf{q}^\top \mathbf{q} \quad (2.39)$$

## Eulerovi parametri

Pokazuje se da su kvaternioni jedinične duljine, drugim nazivom *versori*, povezani s orijentacijom tijela, kada se nazivaju Eulerovim-Rodriguesovim parametrima. Radi lakšeg razlikovanja oznaka, Eulerove ćemo parametre zapisivati kao

$$\underline{\mathbf{k}} = \eta + \epsilon_1 \mathbf{i} + \epsilon_2 \mathbf{j} + \epsilon_3 \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Eulerovi parametri ispunjavaju uvjet normalnosti, odnosno jedinične duljine  $|\underline{\mathbf{k}}| = 1$ .

Euler-Rodriguesovi parametri povezani su s ekvivalentnom osi rotacije  $\mathbf{n}$  i polovicom kuta rotacije  $\varphi$  relacijama

$$\eta = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (2.41)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{n} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (2.42)$$

U slučaju versora, operatori  $\mathcal{M}_l$  i  $\mathcal{M}_r$  su ortogonalni, odnosno

$$\mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{k}})\mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{k}})^\top = \mathcal{M}_r(\underline{\mathbf{k}})\mathcal{M}_r(\underline{\mathbf{k}})^\top = \mathbf{I}_{4 \times 4}, \quad \forall \underline{\mathbf{k}} : |\underline{\mathbf{k}}| = 1. \quad (2.43)$$

### Transformacije pomoću parametara

Akcija rotacijske matrice  $\mathbf{R}$  na vektor  $\mathbf{a}$  da bi se dobio transformirani vektor  $\mathbf{a}'$  može se izraziti pomoću operacija množenja kvaterniona, tako da je

$$\underline{\mathbf{a}}' = \underline{\mathbf{k}} \circ \underline{\mathbf{a}} \circ \underline{\mathbf{k}}^* \quad (2.44)$$

gdje su  $\underline{\mathbf{a}}$  i  $\underline{\mathbf{a}}'$  vektorski kvaternioni sa skalarnim komponentama  $a_0 = a'_0 = 0$  i vektorskim komponentama  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{a}'$ . Versori također daju elegantne izraze za kompoziciju rotacija. Za  $\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_B \mathbf{R}_A$ , versor  $\underline{\mathbf{k}}_C$  koji odgovara matrici  $\mathbf{R}_C$  možemo dobiti iz  $\underline{\mathbf{k}}_A$  i  $\underline{\mathbf{k}}_B$  koji odgovaraju rotacijskim matricama  $\mathbf{R}_A$  i  $\mathbf{R}_B$  množenjem

$$\underline{\mathbf{k}}_C = \underline{\mathbf{k}}_B \circ \underline{\mathbf{k}}_A. \quad (2.45)$$

Ukoliko se vektor iz inercijskog koordinatnog sustava želi transformirati u koordinatni sustav tijela, izraz za to bi bio

$${}^B \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{k}}_{BI} \circ {}^I \underline{\mathbf{x}} \circ \underline{\mathbf{k}}_{BI}^* \quad (2.46)$$

### Rotacijska matrica

Uvrštavanjem veze Eulerovih parametara s osi i kutom rotacije (2.41) i (2.42) u Euler-Rodriguesovu formulu (2.20), dobivamo izraz za rotacijsku matricu pomoću Eulerovih

parametara kao u [4, 7]:

$$\mathbf{R}_{IB} = \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2(\eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon})) \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.47)$$

odnosno, koristeći  $\mathbf{R}_{BI} = \mathbf{R}_{IB}^T$  i svojstvo antisimetrične matrice  $\mathcal{S}(\mathbf{a})^T = -\mathcal{S}(\mathbf{a})$  dobivamo

$$\mathbf{R}_{BI} = \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2(\eta \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon})) \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}). \quad (2.48)$$

Nadalje, koristeći svojstvo (2.6), dobiva se izraz za rotacijsku matricu kao u [2, 3]:

$$\mathbf{R}_{BI} = (\eta^2 - \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^T - 2\eta \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.49)$$

Navedeni zapisi po raspisivanju se razlikuju samo po dijagonalnim elementima. Jednadžba (2.47) raspisana po komponentama daje

$$\mathbf{R}_{BI} = \begin{bmatrix} \eta^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1 \epsilon_2 + \eta \epsilon_3) & 2(\epsilon_1 \epsilon_3 - \eta \epsilon_2) \\ 2(\epsilon_1 \epsilon_2 - \eta \epsilon_3) & \eta^2 - \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2 \epsilon_3 + \eta \epsilon_1) \\ 2(\epsilon_1 \epsilon_3 + \eta \epsilon_2) & 2(\epsilon_2 \epsilon_3 - \eta \epsilon_1) & \eta^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

alternativno, koristeći svojstvo normalnosti parametara, dijagonalni elementi matrice mogu se zapisati i kao

$$\text{diag} \{ \mathbf{R}_{BI} \} = [1 - 2(\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2), 1 - 2(\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2), 1 - 2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)] \quad (2.51)$$

$$\text{diag} \{ \mathbf{R}_{BI} \} = [2(\eta^2 + \epsilon_1^2) - 1, 2(\eta^2 + \epsilon_2^2) - 1, 2(\eta^2 + \epsilon_3^2) - 1] \quad (2.52)$$

Pod pretpostavkom da se kvadratni članovi i umnošci parametara izračunaju u privremene varijable prije zbrajanja, jednadžba (2.50) zahtijeva 15 operacija zbrajanja i 15 množenja. Matrica s dijagonalnim elementima (2.51), kao u [2], zahtijeva 12 operacija zbrajanja i 18 operacija množenja, jednako kao i zapis (2.52), iz [3]. Zbog najmanjeg broja množenja, izračun rotacijske matrice pomoću izraza (2.50) brže će se izvršavati u računalnoj implementaciji od ostala dva navedena. U usporedbi s Eulerovim kutevima, izrazi za rotacijsku matricu iz Eulerovih parametara računski su mnogo efikasniji, što je jedan od razloga njihove raširene primjene u računalnim implementacijama.

Veoma bitno svojstvo Eulerovih parametara je istovjetnost kompleksne konjugacije i inverza, odnosno

$$\underline{\mathbf{k}}^* = \underline{\mathbf{k}}^{-1} \quad (2.53)$$

što odgovara rotaciji za isti kut (pošto  $\eta$  ostaje nepromijenjen) oko iste osi suprotnog smisla (pošto  $\epsilon$  mijenja predznak). Dakle, kinematski gledano, konjugacija  $\underline{\mathbf{k}}^*$  odgovara inverznoj transformaciji  $\underline{\mathbf{k}}^{-1}$ .

### Vremenska promjena parametara

U [8] je izveden izraz za vremensku derivaciju kvaterniona za njegovu kutnu brzinu, odnosno kutnu brzinu izraženu u komponentama pomičnog koordinatnog sustava. Izraz je izveden pomoću limesa promjene i predstavlja rotaciju za  $2\dot{\varphi}$  gdje je  $\dot{\varphi}$  vremenska derivacija kuta zakreta oko osi kvaterniona. Kako bi se dobio izraz za vremensku promjenu parametara, tako dobiven izraz potrebno je pomnožiti s  $\frac{1}{2}$  kako bi predstavljao promjenu kvaterniona za promjenu kuta  $\dot{\varphi}$ . Vremenska promjena parametara povezana je s kutnom brzinom u koordinatnom sustavu  $B$  preko

$$\dot{\underline{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{k}} \circ \underline{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.54)$$

gdje je  $\underline{\boldsymbol{\omega}} = [0, \boldsymbol{\omega}^T]^T$  zapis kutne brzine kao čistog kvaterniona. Identičan izraz izveden je u [4], no koristeći dulji i kompliciraniji izvod.

Versor  $\underline{\mathbf{k}}$  predstavlja transformaciju iz koordinatnog sustava  $I$  u sustav  $B$ , a njegova vremenska promjena  $\dot{\underline{\mathbf{k}}}$  promjenu orijentacije tijela izražene u koordinatnom sustavu  $I$ . Vremenska promjena također se naziva *kinematska diferencijalna jednadžba*.

Pošto je diferencijalna jednadžba parametara povezana s množenjem kvaterniona, operatori množenja  $\mathcal{M}_l$  i  $\mathcal{M}_r$  povezani su s istom. U [7] izvode se dvije *diferencijalne mape*  $\mathcal{H}_l$  i  $\mathcal{H}_r$ , od kojih je  $\mathcal{H}_r$

$$\mathcal{H}_r(\underline{\mathbf{k}}) = 2\mathcal{M}_r(\underline{\mathbf{k}})^T = \mathcal{M}_r(\underline{\mathbf{k}}^*) \quad (2.55)$$

povezana s kutnim brzinama na tijelu preko izraza

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \mathcal{H}_r(\underline{\mathbf{k}})\dot{\underline{\mathbf{k}}}. \quad (2.56)$$

Inverz navedene diferencijalne mape je

$$\mathcal{H}_r(\underline{\mathbf{k}})^{-1} = \frac{1}{2}\mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{k}}). \quad (2.57)$$

Iz (2.56) očitno je

$$\underline{\dot{\mathbf{k}}} = \mathcal{H}_r(\underline{\mathbf{k}})^{-1} \underline{\omega}, \quad (2.58)$$

te uvrštavanjem (2.57) dobivamo matični izraz

$$\underline{\dot{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{k}}) \underline{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta & -\boldsymbol{\epsilon}^\top \\ \boldsymbol{\epsilon} & \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

što koristeći svojstvo komutativnosti operatora množenja (2.37) možemo alternativno zapisati kao

$$\underline{\dot{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_r(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \underline{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^\top \\ \boldsymbol{\omega} & \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Stupac koji se množi s nulom u izrazu (2.59) može se zanemariti, odnosno izbaciti iz matrice, da bi se dobio kraći i efikasniji zapis kao u [4]. Matricama  $\mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{k}})$  i  $\mathcal{M}_r(\underline{\boldsymbol{\omega}})$  obično se daju posebne oznake. Raspisano po komponentama imamo

$$\underline{\dot{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2} \mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}}) \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 \\ \eta & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & \eta & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\underline{\dot{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\underline{\boldsymbol{\omega}}) \underline{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Matrica  $\mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}})$  može se zapisati kao

$$\mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}}) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\epsilon}^\top \\ \mathbf{T}(\underline{\mathbf{k}}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(\underline{\mathbf{k}}) = \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.63)$$

gdje matrice  $\mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}})$  i  $\mathbf{T}(\underline{\mathbf{k}})$  zadovoljavaju svojstva

$$\mathbf{T}^\top \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^\top = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^\top \quad (2.64)$$

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{T}^\top \mathbf{T} + \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^\top = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (2.65)$$

te zbog izraza (2.65) pseudo-inverz matrice  $\mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}})$  glasi

$$\mathbf{U}^\dagger(\underline{\mathbf{k}}) = (\mathbf{U}^\top \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^\top = \mathbf{U}^\top(\underline{\mathbf{k}}) \quad (2.66)$$



Iz toga slijedi da vrijedi

$$\mathbf{U}^\top(\underline{\mathbf{k}}) = [-\boldsymbol{\epsilon}, \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon})] \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.67)$$

Matrica  $\mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}})$  je linearna u  $\underline{\mathbf{k}}$ , što znači da se njena vremenska derivacija može zapisati kao  $\dot{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{U}(\dot{\underline{\mathbf{k}}})$ , te iz toga vrijedi

$$\dot{\mathbf{U}}^\top(\underline{\mathbf{k}})\dot{\underline{\mathbf{k}}} = \mathbf{U}^\top(\dot{\underline{\mathbf{k}}})\dot{\underline{\mathbf{k}}} = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

Iz navedenog se mogu izvesti izrazi korisni za generiranje referentnih trajektorija:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{U}^\top(\underline{\mathbf{k}})\dot{\underline{\mathbf{k}}} \quad (2.69)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 2\mathbf{U}^\top(\underline{\mathbf{k}})\ddot{\underline{\mathbf{k}}} \quad (2.70)$$

Vremenska promjena konjugiranog versora prema [8] je

$$\dot{\underline{\mathbf{k}}}^* = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \circ \underline{\mathbf{k}}^*. \quad (2.71)$$

## Normalizacija

Tijekom numeričke integracije kinematskih jednadžbi zbog pogrešaka zaokruživanja može doći do nezadovoljavanja svojstva jedinične duljine, što iziskuje normalizaciju kvaterniona u svakom simulacijskom koraku, koja se može implementirati kao normalizacija vektora:

$$\underline{\mathbf{k}}^0 = \frac{\underline{\mathbf{k}}}{\|\underline{\mathbf{k}}\|} = \frac{\underline{\mathbf{k}}}{\sqrt{\eta^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2}} = \frac{\underline{\mathbf{k}}}{\sqrt{\underline{\mathbf{k}}^\top \underline{\mathbf{k}}}} \quad (2.72)$$

Alternativni način normalizacije je uvođenjem pogreške norme  $\varepsilon$

$$\varepsilon = 1 - (\eta^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2), \quad (2.73)$$

i dodatnog člana u kinematsku diferencijalnu jednadžbu tako da ona glasi

$$\dot{\underline{\mathbf{k}}} = \frac{1}{2}\mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}})\boldsymbol{\omega} + K\varepsilon\underline{\mathbf{k}} \quad (2.74)$$

gdje je  $K$  pozitivna konstanta koja normu ispravlja ka jediničnoj ako greška  $\varepsilon$  postane nejednaka nuli. Pojačanje  $K$  potrebno je pažljivo izabrati pošto velika vrijednost pojačanja ubrzava konvergenciju norme, no uvodi brzu dinamiku u sustav, što može dovesti

do usporavanja simulacije kada su u pitanju integratori s promjenjivim vremenskim korakom, kao i do potrebe za većim brojem koraka kod integratora s fiksnim vremenskim korakom. Ovakva je metoda normalizacije implemenitrana u MATLAB-ovom *Aerospace Blockset-u* za *Simulink*.

Zbog nepoželjnih učinaka metode opisane jednadžbama (2.73) i (2.74), preferirana metoda normalizacije je (2.72). Ispravljanje norme potrebno je samo kod numeričke integracije.

## 2.2.4 Ostali zapisi orijentacije

U kontekstu Eulerovih parametara, te osi i kuta rotacije, mogu se zbog potpunosti prikazati još dva minimalna zapisa orijentacije. Pošto su zapisi minimalni, sadrže singularnost i u ovom se radu neće koristiti za upravljanje stavom, iako se Rodriguesovi parametri veoma često koriste u tu svrhu.

### Eulerova rotacija

Eulerova rotacija je troparametarski zapis orijentacije koji se pomoću Eulerovih parametara može definirati kao

$$\mathbf{e} = \mathbf{n} \sin \varphi = 2 \eta \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.75)$$

Rotacijska matrica ne može se jednostavno dobiti iz Eulerove rotacije pošto rotacije  $\varphi$  i  $\pi - \varphi$  predstavljaju istu Eulerovu rotaciju. Eulerove rotacije singularne su za  $\eta = 0$  i  $\eta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$ .

### Rodriguesovi parametri

Rodriguesovi parametri mogu se definirati kao

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{n} \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\eta} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.76)$$

Iz čega se vidi da postoji singularnost za  $\eta = 0$ , odnosno za  $\varphi = 0$  i  $\varphi = 2\pi$ . Rotacijska matrica može se dobiti iz izraza

$$\mathbf{R}_\rho = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{2}{\rho^\top \rho + 1} (\mathcal{S}(\rho) + \mathcal{S}(\rho) \mathcal{S}(\rho)) \quad (2.77)$$

što raspisano po komponentama  $\rho = [\rho_1, \rho_2, \rho_3]^\top$  i uz definiciju

$$\rho_n = 1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 \quad (2.78)$$

daje

$$\mathbf{R}_\rho = \frac{2}{\rho_n} \begin{bmatrix} \frac{\rho_n}{2} - \rho_3^2 - \rho_2^2 & \rho_1 \rho_2 - \rho_3 & \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \\ \rho_1 \rho_2 + \rho_3 & \frac{\rho_n}{2} - \rho_3^2 - \rho_1^2 & \rho_2 \rho_3 - \rho_1 \\ \rho_1 \rho_3 - \rho_2 & \rho_2 \rho_3 + \rho_1 & \frac{\rho_n}{2} - \rho_2^2 - \rho_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Diferencijalna kinematska jednadžba Rodriguesovih parametara je

$$\dot{\rho} = (\mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\rho) + \rho \rho^\top) \omega = \mathbf{F}_\rho \omega \quad (2.80)$$

## 2.3 Pogreška orijentacije

Rotacijska matrica  $\mathbf{R} \in SO(3)$  između koordinatnog sustava  $I$  i koordinatnog sustava  $B$  predstavlja orijentaciju vozila. Neka  $\mathbf{R}_d$  predstavlja željenu orijentaciju, odnosno rotacijsku matricu iz sustava  $I$  u neki željeni koordinatni sustav, označen slovom  $D$ .

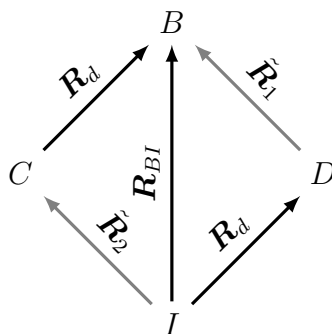
Cilj upravljanja je poklopiti koordinatni sustav  $B$  sa sustavom  $D$  tako da vrijedi

$$\mathbf{R}_{BI} = \mathbf{R}_d \quad (2.81)$$

Ukoliko se žele iskoristiti svojstva grupe rotacija, pogreška stava može se definirati kao

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{R}_d^\top \mathbf{R}_{BI} \quad \tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}_{BI} \mathbf{R}_d^\top \quad (2.82)$$

s ciljem upravljanja definiranim kao  $\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ , odnosno  $\tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ .



Slika 2.6: Transformacije koordinatnih sustava vezane uz pogreške stava  $\tilde{\mathbf{R}}_1$  i  $\tilde{\mathbf{R}}_2$ .

Dvije matrice pogreške mogu se interpretirati kao dva načina transformacije iz koordinatnog sustava tijela  $B$  u željeni koordinatni sustav  $D$ . Da bi se iz koordinatnog sustava  $D$  došlo u koordinatni sustav  $B$ , potrebno je prvo transformacijom  $\mathbf{R}_d$  doći u sustav  $I$ , te transformacijom  $\mathbf{R}_{IB}$  u sustav  $B$ . Matrica  $\tilde{\mathbf{R}}_1$  čini upravo to i predstavlja direktnu transformaciju iz koordinatnog sustava  $D$  u  $B$ . S druge strane, pogreška  $\tilde{\mathbf{R}}_2$  predstavlja transformaciju iz  $I$  u  $C$  tako da se prvo iz koordinatnog sustava  $I$  dođe u sustav  $B$ , te zatim pomoću  $\mathbf{R}_d$  u sustav  $C$ . Pošto pogreška  $\tilde{\mathbf{R}}_2$  nije direktno povezana s koordinatnim sustavom  $D$ , dalje će se koristiti pogreška stava  $\tilde{\mathbf{R}}_1 \equiv \tilde{\mathbf{R}}$ . Opisane transformacije koordinatnih sustava vizualizirane su na slici 2.6.

### 2.3.1 Pogreška pomoću Eulerovih parametara

Pogreška stava može se umjesto umnoškom matricom zapisati umnoškom versora. Razlika između trenutnog stava  $\underline{\mathbf{k}}$  i željenog stava  $\underline{\mathbf{k}}_d$  zapis je rotacijske matrice  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_d^\top \mathbf{R}$  pomoću parametara. Navedeni matični umnožak odgovara množenju kvaterniona  $\tilde{\underline{\mathbf{k}}} = \bar{\underline{\mathbf{k}}}_d \circ \underline{\mathbf{k}}$ , odnosno

$$\tilde{\underline{\mathbf{k}}} = \bar{\underline{\mathbf{k}}}_d \circ \underline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \eta_d & \boldsymbol{\epsilon}_d^\top \\ -\boldsymbol{\epsilon}_d & \eta_d \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_d \eta + \boldsymbol{\epsilon}_d^\top \boldsymbol{\epsilon} \\ \eta_d \boldsymbol{\epsilon} - \eta \boldsymbol{\epsilon}_d - \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

što raspisano po komponentama daje

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\epsilon}_1 \\ \tilde{\epsilon}_2 \\ \tilde{\epsilon}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_d & -\epsilon_{d1} & -\epsilon_{d2} & -\epsilon_{d3} \\ -\epsilon_{d1} & \eta_d & -\epsilon_{d3} & \epsilon_{d2} \\ -\epsilon_{d2} & \epsilon_{d3} & \eta_d & -\epsilon_{d1} \\ -\epsilon_{d3} & -\epsilon_{d2} & \epsilon_{d1} & \eta_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Navedeni zapis predstavlja transformaciju iz koordinatnog sustava  $D$  u sustav  $B$ . Ukoliko se želi dobiti obrnuta transformacija, odnosno iz  $B$  u  $D$ , to odgovara matrici  $\tilde{\mathbf{R}}^\top = \mathbf{R}$ , odnosno

$$\tilde{\mathbf{k}}_{BD} = \bar{\mathbf{k}} \circ \mathbf{k}_d = \begin{bmatrix} \eta_d & -\boldsymbol{\epsilon}_d^\top \\ -\boldsymbol{\epsilon}_d & \eta_d \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_d \eta + \boldsymbol{\epsilon}_d^\top \boldsymbol{\epsilon} \\ \eta_d \boldsymbol{\epsilon} - \eta \boldsymbol{\epsilon}_d + \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}_d) \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Kada se koordinatni sustavi  $B$  i  $D$  poklapaju, vrijedi  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ , što odgovara Eulerovim parametrima  $\tilde{\mathbf{k}} = [\pm 1, \mathbf{0}^\top]^\top$ .

### 2.3.2 Pogreška pomoću Eulerovih kuteva

U praksi se kao signali pogreške Eulerovih kuteva uzima aritmetička razlika kuteva, odnosno

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_d = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_d \\ \theta_d \\ \psi_d \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Ova formulacija vrijedi za male kuteve valjanja i propinjanja, odnosno za  $\phi \approx 0$  i  $\theta \approx 0$ .

Ukoliko bi se željela iskoristiti algebra  $SO(3)$ , signale pogreške Eulerovih kuteva bilo bi potrebno dobiti iz matrice

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_d^\top \mathbf{R}_{BI} \quad (2.87)$$

Eulerovi se kutevi u XYZ konvenciji mogu dobiti iz rotacijske matrice prema izrazima

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= \arctan\left(\frac{\tilde{R}_{23}}{\tilde{R}_{33}}\right) \\ \tilde{\theta} &= \arcsin\left(-\tilde{R}_{21}\right) \\ \tilde{\psi} &= \arctan\left(\frac{\tilde{R}_{12}}{\tilde{R}_{11}}\right)\end{aligned}\quad (2.88)$$

Na ovaj se način dobiva nelinearna greška stava pomoću Eulerovih kuteva:

$$\tilde{\phi} = -\arctan\frac{c\phi_d c\theta_d (c\psi s\phi - c\phi s\psi s\theta) - c\theta_d s\phi_d (c\phi c\psi + s\phi s\psi s\theta) + c\theta s\psi s\theta_d}{s\theta s\theta_d + c\theta c\theta_d s\phi s\phi_d + c\phi c\phi_d c\theta c\theta_d}\quad (2.89)$$

$$\tilde{\theta} = \arcsin(c\phi_d c\theta_d (s\phi s\psi - c\phi c\psi s\theta) + c\theta_d s\phi_d (c\phi s\psi - c\psi s\phi s\theta) + c\psi c\theta s\theta_d)\quad (2.90)$$

$$\tilde{\psi} = \arctan\frac{A - B + c\psi c\theta c\theta_d s\psi_d}{C + D + c\psi c\psi_d c\theta c\theta_d}$$

$$A = (s\phi s\psi - c\phi c\psi s\theta)(c\psi_d s\phi_d - c\phi_d s\psi_d s\theta_d)$$

$$B = (c\phi s\psi - c\psi s\phi s\theta)(c\phi_d c\psi_d + s\phi_d s\psi_d s\theta_d)\quad (2.91)$$

$$C = (c\phi s\psi - c\psi s\phi s\theta)(c\phi_d s\psi_d - c\psi_d s\phi_d s\theta_d)$$

$$D = (s\phi s\psi - c\phi c\psi s\theta)(s\phi_d s\psi_d - c\phi_d c\psi_d s\theta_d)$$

Često se razmatraju slučajevi kada su kutevi valjanja i propinjanja blizu nule, pa je interesantno linearizirati pogrešku oko  $\phi \approx 0$  i  $\theta \approx 0$ , što daje

$$\tilde{\phi} = -\arctan\frac{c\psi\phi + \theta_d s\psi - \phi_d(c\psi + \phi s\psi\theta) - s\psi\theta}{\phi_d\phi + \theta_d\theta + 1}\quad (2.92)$$

$$\tilde{\theta} = \arcsin(c\psi\theta_d - c\psi\theta + \phi_d(s\psi - c\psi\phi\theta) + \phi s\psi)\quad (2.93)$$

$$\tilde{\psi} = -\arctan\frac{(c\psi_d + \phi_d\theta_d s\psi_d)(s\psi - c\psi\phi\theta) - c\psi s\psi_d + (c\psi_d\phi_d - \theta_d s\psi_d)(c\psi\theta - \phi s\psi)}{c\psi c\psi_d + (s\psi_d - c\psi_d\phi_d\theta_d)(s\psi - c\psi\phi\theta) + (c\psi_d\theta_d - \phi_d s\psi_d)(c\psi\theta - \phi s\psi)}\quad (2.94)$$

Ukoliko bi se ovako definirana pogreška koristila u povratnoj vezi, proporcionalni član upravljačkog zakona bio bi

$$\begin{bmatrix} K_P \\ M_P \\ N_P \end{bmatrix} = \mathbf{K}_P \mathbf{J}_2^{-1}(\boldsymbol{\psi}) \tilde{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{K}_P \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix}\quad (2.95)$$

Logika iza ovog izraza je sljedeća. Vremenske promjene Eulerovih kuteva nisu direktno povezane s kutnim brzinama oko koordinatnih osi tijela. Matrica  $\mathbf{J}_2^{-1}$  transformira Eulerove kuteve u kutne brzine tijela. Signal pogreške kuteva sada je proporcionalan kutnoj brzini oko odgovarajućih osi, dok proporcionalno pojačanje regulatora povezuje kutnu brzinu s momentom oko osi.

Ovako definirana povratna veza očito zahtijeva previše računskih operacija, pa se stoga ne koristi se u praktičnim primjenama. Osim toga, pati od singularnosti zapisa orijentacije pomoću Eulerovih kuteva. Ipak, ovaj je zapis interesantan radi usporedbe sa zapisom pogreške orijentacije pomoću Eulerovih parametara, iz čega se vidi golema prednost Eulerovih parametara koja proizlazi iz njihove povezanosti s prirodom rotacije krutog tijela.

## 2.4 Kinematika krutog gibanja

Spoj položaja i orijentacije tijela zvat ćemo *konfiguracija tijela*.

Analogno rotaciji tijela, postoji grupa krutih gibanja koja matematički opisuje prirodu gibanja krutog tijela. Ta se grupa u [9, 7] naziva *specijalna grupa krutih gibanja*  $SR(6)$ . Vektori koji pripadaju toj grupi nazivaju se *kinematski vektori* pošto opisuju kinematiku tijela i označavaju sa  $\mathbb{K}^6$  kako bi se naglasila njihova razlika od euklidskih vektora, prvenstveno zbog rotacijske kinematike. Istodobno razmatranje translacije i rotacije donosi puno praktičnih prednosti, kao što ćemo vidjeti u nastavku.

Kruto gibanje je relativno gibanje dvaju koordinatnih sustava koje uključuje i translaciju i rotaciju koordinatnog sustava. Pošto za kruto tijelo vrijedi pretpostavka da su sve točke međusobno kruto vezane, gibanje krutog tijela opisuje se kao relativno gibanje pomičnog koordinatnog sustava u odnosu na fiksni.

U regulaciji podvodnih vozila uobičajeno je gibanje razmatrati putem tzv. kinematske transformacijske matrice koja omogućuje istodobno razmatranje translacijskog i rotacijskog gibanja. No, to zapravo pruža samo notacijske prednosti, ali ne i prednosti u

performansama regulatora.

Kinematika krutog gibanja proizlazi iz geometrijske kinematike, a jedna od osnovnih interpretacija gibanja je tzv. vijčano gibanje. Osim zapisa rasprostranjenog u literaturi o automatskoj regulaciji navest ćemo i dva veoma praktična, no rijetko korištena načina opisivanja gibanja krutog tijela.

### 2.4.1 Odvojeno razmatranje translacije i rotacije

Dosad je obrađena samo parametrizacija i kinematika orijentacije. Ukoliko se istovremeno želi upravljati položajem i orijentacijom vozila, potrebno je istovremeno razmatrati translacijsko i rotacijsko gibanje.

Jedan očiti pristup, koji je veoma raširen u literaturi o modeliranju i upravljanju morskim vozilima, jest povezivanje translacijske i rotacijske kinematike pomoću *kinematske transformacijske matrice*  $\mathbf{J}$  tako da je

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nu} \quad (2.96)$$

Konfiguracijski vektor  $\boldsymbol{\xi}$  sadrži informaciju o položaju tijela u inercijskom koordinatnom sustavu, te relativnu orijentaciju koordinatnog sustava tijela u odnosu na inercijski. Ukoliko se koriste Eulerovi kutevi, diferencijalna jednadžba definirana je kao

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{IB} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_2(\boldsymbol{\psi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

gdje je  $\mathbf{J}_2(\boldsymbol{\psi})$  transformacijske matrica Eulerovih kuteva definirana ranije. U ovom slučaju kinematska transformacijska matrica  $\mathbf{J}$  je kvadratna i njen inverz definiran je kao

$$\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{IB}^{\top} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_2^{-1}(\boldsymbol{\psi}) \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

U slučaju Eulerovih parametara, kinematska diferencijalna jednadžba je

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{IB} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{2}\mathbf{U}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$



U ovom slučaju matrica nije kvadratna, pa nema pravi inverz. Umjesto toga, može se koristiti pseudo-inverz.

$$\mathbf{J}^\dagger(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{IB}^\top & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{4 \times 3} & 2\mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}})^\top \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Vidljivo je da kinematska transformacijska matrica predstavlja promjenu konfiguracije tijela, izražene nekim zapisom, u odnosu na brzine krutog tijela. Brzine su pri tome izražene u koordinatama koordinatnog sustava tijela. Dinamika se, umjesto u koordinatnom sustavu tijela, može zapisati u inercijskom pomoću relacije

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.101)$$

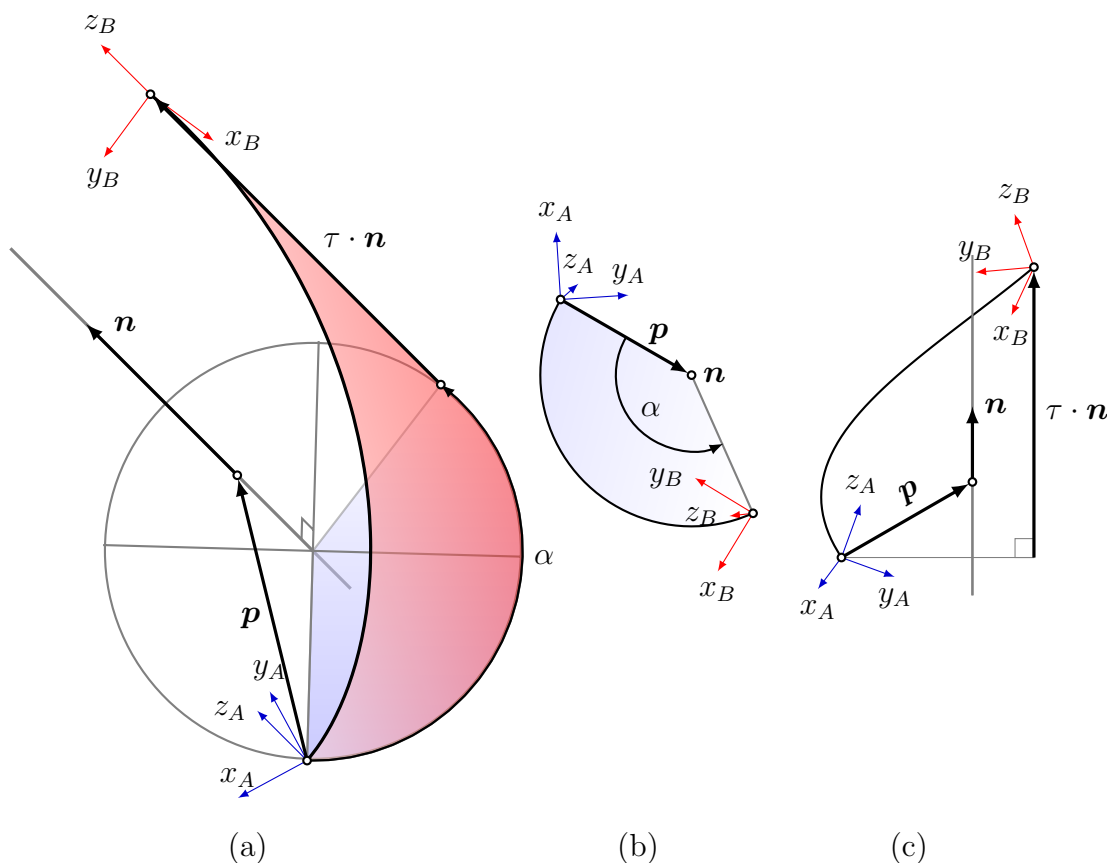
za Eulerove kuteve, odnosno

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{J}^\dagger(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2.102)$$

za Eulerove parametre. Supstitucijom vektora brzine dobiva se dinamika izražena u inercijskom koordinatnom sustavu, koja se nadalje koristi za sintezu regulatora u tom koordinatnom sustavu.

## 2.4.2 Vijčano gibanje

Mozzi-Chaslesov fundamentalni teorem gibanja kaže da se "svako kruto gibanje može predočiti planarnom rotacijom oko odgovarajuće osi, te uniformnom translacijom po istoj osi", kao što je prikazano na slici 2.7. Prema tome, svaki kruti pomak potpuno je definiran vektorom osi rotacije  $\mathbf{n}$ , kutom rotacije  $\alpha$ , skalarnom translacijom  $\tau$  po osi rotacije, te vektorom  $\mathbf{p}$  bilo koje točke na osi rotacije. Konačna geometrija gibanja podsjeća na navoj vijka, te se stoga takvo gibanje naziva vijčanim. Za razliku od čiste rotacije, položaj osi rotacije u prostoru nije proizvoljan, te se ona naziva *os vijka*.



Slika 2.7: Vijčano gibanje (a) iz  $A$  u  $B$  je rotacija (b) oko osi  $\mathbf{n}$ , opisanom u prostoru momentom osi  $\mathbf{p} \times \mathbf{n}$ , za kut  $\alpha$ , slijeđena translacijom (c) u smjeru iste osi za korak  $\tau$ .

Os vijka jedinstveno je opisana momentom osi  $\mathbf{m} = \mathbf{p} \times \mathbf{n}$ , gdje je  $\mathbf{p}$  vektor iz ishodišta do neke točke na pravcu osi. Odabir točke nije bitan, pošto za svaku točku na osi  $\mathbf{p} + \lambda \mathbf{n}$ , gdje je  $\lambda \in \mathbb{R}$  proizvoljni skalar, moment ostaje nepromijenjen jer je  $(\mathbf{p} + \lambda \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{n}$ . Ovakav način zapisivanja osi i njenog položaja vezan je uz tzv. *Plückerove linije* [7, 10].

### 2.4.3 Tenzorski zapis konfiguracije

Kruta transformacija vektora  $\mathbf{a}$  može se shvatiti kao rotacija vektora matricom  $\mathbf{R}$  slijeđena translacijom za  $\mathbf{t}$ , te je možemo zapisati kao

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a} + \mathbf{t}, \quad (2.103)$$

što se može zapisati pomoću linearne algebre kao

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.104)$$

gdje matrica koja sadržava  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{t}$  definira linearnu transformaciju vektora  $\mathbf{a}$ . Ovakav matični zapis omogućuje nam da uzastopne transformacije

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R}_1 \mathbf{a} + \mathbf{t}_1, \quad (2.105)$$

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \mathbf{a} + \mathbf{R}_2 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2, \quad (2.106)$$

zapišemo kao umnožak matrica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Ovakav način zapisa krutih transformacija veoma je praktičan, pa je zbog toga njegova primjena raširena u robotici, računalnoj grafici i sličnim područjima.

Transformacija koordinatnog sustava može se shvatiti kao transformacija njegovih jediničnih vektora, pa se njegov položaj i orijentacija mogu zapisati pomoću *4-D konfiguracijskog tenzora*

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.108)$$

Možemo definirati *4-D operator pomaka*  $\mathcal{D}_4$  kao

$$\mathcal{D}_4(\mathbf{t}, \mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

koji se može shvatiti kao umnožak dva operatora, i to *4-D translacijskog operatora*  $\mathcal{T}_4$

$$\mathcal{T}_4(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

i *4-D konvekcijskog operatora*  $\mathcal{A}_4$  definiranog kao

$$\mathcal{A}_4(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

tako da je

$$\mathcal{D}_4(\mathbf{t}, \mathbf{R}) = \mathcal{T}_4(\mathbf{t}) \mathcal{A}_4(\mathbf{R}). \quad (2.112)$$

Konfiguracijski tenzor definiran pomoću ovakvih operatora je globalna mjera krutih pomaka pošto uzima u obzir i translaciju i rotaciju. Navedeni operatori zajedno s  $4 \times 4$  transformacijskom matricom čine tzv. *specijalnu euklidsku grupu*  $SE(3)$ . Detaljni izvodi i analiza ovog zapisa može se pronaći u [11, 12].

Rjeđe korišteni zapis konfiguracije možemo dobiti razmatranjem transformacije tzv. Plückerovih koordinata linije. Kao što je pokazano kod definicije vijčanog gibanja, Plückerove koordinate definiraju liniju momentom  $\mathbf{m}$  i smjerom  $\mathbf{k}$  linije. Za dvije točke  $\mathbf{q}_1$  i  $\mathbf{q}_2$  na liniji, smjer je definiran kao

$$\mathbf{k} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \quad (2.113)$$

dok je moment linije definiran kao

$$\mathbf{m} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2, \quad (2.114)$$

te je okomit na smjer linije, odnosno vrijedi  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0$ . Kruta transformacija linije, odnosno njena rotacija i translacija, može se dobiti transformacijom točaka koje leže na liniji tako da je

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_1 &= \mathbf{R} \mathbf{q}_1 + \mathbf{t} \\ \mathbf{q}'_2 &= \mathbf{R} \mathbf{q}_2 + \mathbf{t}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

čijim uvrštavanjem dobivamo transformirane Plückerove koordinate

$$\mathbf{m}' = \mathbf{q}'_1 \times \mathbf{q}'_2 = \mathbf{R}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2) + \mathbf{R}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \mathbf{R}\mathbf{m} + \mathbf{R}\mathbf{k} \times \mathbf{t} \quad (2.116)$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{R}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad (2.117)$$

te možemo matricno zapisati

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}' \\ \mathbf{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathcal{S}(\mathbf{t}) \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

Ako se vijčano gibanje promatra u Plückerovim koordinatama, navedena transformaciju predstavlja transformaciju vijka, odnosno konfiguracije krutog tijela. Ta se činjenica

koristi za definiciju eksponencijalne reprezentacije krutog gibanja pomoću 6-D vektora. U [9, 7, 13] ovakav zapis se naziva eksponencijalni zapis *specijalne grupe krutog gibanja*  $SR(6)^4$ . Zbog velikih prednosti koje donosi u zapisu dinamike krutog tijela, ovaj će se zapis koristiti u nastavku rada. U nastavku ćemo definirati neka korisna svojstva ove reprezentacije.

Za konfiguraciju tijela s relativnim položajem  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$  u nekom osnovnom koordinatnom sustavu, i orijentacijom  $\mathbf{R} \in SO(3)$  naspram istog sustava, 6-D (šest-dimenzionalni) konfiguracijski tenzor  $\mathbf{C}$  definiran je kao

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathcal{S}(\mathbf{t}) \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

Može se definirati *operator 6-D pomaka* kao

$$\mathcal{D}(\mathbf{t}, \mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathcal{S}(\mathbf{t}) \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

koji se može zapisati kao umnožak operacije translacije i operacije rotacije

$$\mathcal{D}(\mathbf{t}, \mathbf{R}) = \mathcal{T}_6(\mathbf{t})\mathcal{A}(\mathbf{R}) \quad (2.121)$$

gdje je  $\mathcal{T}(\mathbf{t})$  *6-D translacijski operator* definiran kao

$$\mathcal{T}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathcal{S}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

a  $\mathcal{A}(\mathbf{R})$  je *6-D konvekcijski operator*, defined kao

$$\mathcal{A}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

za koje vrijede sljedeće jednakosti

$$\mathcal{T}(\mathbf{t})^{-1} = \mathcal{T}(-\mathbf{t}) \quad (2.124)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{R})^{-1} = \mathcal{A}(\mathbf{R}^{-1}) \quad (2.125)$$

---

<sup>4</sup>engl. *Special group of Rigid motion*

Za dva generička vektora  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathbb{R}^3$  i dvije generičke rotacijske matrice  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \text{SO}(3)$  vrijede sljedeće relacije za kombinacije operatora:

$$\mathcal{T}(\mathbf{t}_2) \mathcal{T}(\mathbf{t}_1) = \mathcal{T}(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) = \mathcal{T}(\mathbf{t}_1) \mathcal{T}(\mathbf{t}_2) \quad (2.126)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{R}_2) \mathcal{A}(\mathbf{R}_1) = \mathcal{A}(\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1) \quad (2.127)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{R}) \mathcal{T}(\mathbf{t}) \mathcal{A}(\mathbf{R})^{-1} = \mathcal{T}(\mathbf{R}\mathbf{t}) \quad (2.128)$$

Operator pomaka nasljeđuje sljedeća svojstva:

$$\mathcal{D}(\mathbf{t}, \mathbf{R}) = \mathcal{A}(\mathbf{R}) \mathcal{T}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{t}) \quad (2.129)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{t}, \mathbf{R})^{-1} = \mathcal{D}(-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{t}, \mathbf{R}^{-1}) \quad (2.130)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{t}_2, \mathbf{R}_2) \mathcal{D}(\mathbf{t}_1, \mathbf{R}_1) = \mathcal{D}(\mathbf{t}_2 + \mathbf{R}_2\mathbf{t}_1, \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1) \quad (2.131)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{t}_2, \mathbf{R}_2) \mathcal{D}(\mathbf{t}_1, \mathbf{R}_1)^{-1} = \mathcal{D}(\mathbf{t}_2 - \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{t}_1, \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}) \quad (2.132)$$

Kao i kod rotacija, sve parametrizacije krutog gibanja nasljeđuju ova svojstva.

#### 2.4.4 Brzina tijela i poopćeni vektorski produkti

Translacijska brzina tijela iz gledišta inercijskog koordinatnog sustava je

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} + \mathcal{S}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} \quad (2.133)$$

gdje je  $\dot{\mathbf{x}}$  brzina točke koja je kruto vezana uz pomično tijelo, a  $\boldsymbol{\omega}$  je kutna brzina tijela. Brzina  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$  je jednaka za sve točke kruto vezane uz tijelo te se zbog toga smije poopćiti na kinematski vektor  $\boldsymbol{\nu} = [\dot{\hat{\mathbf{x}}}^\top, \boldsymbol{\omega}^\top]^\top \in \mathbb{K}^6$ .

Poopćena brzina  ${}^I\boldsymbol{\nu} = [\dot{\hat{\mathbf{x}}}^\top, {}^I\boldsymbol{\omega}^\top]^\top \in \mathbb{K}^6$  u inercijskom i njena zakrenut slika u koordinatnom sustavu tijela  $\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{v}^\top, \boldsymbol{\omega}^\top]^\top \in \mathbb{K}^6$  su oboje kinematski vektori. Njihov prvi 3-D vektorski dio je *linearna* komponenta, dok je drugi 3-D vektorski dio *kutna* komponenta. Relacija između "slika" poopćenih brzina je

$${}^I\boldsymbol{\nu} = \mathcal{A}(\mathbf{R}_{IB}) \boldsymbol{\nu} \quad (2.134)$$

Veza između poopćene brzine u inercijskom  ${}^I\boldsymbol{\nu}$  i u koordinatnom sustavu tijela  $\boldsymbol{\nu}$  je

$${}^I\boldsymbol{\nu} = \mathbf{C} \boldsymbol{\nu} \quad (2.135)$$

Kinematska diferencijalna jednačba može se analogno rotacijskom slučaju (2.18) zapisati korištenjem poopćenog vanjskog produkta

$$\dot{\mathbf{C}} = ({}^L\boldsymbol{\nu}) \times \mathbf{C} \quad (2.136)$$

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) \times \quad (2.137)$$

gdje je  $(\cdot) \times$  sjeveroistočni vanjski produkt<sup>5</sup>, koji je definiran kao

$$(\bullet) \times = \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\bullet_2) & \mathcal{S}(\bullet_1) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathcal{S}(\bullet_2) \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

za generički vektor  $\bullet = [\bullet_1^T, \bullet_2^T]^T \in \mathbb{K}^6$ , gdje je  $\bullet_1$  linearna, a  $\bullet_2$  kutna komponenta. Ovaj operator predstavlja 6-D proširenje običnog vektorskog produkta  $\mathcal{S}(\cdot)$ . Može se uočiti analogija diferencijalne jednačbe konfiguracije (2.137) i rotacije (2.18).

Za vektore  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{K}^6$  vrijede svojstva

$$(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad (2.139)$$

$$((\mathbf{a}) \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + ((\mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + ((\mathbf{c}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad (2.140)$$

$$((\mathbf{a}) \times \mathbf{b}) \times = (\mathbf{a}) \times (\mathbf{b}) \times - (\mathbf{b}) \times (\mathbf{a}) \times \quad (2.141)$$

koja govore da je  $(\cdot) \times$  bilinearna i asimetrična operacija na  $\mathbb{K}^6$  (2.139), koja zadovoljava Jacobijev identitet (2.140) i tako predstavlja komutator na prostoru  $\mathbb{K}^6$ , koji zbog toga ima strukturu Lieve algebre.

Postoje još dva poopćenja vanjskog produkta u 6-D prostoru - jugozapadni vanjski produkt<sup>6</sup>  $(\cdot) \times$  i jugoistočni vanjski produkt<sup>7</sup>  $(\cdot) \times$ , koji su definirani matičnim oblicima

$$(\bullet) \times = \begin{bmatrix} \mathcal{S}(\bullet_2) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathcal{S}(\bullet_1) & \mathcal{S}(\bullet_2) \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

$$(\bullet) \times = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathcal{S}(\bullet_1) \\ \mathcal{S}(\bullet_1) & \mathcal{S}(\bullet_2) \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

<sup>5</sup>engl. *North-East cross product*

<sup>6</sup>engl. *South-West cross-product*

<sup>7</sup>engl. *South-East cross-product*

te zadovoljavaju svojstva

$$(\bullet) \times = -((\bullet) \times)^T \quad (2.144)$$

$$(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b}) \times \mathbf{a} \quad (2.145)$$

$$(\bullet) \times = -((\bullet) \times)^T \quad (2.146)$$

Izraz (2.144) predstavlja vezu između jugozapadnog i sjeveroistočnog vanjskog produkta, a (2.145) između jugozapadnog i jugoistočnog. Izraz (2.146) pokazuje antisimetričnost jugoistočnog vanjskog produkta, što je svojstvo koje je bitno u dinamici. Poopćeni vektorski produkti u kontekstu ovog rada su bitni za dinamiku krutog tijela.

### 2.4.5 Euler-Rodriguesova parametrizacija gibanja

Kako su Eulerovi parametri za opis orijentacije tijela povezani s fundamentalnim teoremom rotacije, postavlja se pitanje može li se isto proširiti i na kruto gibanje. Odgovor je potvrđan, i rješenje dolazi od razmatranja vijčanog gibanja. Naime, ispostavlja se da se to može postići korištenjem dualnog broja s elementima koji su kvaternioni, odnosno dualnog kvaterniona. Ova je parametrizacija povezana s polovinom kuta zakreta, pa se zato naziva Euler-Rodriguesova parametrizacija gibanja. Korištenje dualnih brojeva proizlazi iz toga što oni predstavljaju jedan od zapisa principa prijenosa (engl. *transferrence principle*) reprezentacija krutog gibanja. Veoma je interesantno da su kinematski izrazi Eulerovih parametara i Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja identični kada se koristi zapis pomoću dualnih kvaterniona. Isto tako možemo proširiti kinematsku diferencijalnu jednadžbu da izrazi ostanu identični.

Ova parametrizacija je interesantna jer predstavlja direktno proširenje Eulerovih parametara koji se koriste za regulaciju orijentacije krutih tijela, te se prirodno postavlja pitanje može li se i kako ova reprezentacija koristiti za regulaciju krutog gibanja. U konačnici se ispostavlja da kinematska pogreška dualnog kvaterniona zapravo predstavlja direktno proširenje pogreške Eulerovih parametara na pogrešku konfiguracije tijela, te unificira zapis pogreške. Ova problematika nije obrađena u literaturi, pa predstavlja



originalni doprinos ovog rada. Ovdje ćemo prikazati i izvesti neke osnovne kinematske relacije koje će biti korisne za regulaciju, odnosno kinematiku pogreške.

### Dualni brojevi

Dualni broj definiran je kao kombinacija *primarne komponente*  $a \in \mathbb{R}$  i *dualne komponente*  $b \in \mathbb{R}$ , tako da vrijedi

$$d = a + \epsilon b \quad (2.147)$$

gdje za *dualnu jedinicu*  $\epsilon$  vrijedi  $\epsilon^2 = 0$  i  $\epsilon \neq 0$ . *Dualna konjugacija* broja  $d$  definirana je kao

$$\bar{d} = a - \epsilon b \quad (2.148)$$

Zbog svojstva dualne jedinice  $\epsilon$ , umnožak dvaju dualnih brojeva glasi

$$d_A d_B = (a_A + \epsilon b_A)(a_B + \epsilon b_B) = a_A a_B + \epsilon(a_A b_B + b_A a_B) \quad (2.149)$$

Dualni vektori definirani su na istovjetan način, tako da binarne operacije vektorskog i skalarnog produkta nad dualnim vektorima  $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \epsilon \mathbf{b}$  s komponentama  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  glase

$$\mathbf{d}_A \cdot \mathbf{d}_B = \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_B + \epsilon(\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{b}_B + \mathbf{a}_B \cdot \mathbf{b}_A) \quad (2.150)$$

$$\mathbf{d}_A \times \mathbf{d}_B = \mathbf{a}_A \times \mathbf{a}_B + \epsilon(\mathbf{a}_A \times \mathbf{b}_B + \mathbf{a}_B \times \mathbf{b}_A) \quad (2.151)$$

gdje je  $\mathbf{d}_A = \mathbf{a}_A + \epsilon \mathbf{b}_A$  i  $\mathbf{d}_B = \mathbf{a}_B + \epsilon \mathbf{b}_B$ .

### Dualni kvaternion

Kruto gibanje se, ekvivalentno rotaciji, može opisati pomoću skupa četiri dualna parametra  $\underline{\mathbf{g}}$ . Dualni kvaternion [7, 14, 10] koji opisuje kruto gibanje definiran je kao

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{k}} + \epsilon \underline{\mathbf{f}} \quad (2.152)$$

gdje je  $\underline{\mathbf{g}}$  dualni kvaternion,  $\underline{\mathbf{k}}$  jedinični kvaternion koji opisuje orijentaciju pomaknutog koordinatnog sustava, a  $\underline{\mathbf{f}}$  je kvaternion koji opisuje pomak tako da je

$$f_0 = -\frac{\tau}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \quad \mathbf{f} = \mathbf{m} \sin \frac{\alpha}{2} + \mathbf{n} \frac{\tau}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (2.153)$$

Za dualni kvaternion vrijedi uvjet normalnosti

$$\eta f_0 + \epsilon \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (2.154)$$

Kompozicija transformacija s dualnim kvaternionima ima identičan izraz kao i kod običnih, odnosno kombinacija  $\underline{\mathbf{g}}_B$  i  $\underline{\mathbf{g}}_A$  je

$$\underline{\mathbf{g}}_C = \underline{\mathbf{g}}_B \circ \underline{\mathbf{g}}_B \quad (2.155)$$

Transformacija vektora  $\mathbf{r}$  pomoću dualnog kvaterniona je definirana kao

$$\underline{\mathbf{r}}' = \underline{\mathbf{g}} \circ \underline{\mathbf{r}} \circ \underline{\mathbf{g}}^* \quad (2.156)$$

gdje  $\underline{\mathbf{g}}^*$  predstavlja i dualnu i kompleksnu konjugaciju. Tako se rotacija vektora  $\mathbf{r}$  zapisanog kao

$$\underline{\mathbf{r}} = 1 + \epsilon(r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j} + r_3 \mathbf{k}) \quad (2.157)$$

dualnim kvaternionom koji ima samo primarnu komponentu  $\underline{\mathbf{k}}$ , dok je dualna komponenta  $\underline{\mathbf{f}} = 0$ , može zapisati kao

$$\underline{\mathbf{r}}' = \underline{\mathbf{k}} \circ (1 + \epsilon(r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j} + r_3 \mathbf{k})) \circ \underline{\mathbf{k}}^* \quad (2.158)$$

$$= 1 + \epsilon \underline{\mathbf{k}}(r_1 \mathbf{i} + r_2 \mathbf{j} + r_3 \mathbf{k}) \underline{\mathbf{k}}^* \quad (2.159)$$

iz čega je vidljivo da je dualni dio jednak izrazu za rotaciju vektora. Dualni kvaternion može prikazati i čistu translaciju. Jedinični dualni kvaternion  $\underline{\mathbf{g}}_t$  definiran kao

$$\underline{\mathbf{g}}_t = 1 + \frac{1}{2} \epsilon \underline{\mathbf{t}} = 1 + \frac{1}{2} \epsilon (t_1 \mathbf{i} + t_2 \mathbf{j} + t_3 \mathbf{k}) \quad (2.160)$$

predstavlja translaciju za vektor  $\mathbf{t} = [t_1, t_2, t_3]^T$ . Dualni kvaternion povezan je s *polovicom* translacijskog vektora, analogno Eulerovim parametrima, koji su povezani s polovicom kuta zakreta. Ukoliko vektor  $\mathbf{r}$  transformiramo s  $\underline{\mathbf{t}}$ , dobivamo

$$\underline{\mathbf{g}}_t \circ \underline{\mathbf{r}} \circ \underline{\mathbf{g}}_t^* = 1 + \frac{1}{2} \epsilon \left( (r_1 + t_1) \mathbf{i} + (r_2 + t_2) \mathbf{j} + (r_3 + t_3) \mathbf{k} \right) \quad (2.161)$$

što pokazuje da  $\underline{\mathbf{g}}_t$  uistinu vrši translaciju nad  $\underline{\mathbf{r}}$ .

Sada možemo izvesti praktičniji izraz za dualni dio  $\underline{\mathbf{f}}$ . Ako se tijelo nalazi na položaju  $\mathbf{t}$  u nekom fiksnom koordinatnom sustavu, te ima orijentaciju  $\underline{\mathbf{k}}$ , njegova se ukupna

konfiguracija  $\underline{g}$  može dobiti translacijom za vektor  $\underline{t}$ , slijeđenom rotacijom za  $\underline{k}$ . Tako imamo

$$\underline{g} = \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon \underline{t}\right) \circ (\underline{k} + 0 \epsilon) = \underline{k} + \frac{1}{2} \epsilon \underline{t} \circ \underline{k} \quad (2.162)$$

odnosno, dualna komponenta od  $\underline{g}$  može se zapisati pomoću translacijskog vektora  $\underline{t}$  i orijentacije  $\underline{k}$  kao

$$\underline{f} = \frac{1}{2} \underline{t} \circ \underline{k} \quad (2.163)$$

iz čega proizlazi da se translacijski vektor može dobiti iz dualnog kvaterniona pomoću izraza

$$\underline{t} = 2 \underline{f} \circ \underline{k}^* \quad (2.164)$$

Dualni kvaternion je *mapa* grupe gibanja  $SR(6)$ , pa možemo ekvivalentno tenzorskom zapisu definirati operator pomaka

$$\mathcal{D}(\underline{t}, \underline{k}) = \mathcal{T}(\underline{t}) \mathcal{A}(\underline{k}) \stackrel{(2.162)}{=} \underline{k} + \frac{1}{2} \epsilon \underline{t} \circ \underline{k} \quad (2.165)$$

gdje se umjesto rotacijske matrice za zapis orijentacije koriste Eulerovi parametri. Translacijski operator definiran je kao

$$\mathcal{T}(\underline{t}) = 1 + \frac{1}{2} \epsilon \underline{t}, \quad (2.166)$$

dok je konvekcijski operator definiran kao

$$\mathcal{A}(\underline{k}) = \underline{k} + 0 \epsilon. \quad (2.167)$$

Eulerovi parametri su mapa rotacijske grupe  $SO(3)$ , te zadržavaju svojstva rotacijske matrice. Analogno tome, dualni kvaternioni su mapa grupe krutog gibanja, te za ovako definirane operatore vrijede svojstva (2.124)–(2.132).

### Vremenska promjena dualnog kvaterniona

Poopćena brzina  $\underline{\nu}$  može se zapisati u obliku dualnog kvaterniona kao

$$\underline{\nu} = \underline{\omega} + \epsilon \underline{v} \quad (2.168)$$

gdje je  $\underline{\omega}$  zapis vektora kutnih, a  $\underline{v}$  translacijskih brzina tijela u obliku kvaterniona. Sada se vremenska promjena dualnog kvaterniona može zapisati analogno rotacijskom slučaju pomoću operacije množenja

$$\underline{\dot{g}} = \frac{1}{2} \underline{g} \circ \underline{v} \quad (2.169)$$

Ova diferencijalna jednadžba također je, kao i u slučaju rotacija, povezana s diferencijalnom mapom  $\mathcal{H}_r$ , što se može pogledati u [7]. Raspisivanjem umnoška dobivamo

$$\underline{\dot{g}} = \frac{1}{2} (\underline{k} + \epsilon \underline{f}) \circ (\underline{\omega} + \epsilon \underline{v}) \quad (2.170)$$

što primjenjivanjem pravila množenja dualnih brojeva daje

$$\underline{\dot{g}} = \frac{1}{2} \underline{k} \circ \underline{\omega} + \frac{1}{2} \epsilon (\underline{k} \circ \underline{v} + \underline{f} \circ \underline{\omega}) \quad (2.171)$$

iz čega možemo izvući promjene primarne i dualne komponente dualnog kvaterniona

$$\underline{\dot{k}} = \frac{1}{2} \underline{k} \circ \underline{\omega} \quad (2.172)$$

$$\underline{\dot{f}} = \frac{1}{2} (\underline{k} \circ \underline{v} + \underline{f} \circ \underline{\omega}) \quad (2.173)$$

te se može uočiti da je promjena primarne komponente identična promjeni Eulerovih parametara, što je očito pošto ta komponenta predstavlja rotaciju.

Ukoliko komponente dualnog kvaterniona konfiguracije  $\underline{g}$  zapišemo kao vektor  $\underline{g}$ , a dualni kvaternion poopćenih brzina  $\underline{v}$  kao vektor  $\underline{v}^*$  tako da je

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{k} \end{bmatrix}, \quad \underline{v}^* = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix}, \quad (2.174)$$

vremensku promjenu dualnog kvaterniona možemo korištenjem linearnih operatora umnoška zapisati kao linearni matični operator

$$\underline{\dot{g}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathcal{M}_l(\underline{k}) & \mathcal{M}_l(\underline{f}) \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathcal{M}_l(\underline{k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

odnosno

$$\underline{\dot{g}} = \frac{1}{2} \mathbf{J}_d(\underline{g}) \underline{v}^* \quad (2.176)$$

gdje indeks  $d$  naglašava da se radi o dualnom kvaternionu.  $\mathbf{J}_d(\underline{g}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  se može shvatiti kao linearni operator množenja dvaju dualnih kvaterniona s vektorski zapisanim komponentama.

Nakon zanemarivanja stupaca koji se množe s nulom analogno Eulerovim parametrima dobivamo skraćenu kinematsku transformacijsku matricu  $\mathbf{U}_d(\underline{\mathbf{g}}) \in \mathbb{R}^{8 \times 6}$ :

$$\mathbf{U}_d(\underline{\mathbf{g}}) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\epsilon}^\top & -\mathbf{f}^\top \\ \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) & f_0 \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\mathbf{f}) \\ \mathbf{0}^\top & -\boldsymbol{\epsilon}^\top \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}}) & \mathbf{U}(\underline{\mathbf{f}}) \\ \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}}) \end{bmatrix} \quad (2.177)$$

gdje indeks  $d$  naglašava da se radi o dualnom kvaternionu. Možemo zapisati

$$\dot{\underline{\mathbf{g}}} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_d(\underline{\mathbf{g}}) \boldsymbol{\nu} \quad (2.178)$$

Pošto se prema (2.170) brzina može izraziti kao

$$\underline{\mathbf{v}} = 2 \underline{\mathbf{g}}^* \circ \dot{\underline{\mathbf{g}}} \quad (2.179)$$

inverz  $\mathbf{J}_{\underline{\mathbf{g}}}^{-1}$  dobiva se kao

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}} \\ \underline{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{k}}^*) & \mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{f}}^*) \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathcal{M}_l(\underline{\mathbf{k}}^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{f}}} \\ \dot{\underline{\mathbf{k}}} \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

odnosno

$$\boldsymbol{\nu}^* = 2 \mathbf{J}_{\underline{\mathbf{g}}}^{-1} \dot{\underline{\mathbf{g}}} \quad (2.181)$$

te se zanemarivanjem redaka koji rezultiraju nulom dobiva pseudo-inverz kinematske transformacijske matrice  $\mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}}) \in \mathbb{R}^{6 \times 8}$ :

$$\mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}}) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\epsilon} & \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) & -\mathbf{f} & f_0 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{S}(\mathbf{f}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\boldsymbol{\epsilon} & \eta \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^\top(\underline{\mathbf{k}}) & \mathbf{U}^\top(\underline{\mathbf{f}}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{U}^\top(\underline{\mathbf{k}}) \end{bmatrix} \quad (2.182)$$

tako da se brzina može zapisati kao

$$\boldsymbol{\nu} = 2 \mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}}) \dot{\underline{\mathbf{g}}} \quad (2.183)$$

Operator  $\mathbf{U}_d(\underline{\mathbf{g}})$  je linearan u  $\underline{\mathbf{g}}$ , te se zbog toga njegova derivacija po vremenu može zapisati kao  $\dot{\mathbf{U}}_d(\underline{\mathbf{g}}) = \mathbf{U}_d(\underline{\mathbf{g}})$ , analogno rotacijskom slučaju. Prema tome, koristeći (2.182) dobivamo također analogno rotacijskom slučaju

$$\dot{\mathbf{U}}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}}) \dot{\underline{\mathbf{g}}} = \mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}}) \dot{\underline{\mathbf{g}}} = \mathbf{0} \quad (2.184)$$

Prema tome, derivacija brzine po vremenu zapisana dualnim kvaternionom je

$$\dot{\nu} = 2 \left( \dot{U}_d^\dagger(\underline{g}) \dot{\underline{g}} + U_d^\dagger(\underline{g}) \ddot{\underline{g}} \right) \quad (2.185)$$

$$= 2U_d^\dagger(\underline{g}) \ddot{\underline{g}} \quad (2.186)$$

Ako analogno ostalim zapisima kinematike tijela za konfiguraciju koristimo oznaku  $\underline{\xi} = \underline{g}$ , dobivamo

$$\nu = 2U_d^\dagger(\underline{\xi}) \dot{\underline{\xi}} \quad (2.187)$$

$$\dot{\nu} = 2U_d^\dagger(\underline{\xi}) \ddot{\underline{\xi}} \quad (2.188)$$

### Pogreška konfiguracije

Možemo, analogno slučaju rotacije, izvesti pogrešku konfiguracije koristeći dualne kvaternione. Pogreška između trenutne konfiguracije  $\underline{g}$  i željene konfiguracije  $\underline{g}_d$  biti će

$$\tilde{\underline{g}} = \underline{g}_d^* \circ \underline{g}. \quad (2.189)$$

Raspisivanjem i množenjem dobivamo

$$\tilde{\underline{g}} = (\underline{k}_d^* + \epsilon \underline{f}_d^*) \circ (\underline{k} + \epsilon \underline{f}) \quad (2.190)$$

$$= \underline{k}_d^* \circ \underline{k} + \epsilon (\underline{k}_d^* \circ \underline{f} - \underline{f}_d^* \circ \underline{k}), \quad (2.191)$$

odnosno, po komponentama dualnog broja

$$\tilde{\underline{k}} = \underline{k}_d^* \circ \underline{k} \quad (2.192)$$

$$\tilde{\underline{f}} = \underline{k}_d^* \circ \underline{f} + \underline{f}_d^* \circ \underline{k} \quad (2.193)$$

Dualna komponenta povezana s translacijom može se napisati pomoću operatora množenja

$$\tilde{\underline{f}} = \mathcal{M}_l(\underline{k}_d^*) \underline{f} + \mathcal{M}_l(\underline{f}_d^*) \underline{k} \quad (2.194)$$

odnosno,

$$\tilde{\underline{f}} = \begin{bmatrix} \eta_d & \epsilon_d^\top \\ -\epsilon_d & \eta_d \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{S}(\epsilon_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ \underline{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{0d} & \underline{f}_d^\top \\ -\underline{f}_d & f_{0d} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathcal{S}(\underline{f}_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \underline{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

Pošto  $\underline{\tilde{f}}$  nema direktno fizikalno značenje, potrebno ga je transformirati u pogrešku položaja prema

$$\underline{\tilde{t}} = 2 \underline{\tilde{f}} \circ \underline{\tilde{k}}^* \quad (2.196)$$

Pogreška se može zapisati i korištenjem linearnog operatora množenja

$$\underline{\tilde{f}} = \mathbf{J}_d(\underline{\tilde{g}}^*) \underline{g} \quad (2.197)$$

Kao i u slučaju rotacija, ovako definirana pogreška je razlika između konfiguracije  $B$  i  $D$ , projicirana na, odnosno "gledana iz",  $D$ .

Vremenska promjena pogreške konfiguracije je

$$\underline{\dot{\tilde{g}}} = \frac{1}{2} \underline{\tilde{g}} \circ \underline{\tilde{v}} \quad (2.198)$$

gdje je  $\underline{\tilde{v}}$  pogreška brzine zapisana kao dualni kvaternion. Analogno (2.178) imamo

$$\underline{\dot{\tilde{g}}} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_d(\underline{\tilde{g}}) \underline{\tilde{v}} \quad (2.199)$$

## Dinamika i vanjske sile

---

U ovom poglavlju prikazat će se dinamika krutog tijela i izvesti neke od uobičajenih poremećajnih sila. Pokazat će se da se prema [2] dinamika tijela u 6 stupnjeva slobode s poremećajnim silama može zapisati kao

$$M\dot{\nu} + C(\nu)\nu + D(\nu)\nu + g(\xi) = \tau_{RB} \quad (3.1)$$

gdje je  $M$  = poopćena matrica inercije,  
 $C(\nu)$  = matrica centripetalnih i Coriolisovih sila,  
 $D(\nu)$  = matrica prigušenja,  
 $g(\xi)$  = vektor gravitacijskih sila i momenata,  
 $\tau_{RB}$  = vektor vanjskih sila i momenata,

što je oblik koji se uobičajeno koristi u literaturi o upravljanju morskim vozilima. Matrice inercije i centripetalnih sila u ovom poopćenom obliku uključuju tzv. dodanu inerciju, što je aproksimacija hidrodinamičkih sila koje djeluju na tijelo. Dodana inercija<sup>1</sup> ima značajan iznos kada je gustoća tijela slična gustoći okolnog fluida, što je slučaj kod vozila baziranih na uzgonu, odnosno podmornica i zračnih brodova. Ona je zapravo vanjska sila

---

<sup>1</sup>engl. *added mass*



koja djeluje na tijelo, no zbog jednostavnosti zapisa se često zbraja inerciji tijela. Njene su komponente prostorne derivacije hidrodinamičkih sila, koje imaju dimenziju mase, te se stoga mogu zbrojiti ukupnoj inerciji sustava.

Detaljan izvod korištenjem Newton-Eulerove i kvazi-Lagrangeove formulacije s pojedinačnim razmatranjem translacijske i rotacijske dinamike može se naći u [2]. Zbog konciznijeg zapisa, u ovom će se radu koristiti oblik dinamike pomoću grupe krutog gibanja, kao što je opisano u [9].

### 3.1 Dinamika krutog tijela

Poopćeni tenzor inercije krutog tijela (engl. *Rigid Body*) ima oblik

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3\times 3} & -m\mathcal{S}(\mathbf{r}_g) \\ m\mathcal{S}(\mathbf{r}_g) & \mathbf{I}_B \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $m\mathcal{S}(\mathbf{r}_g)$  statički moment, a  $\mathbf{I}_B$  je moment inercije oko ishodišta koordinatnog sustava tijela. Navedene komponente definirane su kao

$$m = \int_V \rho \, dV \quad (3.3)$$

$$m\mathcal{S}(\mathbf{r}_g) = \int_V \rho \mathbf{r} \, dV \quad (3.4)$$

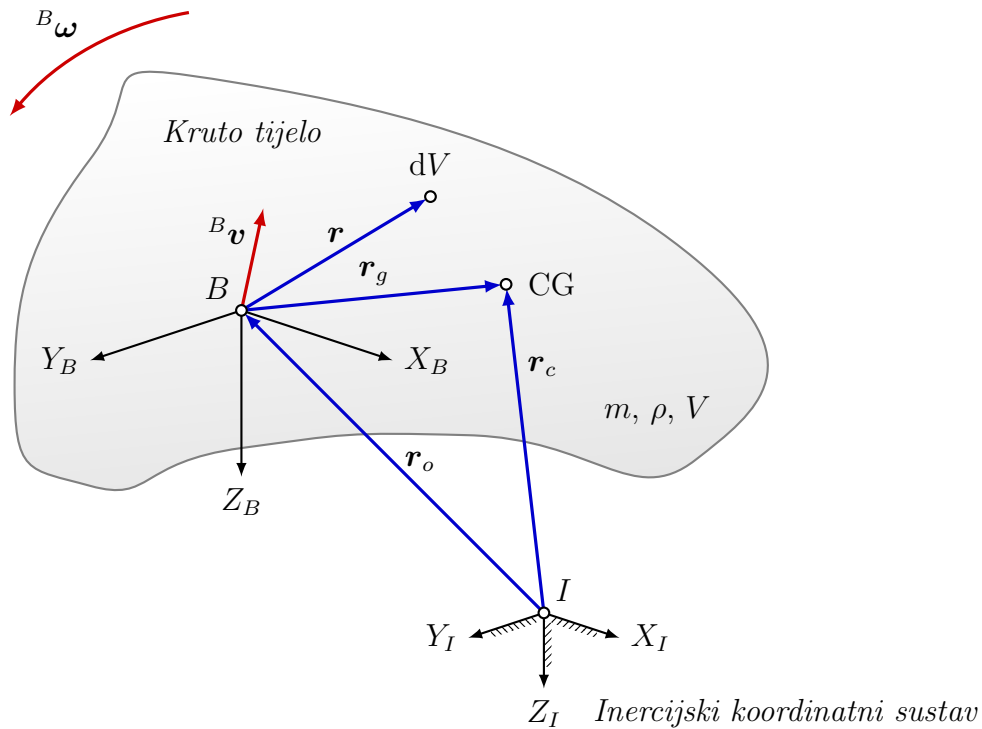
$$\mathbf{I}_B = - \int_V \rho \mathcal{S}(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\mathbf{r}) \, dV \quad (3.5)$$

gdje je  $\rho$  masena gustoća tijela,  $\mathbf{r}$  vektor od ishodišta koordinatnog sustava tijela do volumnog elementa, dok je  $\mathbf{r}_g$  vektor od ishodišta do centra mase definiran kao

$$\mathbf{r}_g = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho \, dV \quad (3.6)$$

Poopćeni tenzor inercije zadovoljava svojstvo simetričnosti

$$\mathbf{M}_{RB} = \mathbf{M}_{RB}^T > \mathbf{0}_{6\times 6} \quad (3.7)$$



Slika 3.1: Fiksni i pomični koordinatni sustav, te točke i brzine na krutom tijelu u pokretu.

Rotacijska inercija (3.5) oko koordinatnog sustava  $X_B Y_B Z_B$  smještenog u proizvoljnoj točki  $B$  na tijelu ima komponente

$$\mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

te je simetrična i veća od nule, odnosno

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_B^T > \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (3.9)$$

Elementi tenzora rotacijske inercije (3.5) mogu se jasnije zapisati kao

$$\begin{aligned} I_x &= \int_V (y^2 + z^2) \rho \, dV & I_{xy} &= \int_V xy \rho \, dV = \int_V yx \rho \, dV = I_{yx} \\ I_y &= \int_V (x^2 + z^2) \rho \, dV & I_{xz} &= \int_V xz \rho \, dV = \int_V zx \rho \, dV = I_{zx} \\ I_z &= \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dV & I_{zy} &= \int_V zy \rho \, dV = \int_V yz \rho \, dV = I_{yz} \end{aligned}$$

iz čega je vidljivo da zbog simetričnosti postoji samo 6 slobodnih parametara u tenzoru rotacijske inercije. Pošto se ishodište promatranog koordinatnog sustava tijela ne mora poklapati s njegovim centrom mase, inerciji oko centra mase je potrebno dodati Steinerov dodatak. Steinerov teorem paralelnih osi može se zapisati kao

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{I}_C - m\mathcal{S}(\mathbf{r}_g)\mathcal{S}(\mathbf{r}_g) = \mathbf{I}_C - m(\mathbf{r}_g\mathbf{r}_g^\top - \mathbf{r}_g^\top\mathbf{r}_g\mathbf{I}_{3\times 3}) \quad (3.10)$$

gdje je  $\mathbf{I}_C$  inercija oko centra mase.

Ukoliko se dinamika izvodi odvojenim razmatranjem translacijskog i rotacijskog gibanja, koriste se izrazi za količinu gibanja i kinetički moment

$$\mathbf{l}_C = m\mathbf{v}_C \quad \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{f}_C, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{h}_C = \mathbf{I}_B\boldsymbol{\omega}_C \quad \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{m}_C, \quad (3.12)$$

gdje je  $\mathbf{l}_C$  količina gibanja,  $\mathbf{h}_C$  kinetički moment centra mase tijela,  $\mathbf{f}$  vektor vanjskih sila, a  $\mathbf{m}$  vektor vanjskih momenata koji djeluju na tijelo u centru mase. Izvod korištenjem ovih izraza može se pronaći u [2] i [4].

Ukoliko se razmatra kruto gibanje, poopćeni kinetički moment  $\mathbf{p} \in \mathbb{K}^6$  u koordinatnom sustavu tijela prema [9] je

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}_{RB}\boldsymbol{\nu}, \quad (3.13)$$

dok je u koordinatnom sustavu tijela jednadžba ravnoteže

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + (\boldsymbol{\nu})\times\mathbf{p} = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.14)$$

gdje  $(\boldsymbol{\nu})\times\mathbf{p}$  predstavlja centripetalne i Coriolisove sile, a  $\boldsymbol{\tau}$  je vektor poopćenih vanjskih sila i momenata. Koristeći svojstvo (2.145), jednadžba (3.14) može se zapisati kao

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} - (\mathbf{p})\times\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.15)$$

iz čega je prema (2.146) jasno vidljivo da je matrica centripetalnih i Coriolisovih sila antisimetrična, što je svojstvo koje se koristi u analizi stabilnosti regulatora.

Deriviranjem poopćenog kinetičkog momenta dobivamo

$$\mathbf{M}_{RB}\dot{\boldsymbol{\nu}} + \dot{\mathbf{M}}_{RB}\boldsymbol{\nu} - (\mathbf{M}_{RB}\boldsymbol{\nu})\times\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.16)$$

Vidljivo je da je ovim pristupom promjenu tenzora inercije zapravo trivijalno uključiti u razmatranje. U većini praktičnih primjena valjana je pretpostavka konstantnosti inercije, odnosno

$$\dot{\mathbf{M}}_{RB} = \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad (3.17)$$

Pod tom pretpostavkom dinamika se može pojednostaviti u

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} - (\mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.18)$$

Uobičajeno je matricu centripetalnih i Coriolisovih sila označiti kao  $\mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu})$ , naglašavajući funkcijsku ovisnost o brzini tijela. Tako se jednadžbu (3.18) može zapisati kao

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.19)$$

gdje je

$$\mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu}) = -(\mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) \times \quad (3.20)$$

što direktno pokazuje strukturu matrice centripetalnih i Coriolisovih sila.

Važno svojstvo nelinearne dinamike krutog tijela je linearna parametrizacija, koja se može naći u dodatku A.3. Takva se parametrizacija može koristiti za identifikaciju sustava u slučaju da su poznate vanjske sile, ili u regulatorima, primjerice u adaptivnom upravljanju.

## Dinamika u inercijskom koordinatnom sustavu

Tensor inercije pomičnog tijela transformira se u nepomični inercijski koordinatni sustav izrazom

$$\mathbf{M}_{RB}^I = \mathbf{C}^{-\top} \mathbf{M}_{RB} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.21)$$

gdje je  $\mathbf{C}$  konfiguracijski tenzor. Kinetički moment predstavlja konstitutivnu jednadžbu

$${}^I \mathbf{p} = \mathbf{M}_{RB}^I {}^I \boldsymbol{\nu}, \quad (3.22)$$

kinematska diferencijalna jednadžba korištenjem vektora brzina u inercijskom koordinatnom sustavu je

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = ({}^I \boldsymbol{\nu}) \times \mathbf{C}, \quad (3.23)$$

dok je jednadžba ravnoteže

$$\frac{d^I \mathbf{p}}{dt} = {}^I \boldsymbol{\tau}. \quad (3.24)$$

uz transformaciju poopćene sile

$${}^I \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (3.25)$$

Jednadžba ravnoteže (3.24) u ovom je slučaju jednostavnija od one u koordinatnom sustavu tijela (3.14), što se može iskoristiti u sustavima za numeričko rješavanje gibanja krutog tijela.

Deriviranjem kinetičkog momenta

$${}^I \mathbf{p} = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu} \quad (3.26)$$

dobivamo

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{C}^{-T} \mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{C}^{-T} (\dot{\mathbf{M}}_{RB} \boldsymbol{\nu} + \mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}}) + \frac{d}{dt} (\mathbf{C}^{-T}) \mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu} \quad (3.27)$$

Korištenjem izraza za derivaciju inverza matrice [15]

$$\frac{\partial \mathbf{Y}^{-1}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Y}^{-1} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{Y}^{-1}, \quad (3.28)$$

derivacija po vremenu  $\mathbf{C}^{-T}$  je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{C}^{-T}) &= -\mathbf{C}^{-T} \dot{\mathbf{C}}^T \mathbf{C}^{-T} \\ &= -\mathbf{C}^{-T} (\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) \times)^T \mathbf{C}^{-T} \\ &= -\mathbf{C}^{-T} (\boldsymbol{\nu}) \times^T \underbrace{\mathbf{C}^T \mathbf{C}^{-T}}_{\mathbf{I}_{6 \times 6}} \end{aligned}$$

odnosno, korištenjem (2.144) dobivamo

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{C}^{-T}) = \mathbf{C}^{-T} (\boldsymbol{\nu}) \times \quad (3.29)$$

Pod pretpostavkom nepromjenjivosti tenzora inercije  $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{0}_{6 \times 6}$  i korištenjem (2.145) dinamika u inercijskom koordinatnom sustavu se može zapisati kao

$$\mathbf{C}^{-T} [\mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} - (\mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu}] = \mathbf{C}^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (3.30)$$

iz čega je vidljivo da se transformacija iz koordinatnog sustava tijela u inercijski postiže množenjem s  $\mathbf{C}^{-T}$  s lijeve strane.

## 3.2 Dinamika pod utjecajem sila fluida

Na vozila čija je gustoća bliska gustoći okolnog fluida, kao što su podvodna vozila i zračni brodovi, djeluju hidrodinamičke sile zbog mase fluida koju pomiče vozilo tijekom gibanja. Aproximacija tih sila je tzv. *dodana inercija*<sup>2</sup> fluida. Iznos ovih sila je značajan u usporedbi s ostalim silama koje djeluju na vozilo, pa se uključuje u dinamiku gibanja.

Sljedeći izvod dinamike krutog tijela pod utjecajem sila fluida zasnovan je na pretpostavkama iz [5], a zbog jednostavnijeg izvoda korištena je kinematika krutog gibanja. Korištenje ovog pristupa omogućava razmatranje kutnih brzina fluida, koje su zbog malih dimenzija vozila, kao i radi pojednostavljanja izvoda, zanemarene u [5].

Poopćeni kinetički moment tijela prema (3.13) jest

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu} \quad (3.31)$$

U odsustvu vozila, okolni fluid kreće se brzinom  $\boldsymbol{\nu}_w$ , koja mora biti projicirana na koordinatni sustav tijela (slika 3.2). Indeks  $w$  ovdje dolazi od engleskog *wave* (val) ili *wind* (vjetar), ovisno o fluidu u kojem se vozilo kreće. Ovo razmatranje daje kinetički moment dodane inercije u odsustvu vozila

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{M}_A (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w) \quad (3.32)$$

Nadalje, vozilo gibanjem istiskuje masu fluida s inercijom  $\mathbf{M}_D$ , koja se gibala brzinom  $\boldsymbol{\nu}_w$ . Prije prolaska vozila, fluid je imao kinetički moment

$$\mathbf{p}_D = \mathbf{M}_D \boldsymbol{\nu}_w \quad (3.33)$$

Da bi se dobio kinetički moment cjelokupnog sustava, moment fluida mora se oduzeti od zbroja momenta vozila i dodane mase, tako da je

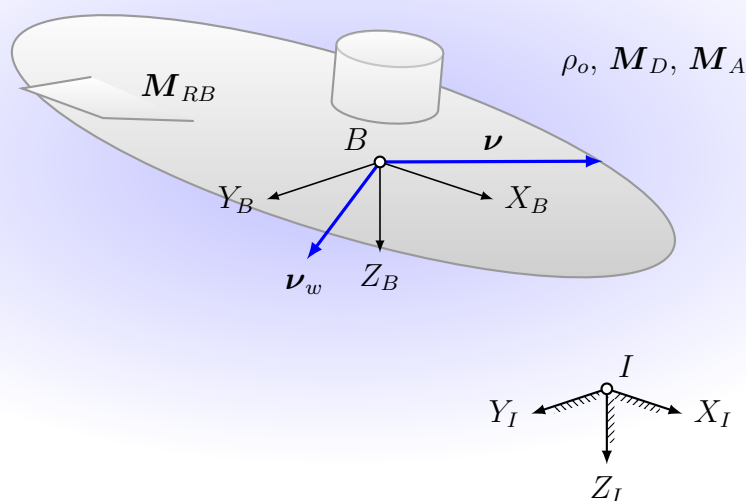
$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_A - \mathbf{p}_D \\ &= \mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu} + \mathbf{M}_A (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w) - \mathbf{M}_D \boldsymbol{\nu}_w \end{aligned} \quad (3.34)$$

Derivacija po vremenu kinetičkog momenta u koordinatnom sustavu tijela daje

$$\frac{\partial \mathbf{p}_B}{\partial t} - (\mathbf{p}_B) \times \boldsymbol{\nu} + \frac{\partial \mathbf{p}_A}{\partial t} - (\mathbf{p}_A) \times (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w) - \left( \frac{\partial \mathbf{p}_D}{\partial t} - (\mathbf{p}_D) \times \boldsymbol{\nu}_w \right) = \boldsymbol{\tau}_{RB} \quad (3.35)$$

---

<sup>2</sup>engl. *added inertia*



Slika 3.2: Brzina i inercija tijela i fluida koji djeluje na tijelo.

Ne zanemarujući vremenske derivacije tenzora inercije, imamo

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \left( \dot{\mathbf{M}}_{RB} - (\mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) \times \right) \boldsymbol{\nu} \\
 & + \mathbf{M}_A (\dot{\boldsymbol{\nu}} - \dot{\boldsymbol{\nu}}_w) + \left( \dot{\mathbf{M}}_A - (\mathbf{M}_A (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w)) \times \right) (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w) \\
 & - \mathbf{M}_D \dot{\boldsymbol{\nu}}_w + \left( (\mathbf{M}_D \boldsymbol{\nu}_w) \times - \dot{\mathbf{M}}_D \right) \boldsymbol{\nu}_w = \boldsymbol{\tau}_{RB}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Tenzor dodane inercije prema [16] je definiran kao

$$\mathbf{M}_A = - \begin{bmatrix} X_{\ddot{u}} & X_{\ddot{v}} & X_{\ddot{w}} & X_{\dot{p}} & X_{\dot{q}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\ddot{u}} & Y_{\ddot{v}} & Y_{\ddot{w}} & Y_{\dot{p}} & Y_{\dot{q}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\ddot{u}} & Z_{\ddot{v}} & Z_{\ddot{w}} & Z_{\dot{p}} & Z_{\dot{q}} & Z_{\dot{r}} \\ K_{\ddot{u}} & K_{\ddot{v}} & K_{\ddot{w}} & K_{\dot{p}} & K_{\dot{q}} & K_{\dot{r}} \\ M_{\ddot{u}} & M_{\ddot{v}} & M_{\ddot{w}} & M_{\dot{p}} & M_{\dot{q}} & M_{\dot{r}} \\ N_{\ddot{u}} & N_{\ddot{v}} & N_{\ddot{w}} & N_{\dot{p}} & N_{\dot{q}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

gdje prema prije spomenutoj SNAME notaciji  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  redom predstavljaju sile u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  tijela, a  $K$ ,  $M$  i  $N$  predstavljaju momente oko istih osi. Sila dodane mase u smjeru  $y$ -osi tijela zbog akceleracije  $\dot{u}$  u smjeru  $x$ -osi tijela definirana je kao

$$Y_a = Y_{\ddot{u}} \dot{u}; \quad Y_{\ddot{u}} = \frac{\partial Y}{\partial \dot{u}} \tag{3.38}$$

te ima dimenziju mase, zbog čega je uobičajeno tenzor dodane inercije dodati inerciji tijela bez obzira što se radi o vanjskoj sili koja djeluje na tijelo.

Radi jednostavnije notacije se matrica dodane inercije dijeli na 4 podmatrice veličine  $3 \times 3$ , tako da je

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Uz pretpostavku idealnog strujanja fluida, matrica  $\mathbf{M}_A$  je simetrična, pa vrijedi  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{11}^T$ ,  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}^T$  i  $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{22}^T$ . Za potrebe upravljanja može se pretpostaviti da je  $\mathbf{M}_A > \mathbf{0}_{6 \times 6}$  striktno pozitivna. Elementi matrice ovise o gustoći okolnog fluida. Ukoliko se radi o vodi (za podvodna vozila), može se pretpostaviti i da je  $\dot{\mathbf{M}}_A = 0$ . U slučaju zračnih vozila, gustoća zraka mijenja se ovisno o visini, pa je u općem slučaju  $\dot{\mathbf{M}}_A \neq 0$ . Za potrebe upravljanja može se pretpostaviti da spora promjena, odnosno  $\dot{\mathbf{M}}_A \approx 0$  zbog male vertikalne brzine, pošto se vozila na koja djeluju sile dodane inercije imaju tendenciju gibati s malim vertikalnim brzinama. Elementi tenzora dodane inercije ovise o obliku vozila, pa geometrijske simetrije omogućuju zanemarivanje velikog broja elemenata.

Inercija istisnutog (engl. *displaced*) fluida može se definirati kao

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D \mathbf{I}_{3 \times 3} & -m_D \mathcal{S}(\mathbf{r}_D) \\ m_D \mathcal{S}(\mathbf{r}_D) & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

gdje je  $m_D$  masa fluida s volumenom vozila,  $\mathbf{r}_D$  položaj centra mase istisnutog fluida, a  $\mathbf{I}_D$  njegova inercija oko koordinatnog sustava tijela. Drugačije izraženo, imamo analogno izrazima za kruto tijelo integrale po volumenu vozila

$$m_D = \int_V \rho_o dV \quad (3.41)$$

$$m_D \mathcal{S}(\mathbf{r}_D) = \int_V \rho_o \mathbf{r} dV \quad (3.42)$$

$$\mathbf{I}_D = - \int_V \rho_o \mathcal{S}(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\mathbf{r}) dV \quad (3.43)$$

gdje je  $\rho_o$  gustoća okolnog fluida. Fluid razmatramo kao homogeno tijelo s volumenom vozila i gustoćom fluida, koje je u interakciji s vozilom. Pošto je to tijelo homogeno, centar mase mu se poklapa s centrom volumena vozila. Iste pretpostavke za vremensku promjenu vrijede kao i kod tenzora dodane mase.



Uzimajući u obzir pretpostavke nepromjenjivosti tenzora inercije, imamo

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}_A(\dot{\boldsymbol{\nu}} - \dot{\boldsymbol{\nu}}_w) - \mathbf{M}_D \dot{\boldsymbol{\nu}}_w - (\mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu} \\ & - (\mathbf{M}_A(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w)) \times (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w) + (\mathbf{M}_D \boldsymbol{\nu}_w) \times \boldsymbol{\nu}_w = \boldsymbol{\tau}_{RB} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sile fluida na tijelo možemo grupirati u vanjske sile tako da su sile dodane inercije

$$\boldsymbol{\tau}'_A = -\mathbf{M}_A(\dot{\boldsymbol{\nu}} - \dot{\boldsymbol{\nu}}_w) - (\mathbf{M}_A(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w)) \times (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w) \quad (3.45)$$

dok su sile istisnutog fluida

$$\boldsymbol{\tau}_D = \mathbf{M}_D \dot{\boldsymbol{\nu}}_w - (\mathbf{M}_D \boldsymbol{\nu}_w) \times \boldsymbol{\nu}_w \quad (3.46)$$

tako da dobivamo jednadžbu gibanja

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} - (\mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}_{RB} + \boldsymbol{\tau}'_A + \boldsymbol{\tau}_D \quad (3.47)$$

Pošto se u prethodnim izrazima i tenzor inercije tijela  $\mathbf{M}_{RB}$  i tenzor dodane inercije  $\mathbf{M}_A$  množe s akceleracijom tijela  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ , u literaturi ih je za potrebe simulacije i analize uobičajeno grupirati u tenzor inercije  $\mathbf{M}$ , tako da dobivamo

$$\mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\nu}} - (\mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}_{RB} + \boldsymbol{\tau}_A + \boldsymbol{\tau}_D \quad (3.48)$$

gdje je

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A, \quad (3.49)$$

$$\boldsymbol{\tau}_A = \mathbf{M}_A \dot{\boldsymbol{\nu}}_w - (\mathbf{M}_A(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w)) \times (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w) \quad (3.50)$$

Lijeva strana jednadžbe očito predstavlja dinamiku krutog tijela, uz dodavanje inercije fluida, dok se na desnoj nalaze vanjske sile i momente.

U izrazu  $-(\mathbf{M}_A(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w)) \times (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w)$  nalazi se tzv. Munkov moment [17], uzrokovan silama dodane mase. U [17] moment je izveden razmatranjem potencijalnog strujanja fluida oko zračnog broda, a u [5] izraz je izveden pomoću Newtonovog pristupa dinamici. Ovdje izveden izraz uključuje sile i momente uzrokovane rotacijskim strujanjem fluida, što je u drugim referencama zanemareno. Ako se u ovdje izvedenom izrazu zanemare kutne brzine fluida, dobiva se čisti izraz za Munkov moment kao u literaturi. Dobiveni izrazi analogni su rezultatu u [2] koji kaže da se morske struje mogu uzeti u obzir korištenjem relativne brzine  $\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w$ , s iznimkom inercije istisnutog fluida.

### 3.3 Disipativne sile fluida

Na vozilo koje se giba kroz fluid djeluju disipativne sile fluida. U slučaju zračnih vozila, radi se o aerodinamičkim, a u slučaju morskih vozila o hidrodinamičkim silama. Iz mehanike fluida, ove su sile izražene na isti način, a razlikuju se jedino u gustoći medija kroz koje se tijelo kreće. Njihov iznos ovisi o geometriji i brzini gibanja tijela.

Relativna brzina gibanja vozila kroz fluid je

$$\boldsymbol{\nu}_r = \boldsymbol{\nu}_{ac} - {}^B\boldsymbol{\nu}_w \quad (3.51)$$

gdje je  $\boldsymbol{\nu}_{ac} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ac}$  brzina aerodinamičkog centra tijela,  $\mathbf{r}_{ac}$  njegov položaj u koordinatnom sustavu tijela, a  ${}^B\boldsymbol{\nu}_w$  brzina fluida projicirana na koordinatni sustav tijela.

Aerodinamičke sile ovise o napadnom kutu  $\alpha$  i kutu klizanja  $\beta$ , koji su u [3, 6] definirani kao

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w_r}{v_r}\right) \quad \beta = \arcsin\left(\frac{v_r}{\sqrt{u_r^2 + v_r^2 + w_r^2}}\right) \quad (3.52)$$

Sile djeluju u *aerodinamičkom koordinatnom sustavu*, i trebaju se nakon izračunavanja projicirati na koordinatni sustav tijela. Ponegdje se, primjerice u [6], ovaj sustav naziva i koordinatnim sustavom vjetra, i označava s  $w$ , od engl. *wind* (vjetar). Rotacijska matrica iz aerodinamičkog u koordinatni sustav tijela je

$$\mathbf{R}_{BA} = \mathbf{R}_{z,\beta} \mathbf{R}_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Iznos disipativnih sila fluida ovisi o dinamičkom tlaku

$$q = \frac{1}{2} \rho_o |\boldsymbol{\nu}_r|^2 \quad (3.54)$$

dok je sila otpora (engl. *drag*) u smjeru suprotnom od relativne brzine

$$D = q A_r C_D(Rn, \alpha, \beta) \quad (3.55)$$

gdje je  $A_r$  referentna površina, a  $C_D(Rn, \alpha, \beta)$  koeficijent sile otpora, koji ovisi o geometriji tijela i Reynoldsovom broju

$$Rn = \frac{|\boldsymbol{\nu}_r| D}{\nu} \quad (3.56)$$

gdje je  $|\boldsymbol{\nu}_r|$  relativna brzina gibanja vozila,  $D$  karakteristična duljina, a  $\nu$  kinematska viskoznost okolnog fluida. Osim disipativnih sila, na vozila djeluju i druge sile fluida koje se neće posebno razmatrati u ovom radu. Važno je napomenuti da su *momenti* uzrokovani fluidom umjesto s referentnom površinom povezani s referentnom duljinom  $l_r$ , tako da je izraz za moment propinjanja

$$M = q l_r C_M(Rn, \alpha, \beta) \quad (3.57)$$

gdje je  $C_M(Rn, \alpha, \beta)$  koeficijent momenta propinjanja. Kod zračnih se brodova zbog geometrije za referentnu površinu i duljinu koriste izrazi

$$A_r = V^{2/3} \quad (3.58)$$

$$l_r = V^{1/3} \quad (3.59)$$

gdje je  $V$  volumen vozila.

Za duguljasta tijela (engl. *slender body*) postoje teorijski izrazi za aproksimaciju koeficijenata. Pregled tih metoda za podvodna vozila može se naći u [18], uz korištenje drugačijeg koordinatnog sustava za izračunavanje sila fluida na tijelo, dok se primjena tih metoda na zračni brod može naći u [5]. Kod podvodnih se vozila hvatište hidrodinamičkih sila na engleskom jeziku naziva *center of effort*.

Kod malih brzina gibanja, kao i za potrebe sinteze regulatora, prigušenje fluida aproksimira se linearnim i kvadratnim članovima tako da je

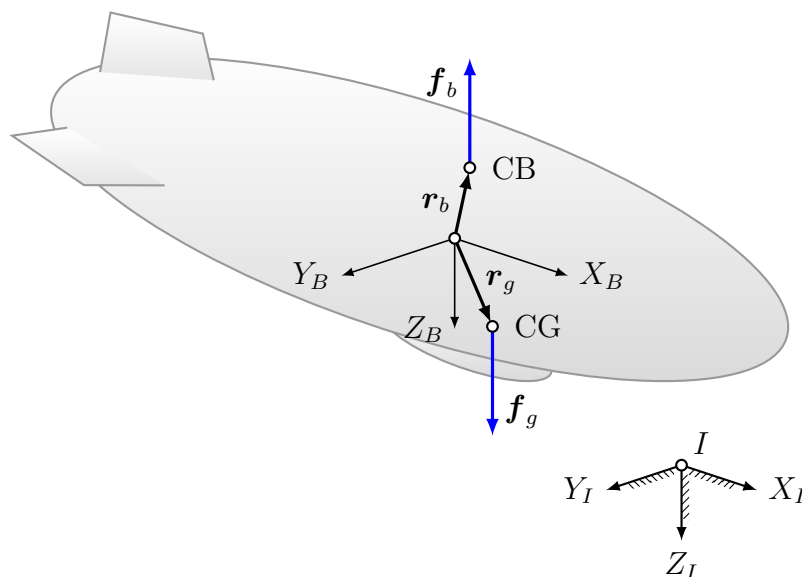
$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{D}_L + \mathbf{D}_Q |\boldsymbol{\nu}| \quad (3.60)$$

gdje je  $\mathbf{D}_L$  matrica linearnog, a  $\mathbf{D}_Q$  matrica kvadratičnog prigušenja. Ovakva aproksimacija prema [2] dobro opisuje hidrodinamičko prigušenje daljinski upravljanih podvodnih vozila (*ROV*) koja se gibaju malim brzinama. U literaturi, primjerice u [4, 19, 20] se modeli podvodnih vozila obično zadaju s ovako definiranom matricom prigušenja.

U daljnjim razmatranjima zbog jednostavnosti ćemo koristiti aproksimaciju disipativnih sila  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})$ , za koju vrijedi da je striktno pozitivna, odnosno

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) > \mathbf{0}_{6 \times 6} \quad (3.61)$$

što znači da je  $\boldsymbol{\nu}^\top \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} > 0 \forall \boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$ .



Slika 3.3: Stabilizirajuće sile na zračnom brodu - sila uzgona  $\mathbf{f}_b$  s hvatištem u centru uzgona  $CB$  i težina  $\mathbf{f}_g$  s hvatištem u centru mase  $CG$ .

### 3.4 Sile ispravljanja

Na podvodna vozila i zračne brodove djeluje sila uzgona, koja služi za stabilizaciju na nekoj dubini odnosno visini. Sila uzgona je hidrostatska, odnosno kod zračnih brodova aerostatska, sila koja ovisi o gustoći vozila u odnosu na gustoću okolnog fluida, ima hvatište u centru uzgona, te je smjera suprotnog sili teže. Centar uzgona je centar volumena uzgonskog dijela vozila. Zajedno se sila uzgona i težina nazivaju *silama ispravljanja*<sup>3</sup> pošto tijelo dovode u statičku ravnotežu, dok ravnotežno stanje ovisi o relativnom položaju hvatišta sila. Ukoliko se vozilo prestane kretati i nema utjecaja valova ili vjetra, stabilizirajuće sile dovest će ga u stabilno ravnotežno stanje.

Sila uzgona i težina djeluju vertikalno u inercijskom koordinatnom sustavu. Da bismo ih primjenili na tijelo, potrebno ih je projicirati u koordinatni sustav tijela. Tako imamo

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{R}_{BI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_g = \mathbf{R}_{BI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

<sup>3</sup>engl. *restoring forces*

gdje je  $W = mg$  težina<sup>4</sup>, a  $B = \rho_o g V$  sila uzgona<sup>5</sup>. Negativan predznak sile uzgona u  $\mathbf{f}_b$  uzrokovan je pozitivnim smjerom  $z$ -osi prema dolje.

Sile  $\mathbf{f}_g$  i  $\mathbf{f}_b$  redom djeluju u hvatištima  $\mathbf{r}_g = [x_g, y_g, z_g]^T$  i  $\mathbf{r}_b = [x_b, y_b, z_b]^T$ , kao na slici 3.3. Ukupne sile i momenti skupljaju se u vektor stabilizirajućih sila  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$  tako da je

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_b \\ \mathcal{S}(\mathbf{r}_g) \mathbf{f}_g + \mathcal{S}(\mathbf{r}_b) \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Za vozila na koja ne djeluje sila uzgona ovaj je izraz isti, osim što vrijedi  $\mathbf{f}_b = \mathbf{0}$ , te vektor  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$  predstavlja težinu u koordinatnom sustavu tijela.

### 3.5 Ukupni dinamički model

Dinamika krutog tijela s utjecajem vanjskih sila može se zapisati kao

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau}_{RB} \quad (3.64)$$

Vanjske sile i momenti mogu se prema dosad izvedenom zapisati kao

$$\boldsymbol{\tau}_{RB} = \underbrace{\boldsymbol{\tau}'_A}_{\text{Sile dodane inercije}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_D}_{\text{Sile istisnutog fluida}} - \underbrace{\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu}}_{\text{Disipativne sile}} - \underbrace{\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})}_{\text{Sile ispravljanja}} + \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{\text{Regulator}} \quad (3.65)$$

U literaturi [2] je uobičajeno jednostavnije zapisati

$$\mathbf{M} \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\tau}_A + \boldsymbol{\tau}_D + \boldsymbol{\tau} \quad (3.66)$$

gdje je  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A =$  poopćena matrica inercije,

$\mathbf{C}(\boldsymbol{\nu}) =$  matrica centripetalnih i Coriolisovih sila,

$\boldsymbol{\tau}_A =$  sile fluida zbog dodane inercije (3.50),

$\boldsymbol{\tau}_D =$  sile fluida zbog istiskivanja fluida (3.46),

$\boldsymbol{\tau} =$  sile aktuatora na tijelo.

<sup>4</sup>engl. *weight*

<sup>5</sup>engl. *buoyancy*

### 3.6 Dinamika u inercijskom koordinatnom sustavu

Za sintezu regulatora u inercijskom koordinatnom sustavu potrebno je dinamiku tijela izraziti u istom. Sintezom regulatora se određuje dinamika pogreške u inercijskom koordinatnom sustavu. Prvo ćemo prikazati zapis pomoću Eulerovih kuteva i Eulerovih parametara, te potom primjenom dualnih kvaterniona.

Preobrazba dinamike iz koordinatnog sustava tijela u inercijski zasnovana je na izražavanju poopćene brzine u koordinatnom sustavu tijela iz kinematske diferencijalne jednadžbe kao što je prikazano u poglavlju 2.4.1,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\nu} \quad (3.67)$$

gdje vektor  $\boldsymbol{\xi}$  i kinematska transformacijska matrica  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$  ovise o odabiru poopćenih koordinata (Eulerovi kutevi, parametri ili dualni kvaternion). Brzina je

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.68)$$

gdje  $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$  ovisi o poopćenim koordinatama. Iako nije sasvim matematički korektno, zbog čitljivosti ćemo ovdje i pseudo-inverz označavati kao običan inverz. Iz istog će se razloga umjesto  $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$  pisati samo  $\mathbf{J}^{-1}$ .

Tablica 3.1: Konfiguracijski vektor i ekvivalent inverza kinematske transformacijske matrice za različite parametrizacije gibanja.

| Parametrizacija    | Konfiguracija   | Ekvivalent $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ | Jed.    |
|--------------------|---|--|---------|
| Eulerovi kutevi    | $\boldsymbol{\xi} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$                                  | $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$            | (2.98)  |
| Eulerovi parametri | $\boldsymbol{\xi} = [x, y, z, \eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T$            | $\mathbf{J}^\dagger(\boldsymbol{\xi})$         | (2.100) |
| Dualni kvaternion  | $\boldsymbol{\xi} = [f_0, f_1, f_2, f_3, \eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T$ | $2\mathbf{U}_d^\dagger(\boldsymbol{\xi})$      | (2.182) |

Brzina i njena derivacija mogu se u slučaju Eulerovih kuteva i Eulerovih parametara izraziti kao

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.69)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{d}{dt} \left( \mathbf{J}^{-1} \right) \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.70)$$

dok u slučaju dualnog kvaterniona imamo (2.187) i (2.188), što uz korištenje  $\mathbf{U}_d^\dagger \equiv \mathbf{U}_d^\dagger(\boldsymbol{\xi})$  daje

$$\boldsymbol{\nu} = 2\mathbf{U}_d^\dagger \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.71)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = 2\mathbf{U}_d^\dagger \ddot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (3.72)$$

pošto je  $\mathbf{U}_d^\dagger$  linearni operator, pa vrijedi  $\dot{\mathbf{U}}_d^\dagger(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{U}_d^\dagger(\dot{\boldsymbol{\xi}})$ , iz čega slijedi (2.184), odnosno  $\mathbf{U}_d^\dagger(\dot{\boldsymbol{\xi}}) \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$ . Vidimo da je u slučaju dualnog kvaterniona izraz za derivaciju brzine značajno jednostavniji od ostalih navedenih reprezentacija, pošto ne sadrži vremensku derivaciju kinematske transformacijske matrice.

Dinamika se za sve tri navedene parametrizacije, uz napomenu korištenja *ekvivalenta*  $\mathbf{J}^{-1}$ , može zapisati kao

$$\mathbf{M}_\xi(\boldsymbol{\xi}) \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{C}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{D}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\xi} + \mathbf{g}_\xi(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{J}^{-\top} \boldsymbol{\tau} \quad (3.73)$$

gdje je

$$\mathbf{M}_\xi(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{J}^{-\top} \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{C}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{J}^{-\top} \left[ \mathbf{C} + \mathbf{M} \frac{d}{dt} (\mathbf{J}^{-1}) \right] \mathbf{J}^{-1} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{D}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{J}^{-\top} \mathbf{D} \mathbf{J}^{-1} \quad (3.76)$$

$$\mathbf{g}_\xi(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{J}^{-\top} \mathbf{g}_\xi(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.77)$$

Samo u slučaju dualnog kvaterniona, matrica  $\mathbf{C}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})$  pojednostavljuje se u

$$\mathbf{C}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{J}^{-\top} \mathbf{C} \mathbf{J}^{-1} \quad (3.78)$$

Matrica  $\mathbf{M}_\xi(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{M}^{*\top}(\boldsymbol{\xi})$  je pozitivno semidefinitna,  $\mathbf{D}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})$  je pozitivna, a matrica  $\dot{\mathbf{M}}_\xi(\boldsymbol{\xi}) - 2\mathbf{C}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu})$  je antisimetrična, odnosno

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{M}_\xi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y} > 0 \quad (3.79)$$

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{D}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \mathbf{y} > 0 \quad (3.80)$$

$$\mathbf{y}^\top \left( \dot{\mathbf{M}}_\xi(\boldsymbol{\xi}) - 2\mathbf{C}_\xi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}) \right) \mathbf{y} = 0 \quad (3.81)$$

Svojstvo antisimetričnosti pri korištenju Eulerovih parametara izvedeno je u [4].

## Regulacija vozila u šest stupnjeva slobode

---

U ovom poglavlju obrađeni su upravljački zakoni za regulaciju gibanja vozila u šest stupnjeva slobode koji su korišteni u simulacijskim studijama. Prikazani su regulatori za slijeđenje vremenski promjenjive trajektorije, koji su u simulacijama primijenjeni i za pozicioniranje. U radu nije prikazana detaljna analiza stabilnosti i konvergencije pojedinih regulatora, već se čitatelj upućuje na odgovarajuću literaturu.

Klasični pristup kod regulacije gibanja vozilima jest linearizacija kinematike i dinamike vozila oko neke radne točke i sinteza najčešće linearnih regulatora za tu radnu točku, što odgovara sintezi regulatora za pojedine manevre. Ta metoda primjenjiva je na vozila koja se većinu vremena nalaze u dinamički ravnotežnim stanjima tako da se neki stupnjevi slobode prilikom sinteze regulatora mogu zanemariti, što je primjerice slučaj kod zrakoplova, brzih podmornica i sl.

No, kod daljinski upravljanih podvodnih vozila (ROV) takva pretpostavka nije istinita pošto se ta vozila često kreću malim brzinama i u svim stupnjevima slobode. Osim



---

toga, parametri tih vozila često nisu u potpunosti poznati, kao ni vrste poremećaja koje na njih djeluju. Nerijetko se za komunikaciju s vozilom koriste kablovi koji stvaraju dodatnu poremećajnu silu na vozilu. Zbog toga je kod takvih vozila poželjno rabiti nelinearni robusni regulator koji se može nositi s takvim uvjetima.

Jedna od glavnih metoda nelinearnog upravljanja gibanjem krutog tijela koja se koristi u literaturi jest eksterna linearizacija, odnosno kompenzacija dinamike tijela i nametanje željene dinamike pogreške. U slučaju podvodnih vozila to odgovara metodi inverzne dinamike u robotici (engl. *computed torque control*), te u povratnoj vezi sadrži kompletan model sustava. Međutim, zbog neodređenosti parametara, poremećaja i netočnosti u mjernim signalima ovakva metoda nije direktno primjenjiva na podvodna vozila. Zbog toga je u toj domeni robotike veoma rašireno i adaptivna eksterna linearizacija (adaptivno upravljanje), koje je zasnovano na linearnoj parametrizaciji dinamike gibanja tijela i estimaciji vektora parametara. Linearna parametrizacija dinamike krutog tijela može se naći u dodatku A.4. Adaptivno upravljanje za sustave velikog reda, kakva su podvodna vozila, zahtijeva mnogo računске snage, koja je u realnim primjenama često nedostupna. Osim toga, pogreške u modeliranju smajnuju performanse ovog regulatora, što umanjuje njegovu robusnost na pogreške modeliranja.

Sa stanovišta regulacije, pogreške modeliranja mogu se klasificirati u strukturirane (parametarske) neodređenosti i nestrukturirane neodređenosti (nemodelirana dinamika). Robusno upravljanje kompenzira nestrukturirane neodređenosti, dok njemu komplementarno adaptivno upravljanje kompenzira parametarske neodređenosti.

Ukoliko se želi postići što veća robusnost na pogreške modeliranja, regulator treba sadržavati što je manje informacija moguće o samom modelu upravljanja. Zato će se u ovom radu kao osnova koristiti PD regulator koji ne zahtijeva model sustava, što je uobičajeno kod robusnih regulatora. Prikazat će se i iskoristiti dvije metode robusnog upravljanja koje su se dokazale u praksi kod podvodnih vozila – regulator kliznog stanja (engl. *Sliding Mode Control* - u daljnjem tekstu SMC) i regulator s vremenskim pomakom (engl. *Time Delay Control* - u daljnjem tekstu TDC). TDC se zapravo bazira na metodi estimacije poremećaja i po strukturi sličaj je adaptivnim regulatorima, tako da

osim poremećaja može otkloniti i pogreške parametrima. Ova dva pristupa su različita i komplementarna, pa se mogu koristiti zajedno. Kao što će se vidjeti u simulacijskim rezultatima, njihova kombinacija dovodi do sinergije performansi. Osim robusnih regulatora koji kompenziraju neodređenosti, odabir kinematske reprezentacije preko koje se vrši regulacija također utječe na odziv sustava, što će se vidjeti iz rezultata.

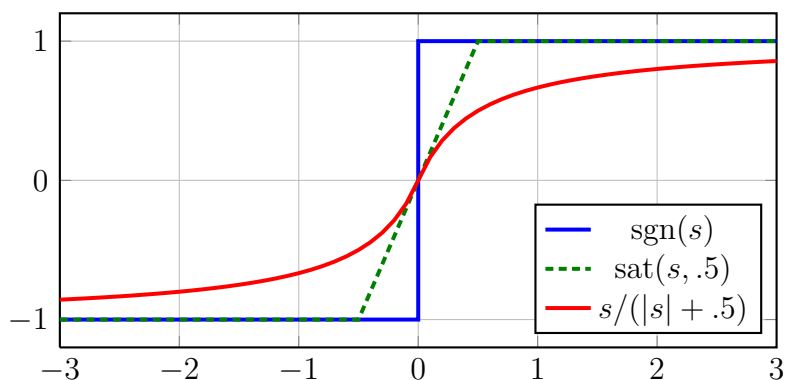
U podvodnim vozilima, eksterna linearizacija i adaptivno upravljanje primijenjeni su u [4]. Regulator kliznog stanja s graničnim slojem prikazan je u [2], a slična metodologija kako bi se dobio adaptivni regulator bez modela sustava iskorištena je u [19]. Regulator s vremenskim kašnjenjem korišten je u [21, 22, 23], dok je kombinacija dva robusna regulatora korištena u [24]. Ovdje su prikazane glavne ideje iz navedene literature i primijenjene na regulaciju vozila u šest stupnjeva slobode. Početna razmatranja uključuju metode robusnog upravljanja, da bi se kasnije prešlo na njihovu primjenu na regulaciju konfiguracije podvodnih vozila.

## 4.1 Robusni regulatori

### 4.1.1 Regulator kliznog stanja

Regulator kliznog stanja (engl. *Sliding Mode Control* - SMC) spada pod regulatore promjenjive strukture (engl. *Variable Structure Systems* - VSS), koji tijekom regulacije mijenjaju svoku strukturu. Promjena strukture u SMC regulatoru postiže se korištenjem signum-funkcije, koja mijenja predznak kada sustav prijeđe preko tzv. plohe klizanja (engl. *sliding surface*). Signum funkcija odgovara relejnom upravljanju. Naziv "klizno stanje" dolazi iz ponašanja sustava koje se javlja kada je frekvencija preklapanja teoretski beskonačna, te sustav "klizi" po plohi prema ishodištu. Ovakav regulator pokazuje iznimno veliku robusnost na poremećaje i nemodeliranu dinamiku kada je sustav u klizanju.

Upravljački zakon  $u$  robusnog regulatora kliznog stanja sastoji se od *idealnog upravljanja*



Slika 4.1: Signum funkcija i njene aproksimacije

$u_{id}$  i *diskontinuiranog upravljanja*  $u_d$  tako da je

$$u = u_{id} + u_d, \quad (4.1)$$

gdje se  $u_{id}$  određuje željenu dinamiku sustava, a  $u_d$  odbacuje neodređenosti i drži sustav na plohi klizanja. Diskontinuirani upravljački zakon u klasičnom SMC-u je

$$u_d = -K \operatorname{sgn}(s) \quad (4.2)$$

gdje je  $s$  ploha klizanja koja je za sustav prvog reda klasično definirana kao

$$s = \dot{x} + \lambda x \quad (4.3)$$

gdje  $\lambda$  određuje nagib pravca plohe klizanja u faznoj ravnini, a  $\operatorname{sgn}(s)$  je signum funkcija koja je definirana kao

$$\operatorname{sgn}(s) = \frac{s}{|s|} = \begin{cases} -1 & s < 0 \\ 1 & s \geq 0 \end{cases}. \quad (4.4)$$

Kada je sustav u klizanju, njegova će trajektorija u faznoj ravnini biti ograničena na pravac  $s = 0$ . Kako bi se analiziralo ponašanje sustava u klizanju, koristi se tzv. metoda Filippova za diferencijalne jednadžbe s diskontinuiranim desnim stranama. Dinamika sustava u klizanju aproksimira se *ekvivalentnom dinamikom* koja se dobiva iz pretpostavke da je gibanje sustava ograničeno na plohu klizanja te vrijedi  $\dot{s} = 0$ . Na taj način može se dobiti i idealni, odnosno ekvivalentni zakon upravljanja. Kod podvodnih vozila ekvivalentni zakon upravljanja odgovara inverznoj dinamici, kao što će se vidjeti u nastavku.

U praktičnim primjenama je frekvencija preklapanja konačna, pa kod primjene signum funkcije dolazi do efekta tzv. *chatteringa*, kada stanja sustava osciliraju oko plohe klizanja. Osim aktuatora, problem je i diskretizacija upravljačkog zakona na implementaciji u digitalnim računalima, koja efektivno ograničava frekvenciju preklapanja. Kako bi se smanjio *chattering* sustava, Utkin [25] predlaže promjenu pojačanja ovisno o varijabli praćenja tako da je

$$u_d = -(K_0 + K|s|) \operatorname{sgn}(s), \quad (4.5)$$

dok Slotine [26] predlaže metodu graničnog sloja (engl. *boundary layer*)

$$u_d = -K \operatorname{sat}(s/\varepsilon) \quad (4.6)$$

gdje je  $\varepsilon$  širina graničnog sloja, a saturacijska funkcija je definirana kao

$$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ x & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Efekt metode graničnog sloja je niskopropusno filtriranje signala signum funkcije, a unutar graničnog sloja upravljački se zakon ponaša kao proporcionalni regulator. Ova je metoda veoma raširena u regulaciji podvodnih vozila, i primijenit će se u ovom radu.

Alternativa saturacijskoj funkciji je kontinuirana aproksimacija signum-funkcije, odnosno

$$u_d = -K \frac{s}{|s| + \varepsilon} \quad (4.8)$$

gdje je  $\varepsilon$  mala vrijednost.

Osnovnu ideju iza diskontinuiranosti u SMC-u možemo prikazati na sustavu prvog reda

$$\dot{x} = h(x, t) + u, \quad (4.9)$$

gdje je  $u = u_{id} + u_d$  zakon upravljanja, a  $h(x, t)$  nepoznata funkcija kojoj znamo samo ocjenu

$$|h(x, t)| \leq \rho(x), \quad (4.10)$$

gdje je  $\rho(x)$  neka poznata funkcija. Ako je upravljački zakon slijeđenje kontinuirane referentne trajektorije  $x_d(t)$ , a pogreška  $e = x - x_d$ , definiranjem upravljačkog zakona

$$u = \underbrace{\dot{x}_d - ke}_{u_{id}} - \underbrace{\rho(x)\text{sgn}(e)}_{u_d}, \quad (4.11)$$

dobivamo dinamiku pogreške

$$\dot{e} = -ke - \rho(x)\text{sgn}(e) + h(x, t). \quad (4.12)$$

Da bismo dokazali stabilnost sustava upravljanja, definiramo Lyapunovljevu funkciju

$$V = \frac{1}{2}e^2, \quad (4.13)$$

čija je vremenska derivacija

$$\dot{V} = e\dot{e} = -ke^2 - \rho(x)e\text{sgn}(e) + eh(x, t). \quad (4.14)$$

Pošto je  $e\text{sgn}(e) = |e|$ , a član  $eh(x, t)$  možemo ocijeniti kao

$$eh(x, t) \leq |e| \cdot |h(x, t)|, \quad (4.15)$$

primjenom pretpostavke (4.10) dokazuje se da je  $\dot{V} < 0$  iz čega slijedi da je sustav stabilan. Dakle, član upravljačkog zakona vezan uz signum funkciju kompenzira nepoznatu dinamiku velikim upravljačkim signalom.

### Klizna stanja višeg reda

Novija istraživanja vezana uz smanjenje *chatteringa* uključuju klizna stanja višeg reda, gdje upravljački zakon ovisi o derivacijama varijable  $s$ . Najjednostavniji od njih, tzv. super-savijajući (engl. *Super-Twisting*) SMC, u najjednostavnijoj formi glasi

$$u_d = -K|s|^{1/2}\text{sgn}(s) \quad (4.16)$$

iz čega se može vidjeti da je upravljački signal u usporedbi s klasičnim manji kod velikih vrijednosti  $s$ , dok je veći za male vrijednosti  $s$ , odnosno kada je  $s < 1$ , što rezultira boljim praćenjem za male  $s$ . Ovo je ujedno i jedini SMC višeg reda koji ne zahtijeva derivaciju

plohe klizanja. Prikazani algoritam zbog svoje robusnosti ima široku primjenu u estimaciji stanja, gdje se primjerice koristi za robusnu derivaciju signala, koja je potrebna ako se žele koristiti regulatori kliznog stanja višeg reda.

Karakteristika SMC višeg reda je da prvo kroz nulu prolaze više derivacije od  $s$ , odnosno prvo prolazi  $\ddot{s}$ , pa  $\dot{s}$  i potom  $s$ . Levant [27, 28] definira familiju homogenih kvazi-kontinuiranih SMC, čiji je upravljački signal kontinuiran osim za  $s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0$ . Kvazi-kontinuirani regulator  $r$ -tog reda definiran je kao

$$u_d = -K \Psi_{r-1,r}(s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}) \quad (4.17)$$

gdje je funkcija  $\Psi$  definirana kao

$$\begin{aligned} \varphi_{0,r} &= s, \\ N_{0,r} &= |s|, \\ \Psi_{0,r} &= \varphi_{0,r}/N_{0,r} = \text{sgn}(s) \\ \varphi_{i,r} &= s^{(i)} + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)} \Psi_{i-1,r}, \\ N_{i,r} &= |s^{(i)}| + \beta_i N_{i-1,r}^{(r-i)/(r-i+1)}, \\ \Psi_{i,r} &= \varphi_{i,r}/N_{i,r} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

gdje su  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  pozitivni brojevi. Kvazi-kontinuirani SMC reda  $r \leq 3$  s testiranim  $\beta_i$  iz [27] su

1.  $u_d = -K \text{sgn}(s)$
2.  $u_d = -K \left( \frac{\dot{s} + |s|^{1/2} \text{sgn}(s)}{|\dot{s}| + |s|^{1/2}} \right)$
3.  $u_d = -K \left( \frac{\ddot{s} + 2(|\dot{s}| + |s|^{2/3})^{-1/2} (\dot{s} + |s|^{2/3} \text{sgn}(s))}{|\ddot{s}| + 2(|\dot{s}| + |s|^{2/3})^{1/2}} \right)$

Kako bi se izbjeglo dijeljenje s nulom možemo preformulirati SMC drugog reda u

$$u_d = -K \left( \frac{\dot{s} + |s|^{1/2} \text{sgn}(s)}{|\dot{s}| + |s|^{1/2} + \varepsilon} \right), \quad (4.20)$$

gdje je  $\varepsilon$  mala vrijednost. Analogno možemo preformulirati i SMC trećeg reda tako da je

$$u_d = -K \left( \frac{\ddot{s} + 2 (|\dot{s}| + |s|^{2/3} + \varepsilon_1)^{-1/2} (\dot{s} + |s|^{2/3} \text{sgn}(s))}{|\dot{s}| + 2 (|\dot{s}| + |s|^{2/3})^{1/2} + \varepsilon_2} \right) \quad (4.21)$$

gdje su  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  male vrijednosti kako bi se izbjegao *chattering*.

Regulatori kliznog stanja višeg reda svoju glavnu primjenu imaju u sustavima koji imaju relativni red sustava veći od jedan. Relativni red sustava govori koliko se puta upravljana koordinata mora derivirati da bi se dobio upravljački signal. Klasični SMC može upravljati sustavima koji imaju relativni red jedan, dok je za sustave s većim relativnim redom potrebno primijeniti SMC višeg reda. SMC prvog reda u praktičnim se primjenama uspješno primjenjuje na regulaciju podvodnih vozila. No, kada aktuatori imaju značajnu dinamiku, relativni red sustava se povećava pa korištenje SMC-a višeg reda može poboljšati performanse i zato su ovdje prikazane neke od zanimljivijih metoda SMC-a višeg reda.

### Derivator kliznog stanja

Koristeći super-savijajući algoritam kliznog stanja dobiva se robusni derivator višeg reda, koji za ograničeni šum garantira da će pogreška derivacije također biti ograničena.

Derivator kliznog stanja  $n$ -tog reda za poznatu funkciju  $f(t)$  definiran je u [29] kao

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= v_0, \\ v_0 &= -\lambda_0 |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \text{sgn}(z_0 - f(t)) + z_1, \\ \dot{z}_1 &= v_1, \\ v_1 &= -\lambda_1 |z_1 - v_0|^{(n-1)/n} \text{sgn}(z_1 - v_0) + z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= v_{n-1}, \\ v_{n-1} &= -\lambda_{n-1} |z_{n-1} - v_{n-2}|^{1/2} \text{sgn}(z_{n-1} - v_{n-2}) + z_n, \\ \dot{z}_n &= -\lambda_n \text{sgn}(z_n - v_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

gdje su  $\lambda_i$  striktno pozitivni parametri.

### 4.1.2 Regulator s vremenskim pomakom

Regulator s vremenskim pomakom razlikuje se od regulatora kliznog stanja po načinu kompenzacije nepoznate dinamike. Bez ulaska u detalje, za sustav drugog reda, kakvo je podvodno vozilo, osnovna je pretpostavka estimacije s vremenskim pomakom ta da se kontinuirana funkcija  $h(t)$  u sustavu

$$M\ddot{x}(t) + h(t) = u(t) \quad (4.23)$$

može estimirati izrazom

$$\hat{h}(t) \approx h(t - L) = u(t - L) - M\ddot{x}(t - L), \quad (4.24)$$

za dovoljno mali vremenski pomak  $L$ . Upravljački zakon postaje

$$u(t) = u_{id}(t) + \hat{h}(t), \quad (4.25)$$

gdje je  $u_{id}(t)$  nekakav idealni zakon upravljanja koji stabilizira sustav bez poremećaja. Stabilnost ovakvog sustava očigledno ovisi o vremenskom pomaku, a potrebno je i mjerenje ili estimacija akceleracija sustava. Sinteza regulatora s vremenskim pomakom zahijeva samo poznavanje reda sustava.

## 4.2 Upravljanje gibanjem tijela

Za početak će se prikazati jednostavni oblici regulacije gibanja kada na vozilo ne djeluju poremećaji. Radi jednostavnosti ćemo upravljačke zakone koji koriste algebru grupa gibanja zapisati u koordinatnom sustavu tijela. Jedina razlika između tog pristupa i pristupa sintezi u inercijskom koordinatnom sustavu jest u mjestu gdje dolazi do projekcije koordinata na koordinatni sustav tijela.

Idealni upravljački zakon u koordinatnom sustavu tijela možemo zapisati kao

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{M}} \left( \dot{\boldsymbol{\nu}}_d - \mathbf{K}_D (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_d) - \mathbf{K}_P \bar{\mathbf{J}} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \right), \quad (4.26)$$



gdje je  $\dot{\boldsymbol{\nu}}_d$  referentna akceleracija u koordinatnom sustavu tijela,  $\boldsymbol{\nu}_d$  referentna brzina, a  $\bar{\boldsymbol{J}}$  je transformacijska matrica koja ovisi o korištenoj reprezentaciji gibanja. Pri implementaciji je potrebno izvršiti odgovarajuće transformacije brzina i akceleracija iz koordinatnog sustava u kojem su definirane referentne vrijednosti u koordinatni sustav tijela.

U literaturi se često zbog notacijske jedinstvenosti piše

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^\top \boldsymbol{f} = \boldsymbol{J}^\top \bar{\boldsymbol{M}} \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d - \boldsymbol{K}_D \dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{K}_P \tilde{\boldsymbol{\xi}} \right), \quad (4.27)$$

što je jednostavno za implementaciju kada se za zapis orijentacije koriste Eulerovi kutevi, no komplicira stvari kada se za tu svrhu koriste Eulerovi parametri. Ovdje je također potrebno izvršiti odgovarajuće projekcije da bi izrazi bili ispravni. Zbog jasnoće ćemo PD upravljačke zakone prikazati u koordinatnom sustavu tijela.

### 4.2.1 Regulacija orijentacije primjenom Eulerovih kuteva

Regulaciju položaja i orijentacije primjenom Eulerovih kuteva možemo dobiti ako u upravljačkom zakonu (4.26) koristimo

$$\bar{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J}^\top(\boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{IB}^\top & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \boldsymbol{J}_\psi^\top(\boldsymbol{\psi}) \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} {}^I \boldsymbol{x} - {}^I \boldsymbol{x}_d \\ \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_d \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

### 4.2.2 Regulacija orijentacije primjenom Eulerovih parametara

Glavni rezultat u [4] jest regulacija orijentacije korištenjem Eulerovih parametara algebrom grupe rotacija. Bez ulaska u detalje, konačni regulator se može zapisati korištenjem

$$\bar{\boldsymbol{J}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{BI} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 2 \boldsymbol{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} {}^I \boldsymbol{x} - {}^I \boldsymbol{x}_d \\ \text{sgn}(\tilde{\eta}) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

u upravljačkom zakonu (4.26), gdje su  $\tilde{\eta}$  i  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  skalarni i vektorski dio pogreške Eulerovih parametara  $\tilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}_d^* \boldsymbol{k}$ , a faktor 2 u matrici  $\boldsymbol{J}$  proizlazi iz kinematske transformacijske matrice Eulerovih parametara.

### 4.2.3 Regulacija konfiguracije u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja

Analogno Eulerovim parametrima možemo izvesti i izraz za regulaciju po dualnom kvaternionu, odnosno Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja. Koristeći izraz za pogrešku konfiguracije

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_d^* \mathbf{g} \quad (4.30)$$

jednostavno je proširiti ideju povratne veze po Eulerovim parametrima na cjelokupno gibanje. Ukoliko se želi regulirati položaj, potrebno je translacijski dio pogreške transformirati iz parametara dualnog kvaterniona u kartezijski koordinatni sustav pomoću izraza

$$\tilde{\mathbf{t}} = 2(k_0 \mathbf{f} - f_0 \mathbf{k} + \mathcal{S}(\mathbf{k}) \mathbf{f}), \quad (4.31)$$

koji odgovara vezi između pomaka i translacijskog dijela dualnog kvaterniona. Upravljački zakon može se dobiti korištenjem

$$\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ \text{sgn}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

u (4.26), gdje je iskorišten rezultat za regulaciju orijentacije Eulerovim parametrima. Ponašanje ovakvog regulatora identično onome kada se povratna veza vrši direktno po vektorskoj razlici referentne i trenutne pozicije u inercijskom koordinatnom sustavu. Korištenjem algebre jedne od reprezentacija grupe krutog gibanja i transformiranjem u translacijske osi koordinatnog sustava tijela dobili smo alternativni izraz za upravljački zakon koji ima identično ponašanje kao onaj koji koristi vektorsku pogrešku položaja.

Zanimljivije ponašanje dobit ćemo ako u povratnoj vezi koristimo vektorski dio dualnog dijela dualnog kvaterniona, odnosno ako umjesto  $\tilde{\mathbf{t}}$  koristimo  $\tilde{\mathbf{f}}$ . U tom slučaju povratna veza neće biti po pogreški položaja, već po pogreški Euler-Rodriguesovih parametara gibanja. Pošto su oni povezani s vijčanim gibanjem, rezultat regulacije biti će gibanje koje je po svojoj prirodi vijčano, što odgovara fundamentalnom teoremu krutog gibanja. Mogli bismo zaključiti da će ostvareno gibanje biti "prirodnije" od onog koje je rezultat regulacije po vektorskoj pogreški. Upravljački zakon po ovim parametrima dobiva se ako

se u (4.26) koristi

$$\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \text{sgn}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Alternativni izraz možemo dobiti ako pogrešku konfiguracije zapišemo kao

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = 2\mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}}) (\mathbf{g} - \mathbf{g}_d) \quad (4.34)$$

gdje  $2\mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}})$  predstavlja transformaciju pogreške konfiguracije u koordinatni sustav tijela, odnosno pseudo-inverz kinematske transformacijske matrice dualnog kvaterniona,  $\underline{\mathbf{g}}$  predstavlja trenutnu konfiguraciju izraženu dualnim kvaternionom,  $\mathbf{g}$  njen vektorski zapis, a  $\mathbf{g}_d$  vektorski zapis referentne konfiguracije. Za razliku od ostalih unificiranih zapisa pogreške konfiguracije, ovdje dobivamo neke interesantne rezultate. Naime, koristeći svojstvo linearnog operatora  $\mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}})\mathbf{g} = \mathbf{0}$  dobivamo fascinantan izraz za pogrešku konfiguracije koji glasi

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = -2\mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}})\mathbf{g}_d. \quad (4.35)$$

Štoviše, ovaj izraz ekvivalentan je

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = 2\mathbf{U}_d^\dagger(\underline{\mathbf{g}}_d)\mathbf{g}, \quad (4.36)$$

što nadalje odgovara pogreški konfiguracije  $\tilde{\underline{\mathbf{g}}} = \underline{\mathbf{g}}_d^* \underline{\mathbf{g}}$  izražene operacijama linearne algebre. U slučaju korištenja ovakve pogreške, matrica  $\bar{\mathbf{J}}$  jednaka je  $\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{I}_{6 \times 6}$ . Dakle, vektorskom operacijom oduzimanja i njenom transformacijom iste dobili smo izraz koji odgovara rezultatu algebre grupe krutog gibanja. Može se uočiti da ovo predstavlja izravno poopćenje regulacije orijentacije Eulerovim parametrima na cjelokupno gibanje krutog tijela. Istinitost gore iskazanih jednakosti može se potvrditi u simulacijama, no njihov dokaz bio bi izvan opsega ovog diplomskog rada i njihova potvrda biti će tema daljnjeg znanstvenog istraživanja. Ovakav pristup u simulacijama pokazuje obećavajuće rezultate, no još ga treba rigorozno matematički ispitati.

#### 4.2.4 Regulacija pomoću inverzne dinamike

Zakon upravljanja zasnovan na inverznoj dinamici može se dobiti primjenom metode ekvivalentnog upravljanja regulatora kliznog stanja, kao u [19]. Ako pogrešku praćenja

u inercijskom koordinatnom sustavu definiramo kao

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + \mathbf{K}_D \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}_P \int_{t_0}^t \tilde{\boldsymbol{\xi}} d\tau \quad (4.37)$$

i zapišemo ju korištenjem virtualne referentne trajektorije  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_r$

$$\mathbf{s} = \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_r, \quad (4.38)$$

gdje je

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_r = \dot{\boldsymbol{\xi}}_d - \mathbf{K}_D \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{K}_P \int_{t_0}^t \tilde{\boldsymbol{\xi}} d\tau, \quad (4.39)$$

ekvivalentni upravljački zakon dobit ćemo za  $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ . Deriviranjem po vremenu dobivamo

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\boldsymbol{\xi}} - \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r, \quad (4.40)$$

gdje je

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}}_r = \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d - \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} - \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\xi}}. \quad (4.41)$$

Množenjem sa  $\mathbf{M}_\xi$  s lijeve strane dobivamo

$$\mathbf{M}_\xi \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}_\xi (\ddot{\boldsymbol{\xi}} - \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r), \quad (4.42)$$

te supstitucijom  $\mathbf{M}_\xi \ddot{\boldsymbol{\xi}}$  iz dinamike dobivamo izraz

$$\mathbf{M}_\xi \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}^{-\top} \boldsymbol{\tau}_{eq} - \left( \mathbf{M}_\xi \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r + \mathbf{C}_\xi \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{D}_\xi \boldsymbol{\xi} + \mathbf{g}_\xi \right). \quad (4.43)$$

Postavljanjem  $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$  i rješavanjem za  $\boldsymbol{\tau}_{id}$  dobivamo ekvivalentni zakon upravljanja

$$\boldsymbol{\tau}_{id} = \mathbf{J}^\top \left( \mathbf{M}_\xi \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r + \mathbf{C}_\xi \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{D}_\xi \boldsymbol{\xi} + \mathbf{g}_\xi \right), \quad (4.44)$$

koji u odsustnosti vanjskih poremećaja može držati varijable stanja sustava na plohi klizanja. Ovakav oblik zakona upravljanja naziva se i inverzna dinamika (engl. *inverse dynamics*, odnosno engl. *computed torque control*), i može se dobiti i primjenom eksterne linearizacije. Zbog nerobusnosti i nepraktičnosti ovog pristupa jer uključuje kompletan model sustava, ne primjenjuje se u ovom radu i prikazan je radi potpunosti.

## 4.3 Robusno upravljanje stanja vozila

### 4.3.1 Regulator kliznog moda s estimatorom poremećaja

Regulaciju koordinata u inercijskom koordinatnom sustavu možemo pojednostavljeno razmatrati projekcijom

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{f}, \quad (4.45)$$

gdje je  $\mathbf{f}$  upravljačka sila u inercijskom koordinatnom sustavu. Nelinearne članove u dinamici vozila u inercijskom koordinatnom sustavu možemo grupirati u jedan tako da imamo

$$\mathbf{M}_\xi \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{h}_\xi = \mathbf{f}, \quad (4.46)$$

gdje je

$$\mathbf{h}_\xi = \mathbf{C}_\xi(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}) \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{D}_\xi(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} + \mathbf{g}_\xi(\boldsymbol{\xi}). \quad (4.47)$$

Da bismo mogli primijeniti TDC, dinamiku možemo zapisati kao

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{h} = \mathbf{f}, \quad (4.48)$$

gdje je

$$\mathbf{h} = (\mathbf{M}_\xi - \bar{\mathbf{M}}) \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{h}_\xi, \quad (4.49)$$

a  $\bar{\mathbf{M}}$  je konstantna procjena granice  $\mathbf{M}_\xi$ . Ako željenu dinamiku pogreške definiramo kao

$$\ddot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}, \quad (4.50)$$

gdje je  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_d$ , njenim uvrštavanjem u jednadžbu (4.48) dobivamo upravljački zakon

$$\mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{M}} \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d(t) - \mathbf{K}_D \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) - \mathbf{K}_P \boldsymbol{\xi}(t) \right) + \hat{\mathbf{h}}(t), \quad (4.51)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{h}}(t)$  estimacija od  $\mathbf{h}(t)$  i gdje smo naglasili vremensku ovisnost pojedinih elemenata, koja je ključna u dijelu koji slijedi.

Estimacija  $\hat{\mathbf{h}}$  može se dobiti korištenjem (4.48) i činjenicom da je  $\mathbf{h}$  obično kontinuirana funkcija. Ako je vrijeme uzorkovanja  $L$  dovoljno maleno, može se zapisati

$$\hat{\mathbf{h}}(t) \approx \mathbf{h}(t - L) = \mathbf{f}(t - L) - \bar{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t - L), \quad (4.52)$$

čime se dobiva regulator s vremenskim pomakom (engl. *Time Delay Control* - TDC)

$$\mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{M}} \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d(t) - \mathbf{K}_D \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) - \mathbf{K}_P \boldsymbol{\xi}(t) \right) + \mathbf{f}(t-L) - \bar{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t-L). \quad (4.53)$$

Ovakav oblik često se naziva kontinuirani oblik TDC-a zbog aproksimacije kontinuirane funkcije diskretiziranom. Da bi sustav bio stabilan, vrijeme uzorkovanja, odnosno vremenski pomak  $L$ , mora biti dovoljno maleno. Pogreška estimacije koja se dogodila tijekom uzorkovanja, odnosno tijekom vremenskog pomaka, iznosi

$$\mathbf{h}(t) - \hat{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{h}(t) - \mathbf{h}(t-L) = \Delta \mathbf{h}(t), \quad (4.54)$$

te zbog nje regulator nema željenu, već slijedeću dinamiku pogreške:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}_D \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}_P \boldsymbol{\xi} = \bar{\mathbf{M}}^{-1} \Delta \mathbf{h}(t), \quad (4.55)$$

gdje element  $\bar{\mathbf{M}}^{-1} \Delta \mathbf{h}(t)$  na desnoj strani predstavlja utjecaj pogreške estimacije s vremenskim pomakom i pobuđuje dinamiku pogreške.

Kako bi se umanjio utjecaj pogreške estimacije na dinamiku pogreške, u upravljački zakon može se ubaciti i diskontinuirani dio regulatora kliznog stanja čija bi svrha bila eliminacija pogreške estimacije. Dodavanjem diskontinuiteta dobivamo upravljački zakon koji glasi

$$\mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{M}} \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d(t) - \mathbf{K}_D \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) - \mathbf{K}_P \boldsymbol{\xi}(t) - \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \right) + \mathbf{f}(t-L) - \bar{\mathbf{M}} \ddot{\boldsymbol{\xi}}(t-L), \quad (4.56)$$

gdje  $\mathbf{s}$  predstavlja plohu klizanja, a  $\mathbf{K}$  pozitivna dijagonalna matrica koja predstavlja pojačanje regulatora kliznog stanja. Dinamika pogreške ovakvog upravljačkog zakona biti će

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}_D \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}_P \boldsymbol{\xi} = \bar{\mathbf{M}}^{-1} \Delta \mathbf{h}(t) - \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}), \quad (4.57)$$

Ako se koristi ploha klizanja s integralnim članom oblika

$$\mathbf{s} = \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{K}_D \boldsymbol{\xi} + \mathbf{K}_P \int \boldsymbol{\xi} \, d\tau, \quad (4.58)$$

njena je derivacija jednaka željenoj dinamici pogreške. Integralni član u plohi klizanja može smanjiti niskofrekvencijske komponente pogreške, te pojednostavljuje izraz za stabilnost ovog regulatora.

Ako uzmemo Lyapunovljevu funkciju  $V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^\top \mathbf{s}$ , njena vremenska derivacija iznosi

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^\top \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^\top \left( \ddot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\xi}} \right) \\ &= \mathbf{s}^\top \left( \bar{\mathbf{M}}^{-1} \Delta \mathbf{h} - \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \right), \end{aligned} \quad (4.59)$$

iz čega proizlazi da je za negativnu definitnost vremenske derivacije Lyapunovljeve funkcije potrebno zadovoljiti uvjet

$$\operatorname{diag}\{\mathbf{K}\} > \bar{\mathbf{M}}^{-1} |\Delta \mathbf{h}|, \quad (4.60)$$

odnosno pojačanje  $\mathbf{K}$  mora biti veće od pogreške estimacije nelinearnosti. U praktičnoj implementaciji neće se koristiti signum, već saturacijska funkcija kako bi se ostvario regulator kliznog stanja s graničnim slojem. Ovdje se umjesto signum funkcije može upotrijebiti bilo koja druga metoda za smanjenje *chatteringa*.

Bitno je napomenuti da ćemo čisti TDC regulator dobiti ako postavimo  $\mathbf{K} = \mathbf{0}_{6 \times 6}$ , a čisti SMC regulator ako isključimo TDC estimaciju poremećaja, što je način na koji su se tijekom simulacija ostvarivali različiti regulatori. Kada se koristila kombinacija SMC i TDC regulatora koja je ovdje izvedena, korištena je PD ploha klizanja.

### 4.3.2 Sinteza dinamike pogreške

Dosad prikazani regulatori projektirani su da nelinearnom sustavu nametnu linearnu dinamiku oblika

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (4.61)$$

Prirodno se postavlja pitanje kako postaviti pojačanja  $\mathbf{K}_D$  i  $\mathbf{K}_P$  da bismo dobili željeni odziv, odnosno kako načiniti sintezu regulatora. Ovdje ćemo prikazati način određivanja pojačanja kako bi se dobio aperiodski odziv sustava.

Radi jasnoće možemo promatrati SISO sustav drugog reda s viskoznom prigušenjem

$$\ddot{x} + K_v \dot{x} + K_p x = 0, \quad (4.62)$$

kojeg možemo zapisati u obliku prostora stanja kao

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (4.63)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Navedeni sustav će biti stabilan ako su svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A}$  u lijevoj kompleksnoj poluravnini. Svojstvene vrijednosti mogu se pronaći simbolički kao

$$\text{eig}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} (K_v + \sqrt{K_v^2 - 4K_p}) \\ -\frac{1}{2} (K_v - \sqrt{K_v^2 - 4K_p}) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (4.65)$$

Vidimo da će sustav imati kompleksna rješenja, odnosno biti oscilatoran, ako je  $4K_p^2 > K_v$ . Sustav će biti kritično prigušen kada ima dvostruko rješenje na realnoj osi, odnosno kada je

$$K_v^2 - 4K_p = 0, \quad (4.66)$$

iz čega dobivamo uvjet za kritično prigušenje dinamike pogreške

$$K_p = \frac{1}{4}K_v^2. \quad (4.67)$$

Kritično prigušenje ovog sustava uzrokuje njegov aperiodski odziv. Parametre možemo zapisati u ovisnosti o željenim svojstvenim vrijednostima

$$K_v = 2\lambda, \quad K_p = \lambda^2, \quad (4.68)$$

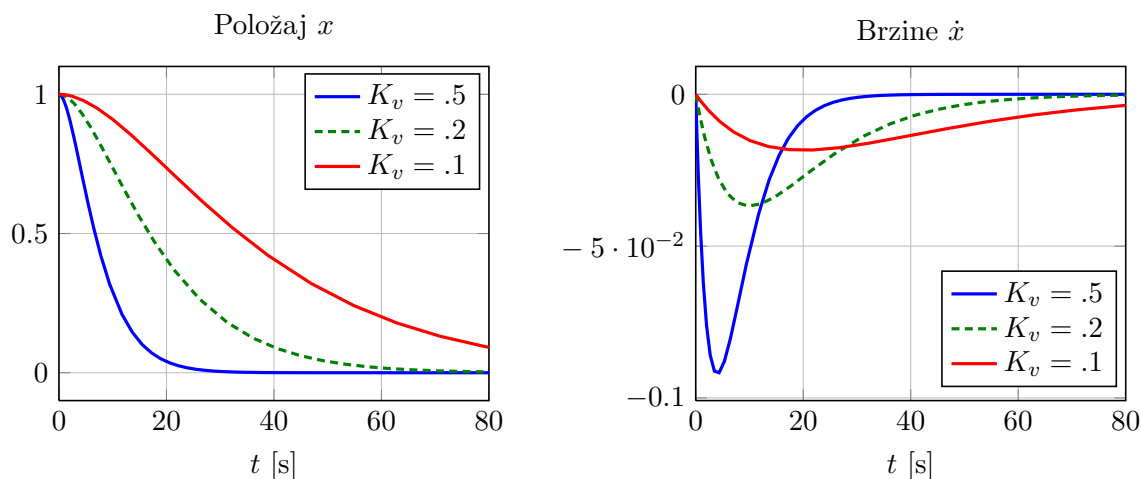
gdje je  $\lambda \in \mathbb{R}$  realna svojstvena vrijednost. U vektorskom obliku sada možemo zapisati

$$\mathbf{K}_D = 2\boldsymbol{\Lambda}, \quad \mathbf{K}_P = \boldsymbol{\Lambda}^2, \quad (4.69)$$

gdje je  $\boldsymbol{\Lambda}$  dijagonalna matrica sa željenim svojstvenim vrijednostima odziva za pojedine stupnjeve slobode. Ovakva definicija dinamike pogreške uobičajena je u robotici. Razlog iz kojeg je u ovom radu dinamika izvedena postupno je utjecaj graničnog sloja SMC-a na dinamiku pogreške, što je obrađeno malo kasnije u tekstu.

Pri određivanju odziva za stvarna vozila potrebno je obratiti pozornost na maksimalne brzine koje se javljaju u prijelaznoj pojavi. Brzine su direktno povezane sa silama koje se moraju ostvariti na tijelu kako bi došlo do gibanja. Tijelo ima određenu inerciju, pa su za zaustavljanje inertnijih sustava potrebne veće sile, dok svako vozilo ima ograničeni iznos sila koje može ostvariti. Zbog toga nije preporučljivo za inertna vozila postavljati brze





Slika 4.2: Dinamika pogreške za različite parametre.

odzive (velik  $K_v$ ) pošto će upravljačka sila brzo otići u saturaciju i otpornost sustava na vanjske poremećaje biti će značajno smanjena. Dakle, na umu treba imati ograničenja aktuatora, odnosno da sile koje su potrebne za ubrzavanje i usporavanje u tranzijentnim periodima ne bi bile prevelike.

Trajanje tranzijentnog odziva direktno ovisi o prigušenju  $K_v$ . Na slici 4.2 su prikazani odzivi na impulsnu pobudu položaja za neke vrijednosti prigušenja, iz kojih se vidi da smanjenje prigušenja uzrokuje i smanjenje maksimalne brzine sustava, te produžuje vrijeme odziva.

Ukoliko je u povratnu vezu uključen SMC s graničnim slojem, potrebno je u razmatranje uzeti i njegovo pojačanje u graničnom sloju, gdje će dinamika pogreške bez poremećaja biti

$$\ddot{e} + \left( \mathbf{K}_D + \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{\Gamma} \right) \dot{e} + \left( \mathbf{K}_P + \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{\Gamma} \mathbf{K}_D \right) e = \mathbf{0} \quad (4.70)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  pojačanje SMC-a, a  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{1/\varepsilon_1, \dots, 1/\varepsilon_6\}$  dijagonalna matrica s elementima inverzne širine sloja  $\varepsilon$ . Pošto se pojačanje  $\mathbf{K}$  mora postaviti prema najvećem iznosu poremećaja, cilj je za željeno pojačanje  $\mathbf{K}_v$  koje određuje aperiodski odziv odrediti pojačanja  $\mathbf{K}_P$  i  $\mathbf{K}_D$  uzimajući u obzir  $\mathbf{K}$ . Iz (4.70) jednostavno dobivamo izraze za

pojačanja

$$\mathbf{K}_D = 2 \mathbf{\Lambda} - \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{\Gamma}, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{K}_P = \mathbf{\Lambda}^2 - \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{\Gamma} \mathbf{K}_D, \quad (4.72)$$

s kojima će odziv sustava unutar graničnog sloja biti aperiodski. Ukoliko se sustav nalazi izvan graničnog sloja, dinamika pogreške zbog saturacije postaje nelinearna pa se karakteristike odziva ne mogu projektirati na jednostavan način.

## 4.4 Pregled korištenih regulatora

Kao idealno upravljanje korišten je **PD** regulator oblika

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{J}^T \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d - \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} - \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\xi}} \right) \quad (4.73)$$

gdje je  $\bar{\mathbf{M}}$  procjena inercije vozila koja služi kao faktor skaliranja između željenih akceleracija i upravljačkih sila.

Korišteni regulator kliznog stanja (**SMC**) s PD plohom klizanja može se zapisati izrazima

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{J}^T \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d - \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} - \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{K} \text{sat}(\mathbf{s}/\boldsymbol{\varepsilon}) \right) \quad (4.74)$$

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + \mathbf{K}_D \tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad (4.75)$$

U slučaju kada je korištena integralna ploha klizanja (**SMC+ISS**), ona je definirana kao

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{K}_I \mathbf{z}, \quad (4.76)$$

$$\mathbf{s}_0 = \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + \mathbf{K}_D \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad (4.77)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{s}_0, \quad (4.78)$$

dok je upravljački zakon ostao isti kao i za SMC. Ovako definirana ploha klizanja forsira aperiodski odziv pogreške.

Regulator s vremenskim pomakom (**TDC**) diskretiziran je za korak simulacije  $k$  tako da

je definiran izrazima

$$\hat{\mathbf{h}} = \boldsymbol{\tau}(k-1) - \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}}(k-1), \quad (4.79)$$

$$\boldsymbol{\tau}(k) = \hat{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{M}}\mathbf{J}^T \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d - \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} - \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\xi}} \right), \quad (4.80)$$

dok je njegova kombinacija s regulatorom kliznog stanja (**SMC+TDC**) definirana izrazima

$$\hat{\mathbf{h}} = \boldsymbol{\tau}(k-1) - \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}}(k-1), \quad (4.81)$$

$$\boldsymbol{\tau}(k) = \hat{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{M}}\mathbf{J}^T \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d - \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} - \mathbf{K}_P \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{K} \text{sat}(\mathbf{s}/\boldsymbol{\varepsilon}) \right), \quad (4.82)$$

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + \mathbf{K}_D \tilde{\boldsymbol{\xi}}. \quad (4.83)$$

Simulacijski rezultati dobiveni su primjenom ovih regulatora, i u rezultatima naznačene oznake odgovaraju ovdje podebljanim skraćenicama. Iznos upravljačkih sila u simulacijama je ograničen na konačan iznos.

## 4.5 Raspodjela sile upravljanja

Na vozilima se upravljačke sile  $\boldsymbol{\tau}$  ne ostvaruju direktno, već posredno putem aktuatora, koji u općem slučaju imaju proizvoljnu konfiguraciju. Za podvodna vozila i bespilotne letjelice većinom se radi o propelerima i kontrolnim površinama. Zadatak raspodjele upravljačke sile<sup>1</sup> je raspodijeliti izračunatu upravljačku silu na postojeće aktuatore. Velika prednost kod ovakvog pristupa naspram sintezi iz otvorene petlje određenog aktuatora jest što ovakav sustav pruža veliku robusnost na otkazivanje aktuatora. Takav pristup uvelike je raširen kod podvodnih vozila [2, 19, 30], za dinamičko pozicioniranje brodova [31], za upravljanjem orijentacije satelita [32], kao i kod robusnih autopilota za zrakoplove [6]. Ova metoda ujedno je korisna i kada je sustav nadaktuiran, odnosno kada sadrži redundantne aktuatore. Referenca [33] daje pregled metoda raspodjele sile upravljanja kod morskih vozila.

<sup>1</sup>engl. *control allocation*, odnosno engl. *actuator allocation*

### 4.5.1 Konfiguracijska matrica

Poopćeni vektor sile  $\boldsymbol{\tau}_i$  koju stvara  $i$ -ti aktuator može se zapisati kao

$$\boldsymbol{\tau}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

gdje je  $\mathbf{f}_i$  sila koju stvara aktuator, a  $\mathbf{r}_i$  položaj njenog hvatišta u koordinatnom sustavu tijela. Ukoliko se radi o potisnicima<sup>2</sup>, sila se može zapisati kao

$$\mathbf{f}_i = p_i \mathbf{e}_i \quad (4.85)$$

gdje je  $p_i$  sila potiska koju stvara  $i$ -ti potisnik, a  $\mathbf{e}_i$  njegov vektor smjera jedinične duljine. U slučaju fiksiranih potisnika,  $\mathbf{e}_i$  je konstantan, dok je u slučaju okretljivih<sup>3</sup> potisnika  $\mathbf{e}_i$  promjenjiv ovisno o kutu zakreta potisnika.

Najčešće se razmatra linearna veza

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (4.86)$$

gdje je  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  konfiguracijska matrica,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  vektor upravljačkih sila na aktuatorima,  $n$  broj upravljivih stupnjeva slobode, a  $p$  broj aktuatora. Iz zadanog vektora sile upravljanja  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$ , koji je izlaz iz regulatora, potrebno je pronaći vektor  $\mathbf{u}$ . Kada se radi o okretljivim potisnicima, veza između sile upravljanja i ulaza u aktuatora nije linearna.

Određivanje sila na aktuatorima da bi se postigla željena sila upravljanja predstavlja optimizacijski problem. Funkcija cilja osim odstupanja ostvarene od željene sile može uključivati i potrošnju energije i ocjenu mehaničkog trošenja. Naprednije metode raspodjele omogućuju uštedu energije, odnosno goriva i, u konačnici, novca. Kod rješavanja problema optimiranja teži se eksplicitnim rješenjima pošto se rješenje dobiva u jednom koraku, što je poželjno kod primjena u realnom vremenu. Pošto eksplicitne metode mogu zahtijevati mnogo memorije, koriste se i iterativne metode. Iterativne metode

<sup>2</sup>engl. *thruster*, u praksi su to propeleri

<sup>3</sup>engl. *azimuthing*; u slučaju letjelica vektoriranih – engl. *vectored*

imaju prednost konfigurabilnosti tijekom rada, jednostavnu implementaciju i veliku fleksibilnost. Najčešće se minimira  $\mathcal{L}_2$  norma pogreške, no moguće je minimirati i  $\mathcal{L}_\infty$  normu kako bi se povećao opseg ostvarivih sila upravljanja.

Za okretljive potisnike, matrica  $\mathbf{B}$  je funkcija kuta zakreta potisnika, odnosno

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u}, \quad (4.87)$$

te određivanje vektora  $\mathbf{u}$  predstavlja problem nelinearnog optimiranja. Kako bi se problem pojednostavio i omogućilo njegovo rješavanje, matrica  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})$  raspisuje se po komponentama okretljivih potisnika, tako da je

$$\begin{aligned} u_{i,x} &= u_i \cos \alpha_i \\ u_{i,y} &= u_i \sin \alpha_i \end{aligned} \quad (4.88)$$

te se stvara proširena konfiguracijska matrica  $\mathbf{B}_e$  i prošireni vektor upravljanja  $\mathbf{u}_e$  koji sadrži komponente sile okretljivog potisnika. Nakon rješavanja potrebno je iz komponenta  $u_{i,x}$  i  $u_{i,y}$  izračunati  $u_i$  i  $\alpha_i$ , odnosno

$$u_i = \sqrt{u_{i,x}^2 + u_{i,y}^2}, \quad \alpha_i = \text{atan2}(u_{i,y}, u_{i,x}) \quad (4.89)$$

pa se ostvarene sile mogu zapisati kao

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (4.90)$$

čime se problem preformulira u izračunavanje proširenog vektora upravljanja  $\mathbf{u}_e$ .

Ovdje ćemo prikazati iterativni algoritam koji uzima u obzir statička i dinamička ograničenja okretljivih aktuatora. Za kvadratičnu funkciju cilja

$$J = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^\top \mathbf{W} \boldsymbol{\tau} \quad (4.91)$$

koja se minimira s uvjetom

$$\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B}\mathbf{u} = 0 \quad (4.92)$$

Ovdje je  $\mathbf{W} = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_p\}$  dijagonalna pozitivno definitna matrica koja daje težine aktuatorima. Promjenom relativnih vrijednosti može se na pojedine akuatore

usmjeriti više ili manje upravljačke energije. Ova matrica omogućuje veoma jednostavnu akomodaciju kvarova aktuatora, ako se za  $i$ -ti aktuator postave vrijednosti

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{za potpuni kvar} \\ 0 < w_i < 1 & \text{za djelomični kvar} \\ 1 & \text{za nominalnu funkcionalnost} \end{cases} \quad (4.93)$$

Ovakav način raspodjele otporan je, dakle, na kvarove aktuatora, ukoliko se isti pravovremeno detektiraju.

U [2] se primjenom Lagrangeovih multiplikatora dobiva rješenje

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_W^\dagger \boldsymbol{\tau} \quad (4.94)$$

gdje je  $\mathbf{B}_W^\dagger$  pseudo-inverz

$$\mathbf{B}_W^\dagger = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^\top (\mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^\top)^{-1} \quad (4.95)$$

što daje rješenje neograničenog problema kvadratičnog optimiranja. Identičan izraz vrijedi za korištenje proširene konfiguracijske matrice  $\mathbf{B}_e$  i vektora sila  $\mathbf{u}_e$ . Ovo je rješenje optimalno u  $L_2$  smislu, što znači da minimira euklidsko odstupanje ostvarene sile upravljanja od željene. Zbog toga je prostor ostvarivih sila i momenata hipersfera u  $n$ -dimenzionalnom prostoru. U [19] se može naći algoritam za  $L_\infty$  optimiranje problema raspodjele sile upravljanja, koji za pronalaženje rješenja koristi neuronske mreže. Umjesto euklidskog odstupanja, taj algoritam minimira najveći potisak, što omogućuje ukupno smanjenje potisnih sila. Prostor ostvarivih sila i momenata u tom je slučaju poliedar u  $n$ -dimenzionalnom prostoru.

## 4.5.2 Nelinearnosti aktuatora

Jednadžba (4.94) dati će rješenje kada na aktuatoru nisu postavljena ograničenja. No, u praktičnim je primjenama ona uvijek postoje. Za okretljive potisnike imamo ograničenje na iznos sile

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (4.96)$$

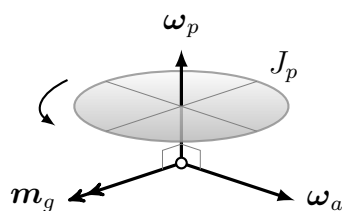
ograničenje na kut zakreta potisnika

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \quad (4.97)$$

a moguće je zadati i ograničenje na brzinu zakretanja, odnosno

$$|\dot{\alpha}| \leq \dot{\alpha}_{\max}. \quad (4.98)$$

Nakon pseudo-inverznog rješenja potrebno je na izračunati vrijednosti potiska i kuta zakreta nametnuti navedena ograničenja. U slučaju da je prvotno rješenje izvan ograničenja aktuatora, konačno će rješenje uvelike odstupati od traženog.



Slika 4.3: Žiroskopski moment kod zakretanja propelera.

U slučaju okretljivih propelera mogu se javiti nezanemarivi žiroskopski momenti koji mogu djelovati destabilizirajuće na sustav. Njih je moguće uključiti u razmatranje u algoritmu za raspodjelu sila. Kao što je prikazano na slici 4.5.2, žiroskopski moment okomit je na os zakretanja i os vrtnje propelera. U vektorskom obliku imamo

$$\mathbf{m}_g = J_p \boldsymbol{\omega}_a \times \boldsymbol{\omega}_p(u) \quad (4.99)$$

gdje je  $J_p$  moment tromosti propelera oko osi vrtnje,  $\boldsymbol{\omega}_a$  je vektor brzine zakretanja, dok je  $\boldsymbol{\omega}_p(u)$  vektor brzine vrtnje propelera u ovisnosti o ulaznoj sili. Brzina  $\boldsymbol{\omega}_a$  povezana je s promjenom kuta zakreta  $\dot{\alpha}_i$  i osi zakretanja tako da je

$$\boldsymbol{\omega}_{a,i} = \dot{\alpha}_i \mathbf{e}_{a,i} \quad (4.100)$$

gdje je  $\mathbf{e}_{a,i}$  jedinični vektor osi zakreta. Zakretanje propelera uzrokuje samo moment, pa je ukupna poopćena žiroskopska sila

$$\boldsymbol{\tau}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^p J_{p,i} \boldsymbol{\omega}_{a,i} \times \boldsymbol{\omega}_{p,i}(u_i) \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Nakon uključivanja žiroskopskih momenata u razmatranje, cilj optimiranja postaje

$$\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}_g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = 0 \quad (4.102)$$

iz čega je vidljivo da problem postaje nelinearan, a moguće ga je riješiti iterativno do zadovoljavajuće točnosti.

### 4.5.3 Iterativni algoritam raspodjele

Izraz (4.94) eksplicitno je rješenje problema raspodjele sila kada ne postoje ograničenja na aktuatora i kada su svi aktuatori funkcionalni. No, u praksi to često nije slučaj, pa je potrebno u razmatranje uzeti navedene nelinearnosti, što se može učiniti iterativnim optimiranjem.

Jedna od najjednostavnijih metoda optimiranja je metoda najstrmijeg pada. Počinjemo od uvjeta

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}_e \mathbf{W}_e \mathbf{u}_e \quad (4.103)$$

Ukoliko su na vektor  $\mathbf{u}_e$  postavljena ograničenja, ostvarena sila ostupat će od željene za

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_e \mathbf{W}_e \mathbf{u}_e - \boldsymbol{\tau} \quad (4.104)$$

Želimo minimirati vektor pogreške  $\mathbf{e}$ , pa možemo zapisati funkciju cilja kao

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top \mathbf{e} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{e} \mathbf{e}^\top \}, \quad (4.105)$$

Izvod gradijenta za ovakvu funkciju cilja može se vidjeti u dodatku A.4. Ukupni gradijent funkcije cilja je

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{W}_e^\top \mathbf{B}_e^\top \mathbf{e} \quad (4.106)$$

te se prošireni vektor upravljačkih sila, koristeći svojstvo dijagonalnosti težinske matrice, pomoću gradijentnog algoritma dobiva iteracijom

$$\mathbf{u}_e(k+1) = \mathbf{u}_e(k) - \mu \mathbf{W}_e \mathbf{B}_e^\top \mathbf{e} \quad (4.107)$$

iz čega je vidljivo da nije potrebno računati pseudo-inverz konfiguracijske matrice. Nakon svake iteracije mogu se postaviti bilo kakva ograničenja na upravljačke sile. Zbog nelinearnosti ograničenja najbolje je koristiti gradijentni algoritam koji promjenu aproksimira



linijom u hiperprostoru rješenja, što je korisno kada se traži rješenje na rubu prostora ostvarivih sila, primjerice kada je neki od aktuatora u potpunom kvaru pa je taj prostor smanjen. U vektor pogreške možemo dodati i žiroskopske sile, tako da je

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\tau}_g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{B}_e \mathbf{W}_e \mathbf{u}_e - \boldsymbol{\tau}, \quad (4.108)$$

bez promjene algoritma pošto žiroskopski momenti spadaju u ostvarene upravljačke sile.

Druga metoda može se dobiti shvaćanjem pogreške  $\mathbf{e}$  kao odstupanja ostvarene sile od željene. Tada se ona može povezati s pogreškom upravljačke sile  $\tilde{\mathbf{u}}$  izrazom

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_e \mathbf{W}_e \tilde{\mathbf{u}}, \quad (4.109)$$

iz čega se dobiva

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}_e^{-1} \mathbf{B}_e^\dagger \mathbf{e}, \quad (4.110)$$

te upravljačke sile u iteracijskom koraku  $k + 1$  možemo podesiti izrazom

$$\mathbf{u}_e(k + 1) = \mathbf{u}_e(k) - \tilde{\mathbf{u}}. \quad (4.111)$$

Pošto se koristi pseudo-inverz, ovo će rješenje u svakom koraku biti optimalno u kvadratnom smislu. Pseudo-inverz konfiguracijske matrice može se simbolički izračunati i može ga se smatrati konstantnim, odnosno nije ga potrebno računati tijekom izvršavanja algoritma. Inverz dijagonalne težinske matrice je dijagonalna matrica s invertiranim elementima. Ovdje treba paziti na male vrijednosti težina kako ne bi došlo do dijeljenja s nulom. Preporučljivo je sve težine ispod neke granice zaokružiti na nulu. Ovaj je algoritam stabilniji i daje manje konačne iznose potiska od gradijentnog.

Algoritam 1 iterativno dolazi do rješenja problema raspodjele sile upravljanja, a uključuje statička i dinamička ograničenja aktuatora. Algoritam prvo iz stanja aktuatora izračunava prošireni vektor upravljačkih sila  $\mathbf{u}_e$  i žiroskopske momente  $\boldsymbol{\tau}_g$ . Rješenje će biti optimalno u kvadratnom smislu, odnosno greška će se raspodjeliti podjednako na sve upravljive stupnjeve slobode, što je definirano funkcijom cilja. Nakon adaptacije izračunavaju se stanja aktuatora i na njih se postavljaju ograničenja. Iterirati se može dok greška ne padne ispod minimalne granice. Iako je cilj dobiti  $\mathbf{e} = 0$ , to u praksi nije neophodno pošto aktuatori ne pružaju neograničenu razlučivost. Osim minimalne granice

**Algoritam 1:** Iterativna raspodjela sile upravljanja.

---

 $\mathbf{u} = 0, k = 0$ 
**ponavlja**Izračunaj prošireni vektor sila  $\mathbf{u}_e \leftarrow (\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ Izračunaj žiroskopske momente  $\boldsymbol{\tau}_g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ 

// Raspodjela sila

 $\mathbf{e} = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e - \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ 

(4.107) za gradijentni algoritam ili (4.111) za pseudo-inverzno rješenje

// Ograničenja aktuatora

Izračunaj sile i kuteve zakreta  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \leftarrow \mathbf{u}_e$  $\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max}$  $\boldsymbol{\alpha}_{\min} \leq \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\alpha}_{\max}$  $|\dot{\boldsymbol{\alpha}}| \leq \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\max}$  $k = k + 1$ **dok je**  $|\mathbf{e}| \geq e_{\min}$  **ili**  $||\mathbf{e}(k)| - |\mathbf{e}(k-1)|| \geq \Delta e_{\min}$  **ili**  $i \leq N$ 


---

greške, može se pratiti promjena greške kroz iteracije te prekinuti izvođenje algoritma ako se greška znatno ne mijenja kroz nekoliko iteracija, što bi značilo da je postignuta konvergencija rješenja. Ako je greška konačna i ovo se dogodilo, to je znak da je sustav ušao u saturaciju (ograničenje), te ostvarivanje željenih sila upravljanja nije moguće. Kao mehanizam zaštite od beskonačne petlje može se ograničiti broj iteracija algoritma. Ovaj algoritam neće biti optimalan u dinamičkom smislu, ali će dati primjenjivo rješenje u svakom koraku.

Kako je implementacija regulacijskih algoritama pretežno ostvarena na digitalnim računalima, može se smatrati da algoritam za raspodjelu sila funkcionira u diskretiziranom vremenu. Iz te pretpostavke može se preformulirati ograničenje promjene kuta zakreta na

$$|\boldsymbol{\alpha}(k) - \boldsymbol{\alpha}(k-1)| \leq T \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\max} \quad (4.112)$$

gdje je  $k$  korak upravljanja, a  $T$  vrijeme uzorkovanja. U  $k$ -tom koraku se algoritam raspodjele izvrši jednom. Ovime se efektivno sužava raspon kuteva zakreta u određenom koraku.

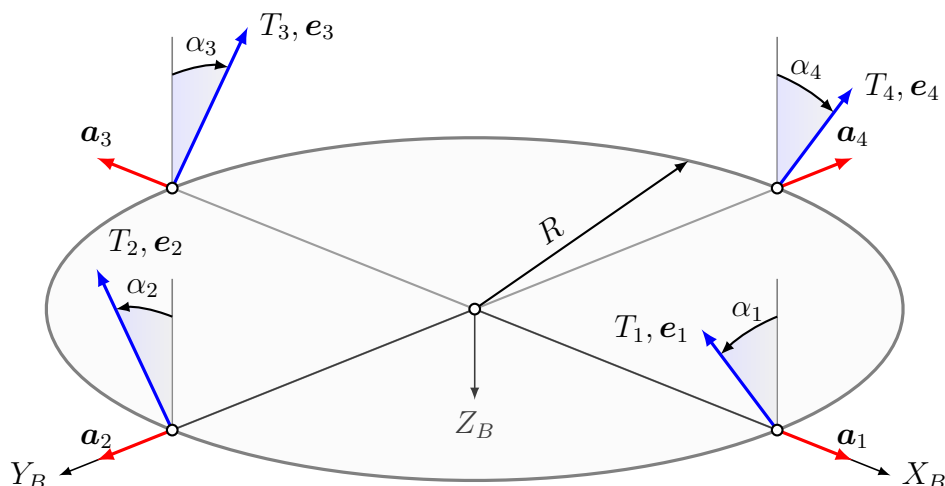
Nakon izračunavanja sila potiska i kuteva zakreta, mogu se koristiti modeli aktuatora kako bi se odredio potreban broj okretaja za ostvarivanje sile, te ostale ulazne varijable za korištene aktuatore.

#### 4.5.4 Primjer konfiguracijske matrice

Stvaranje konfiguracijske matrice i dobivanje pseudo-inverza proširene konfiguracijske matrice prikazat ćemo na primjeru hipotetskog bespilotnog četverorotora (engl. *quadrotor*) sa četiri zakretna propelera ravnomjerno raspodijeljena po kružnici polumjera  $R$  kao na slici 4.4. Žiroskopske sile se neće uzimati u razmatranje. Iako ovakva konkretna konfiguracija nije uobičajena kod takvog tipa letjelica, ilustrativna je za problem jer je moguće ostvariti sve sile i momente, no nije ih moguće ostvariti istovremeno uz jednaku točnost. Propeleri se zakreću oko osi  $\mathbf{a}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , za kuteve  $\alpha_i$ , te stvaraju potisak  $T_i$  u smjeru vektora  $\mathbf{e}_i$ . Potisak  $T_i$  ovisi o brzini vrtnje propelera. Ovakva konfiguracija omogućuje ostvarivanje svih 6 sila i momenata na tijelu, te sadrži i redundantnost aktuatora pošto iste sile i momente ostvaruju različiti aktuatori. Ukoliko otkáže jedan od aktuatora, i dalje je moguće ostvariti sve sile i momente jer će se upravljačke sile preraspodjeliti na preostale aktuatore. Raspodjelu sila upravljanja po aktuatorima bilo bi komplicirano izvesti bez ovako definirane metodologije.

Vektori pozitivne osi zakretanja su

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$



Slika 4.4: Konfiguracija aktuatora uz primjer raspodjele sile upravljanja.

Vektori smjera potiska su

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha_1 \\ -\cos \alpha_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_4 \\ 0 \\ -\cos \alpha_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha_3 \\ -\cos \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} \sin \alpha_4 \\ 0 \\ -\cos \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

te se nalaze na položajima od ishodišta koordinatnog sustava  $B$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Vektor ostvarenih sila upravljanja možemo dobiti izrazom

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} T_1 \mathbf{e}_1 + T_2 \mathbf{e}_2 + T_3 \mathbf{e}_3 + T_4 \mathbf{e}_4 \\ T_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{e}_1 + T_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{e}_2 + T_3 \mathbf{r}_3 \times \mathbf{e}_3 + T_4 \mathbf{r}_4 \times \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

kojeg možemo zapisati kao umnožak konfiguracijske matrice  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$  i vektora potiska  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$

$$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_4 \\ \sin \alpha_1 & 0 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ -\cos \alpha_1 & -\cos \alpha_2 & -\cos \alpha_3 & -\cos \alpha_4 \\ 0 & -R \cos \alpha_2 & 0 & R \cos \alpha_4 \\ R \cos \alpha_1 & 0 & -R \cos \alpha_3 & 0 \\ R \sin \alpha_1 & R \sin \alpha_2 & R \sin \alpha_3 & R \sin \alpha_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (4.117)$$

Koristeći prošireni vektor potiska možemo ostvarene sile zapisati kao umnožak proširene konfiguracijske matrice  $\mathbf{B}_e \in \mathbb{R}^{6 \times 8}$  i proširenog vektora upravljačkih sila  $\mathbf{u}_e \in \mathbb{R}^8$  kao

$$\boldsymbol{\tau} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & R \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \\ R & 0 & R & 0 & R & 0 & R & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \sin \alpha_1 \\ T_1 \cos \alpha_1 \\ T_2 \sin \alpha_2 \\ T_2 \cos \alpha_2 \\ T_3 \sin \alpha_3 \\ T_3 \cos \alpha_3 \\ T_4 \sin \alpha_4 \\ T_4 \cos \alpha_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\alpha})} \quad (4.118)$$

te je pseudo-inverz konfiguracijske matrice  $\mathbf{B}_e^\dagger \in \mathbb{R}^{8 \times 6}$  jednak

$$\mathbf{B}_e^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & .5 & 0 & 0 & 0 & .25/R \\ 0 & 0 & -.25 & 0 & .5/R & 0 \\ -.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & .25/R \\ 0 & 0 & -.25 & -.5/R & 0 & 0 \\ 0 & -.5 & 0 & 0 & 0 & .25/R \\ 0 & 0 & -.25 & 0 & -.5/R & 0 \\ .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & .25/R \\ 0 & 0 & -.25 & .5/R & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

Ako se naprave simetrična ograničenja kuta zakreta  $\alpha_{\min} = -\alpha_{\max}$ , te se potisak ograniči na  $0 < T < T_{\max}$ , može se jednostavno procijeniti granice ostvarivih sila i momenata.

$$\boldsymbol{\tau}_{\min} = \begin{bmatrix} -2 T_{\max} \\ -2 T_{\max} \\ -4 T_{\max} \\ -(1 + \cos |\alpha_{\max}|) R T_{\max} \\ -(1 + \cos |\alpha_{\max}|) R T_{\max} \\ -4 R T_{\max} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_{\max} = \begin{bmatrix} 2 T_{\max} \\ 2 T_{\max} \\ 4 \cos |\alpha_{\max}| T_{\max} \\ (1 + \cos |\alpha_{\max}|) R T_{\max} \\ (1 + \cos |\alpha_{\max}|) R T_{\max} \\ 4 R T_{\max} \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

Najveća sila u horizontalnom smjeru postiže se kada oba propelera pokazuju u smjeru osi. U vertikalnoj osi najveća se sila ostvaruje u negativnom smjeru kada sva četiri propelera

pokazuju u tom smjeru. Kada postoji ograničenje na kut zakreta, tada najveća sila u pozitivnom smjeru vertikalne osi ovisi o maksimalnom kutu zakreta. Najveći momenti oko  $x$ - i  $y$ - osi ostvaruju se kada propeleri pokazuju u isti smisao momenta. Isto vrijedi i za moment oko  $z$ -osi. U jednadžbi (4.120) su pokazane apsolutne granice ostvarivih sila i momenata s ovakvom konfiguracijom. U stvarnosti je za upravljanje uvijek potrebna kombinacija sila i momenata, pa se stvarne granice nalaze ispod ovdje navedenih.

### 4.5.5 Konvergencija iterativnog algoritma

Kako bi se mogao odrediti ispravan maksimalni broj iteracija ili minimalna promjena pogreške među iteracijama, potrebno je imati saznanja o konvergenciji algoritma. Zbog njegove optimalnosti, koristit ćemo varijantu iterativnog algoritma koja u svakom koraku koristi pseudo-inverz konfiguracijske matrice. Za prikaz konvergencije algoritma raspodjele radi jednostavnosti će se koristiti parametri

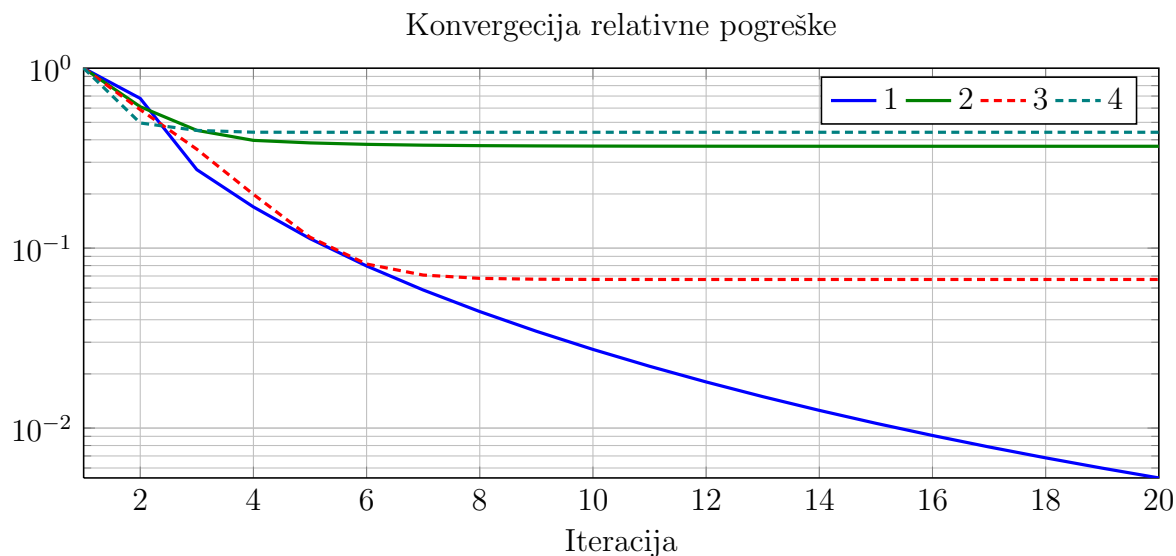
$$\begin{aligned} T_{\max} &= 1 \text{ N}, \\ \alpha_{\max} &= 140^\circ, \\ R &= 0,25 \text{ m}, \end{aligned}$$

iz kojih možemo izračunati da su maksimalno ostvarive sile

$$\boldsymbol{\tau}_{\max} = [2, 2, -3.064, 0.441, 0.441, 4]^T.$$

Konvergencija pogreške i rješenja iterativnog algoritma s pseudo-inverznom adaptacijom prikazat će se na četiri primjera, i to

1. unutar prostora ostvarivih sila, sa svim funkcionalnim propelerima,
2. unutar prostora ostvarivih sila, s jednim propelerom u kvaru,
3. izvan prostora ostvarivih sila, sa svim funkcionalnim propelerima,
4. izvan prostora ostvarivih sila, s jednim propelerom u kvaru,



Slika 4.5: Konvergencija pogreške sile upravljanja za sva četiri slučaja.

sa silama za pojedine slučajeve

$$\tau_{1,2} = [.5, 0, .5, .1, 0, 0]^T,$$

$$\tau_{3,4} = [.5, .25, .5, .5, -.1, .1]^T.$$

Svrha prvog slučaja je prikazati konvergenciju algoritma kada postoji rješenje problema raspodjele, i to u nominalnom stanju aktuatora. U drugom slučaju želi se prikazati mogućnost pronalaska rješenja s konačnom pogreškom i u slučaju kada je jedan od aktuatora neispravan, odnosno njegov potisak ne ulazi u rješenje. Slučajevi 3 i 4 prikazuju konvergenciju kada neki od aktuatora već u nominalnoj konfiguraciji ulaze u saturaciju. Iako su apsolutni iznosi ovih sila maleni, treba imati na umu da su granice sila također postavljene veoma nisko. Primjerice, elektronički komutirani istosmjerni elektromotori bez četkica, kakvi se koriste za aviomodele i bespilotne letjelice, koji s propelerom stvaraju oko 1 N potiska, bez propelera teže oko 15 g.

Slika 4.5 pokazuje konvergenciju relativne euklidske pogreške ostvarene od željene sile upravljanja kroz iteracije algoritma. Konačno rješenje koje se šalje aktuatorima jest ono u zadnjoj iteraciji algoritma. Tablica 4.1 prikazuje konačne iznose relativne pogreške nakon 20 iteracija algoritma. Iz slike 4.5 je vidljivo da u nominalnom slučaju (1) algoritam već nakon 8 iteracija dolazi do rješenja koje ima manje od 5 % relativne pogreške, a nakon 16 iteracija je ona manja od 1 %. U slučajevima kada je pogreška konačna, odnosno

Tablica 4.1: Iznosi relativne pogreške rješenja iterativnog algoritma raspodjele nakon 20 iteracija.

| Primjer | Relativna pogreška |
|---------|--------------------|
| 1       | 0,5284 %           |
| 2       | 36,814 %           |
| 3       | 6,697 %            |
| 4       | 44,037 %           |

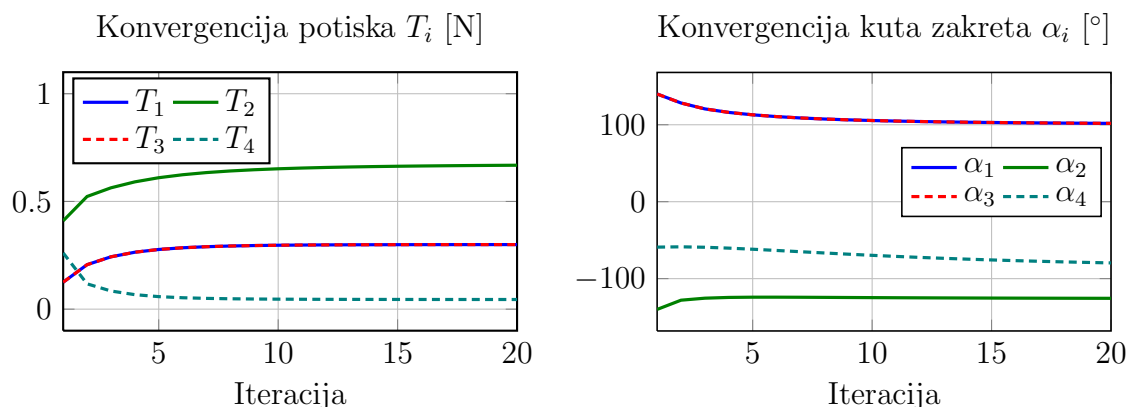
kada aktuatori ne mogu izvršiti traženu silu upravljanja već ulaze u saturaciju, konačno rješenje pronađeno je u manje od 10 iteracija algoritma.

Iz tablice 4.1 vidljivo je da u slučaju otkazivanja jednog od aktuatora (2 i 4) relativna pogreška značajno raste. Pri tome je važno napomenuti da je rješenje raspodjele ipak postignuto, pa su performanse regulacije smanjene, ali je funkcionalnost očuvana. Na ovaj način dobiva se robusnost na otkazivanje aktuatora – sustav će i dalje biti funkcionalan, no sa smanjenim performansama. Kada se detektira kvar aktuatora i adaptiraju težine  $\mathbf{W}_e$ , vozilo koje je autonomno može se vratiti prema bazi za popravak. Robusnost na otkazivanje aktuatora omogućit će mu pokretljivost i u slučaju kvara.

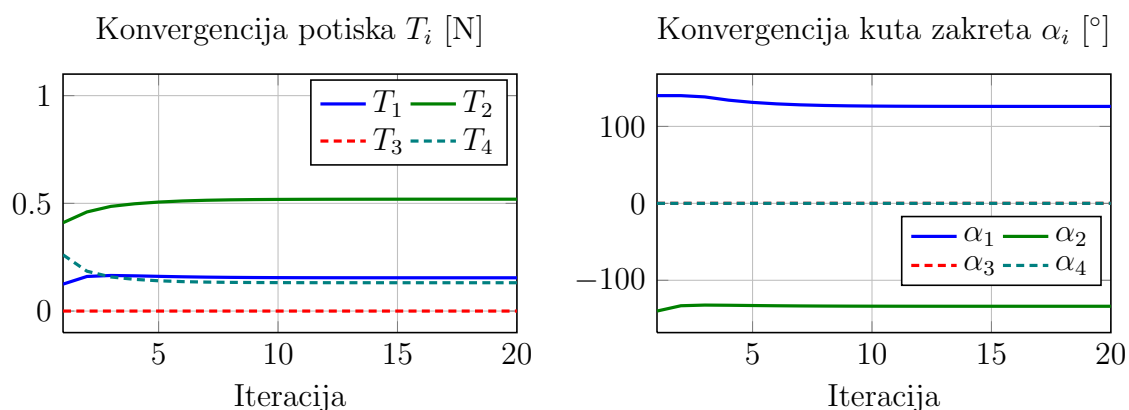
Na slici 4.6 vidimo konvergenciju potiska i kuteva zakreta kada su svi motori ispravni i kada je moguće ostvariti silu. Vidimo da motori 1 i 3 konvergiraju na isti potisak i kut zakreta, što znači da pokazuju u suprotnim smjerovima  $y$ -osi. Iznosi svih potisaka osim na motoru 2 konvergiraju već nakon 10 iteracija. Nakon toga kut zakreta motora 2 ostaje konstantan, dok se točnost povećava blagom promjenom kuta zakreta ostalih motora, čime se kompenziraju neželjene sile ostvarene povećanjem potiska na motoru 2.

Kada su tražene iste sile upravljanja, no motor 3 je u kvaru, na slici 4.7 vidimo da potisak i kut zakreta motora 3 ostaju u nuli, dok se ostali adaptiraju kako bi postigli upravljačku silu. U ovom slučaju niti jedan od aktuatora nije ušao u saturaciju, no već nakon 7 iteracija postignuto je konačno rješenje. Vidimo da je motor 4 ostao orijentiran prema negativnom smjeru osi  $z$ , što znači da ostvaruje pozitivan moment oko  $x$ -osi.





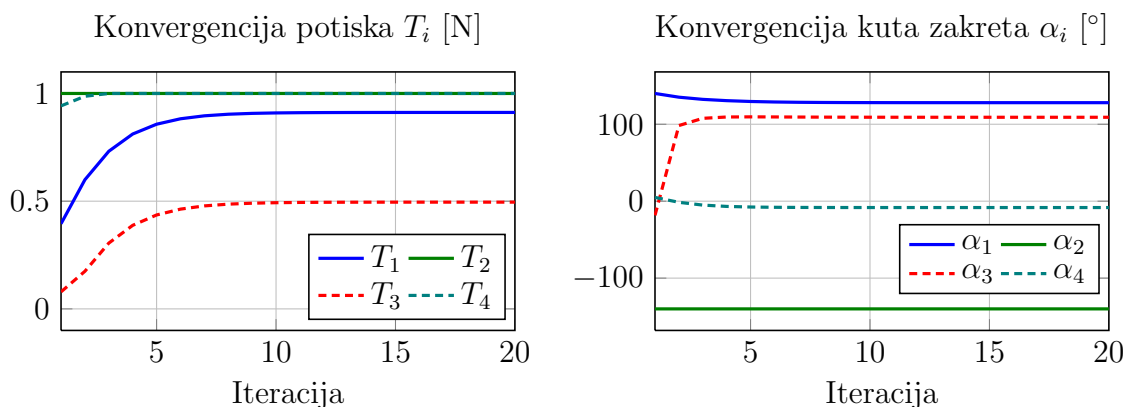
Slika 4.6: Konvergencija potiska i kuta zakreta za kada su svi motori ispravni i tražena sila je unutar skupa ostvarivih (slučaj 1).



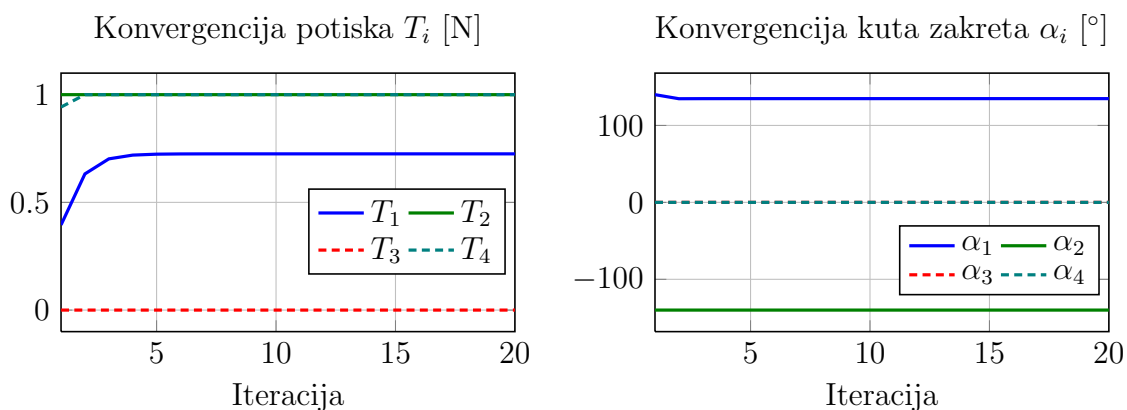
Slika 4.7: Konvergencija potiska i kuta zakreta za kada je motor 3 u kvaru i tražena sila je unutar skupa ostvarivih (slučaj 2).

Pri tome stvaraju i negativnu silu u smjeru  $z$ -osi, dok je željena sila pozitivnog iznosa. Zato motori 1 i 2 imaju kuteve veće od  $90^\circ$ , čime stvaraju silu u smjeru pozitivne  $z$ -osi. Također stvaraju i sile u smjerovima osi  $x$  i  $y$ , te međusobno kompenziraju moment oko  $z$ -osi.

U slučajevima kada se sila upravljanja ne može postići, vidimo da sile potiska ulaze u zasićenje (slika 4.8), a isto vrijedi i za neke kuteve zakreta. Pogreška u slučaju nominalne funkcionalnosti aktuatora iznosi oko 6,7 %, dok u slučaju kvara ona iznosi oko 44 %. Razlog tomu možemo vidjeti iz konvergencije potiska i kuteva zakreta – na slici 4.9 je vidljivo da je zasićenje aktuatora u slučaju kvara mnogo izraženije nego na slici 4.8. Konačni rezultat je da se poboljšanje točnosti može postići samo adaptacijom stanja



Slika 4.8: Konvergencija potiska i kuta zakreta za kada su svi motori ispravni i tražena sila je na rubu skupa ostvarivih (slučaj 3).



Slika 4.9: Konvergencija potiska i kuta zakreta za kada je motor 3 u kvaru i tražena sila je na rubu ostvarivih (slučaj 4).

motora 1 pošto su ostali motori u zasićenju.

#### 4.5.6 Zaključak

Raspodjela upravljačke sile, uz robusne regulatore, neophodan je element sustava robusnog upravljanja gibanjem vozila koja djeluju u uvjetima neodređenosti. Pristup opisan u ovom potpoglavlju omogućuje zadržavanje funkcionalnosti vozila čak i kada otkazu neki od aktuatora. Važan element koji ide uz raspodjelu sila upravljanja je otkrivanje i identifikacija pogrešaka (engl. *Fault Detection and Identification - FDI*), čija je svrha nadzor ulaza u aktuatora i njihovih stanja, te otkrivanje da li je došlo do kvara. Otkriva-

nje kvara neophodno je za pravilno funkcioniranje robusnog sustava upravljanja, pošto je za algoritam raspodjele potrebno namjestiti ispravne težine pojedinih aktuatora, što čini navedeni modul. Slične metode primjenjuju se i za otkrivanje kvara na sensorima, no nalaze se izvan opsega ovog rada.

Prikaz konvergencije algoritma raspodjele pokazuje da je u općem slučaju zasićenje aktuatora veoma nelinearno. Iziskivanje prevelike sile u jednom stupnju slobode može uzrokovati smanjenje upravljivosti u ostalima, te je zbog toga potrebno obratiti pažnju na granice ostvarivih sila. Zbog toga je bitno i kolike se granice postave na izlaz iz regulatora kako bi se mogla ostvariti dovoljna upravljivost.

Ovdje je prikazan samo jedan od mogućih iterativnih algoritama raspodjele. Općenito je problem raspodjele optimizacijski problem, pa se boljom formulacijom problema mogu dobiti i bolje performanse. Smanjivanjem ukupnog potiska na motorima može se uvelike smanjiti potrošnja energije sustava. U slučaju zakretnih motora, optimirati se može i mehaničko trošenje mehanizma zakretanja. Veoma interesantna posljedica ovakvog pristupa je da se za smanjenje potrošnje goriva ne treba mijenjati regulator, već samo algoritam raspodjele. Primjerice, u [19] je minimiranjem maksimalnog potiska, odnosno  $\mathcal{L}_\infty$  norme, za prikazani primjer postignuto smanjenje potiska od 11 % u odnosu na pseudo-inverzno rješenje. Time se produljuje trajanje baterija na bespilotnim podvodnim vozilima. U referenci [31] obrađen je problem alokacije zakretljivih aktuatora i njihovih singularnih konfiguracija s primjenom na dinamičko pozicioniranje brodova, gdje je u testovima na moru pokazano smanjenje potrošnje energije za 30 % bez smanjivanja performansi sustava. To pokazuje da se isplati uložiti u napredni algoritam raspodjele upravljačke sile kako bi se ostvarile uštede u energiji.

## Simulacijski model i rezultati

---

### 5.1 Model i parametri sustava

#### 5.1.1 Simulacijski model

Dinamika podvodnog vozila pod utjecajem fluida opisana je jednadžbama

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A)^{-1}(\boldsymbol{\tau}_{RB} - (\mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu}), \quad (5.1)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{RB} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_A + \boldsymbol{\tau}_D - \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} - \mathbf{g} \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\tau}_A = \mathbf{M}_A \dot{\boldsymbol{\nu}}_w - (\mathbf{M}_A(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w)) \times (\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_w) \quad (5.3)$$

$$\boldsymbol{\tau}_D = \mathbf{M}_D \dot{\boldsymbol{\nu}}_w - (\mathbf{M}_D \boldsymbol{\nu}_w) \times \boldsymbol{\nu}_w \quad (5.4)$$

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbf{D}_L + \mathbf{D}_Q |\boldsymbol{\nu}| \quad (5.5)$$

dok je njegova kinematika, s korištenjem Eulerovih parametara za zapis orijentacije, opisana jednadžbom

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{IB}(\underline{\mathbf{k}}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{2}\mathbf{U}(\underline{\mathbf{k}}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \quad (5.6)$$

Navedeni izrazi čine diferencijalnu jednadžbu sustava  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ , gdje je vektor stanja  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}]^\top$ .

### 5.1.2 Parametri vozila

Simulirano vozilo je kanadska ronilica ROPOS, a parametri su preuzeti iz [19]. Svi tenzori su dijagonalni, pa su navedeni samo dijagonalni elementi.

Tablica 5.1: Parametri simuliranog vozila.

| Par.     | x                                     | y                                    | z                                    | p                       | q                       | r                       |
|----------|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $M_{RB}$ | 2268 kg                               | 2268 kg                              | 2268 kg                              | 1937 kg m <sup>2</sup>  | 2883 kg m <sup>2</sup>  | 2457 kg m <sup>2</sup>  |
| $M_A$    | -4380 kg                              | -9518 kg                             | -4268 kg                             | -5000 kg m <sup>2</sup> | -5000 kg m <sup>2</sup> | -5000 kg m <sup>2</sup> |
| $M_D$    | 1000 kg                               | 1000 kg                              | 1000 kg                              | 854 kg m <sup>2</sup>   | 1271 kg m <sup>2</sup>  | 1083 kg m <sup>2</sup>  |
| $D_L$    | 725 N s/m                             | 1240 N s/m                           | 825 N s/m                            | 3000 N s                | 3000 N s                | 1804 N s                |
| $D_Q$    | 1000 N s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> | 525 N s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> | 400 N s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> | 100 N s <sup>2</sup>    | 100 N s <sup>2</sup>    | 72 N s <sup>2</sup>     |

U izvoru ne postoji inercija istisnutog fluida, pa je ona izračunata kao

$$\mathbf{M}_D = \frac{\rho_w}{m} \mathbf{M}_{RB}, \quad (5.7)$$

gdje je  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$  gustoća vode, a  $m = 2268 \text{ kg}$  masa vozila. Pretpostavljena je neutralna plovnost, odnosno

$$\mathbf{B} = m \mathbf{g}, \quad (5.8)$$

a centar uzgona postavljen je na

$$\mathbf{r}_b = [0, 0, -0.2]^\top \text{ m}, \quad (5.9)$$

što rezultira silama ispravljanja kada je vozilo izvan ravnoteže. No, to također rezultira konstantnim poremećajnim momentom kada vozilo treba držati orijentirano izvan horizontalne ravnine, odnosno kada postoje kutevi valjanja i poniranja. Sile ispravljanja imaju efekt sličan opruzi.

### 5.1.3 Poremećaj

Simulirani poremećaj je definiran srednjim vektorom smjera i brzinom strujanja fluida. Smjer strujanja definiran je kutevima  $\alpha$  i  $\theta$  tako da je vektor strujanja definiran kao

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{y,\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

iz čega je vidljivo da kut  $\theta$  definira smjer u horizontalnoj, a  $\alpha$  u vertikalnoj osi. Translacijska i rotacijska brzina imaju isti vektor smjera, te tako definirana struja ima vrtloženje oko smjera gibanja. Vektori brzina su

$$\mathbf{v}_w = v \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\omega}_w = \omega \mathbf{e}, \quad (5.11)$$

gdje su  $v$  i  $\omega$  iznosi brzina. Brzine i smjer strujanja dobivene su kao normalan (Gaussov) šum filtriran niskopropusnim filtrom. Parametri poremećaja su srednje vrijednosti, i to kuteva zakreta  $\bar{\theta}$  i  $\bar{\alpha}$  i iznosa brzina  $\bar{v}$  i  $\bar{\omega}$  te standardne devijacije kuteva zakreta  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_\alpha$  i iznosa brzina  $\sigma_v$  i  $\sigma_\omega$ . Akceleracije su dobivene numeričkim deriviranjem i filtriranjem niskopropusnim filtrom kako bi se izbjegli šiljci akceleracije zbog numerike.

### 5.1.4 Numerička integracija

Da bismo simulirali gibanje vozila pod utjecajem sila, potrebno je numerički integrirati diferencijalne jednadžbe modela. Zbog moguće diskontinuiranosti upravljačkog signala u ovom se radu nisu koristili integratori s varijabilnim korakom koji dolaze uz MATLAB, pošto diskontinuitet u upravljačkom signalu kod njih može značajno usporiti simulaciju. Umjesto toga implementiran je numerički integrator s fiksnim korakom. Ovdje se nalazi pregled isprobanih metoda i njihova primjenjivost na gibanje tijela.

Želimo integrirati diferencijalnu jednadžbu sustava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.12)$$

kako bismo dobili vektor stanja  $\mathbf{x}$ , kojeg ćemo u konačnici koristiti u svrhe regulacije.

Pogreška numeričkog rješenja ovisi o vremenskom koraku  $h$  i redu metode integracije  $s$ , tako da u pravilu točnost raste s porastom reda metode. Red metode određuje koliko ima evaluacija derivacije, odnosno međukoraka, u jednom koraku integracije. Što je red metode veći, rezultat integracije će biti točniji, no za isti vremenski korak biti će potrebno više računskog vremena zbog većeg broja evaluacija funkcije. Metode višeg reda koriste se jer za istu točnost zahtijevaju manji vremenski korak, odnosno manje međukoraka, u odnosu na metode prvog reda.

Najjednostavnija metoda numeričke integracije je **eksplicitna (unaprijedna) Eulerova metoda**, koja funkciju aproksimira pravokutnikom širine  $h$ , a definirana je adaptacijom

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_k). \quad (5.13)$$

gdje je  $k$  korak simulacije,  $h$  vremenski korak,  $t$  vrijeme integracije,  $\mathbf{x}_k$  vektor stanja u  $k$ -tom koraku, a  $\mathbf{f}$  je diferencijalna jednadžba sustava. Implicitna (unazadna) Eulerova metoda definirana je kao

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(t + h, \mathbf{x}_{k+1}), \quad (5.14)$$

iz čega se vidi ovisnost rješenja o  $\mathbf{x}_{k+1}$ , odnosno njemu samome, zbog čega se metoda i zove implicitnom. Pronalaženje rješenja iziskuje rješavanje nelinearne jednadžbe. Implicitna metoda srednje točke (engl. *implicit midpoint rule*) definirana je kao

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{k}_1. \quad (5.16)$$

Kako bismo izbjegli rješavanje nelinearnih algebarskih jednadžbi, možemo stanje u idućem koraku koje se koristi u implicitnim metodama aproksimirati na drugačiji način. **Semi-implicitna Eulerova metoda** prvo radi unaprijedni Eulerov korak kako bi dobila derivaciju sustava u idućem koraku integracije, te potom radi unazadni (implicitni) Eulerov korak kako bi dobila rješenje. Pošto to nije implicitna metoda u pravom smislu,

naziva se semi-implicitnom. Stanja se mijenjaju prema funkcijama

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_k) \quad (5.17)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \mathbf{f}(t + h, \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \quad (5.18)$$

pri čemu se regulator izvršava samo za korak  $k$  da bi se simulirala njegova diskretiziranost, odnosno držanje upravljačkog signala nultog reda (engl. *Zero-Order Hold*).

**Runge-Kutta metode** [34, 35] su skupina numeričkih metoda koje su za red  $s$ , te parametre  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{s \times s}$  s elementima  $a_{ij}$  i  $\mathbf{c} = \sum_{j=1}^s a_{ij}$  definirane kao

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f}\left(t_k + c_i h, \mathbf{y}_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_j\right) \quad (5.19)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i$$

gdje su  $\mathbf{k}_i$  derivacije funkcije u međukoracima. Matrica  $\mathbf{A}$  može imati sve elemente različite od nule, pri čemu se rješenja  $\mathbf{k}_i$  više ne mogu izračunati eksplicitno pošto implicitno ovise o  $\mathbf{k}_i$ . Pri tome govorimo o implicitnim metodama. Ako je matrica  $\mathbf{A}$  donja trokutasta, govorimo o eksplicitnim metodama. Koeficijenti se obično prikazuju tablicom

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array} \quad (5.20)$$

Eksplicitna i implicitna Eulerova metoda, te implicitna metoda srednje točke su metode prvog reda koje imaju redom koeficijente

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & & 1 \end{array} \quad (5.21)$$

Najpopularnije eksplicitne Runge-Kutta metode 4. reda imaju koeficijente

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array} \quad (5.22)$$

od kojih je u ovom radu implementirana desna.



## Primjena na gibanje krutog tijela

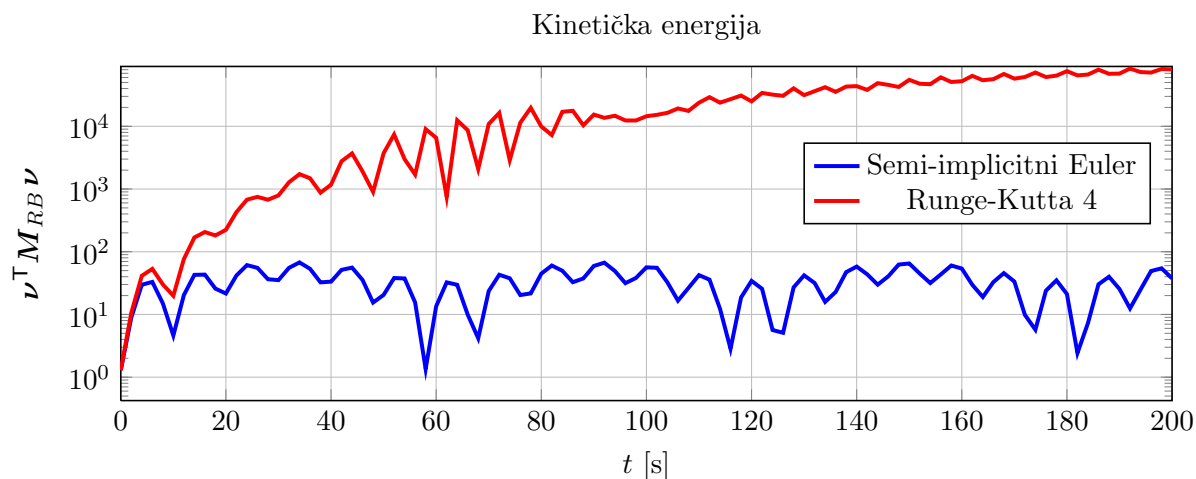
Kruto tijelo je mehanički sustav koji posjeduje određenu energiju koja u odsustvu disipacije mora biti očuvana. Kako numerička integracija unosi numeričku pogrešku, potrebno je vidjeti kako određeni integrator utječe na ukupnu energiju sustava i njenu konzervaciju. Ovaj problem posebice je izražen kod nelinearnih sustava, primjerice kod gibanja planeta oko zvijezde. Dinamika krutog tijela također je nelinearan sustav zbog centripetalnih i Coriolisovih sila koje ovise o umnošku brzina, što sam sustav čini osjetljivim na pogreške u brzinama.

Kako bi se provjerio utjecaj numeričkog integratora na konzerviranje energije sustava, rješenja eksplicitne Runge-Kutta metode 4. reda i semi-implicitne Eulerove metode uspoređena su na dva jednostavna i intuitivno predvidiva slučaja s vremenskim korakom  $h = 0,1$  s. U oba slučaja parametri sustava su isti kao oni navedeni na početku poglavlja, no na tijelo ne djeluju nikakve sile fluida. Dakle, matrice dodane inercije i istisnutog fluida su nul-matrice, kao i matrice disipativnih sila. Dakle, tijelo se efektivno nalazi u vakuumu i njegova energija trebala bi biti očuvana. Jedina sila koja djeluje na tijelo je sila uzgona, koja je zajedno s gravitacijom konzervativna sila, te s istom čini spreg sila kada je tijelo izbačeno iz ravnoteže. Taj spreg sila zapravo djeluje kao opruga koja ispravlja tijelo, a u slučaju izostanka disipativnih sila uzrokuje neprigušene oscilacije oko ravnotežnog položaja, što je rezultat periodičke izmjene potencijalne energije "opruge" i kinetičke energije tijela. Kinetička energija tijela je

$$V = \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{M}_{RB} \boldsymbol{\nu}. \quad (5.23)$$

U prvome slučaju tijelo nema početnih brzina, a početna orijentacija definirana je Eulerovim kutovima  $\phi = 5^\circ$ ,  $\theta = 5^\circ$  i  $\psi = 0^\circ$ . Očekivano ponašanje je održavanje ukupne energije, što znači da kinetička energija ne smije porasti, već mora oscilirati između dvije konstantne granice. Kao što je vidljivo na slici 5.1, kinetička energija u slučaju eksplicitne metode u ovom najjednostavnijem slučaju konstantno raste, dok je u semi-implicitnoj metodi ona očuvana.

U drugom su primjeru početni uvjeti isti kao i u prvome, s iznimkom translacijske brzine,

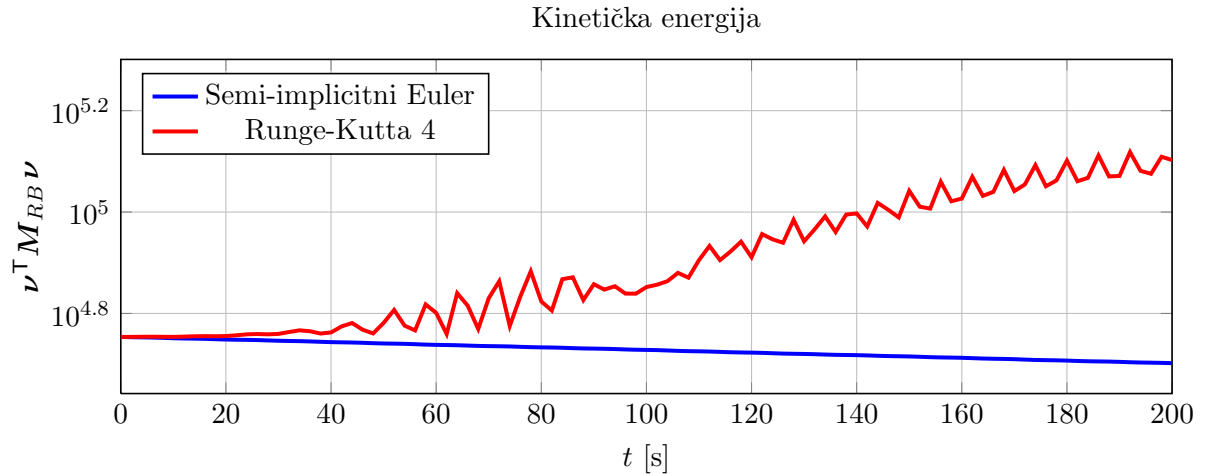


Slika 5.1: Kinetička energija sustava pod utjecajem konzervativnih sila bez početnih brzina za različite metode numeričke integracije,  $h = 0,1$  s.

koja je postavljena na  ${}^L\mathbf{v}_0 = [5, 0, 0]^T$ , što uzrokuje početnu kinetičku energiju, koje u prvome slučaju nije bilo. Ovdje također očekujemo konzervaciju zbroja kinetičke i potencijalne energije. Iz slike 5.2 vidimo da u slučaju eksplicitne metoda energija raste kao i u prvom slučaju, dok kod semi-implicitne Eulerove metode ona opada, što pokazuje disipativnu prirodu te metode.

Na tijelo djeluju disipativne sile fluida koje mogu ublažiti porast energije zbog numeričke pogreške integratora. Kada su prisutna velika prigušenja, kao kod podvodnih vozila, fizikalno prigušenje obično nadvladava porast energije zbog pogreške integratora. No, bez obzira na stabilnost stacionarnog rješenja dinamika može biti narušena zbog numeričkih pogrešaka. Pošto nas zanima regulacija, odnosno dinamičko ponašanje sustava, poremećaji koje će regulator morati otkloniti sastojat će se od fizikalnih i numeričkih poremećaja. U tom slučaju rezultat simulacije neće odgovarati stvarnosti jer u stvarnosti ne postoje numerički poremećaji već su oni samo rezultat netočnosti numeričke metode. Zbog toga je za simulacije u ovom radu korištena semi-implicitna Eulerova metoda numeričke integracije.

Za rješavanje diferencijalnih jednadžbi koje opisuju fizikalne probleme, kao što je slučaj krutog tijela, najbolje je koristiti tzv. simplektičke integratore [35], koji čuvaju Hamiltonian sustava. Eksplicitne Runge-Kutta metode nikada nisu simplektičke, a naj-



Slika 5.2: Kinetička energija sustava pod utjecajem konzervativnih sila s početnom translacijskom brzinom za različite metode numeričke integracije,  $h = 0,1$  s.

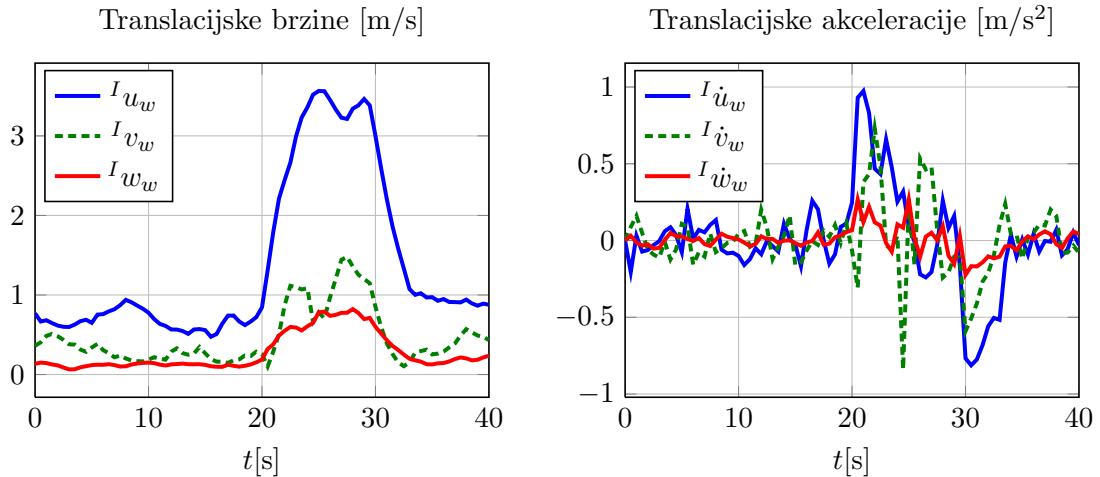
jednostavnija simplektička metoda je implicitna metoda srednje točke. Za rješavanje problema gibanja više tijela, pogotovo kada među njima postoji interakcija, u naprednijim se softverima često koriste geometrijski integratori i implicitne metode. Za poboljšanje točnosti simulacije mogu se iskoristiti svojstva grupe krutog gibanja, primjerice kao u [36, 37, 38, 39].

## 5.2 Odziv u otvorenoj petlji

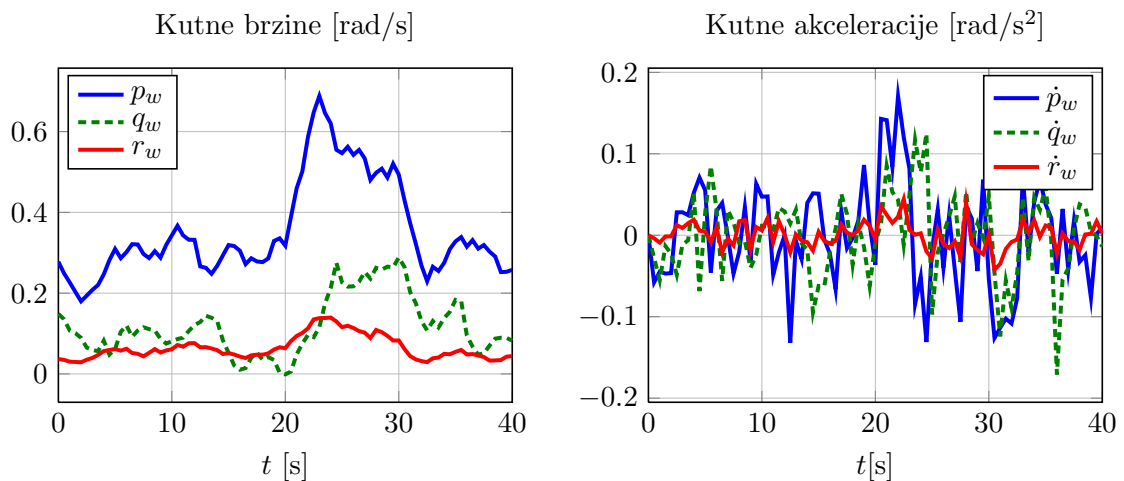
Prije prikazivanja rezultata sa zatvorenom petljom regulatora, važno je prikazati ponašanje sustava u otvorenoj petlji, odnosno bez regulacije njegovih stanja. Želimo vidjeti kakve poremećaje uzrokuju različite morske struje. Za tu svrhu na podovdno vozilo djeluje morska struja s parametrima smjera

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{\pi}{10} \text{rad}, & \sigma_{\theta} &= \frac{\pi}{9} \text{rad}, \\ \bar{\alpha} &= \frac{\pi}{18} \text{rad}, & \sigma_{\alpha} &= \frac{\pi}{36} \text{rad}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Kako bi se vidjeli utjecaj vrtloženja na oblik poremećaja, prikazat će se odziv sustava u dva slučaja – kada postoji samo translacijska komponenta morske struje, te kada postoje i translacijska i rotacijska komponenta, odnosno kada postoji vrtloženje. Parametri



Slika 5.3: Translacijske brzine i akceleracije simulirane morske struje.

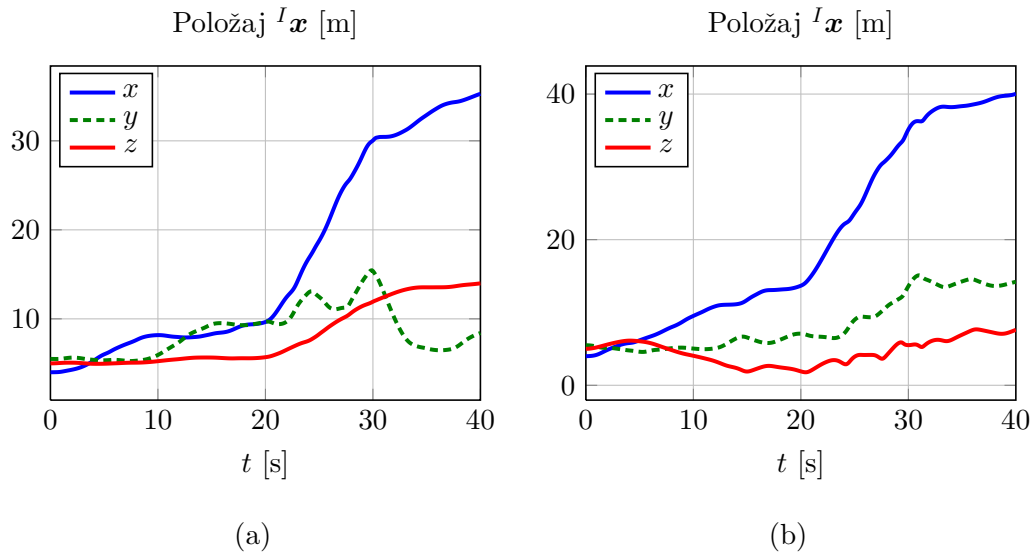


Slika 5.4: Kutne brzine i akceleracije simulirane morske struje.

intenziteta struje su

$$\begin{aligned} \bar{v}_w &= 0,9 \text{ m/s}, & \sigma_{v_w} &= 0,3 \text{ m/s}, \\ \bar{\omega}_w &= 0,3 \text{ rad/s}, & \sigma_{\omega_w} &= 0,15 \text{ rad/s}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Brzina od 0,9 m/s odgovara brzini do otprilike 2 čvora. Iako se ovakvo vrtloženje gotovo nikada neće javiti u praksi, zanimljivo je u smislu testiranja robusnosti prikazanih regulatora na vanjske poremećaje. Slike 5.3 i 5.4 prikazuju translacijske i kutne komponente brzine morske struje u koordinatama inercijskog koordinatnog sustava. Kako bi se prikazao utjecaj negle promjene morske struje, u vremenskom razdoblju  $20 \text{ s} < t < 30 \text{ s}$  srednja se vrijednost translacijske brzine poveća 4 puta, a kutne 2,2 puta. Vidljiv je niskofrekvencijski šum u komponentama strujanja koji je svojevrsna aproksimacija tur-



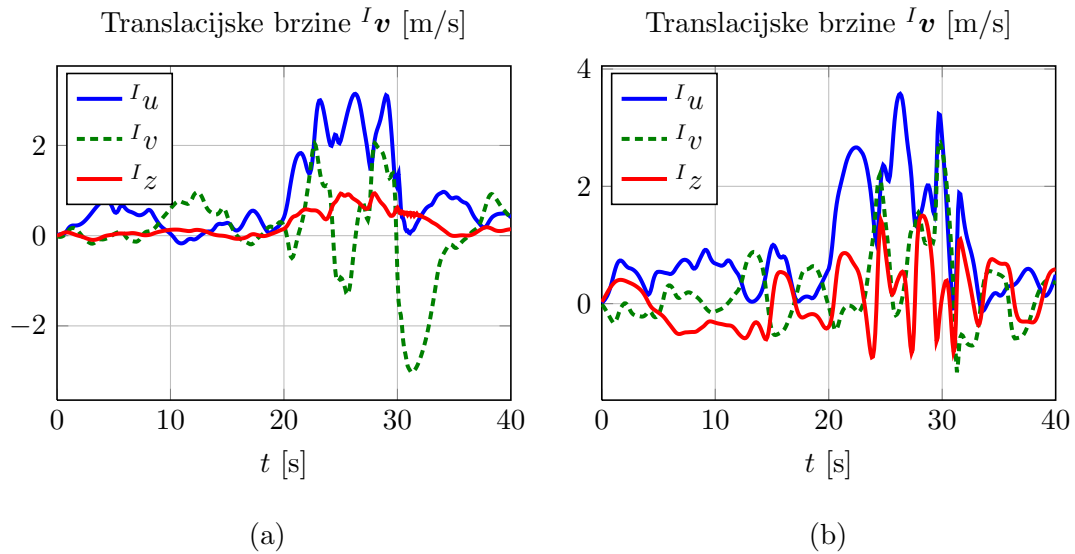
Slika 5.5: Položaj tijela kada postoje samo linearne brzine poremećaja (a), te kada postoje i linearne i kutne brzina (b).

bulencije struje pošto uvjeti nisu ravnotežni. To uzrokuje postojanje akceleracije morske struje, što stvara dodatne sile fluida koje djeluju na tijelo pošto fluid posjeduje određenu inerciju. Dakle, prikazani poremećaji predstavljaju iznimno teške uvjete za vožnju podvodnog vozila.

### Odziv translacijske dinamike

Na slici 5.5 uspoređen je odziv položaja na navedene poremećaje. Kao što je i intuitivno očekivano, vozilo se giba u smjeru strujanja fluida. Između dva prikazana slučaja nema značajne razlike, osim u odzivu dubine, odnosno  $z$ -osi. U slučaju kada postoji samo translacijska brzina morske struje, vozilo više tone nego u drugome slučaju.

Od samog odziva položaja puno je važniji odziv brzina tijela, pošto njihov iznos direktno utječe na iznose centripetalnih i Coriolisovih sila koje regulator mora kompenzirati. Iz slike 5.6 vidljivo je da su u slučaju postojanja vrtloženja translacijske brzine sporadičnije nego u suprotnome slučaju. Uzrok tomu je pobuđivanje translacijske dinamike zbog dodatnih kutnih brzine. Iz  $z$ -komponenti brzina možemo vidjeti i uzrok različitom odzivu dubine – na slici 5.6.b vidljivo je da vertikalna brzina češće mijenja smjer nego u slučaju



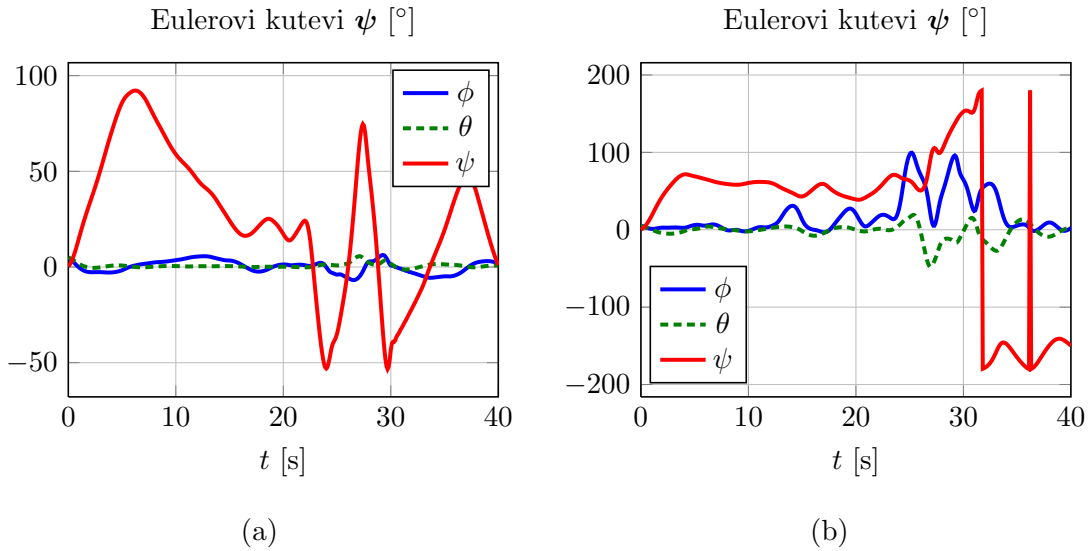
Slika 5.6: Translacijske brzine tijela kada postoje samo linearne brzine poremećaja (a), te kada postoje i linearne i kutne brzina (b).

(a), te je brzina bliža nuli, što uzrokuje manji ukupni pomak. Možemo zaključiti da će u slučaju postojanja vrtloženja morske struje ukupne poremećajne sile biti dinamičnije nego kada vrtloženje ne postoji.

### Odziv rotacijske dinamike

Iz odziva orijentacije, koja je na slici 5.7 prikazana u Eulerovim kutevima, jasno se vidi utjecaj sila ispravljanja, odnosno sprega sila uzgona i težine. Dok tijelo neometano rotira oko vertikalne osi, što je vidljivo u odzivu kuta skretanja  $\psi$ , kutevi valjanja  $\phi$  i propinjanja  $\theta$  ostaju relativno blizu nuli, što znači da tijelo ostaje blizu horizontalnoj orijentaciji. U trenutku kada nastupi dodatni poremećaj, u vidu većeg iznosa brzine, vidljiva je povećana dinamika odziva. U slučaju postojanja kutnih brzina strujanja, vidljiva je povećana dinamika u kutevima valjanja i propinjanja, pogotovo kada nastupi dodatni poremećaj, kada se vozilo počinje intenzivno valjati. Skokovi u Eulerovim kutevima na podslici (b) su samo rezultat zakretanja oko  $z$ -osi za puni krug.

Iz kutnih brzina može se jasnije isčitati izrazito povećana dinamika u slučaju dodatnog poremećaja između dvadeset i tridesete sekunde simulacije. Kada postoje kutne brzine

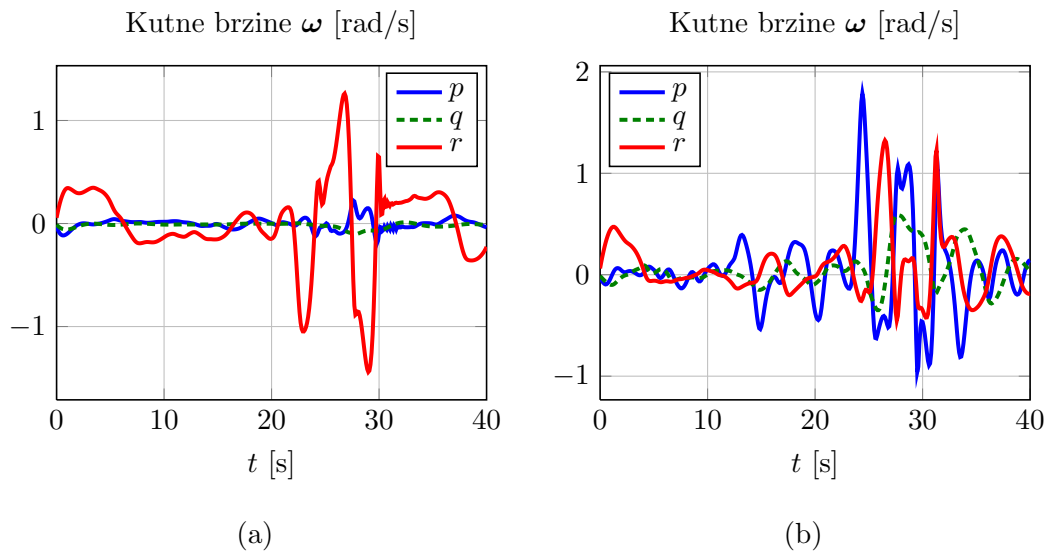


Slika 5.7: Eulerovi kutevi kada postoje samo linearne brzine poremećaja (a), te kada postoje i linearne i kutne brzine (b).

strujanja vidimo izrazito povećanu dinamiku oko  $x$ - i  $y$ - osi tijela, na razini one oko  $z$ -osi. Kutne brzine tijela su u tom slučaju mnogo veće nego kada postoje samo translacijske brzine strujanja, što dakako uzrokuje i mnogo veće poremećajne momente. Uzrok ovako povećane dinamike je, osim povećanih momenata koje stvara fluid, i moment kojeg stvaraju sile ispravljanja. Momenti fluida pobuđuju prigušeno oscilatorno gibanje, te se vozilo počinje ispravljati čim disipacijski i stabilizirajući momenti nadvladaju onaj od morske struje.

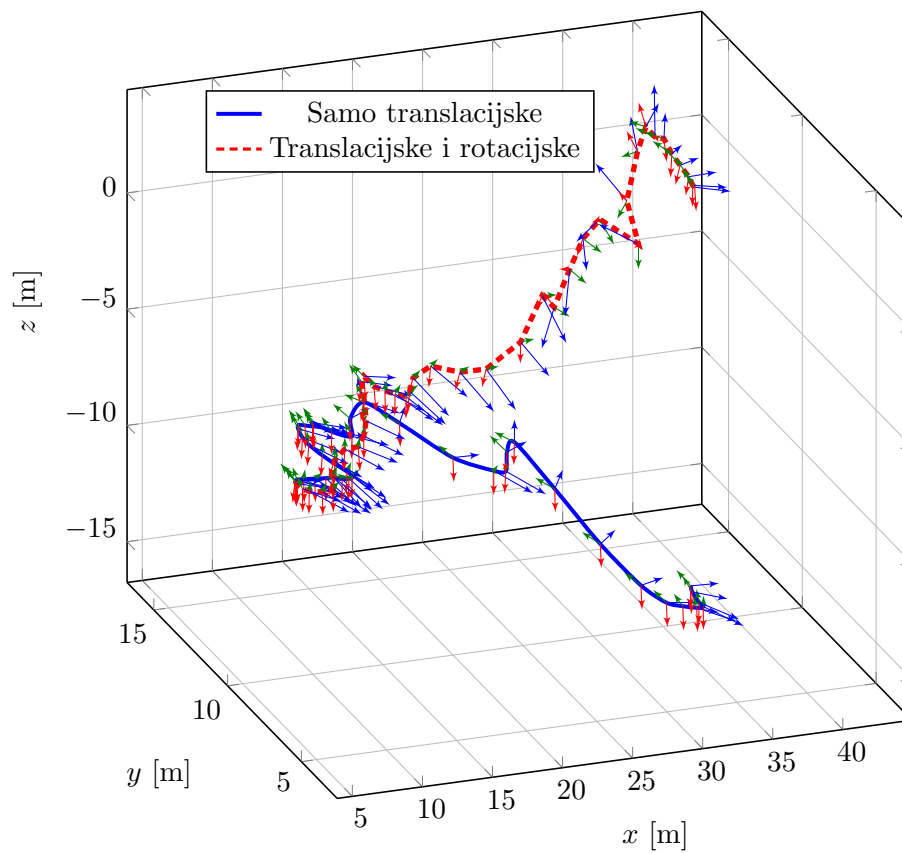
### Putanja vozila

Na slici 5.9 vidljive su putanje tijela kroz trajanje simulacije. Na putanji su prikazane orijentacije koordinatnog sustava tijela u vremenskom razmaku od 2 sekunde. Plava strelica označava  $x$ -os, zelena  $y$ -os, a crvena  $z$ -os. Plava je strelica dulja od ostalih pošto ona predstavlja "nos" vozila. Iz slike se jasno vidi razdoblje povećane brzine strujanja, u kojem su položaji koordinatnih sustava razmaknutiji, što je rezultat povećane translacijske brzine tijela. Također se jasno vidi i povećana rotacijska dinamika tijela u slučaju kada postoje translacijske i rotacijske brzine tijela (crvena crtkana linija), u obliku sporadičnije orijentacije na putanji. Vidljivo je da je u slučaju postojanja samo translacijskih



Slika 5.8: Kutne brzine tijela kada postoje samo linearne brzine poremećaja (a), te kada postoje i linearne i kutne brzine (b).

brzina fluida (plava linija) orijentacija tijela stabilnija nego u drugome slučaju.



Slika 5.9: Putanja i orijentacije vozila tijekom simulacije za dva tipa poremećaja.



## 5.3 Pozicioniranje

### 5.3.1 Pozicioniranje u idealnim uvjetima

Radi usporedbe regulatora koji funkcioniraju u različitim parametrizacijama konfiguracije krutog tijela prvo će se prikazati njihov odziv na skokovitu referencu stanja (engl. *set-point control*). Zbog jasnoće su u simulacijama izostavljene sve poremećajne sile – uzgon, disipativne sile i sile fluida (dodane inercije). Dakle, tijelo je efektivno u uvjetima vakuuma, što će pokazati prirodu gibanja za regulaciju u različitim koordinatama. Isprobani regulatori svi vrše regulaciju položaja i orijentacije, no u drugačijim zapisima istih. Stabilizacija se vrši u koordinatama parametrizacije, a gibanje u klasičnom, kartezijskom koordinatnom sustavu ovisi o projekciji parametrizacije na isti. Glavni smisao ovoga je pokazati razliku između regulacije u inercijskom koordinatnom sustavu s Eulerovim kutovima i Euler-Rodriguesovih parametrizacija orijentacije i krutog gibanja.

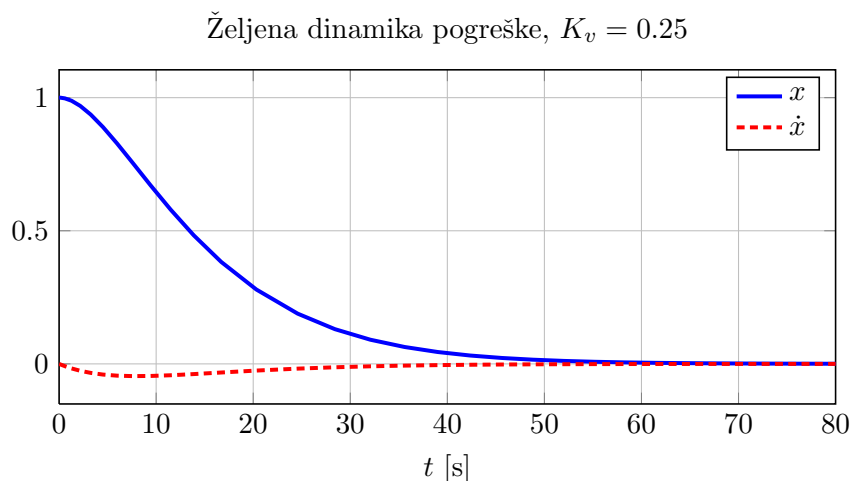
U svim simulacijama radi se o PD-regulatoru s isključenim robusnim elementima. Pojačanje za sve je stupnjeve slobode stavljeno na  $K_v = 0.25$ , s odzivom prikazanim na slici 5.10, a tenzor inercije u regulatoru odgovara tenzoru inercije vozila, odnosno postoji potpuno poznavanje parametara sustava. Centripetalne i Coriolisove sile nisu uključene u povratnu vezu, dakle regulator ne koristi inverznu dinamiku već samo PD-regulaciju, pa nema poznavanja dinamičkog modela sustava.

Početni uvjeti u svim simulacijama su jednaki i iznose

$$\begin{aligned} x_0 &= 4 \text{ m} & \phi_0 &= 5^\circ \\ y_0 &= 5,5 \text{ m} & \theta_0 &= 5^\circ \\ z_0 &= 5 \text{ m} & \psi_0 &= 0^\circ \end{aligned} \tag{5.26}$$

sa svim početnim brzinama jednakim nuli, dok je željeno stanje jednako

$$\begin{aligned} x_d &= 20 \text{ m} & \phi_d &= 30^\circ \\ y_d &= 15 \text{ m} & \theta_d &= 45^\circ \\ z_d &= 10 \text{ m} & \psi_d &= 60^\circ \end{aligned} \tag{5.27}$$

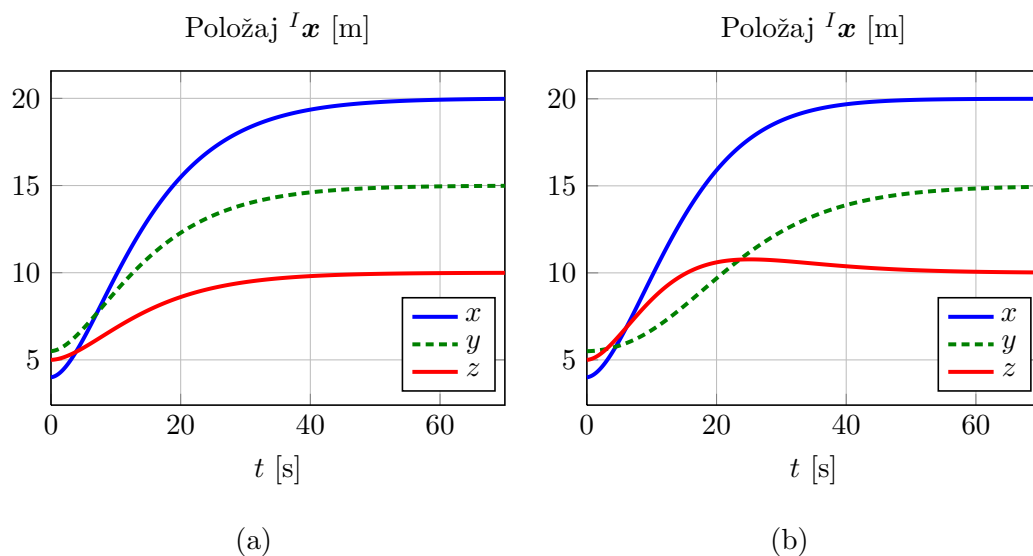


Slika 5.10: Željena dinamika pogreške.

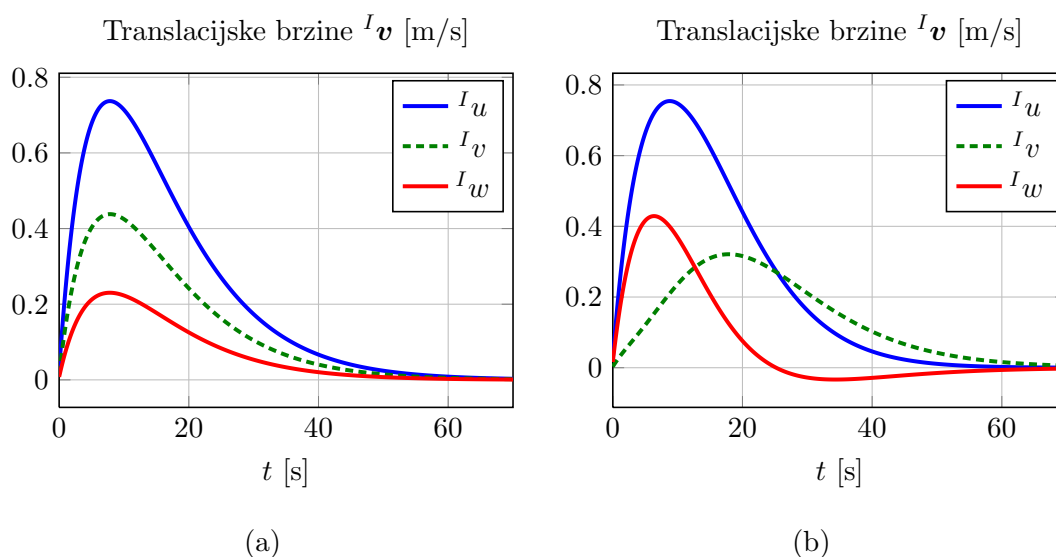
Pošto je regulacija položaja identična kada se za regulaciju orijentacije koriste Eulerovi kutevi i Eulerovi parametri, zasebno će se prikazati regulacija položaja i regulacija orijentacije. Usporedit će se povratna veza po kartezijskim koordinatama i koordinatama Euler-Rodriguesove parametrizacije (dualni kvaternion).

## Regulacija položaja

Iz odziva zatvorene petlje s regulacijom položaja u inercijskom kartezijevom koordinatnom sustavu na slici 5.11 može se vidjeti da koordinate imaju aperiodski odziv prema željenoj dinamici, što je i očekivano pošto je dinamika definirana za taj koordinatni sustav. S druge strane, odziv u slučaju regulacije u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja nije aperiodski u koordinatama inercijskog koordinatnog sustava, a isto vrijedi i za brzine u tom koordinatnom sustavu, kao što je vidljivo iz slike 5.12.



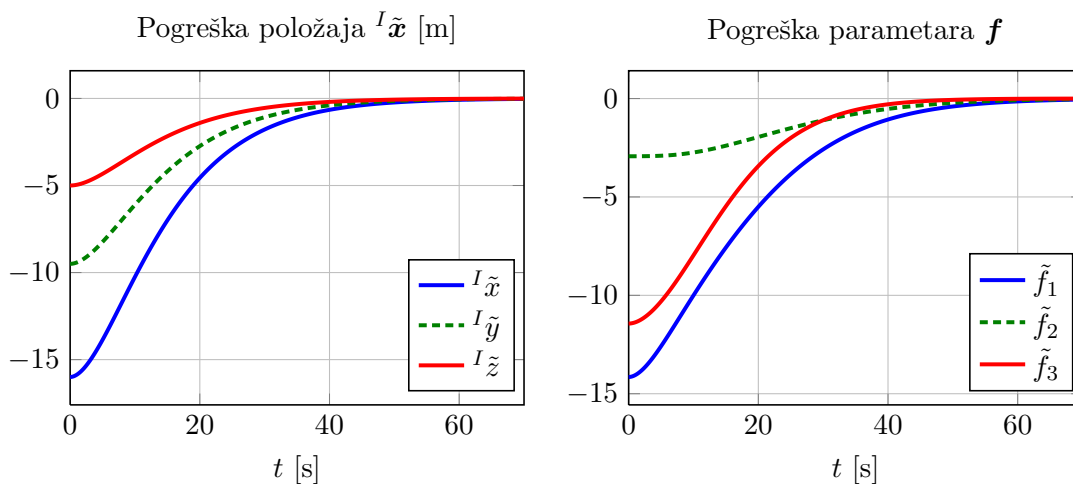
Slika 5.11: Odziv položaja i brzina na odskočnu funkciju za regulaciju položaja u u kartezijskim koordinatama (a) i Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja (b).



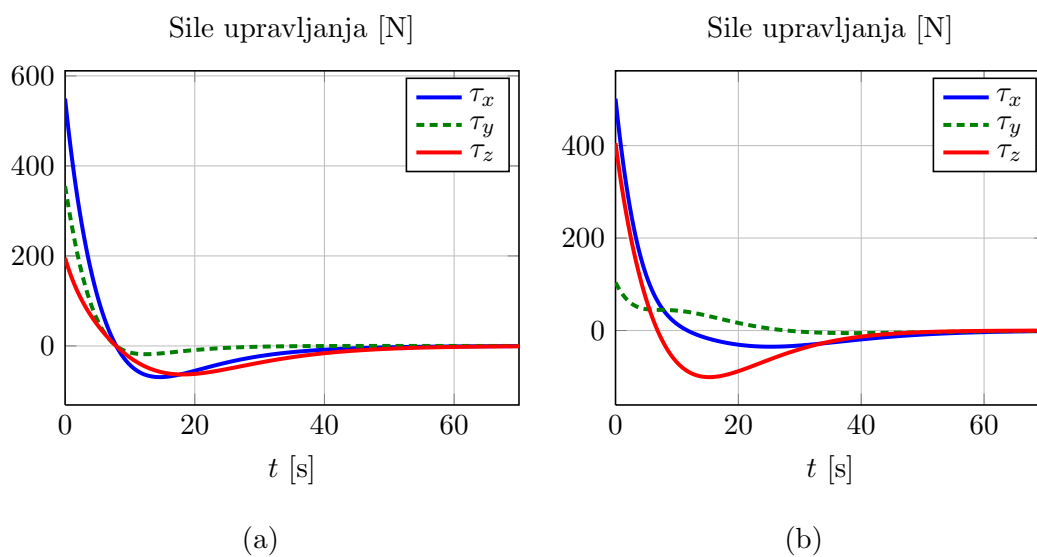
Slika 5.12: Odziv translacijskih brzina na odskočnu funkciju za regulaciju položaja u kartezijskim koordinatama (a) i Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja (b).

Ako se pogleda konvergencija pogreške u upravljanim koordinatama na slici 5.13, vidljivo je da u upravljanim koordinatama oba regulatora imaju aperiodski odziv pogreške. Ovdje treba imati na umu da koordinate Euler-Rodriguesove parametrizacije ne odgovaraju direktno koordinatama kartezijskog koordinatnog sustava, već koordinatama vijčanog gibanja između koordinatnog sustava tijela i željenog koordinatnog sustava. Pošto su

translacijske komponente tih koordinata vezane uz rotaciju tijela, rezultirajuće translacijsko gibanje ovisit će o rotacijskom. To na prvi pogled možda ne djeluje praktično ili intuitivno, ali je usko vezano uz prirodu gibanja tijela.



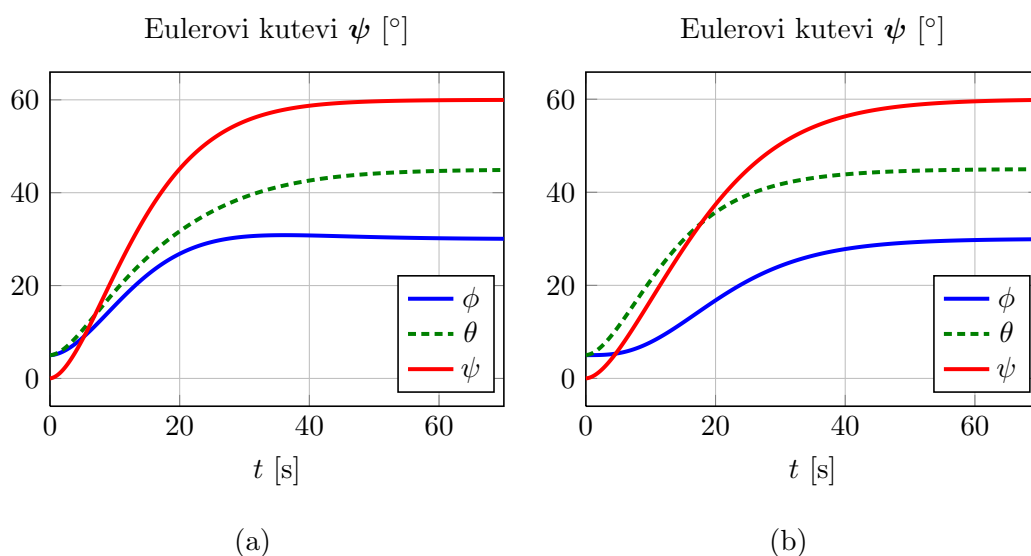
Slika 5.13: Odziv pogreške položaja na odskočnu referencu za regulaciju položaja u kartezijskom koordinatnom sustavu (a) i Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja (b).



Slika 5.14: Upravljačke sile za regulaciju položaja u inercijskom koordinatnom sustavu (a) i u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja.

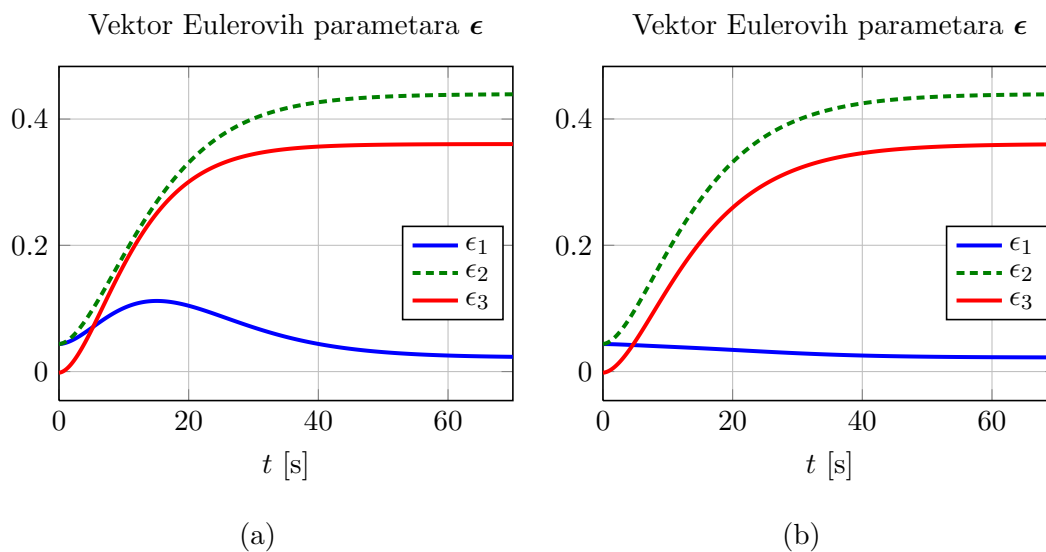
## Regulacija orijentacije

Usporedit ćemo regulaciju orijentacije u dvije parametrizacije – Eulerovim kutevima i Eulerovim parametrima. Slika 5.15 pokazuje odziv Eulerovih kuteva na skokovitu referencu za povratnu vezu u obje parametrizacije. Vidljivo je da je odziv kuteva u slučaju povratne veze istima aperiodski, što je i očekivano jer se povratna veza vrši u istoj parametrizaciji. S druge strane, kada se radi o povratnoj vezi Eulerovih parametara, odziv je asimptotski ali nije aperiodski pošto se regulacija ne vrši u toj parametrizaciji.



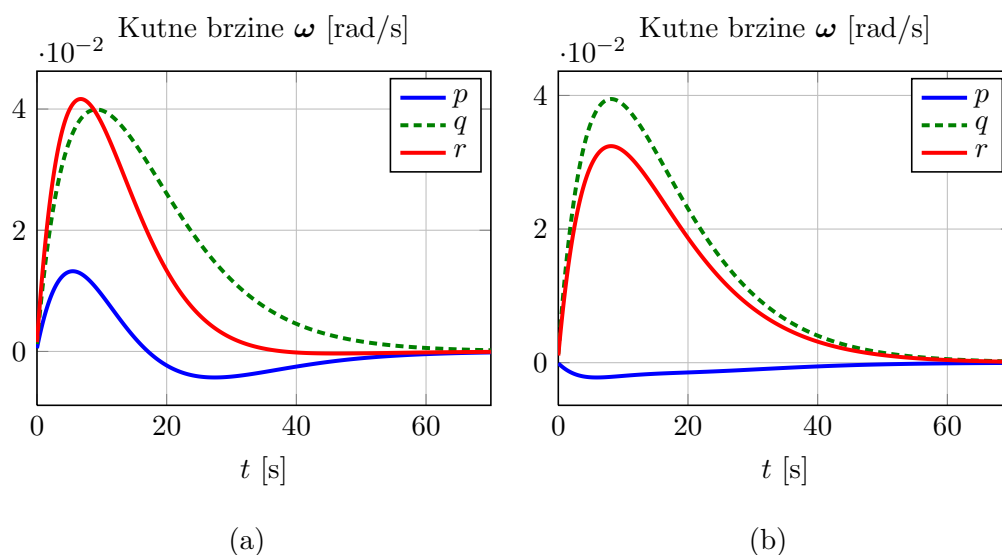
Slika 5.15: Eulerovi kutevi za povratnu vezu Eulerovim kutevima (a) i Eulerovim parametrima (b).

Nadalje, na slici 5.16 možemo vidjeti odzive vektorskog dijela Eulerovih parametara na istu referencu. Skalarni dio parametara vezan je uz vektorski svojstvom normalnosti. Jasno je vidljivo da je u ovom slučaju odziv regulatora putem Eulerovih parametara aperiodski, dok odziv regulatora putem Eulerovih kuteva nije, što dakako potječe od odabira parametrizacije u kojoj se vrši pozicioniranje koordinata.



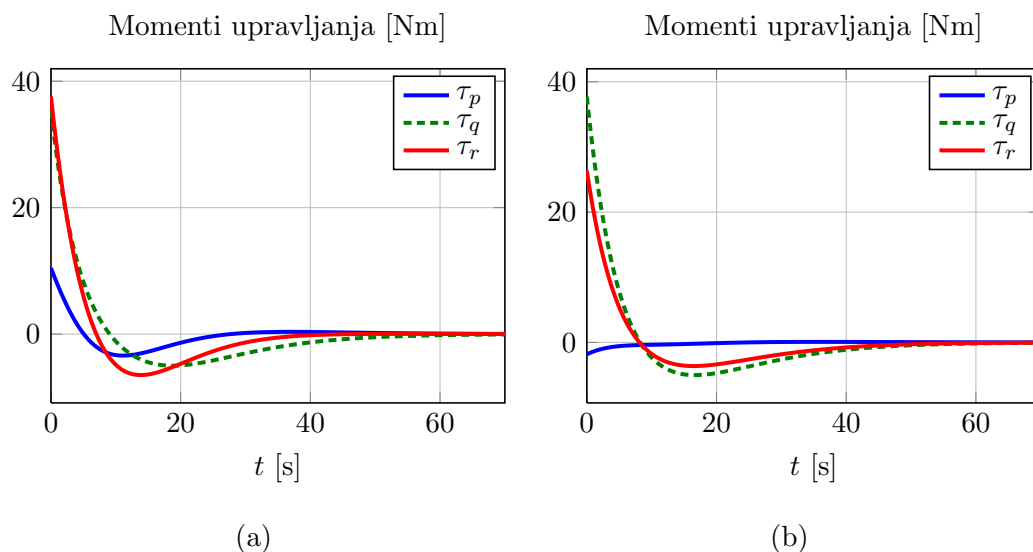
Slika 5.16: Eulerovi parametri za povratnu vezu Eulerovim kutevima (a) i Eulerovim parametrima (b).

Zapravo je najinteresantnije usporediti kutne brzine tijela za povratnu vezu različitim parametrizacijama. Ako odziv kutnih brzina na slici 5.17 usporedimo s odzivom Eulerovih parametara na slici 5.16, jasno je vidljiva proporcionalna veza između istih. To pokazuje direktnu povezanost Eulerovih parametara i osi rotacije tijela, te možemo zaključiti da je povratna veza Eulerovim parametrima prirodnija od one Eulerovim kutevima.



Slika 5.17: Kutne brzine za povratnu vezu Eulerovim kutevima (a) i Eulerovim parametrima (b).

Kao rezultat toga imamo mirniji odziv zatvorene petlje orijentacije kada se koriste Eulerovi parametri, što nadalje uzrokuje mirnije momente upravljanja, vidljive na slici . Poželjno je imati što mirnije sile i momente upravljanja kako se ne bi pobudila neželjena nelinearna dinamika sustava. U slučaju takvog pobuđivanja možemo intuitivno govoriti o regulaciji "protiv" prirode gibanja, odnosno pokušaju nametanja neprirodne dinamike. Regulator će biti robusniji ako pobuđuje manje neželjene dinamike.



Slika 5.18: Upravljački momenti za povratnu vezu Eulerovim kutevima (a) i Eulerovim parametrima (b).

Iz priloženog se može vidjeti da se projektirana dinamika pogreške odvija u reguliranim koordinatama, odnosno u koordinatama pogreške. U slučaju regulacije orijentacije putem Eulerovih parametara vidi se da je taj zapis prirodniji od onog Eulerovim kutevima. Regulaciju položaja putem Euler-Rodriguesove parametrizacije treba dalje ispitati.

### 5.3.2 Pozicioniranje u Euler–Rodriguesovim parametrima

Translacijski dio Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja vezan je uz orijentaciju tijela. Trajektorija vozila kada se povratna veza vrši po tim parametrima zbog toga ovisi i o relativnoj orijentaciji na početku i kraju putanje. Ovdje ćemo kvalitativno evaluirati utjecaj promjene početnih i krajnjih orijentacija na putanju vozila tijekom pozicioniranja,

dok početni i konačni položaj ostaju isti. Razmatranjem pozicioniranja proučavamo osnovnu prirodu regulacije po ovim parametrima, pošto ona nije očita ukoliko se razmatra slijeđenje trajektorije.

U simulacijama su prisutne sile fluida, no ne postoji strujanje vode. Regulacija je učinjena PD-regulatorom s TDC estimatorom zbog statičnih poremećaja u početnim i konačnim konfiguracijama. Parametri regulatora određeni su za aperiodski odziv s  $\mathbf{K}_v = 0.25 \mathbf{I}_{6 \times 6}$ . Prikazane su samo trajektorije u prostoru, bez vremenske varijable.

*Promjena referentne orijentacije.* Kroz sve simulacije početni uvjeti su jednaki, i iznose  $\mathbf{x}_0 = [8, 8, 5]^T$  m i  $\boldsymbol{\psi}_0 = [5^\circ, 5^\circ, 0^\circ]^T$ , dok je referentni položaj  $\mathbf{x}_d = [20, 15, 10]^T$  m, uz referentne orijentacije prikazane u tablici 5.2 na lijevoj strani, definirane Eulerovim kutevima.

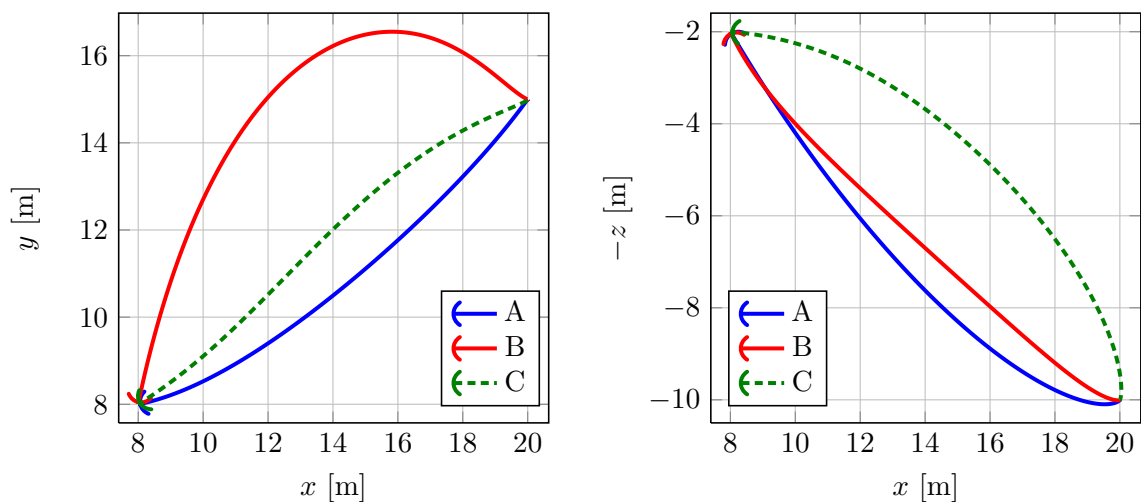
*Promjena početne orijentacije.* Kroz sve simulacije referentni uvjeti su jednaki, i iznose  $\mathbf{x}_d = [20, 15, 10]^T$  m i  $\boldsymbol{\psi}_d = [30^\circ, 45^\circ, 60^\circ]^T$ , dok je početni položaj konstantan i iznosi  $\mathbf{x}_0 = [8, 8, 5]^T$  m, a početne orijentacije prikazane su u tablici 5.2 na desnoj strani, definirane Eulerovim kutevima.

Na slici 5.19 prikazane su projekcije putanja vozila kada se konfiguracija regulira u Euler-Rodriguesovim parametrima gibanja. Očigledno je da putanja značajno ovisi o postavnoj konfiguraciji. Usporedba trajektorija u  $x$ - $y$  ravnini kod promjene postavne orijentacije pokazuje da promjena konačnog kuta skretanja uzrokuje i skretanje putanje u toj ravnini. Uspoređujući slučajeve B i C, gdje su kutevi skretanja suprotnog predznaka, vidimo simetričnost putanje oko neke ravnine, što je najviše vidljivo u  $x$ - $z$  projekciji.

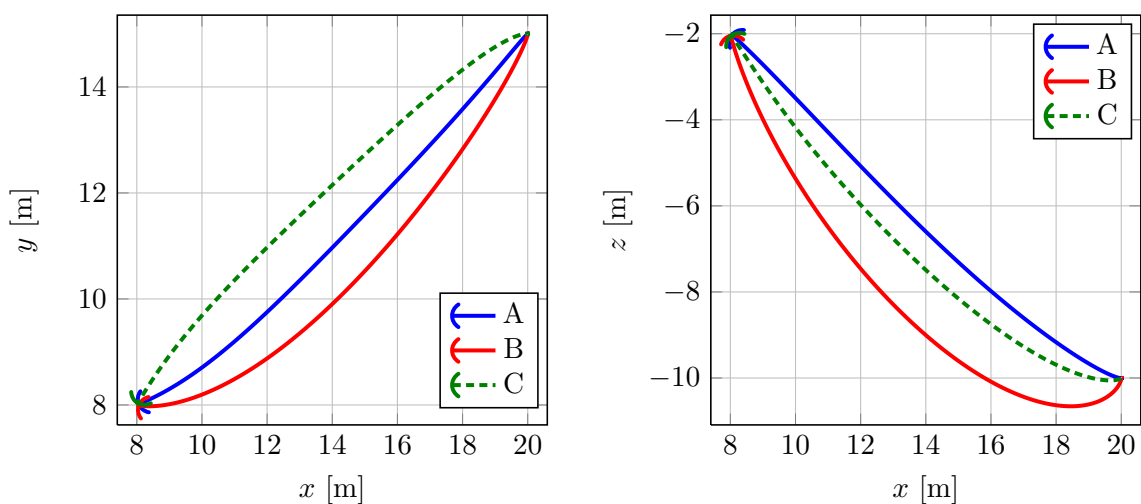
Tablica 5.2: Referentne i početne orijentacije za pozicioniranje u Euler-Rodriguesovim parametrima gibanja.

|            | A           | B           | C          |            | A          | B           | C          |
|------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|------------|
| $\phi_d$   | $30^\circ$  | $30^\circ$  | $30^\circ$ | $\phi_0$   | $0^\circ$  | $5^\circ$   | $5^\circ$  |
| $\theta_d$ | $-45^\circ$ | $45^\circ$  | $45^\circ$ | $\theta_0$ | $45^\circ$ | $-45^\circ$ | $45^\circ$ |
| $\psi_d$   | $0^\circ$   | $-60^\circ$ | $60^\circ$ | $\psi_0$   | $60^\circ$ | $0^\circ$   | $0^\circ$  |



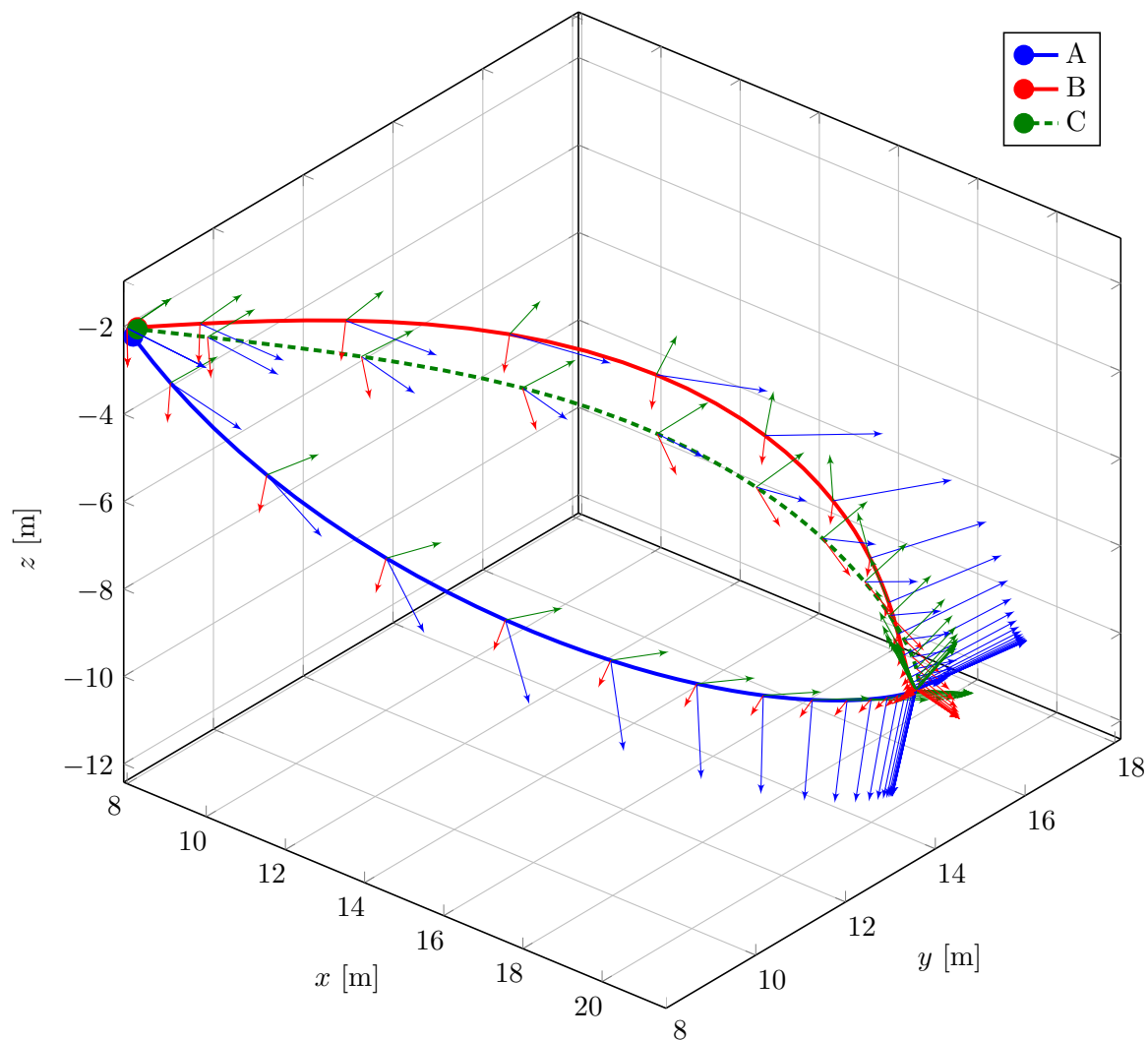


Slika 5.19: Projekcije trajektorije vozila za pozicioniranje s povratnom vezom Euler-Rodriguesovim parametrima, za različite postavne vrijednosti.

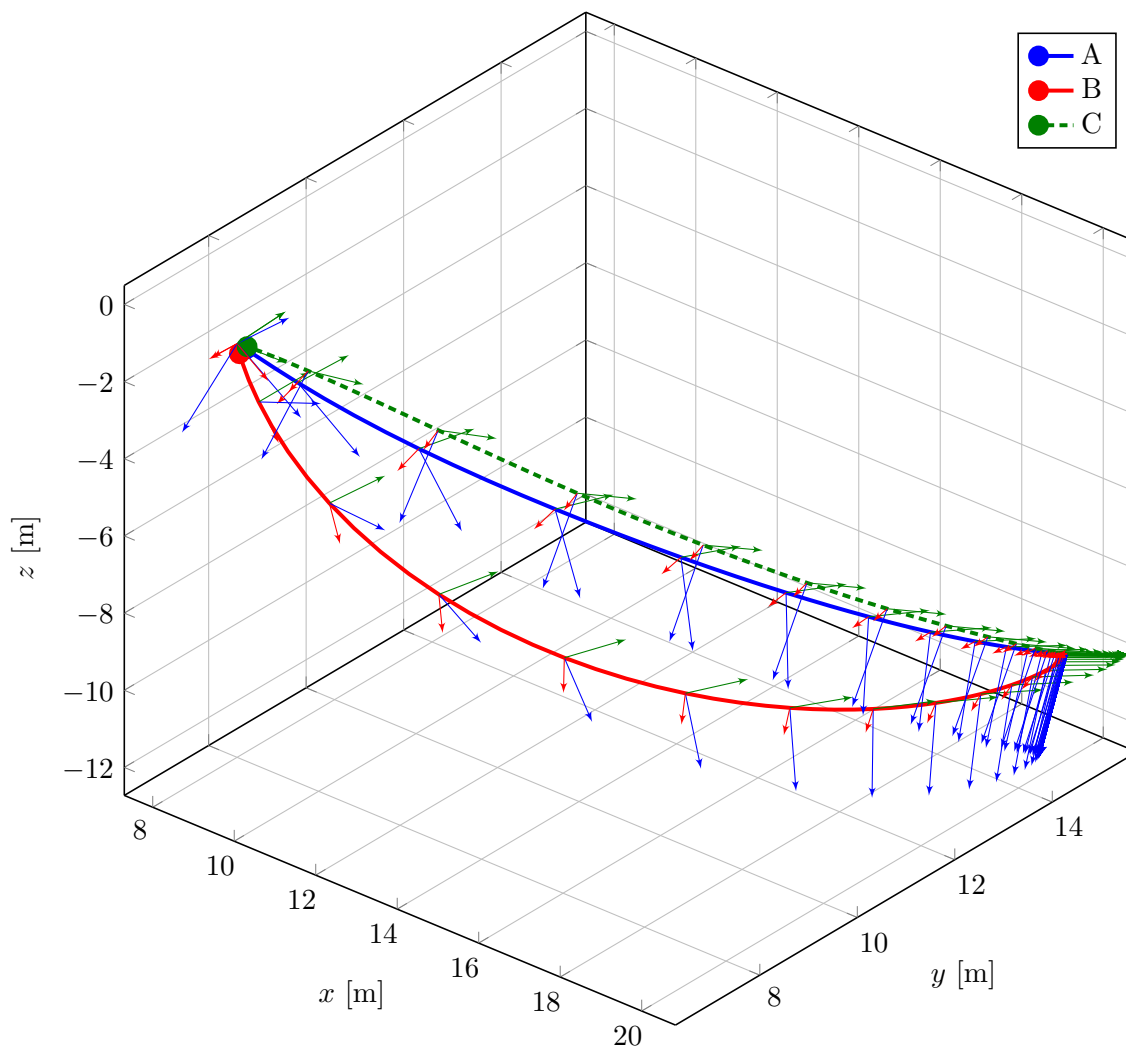


Slika 5.20: Projekcije trajektorije vozila za pozicioniranje s povratnom vezom Euler-Rodriguesovim parametrima, za različite početne vrijednosti.

Slika 5.20 prikazuje putanje za različite početne konfiguracije kada konačna odgovara orijentaciji C. Ovdje je ponovno vidljivo da suprotni predznak početnog kuta poniranja uzrokuje simetričnost putanja, što je vidljivo u  $x$ - $y$  ravnini usporedbom putanja B i C. Kada početni kutevi skretanja i poniranja odgovaraju konačnom, i dalje postoji zakretanje putanje u prostoru zbog regulacije kuta valjanja.



Slika 5.21: Prostorne trajektorije vozila za pozicioniranje s povratnom vezom Euler-Rodriguesovim parametrima, za različite postavne vrijednosti.



Slika 5.22: Prostorne trajektorije vozila za pozicioniranje s povratnom vezom Euler-Rodriguesovim parametrima, za različite početne vrijednosti.

Slike 5.21 i 5.22 pokazuju prostorne putanje i orijentacije vozila za gore navedene primjere. Jasno je vidljivo da konačna putanja ovisi o početnoj i krajnjoj orijentaciji, iako se čini da promjena konačne orijentacije više utječe na putanju.

Ovu problematiku treba ispitati na fundamentalnijoj osnovi usporedbom parametara dualnog kvaterniona i odgovarajućih koordinata u inercijskom koordinatnom sustavu, no to je izvan opsega ovog rada.

### 5.3.3 Pozicioniranje pod utjecajem poremećaja

Na vozilo djeluje poremećaj kao što je prikazan na slici 5.23. U parametre regulatora unesena je pogreška procjene inercije, koja je podcijenjena za 50%. Parametri regulatora su

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag} \{1134, 1134, 1134, 968.5, 1441.5, 1228.5\}, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{K} = \text{diag} \{3, 3, 3, 3, 3, 3\}, \quad (5.29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [1, 1, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5]^T, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{K}_D = \text{diag} \{0.2474, 0.2474, 0.2394, 0.2438, 0.2458, 0.2402\}, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{K}_P = \text{diag} \{0.0150, 0.0150, 0.0131, 0.0141, 0.0146, 0.0133\}, \quad (5.32)$$

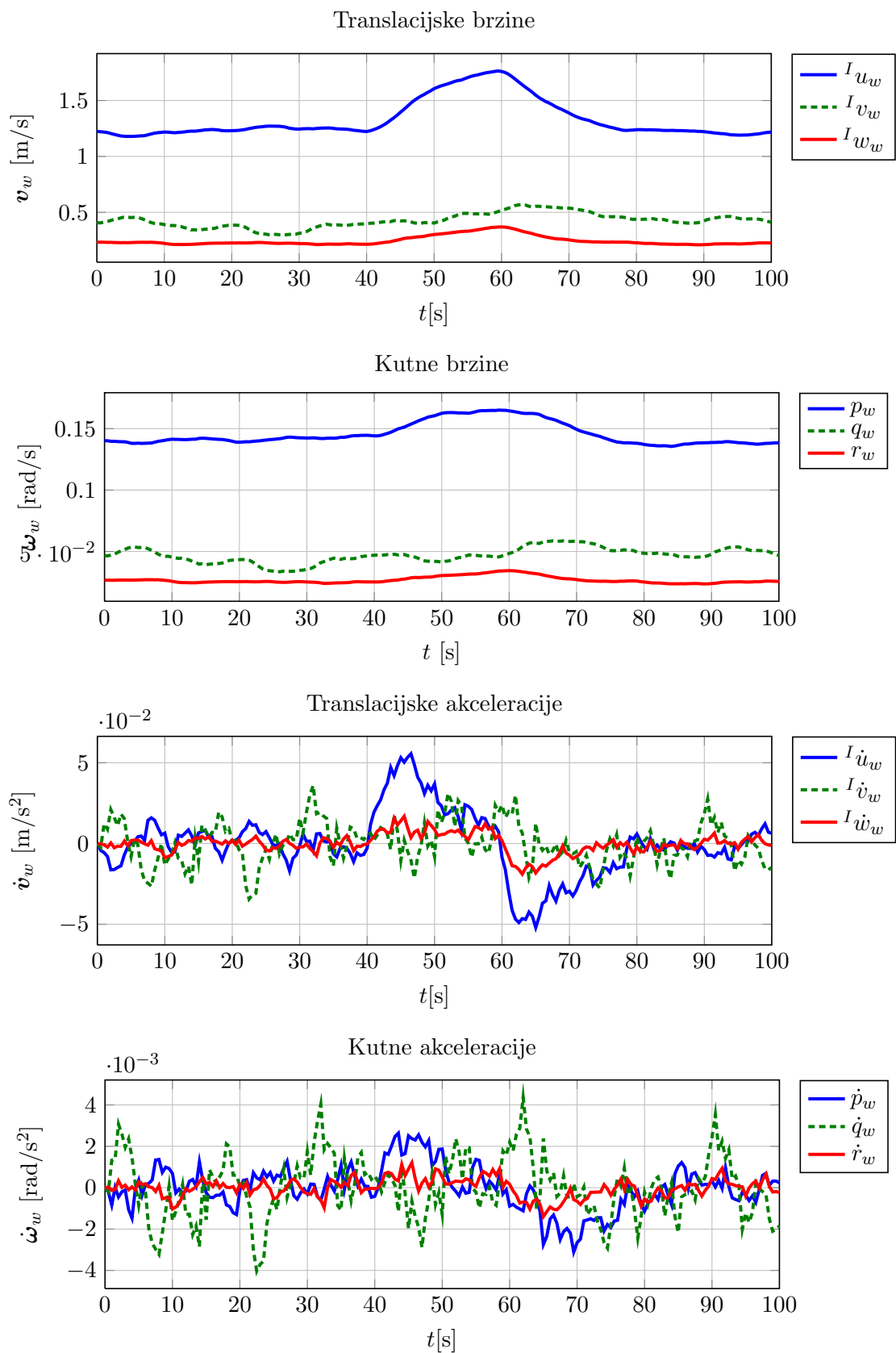
gdje su  $\mathbf{K}_D$  i  $\mathbf{K}_P$  dobiveni podešavanjem aperiodskog odziva s  $\mathbf{K}_v = 0.25 \mathbf{I}_{6 \times 6}$  uz uzimanje u obzir pojačanje SMC-a  $\mathbf{K}$  u graničnom sloju. U slučaju korištenja integralne plohe klizanja kod SMC regulatora korišten je parametar  $\mathbf{K}_I = \mathbf{I}_{6 \times 6}$ .

Početni uvjeti su

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= [8, 8, 2]^T, & \boldsymbol{\psi}_0 &= [5, 5, 0]^T, \\ \mathbf{v}_0 &= [0, 0, 0]^T, & \boldsymbol{\omega}_0 &= [0, 0, 0]^T. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Prvo će se usporediti performanse zasebnih metoda robusnog upravljanja (SMC+ISS, TDC) u navedenim uvjetim kako bi se istaknule prednosti i mane svakog od njih. Regulator kliznog stanja pri tome koristi integralnu plohu klizanja kada se koristi bez TDC estimacije. Potom će se prikazati performanse robusnog regulatora koji istovremeno koristi obje metode kako bi se dobila povećana robusnost cjelokupnog sustava. Pri tome će se u potonjem slučaju usporediti regulacija položaja u kartezijskom sustavu, te u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji.

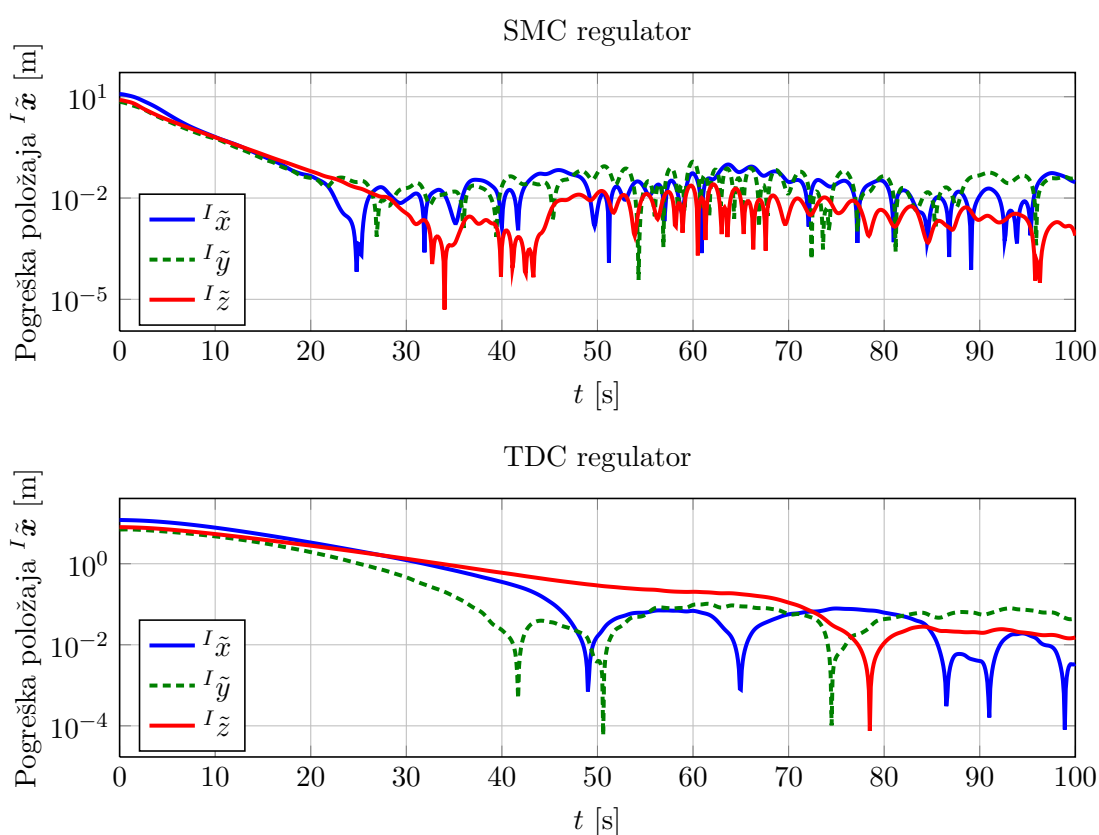
U svim je simulacijama korišten korak integracije  $h = 0,1$  s i korak diskretizacije regulatora  $T_s = L = 0,1$  s. Poremećaj koji djeluje tijekom pozicioniranja djeluje i tijekom slijeđenja trajektorije. Za regulaciju orijentacije svugdje se koriste Eulerovi parametri, a za regulaciju položaja pogreška u inercijskom koordinatnom sustavu.



Slika 5.23: Morska struja koja djeluje na vozilo tijekom pozicioniranja i slijeđenja trajektorije.

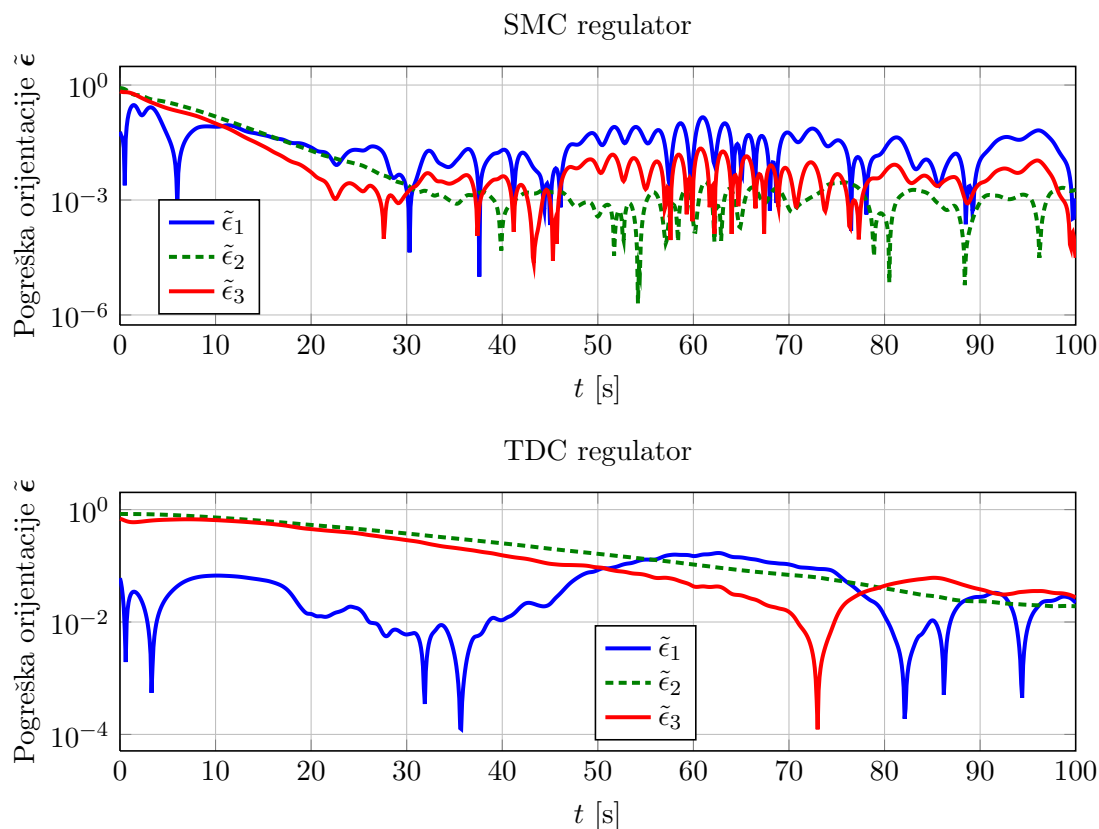
### 5.3.4 Usporedba robusnih regulatora

Usporedbom pogrešaka pozicioniranja za SMC regulator s integralnom plohom klizanja i TDC regulator na slici 5.24 može se primijetiti brži odziv SMC regulatora, koji je posljedica pogreške u inerciji sustava, a time i automatskog podešavanja pojačanja  $\mathbf{K}_P$  i  $\mathbf{K}_D$ , gdje manja inercija dovodi do većih pojačanja, a time i bržeg odziva. Dinamika pogreške TDC regulatora bliža je željenoj, no odziv je sporiji. U oba slučaja red veličine konačne pogreške pozicioniranja je sličan, s tim da SMC regulator puno brže reagira na poremećaj.



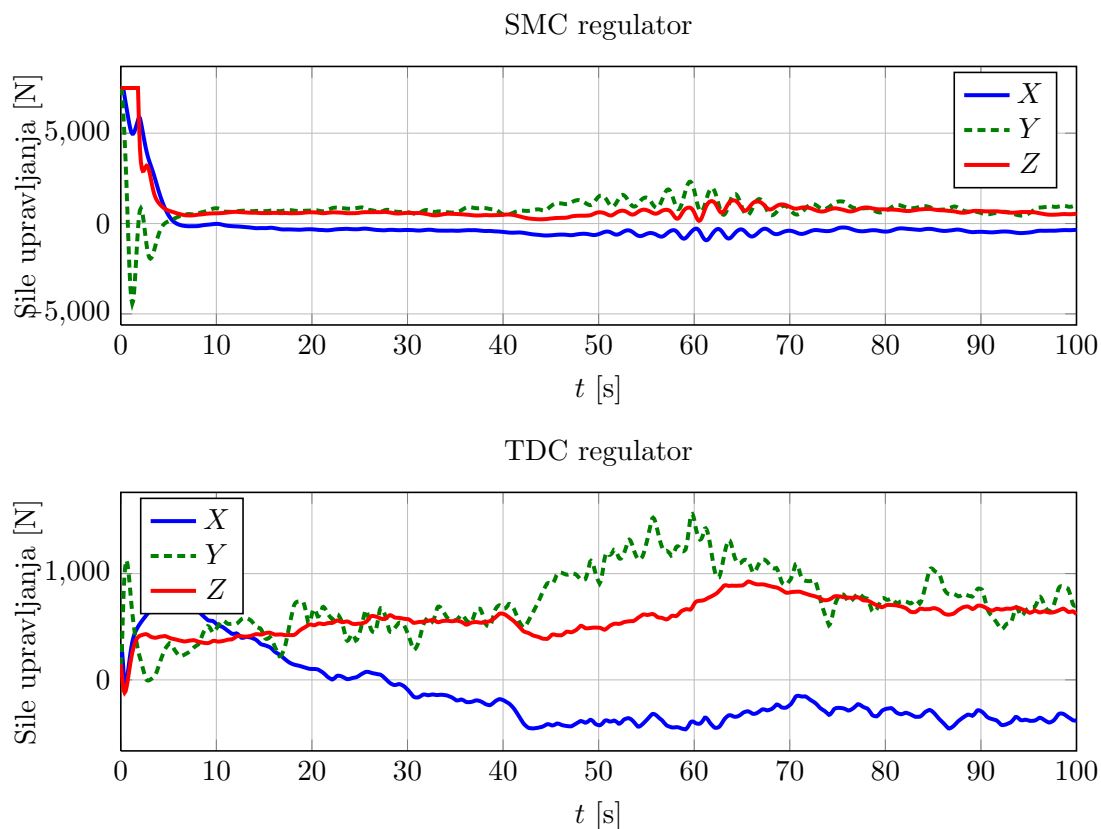
Slika 5.24: Pogreške pozicioniranja položaja pod utjecajem vanjskog poremećaja.

Može se zaključiti da SMC regulator daje odziv u višim frekvencijama, a TDC regulator u nižim frekvencijama.



Slika 5.25: Pogreške pozicioniranja orijentacije pod utjecajem vanjskog poremećaja.

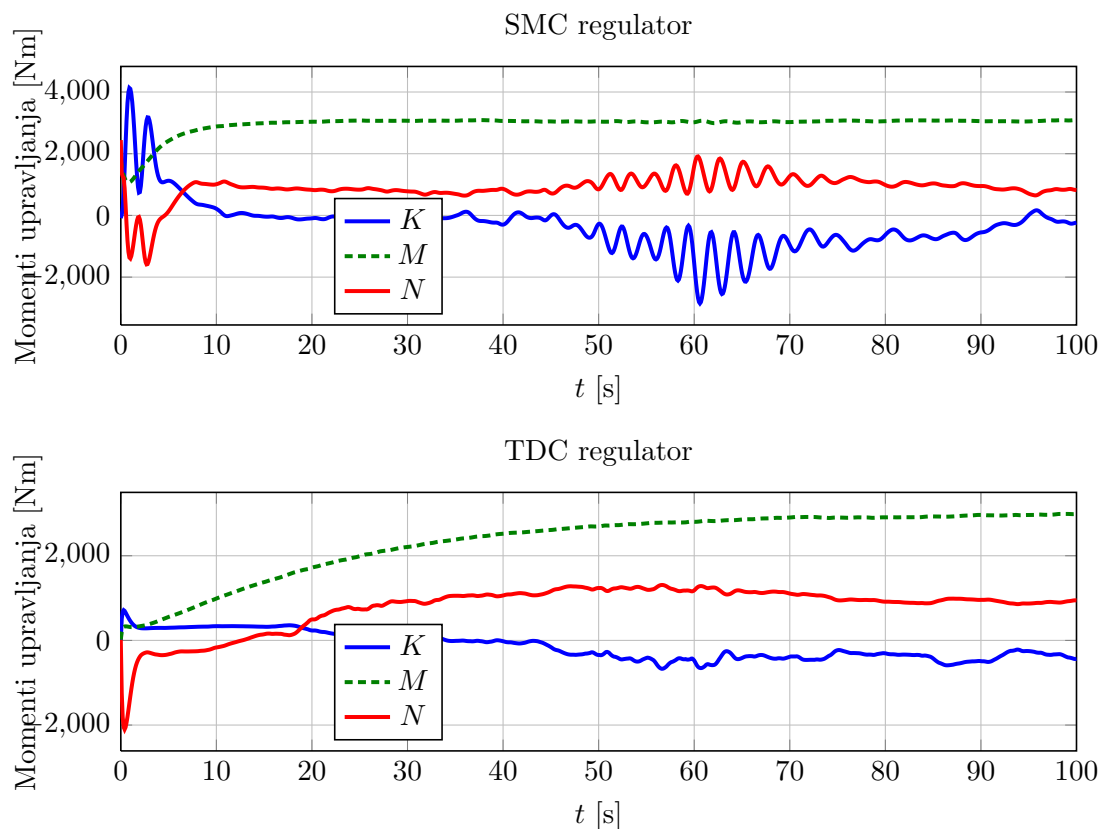
Usporedba pogreške orijentacije na slici 5.25 dovodi do sličnih opažanja kao i usporedba pogreške položaja, samo što je ovdje razlika između SMC i TDC regulatora mnogo veća. TDC regulator ne uspijeva odbaciti poremećaj oko  $x$ -osi, pa razina pogreške oko te osi ostaje na istoj razini kao na početku simulacije. Razlog tomu je izražen utjecaj morske struje na destabilizaciju dinamike rotacijske pogreške. U periodu povećanog poremećaja (40-60 s), vidljivo je sporo povećanje pogreške TDC regulatora, dok se kod SMC regulatora vidi osciliranje.



Slika 5.26: Upravljačke sile pozicioniranja pod utjecajem vanjskog poremećaja.

Upravljačke sile SMC regulatora na slici 5.26 pokazuju mnogo saturaciju upravljačkih sila na početku pozicioniranja, što je posljedica činjenice da se sustav na početku simulacije nalazi izvan graničnog sloja, pa SMC član regulatora ulazi u zasićenje i uzrokuje velike upravljačke sile. Jednom kada sustav uđe u granični sloj, sile ostaju ograničene. U razdoblju povišenog poremećaja vidimo oscilacije u upravljačim silama SMC-a, što je posljedica *chatteringa* upravljačke sile, odnosno znak da je poremećaj blizu granice definirane SMC-om. TDC regulator ima puno blaži signal upravljačke sile, no vidimo da uspijeva uhvatiti i neke komponente viših frekvencija.

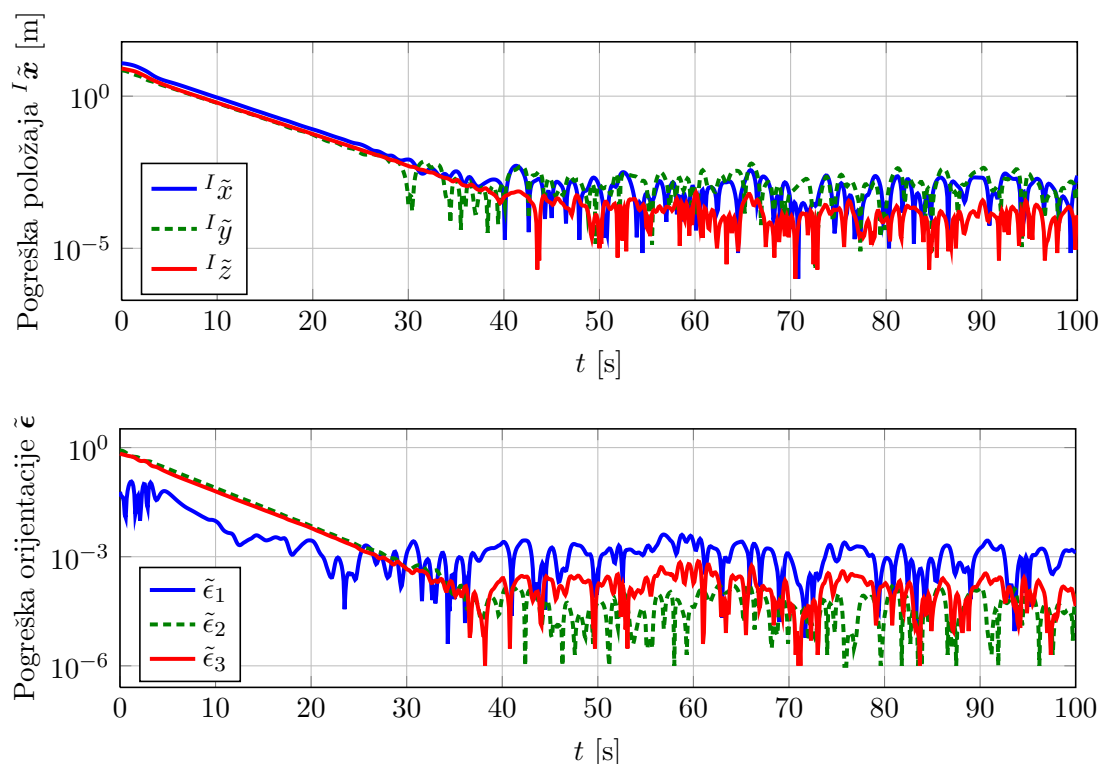




Slika 5.27: Upravljački momenti pozicioniranja pod utjecajem vanjskog poremećaja.

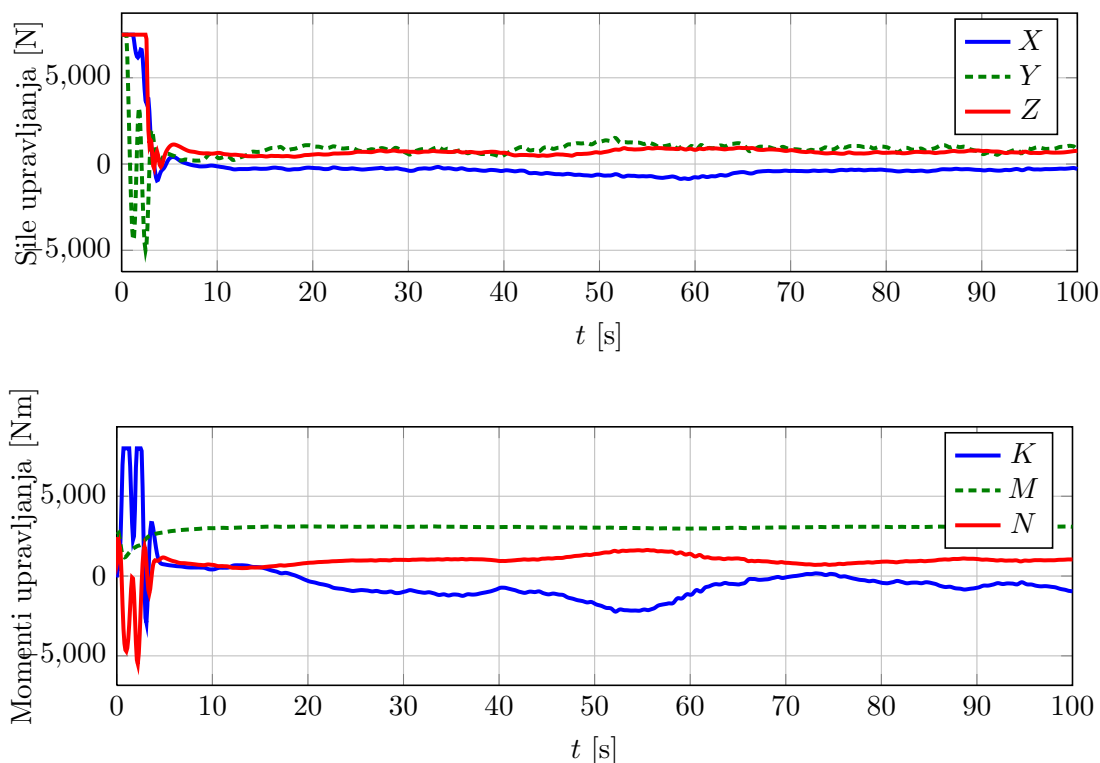
Efekt *chatteringa* izraženiji je kod upravljačkih momenata kod SMC-a, dok kod TDC regulatora također vidimo povećanu aktivnost, ali znatno niže amplitude i frekvencije. Pošto SMC koristi integralu plohu klizanja, uspijeva odrediti iznos konstantnog poremećaja oko  $y$ -osi, uzrokovanog silom uzgona na određenom kraku i nenula iznosa postavnih kuteva propinjanja i valjanja. Osim toga, vidljivo je da i TDC regulator također dolazi do istih vrijednosti, iako mnogo sporije. No, TDC regulator u sebi nema eksplicitno izražen integrator, već je to posljedica estimacije poremećaja. Dakle, TDC regulator uspješno estimira niskofrekvencijski poremećaj. Zbog toga nije potrebno koristiti integralnu plohu klizanja kada se TDC regulator koristi zajedno s SMC regulatorom.

### 5.3.5 Kombinirani SMC+TDC regulator



Slika 5.28: Pogreška pozicioniranja položaja i orijentacije za kombinirani SMC+TDC regulator pod utjecajem vanjskog poremećaja.

Usporedbom pogrešaka pozicioniranja položaja i orijentacije regulatora koji koristi SMC s PD plohom klizanja i TDC estimator poremećaja na slici 5.29 sa pogreškama pojedinačnih regulatora, možemo vidjeti da je pogreška kombiniranog regulatora za nekoliko redova veličine bolja od pogreške pojedinačnih robusnih regulatora. Pogreška ostaje postojana i u trenutku povećanog poremećaja, i ne pojavljuje se *chattering*. Očigledno se isplati dublje analizirati stabilnost ovog regulatora.



Slika 5.29: Upravljačke sile i momenti pozicioniranja za kombinirani SMC+TDC regulator pod utjecajem vanjskog poremećaja.

Iz sila i momenata na slici 5.29 vidi se početna saturacija upravljačkih sila koja je posljedica SMC regulatora. No, kada sustav uđe u granični sloj, dolazi do sinergije SMC i TDC regulatora, gdje TDC regulator odbacuje niskofrekvencijski poremećaj, a SMC visokofrekvencijski poremećaj. Vidljivo je da unatoč korištenju PD plohe klizanja iznos momenta oko  $y$ -osi brzo konvergira do iznosa konstantnog poremećaja. Tijekom povećanog poremećaja ne dolazi do *chatteringa* jer SMC član poništava samo pogrešku TDC estimacije, koja je ukupno mnogo manja od iznosa poremećaja. Ukupni efekt ovog regulatora je iznimno dobra ocjena i odbacivanje poremećaja i neodređenosti.

### 5.3.6 Utjecaj raspodjele upravljačke sile na performanse

Na stvarnim vozilima sile se neće ostvarivati direktno kao u prijašnjim simulacijama, već će se one kroz algoritam raspodjele alocirati na pojedine aktuatora. Konačne perfor-

manse ovise o točnosti algoritma, kao i zasićenju i dinamici aktuatora. Ovdje će se na primjeru pozicioniranja pod utjecajem sila fluida, ali bez morske struje, pokazati utjecaj algoritma raspodjele na performanse regulatora i otpornost na kvarove aktuatora. Također je ispitan utjecaj regulacije u različitim parametrizacijama na performanse. Prvo se prikazuju performanse u slučaju regulacije položaja u kartezijskom koordinatnom sustavu i orijentacije Eulerovim parametrima sa svim funkcionalnim motorima, a potom regulacija putem Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja sa svim funkcionalnim motorima i s jednim motorom u kvaru. Korištena konfiguracija je prikazana u primjeru u prošlom poglavlju. Ova je konfiguracija zathjevna zbog mnogih nelinearnosti i negativnog utjecaja njene dinamike na performanse.

Dinamika aktuatora aproksimirana je članovima prvog reda s vremenskom konstantom  $T_a = 0,4$  s, za potiske i za kuteve zakreta, što u konačnici unosi niskopropusni filtar u ostvarene sile. Radi jednostavnosti je korišten SMC regulator s graničnim slojem i PD plohom klizanja, s parametrima

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{RB}, \quad (5.34)$$

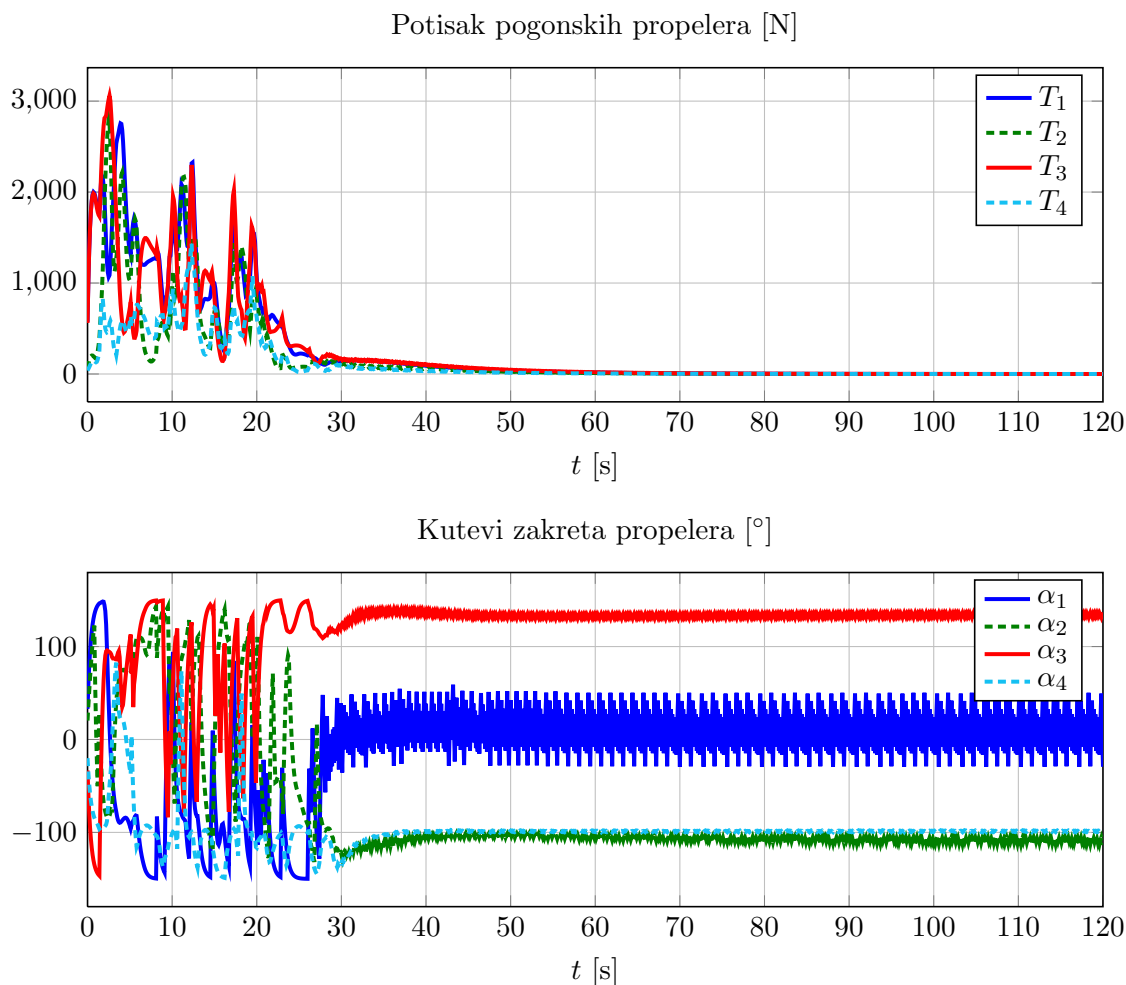
$$\mathbf{K} = \text{diag}\{1, 1, 2, 2, 2, 2\}, \quad (5.35)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [2, 2, 1, 1, 1, 1]^T, \quad (5.36)$$

$$\mathbf{K}_D = \text{diag}\{0.2496, 0.2496, 0.2482, 0.2479, 0.2486, 0.2484\}, \quad (5.37)$$

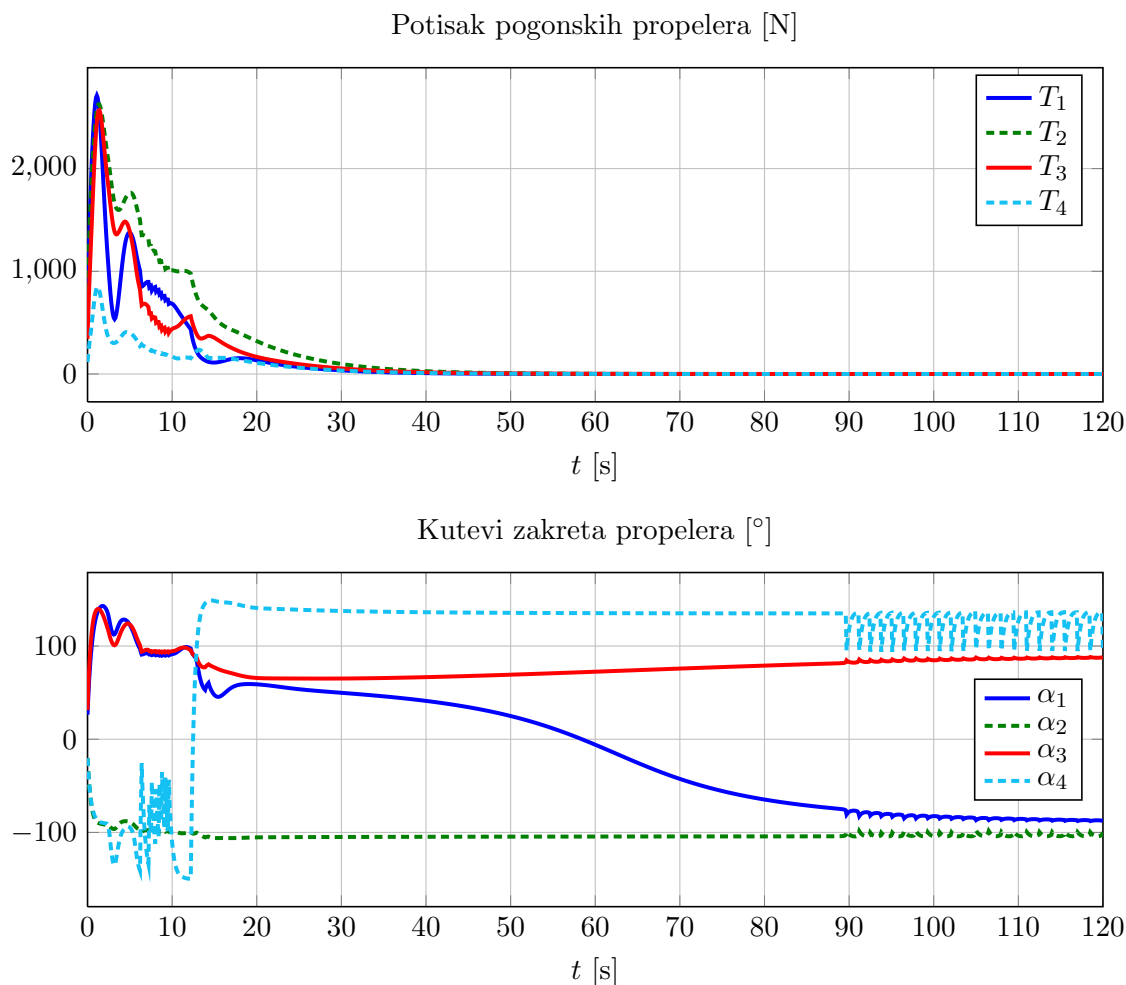
$$\mathbf{K}_P = \text{diag}\{0.0155, 0.0155, 0.0152, 0.0151, 0.0157, 0.0152\}, \quad (5.38)$$

gdje su  $\mathbf{K}_D$  i  $\mathbf{K}_P$  dobiveni podešavanjem aperiodskog odziva s  $\mathbf{K}_v = 0.25\mathbf{I}_{6 \times 6}$  uz uzimanje u obzir pojačanje SMC-a  $\mathbf{K}$  u graničnom sloju. U svim je simulacijama početni položaj  $\mathbf{x}_0 = [8, 8, 2]^T$  i referentni položaj  $\mathbf{x}_d = [20, 15, 10]^T$ . Treba napomenuti da su pojačanja i širina graničnog sloja SMC člana jednaka za sve uvjete.



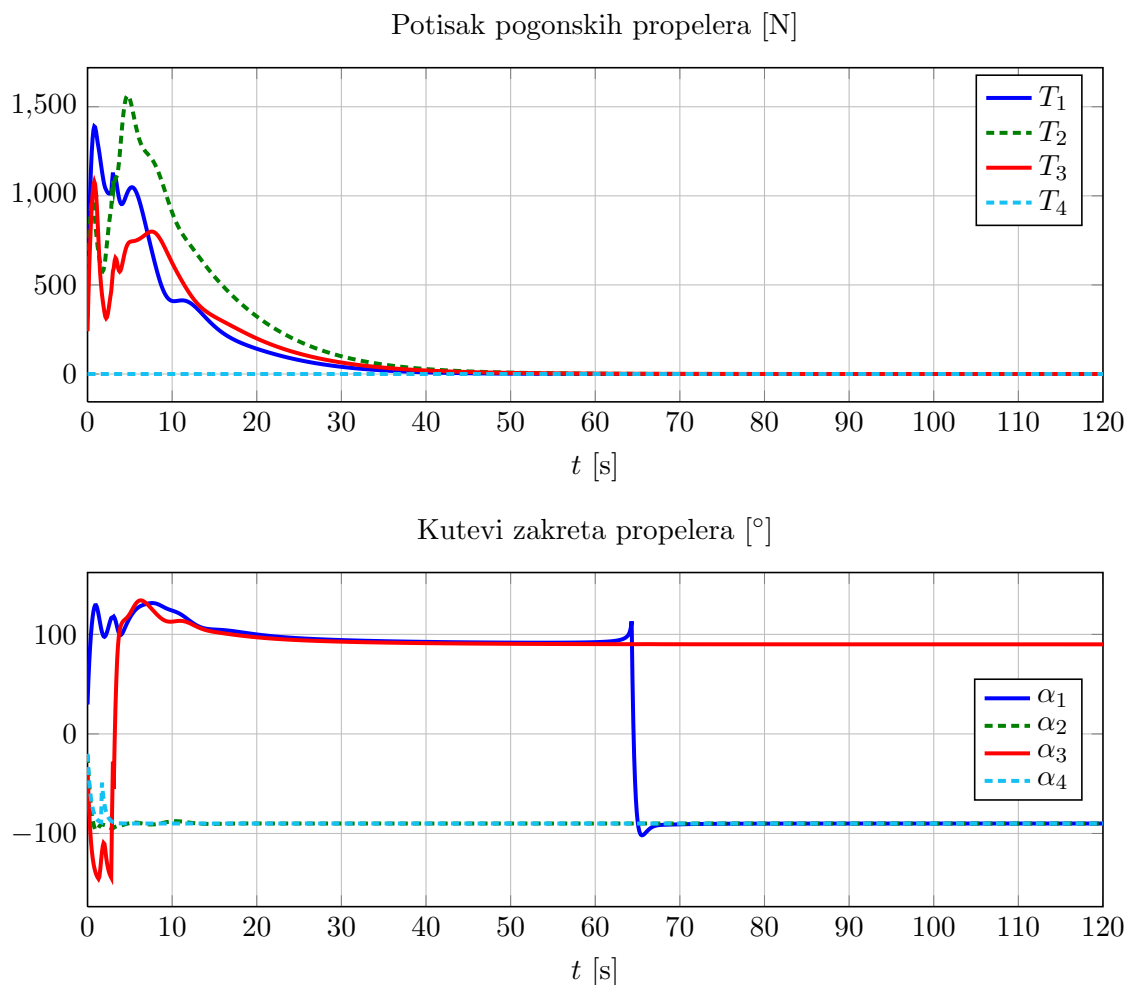
Slika 5.30: Iznosi potiska i kuteva zakreta propelera za povratnu vezu u kartezijском koordinatnom sustavu sa svim funkcionalnim propelerima.

Na slici 5.30 je vidljivo da su za vrijeme prijelazne pojave do 40. sekunde simulacije dinamika potiska i dinamika kuteva zakreta jako izražene. Nakon toga potisak se stabilizira, dok kutevi zakreta ulaze u tzv. *chattering*, što je karakteristično za SMC regulatore prvog reda u stacionarnom stanju kada postoji dinamika aktuatora. Ovaj efekt može se ublažiti postavljanjem dinamičkih ograničenja na kuteve zakreta u algoritmu raspodjele, ili proširivanjem graničnog sloja, s tim da će proširivanje graničnog sloja će nužno pogoršati performanse regulatora.



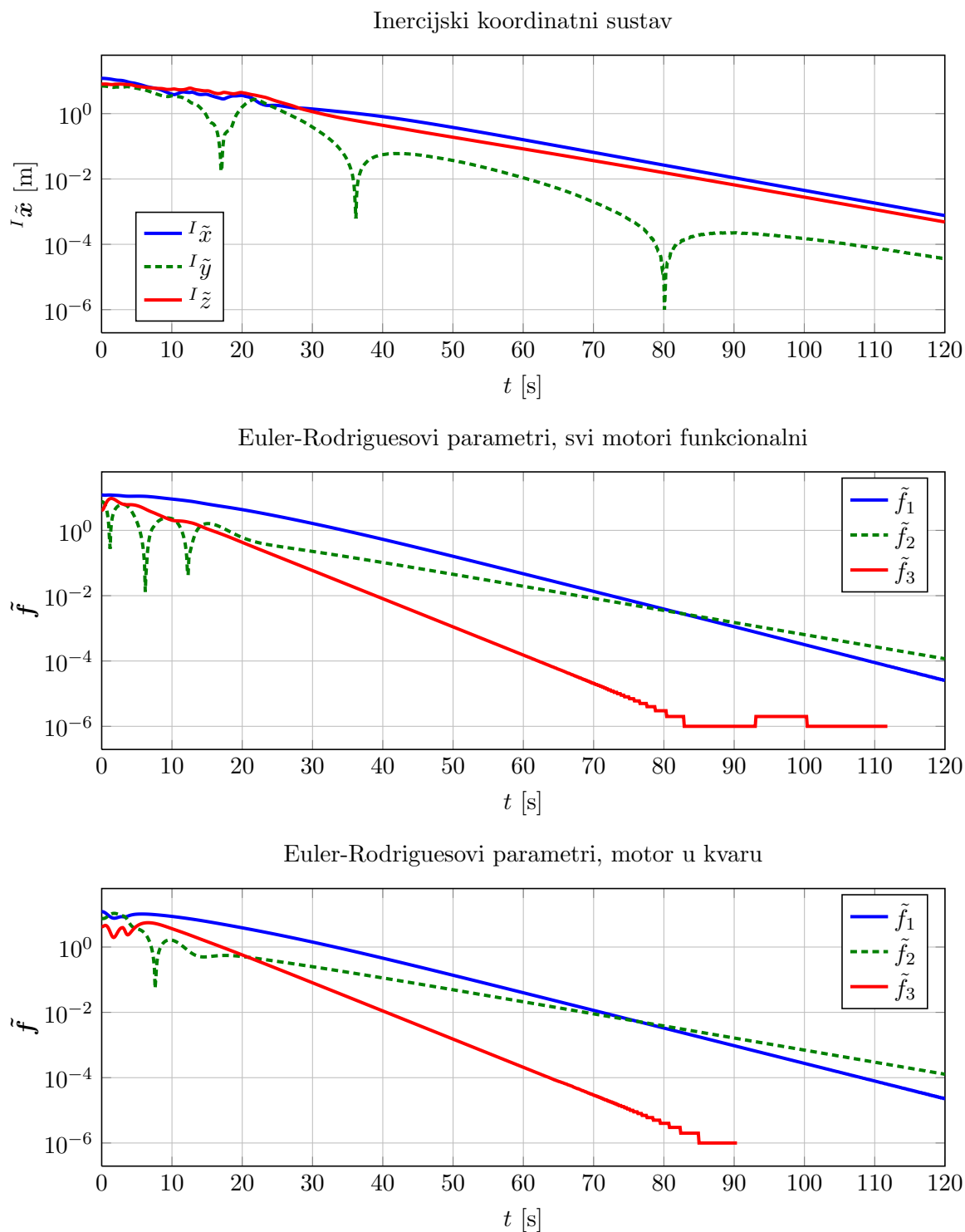
Slika 5.31: Iznosi potiska i kuteva zakreta propelera za povratnu vezu Euler-Rodriguesovim parametrima sa svim funkcionalnim propelerima.

S druge strane, slika 5.31 pokazuje identični manevar sa istim parametrima kada je povratna veza ostvarena preko Euler-Rodriguesovih parametara. Vidljivo je da je signal potiska i kuteva zakreta mnogo mirniji od slučaja kada je regulacija položaja ostvarena preko vektorske pogreške u inercijskom koordinatnom sustavu. Zbog toga i prijelazna pojava traje nešto kraće. U stacionarnom stanju ponovno se pojavljuje *chattering*.



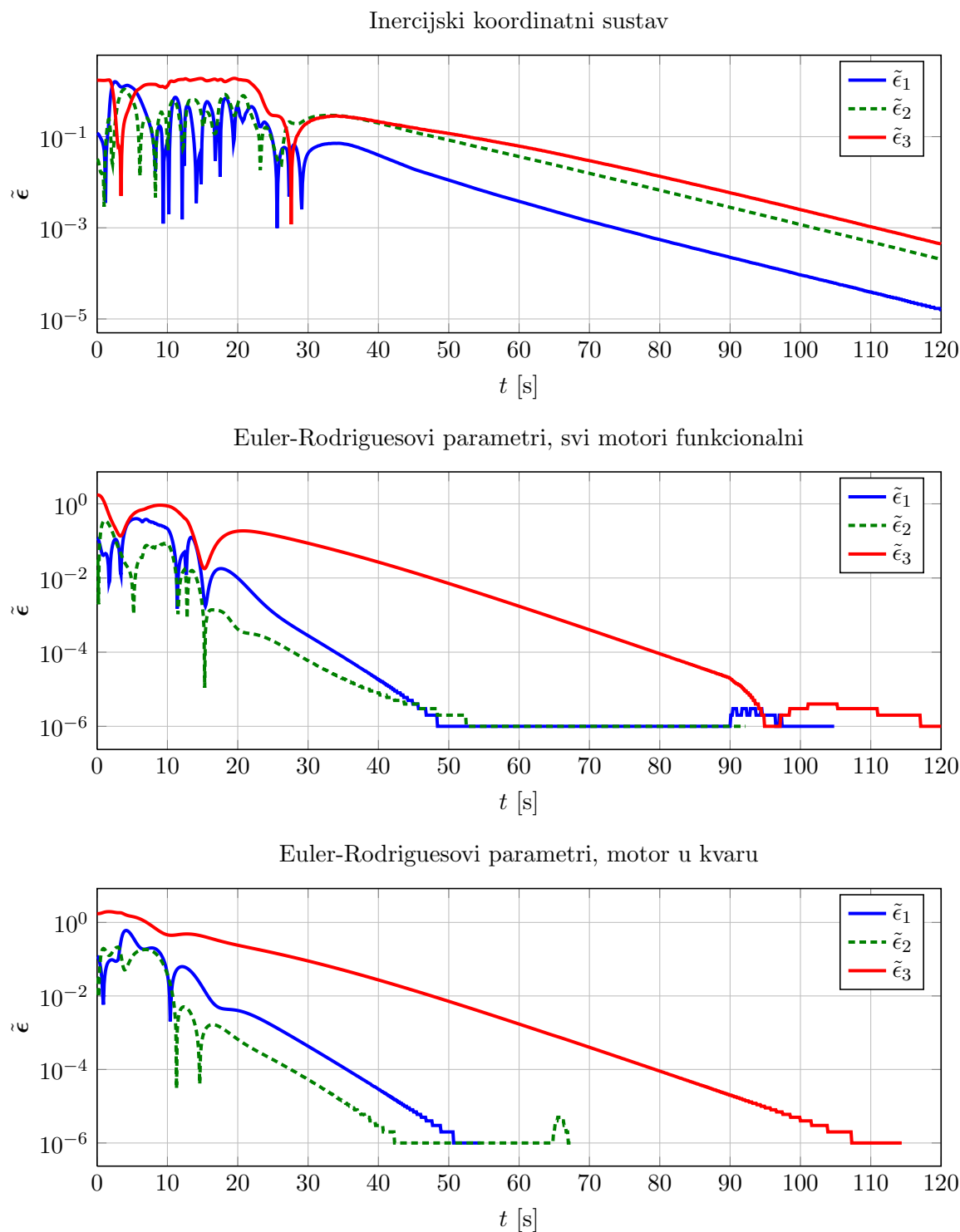
Slika 5.32: Iznosi potiska i kuteva zakreta propelera za povratnu vezu Euler-Rodriguesovim parametrima s jednim propelerom u kvaru.

Kada je motor 4 u kvaru, algoritam raspodjele konstantno daje nulu za njegov potisak, kao što je vidljivo na slici 5.32. U usporedbi s prijašnjim slučajevima, sada su iznosi potisaka čak manji, a i njihova je dinamika puno mirnija. Isto se može reći i za kuteve zakreta. Ovo je specifičnost za prikazanu konfiguraciju aktuatora, pošto aktuatori moraju međusobno kompenzirati neželjene sile i momente koji se stvaraju, pa u slučaju otkazivanja motora 4 nestaje jedna od sila koje treba kompenzirati. Dakako, smanjen je i prostor ostvarivih sila. Ovaj bi se problem mogao riješiti boljim algoritmom raspodjele upravljačke sile.



Slika 5.33: Pogreška pozicioniranja za povratnu vezu kartezijskim koordinatama sa potpuno funkcionalnim aktuatorima, te za povratnu vezu Euler-Rodriguesovim parametrima sa svim funkcionalnim i jednim propelerom u kvaru.





Slika 5.34: Pogreška orijentacije za povratnu vezu kartezijskim koordinatama sa potpuno funkcionalnim aktuatorima, te za povratnu vezu Euler-Rodriguesovim parametrima sa svim funkcionalnim i jednim propelerom u kvaru.

Usporedba pogrešaka položaja na slici 5.33 pokazuje asimptotsku konvergenciju u nulu za sve slučajeve, što je i očekivano jer nema vanjskog poremećaja koji djeluje na vozilo. Pri tome se može primijetiti brža konvergencija u slučaju korištenja Euler-Rodriguesovih parametara u povratnoj vezi, iako je ovdje potrebno ponovno napomenuti da se ne radi o izravno usporedivim vrijednostima. U slučaju otkazivanja motora dobivamo čak bolju konvergenciju pogreške.

Iako je konvergencija pogreške položaja dosta slična u svim prikazanim slučajevima, usporedbom pogreške orijentacije na slici 5.34 vidimo da korištenje povratne veza u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji daje puno bolje performanse. Nakon pedesete sekunde simulacije pogreške za  $x$ - i  $y$ -komponente vektorskog dijela parametara padaju ispod  $10^{-6}$ , a isto čine za  $z$ -os nakon otprilike stote sekunde. Za isto vrijeme je konvergencija pogreške orijentacije za regulator koji položaj regulira u inercijskom koordinatnom sustavu za nekoliko redova veličine lošija, bez obzira što se regulacija orijentacije također vrši povratnom vezom po Eulerovim parametrima.

Možemo zaključiti da povratna veza po Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji gibanja u ovom slučaju donosi mnogo bolji odziv, i to bez ikakvih izmjena u samom regulatoru. Ako u slučaju bez poremećaja ova parametrizacija daje bolje performanse, za očekivati je da će i pod utjecajem poremećaja također dati bolje performanse. No, to se u ovom radu neće razmatrati već se ostavlja kao tema daljnjeg znanstvenog istraživanja.

## 5.4 Slijeđenje trajektorije

Cilj ovog upravljanja je slijeđenje vremenski promjenjive i parametarski zadane trajektorije  $\xi_d(t)$  definirane u inercijskom koordinatnom sustavu jednadžbama

$$\begin{aligned}x_d(t) &= x_0 + R \sin(\Omega t), \\y_d(t) &= y_0 + R \cos(\Omega t), \\z_d(t) &= z_0 + A \sin(2\Omega t),\end{aligned}\tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_d(t) &= R\Omega \cos(\Omega t), \\\dot{y}_d(t) &= -R\Omega \sin(\Omega t), \\\dot{z}_d(t) &= 2A\Omega \cos(2\Omega t),\end{aligned}\tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_d(t) &= -R\Omega^2 \sin(\Omega t), \\\ddot{y}_d(t) &= -R\Omega^2 \cos(\Omega t), \\\ddot{z}_d(t) &= -2A\Omega^2 \sin(2\Omega t),\end{aligned}\tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}\phi_d(t) &= 0, & p_d(t) &= 0, \\\theta_d(t) &= 0, & q_d(t) &= 0, \\\psi_d(t) &= \Omega t, & r_d(t) &= \Omega.\end{aligned}\tag{5.42}$$

U rezultatima koji slijede korišteni su parametri

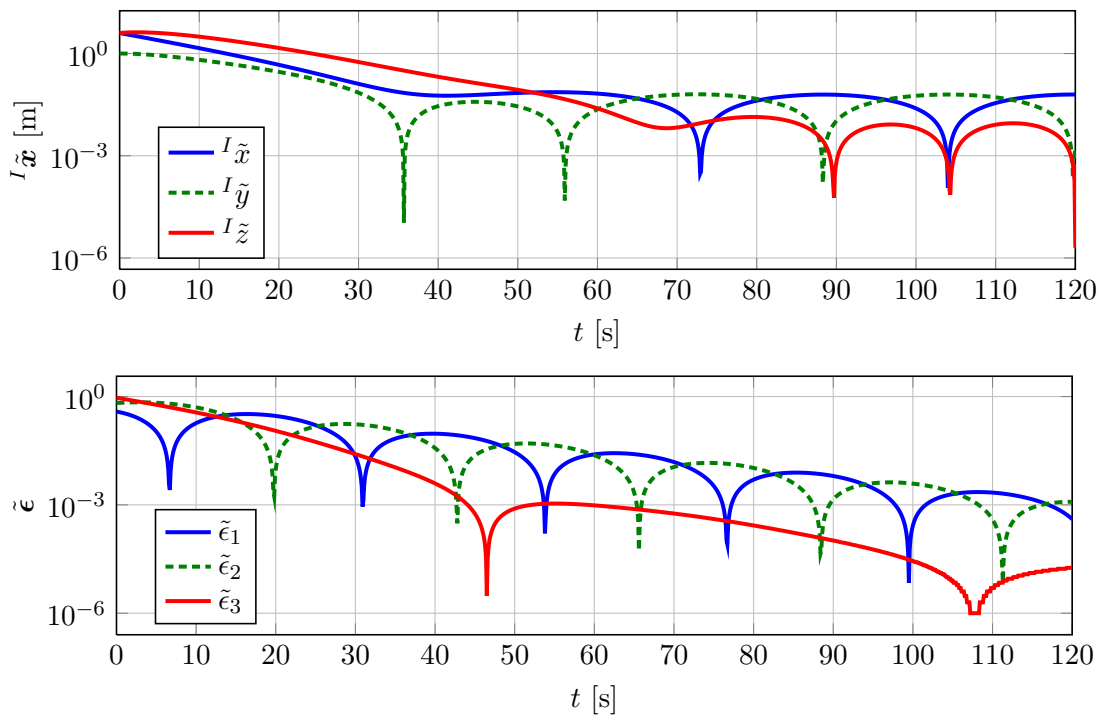
$$\begin{aligned}\Omega &= 0,15 \text{ rad/s}, \\\mathbf{x}_0 &= [4, 5, 6]^T \text{ m}, \\R &= 4 \text{ m}, \\A &= 1 \text{ m},\end{aligned}\tag{5.43}$$

dok je početno stanje vozila

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 &= [8, 8, 2]^T, \\\boldsymbol{\psi}_0 &= [5, 5, 0]^T, \\\mathbf{v}_0 &= [0, 0, 0]^T, \\\boldsymbol{\omega}_0 &= [0, 0, 0]^T.\end{aligned}\tag{5.44}$$

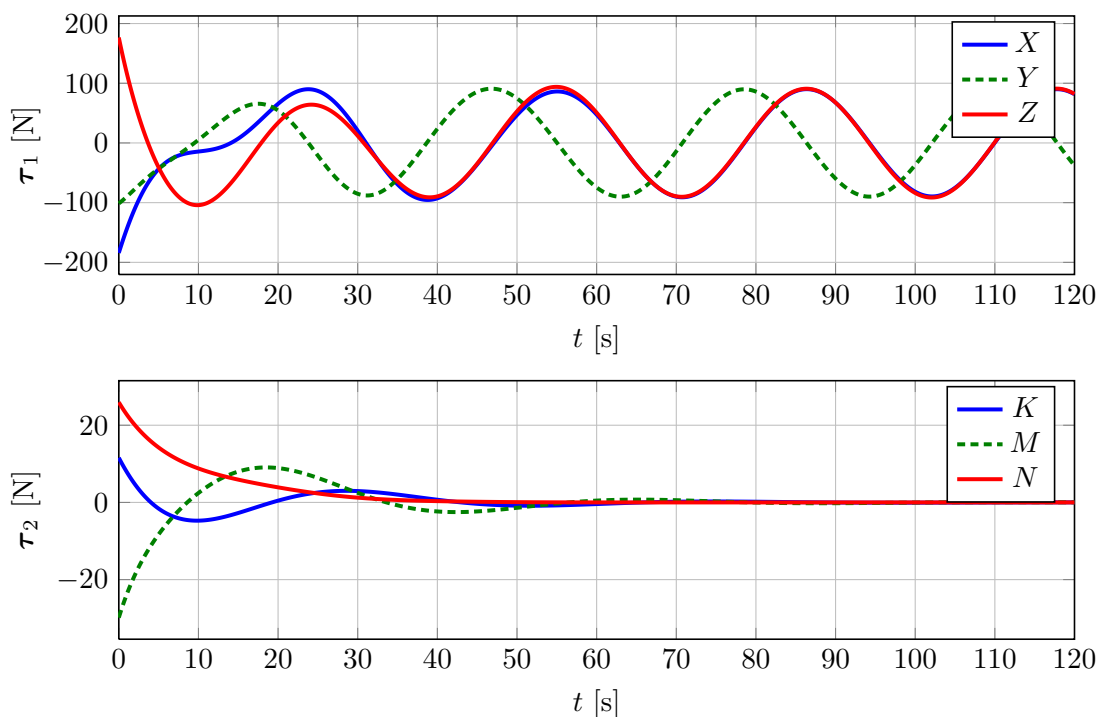
### 5.4.1 Idealno upravljanje

Za kvalitetniju usporedbu regulatora i pokazivanje robusnosti potrebno je prvo prikazati nominalno, odnosno idealno upravljanje bez utjecaja bilo kakvih vanjskih sila, slično kao i za slučaj pozicioniranja. Parametri PD-regulatora postavljeni su za aperiodski odziv s  $\mathbf{K}_v = 0.25 \mathbf{I}_{6 \times 6}$ .



Slika 5.35: Pogreške praćenja trajektorije položaja i orijentacije u idealnim uvjetima.

Odziv pogreške na slici 5.35 pokazuje da regulator ne može idealno pratiti trajektoriju položaja, dok se pogreška orijentacije asimptotski smanjuje. Razlog konačne pogreške slijeđenja položaja je u zanemarivanju centripetalnih i Coriolisovih sila na tijelu, odnosno zanemarivanje nelinearnog dijela dinamike.



Slika 5.36: Upravljačke sile i momenti praćenja za idealne uvjete.

Iz upravljačkih sila i momenata na slici 5.36 vidimo da se momenti asimptotski smanjuju, a sile asimptotski ulaze u periodičku promjenu čija je frekvencija ovisna o parametru  $\Omega$  trajektorije. Odziv PD regulatora u ovom slučaju ovisi o njegovoj frekvencijskoj karakteristici i frekvenciji trajektorije. Vidimo da sile i pogreške konvergiraju gotovo do konačnih vrijednosti za otprilike 50 sekundi, što odgovara željenoj dinamici pogreške. Pogreška nema aperiodski odziv jer zbog kombiniranog gibanja postoji utjecaj nelinearne dinamike koja negativno utječe na performanse.

### 5.4.2 Robusno upravljanje pod utjecajem poremećaja

Kako bi se prikazala robusnost regulatora u šest stupnjeva slobode, na vozilo djeluje vremenski promjenjiv poremećaj morske struje kao što je prikazan na slici 5.23. U vremenskom razdoblju  $40 < t < 60$  s djeluje povećani poremećaj, što je osim u iznosima brzine strujanja vidljivo u akceleracijama morske struje kao vršak. Cilj je dodatno destabilizirati vozilo dok se kreće. Da bi se dalje otežali uvjeti i približili onima u stvarnosti, u

parametre regulatora unesena je pogreška procjene inercije, koja je podcijenjena za 50%. Razlog tomu je što su pravi parametri vozila u pravilu nepoznati, iako se oni statički mogu s dosta velikom točnošću identificirati. Parametri regulatora su

$$\bar{\mathbf{M}} = \text{diag} \{1134, 1134, 1134, 968.5, 1441.5, 1228.5\}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{K} = \text{diag} \{3, 3, 6, 6, 6, 6\}, \quad (5.46)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [1, 1, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5]^T, \quad (5.47)$$

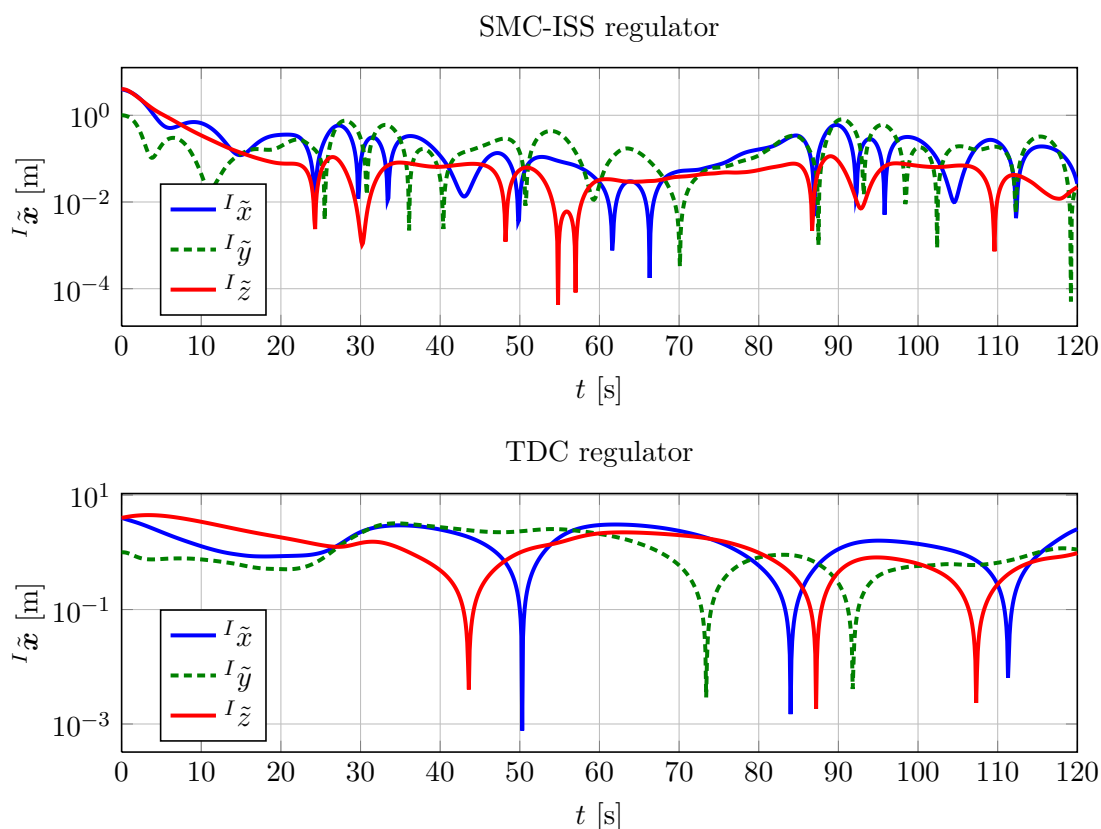
$$\mathbf{K}_D = \text{diag} \{0.2474, 0.2474, 0.2394, 0.2438, 0.2458, 0.2402\}, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{K}_P = \text{diag} \{0.0150, 0.0150, 0.0131, 0.0141, 0.0146, 0.0133\}, \quad (5.49)$$

gdje su  $\mathbf{K}_D$  i  $\mathbf{K}_P$  dobiveni podešavanjem aperiodskog odziva s  $\mathbf{K}_v = 0.25\mathbf{I}_{6 \times 6}$  uz uzimanje u obzir pojačanje SMC-a  $\mathbf{K}$  u graničnom sloju. U slučaju korištenja integralne plohe klizanja korišten je parametar  $\mathbf{K}_I = \mathbf{I}_{6 \times 6}$ .

Prvo će se usporediti performanse zasebnih metoda robusnog upravljanja (SMC+ISS, TDC) u navedenim uvjetim kako bi se istaknule prednosti i mane svakog od njih. Potom će se prikazati performanse robusnog regulatora koji istovremeno koristi obje metode kako bi se dobila povećana robusnost cjelokupnog sustava. Pri tome će se u potonjem slučaju usporediti regulacija položaja u kartezijskom sustavu s onom u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji.

### 5.4.3 Usporedba robusnih regulatora

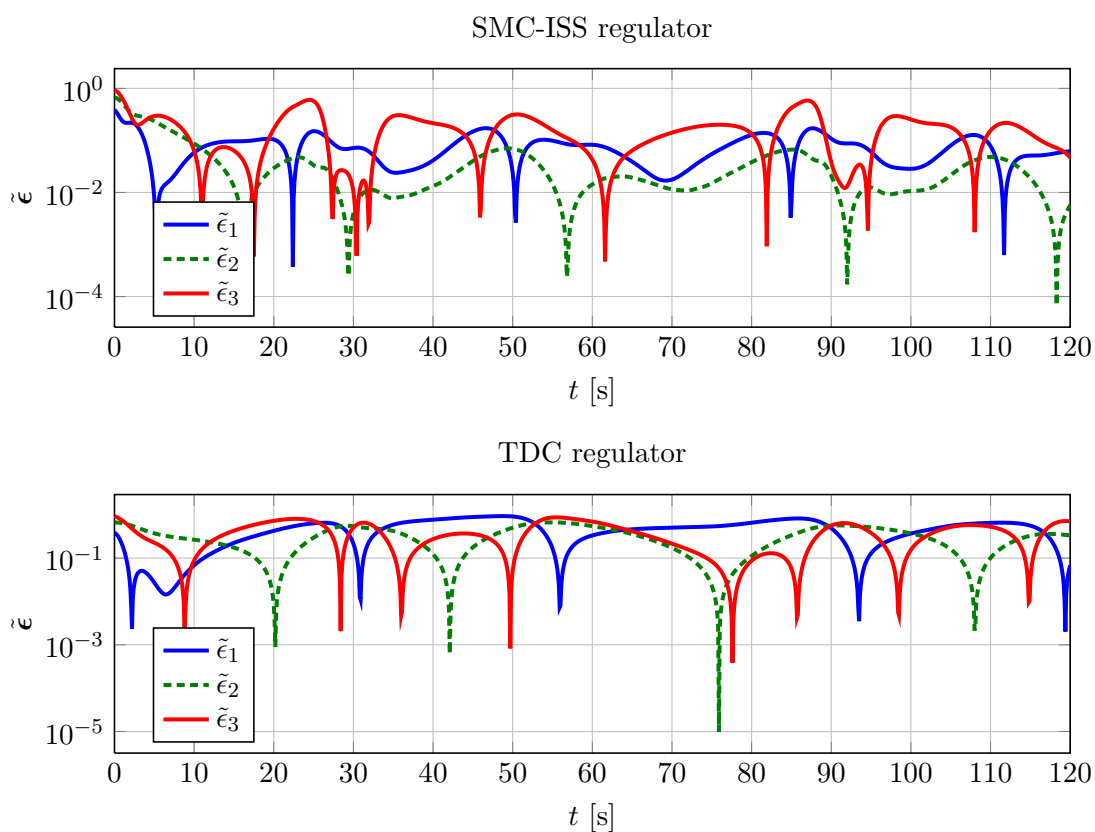


Slika 5.37: Pogreške praćenja trajektorije položaja za SMC i TDC regulator.

Na slici 5.37 u logaritamskoj je skali prikazana pogreška slijeđenja za SMC i TDC regulatore. Vidljivo je da SMC regulator dolazi do svoje konačne točnosti za otprilike 20 sekundi, što je otprilike dvostruko brže nego željeni odziv. Razlog tomu je pogrešna procjena matrice inercije, pa metoda podešavanja parametara PD-regulatora rezultira većim iznosima pojačanja, a time i bržim odzivom sustava. Osim toga, na početku simulacije vozilo se nalazi izvan graničnog sloja SMC-a, te on daje maksimalnu upravljačku silu, čime se dodatno ubrzava odziv sustava. Sama pogreška slijeđenja je reda veličine 10 cm i ovisi o SMC pojačanju. Veće pojačanje uzrokovat će manju pogrešku, no i veće upravljačke sile. Uočljiva je veća frekvencija promjene predznaka pogreške SMC regulatora u odnosu na TDC.

Vidljivo je i da TDC regulator ne uspijeva pratiti trajektoriju u zadanim uvjetima. Pogre-

ška je reda veličine metra, što je u ovom slučaju neprihvatljivo. Razlog tomu je relativno dugačko vrijeme diskretizacije, koje smanjuje performanse ovog regulatora. Između uzoraka se javlja veliko odstupanje između estimiranog i stvarnog poremećaja, što pobuđuje dinamiku pogreške. Osim konačne pogreške, može se vidjeti da je ona za  $x$  i  $y$  koordinatne postignuta u projektiranom vremenu, što ukazuje na umanjen utjecaj pogreške u parametrima sustava na ovaj regulator. Performanse se mogu poboljšati smanjivanjem vremena uzorkovanja, no vidljivo je da je ovaj regulator relativno neupotrebljiv u teškim uvjetima ukoliko se koristi samostalno.

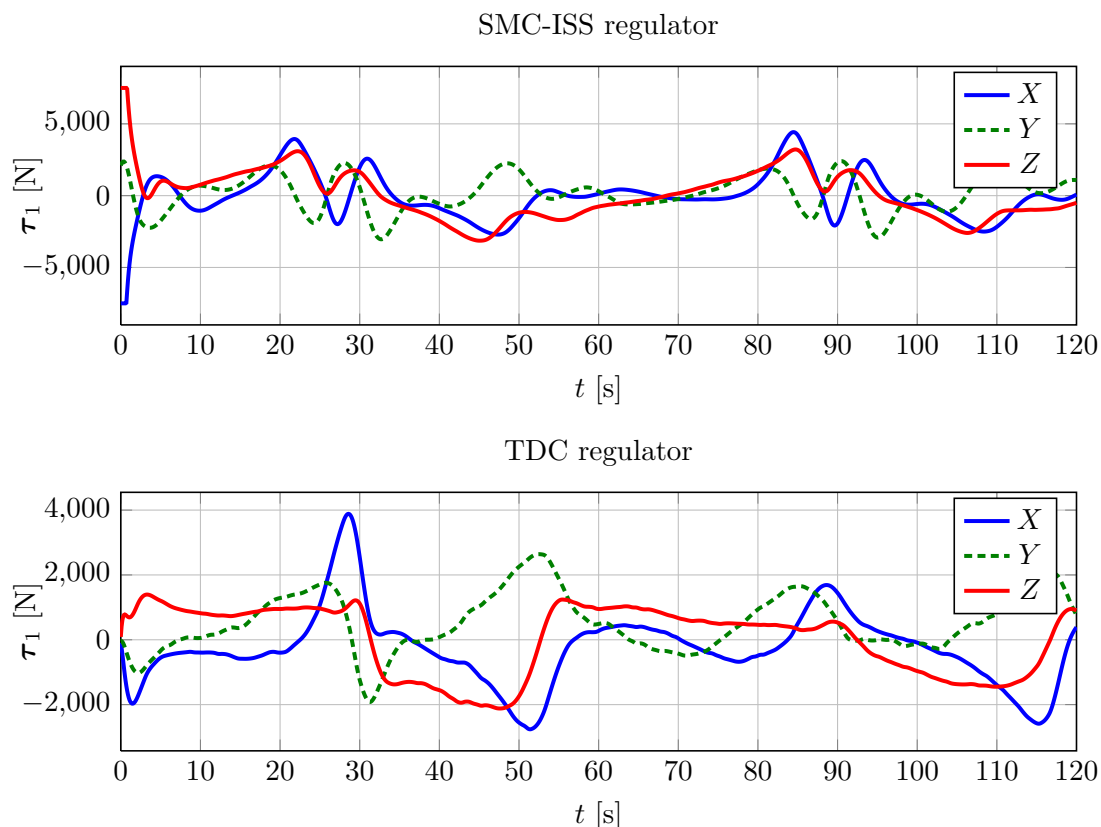


Slika 5.38: Pogreške praćenja trajektorije orijentacije za robusne regulatore.

Usporedba pogreške slijeđenja orijentacije u Eulerovim parametrima pokazuje da oba regulatora podjednako loše slijede zadanu orijentaciju, iako SMC regulator u tome ima ponešto bolje performanse, koje se mogu dodatno poboljšati povećanjem SMC pojačanja ili sužavanjem graničnog sloja. Razlog ovako lošim performansama, pogotovo ako se uzme u obzir da je jedino referentni kut skretanja vremenski promjenjiv i nenula, leži u

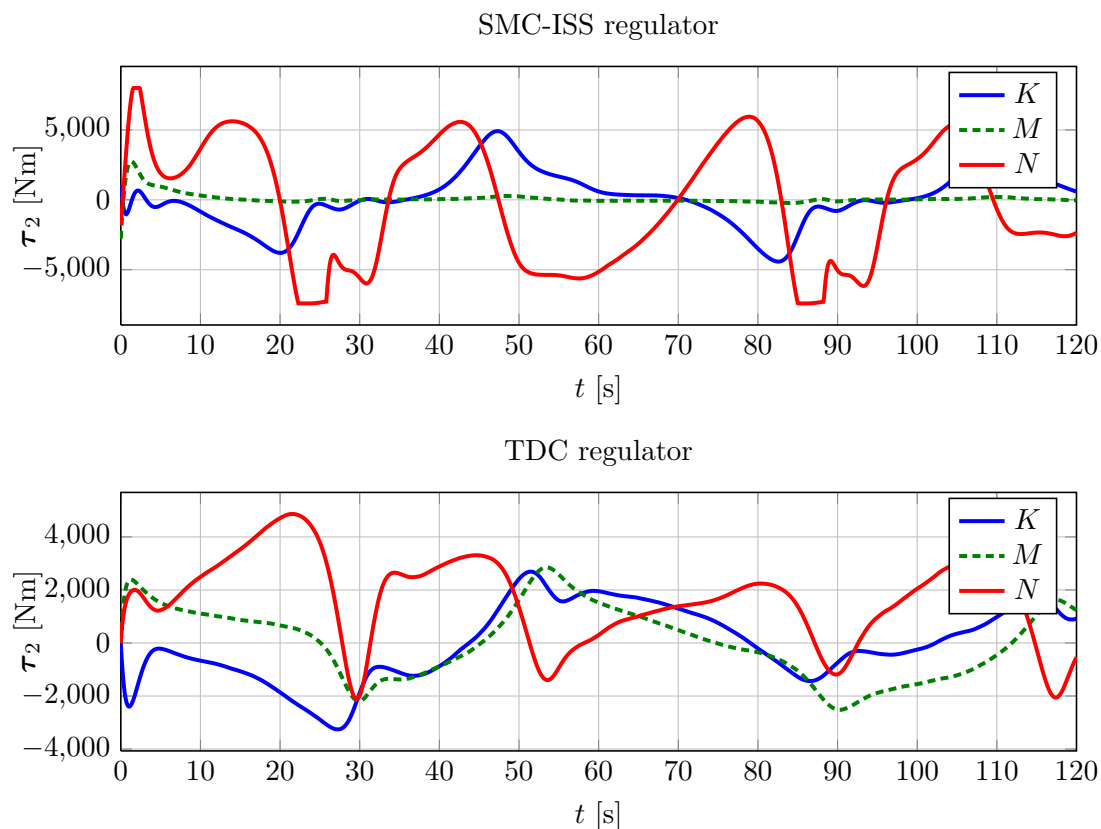


iznimno velikim i nelinearnim poremećajima u rotacijskoj dinamici zbog relativne kutne brzine vozila koja se među ostalim mijenja s položajem na trajektoriji jer se mijenja i relativni kut brzine strujanja vode i brzine vozila. Osim toga, u regulator nisu uključene centripetalne i Coriolisove sile, što je dodatan izvor poremećaja.



Slika 5.39: Upravljačke sile praćenja trajektorije za robusne regulatore.

Usporedba upravljačkih sila na slici 5.39 potvrđuje da je uzrok bržeg odziva SMC regulatora veća upravljačka sila na početku simulacije. Kao što je već spomenuto, razlog saturacije upravljačke sile na početku je to što se sustav nalazi izvan graničnog sloja. U usporedbi s tim, TDC regulator prvih 5 sekundi simulacije ima mnogo manje upravljačke sile. Može se uočiti i ponešto brža promjena upravljačke sile SMC regulatora. Sile u smjeru  $y$ -osi tijela slične su za oba regulatora pošto se radi o kružnom gibanju, za koje je potrebno održavati centripetalnu silu prema centru kružnice. Glavni oblik upravljačkih sila podosta je sličan i određen je nerobusnim PD-regulatorom, dok se signali razlikuju zbog raličitih metoda robusnog upravljanja.



Slika 5.40: Upravljački momenti praćenja trajektorije za robusne regulatore.

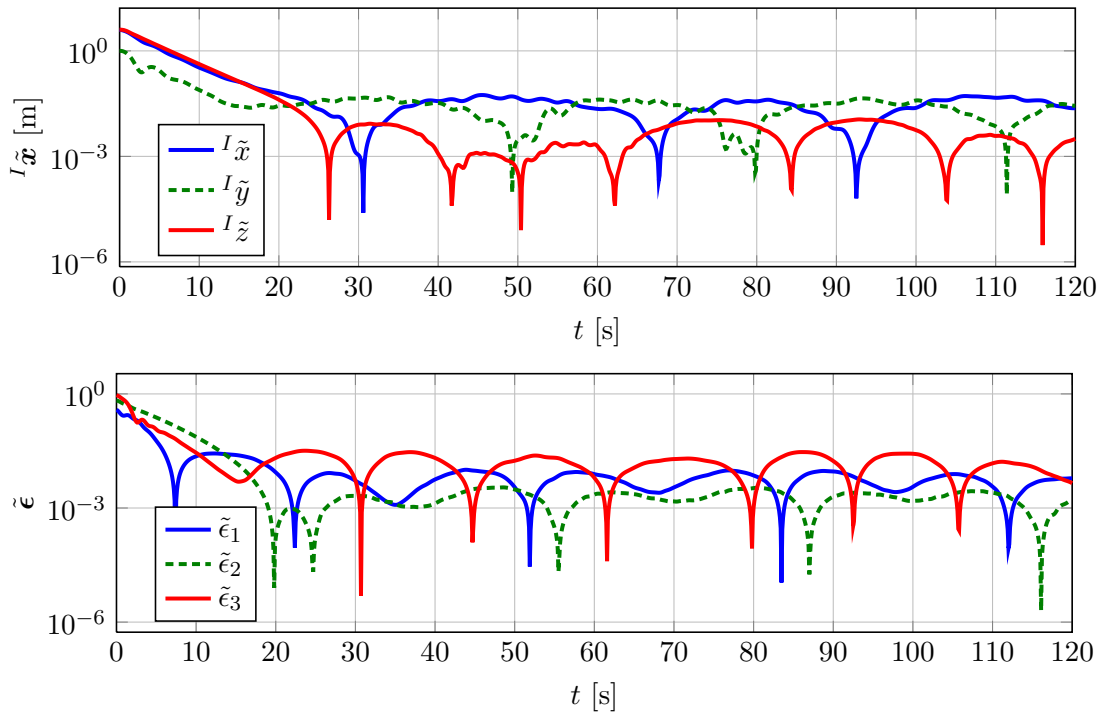
Momenti upravljanja na slici 5.40 ponovno pokazuju veću frekvenciju odziva SMC regulatora u usporedbi s TDC regulatorom, no u ovom slučaju nema saturacije upravljačkih momenata SMC regulatora jer se orijentacija nalazi u definiranom graničnom sloju. Oba regulatora povećavaju moment upravljanja oko  $x$  i  $y$  osi u razdoblju povećanja poremećaja (40.–60. sekunda simulacije), što ukazuje na povećani poremećajni moment u tom razdoblju. Iako su iznosi ovih momenata veoma veliki i malo je vjerojatno da će se takvi javljati u praksi, oni su rezultat relativno velike relativne kutne brzine strujanja i kutne brzine vozila, što zapravo predstavlja ekstremni slučaj vrtloženja morske struje. U praksi se takve situacije rijetko događaju, no ovdje se kutna brzina morske struje koristi za pokazivanje modela poremećaja i robusnosti prikazanih regulatora.

Općenito se može primijetiti da SMC regulator ima dobar odziv za veće frekvencije poremećaja, dok TDC regulator ima dobar odziv na nižim frekvencijama. Razlog njegovih relativno loših performansi u usporedbi s SMC regulatorom je u relativno velikoj frek-

venciji promjene poremećaja na trajektoriji pošto se napadni kut morske struje u odnosu na vozilo neprestano mijenja. Kao što je pokazano u pozicioniranju, TDC dobro estimira niskofrekvencijski poremećaj.

#### 5.4.4 Kombinirani SMC i TDC regulator

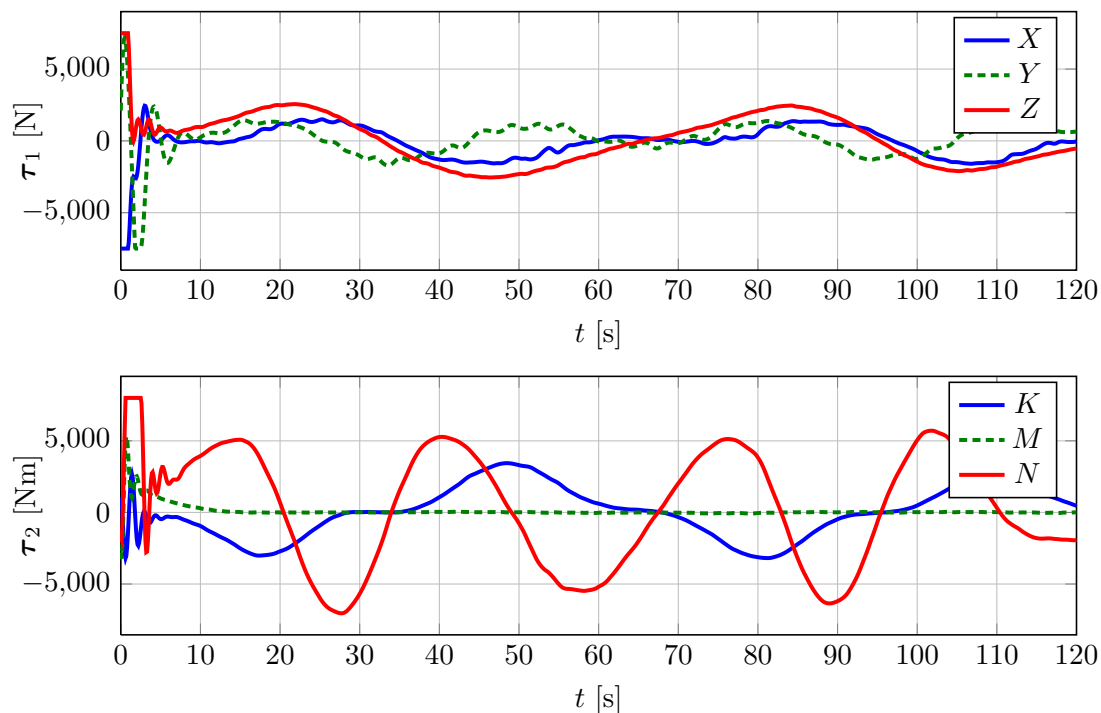
Očekivani rezultat kombiniranja SMC i TDC regulatora je sinergija performansi jednog i drugog regulatora. TDC regulator povećat će znanje o poremećaju i time smanjiti neodređenost koju SMC regulator mora kompenzirati.



Slika 5.41: Pogreške praćenja trajektorije položaja i orijentacije za kombinirani SMC+TDC regulator.

Iz slike 5.41 je vidljivo da su se performanse slijeđenja položaja u slučaju kombinacije robusnih regulatora poboljšale za red veličine u odnosu na SMC, a čak za dva reda veličine za slijeđenje orijentacije. Odziv je brži od željenog jer sinteza parametara PD-regulatora koji određuju brzinu odziva ovisi o procjeni tenzora inercije i pojačanja SMC regulatora. U slučaju korištenja ovakvog regulatora, brzina odziva u odnosu na željenu može čak

poslužiti za heurističku procjenu točnosti zadanog tenzora inercije. Ako je odziv brži od željenog, inerciju smo procijenili, a u suprotnom smo ju precijenili. Dakako, parametre treba odrediti pravilnom identifikacijom, dok ovakva heuristika može poslužiti samo kao prinudna procjena.

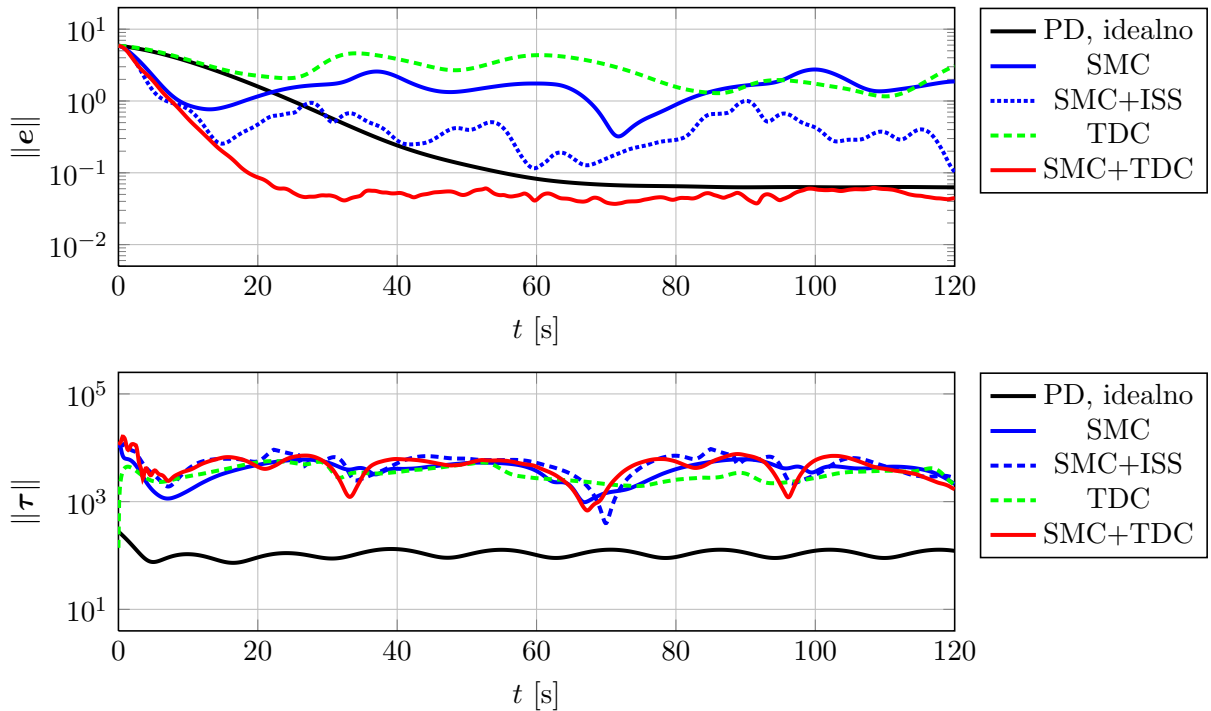


Slika 5.42: Upravljačke sile i momenti praćenja za kombinirani SMC+TDC regulator.

U prvih 5 sekundi simulacije na slici 5.42 vidljivo je istitranje upravljačkih sila dok sustav ne uđe u klizanje u graničnom sloju. Istitranje je rezultat međudjelovanja SMC i TDC regulatora. Uočljiva je periodičnost upravljačkih sila koja proizlazi iz periodičnosti trajektorije i poremećaja. U vremenskom razdoblju povećanja poremećaja može se primijetiti neznatna promjena u amplitudi upravljačkih sila i momenata. Vidljiv je i šum u upravljačkim silama, što je znak da je poremećajna sila dobro estimirana pošto brzina i smjer strujanja sadrže šum s normalnom razdiobom.

## 5.5 Usporedba pogrešaka i trajektorija regulatora

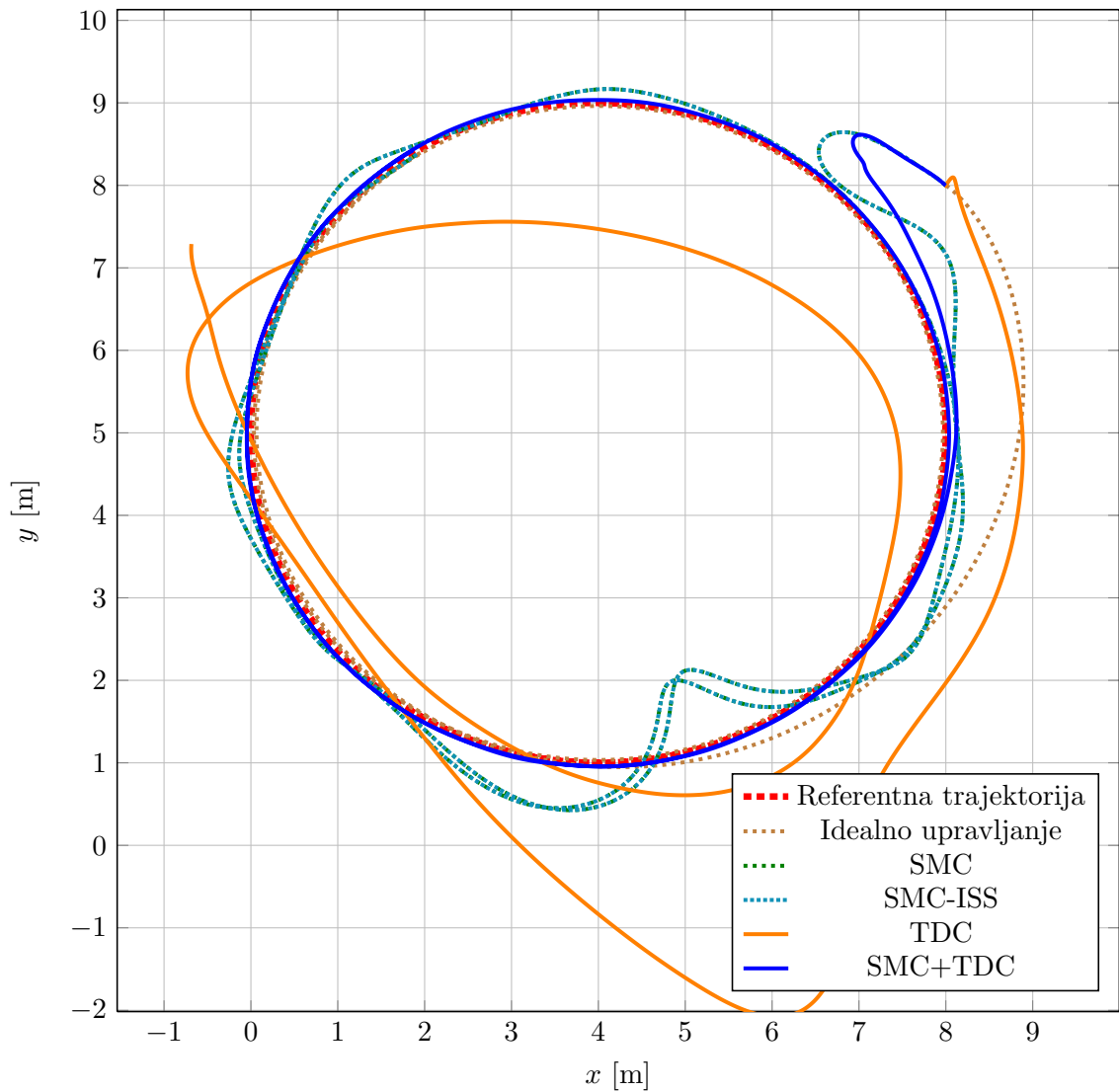
Na slici 5.43 nalazi se usporedba ukupne norme pogreške i upravljačkih sila za sve dosad prikazane rezultate. Norma pogreške uključuje pogreške praćenja položaja i orijentacije, a norma sila uključuje i sile i momente. To nam pruža pregled performansi pojedinih regulatora i mogućnost relativne usporedbe.



Slika 5.43: Usporedba norme pogreške i upravljačkih sila za različite regulatore.

Vidljivo je da PD regulator u idealnim uvjetima, dakle bez poremećajnih sila i sa poznavanjem inercije vozila, asimptotski dolazi u konačnu pogrešku sa željenom dinamikom pogreške. Da se radilo o regulatoru koji uključuje kompletan dinamički model vozila, dakle o regulatoru baziranom na inverznoj dinamici, ova bi greška asimptotski padala do nule. No, pošto su zanemarene nelinearnosti modela, greška je konačna. Iz slike je direktno vidljiv utjecaj korištenja integralne plohe klizanja u SMC regulatoru (SMC+ISS), u usporedbi s SMC regulatorom s PD plohom klizanja (SMC). Korištenje integralne plohe smanjuje ukupnu normu pogreške bez promjene parametara. Jasno je vidljivo i da TDC regulator u zadanim uvjetima ima najlošije performanse. No, kada se SMC regulator

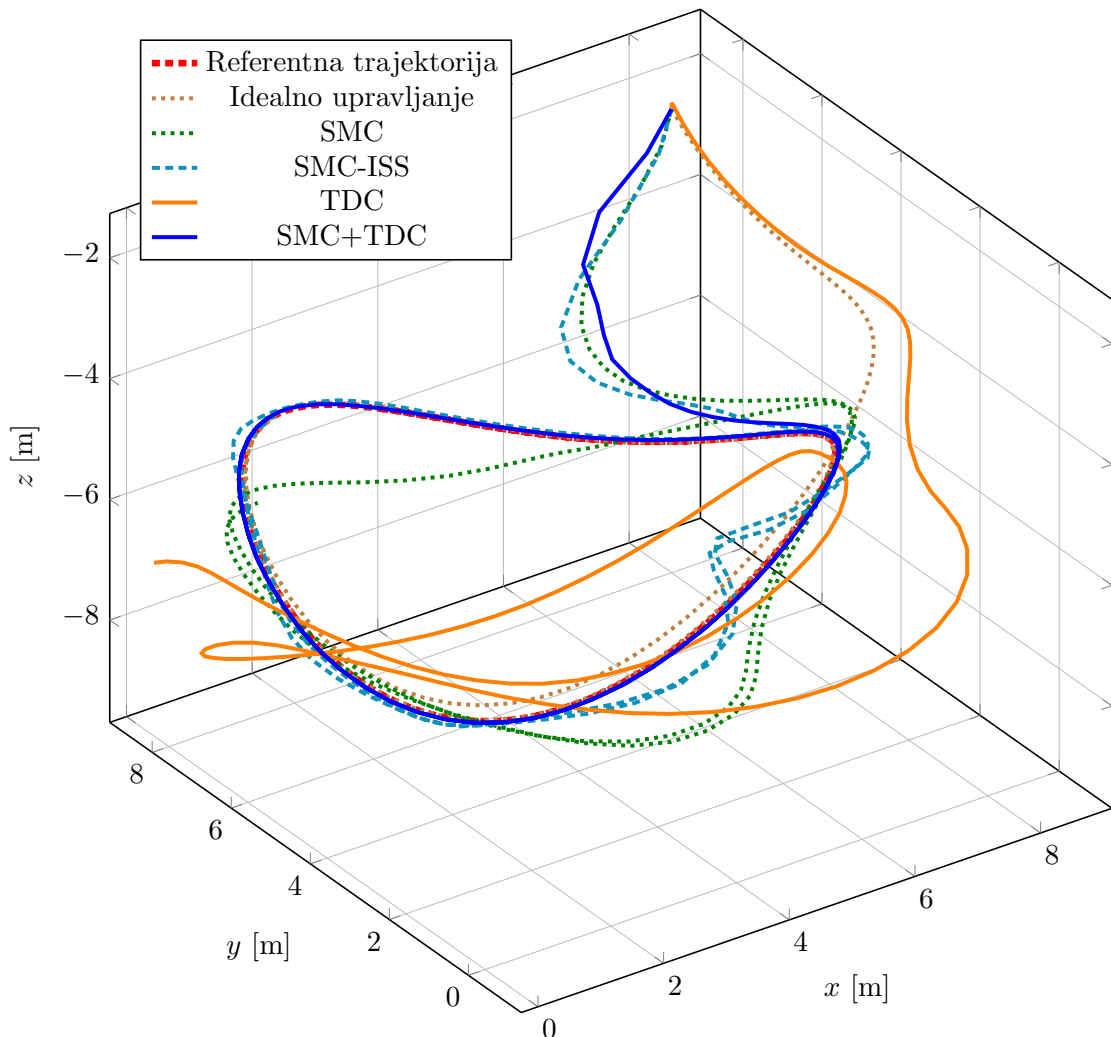
s PD plohom klizanja kombinira s TDC regulatorom, dinamika pogreške se ubrzava, a konačna pogreška manja je od one kada na sustav ne djeluju poremećajne sile. Dakle, ovaj regulator pod utjecajem poremećaja ima bolje performanse od PD-regulatora bez poremećaja. Nije potrebno korištenje integralne plohe klizanja jer TDC regulator po prirodi vrši integraciju upravljačke sile.



Slika 5.44: Trajektorije vozila u horizontalnoj ravnini s različitim robusnim regulatorima.

Uspoređivanjem horizontalnih trajektorija vozila s različitim regulatorima na slici 5.44 jasno se može vidjeti utjecaj morske struje na obične SMC regulatore s graničnim slojem. TDC regulator ne uspijeva pratiti referentnu trajektoriju, dok je u slučaju kombinacije SMC i TDC regulatora slijeđenje gotovo savršeno. Može se uočiti da trajektorija potonjeg

regulatora prolazi s vanjske strane referentne trajektorije, dok u slučaju PD regulacije u idealnim uvjetima ona prolazi s unutarnje strane iste.



Slika 5.45: Prostorne trajektorije vozila s različitim robusnim regulatorima.

Pogled na prostorne trajektorije vozila na slici 5.45 jasnije pokazuje razliku između SMC regulatora s PD i integralnom plohom klizanja, pošto potonji bolje prati visinu. TDC regulator ne uspijeva pratiti ni visinu. Iz priloženih rezultata vidljivo je da kombiniranjem SMC regulatora s PD plohom klizanja i graničnim slojem sa TDC estimatorom poremećaja dobivamo regulator koji pod utjecajem vremenski i prostorno promjenjivog poremećaja, te uz zanemarivanje nelinearnosti modela i 50-postotne pogreške u parametrima tijela uspijeva pratiti trajektoriju bolje od PD regulatora sa poznavanjem parametara sustava i bez utjecaja vanjskih sila.

## Zaključak

---

Zakon upravljanja koji kombinira regulator kliznog stanja i estimator poremećaja s vremenskim pomakom (SMC+TDC regulator), s korištenjem PD plohe klizanja i graničnog sloja, pokazuje iznimno veliku robusnost na poremećaje, pogreške parametara sustava i nemodeliranu dinamiku. Unatoč pokazanoj velikoj robusnosti, nisu izvedeni kriteriji stabilnosti ovog regulatora, koja očigledno ovisi o stabilnosti estimatora poremećaja, a samim time i duljinom vremenskog pomaka. Simulacijski rezultati pokazuju da se isplati istražiti uvjete stabilnosti ovog regulatora zbog njegovih performansi.

Robusnost cjelokupnog sustava ne ovisi samo o regulatoru, već uključuje i otpornost na otkazivanje aktuatora. Prikazan je iterativni algoritam raspodjele upravljačke sile, odnosno alokacije aktuatora, koji u slučaju kvara aktuatora uspješno raspodjeljuje silu na funkcionalne aktuatore. Prikazani algoritam optimira statičko rješenje u kvadratnom smislu, uzimanjem u obzir nelineranosti aktuatora. Pokazuje se da korištenje drugačijih parametrizacija gibanja može poboljšati performanse sustava, kao i njihovu robusnost na poremećaje.

Iako je obrađena robusnost regulatora na otkazivanje aktuatora, u ovom radu nisu obrađene metode otkrivanja kvarova. Sama tematika otkrivanja kvarova je područje za sebe



---

te je izvan opsega ovog rada. Unatoč tomu, u robusnoj regulacijskoj petlji je neophodan element koji otkriva kvarove i bez njega otpornost algoritma raspodjele na kvarove nema smisla. Dakle, u praktičnoj primjeni neophodno je implementirati i rješenje ove problematike. Osim za otkrivanje kvarova aktuatora, slične se metode mogu primijeniti i za otkrivanje kvarova na sensorima.

Regulatori korišteni u ovom radu su regulatori stanja sustava, koji pretpostavljaju da su sva stanja (akceleracije, brzine, položaj i orijentacija) mjereni. U stvarnosti se sva stanja ne mogu mjeriti, no mogu se estimirati, što se najčešće čini primjenom proširenog Kalmanovog filtra, sintezom mjerenja različitih senzora. Uređaji koji uključuju akcelerometre, žiroskope, magnetometre, GPS, te procesor na kojem se vrši obrada podataka i estimacija stanja, mogu se komercijalno kupiti te su performanse koje takvi uređaji nude u velikoj većini primjena i više nego dovoljne.

U radu je korištenjem eksponencijalne reprezentacije krutog gibanja izvedena dinamika vozila pod utjecajem fluida koja je ekvivalentna rezultatima dobivenim Euler-Lagrangeovim i Newtonovim pristupom posebnim razmatranjem translacijske i rotacijske dinamike. U slučaju korištenja eksponencijalne reprezentacije izvod dinamike se veoma pojednostavljuje, a nudi prednost jednostavnog uzimanja u obzir kutnih brzina fluida.

Naposlijetku, regulacija orijentacije Eulerovim parametrima proširena je na slučaj regulacije cjelokupnog gibanja krutog tijela primjenom Euler-Rodriguesove parametrizacije krutog gibanja, odnosno dualnog kvaterniona. U tom slučaju se stabilizacija vrši u parametrima koji su povezani s vijčanim gibanjem, pa i konačno gibanje tijela odgovara takvom gibanju. U ovom radu prikazani su samo simulacijski rezultati kako bi se ilustrirale neke od mogućih prednosti regulacije u ovim parametrima. Rigorozno matematičko dokazivanje i primjena neupitno će biti tema daljnjeg istraživanja.

## A.1 Pretvorba između Eulerovih kuteva i parametara

Parametri su s XYZ konvencijom Eulerovih kuteva povezani preko polovine kuteva  $\phi$ ,  $\theta$  i  $\psi$  izrazima

$$\begin{aligned}
 \eta &= c_2\psi \, c_2\theta \, c_2\phi + s_2\psi \, s_2\theta \, s_2\phi \\
 \epsilon_1 &= c_2\psi \, c_2\theta \, s_2\phi - s_2\psi \, s_2\theta \, c_2\phi \\
 \epsilon_2 &= c_2\psi \, s_2\theta \, c_2\phi + s_2\psi \, c_2\theta \, s_2\phi \\
 \epsilon_3 &= s_2\psi \, c_2\theta \, c_2\phi - c_2\psi \, s_2\theta \, s_2\phi
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

gdje vrijedi  $c_2 \bullet = \cos \frac{\bullet}{2}$  i  $s_2 \bullet = \sin \frac{\bullet}{2}$ .

Eulerovi kutevi mogu se dobiti iz parametara  $(\eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  pomoću elemenata rotacijske

matrice.

$$\begin{aligned}\phi &= \operatorname{atan2}\left(\frac{R_{23}}{R_{33}}\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{2(\epsilon_2\epsilon_3 + \eta\epsilon_1)}{\eta^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2}\right) \\ \theta &= \arcsin(-R_{21}) = \arcsin(-2(\epsilon_1\epsilon_3 - \eta\epsilon_2)) \\ \psi &= \operatorname{atan2}\left(\frac{R_{12}}{R_{11}}\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{2(\epsilon_1\epsilon_2 + \eta\epsilon_3)}{\eta^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_3^2}\right)\end{aligned}\tag{A.2}$$

gdje je korištena četverokvadrantna varijanta arkus tangens funkcije  $\operatorname{atan2}$ . Granice ovako dobivenih Eulerovih kuteva su

$$-2\pi \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$-2\pi \leq \psi \leq 2\pi$$

## A.2 Dodane inercije

Za neka jednostavna geometrijska tijela postoje teorijski dobiveni izrazi za dodane mase. Dodana inercija često se aproksimira kao kombinacija dodanih masa jednostavnih tijela. Ovdje ćemo iz [40] navesti izraze za dodanu masu za izduženi (engl. *prolate*) i spljošteni (engl. *oblate*) elipsoid. Elipsoid je geometrijsko tijelo koje je opisano jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{A.3})$$

gdje su  $a$ ,  $b$  i  $c$  poluosi elipsoida. Za produljeni elipsoid vrijedi  $b = c$  i  $a > b$ , dok za spljošteni vrijedi  $a = b$  i  $a > c$ . Zbog tri ravnine simetrije navedena tijela imaju samo dijagonalne elemente matrice dodane inercije, odnosno

$$\mathbf{M}_A = \text{diag}\{X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, K_{\dot{p}}, M_{\dot{q}}, N_{\dot{r}}\} \quad (\text{A.4})$$

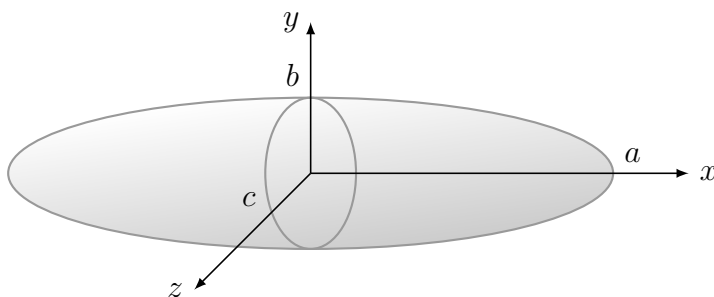
### A.2.1 Izduženi elipsoid

Produljeni elipsoid je osnosimetričan oko  $x$ -osi, te ima poluosi  $a > (b = c)$ . Elementi matrice dodane inercije su

$$X_{\dot{u}} = \frac{4}{3} k_{xx} \pi \rho a b^2 \quad (\text{A.5})$$

$$Y_{\dot{v}} = Z_{\dot{w}} = \frac{4}{3} k_{zz} \pi \rho a b^2 \quad (\text{A.6})$$

$$N_{\dot{r}} = M_{\dot{q}} = \frac{4}{15} k' \pi \rho a b^2 (a^2 + b^2) \quad (\text{A.7})$$



Slika A.1: Geometrija izduženog elipsoida.

gdje su  $k$ -faktori

$$k_{xx} = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0} \quad (\text{A.8})$$

$$k_{zz} = \frac{\beta_0}{2 - \beta_0} \quad (\text{A.9})$$

$$k' = \frac{e^4(\beta_0 - \alpha_0)}{(2 - e^2)[2e^2 - (2 - e^2)(\beta_0 - \alpha_0)]} \quad (\text{A.10})$$

Ekcentričnost oko osi simetrije je

$$e = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \quad (\text{A.11})$$

Koeficijenti  $\alpha_0$  i  $\beta_0$  su

$$\alpha_0 = \frac{2(1 - e^2)}{e^3} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1 + e}{1 - e} - e \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\beta_0 = \frac{1}{e^2} - \frac{1 - e^2}{2e^3} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \quad (\text{A.13})$$

## A.2.2 Spljoštteni elipsoid

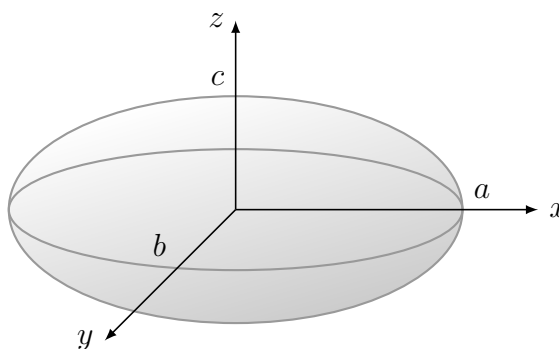
Za spljoštteni elipsoid koji je osnosimetričan oko  $z$  osi, te ima poluosi  $(a = b) > c$ , dodana inercija dobiva se izrazima

$$X_{\dot{u}} = Y_{\dot{v}} = \frac{4}{3} k_{xx} \rho \pi a^2 c \quad (\text{A.14})$$

$$Z_{\dot{w}} = \frac{4}{3} k_{zz} \rho \pi a^2 c \quad (\text{A.15})$$

$$K_{\dot{p}} = M_{\dot{q}} = \frac{4}{15} k' \rho \pi a^2 c (a^2 + c^2) \quad (\text{A.16})$$

$$N_{\dot{r}} = 0 \quad (\text{A.17})$$



Slika A.2: Geometrija spljoštenog elipsoida.

Ekcentričnost presjeka oko osi simetrije je

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \quad (\text{A.18})$$

Koeficijenti dodane inercije su

$$k_{xx} = \frac{\beta_0}{2 - \beta_0} \quad (\text{A.19})$$

$$k_{zz} = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0} \quad (\text{A.20})$$

$$k' = \frac{e^4(\alpha_0 - \beta_0)}{(2 - e^2)[2e^2 - (2 - e^2)(\alpha_0 - \beta_0)]} \quad (\text{A.21})$$

Koeficijenti  $\alpha_0$  i  $\beta_0$  su

$$\alpha_0 = \frac{2}{e^3[e - \sqrt{1 - e^2} \sin^{-1} e]} \quad (\text{A.22})$$

$$\beta_0 = \frac{1}{e^3} \left[ \sqrt{1 - e^2} \arcsin e - e(1 - e^2) \right] \quad (\text{A.23})$$

## A.3 Linearna parametrizacija dinamike krutog tijela

Dinamika krutog tijela može se zapisati kao

$$\mathbf{M}_{RB}\dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{Y}(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\theta} \quad (\text{A.24})$$

gdje je  $\mathbf{Y}(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu})$  regresijska matrica, a  $\boldsymbol{\theta}$  vektor parametara. Poopćeni vektor brzina ima komponente

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

dok poopćeni tenzor inercije ima komponente

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & -m\mathcal{S}(\mathbf{x}) \\ m\mathcal{S}(\mathbf{x}) & \mathbf{I}_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_g = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Vektor parametara može se zapisati kao

$$\boldsymbol{\theta} = [m, mx_g, my_g, mz_g, I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zz}]^T, \quad (\text{A.27})$$

a regresijska matrica kao skup vektora

$$\mathbf{Y}(\dot{\boldsymbol{\nu}}, \boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{m}} & \underline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{y}} & \underline{\mathbf{z}} & \underline{I}_{xx} & \underline{I}_{xy} & \underline{I}_{xz} & \underline{I}_{yy} & \underline{I}_{yz} & \underline{I}_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

gdje je iskorištena simetrija matrica inercije  $\mathbf{I}_B$ , koja ima 6 slobodnih parametara. Vektor regresijske matrice povezan s parametrom mase je

$$\underline{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} - pw + ru \\ \dot{w} + pv - qu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Vektori stanja povezani s parametrima statičke inercije je

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -(q^2 + r^2) \\ \dot{r} + pq \\ pr - \dot{q} \\ 0 \\ qu - pv - \dot{w} \\ \dot{v} - pw + ru \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} pq - \dot{r} \\ -(p^2 + r^2) \\ \dot{p} + qr \\ \dot{w} + pv - qu \\ 0 \\ qw - rv - \dot{u} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{q} + pr \\ qr - \dot{p} \\ -(p^2 + q^2) \\ pw - ru - \dot{v} \\ \dot{u} + qw - rv \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Vektori stanja povezani s rotacijskom inercijom su

$$\underline{\mathbf{I}}_{xx} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{p} \\ pr \\ -pq \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{I}}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ pr - \dot{q} \\ -(\dot{p} + qr) \\ q^2 - p^2 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{I}}_{xz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(\dot{r} + pq) \\ p^2 - r^2 \\ qr - \dot{p} \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\underline{\mathbf{I}}_{yy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -qr \\ \dot{q} \\ pq \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{I}}_{yz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r^2 - q^2 \\ pq - \dot{r} \\ -(\dot{q} + pr) \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{I}}_{zz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ qr \\ -pr \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$



## A.4 Identifikacija sustava pomoću linearne parametrizacije

Linearno parametrizirani sustav može se zapisati kao umnožak matrice stanja i vektora parametara

$$\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.33})$$

gdje je  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{6 \times N}$  regresijska matrica koja sadrži stanja sustava,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^N$  je vektor parametara, a  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$  je vektor vanjskih sila i momenata.

Pogreška identifikacije može se prema jednadžbi (A.33) definirati kao

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.34})$$

Cilj identifikacije sustava je minimirati vektor pogreške  $\mathbf{e}$ , pa se funkcija cilja može napisati kao

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top \mathbf{e} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{e} \mathbf{e}^\top \} \quad (\text{A.35})$$

Raspisivanjem traga matrice, izraz postaje

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\tau}) (\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\tau})^\top \} \\ U &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta})(\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta})^\top - (\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau}^\top - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta})^\top + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^\top \} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Pošto vrijede jednakosti

$$\text{Tr} \{ (\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau}^\top \} = \text{Tr} \{ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta})^\top \},$$

$$(\mathbf{Y}\boldsymbol{\theta})^\top = \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Y}^\top,$$

funkcija cilja se može napisati kao

$$U = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{Y}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Y}^\top \} - \text{Tr} \{ \mathbf{Y}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}^\top \} + \text{Tr} \{ \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^\top \}, \quad (\text{A.37})$$

a njena je derivacija po vektoru parametara

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{Tr} \{ \mathbf{Y}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Y}^\top \} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{Tr} \{ \mathbf{Y}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\tau}^\top \} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{Tr} \{ \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^\top \}. \quad (\text{A.38})$$

Derivacije prva dva elemena su

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{Tr} \{ \mathbf{Y} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{Y}^\top \} = 2 \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} \boldsymbol{\theta} \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{Tr} \{ \mathbf{Y} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\tau}^\top \} = \mathbf{Y}^\top \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.40})$$

Pošto  $\boldsymbol{\tau}$  nije funkcija parametara  $\boldsymbol{\theta}$ , očito vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \text{Tr} \{ \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}^\top \} = 0, \quad (\text{A.41})$$

te je ukupna derivacija funkcije cilja

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{Y}^\top \boldsymbol{\tau} \\ &= \mathbf{Y}^\top (\mathbf{Y} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\tau}) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Uzimajući u obzir vektor pogreške  $\mathbf{e}$  iz jednadžbe (A.34), dobivamo

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{e}. \quad (\text{A.43})$$

Za identifikaciju se mogu koristiti optimizacijski algoritmi koji zahtijevaju derivaciju funkcije cilja. Promjena parametara je iterativna prema

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{p}_k, \quad (\text{A.44})$$

gdje je  $k$  broj iteracije. Najjednostavniji, gradijentni algoritam, odnosno algoritam najstrmijeg pada definira smjer promjene kao

$$\mathbf{p} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}. \quad (\text{A.45})$$

Metode višeg reda obično zahtijevaju drugu derivaciju funkcije cilja ili njenu procjenu. Prema (A.42) trivijalno je dobiti drugu derivaciju funkcije cilja (tzv. Hessiana) kao

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} = \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y}, \quad (\text{A.46})$$

koja se može koristiti za Newtonovu metodu optimizacije [41]. Newtonova je metoda drugog reda, a smjer promjene parametara je

$$\mathbf{p} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)^{-1} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad (\text{A.47})$$

$$= -(\mathbf{Y}^\top \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^\top \mathbf{e}, \quad (\text{A.48})$$

$$= -\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Y}^{-\top} \mathbf{Y}^\top \mathbf{e}, \quad (\text{A.49})$$

$$= -\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{e}, \quad (\text{A.50})$$

pri čemu matric  $\mathbf{Y}$  nije kvadratna pa se treba koristiti njen pseudo-inverz, odnosno

$$\mathbf{p} = -\mathbf{Y}^\dagger \mathbf{e}. \quad (\text{A.51})$$

### Primjena na algoritam raspodjele sile upravljanja

Zbog identične forme pogreške i funkcije cilja, dobiveni gradijent funkcije cilja može se primjeniti na algoritam raspodjele sile upravljanja tako da se uzme

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \mathbf{u}_e, \quad \mathbf{Y} \equiv \mathbf{B}_e \mathbf{W}_e, \quad (\text{A.52})$$

te se prema (A.42) dobiva izraz

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{W}_e^\top \mathbf{B}_e^\top \mathbf{e}. \quad (\text{A.53})$$

# B

## Izvorni kôd

---

### B.1 Simulacijski model

Diferencijalna jednačba sustava definirana je u funkciji `ode_system.m`, dok su parametri simuliranog sustava definirani u `par_sys.m`. Numerički integrator implementiran je u `sim6dof.m`, dok funkcija `simpar.m` stvara strukturu sa parametrima simulacije koja je potrebna za integrator. Regulatori su definirani u posebnim funkcijama kako bi njihova implementacija u simulaciji bila što bliža implementaciji na realnom sustavu, gdje regulator nema direktnu interakciju sa sustavom. Kao aktuatori mogu se koristiti tri funkcije. Idealne upravljačke sile bez kašnjenja i alokacije implementirane su u `f_prop_pure.m`, a sile s vremenskim kašnjenjem prvog reda u `f_prop_dynamic.m`. Konfiguracija aktuatora prikazana u primjeru algoritma raspodjele upravljačke sile, s dinamikom aktuatora prvog reda, implementirana je u `f_prop_azimuthing.m`. Ona poziva algoritam raspodjele `allocate.m`, prikazan pod pomoćnim funkcijama.

#### `ode_system.m`

```
1 % Kinematika i dinamika krutog tijela s poremećajnim silama.  
2 function [dx] = ode_system(t, x, u, params)
```

```

3
4 dx = zeros(params.N_states,1);
5
6 % Kinematika položaja
7 dx(1:3) = params.Rbi' * x(8:10);
8
9 % Kinematika orijentacije – diferencijalna jednadzba Eulerovih parametara
10 dx(4:7) = .5 * [ ...
11     -x(5), -x(6), -x(7);
12     x(4), -x(7), x(6);
13     x(7), x(4), -x(5);
14     -x(6), x(5), x(4)] * x(11:13);
15
16 % Vanjske sile (aktuatori)
17 %=====
18 Fs = zeros(6,1);
19 j = 20;
20 if ~isempty(params.forces)
21     lf = length(params.forces);
22     for i = 1:lf
23         sy = length(params.forces{i}{3});
24
25         % Stanja vanjske sile
26         if sy > 0
27             y = x(j:j+sy-1);
28         else
29             y = [];
30         end
31
32         % Evaluacija vanjske sile
33         [F dy] = params.forces{i}{1}(t, x, y, u, ...
34             params.forces{i}{2}, params);
35
36         % Zbrajanje vanjskih sila
37         Fs = Fs + F;
38
39         % Dodavanje diferencijalne jednadzbe vanjske sile u
40         % integrator.
41         if sy > 0
42             dx(j:j+sy-1) = dy;
43             j = j + sy;
44         end
45     end
46 end
47
48 % Sila uzgona
49 %=====

```

```

50 fg = params.Rbi*[0; 0; params.m*params.g];
51 fb = params.Rbi*[0; 0; -params.B];
52
53 Fb = zeros(6,1);
54 Fb(1:3) = fg + fb;
55 Fb(4:6) = skew(params.xg)*fg - skew(params.xb)*fb;
56
57 % Sile fluida
58 %=====
59 vw = params.disturbance(1:6);
60 vw(1:3) = params.Rbi*vw(1:3);
61 vw_dot = params.disturbance(7:12);
62 vw_dot(1:3) = params.Rbi*vw_dot(1:3);
63
64 Fw = (params.Ma + params.Md) * vw_dot - skew_se(params.Md*vw)*vw - ...
65         skew_se(params.Ma*(x(8:13)-vw))*(x(8:13)-vw);
66
67 % Zbroj poremećajnih sila
68 F = Fw - params.DL*x(8:13) - params.DQ*abs(x(8:13)).*x(8:13);
69
70 Fs = Fs - Fb + F;
71
72 % Dinamika krutog tijela
73 %=====
74 dx(8:13) = (params.M + params.Ma) \ (Fs + skew_se(params.M*x(8:13))*x(8:13));

```

### sim6dof.m

```

1 % SIM6DOF.M
2 %
3 % Simulacija dinamike krutog tijela u 6 stupnjeva slobode koristeći RK4,
4 % semi-implicitnu i eksplicitnu Eulerovu integraciju.
5
6 % NAPOMENA: parametar 'sim' stvara se u simpar.m
7
8 function [t states euler uu ctl_states] = sim6dof(sim)
9
10 % Metoda numericke integracije
11 IM_RK4 = 0; IM_EULER = 1; IM_IMP_EULER = 2; IM_ADAMS = 3;
12 if strcmpi(sim.int_method, 'rk4')
13     int_method = IM_RK4;
14 elseif strcmpi(sim.int_method, 'euler')
15     int_method = IM_EULER;
16 elseif strcmpi(sim.int_method, 'imp-euler')
17     int_method = IM_IMP_EULER;
18 end
19

```

```

20 system = sim.system;
21 tspan = sim.tspan;
22
23 % Vremenski vektor
24 t = sim.tspan(1):sim.dT:sim.tspan(2);
25 Nt = length(t);
26
27 % Prebrojavanje i inicijalizacija vanjskih sila
28 N_states = length(sim.x0) + 6;
29 x = [sim.x0; zeros(6,1)];
30 for i = 1:length(sim.sys_params.forces)
31     fext = sim.sys_params.forces{i};
32
33     % Assume that the size of initial states is equal to the number of
34     % states (no error checking)
35     if ~isempty(fext{3})
36         % Initial states
37         x(N_states+1:N_states+length(fext{3})) = fext{3};
38
39         % Increase number of states
40         N_states = N_states + length(fext{3});
41     end
42 end
43
44 % Broj stanja simuliranog sustava
45 sim.sys_params.N_states = N_states;
46 xdot = zeros(N_states, 1);
47
48 % Inicijalizacija simulacijskih rezultata
49 states = zeros(N_states, Nt);
50 uu = zeros(sim.sys_params.Nu, Nt);
51 ctl_states = cell(Nt,1);
52
53 % Inicijalizacija unutarnjeg stanja regulatora
54 % ** Inicijalizaciju pokrece prazan vektor stanja!
55 [u ctl_state] = sim.ctrl.controller(t(1), states(:,1), states(:,1), sim.ctrl.params, []);
56
57 % Dodatni parametri za ubrzavanje simulacije
58 sim.sys_params.Rbi = zeros(3);
59
60 % Petlja numericke integracije
61 tic
62 for i = 1:Nt
63     % Interpolacija referentne trajektorije
64     xd = interp1(sim.t_xd, sim.xd, t(i))';
65
66     % Interpolacija vanjskog poremećaja

```

```

67     sim.sys_params.disturbance = interp1(sim.t_w, sim.w', t(i))';
68
69     % Trenutna rotacijska matrica
70     sim.sys_params.Rbi = R_quat(x(4:7));
71
72     % Akceleracija u *proslom* vremenskom koraku
73     x(14:19) = xdot(8:13);
74
75     % Racunanje upravljackih sila ukoliko je doslo do otipkavanja.
76     if (mod(i, sim.ctrl.tick) == 0) || (i==1)
77         % Regulator
78         [u ctl_state_n] = sim.ctrl.controller(t(i), x, xd, ...
79             sim.ctrl.params, ctl_state);
80
81         % Status regulatora (~0=uključen / 0=isključen)
82         ctl_status = round(interp1(sim.ctrl.status_t, ...
83             sim.ctrl.status', t(i)));
84         if (ctl_status == 0)
85             u = 0 * u;
86         end
87     end
88
89     % Diferencijalna jednadzba sustava
90     [xdot] = sim.system(t(i), x, u, sim.sys_params);
91
92     % Aproksimacija tangenti za razlicite metode numericke integracije.
93     % – Runge–Kutta treba 4 tocke;
94     % – Semi–implicitni Euler treba 2 tocke;
95     % – Euler treba 1 tocku.
96     % =====
97     k1 = xdot;
98
99     % Tocke za semi–implicitni Euler
100    if (int_method == IM_IMP_EULER)
101        % Point 4
102        x4 = x + sim.dT * k1;
103        k4 = sim.system(t(i) + sim.dT, x4, u, sim.sys_params);
104    end
105
106    % Tocke za Runge–Kutta 4
107    if int_method == IM_RK4
108        % Point 2
109        x2 = x + .5 * sim.dT * k1;
110        k2 = sim.system(t(i) + .5*sim.dT, x2, u, sim.sys_params);
111
112        % Point 3
113        x3 = x + .5 * sim.dT * k2;

```



```

114         k3 = sim.system(t(i) + .5*sim.dT, x3, u, sim.sys_params);
115
116         % Point 4
117         x4 = x + sim.dT * k3;
118         k4 = sim.system(t(i) + sim.dT, x4, u, sim.sys_params);
119     end
120
121     % Azuriranje stanja sustava
122     switch int_method
123     case IM_RK4,
124         x = x + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*sim.dT/6;
125     case IM_IMP_EULER,
126         x = x + sim.dT * k4;
127     case IM_EULER,
128         x = x + sim.dT * k1;
129     end
130
131     % Normalizacija Eulerovih parametara
132     x(4:7) = x(4:7)/norm(x(4:7));
133
134     % Spremanje stanja sustava i regulatora
135     states(:, i) = x;
136     uu(:, i) = u;
137     ctl_states{i,1} = ctl_state_n;
138
139     % Azuriranje unutarnjeg stanja regulatora
140     ctl_state = ctl_state_n;
141 end
142 toc
143
144 euler = quat2euler(states(4:7,:));

```

### par\_sys.m

```

1 % Parametri simuliranog vozila
2 function p = par_sys
3
4 % Inercijski parametri
5 %=====
6 p.m      = 2268;                % [kg] Masa vozila
7 p.g      = 9.80665;            % [m/s^2] Ubrzanje sile teze
8 p.xg     = [0; 0; 0];          % [m] Položaj observera (staticka inercija)
9 p.Jb     = [ 1937, 0, 0; 0, 2883, 0; 0, 0, 2457]; % [kg m^2] Tenzor inercije
10
11 % Steinerov teorem
12 p.Jb = p.Jb + p.m*p.xg*p.xg';
13

```

```

14 % Poopceni tenzor inercije
15 p.M = [      p.m*eye(3),      -p.m*skew(p.xg);
16           p.m*skew(p.xg), p.Jb];
17
18 % Prigusenje
19 p.DL = diag([725, 1240, 825, 3000, 3000, 1804]);
20 p.DQ = diag([1000, 525, 400, 100, 100, 72]);
21
22 % Tenzori dodane inercije i inercije istisnutog fluida
23 p.Ma = -diag([-4380, -9518, -4268, -5000, -5000, -5000]);
24 p.Md = p.M/p.m*1000;
25
26 % Vanjske sile
27 %=====
28 p.Nu   = 6;                % Broj upravljackih varijabli (6 sile)
29 p.B    = 1*p.m*p.g;       % [N] Sila uzgona (neutralna plovnost)
30 p.xb   = [0;0;-2];        % [m] Hvatiste sile uzgona
31
32 % Parametri aktuatora sa zakretanjem
33 %=====
34 prop.R      = 6;          % [m] Radius motora
35 prop.Tmax   = 3200;      % [N] Maksimalni potisak jednog propelera
36 prop.alim   = 150*pi/180*[-1;1]; % [rad] Minimalni i maksimalni kut zakreta
37 prop.N      = 30;        % Broj iteracija alokacijskog algoritma
38 prop.Tm     = .3;        % [s] Vremenska konstanta propelera
39 prop.Ta     = .3;        % [s] Vremenska konstanta zakretanja
40
41 % Prosirena konfiguracijska matrica
42 prop.Be = [      0,0,-1,0,0,0,1,0;
43              1,0,0,0,-1,0,0,0;
44              0,-1,0,-1,0,-1,0,-1;
45              0,0,0,-prop.R,0,0,0,prop.R;
46              0,prop.R,0,0,0,-prop.R,0,0;
47              prop.R,0,prop.R,0,prop.R,0,prop.R,0];
48
49 % Pseudo-inverz prosirene konfiguracijske matrice
50 prop.Binv = [      0, 1/2,  0,  0,  0,  0, 1/(4*prop.R);
51              0,  0, -1/4,  0,  1/(2*prop.R),  0;
52             -1/2,  0,  0,  0,  0,  0, 1/(4*prop.R);
53              0,  0, -1/4, -1/(2*prop.R),  0,  0;
54              0, -1/2,  0,  0,  0,  0, 1/(4*prop.R);
55              0,  0, -1/4,  0, -1/(2*prop.R),  0;
56              1/2,  0,  0,  0,  0,  0, 1/(4*prop.R);
57              0,  0, -1/4,  1/(2*prop.R),  0,  0];
58
59 prop.We = diag([1 1 1 1 1 1 1 1]); % Prosirena tezinska matrica
60

```

```

61 % Pogonske sile
62 %     force m-funkcija ,      parametri ,      pocetno stanje
63 p.forces = { ...
64     { @f_prop_pure ,          [] ,          [] } ,
65     % { @f_prop_dynamic ,     [] ,          zeros(6,1) } ,
66     % { @f_prop_azimuthing , prop ,          zeros(8,1) } ,
67 };

```

### simpar.m

```

1  % Parametri simulacije
2  sim.tspan = [0 120];           % [s] Vrijeme simulacije
3  sim.dT = .1;                  % [s] Vremenski korak
4
5  % Parametri simuliranog sustava
6  sim.system = @ode_system;     % Diferencijalna jednadzba sustava
7  sim.sys_params = par_sys;     % Parametri sustava
8
9  % Parametri regulatora
10 sim.ctrl.controller = @ctrl_quat; % Funkcija regulatora
11 sim.ctrl.params = par_ctrl;   % Parametri regulatora
12
13 % Status regulatora kroz simulaciju.
14 % Ovako je moguće u nekom trenutku isključiti regulator.
15 sim.ctrl.status_t = [0 sim.tspan(2)]; % Interpolacijska vremena
16 sim.ctrl.status = [1 1];      % Regulator uključen(1)/isključen(0)
17
18 % Diskretizacija regulatora svakih 'tick' koraka simulacije.
19 sim.ctrl.tick = 1;
20
21 [sim.t_xd sim.xd] = ref_sin(sim.tspan); % Referentna trajektorija
22 [sim.t_w sim.w] = wave_direction(sim.tspan); % Poremecaj
23
24 % Pocetna orijentacija iz Eulerovih kuteva.
25 % Skretanje , posrtanje , valjanje.
26 q0 = angle2quat(deg2rad(60), deg2rad(45), deg2rad(0))';
27 %q0 = angle2quat(deg2rad(0), deg2rad(45), deg2rad(5))';
28 %q0 = angle2quat(deg2rad(0), deg2rad(-45), deg2rad(0))';
29 Rbi = R_quat(q0);
30
31 % Pocetna brzina
32 v0 = Rbi*[0;0;0];
33
34 % Pocetni uvjeti
35 sim.x0 = [      8; 8; 2;           % [m] Polozaj u inercijskom k.s.
36           q0;           % [-] Orijentacija – Eulerovi parametri
37           v0;           % [m/s] Translacijske brzine

```

```

38         0; 0; 0];           % [rad/s] Kutne brzine
39
40 % Metoda integracije
41 %sim.int_method = 'rk4';           % Runge–Kutta 4. reda
42 %sim.int_method = 'euler';        % Euler 1. reda
43 sim.int_method = 'imp_euler';      % Semi-implicitni Euler 2. reda

```

### f\_prop\_pure.m

```

1 % F_PROP_PURE savrseno ostvarene upravljacke sile.
2 function [F dy] = f_prop_pure(t, x, y, u, params, sys)
3
4 F = u;
5 F(4:6) = F(4:6) + skew(sys.xg)*u(1:3);
6 dy = [];

```

### f\_prop\_dynamic.m

```

1 % F_PROP_DYNAMIC dinamika aktuatora prvog reda.
2 function [F dy] = f_prop_dynamic(t, x, y, u, params, sys)
3
4 F = y;
5 F(4:6) = F(4:6) + skew(sys.xg)*F(1:3);
6 dy = (1/.4)*(u - y);

```

### f\_prop\_azimuthing.m

```

1 % Dinamika zakretnih propelera.
2 function [F dy] = f_prop_azimuthing(t, x, y, u, p, sys)
3
4 % Prosireni vektor upravljackih sila
5 % 1–4 = potisak
6 % 5–8 = kut zakreta
7 ue = [ y(1)*sin(y(5));
8         y(1)*cos(y(5));
9         y(2)*sin(y(6));
10        y(2)*cos(y(6));
11        y(3)*sin(y(7));
12        y(3)*cos(y(7));
13        y(4)*sin(y(8));
14        y(4)*cos(y(8))];
15
16 % Alokacijski algoritam
17 % U ovom slucaju rjesenje ce se resetirati u svakoj iteraciji.
18 [T, a] = allocate(u, zeros(8,1), p.Be, p.Binv, p.We, p.N, p.Tmax, p.alim);
19
20 % U ovom slucaju rjesenje ce se nastaviti iz prosle iteracije.

```

```

21 % [T, a] = allocate(u, ue, p.Be, p.Binv, p.We, p.N, p.Tmax, p.alim);
22
23 % Diferencijalna jednadzba
24 dy = [ (1/p.Tm)*(T - y(1:4));
25         (1/p.Ta)*(a - y(5:8))];
26
27 % Ostvarene upravljacke sile
28 F = p.Be*ue;

```

## B.2 Regulatori

Parametri regulatora su zajednički za sve regulatore, i definirani su u `par_ctrl.m`. Regulator u inercijskom koordinatnom sustavu s Eulerovim kutevima implementiran je u `ctrl_euler.m`. Regulator koji u povratnoj vezi orijentacije koristi Eulerove parametre implementiran je u `ctrl_quat.m`. Naposljetku, regulator koji koristi Euler-Rodriguesovu parametrizaciju gibanja implementiran je u `ctrl_dual.m`.

### par\_ctrl.m

```

1 function p = par_ctrl
2
3 p.Kv = .25*eye(6); % Dvostruka svojstvena vrijednost
4 p.Ki = 0*eye(6); % Pojacanje integralne plohe klizanja
5 p.sat = 5*[1500; 1500; 1500; 1600; 1600; 1600]; % Zasicenje upravljacke sile
6 p.Ts = .1; % [s] Vrijeme uzorkovanja regulatora
7
8 p.M = .5*diag([2268, 2268, 2268, 1937, 2883, 2457]); % Inercija vozila
9
10 p.K = diag([ 3 3 6 6 6 6]); % Pojacanje SMC-a
11 p.epsilon = [1; 1; .5; .5; .5; .5]; % Sirina granicnog sloja
12
13 % Namjestanje parametara regulatora s obzirom na zeljeni odziv.
14 % Pri racunanju pojacanja potrebno je uzeti u obzir pojacanje granicnog sloja u
15 % sliding modu.
16 p.Kd = p.Kv - p.M\(p.K.*diag(1./p.epsilon));
17 p.Kp = (.5*p.Kv).^2 - p.M\(p.K*p.Kd.*diag(1./p.epsilon));

```

### ctrl\_euler.m

```

1 % Regulacija u inercijskom koordinatnom sustavu primjenom Eulerovih kuteva.
2 function [u state] = ctrl_euler(t, x, xd, p, state)

```

```

3
4 % State initialization
5 if isempty(state)
6     state.u1 = zeros(6,1);
7     state.z = zeros(6,1);
8     state.err = zeros(7,1);
9     u = zeros(6,1);
10    return
11 end
12
13 % Kinematika pogreske
14 % =====
15 % Rotacijska matrica
16 Rbi= L_quat(x(4:7));
17
18 % Eulerovi kutevi
19 eu = quat2euler(x(4:7));           % Trenutni
20 eud = quat2euler(xd(4:7));        % Referentni
21 eue = eu - eud;                   % Pogreska
22
23 % Transformacijske matrice Eulerovih kuteva
24 J2 = [ 1, 0, -sin(eu(2));
25        0, cos(eu(1)), cos(eu(2))*sin(eu(1));
26        0, -sin(eu(1)), cos(eu(2))*cos(eu(1))];
27
28 J2inv = [1, sin(eu(1))*tan(eu(2)), cos(eu(1))*tan(eu(2));
29          0, cos(eu(1)), -sin(eu(1));
30          0, sin(eu(1))/cos(eu(2)), cos(eu(1))/cos(eu(2))];
31
32 % Pogreska konfiguracije
33 e = [ x(1:3)-xd(1:3);
34       eue];
35
36 % Pogreska brzina
37 edot = [ Rbi'*x(8:10) - xd(8:10);
38          J2inv'*(x(11:13) - xd(11:13))];
39
40 % Regulator
41 % =====
42 % Kinematska transformacijska matrica
43 J = [ Rbi', zeros(3,3); zeros(3,3), J2];
44
45 % Ploha klizanja
46 s0 = edot + p.Kd*e;
47 s = s0 + p.Kp*state.z;
48 dz = s0;
49

```

```

50 % Granicni sloj plohe klizanja
51 sat = (s<p.epsilon).*(s./p.epsilon) + (s>=p.epsilon).*sign(s);
52
53 % TDC estimacija poremećaja
54 h_est = state.u1 - p.M*x(14:19);
55
56 % Robusni regulator
57 u = h_est - p.M * J' * (-xd(14:19) + p.Kp*e + p.Kd*edot + p.K*sat);
58
59 % Zasicenje upravljackih sila
60 u = (abs(u)>=p.sat).*sign(u).*p.sat + (abs(u)<p.sat).*u;
61
62 % Promjena unutarnjih stanja regulatora
63 state.u1 = 1.0*u + .0*state.u1;          % Filtriranje upravljacke sile
64 state.z = state.z + p.Ts * dz;
65 state.err = [e; edot];

```

### ctrl\_quat.m

```

1 % Regulacija u inercijskom koordinatnom sustavu primjenom Eulerovih parametara.
2 function [u state] = ctrl_quat(t, x, xd, p, state)
3
4 % Inicijalizacija unutarnjih stanja regulatora
5 if isempty(state)
6     state.u1 = zeros(6,1);
7     state.z = zeros(6,1);
8     state.err = zeros(12,1);
9     u = zeros(6,1);
10    return
11 end
12
13 % Kinematika pogreske
14 % =====
15 q = x(4:7);
16 qd = xd(4:7);
17
18 % Pogreska orijentacije u Eulerovim parametrima
19 qe = [ qd(1), qd(2:4)'; -qd(2:4), qd(1)*eye(3) - skew(qd(2:4))] * q;
20
21 % Pogreska konfiguracije
22 e = [ x(1:3)-xd(1:3);
23       2*sign(qe(1))*qe(2:4)];
24
25 % Pogreska brzine
26 edot = [ R_quat(x(4:7))'*x(8:10) - xd(8:10);
27          x(11:13) - xd(11:13)];
28

```

```

29 % Regulator
30 % =====
31 % Kinematska transformacijska matrica
32 J = [ R_quat(x(4:7)), zeros(3,3); zeros(3,3), eye(3)];
33
34 % Ploha klizanja
35 s0 = edot + p.Kd*e;
36 s = s0 + p.Ki*state.z;
37 dz = s0;
38
39 % Granicni sloj plohe klizanja
40 sat = (s<p.epsilon).*(s./p.epsilon) + (s>=p.epsilon).*sign(s);
41
42 % TDC estimacija poremećaja
43 h_est = state.u1 - p.M*x(14:19);
44
45 % Robusni regulator
46 u = h_est - p.M * J * (-xd(14:19) + p.Kp*e + p.Kd*edot + p.K*sat);
47
48 % Zasicenje upravljackih sile
49 u = (abs(u)>=p.sat).*sign(u).*p.sat + (abs(u)<p.sat).*u;
50
51 % Promjena unutarnjih stanja regulatora
52 state.u1 = 1.0*u + .0*state.u1;          % Filtriranje upravljacke sile
53 state.z = state.z + p.Ts * dz;
54 state.err = [e; edot];

```

### ctrl\_dual.m

```

1 % Regulacija primjenom Euler-Rodriguesove parametrizacije gibanja.
2 function [u state] = ctrl_dual(t, x, xd, p, state)
3
4 % Inicijalizacija unutarnjih stanja regulatora
5 if isempty(state)
6     state.u1 = zeros(6,1);
7     state.z = zeros(6,1);
8     state.err = zeros(12,1);
9     u = zeros(6,1);
10    return
11 end
12
13 % Kinematika pogreske
14 % =====
15 % Trenutna konfiguracija u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji
16 q = x(4:7);
17 f = .5*[0 , -x(1:3)'];    x(1:3), skew(x(1:3))] * x(4:7);
18

```



```

19 % Referentna konfiguracija u Euler-Rodriguesovoj parametrizaciji
20 qd = xd(4:7);
21 fd = .5*[0 , -xd(1:3)'; xd(1:3), skew(xd(1:3))] * xd(4:7);
22
23 % Pogreska konfiguracije ukoliko se koristi algebra grupe.
24 %fe = [ qd(1), qd(2:4)'; -qd(2:4), qd(1)*eye(3) - skew(qd(2:4))] * f + ...
25 % [ fd(1), fd(2:4)'; -fd(2:4), fd(1)*eye(3) - skew(fd(2:4))] * q;
26 %qe = [          qd(1), qd(2:4)'; -qd(2:4), qd(1)*eye(3) - skew(qd(2:4))] * q;
27 %
28 % Pogreska položaja ukoliko se koristi algebra grupe
29 %te = 2*(qe(1)*fe(2:4) - fe(1)*qe(2:4) - skew(qe(2:4))*fe(2:4));
30
31 % Trenutna i referentna konfiguracija u obliku dualnog kvaterniona
32 g = [f;q];
33 gd = [fd;qd];
34
35 % Pogreska Euler-Rodriguesovih parametara.
36 % Sljedeća tri izraza daju identične rezultate.
37 e = 2*quat_Udi(gd)*g;
38 %e = -2*quat_Udi(g)*gd;
39 %e = [fe(2:4); sign(qe(1))*qe(2:4)];
40
41 % Ukoliko se želi dobiti regulacija položaja u inercijskom koordinatnom
42 % sustavu, potrebno je otkomentirati iduće dvije linije.
43 %e = [ te;
44 %      sign(qe(1))*qe(2:4)];
45
46 % Pogreska brzine u koordinatnom sustavu tijela
47 edot = [ x(8:10) - R_quat(x(4:7))*xd(8:10);
48          x(11:13) - xd(11:13)];
49
50 % Zakon upravljanja
51 % =====
52 % Ploha klizanja
53 s0 = edot + p.Kd*e;
54 s = s0 + p.Ki*state.z;
55 dz = s0;
56
57 % Granicni sloj plohe klizanja
58 sat = (s<p.epsilon).*(s./p.epsilon) + (s>=p.epsilon).*sign(s);
59
60 % TDC estimacija poremećaja
61 h_est = state.u1 - p.M*x(14:19);
62
63 % Robusni regulator
64 u = h_est - p.M * (p.Kp*e + p.Kd*edot + p.K*sat);
65

```

```

66 % Zasicenje upravljackih sile
67 u = (abs(u)>=p.sat).*sign(u).*p.sat + (abs(u)<p.sat).*u;
68
69 % Promjena unutarnjih stanja
70 state.u1 = 1.0*u + .0*state.u1;           % Filtriranje upravljacke sile
71 state.z = state.z + p.Ts * dz;
72 state.err = [e; edot];

```

## B.3 Referentne trajektorije i poremećaj

Funkcija `ref_step.m` generira vektor vremena i vektor referentnih stanja za pozicioniranje, dok funkcija `ref_sin.m` to čini za problem slijeđenja trajektorije. Brzine i ubrzanja usmjerene morske struje generiraju se u `wave_direction.m`.

### ref\_step.m

```

1 % Referenca pozicioniranja
2 function [t x] = ref_step(tspan);
3 t = tspan(1):.1:tspan(2);
4 x = zeros(length(t),19);
5
6 % Položaj
7 x(:,1) = 20;
8 x(:,2) = 15;
9 x(:,3) = 10;
10
11 % Orijentacija
12 x(:,4:7) = (angle2quat(25*pi/180, -90*pi/180, 30*pi/180))*ones(1,length(x));
13 x(:,4:7) = (angle2quat(60*pi/180, 45*pi/180, 30*pi/180))*ones(1,length(x));
14 %x(:,4:7) = (angle2quat(60*pi/180, 0*pi/180, 0*pi/180))*ones(1,length(x));

```

### ref\_sin.m

```

1 % Referentna trajektorija
2 function [t x] = ref_const(tspan);
3 t = tspan(1):.1:tspan(2);
4 x = zeros(length(t),19);
5
6 % Kružno gibanje
7 R = 4;
8 om = .10;
9 x0 = 4;

```

```

10 y0 = 5 ;
11 z = 6;
12 x(:,1) = x0 + R*sin(om*t);
13 x(:,2) = y0 + R*cos(om*t);
14 x(:,3) = z+sin(2*om*t);
15
16 x(:,8) = om*R*cos(om*t);
17 x(:,9) = -om*R*sin(om*t);
18 x(:,10) = +2*om*cos(2*om*t);
19 x(:,13) = om;
20
21 x(:,14) = -om^2*R*sin(om*t);
22 x(:,15) = -om^2*R*cos(om*t);
23 x(:,16) = -4*om^2*sin(2*om*t);
24
25 % Referentna orijentacija
26 psi = psi/2;
27 n = [0; 0; 1]; n = n/norm(n);           % Normalizirana os
28 x(:,4) = cos(psi);
29 x(:,5) = n(1)*sin(psi);
30 x(:,6) = n(2)*sin(psi);
31 x(:,7) = n(3)*sin(psi);

```

### wave\_direction.m

```

1 % Morska struja s definiranim smjerom
2 function [t w] = wave_direction(tspan);
3 t = tspan(1):.5:tspan(2);
4 w = zeros(12,length(t));
5 Nt = length(t);
6
7 % Horizontalna komponenta
8 theta_m = pi/10;           % [rad] Srednja vrijednost
9 theta_std = 2*pi/18;       % [rad] Standardna devijacija
10
11 % Vertikalna komponenta
12 alpha_m = pi/18;          % [rad] Srednja vrijednost
13 alpha_std = .5*pi/18;     % [rad] Standardna devijacija
14
15 % Translacijska brzina strujanja
16 speed_m = 1.3;            % [m/s] Srednja vrijednost
17 speed_std = .2;           % [m/s] Standardna devijacija
18
19 % Kutna brzina strujanja (vrtlozenje)
20 omega_m = 0.15;           % [rad/s] Srednja vrijednost
21 omega_std = .02;          % [rad/s] Standardna devijacija
22

```

```

23 % Parametar filtriranja
24 Tf = 0.1;
25
26 theta = theta_m;
27 alpha = alpha_m;
28 speed = speed_m;
29 omega = omega_m;
30
31 m = [theta_m; alpha_m; speed_m; omega_m];
32 s = [theta_std; alpha_std; speed_std; omega_std];
33 v = m;
34
35 % Generiranje komponenti morske struje
36 for i = 1:length(t)
37     % Povećanje poremećaja
38     if (t(i)>40) && (t(i)<60)
39         m(3) = 1.5*speed_m;
40         m(4) = 1.2*omega_m;
41     else
42         m(3) = speed_m;
43         m(4) = omega_m;
44     end
45
46     % Niskopropusno filtrirani normalni sum
47     v = Tf*(m + s.*randn(length(m),1)) + (1-Tf)*v;
48     theta = v(1);
49     alpha = v(2);
50     speed = v(3);
51     omega = v(4);
52
53     % Rotacijska matrica
54     R = [ cos(theta), -sin(theta), 0;
55          sin(theta),  cos(theta), 0;
56          0, 0, 1] * ...
57          [ cos(alpha), 0, -sin(alpha);
58           0, 1, 0;
59           sin(alpha), 0, cos(alpha)];
60
61     % Komponente strujanja
62     w(1:3,i) = R * [speed; 0; 0];
63     w(4:6,i) = R * [omega; 0; 0];
64 end
65
66 % Akceleracije morske struje
67 w(7:12,2:end) = diff(w(1:6,:),1,2)/(t(2)-t(1));
68 for i = 2:length(t)
69     w(7:12,i) = Tf*w(7:12,i) + (1-Tf)*w(7:12,i-1);

```

```

70 end
71 w0 = w(1:6,1);
72 w(1:6,:) = (t(2)-t(1))*cumsum(w(7:12,:),2);
73 for i = 1:6
74     w(i,:) = w(i,:)+w0(i);
75 end
76 %w = w*0;

```

## B.4 Pomoćne funkcije

### R\_quat.m

```

1 % Stvara rotacijsku matricu iz vektora Eulerovih parametara
2 function R = R_quat(q)
3
4 R = 2*[ q(2)^2 + q(1)^2 - .5,    q(2)*q(3) + q(1)*q(4),    q(4)*q(2) - q(1)*q(3);
5       q(2)*q(3) - q(1)*q(4),    q(3)^2 + q(1)^2 - .5,    q(3)*q(4) + q(1)*q(2);
6       q(4)*q(2) + q(1)*q(3),    q(3)*q(4) - q(1)*q(2),    q(4)^2 + q(1)^2 - .5];

```

### quat2euler.m

```

1 % QUAT2EULER pretvara Eulerove parametre u Eulerove kuteve XYZ konvencije.
2 % Valjanje, poniranje, skretanje
3 function e = quat2euler(q);
4
5 q0 = q(1,:);
6 q1 = q(2,:);
7 q2 = q(3,:);
8 q3 = q(4,:);
9
10 e = [ atan2(2*(q0.*q1+q2.*q3), 1-2*(q1.^2+q2.^2));
11       asin(2*(q0.*q2-q3.*q1));
12       atan2(2*(q0.*q3+q1.*q2), 1-2*(q2.^2+q3.^2));

```

### skew.m

```

1 % Operator antisimetrične matrice.
2 function S = skew(x)
3 S = [0, -x(3), x(2); x(3), 0, -x(1); -x(2), x(1), 0];

```

### skew\_se.m

```

1 % Operator jugoistocnog vanjskog produkta.

```

```

2 function S = skew_se(x)
3 S = [zeros(3), skew(x(1:3)); skew(x(1:3)), skew(x(4:6))];

```

### allocate.m

```

1 % Iterativni algoritam raspodjele upravljacke sile.
2 %
3 % ULAZ:
4 % tau   – 6x1 ulazni vektor zeljenih upravljackih sila
5 % ue    – pocetni prosireni vektor sila upravljanja
6 % Be    – prosirena konfiguracijska matrica
7 % Binv  – pseudo-inverz prosirene konfiguracijske matrice
8 % We    – prosirena tezinska matrica
9 % N     – broj iteracija
10 % Tmax  – maksimalni potisak motora
11 % alim  – 2x1 vektor granice kuta zakreta (element 1=min, 2=max)
12 %
13 % IZLAZ:
14 % T     – 4x1 vektor sila na propelerima
15 % a     – 4x1 vektor kuteva zakreta propelera
16 function [T, a] = allocate(tau, ue, Be, Binv, We, N, Tmax, alim)
17 for i = 1:N
18     % Adaptacija upravljackih sila
19     e = (Be*We*ue - tau);
20     ue = ue - pinv(We)*Binv*e;
21
22     % Odredjivanje potiska i kuta zakreta iz prosirenog vektora
23     T = sqrt(ue([1 3 5 7]).^2 + ue([2 4 6 8]).^2);
24     a = atan2(ue([1 3 5 6]), ue([2 4 6 8]));
25
26     % Granice na kuteve
27     T = max(0, min(T, Tmax));
28     a = min(max(a, alim(1)), alim(2));
29
30     % Prosireni vektor upravljackih sila
31     ue = [ T(1)*sin(a(1));
32           T(1)*cos(a(1));
33           T(2)*sin(a(2));
34           T(2)*cos(a(2));
35           T(3)*sin(a(3));
36           T(3)*cos(a(3));
37           T(4)*sin(a(4));
38           T(4)*cos(a(4))];
39 end

```

# Literatura

- [1] W. J. Larson and J. R. Wertz, *Space Mission Analysis and Design*. El Segundo, CA, USA: Microcosm Press, Kluwer Academic Publishers, third ed., 1999.
- [2] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. John Wiley & Sons, 1994.
- [3] S. Janković, *Mehanika leta zrakoplova*. Zagreb: FSB, 2001.
- [4] O.-E. Fjellstad, *Control of Unmanned Underwater Vehicles in Six Degrees of Freedom - a Quaternion Feedback Approach*. PhD thesis, The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, 1994.
- [5] P. Peddiraju, T. Liesk, and M. Nahon, “Dynamics modeling for an unmanned, unstable, fin-less airship,” in *8th AIAA Lighter-Than-Air Systems Technology Conference*, May 2009.
- [6] G. J. Ducard, *Fault-tolerant Flight Control and Guidance Systems*. Springer-Verlag London, 2009.
- [7] L. Trainelli, “On the parameterization of rotation and rigid motion: A comprehensive picture,” in *XVII Congresso Nazionale AIDAA*, (Roma, Italy), September 15-19 2003.
- [8] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton University Press, 1998.
- [9] M. Borri, L. Trainelli, and C. L. Bottasso, “On representations and parametrizations of motion,” *Multibody System Dynamics*, vol. 4, pp. 129–193, 2000.

- 
- [10] J. S. Goddard and M. A. Abidi, "Pose and motion estimation using dual quaternion-based extended kalman filtering," in *Proceedings of SPIE Conference on Three-Dimensional Image Capture and Applications*, vol. 3313, (San Jose, CA), pp. 189–200, January 1998.
- [11] J. M. Selig, *Geometric Fundamentals of Robotics*. New York: Springer Science+Business Media Inc., 2005.
- [12] R. Featherstone, *Rigid Body Dynamics Algorithms*. New York: Springer Science+Business Media Inc., 2008.
- [13] L. Trainelli, "The vectorial parameterization of rotation and motion," No. DIA-SR 02-18, 2002.
- [14] L. Kavan, S. Collins, C. O'Sullivan, and J. Zara, "Dual quaternions for rigid transformation blending," 2006.
- [15] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, "The matrix cookbook," November 14 2008.
- [16] H. Lamb, *Hydrodynamics*. London: Cambridge University Press, 1932.
- [17] M. M. Munk, "The aerodynamic forces on airship hulls (naca-184)," tech. rep., NACA, 1924.
- [18] J. P. Evans, "Dynamics modeling and performance evaluation of an autonomous underwater vehicle," 2003.
- [19] S. Soylu, B. J. Buckham, and R. P. Podhorodeski, "A chattering-free sliding-mode controller for underwater vehicles with fault-tolerant infinity-norm thrust allocation," *Ocean Engineering*, vol. 35, pp. 1647 – 1659, 2008.
- [20] T. Prestero, "Verification of a six-degree of freedom simulation model for the remus autonomous underwater vehicle," 2001.
- [21] J.-Y. Park, B.-H. Cho, and J.-K. Lee, "Trajectory-tracking control of underwater inspection robot for nuclear reactor internals using time delay control," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 239, pp. 2543–2550, 2009.



- 
- [22] R. Kumar, A. Dasgupta, and C. Kumar, "Robust trajectory control of underwater vehicles using time delay control law," *Ocean Engineering*, vol. 34, pp. 842–849, 2007.
- [23] R. Kumar, C. Kumar, D. Sen, and A. Dasgupta, "Discrete time-delay control of an autonomous underwater vehicle: Theory and experimental results," *Ocean Engineering*, vol. 36, pp. 74–81, 2009.
- [24] S.-U. Lee and P. H. Chang, "Control of a heavy-duty robotic excavator using time delay control with integral sliding surface," *Control Engineering Practice*, vol. 10, pp. 697 – 711, 2002.
- [25] H. Lee and V. I. Utkin, "Chattering analysis," in *Advances in Variable Structure*, vol. 334 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 107–121, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [26] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [27] A. Levant, "Homogenous quasi-continuous sliding mode control," in *Advances in Variable Structure*, vol. 334 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 143–168, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [28] A. Levant, "Quasi-continuous high-order sliding mode controllers," in *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, (Maui, Hawaii), December 2003.
- [29] M. Saif, W. Chen, and Q. Wu, "High-order sliding mode observers and differentiators - application to fault diagnosis problem," in *Modern Sliding Mode Control Theory*, vol. 375 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 321–344, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [30] E. Omerdic and G. Roberts, "Thruster fault diagnosis and accomodation for open-frame underwater vehicles," *Control Engineering Practice*, vol. 12, pp. 1575 – 1598, 2004.

- 
- [31] O. J. S. rdalen, "Optimal thrust allocation for marine vessels," *Control Engineering Practice*, vol. 9, pp. 1223 – 1231, 1997.
- [32] J. Jin, B. Park, Y. Park, and M.-J. Tahk, "Attitude control of a satellite with redundant thrusters," *Aerospace Science and Technology*, vol. 10, pp. 644 – 651, 2006.
- [33] A. V. Inzartsev, ed., *Underwater Vehicles*. Vienna, Austria: In-Tech, 2008.
- [34] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration*, vol. 31 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [35] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, vol. 8 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.
- [36] C. L. Bottasso and M. Borri, "Integrating finite rotations," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 164, pp. 307–331, 1998.
- [37] M. Borri, C. L. Bottasso, and L. Trainelli, "Integration of elastic multibody systems by invariant conserving/dissipating algorithms. i. formalism," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, pp. 3669–3699, 2001.
- [38] M. Borri, C. L. Bottasso, and L. Trainelli, "Integration of elastic multibody systems by invariant conserving/dissipating algorithms. ii. numerical schemes and applications," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, pp. 3701–3733, 2001.
- [39] O. A. Bauchau, C. L. Bottasso, and L. Trainelli, "Integration of elastic multibody systems by invariant conserving/dissipating algorithms. ii. numerical schemes and applications," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 192, pp. 395–420, 2003.
- [40] C. Brennen, "A review of added mass and fluid inertial forces," tech. rep., Naval Civil Engineering Laboratory, 1982.

- [41] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer Series in Operation Research and Financial Engineering, Springer Science+Business Media, LLC, second ed., 2006.