

# Modeliranje procesa sušenja u postupku proizvodnje mjernih transformatora

---

**Borovnik, Nikola**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:533962>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-24**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Nikola Borovnik**

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Saša Mudrinić

Student:

Nikola Borovnik

Zagreb, 2020.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Saši Mudriniću na iskazanom povjerenju, vodstvu i pomoći tijekom izrade ovog rada.

Također se zahvaljujem doc. dr. sc. Nenadu Ferdeljiju na pomoći i stručnim savjetima.

Naposljetku, zahvaljujem se svojoj obitelji na neizmjerljivoj podršci, strpljenju i razumijevanju tijekom cijelog razdoblja studiranja.

Nikola Borovnik



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa: 602 - 04 / 20 - 6 / 3	
Ur. broj: 15 - 1703 - 20 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Nikola Borovnik** Mat. br.: 0119024077

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Modeliranje procesa sušenja u postupku proizvodnje mjernih transformatora**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Modeling of the drying process in the production process of instrument transformers**

Opis zadatka:

Unutarnji dijelovi transformatora koji su pod naponom, izolirani su pomoću papirne izolacije i uronjeni u transformatorsko ulje. Poznata je činjenica kako vlaga u ulju i papirnoj izolaciji značajno smanjuje vijek trajanja transformatora te na koncu može dovesti do njegova preranog kvara. Vlaga se uklanja iz higroskopskog papira na bazi celuloze tijekom završne faze proizvodnje transformatora, a prije impregnacije u transformatorskom ulju. Ispravna procjena vlage u izolaciji prije postupka impregnacije i određivanje vremena potrebnog za sušenje pomoću odgovarajućeg matematičkog modela ima vrlo važnu ulogu u optimizaciji proizvodnog procesa s ciljem smanjenja proizvodnih troškova i postizanjem bolje kvalitete proizvoda.

U okviru ovog zadatka potrebno je za zadanu geometriju mjernog transformatora i rubne uvjete razviti matematički model za opisivanje procesa sušenja u papirnoj izolaciji mjernog transformatora.

U radu je potrebno:

1. Ukratko opisati postupke sušenja papirne izolacije transformatora koji se primjenjuju u praksi;
2. Dati teorijske osnove prijenosa topline i tvari tijekom procesa sušenja;
3. Razviti matematički model simultanog prijenosa topline i tvari tijekom vakuumske sušenja papirne izolacije mjernog transformatora s ciljem određivanja kinetike sušenja, konačnog sadržaja vlage i brzine sušenja;
4. Za različito zadane rubne uvjete, analizirati rezultate matematičkog modela za različita svojstva izolacijskog materijala i dati adekvatne zaključke.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan: Datum predaje rada: Predviđeni datum obrane:  
24. rujna 2020. 26. studenoga 2020. 30.11. – 4.12.2020.

Zadatak zadao: Predsjednica Povjerenstva:

doc. dr. sc. Saša Mudrinić

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. UVOD.....	1
1.1. Općenito o transformatorima .....	1
1.2. Mjerni transformatori .....	3
1.3. Izolacijski medij .....	3
1.4. Starenje (degradacija) izolacije .....	6
1.5. Važnost sadržaja vlage.....	8
2. TEHNIKE SUŠENJA IZOLACIJE.....	12
2.1. Vakuumsko sušenje.....	13
2.2. Sušenje u parnoj fazi .....	14
2.3. Sušenje pomoću nisko-frekventnog zagrijavanja .....	15
2.4. Ostale tehnike.....	16
2.5. Moguće poteškoće.....	17
3. MATEMATIČKI MODEL.....	18
3.1. Teorijske osnove sušenja i difuzije .....	18
3.2. Promatrani problem.....	19
3.3. Aproksimacija domene .....	20
3.4. Diferencijalne jednačbe.....	21
3.5. Linearizacija sorpcijskih izoterma .....	25
3.6. Početni i rubni uvjeti .....	28
4. POSTUPAK NUMERIČKOG RJEŠAVANJA.....	32
4.1. Diskretizacija prostorne domene rješavanja .....	32
4.2. Vremenska diskretizacija .....	33
4.3. Diskretizacija diferencijalnih jednačbi.....	34
4.4. Diskretizacija rubnih uvjeta .....	37
4.5. Formiranje linearnih algebarskih jednačbi.....	40
4.6. Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednačbi .....	46
5. PARAMETRI SIMULACIJE.....	48
5.1. Svojstva tvari.....	48
5.2. Parametri diskretizacije.....	48
5.3. Početni uvjeti.....	49
5.4. Rubni uvjeti.....	49
6. REZULTATI .....	57
6.1. 1. slučaj .....	57
6.2. 2. slučaj .....	64
6.3. 3. slučaj .....	70

---

6.4. Usporedba odziva.....	75
7. ZAKLJUČAK.....	78
LITERATURA.....	80

## POPIS SLIKA

Slika 1.	<i>Jednostavna izvedba transformatora [4].....</i>	2
Slika 2.	<i>Kombinirana izvedba mjernog transformatora [10].....</i>	4
Slika 3.	<i>Očekivani životni vijek izolacije u ovisnosti o temperaturi i sadržaju vlage [4].....</i>	9
Slika 4.	<i>Aproksimativna funkcija napona dielektričnog proboja u ovisnosti o relativnoj zasićenosti ulja vodom [14].....</i>	10
Slika 5.	<i>Utjecaj sadržaja vlage na dielektričnu čvrstoću uljem impregnirane papirne izolacije [13].....</i>	10
Slika 6.	<i>Celulozna izolacija omotana oko aktivnih dijelova [15].....</i>	12
Slika 7.	<i>Shema vakuumske sušenja.....</i>	13
Slika 8.	<i>Shema sušenja u parnoj fazi.....</i>	15
Slika 9.	<i>a) Skica glavne izolacije b) 3D prikaz s istaknutim segmentom.....</i>	20
Slika 10.	<i>Aproksimacija domene.....</i>	21
Slika 11.	<i>Element papirne izolacije [21].....</i>	22
Slika 12.	<i>Mikroskopska slika prešpana [23].....</i>	22
Slika 13.	<i>Krivulje ravnotežne vlažnosti za drvenu pulpu [12].....</i>	26
Slika 14.	<i>Geometrija s naznačenim ploham.....</i>	29
Slika 15.	<i>Mreža čvorova s naznačenom shemom numeracije.....</i>	32
Slika 16.	<i>Promjene rubnih uvjeta u vremenu (1. slučaj).....</i>	52
Slika 17.	<i>Promjene rubnih uvjeta u vremenu (2. slučaj).....</i>	54
Slika 18.	<i>Promjene rubnih uvjeta u vremenu (3. slučaj).....</i>	56
Slika 19.	<i>Distribucija koncentracije vlage u različitim vremenskim trenutcima (1. slučaj).....</i>	58
Slika 20.	<i>Distribucija temperature u različitim vremenskim trenutcima (1. slučaj).....</i>	59
Slika 21.	<i>Distribucija sadržaja vlage u različitim vremenskim trenutcima (1. slučaj).....</i>	60
Slika 22.	<i>Sadržaj vlage po debljini izolacije (1. slučaj).....</i>	61
Slika 23.	<i>Temperatura po debljini izolacije (1. slučaj).....</i>	61
Slika 24.	<i>Tri promatrana čvora numeričke mreže.....</i>	62
Slika 25.	<i>Promjena koncentracije vlage u tri čvora mreže (1. slučaj).....</i>	62
Slika 26.	<i>Promjena temperature u tri čvora mreže (1. slučaj).....</i>	63
Slika 27.	<i>Promjena sadržaja vlage u tri čvora mreže (1. slučaj).....</i>	64
Slika 28.	<i>Distribucija koncentracije vlage u različitim vremenskim trenutcima (2. slučaj).....</i>	65
Slika 29.	<i>Distribucija temperature u različitim vremenskim trenutcima (2. slučaj).....</i>	66
Slika 30.	<i>Distribucija sadržaja vlage u različitim vremenskim trenutcima (2. slučaj).....</i>	67
Slika 31.	<i>Sadržaj vlage po debljini izolacije (2. slučaj).....</i>	68
Slika 32.	<i>Promjena koncentracije vlage u tri čvora mreže (2. slučaj).....</i>	68
Slika 33.	<i>Promjena temperature u tri čvora mreže (2. slučaj).....</i>	69
Slika 34.	<i>Promjena sadržaja vlage u tri čvora mreže (2. slučaj).....</i>	70
Slika 35.	<i>Distribucija koncentracije vlage u različitim vremenskim trenutcima (3. slučaj).....</i>	71
Slika 36.	<i>Distribucija temperature u različitim vremenskim trenutcima (3. slučaj).....</i>	72
Slika 37.	<i>Distribucija sadržaja vlage u različitim vremenskim trenutcima (3. slučaj).....</i>	73
Slika 38.	<i>Sadržaj vlage po debljini (3. slučaj).....</i>	74
Slika 39.	<i>Promjena koncentracije vlage u tri čvora mreže (3. slučaj).....</i>	74
Slika 40.	<i>Promjena temperature u tri čvora mreže (3. slučaj).....</i>	75
Slika 41.	<i>Promjena sadržaja vlage u tri čvora mreže (3. slučaj).....</i>	75
Slika 42.	<i>Osrednjene koncentracije vlage.....</i>	76
Slika 43.	<i>Osrednjene temperature.....</i>	76
Slika 44.	<i>Osrednjeni sadržaji vlage.....</i>	77



**POPIS TABLICA**

Tablica 1. <i>Svojstva papirne izolacije</i> .....	48
Tablica 2. <i>Parametri diskretizacije</i> .....	49
Tablica 3. <i>Rubni uvjeti (1. slučaj)</i> .....	51
Tablica 4. <i>Rubni uvjeti (2. slučaj)</i> .....	53
Tablica 5. <i>Rubni uvjeti (3. slučaj)</i> .....	55

## POPIS OZNAKA

### Latinična slova

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	–	matrica koeficijenata linearnih algebarskih jednadžbi
$a_1$	–	koeficijent u diskretiziranim jednadžbama
$a_2$	–	koeficijent u diskretiziranim jednadžbama
$B$	–	matrica koeficijenata linearnih algebarskih jednadžbi
$b$	–	vektor desne strane u matričnoj jednadžbi
$b_1$	–	koeficijent u diskretiziranim jednadžbama
$b_2$	–	koeficijent u diskretiziranim jednadžbama
$C$	$\text{kg m}^{-3}$	koncentracija vlage u porama papirne izolacije
$C_0$	$\text{kg m}^{-3}$	koncentracija vlage oko koje se vrijedi linearizirana jednadžba sorpcijske krivulje
$c_c$	$\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	specifični toplinski kapacitet celuloze
$C_i$	$\text{kg m}^{-3}$	početna koncentracija vlage u papirnoj izolaciji
$C_\infty$	$\text{kg m}^{-3}$	koncentracija vlage u okolnom zraku (s vanjske strane)
$D$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	koeficijent difuzivnosti (difuzivnost)
$d$	–	koeficijent u diskretiziranoj jednadžbi rubnog uvjeta
$d_1$	–	koeficijent u diskretiziranoj jednadžbi rubnog uvjeta
$d_2$	–	koeficijent u diskretiziranoj jednadžbi rubnog uvjeta
$D_a$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	difuzivnost vlage u zraku
$D_{\text{eff}}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	efektivna difuzivnost
$D_t$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	temperaturna provodnost (toplinska difuzivnost)
$D_v$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$	efektivna difuzivnost vlage unutar pora izolacije
$F_{\text{sr}}$	–	oznaka za osrednjenu fizikalnu veličinu
$g$	–	faktor otpora difuziji
$I_1$	A	jakost struje u primarnom namotu
$I_2$	A	jakost struje u sekundarnom namotu
$j_i$	$\text{kg s}^{-1}\text{m}^{-2}$	vektor gustoće masenog toka
$k$	$\text{Pa Pa}^{-1}$	konstanta proporcionalnosti (molni udio vlage u okolnom zraku)
$m_d$	kg	masa vlage u zraku unutar pora izolacije

$N$	—	broj čvorova u numeričkoj mreži
$N_1$	—	broj primarnih namotaja
$N_2$	—	broj sekundarnih namotaja
$N_r$	—	broj čvorova u smjeru koordinate $r$ (radijalnom smjeru)
$N_\varphi$	—	broj čvorova u smjeru koordinate $\varphi$ (tangencijalnom smjeru)
$N_t$	—	ukupan broj vremenskih intervala
$p_d$	Pa	parcijalni tlak vodene pare u zraku unutar pora izolacije
$p_{d,\infty}$	Pa	parcijalni tlak vodene pare u okolnom zraku
$p_s$	Pa	tlak zasićenja vodene pare u okolnom zraku
$p_\infty$	Pa	apsolutni tlak okolnog zraka
$q$	$\text{J kg}^{-1}$	specifična toplina isparavanja/kondenzacije vodene pare
$R_1$	m	radijus zakrivljenosti segmenta izolacije s vanjske strane
$R_2$	m	radijus zakrivljenosti segmenta izolacije s unutarnje strane
$R_d$	$\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	individualna plinska konstanta vodene pare
$\Delta r$	m	inkrement u radijalnom smjeru
$T$	K	temperatura papirne izolacije
$T_0$	K	temperatura oko koje vrijedi linearizirana jednadžba sorpcijske krivulje
$T_i$	K	početna temperatura papirne izolacije
$t_{\text{uk}}$	s	ukupno vrijeme sušenja
$T_{u,\infty}$	K	temperatura okolnog zraka s unutarnje strane
$T_{v,\infty}$	K	temperatura okolnog zraka s vanjske strane
$\Delta t$	s	vremenski korak
$U_1$	V	napon primarnog namota
$U_2$	V	napon sekundarnog namota
$v$	$\text{m}^3\text{m}^{-3}$	poroznost papirne izolacije
$V$	$\text{m}^3$	volumen zraka
$X$	$\text{kg kg}^{-1}$	sadržaj vlage papirne izolacije
$X_i$	$\text{kg kg}^{-1}$	početni sadržaj vlage papirne izolacije

**Grčka slova**

Oznaka	Jedinica	Opis
$\alpha_m$	$\text{m s}^{-1}$	koeficijent transporta vlage (na vanjskoj strani)
$\alpha_u$	$\text{W K}^{-1} \text{m}^{-2}$	koeficijent prijelaza topline na unutarnjoj strani
$\alpha_v$	$\text{W K}^{-1} \text{m}^{-2}$	koeficijent prijelaza topline na vanjskoj strani
$\gamma$	$\text{kg m}^{-3}$	koeficijent u jednadžbi difuzije vlage
$\Delta_{\max}$	m	maksimalna debljina izolacije
$\varepsilon$	$\text{K kg kg}^{-1}$	koeficijent u jednadžbi provođenja topline
$\lambda_c$	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	toplinska provodnost celuloze
$\rho$	$\text{kg m}^{-3}$	gustoća papirne izolacije
$\rho_c$	$\text{kg m}^{-3}$	gustoća celuloze
$\sigma$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$	koeficijent u lineariziranoj jednadžbi sorpcijske krivulje
$\phi_1$	rad	kut donje bočne stranice segmenta izolacije u odnosu na horizontalu
$\phi_2$	rad	kut gornje bočne stranice segmenta izolacije u odnosu na horizontalu
$\Delta\varphi$	rad	kutni inkrement u tangencijalnom smjeru
$\omega$	$\text{kg K}^{-1} \text{kg}^{-1}$	koeficijent u lineariziranoj jednadžbi sorpcijske krivulje

**Indeksi**

Oznaka	Opis
$c$	veličina se odnosi na čistu celulozu (potpuno suhi papir)
$i$	pozicija čvora s obzirom na os $r$
$j$	pozicija čvora s obzirom na os $\varphi$
$n$	redni broj vremenskog intervala
$t$	veličina se odnosi na jednadžbu provođenja topline
$u$	veličina s unutarnje strane segmenta izolacije
$v$	veličina s vanjske strane segmenta izolacije/veličina se odnosi na jednadžbu difuzije vlage

## SAŽETAK

Vlaga u izolaciji transformatora povećava rizik od prijevremenog kvara koji bi kao takav mogao ugroziti sigurnost osoblja ili u najmanju ruku uzrokovati značajne ekonomske gubitke. Najveći dio vlage u transformatoru je sadržan u krutoj izolaciji koja se uglavnom izrađuje od izrazito higroskopskih materijala na bazi celuloze, kao što je izolacijski papir za transformatore. Kako bi se prije puštanja u rad postigao što niži sadržaj vlage u izolaciji, transformator se podvrgava temeljitom procesu vakuumske sušenja čije se trajanje često temelji na empiriji. Egzaktnija procjena sadržaja vlage tijekom sušenja bi u tom slučaju bila prvi korak ka optimizaciji procesa što bi na koncu rezultiralo značajnim uštedama u pogledu energije i financijskih sredstava. U tu je svrhu, kao glavni cilj ovog rada, razvijen matematički model koji obuhvaća simultani prijenos vlage i topline. Kako bi se dobila rješenja u obliku vremenski promjenjivih polja temperature i sadržaja vlage, korištena je numerička metoda konačnih diferencija. Na kraju je provedena analiza odziva modela s obzirom na različite slučajeve vremenski promjenjivih rubnih uvjeta.

Ključne riječi: vlaga, transformator, celulozna izolacija, vakuumsko sušenje, prijenos topline, metoda konačnih diferencija

## **SUMMARY**

Moisture in transformer insulation system increases the risk of premature failure which could endanger the safety of personnel or at the very least cause serious economic losses. Most of the moisture in transformer is contained in the solid insulation usually made from highly hygroscopic, cellulose-based materials such as transformer insulation paper. In order to achieve as low as possible moisture content of insulation, before being put into service, transformer is subjected to a thorough vacuum drying process, duration of which is oftentimes determined empirically. In that case, more exact assessment of moisture content during the process of drying would be the first step leading to optimization which would eventually result in significant savings in terms of both energy and financial assets. For this purpose and as a main objective of this thesis, simultaneous heat and mass transfer model was formulated. In order to get the solutions in the form of transient fields of temperature and moisture content, numerical finite difference method was used. Finally, analysis of mathematical model response to different cases of time-varying boundary conditions was carried out.

Key words: moisture, transformer, cellulose insulation, vacuum drying, heat transfer, finite difference method

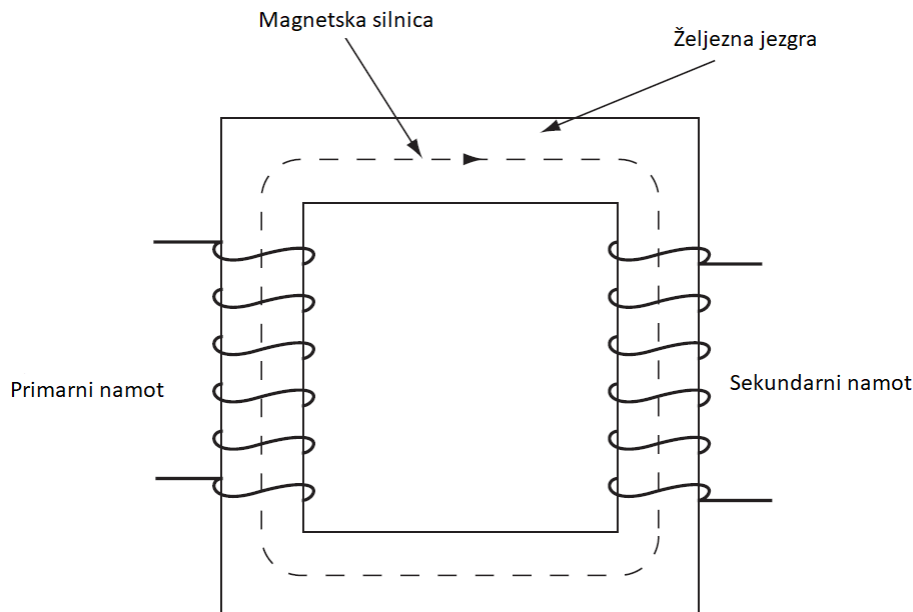
## 1. UVOD

Parametri električne energije, napon i jakost struje, različiti su u određenim dijelovima modernih elektroenergetskih sustava, a kao najočitiiji primjer, može se navesti povišenje napona u svrhu prenošenja električne energije udaljenim potrošačima i umrežavanja većih elektroenergetskih sustava. Smislenost ideje o visokonaponskim sustavima bila je očita brojnim inženjerima još u počecima primjene višefazne izmjenične struje krajem 19. stoljeća. Danas se u prijenosnim mrežama uobičajeno koriste naponi veći od 110 kV, a granični naponi ponegdje premašuju i 1000 kV.[1] Pretvorba parametara električne energije izmjenične prirode vrši se pomoću posebnih električnih uređaja – transformatora. Oni svoju primjenu pronalaze u svakoj od podcjelina elektroenergetskog sustava i kao takvi predstavljaju jedne od najvažnijih dijelova opreme u električnoj mreži. Neprekidan pogon ovih uređaja je neophodan za uspješno funkcioniranje elektroenergetske mreže u tehničkom, ekonomskom i sigurnosnom pogledu.

Stanje u kojem se nalazi određeni transformator, pogotovo ako je riječ o velikom uređaju, u znatnoj mjeri utječe na pouzdanost elektroenergetskog sustava. Iako se pod „stanjem“ također može smatrati integritet namotaja i željezne jezgre, odnosno očuvanost regulacijskih sklopki i priključaka, nedvojbeno najveći utjecaj na životni vijek transformatora ima glavna izolacija.[3][4][5] Ona je neizbježno podložna trošenju (starenju) čija intenzivnost ovisi o raznovrsnim faktorima koji mogu djelovati zasebno ili u kombinaciji. Bitan čimbenik u tom procesu svakako je vlaga koja u transformator dopijeva ili kao već sadržana u novo-ugrađenoj izolaciji ili iz atmosfere kroz otvore u kućištu, ali i kao produkt određenih kemijskih reakcija.[6] Iz tog razloga je izuzetno bitno u izolaciji postići što niži sadržaj vlage na kraju proizvodnog procesa [5] ne pridajući pritom manju važnost redovitom nadziranju i procjenjivanju količine vlage sadržane u transformatoru tijekom njegovog radnog vijeka kako bi se mogli predvidjeti potencijalni kvarovi te poduzeti odgovarajući postupci održavanja.

### 1.1. Općenito o transformatorima

Transformator je mirujući električni uređaj koji povezuje dva strujna kruga pri čemu dolazi do prijelaza električne energije s jednog kruga na drugi. Najjednostavnija izvedba transformatora je željezna jezgra i na njoj dva namota s različitim brojem zavoja [Slika 1.] Namot koji je priključen na izvor izmjeničnog napona (u elektroenergetskom sustavu, to bi bio električni generator) naziva se primarni namot (ili uzbudni namot), a drugi se naziva sekundarni namot. Načelo rada transformatora se bazira na principu elektromagnetske međuindukcije odakle proizlazi bitna činjenica da frekvencija u oba kruga ostaje nepromijenjena.



Slika 1. Jednostavna izvedba transformatora [4]

Transformator se može nalaziti u tri pogonska stanja:

- prazni hod
- opterećenje
- kratki spoj<sup>1</sup>

Ako je riječ o idealnom transformatoru koji je u praznom hodu (otvoreni sekundarni namot), između stezaljki sekundarnog namota inducirati će se napon međuinukcije. Stavi li se sekundarni namot pod opterećenje, tada će kroz njega poteći struja koja će nastojati demagnetizirati jezgru transformatora. Zbog toga će struja u primarnom namotu narasti do te mjere da se uspostavi magnetska ravnoteža odnosno da se izjednače amperzavoji.[7] U stanju ravnoteže idealnog, jednofaznog i dvonamotnog transformatora vrijede sljedeće jednadžbe:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (1.1)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}, \quad (1.2)$$

gdje su indeksom 1 označene veličine primarnog namota, a indeksom 2 veličine sekundarnog namota. Zaključuje se da će namot predviđen za viši napon biti onaj s više zavoja kroz koje teče

<sup>1</sup> praktički se i ovdje radi o opterećenom pogonskom stanju, ali je impedancija veoma malena



manja struja, a namot predviđen za niži napon bit će s manje zavoja kroz koje teče veća struja.[1] Na ovaj se način osigurava da sve komponente jednog elektroenergetskog sustava rade na, za njih namijenjenim, razinama napona.

Iako se u elektroenergetskim sustavima susreću brojne vrste transformatora različitih namjena, primjerice, blok-transformatori koji se spajaju između generatora i visokonaponske mreže ili mrežni transformatori koji transformiraju napon visokonaponske mreže u niži napon distribucijske mreže, od posebnog interesa u ovom radu, biti će mjerni transformatori.

## 1.2. Mjerni transformatori

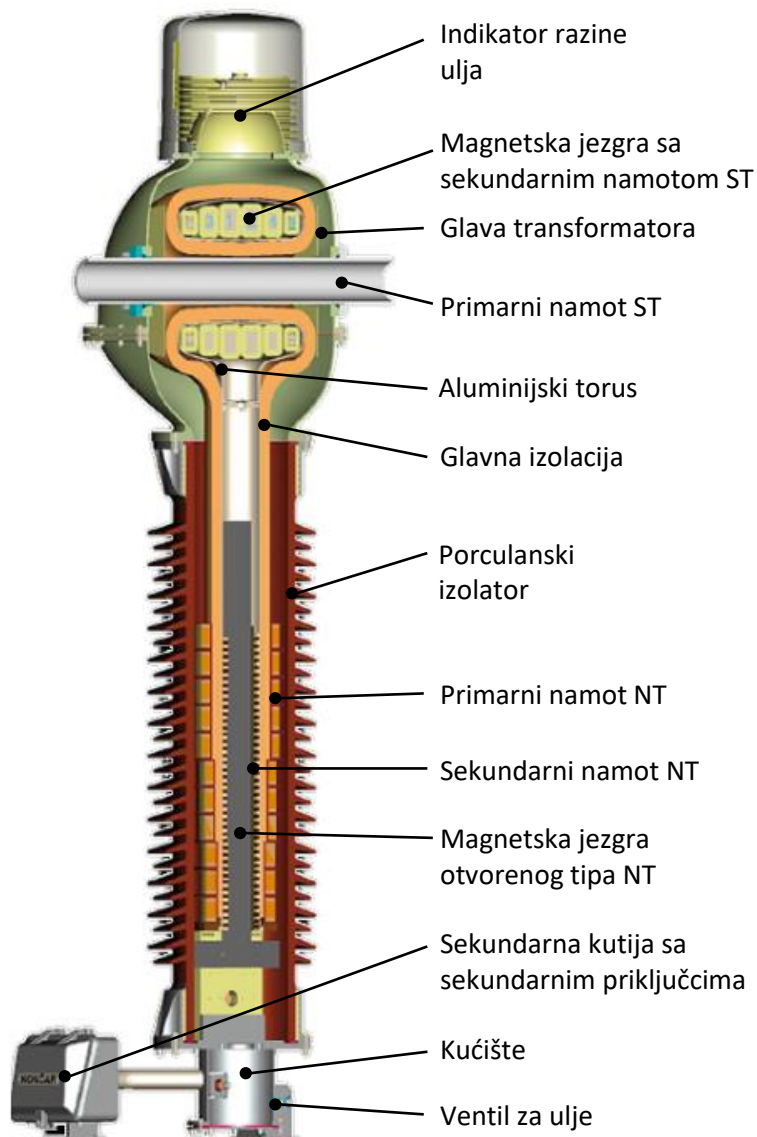
Mjerni transformatori se prije svega koriste kako bi se primarni strujni krug koji se nalazi pod visokim naponom i/ili kroz koji protječe struja visoke jakosti, odvojio od sekundarnog strujnog kruga na koji su priključeni uređaji za mjerenje, upravljanje i zaštitu (vatmetri, mjerila faktora snage, voltmetri, ampermetri, releji, itd.). Osim toga, napon i jakost struje u sekundarnom krugu spuštaju se na razinu prihvatljivu za priključak navedenih uređaja te pogodnu u pogledu sigurnosti pogona i osoblja (tipično 120 V/5 A).[1][4][9] U načelu se javljaju dvije izvedbe mjernih transformatora: naponski transformatori i strujni transformatori; međutim, moguća je i kombinirana izvedba – induktivni naponski transformator i strujni transformator, smješteni u jednom kućištu. Ova je izvedba u većini slučajeva ekonomičnija, a pri tom i kompaktnija.[4] Na slici [Slika 2.] je prikazan poprečni presjek kombiniranog mjernog transformatora koji je dio proizvodnog programa tvrtke *Končar – Mjerni transformatori d.d.*

## 1.3. Izolacijski medij

Naponski i strujni mjerni transformatori su obično jednofazni [9], što znači da se u kućištu nalaze dva namota (primar i sekundar), odnosno četiri u slučaju kombinirane izvedbe. Komponente transformatora je potrebno obložiti izolacijom odnosno osigurati određeni oblik dielektrične barijere između primara i sekundara, namotaja i jezgre, kućišta i namotaja itd. Riječ je o takozvanoj glavnoj izolaciji koja se s obzirom na korišteni medij razlikuje u ovisnosti o okolišnim uvjetima (unutarnja ili vanjska uporaba), a utjecaj na izbor izolacijskog medija također će imati i dielektrični te toplinski zahtjevi.

Moderni transformatori većih naponskih nivoa (prema [4], iznad 69 kV) koji su tipično namijenjeni za vanjsku upotrebu mogu imati dva tipa glavne izolacije:

- plinska izolacija
- uljna izolacija



Slika 2. *Kombinirana izvedba mjernog transformatora* [10]

### 1.3.1. *Plinska izolacija*

Pod plinskom izolacijom se uglavnom smatra korištenje sumporovog heksafluorida ( $\text{SF}_6$ ) kao glavnog izolacijskog medija kojim se ispunjava glavina međuprostora unutar kućišta, dok se vodiči namotaja međusobno odvajaju polimernom prevlakom.[6]

Sumporov heksafluorid je nezapaljivi plin visoke dielektrične čvrstoće i izvrsne toplinske/mehaničke stabilnosti. Shodno tome, u odnosu na transformatore s uljnom izolacijom, ne postoji opasnost od zapaljenja, međutim, ovakav tip transformatora je podvrgnut većem mehaničkom opterećenju koje je rezultat većeg tlak unutar kućišta kojeg je potrebno ostvariti

kako bi dielektrična čvrstoća SF<sub>6</sub> bila usporediva s onom koju ima ulje. Izazovi s kojima se potrebno suočiti prilikom konstruiranja transformatora s plinskom izolacijom, tiču se brtvljenja, hlađenja i utjecaja na okoliš.[8] Sumporov heksafluorid se naime, smatra najpotentnijim stakleničkim plinom čiji GWP iznosi vrtoglavih 22 900.[11]

### 1.3.2. *Uljna izolacija*

S druge strane, ako je riječ o transformatoru s uljnom izolacijom, implicitno je rečeno da se glavna izolacija sastoji od uljem impregniranog papira i čistog ulja koje ispunjava ostatak prostora u kućištu; dakle papirno-uljna izolacija. U najvećem se djelu ovakvih transformatora koristi mineralno transformatorsko ulje koje se dobiva rafiniranjem sirove nafte, a čiji sastav poprilično varira u ovisnosti o lokaciji nalazišta nafte i o samom procesu prerađivanja.[4] Riječ je, u pravilu, o kompleksnim mješavinama molekula sačinjenih od atoma ugljika, vodika i manjim udjelom sumpora i dušika.[7] Generalno se, s obzirom na sastav, mineralna ulja dijele na naftenska u čijem sastavu prevladavaju cikloalkani (nafteni) i parafinska koja se uglavnom sastoje od alkana (parafina). Sastav ulja odrediti će njegova fizikalna, kemijska i električna svojstva, kao što su toplinska provodnost, specifični toplinski kapacitet, viskoznost, zapaljivost, oksidacijska stabilnost, dielektrična čvrstoća itd.

Transformatorsko ulje u pravilu ima tri funkcije [3][4], a to su:

- električna izolacija
- disipacija topline
- dijagnostika

Uloga ulja, kao električnog izolatora i disipatora topline je jasna sama po sebi, dok dijagnostička funkcija proizlazi iz činjenice da ulje u transformatoru tijekom njegovog radnog vijeka služi kao indikator ispravnosti uređaja. To znači da se testiranjem uzorka može donijeti zaključak o prirodi i ozbiljnosti mogućih kvarova.[3]

Ključnim nedostatkom mineralnih transformatorskih ulja može se smatrati relativno niska temperatura zapaljenja (prema [4], 165 °C). Zbog toga su se pojavile različite alternative, od kojih bi najprije valjalo istaknuti silikonsko ulje. Riječ je o neotrovnoj i nezapaljivoj kapljevini koja se za razliku od mineralnih ulja također odlikuje izuzetnom kemijskom stabilnošću.[3][8] Međutim, visoka cijena, koja je otprilike 10 puta veća u odnosu na cijenu mineralnog ulja [3], koči masovnu uporabu ovog izolacijskog medija.

Materijali na bazi celuloze, za koje se često koriste nazivi: *Kraft* papir, prešpan (eng. *pressboard*), kabelski papir (eng. *transformerboard*) ili samo celuloza [12], zbog svoje su niske cijene, dostupnosti te odličnih mehaničkih i dielektričnih svojstava praktički postali standardne opcije za krutu izolaciju uljem-punjenih transformatora. Između ostaloga, ovakvi materijali imaju izvrstan kapacitet za uljnu impregnaciju čime im se višestruko poboljšavaju izolacijska svojstva.[3]

Nedostaci celulozne izolacije se očituju u sljedećim svojstvima: [3]

- higroskopnost
- reaktivnost s kisikom
- termalna nestabilnost pri povišenim temperaturama

S obzirom na trenutno dostupne materijale i tehnologije, sve upućuje na to da će se papirno-uljna izolacija i dalje uspješno primjenjivati kod mjernih transformatora. Iako su sustavi sa sumporovim heksafluoridom dobro razvijeni i konkurentni u brojnim primjenama, transformatori s papirno-uljnom izolacijom, bez obzira na očigledne nedostatke, nastavljaju biti pouzdana i ekonomična izvedba.[13]

Daljnji će fokus rada biti na mjernim transformatorima s papirno-uljnom izolacijom te na problemu starenja takvog izolacijskog sustava.

#### **1.4. Starenje (degradacija) izolacije**

Od trenutka kada se transformator stavi u funkciju započinje spor, ali nepovratan proces degradacije papirne i uljne izolacije. Proces degradacije odnosno starenja izolacije može biti kompleksan, a kvarovi koji pritom nastaju su uobičajeno posljedica kombinacije različitih mehanizama starenja.[3]

Četiri tipa starenja s obzirom na mehanizme koja se navode u dostupnoj literaturi su:

- starenje uslijed toplinskog opterećenja
- starenje uslijed mehaničkog opterećenja
- starenje uslijed utjecaja okoline
- starenje uslijed električnog opterećenja

Toplinsko opterećenje ima najveći utjecaj na starenje izolacije.[3][6] Naime, uslijed povišenja temperature tijekom rada transformatora, dolazi do ubrzanja reakcija oksidacije i hidrolize zbog kojih dolazi do postepene degradacije celuloze. Ove reakcije se također ubrzavaju s povećanjem

koncentracije kisika, vode i kiselina. Promjene temperaturnog polja istodobno uzrokuju toplinska rastezanja, koja između ostalog uvelike doprinose degradaciji izolacije. Povišenje temperature za 6-8 °C, umanjuje životni vijek papira i ulja za 50%, a u slučaju radne temperature veće od 110 °C ulazi se u izuzetno rizično područje rada što može dovesti do prijevremenog kvara uređaja.[3]

Starenje uslijed mehaničkog opterećenja se temelji na utjecaju sila koje nastaju uslijed kratkih spojeva (elektro-mehanička naprezanja) te sila koje se javljaju uslijed toplinskog širenja i skupljanja (termo-mehanička naprezanja). Riječ je o naprezanjima cikličke prirode koja se uzimaju u obzir prilikom konstruiranja transformatora i koja u teoriji ne bi trebala rezultirati kvarom, međutim, ako je starenje papirne izolacije, koja u principu apsorbira mehaničku energiju i djeluje takoreći kao opruga, uznapredovalo, može doći do plastične deformacije namotaja, daljnje degradacije uslijed trenja ili čak do puknuća papirne izolacije.

Starenje uslijed utjecaja okoline je posljedica propuštanja vlage, kisika, prašine ili sitnih krhotina kroz loše zabrtvljene spojeve ili tijekom održavanja opreme. Dobrim sustavom brtvljenja, prodor onečišćenja može se svesti na minimum.[3] U ovom kontekstu se još može spomenuti i utjecaj takozvanog unutarnjeg onečišćenja koje nastaje zbog kemijskih reakcija (oksidacija papira i ulja, deterioracija, korozija itd.) ili mehaničkog i električnog trošenja materijala.[3][4]

Električna opterećenja u pravilu nemaju prevelik utjecaj na starenje unutar normalnog životnog vijeka uređaja i uz primjenu kvalitetnih materijala.[6][13] Iznimka od toga je pojava takozvanog parcijalnog pražnjenja (eng. *partial discharge* – *PD*). Riječ je o pojavi lokalnog električnog proboja koji se uglavnom javlja na sučelju različitih izolacijskih materijala ili na mjestima lokalno smanjene dielektrične čvrstoće, primjerice plinski mjehurići u uljnoj izolaciji. Zbog toga može doći do daljnje degradacije, pa postoje različiti slučajevi kod kojih je pojava parcijalnog pražnjenja uzrok te istovremeno i posljedica starenja izolacije.[6]

Može se zaključiti da mehanizmi starenja djeluju tako da se kroz kompleksne uzročno-posljedične veze međusobno prouzrokuju to jest da djeluju sinergijski. Primjerice, papirna izolacija koja se tijekom starenja uslijed toplinskog opterećenja skupila, više ne djeluje jednakim tlakom stezanja na namotaje. Namotaji olabavljaju i gube mehaničku stabilnost što dovodi do razornijeg djelovanja mehaničkog opterećenja pa nastupa i daljnje propadanje papirne izolacije. Još jedan primjer je izlučivanje kapljevite vode u ulju. Naime, uslijed povišenja temperature ulja dolazi do porasta topivosti vode koja zatim procesom difuzije prelazi

iz papirne izolacije u ulje. Kada se ulje ohladi smanjuje se topivost vode, koja jednostavno „ne stigne“ difundirati natrag u papirnu izolaciju te dolazi do formiranja sitnih kapljica vode. Ako se slobodna voda slegne na izolacijskim površinama, može doprinijeti pojavi električnih lukova koji su kao takvi uzrok daljnjeg starenja ili u najgorem slučaju potpunog kvara uređaja.

Ne ulazeći prekomjerno u analizu utjecaja brojnih parametara, kao što su koncentracija kisika, temperaturni režim, čistoća ulja, kvaliteta celulozne izolacije, ispravnost brtvi itd., općeprihvaćena je činjenica da prisutnost vlage u izolaciji transformatora, bilo da je riječ o ulju ili papiru (iako je papir značajniji jer može akumulirati znatno veću količinu vlage) ima negativan učinak na dielektrične karakteristike materijala i brzinu starenja izolacije.

### 1.5. Važnost sadržaja vlage

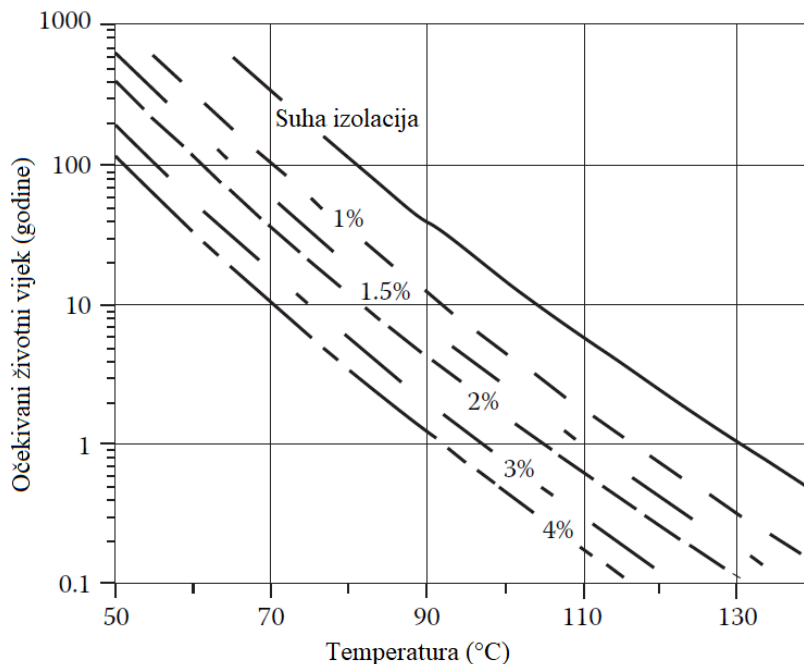
Visok udio vlage u transformatoru, i to je činjenica, uzrokuje: [3][4][6][14]

- ubrzavajuću degradaciju celuloze
- smanjenje dielektrične čvrstoće
- pojavljivanje plinskih mjehurića

Vlaga u celuloznoj izolaciji se uobičajeno izražava kao masa vlage po jedinici mase suhe supstancije. Ta veličina se naziva sadržaj vlage i može se iskazati u postocima.

Kada se razmatra ubrzavajuća degradacija celuloze kao posljedica povišenog sadržaja vlage, posebno bi trebalo obratiti pažnju na kemijsku reakciju hidrolize kod koje dolazi do cijepanja molekula celuloze. To je u stvari samo-katalizirajuća reakcija jer ovisi o prisutnosti karboksilnih kiselina disociranih u vodi, a upravo su voda i karboksilne kiseline produkti ove reakcije.[6] Cijepanjem molekula celuloze, smanjuje se vlačna čvrstoća i papir postaje krhak. Iz tog razloga se dotrajalost celulozne izolacije, a time i životni vijek transformatora, korelira s takozvanim stupnjem polimerizacije (eng. *degree of polymerization – DP*). To je broj koji predstavlja prosječni broj glukoznih prstena u molekulama celuloze. U novom transformatoru, *Kraft* papir može imati vrijednost stupnja polimerizacije u rangu od 1000 do 1200.[6] Kada je vrijednost stupnja polimerizacije otprilike 250, tada je iznos vlačne čvrstoće približno prepolovljen i tu se okončava životni vijek izolacije.[6][13]

[Slika 3.] prikazuje rezultate jedne od brojnih studija s ciljem pronalaženja očekivanog životnog vijeka izolacije u ovisnosti o radnoj temperaturi i sadržaju vlage. Oko toga pitanja postoje prijepori u znanstvenim krugovima, međutim, načelno gledajući, ako se sadržaj vlage udvostruči, životni vijek izolacije se pri jednakom toplinskom opterećenju upola smanji.[6][12]

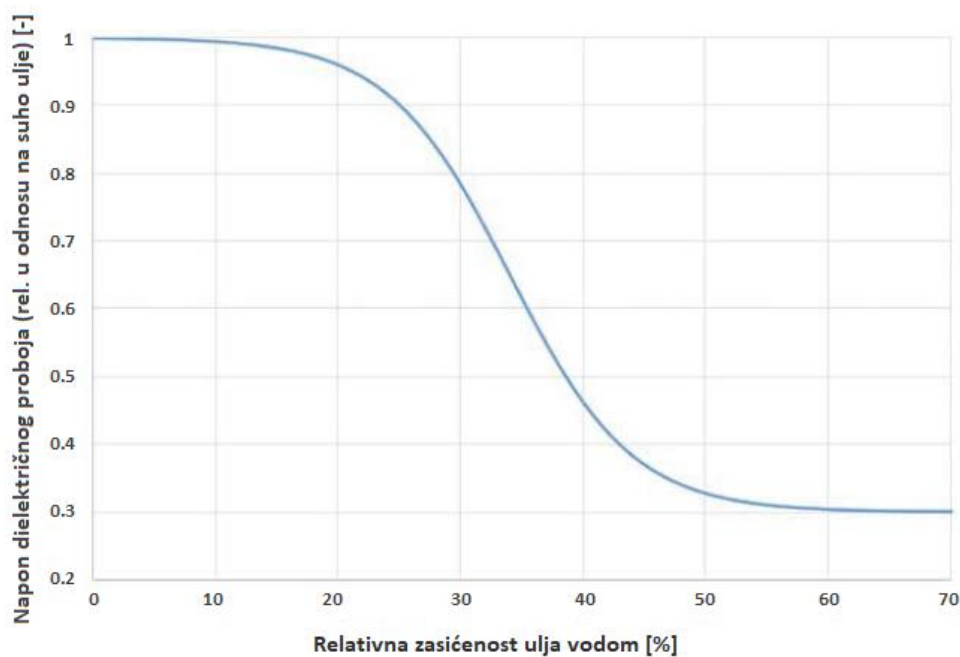


Slika 3. Očekivani životni vijek izolacije u ovisnosti o temperaturi i sadržaju vlage [4]

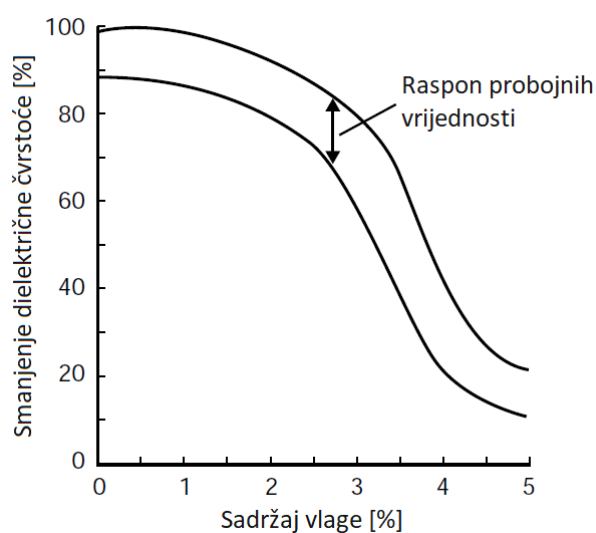
Za razliku od papirne izolacije, vlaga u ulju se obično izražava kao masa vlage po jedinici mase ulja što znači da se koristi vlažna osnova (eng. *wet basis*). Ova veličina se naziva sadržaj vlage u ulju (eng. *water content of oil – WCO*) i iskazuje se u ppm to jest u  $\mu\text{g/g}$ . Slijedom navedenog, veličina koja se također često koristi je relativna zasićenost ulja vodom. To je omjer sadržaja vlage u ulju u promatranom stanju i u stanju zasićenja i može se izraziti u postocima. Relativna zasićenost daje potpuniju informaciju o stanju u kojem se nalazi ulje jer je sadržaj vlage u stanju zasićenja funkcija temperature i tlaka.[12] Štoviše, relativno novi eksperimentalni podaci pokazuju da se dielektrična čvrstoća ulja (napon dielektričnog proboja) može aproksimirati kao funkcija relativne zasićenosti ulja vodom [Slika 4.].[14] Dijagram jasno pokazuje da je dielektrična čvrstoća u većoj ili manjoj mjeri konstantna sve dok se ne premaši 20% relativnog zasićenja. Tada se počinje smanjivati dok se ne dostigne 60% zasićenja nakon čega je vrijednost opet ustaljena i iznosi otprilike 30% dielektrične čvrstoće koju ima potpuno suho ulje.[14] Kada sadržaj vlage premaši vrijednost zasićenja, dolazi do precipitacije kapljica vode, problema opisanog u prethodnom potpoglavlju. Sličan trend u smislu smanjenja dielektrične čvrstoće pokazuje i uljem impregnirana papirna izolacija [Slika 5]. Ako sadržaj vlage u papiru prijeđe 4,5%, dielektrična čvrstoća je približno 5 puta manja od vrijednosti za potpuno suh, uljem impregnirani papir.

Razvoj mjehurića u ulju je pojava koja nastupa kada transformator naglo dođe u stanje punog opterećenja. Tada dolazi do zagrijavanja namotaja, temperatura se povećava brže nego što se

voda može otopiti u ulju i počinju se pojavljivati parni mjehurići. To je naravno moguće samo uz uvjet dovoljno visokog sadržaja vlage u celuloznoj izolaciji.[14] Takvi mjehurići imaju znatno manju dielektričnu čvrstoću od celulozne izolacije i ulja i kao takvi postaju eventualni izvori dielektričnih proboja.



Slika 4. *Aproksimativna funkcija napona dielektričnog proboja u ovisnosti o relativnoj zasićenosti ulja vodom [14]*



Slika 5. *Utjecaj sadržaja vlage na dielektričnu čvrstoću uljem impregnirane papirne izolacije [13]*



Kao što je već ranije spomenuto, vlaga u transformator dopijeva na tri različita načina. Prvo, kao produkt procesa degradacije celuloze i oksidacije mineralnog ulja, zatim prodiranjem iz okolnog zraka tijekom održavanja ili kroz sitne otvore tijekom rada te naposljetku, vlaga već može biti sadržana u celuloznoj izolaciji prije same montaže transformatora.[6]

Vlaga sadržana u ulju se obično može zanemariti. Doista, ako se razmotri transformator snage 150 MVA i nazivnog napona 400 kV u kojem se otprilike nalazi sedam tona papirne izolacije, takav aparat može sadržavati čak 223 kg vode. S druge strane, volumen ulja u tipičnom energetsom transformatoru iznosi oko 80 000 litara. Pretpostavljajući da je sadržaj vlage u ulju 20 µg/g, zaključuje se da je ukupna masa vode u ulju svega 2 kg, što je mnogo manje nego u papiru.[12] U načelu je 99% vlage sadržane u transformatoru pohranjeno unutar krute celulozne izolacije dok je ostatak (1%) otopljen u mineralnom ulju.[6][15] Iz navedenog je očito da u celulozi, za razliku od mineralnog ulja, može biti pohranjena velika količina vlage.

Papirna se izolacija, zbog svoje hidrofilne prirode, tijekom radnog vijeka transformatora, ponaša kao akumulator vlage. Ulje, naspram toga, ima nizak afinitet prema vodi pa stoga djeluje samo kao prenosilac. Kako je riječ o zatvorenom sustavu, način na koji će se raspodijeliti vlaga između celuloze i ulja, značajno ovisi o temperaturi. Uslijed prostorno promjenjivog temperaturnog polja u transformatoru, pojaviti će se područja gdje hladnije ulje ima visoku relativnu zasićenost, a time i manju dielektričnu čvrstoću zbog čega će postojati rizik od lokalnih električnih proboja. Prijelazne pojave koje nastaju zbog vremenski promjenjivog opterećenja i okolišne temperature rezultiraju nejednolikom distribucijom vlage u papirnoj i uljnoj izolaciji te su posebno opasne kod mjernih transformatora kod kojih je masa celulozne izolacije znatno veća od mase ulja.[6]

Vlagu koja se javlja kao produkt degradacije ili koja je dospjela u transformator prodorom iz okoline, nemoguće je izbjeći. Međutim, postoje načini da se smanji utjecaj tih izvora. Prodor vlage iz okoline može se primjerice spriječiti korištenjem boljeg sustava brtvljenja te redovitim održavanjem istog.[3][4] S druge strane, stvaranje vlage kao produkta starenja, može se umanjiti upotrebom papira s poboljšanim toplinskim svojstvima (eng. *thermally upgraded paper*). Dublje razmatranje ovih mehanizama nastajanja vlage u transformatoru prelazile bi interesni okvir ovog rada. Poseban naglasak će se naime staviti na rezidualnu vlagu sadržanu u papirnoj izolaciji odnosno kako je u što većoj mjeri sniziti.

## 2. TEHNIKE SUŠENJA IZOLACIJE

Proizvođači celulozne izolacije uglavnom isporučuju materijal čiji sadržaj vlage iznosi približno 5%. [15] Kako bi na početku puštanja u rad sadržaj vlage u izolaciji bio što niži, transformator je potrebno podvrgnuti procesu sušenja. Prije početka sušenja, celulozna izolacija se omotava oko dijelova transformatora koji moraju biti električki izolirani [Slika 6.]. Papir je higroskopni materijal što znači da će doći do upijanja dodatne količine vlage uslijed izloženosti okolnom zraku tijekom montaže i konstruiranja transformatora. To rezultira vrijednošću sadržaja vlage do 8% na kraju procesa montaže to jest neposredno prije početka sušenja. [5][14][16]



Slika 6. Celulozna izolacija omotana oko aktivnih dijelova [15]

Sušenje je jedan od najbitnijih koraka proizvodnje transformatora i pred njega se stavlja izazov postizanja što veće učinkovitosti i što kraćeg trajanja procesa. Posebno je važno obratiti pozornost na vrijeme potrebno da se u potpunosti osuši celulozna izolacija. Vrijeme sušenja ponajprije ovisi o nazivnom naponu (veličini) uređaja, ali i o primijenjenoj tehnici. Kraće vrijeme procesa sušenja, koje je praktički usko grlo proizvodnje transformatora, jamči bržu isporuku konačnog proizvoda. [15]

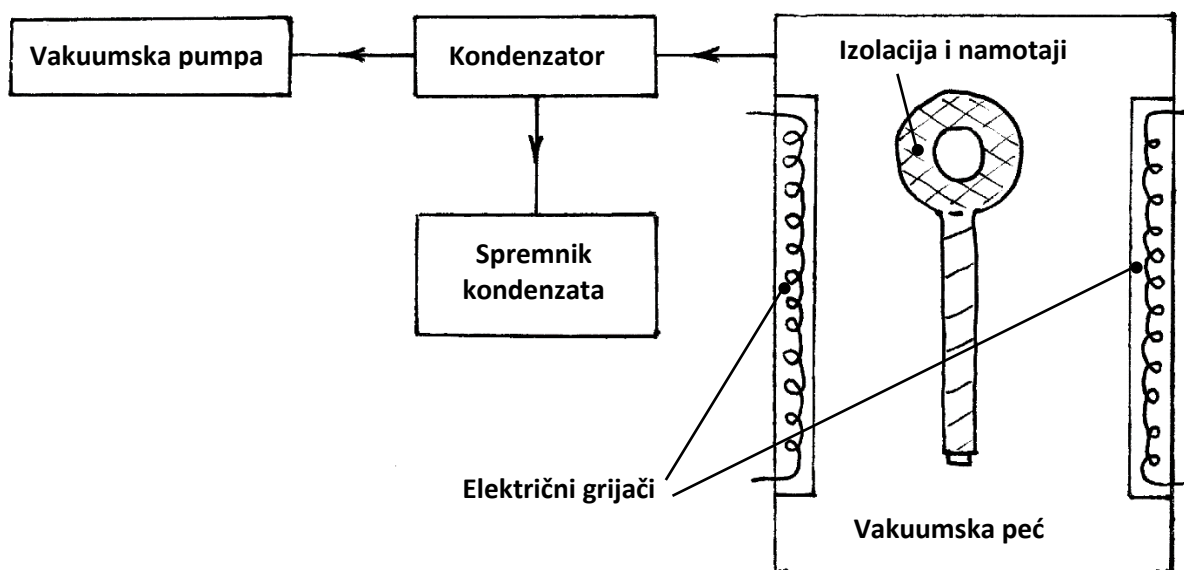
Glavnina postupaka sušenja se temelji na kombiniranom zagrijavanju celulozne izolacije i spuštanjem okolnog tlaka (tlak unutar spremnika ili vakuumske peći). Na taj način se pomoću

vakuuma smanjuje parcijalni tlak vodene pare u spremniku, a zagrijavanjem se isti povećava unutar same izolacije.[17][18] Razlika parcijalnih tlakova pogoni proces difuzije, štoviše, difuzivnost vlage se povećava s porastom temperature što dodatno ubrzava difuziju.[15] Proces sušenja se načelno smatra završenim kada sadržaj vlage u papirnoj izolaciji padne ispod 0,5% Postoje različite tehnike sušenja izolacije, od kojih će se izdvojiti nekoliko relevantnih te će ih se ukratko opisati.

## 2.1. Vakuumsko sušenje

Metoda vakuumskog sušenja se smatra tradicionalnom metodom i temelji se na zagrijavanju izolacije cirkulacijom vrućeg zraka i električnim grijačima te smanjenju tlaka. Na slici [Slika 7.] je prikazana pojednostavljena shema postrojenja za vakuumsko sušenje.

Izolacija se na početku zagrije na temperaturu od 85 °C do 130 °C. Zatim se pomoću vakuumske pumpe tlak u spremniku smanji na razinu ispod 1 mbar čime se izvlači vodena para i uklanja zrak iz sitnih pora unutar izolacije. Uslijed smanjenja tlaka dolazi do ubranog ishlapljivanja vode iz izolacije koje je praćeno padom temperature. Dogrijavanje izolacije pomoću električnih grijača je neučinkovito zbog malene razlike u temperaturi između stijenki vakuumske peći i površine izolacije. Zato je potrebno ponovno upuhati vrući zrak pri čemu se tlak vraća na atmosfersku razinu i time se zatvara jedan ciklus sušenja. Ovisno o veličini transformatora, potrebno je provesti nekoliko ovakvih ciklusa kako bi se izolacija dovoljno osušila što rezultira značajnim produljenjem vremena sušenja. [5] [7][17][18]



Slika 7. Shema vakuumskog sušenja

Ako se radi o velikom transformatoru, proces vakuumnog sušenja može trajati danima, pa čak i tjednima. Iz tog razloga se pribjegava novijoj tehnici sušenja, takozvanom sušenju u parnoj fazi (eng. *vapor phase drying* – *VPD*).[7]

## 2.2. Sušenje u parnoj fazi

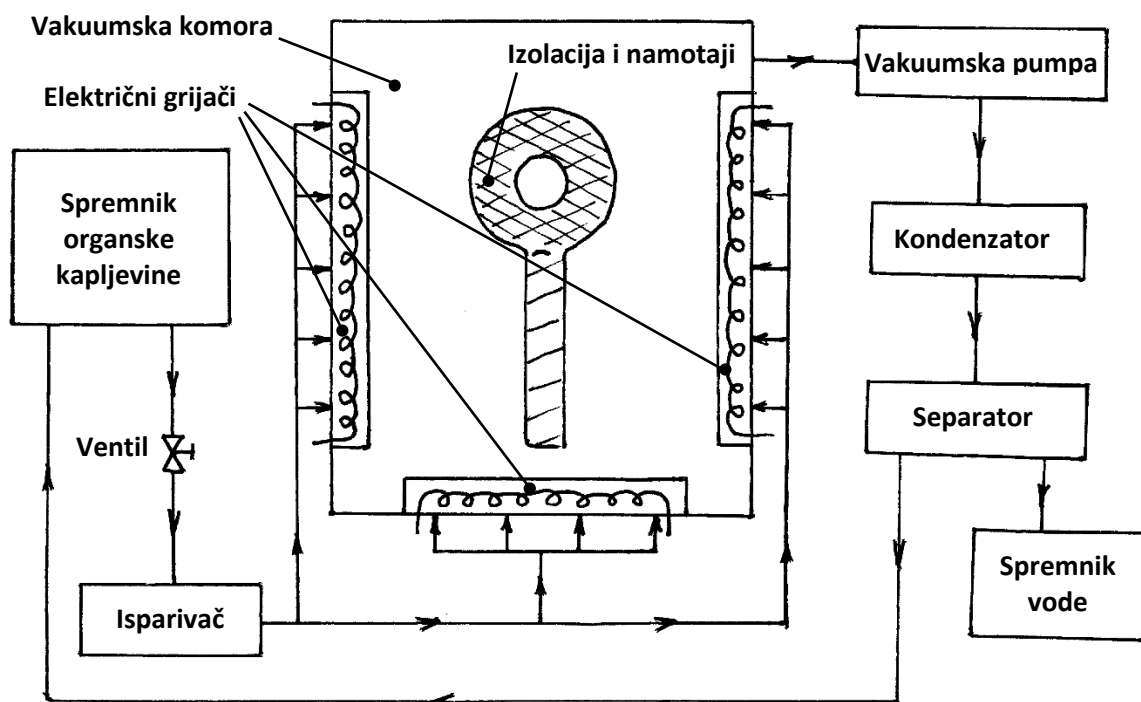
Potreba za izolacijom koja će imati bolja radna svojstva te zahtjevi za bržom i učinkovitijom tehnikom sušenja rezultirali su razvojem tehnike sušenja u parnoj fazi. Riječ je o brzom i učinkovitoj metodi kod koje se umjesto zraka kao ogrjevnog medij koristi određeno organsko otapalo visoke temperature uz istovremenu primjenu vakuuma.[5][8][15] Najčešće se radi o kerozinu specijalne kvalitete.[3]

Ako je riječ o klasičnom sušenju u parnoj fazi kakvo je shematski prikazano na slici [Slika 8.], tada se u vanjskom isparivaču kapljevit kerozin pretvara u paru i zagrijava na temperaturu od oko 130 °C.[19] Zatim se tako zagrijana para ubacuje u vakuumsku komoru u kojoj već vlada nizak tlak i gdje uslijed kontakta s hladnijom plohom celulozne izolacije kondenzira i otpušta latentnu toplinu.[5][19] Na taj se način izolacija brzo zagrijava i namiruje toplina potrebna za isparavanje u njoj sadržane vode.[15] Pare kerozina dopijevaju na teže-dostupna mjesta čime se ostvaruje uniformno zagrijavanje.[5] Na kraju se apsolutni tlak dodatno snizuje kako bi se uklonio ostatak vlage i kerozinskih para. U toj fazi je potrebno osigurati dodatan toplinski tok kako bi ostatak kerozina i vode mogao ispariti i za tu svrhu služe ugrađeni električni grijači.[7]

Kada se upotrebljava ovako opisana tehnika sušenja u parnoj fazi u kojoj se kerozin prije vakuumske komore dovodi u parovito stanje, postoji mogućnost da velike količine kerozina u parnoj fazi bivaju usisane u kondenzator gdje se disipira latentna toplina i nakon čega je potrebno provesti separaciju. Takav proces ima lošu toplinsku učinkovitost.[15]

Alternativa je relativno nova tehnika u kojoj se kerozin raspršuje u kapljevitom agregatnom stanju što je moguće postići na način da se tlak u vakuumskoj komori regulira s obzirom na temperaturu. Kerozin na taj način biva raspršen u obliku sitnih kapljica i pri dolasku u kontakt s izolacijom predaje osjetnu toplinu uglavnom ostajući u kapljevitom agregatnom stanju. Na taj način se osigurava da minimalne količine kerozina bivaju usisane u kondenzator. Kako bi se nadoknadila latentna toplina koja bi se inače dobila kondenzacijom, osigurava se veći maseni protok kerozina kroz raspršivače. Prijenos topline na izolaciju je u ovakvom sustavu jednak ili čak bolji nego u prethodnom, a cjelokupna učinkovitost je poboljšana jer kerozin nije potrebno naknadno ukapljivati i separirati.[15]

Općenito gledajući, ako se izolacija suši u parnoj fazi, vrijeme sušenja je približno dvostruko kraće u odnosu na vakuumsko sušenje.[3] Ova tehnika ima i još neke prednosti: kapljeviti kondenzat ispire nečistoće s površine izolacije, a uniformno zagrijavanje rezultira i uniformnim skupljanjem celuloze uslijed sušenja.[7]



Slika 8. Shema sušenja u parnoj fazi

### 2.3. Sušenje pomoću nisko-frekventnog zagrijavanja

Ovo je relativno nova tehnika sušenja u kojoj se uz istodobnu primjenu vakuuma izolacija zagrijava protjecanjem nisko-frekventne struje kroz namotaje transformatora. Nakon što se izolacija stavi u vakuumsku komoru, kroz visokonaponski namot se propusti struja frekvencije reda veličine nekoliko mHz dok se niskonaponski namot kratko spoji što rezultira uniformnim zagrijavanjem oba namotaja. Oni se zagriju na temperaturu između 110 °C i 120 °C, pri čemu se pomoću sustava regulacije nadzire proces sušenja s posebnim naglaskom na temperature namotaja kako ne bi došlo do oštećenja izolacije.[3] Općenito, namotaji trebaju biti protjecani strujom manjom od 50% nazivne vrijednosti kako bi se postigla željena temperatura.[8]

Tijekom zagrijavanja se u komori održava niži tlak, tipično u iznosu od 30 mbar. Kada se zaustavi zagrijavanje namotaja, tlak se spušta ispod 1 mbar kako bi se izvuklo što više vlage. Ova tehnika sušenja se može unaprijediti raspršivanjem vrućeg ulja po izolaciji. Time se poboljšava dinamika sušenja i postiže uniformnije zagrijavanje čitave izolacije.[5] Ovom

metodom se postiže kraće vrijeme sušenja od konvencionalnih vakuumskih metoda, međutim nisko-frekventno sušenje se najčešće primjenjuje na distribucijske transformatore ili na transformatore srednjih snaga, dok se transformatori većih nazivnih snaga suše ovom metodom samo na terenu.[3]

## **2.4. Ostale tehnike**

Ovdje će se dati kratak pregled ostalih konvencionalnih tehnika koje se rjeđe susreću ili koje su uglavnom namijenjene za manje transformatore ili terensko sušenje.

### **2.4.1. Sušenje pomoću cirkulacije vrućeg zraka**

Ovom tehnikom se izolacija zagrijava na način da se pomoću odgovarajućih puhalu u komoru za sušenje upuhuje suh i vruć zrak, s gornje ili donje strane. Temperatura zraka se kreće između 90 °C i 120 °C i uglavnom se regulira pomoću električnih grijača.[3] Na ovaj se način suše distribucijski transformatori, ali se također može koristiti za terensko sušenje.[4][18]

### **2.4.2. Sušenje cirkulacijom vrućeg ulja**

Izolacija se zagrijava cirkuliranjem kroz kućište transformatora ulja zagrijanog na temperaturu od 60 °C do 80 °C. Ulje se zagrijava i pročišćuje u posebnom vanjskom grijaču nakon čega prolazi kroz gornji dio transformatora, ispumpava se na dnu i zatim se vraća u grijač. Nakon određenog vremena, ulje se ispušta u spremnik te se zatim primjenjuje vakuum. Ovaj proces se može ponavljati ovisno o sadržaju vlage i veličini transformatora.[3][4][18] Sušenje cirkulacijom ulja nije izrazito učinkovita tehnika, ali je zbog jednostavnosti primjene pogodna za sušenje na terenu tijekom održavanja.

### **2.4.3. Sušenje raspršivanjem vrućeg ulja**

Ova tehnika se može prakticirati tijekom proizvodne faze, zasebno ili u kombinaciji s drugim tehnikama sušenja, kao što je opisano u 2.3. Temelji se na raspršivanju vrućeg ulja po površini izolacije uz istovremenu primjenu vakuuma. Preklapanje vakuum faze i zagrijavanja smanjuje ukupno vrijeme sušenja međutim, uslijed kombiniranog djelovanja niskog tlaka i topline, može doći do uklanjanja lako-hlapivih frakcija transformatorskog ulja, čime mu se mogu izmijeniti viskozna svojstva.[15] Ako se tehnika primjenjuje na terenu, potrebno je ispustiti ulje iz transformatora i brizgaljke za ulje pričvrstiti na postojeće prirubnice.[18] U usporedbi sa sušenjem pomoću cirkulacije vrućeg ulja, ova tehnika je brža jer se mogu primjenjivati više temperature ulja (do 110 °C), a nedostatak je slabije sušenje teško-dostupnih dijelova

izolacije.[8] Na kraju procesa, potrebno je ponovno transformator napuniti uljem pod vakuumom.[3]

## 2.5. **Moguće poteškoće**

Geometrija transformatorske izolacije je veoma kompleksna i u općem se slučaju sastoji od celuloznih materijala različitih debljina i gustoća. Time su određeni parametri i potrebno vrijeme sušenja. Nakon što se završi proces sušenja, izolacija može imati loše osušene dijelove čiji sadržaj vlage iznosi više od 1%. Dobro osušeni dijelovi su tanki, primjerice, papir kojim se omotavaju namotaji i čija debljina ne premašuje 1 mm. S druge strane, sušenje debljih elemenata kao što su cilindri ili odstojni blokovi može biti problematično.[5]

U želji da se izbjegne jedan od problema, može se veoma lako zapasti u drugi. Naime, zagrijavanje izolacije na što višu temperaturu je ključno za učinkovito sušenje, bez obzira o kojoj se tehnici radi. Dakle, visoka temperatura poboljšava proces sušenja, ali s druge strane doprinosi degradaciji celuloze koja se očituje u stupnju polimerizacije. Novi izolacijski papir ima stupanj polimerizacije u vrijednosti od 1200 do 1300. Nakon sušenja, ta vrijednost pada na 1000. Postoje procjene da pad stupnja polimerizacije, kao posljedica procesa sušenja tijekom proizvodnje rezultira smanjenjem tehničkog životnog vijeka za pet godina, a to znači povećanje rizika od ozbiljnijih kvarova.[5] Poteškoće u procesu sušenja su neizbježne, ali se mogu minimalizirati odabirom tehnike i, što je još važnije, pravilnim vođenjem procesa, koristeći danas dostupne, moderne regulacijske sustave.

### 3. MATEMATIČKI MODEL

#### 3.1. Teorijske osnove sušenja i difuzije

Sušenje je složen proces kod kojeg se javlja simultan i tranzijentan prijenos topline i tvari. Mehanizmi tih prijenosa ovisit će o strukturi i kemijskom sastavu promatranog materijala, a da stvar bude dodatno zakomplicirana, svojstva materijala, osim što ovise o temperaturi i sadržaju vlage, mogu biti izmijenjena kao posljedica skupljanja materijala podvrgnutog sušenju. Transport vlage se može odvijati pomoću nekoliko različitih mehanizama, međutim u različitim trenutcima prevlada samo jedan mehanizam.[20] U svrhu točnijeg prikaza procesa, razvijeni su brojni modeli s pripadajućim pretpostavkama, koji uzimaju ili ne uzimaju u obzir: utjecaj prijenosa topline, kapilarno strujanje, hidrodinamički prijenos, isparavanje i kondenzaciju, skupljanje materijala itd. Najjednostavniji, a najvjerojatnije i prvi matematički model koji je opisivao difuziju kao prijenos mase u materijalu razvio je Fick 1855. godine.[21] Difuzija je u esenciji proces u kojem, kao posljedica nasumičnog gibanja molekula, dolazi do transporta mase iz jednog dijela sustava u drugi.[21] Prepoznavši analogiju s već matematički opisanim procesom provođenja topline, Fick je svoju formulaciju zasnovao na hipotezi gustoće masenog toka proporcionalne gradijentu koncentracije u smjeru normale na promatranu plohu. To je ekvivalent Fourierovom zakonu u kojem je gustoća toplinskog toka proporcionalna gradijentu temperature u smjeru pripadajuće normale. U općem slučaju je riječ o vektorskoj jednadžbi koja, uz poznato polje koncentracije, daje iznose gustoća masenih tokova u smjeru tri koordinatne osi. Ta jednadžba je poznatija kao 1. Fickov zakon i glasi:

$$j_i = -D \frac{\partial C}{\partial x_i}, \quad (3.1)$$

gdje je  $j_i$  vektor gustoće masenog toka, a  $D$  je izuzetno važna konstanta koja se naziva koeficijent difuzivnosti ili samo difuzivnost. U slučaju izotropnog materijala, koeficijent difuzivnosti je nepromjenjiv s obzirom na promatrani smjer.

Ako se na infinitezimalni volumen u polju koncentracije određene supstance, u kojem nema hidrodinamičkog strujanja i u kojem ne postoje maseni izvori ili ponori postavi zakon očuvanja mase dobiva se sljedeća skalarna jednadžba, poznatija kao 2. Fickov zakon ili jednadžba difuzije.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial C}{\partial x_i} \right). \quad (3.2)$$



Iz indeksne se notacije može prijeći u simbolički način zapisa koristeći kartezijeve koordinate.

Tada 2. Fickov zakon poprima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

ili u slučaju konstantne difuzivnosti:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) = D \nabla^2 C, \quad (3.4)$$

gdje  $\nabla^2$  označava Laplaceov operator. Jednadžba se može objasniti na sljedeći način: vremenska promjena koncentracije u infinitezimalnom volumenu (točki prostora) je jednaka zbroju razlika (gradijenata) gustoća masenih tokova u smjeru pojedinih osi.

U jednadžbi difuzije se ne mora nužno koristiti koncentracija tvari. Umjesto toga, pokretačkom silom masenog transporta odnosno sušenja, može se smatrati gradijent sadržaja vlage ili parcijalnog tlaka vodene pare, pa tako jednadžba difuzije može poprimiti sljedeći oblik:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_{\text{eff}} \frac{\partial X}{\partial x_i} \right), \quad (3.5)$$

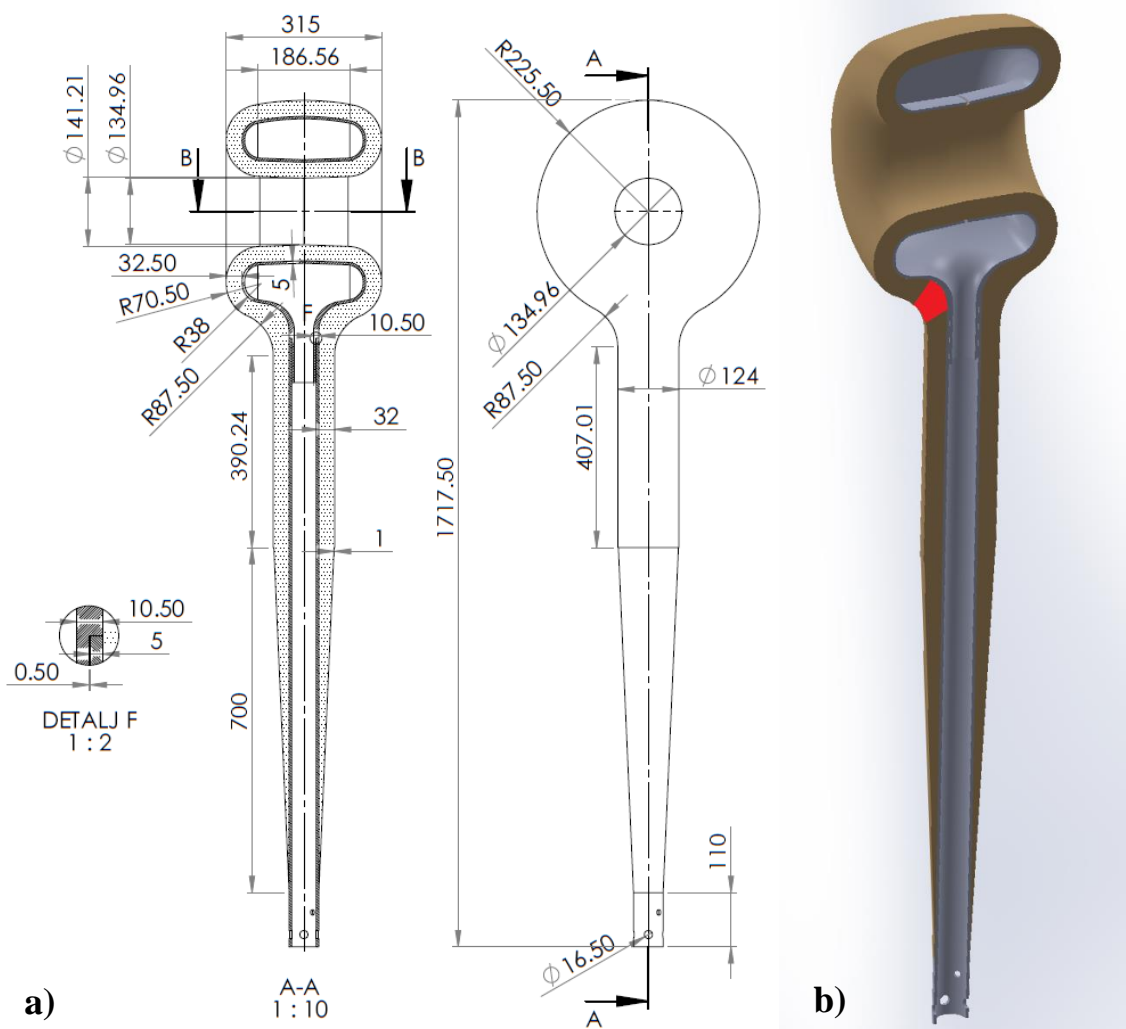
gdje je  $X$  sadržaj vlage materijala, a  $D_{\text{eff}}$  efektivna difuzivnost ovisna o sadržaju vlage i temperaturi. Ovisnost difuzivnosti o temperaturi zahtjeva poznavanje temperaturnog polja, a to znači da je potrebno riješiti jednadžbu provođenja topline, pa je riječ o modelu simultanog prijenosa topline i tvari. Ovakav se model često koristi kako bi se simuliralo sušenje celulozne izolacije transformatora jer se pomoću efektivne difuzivnosti uzima u obzir transport vlage putem različitih mehanizama.[20]

### 3.2. Promatrani problem

U okviru ovog rada, promatra se strujni mjerni transformator smanjenih dimenzija i nazivnog napona 123 kV kojeg je potrebno osušiti koristeći tehniku vakuumske sušenja. Transformator je proizvod tvrtke *Končar – Mjerni transformatori d.d.* i namijenjen je ispitivanju kvalitete procesa sušenja. Geometrija glavne izolacije je prikazana skicom na slici [Slika 9.a]. Dio izolacije, oblika šupljeg toroida, namijenjen je za sekundarni namot dok kroz otvor toroida prolazi primarni namot transformatora.

Kao što se vidi na skici, geometrija je poprilično kompleksna, stoga će se proces sušenja evaluirati na način da će se promatrati najdeblji dio celulozne izolacije koji se najdulje suši, a koji je na slici [Slika 9.b] istaknut crvenom bojom. Pri tome će se pretpostaviti da su uvjeti

sušenja jednaki sa svih strana transformatora, to jest da se sušenje odvija jednoliko po obodu promatranog segmenta izolacije. Imajući u vidu ovu pretpostavku, problem se svodi na dvije dimenzije čime će se bitno olakšati numeričko rješavanje relevantnih jednažbi i memorijsko opterećenje računala.



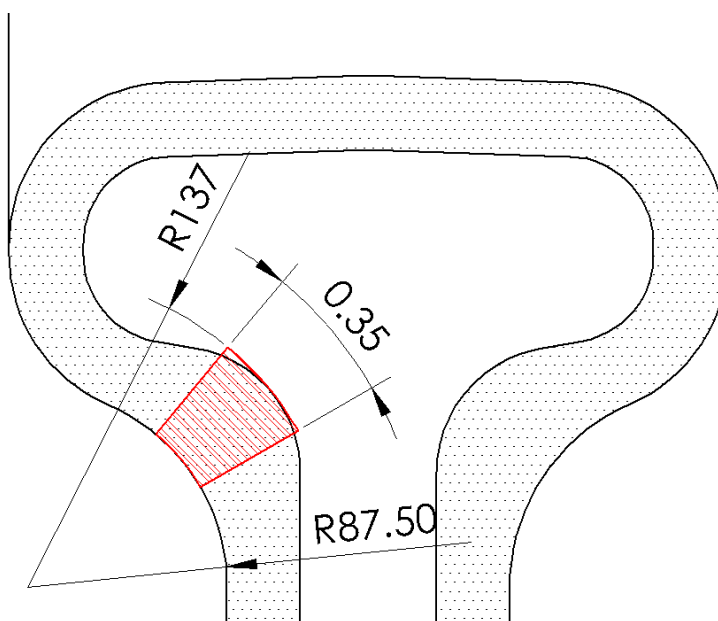
Slika 9. a) Skica glavne izolacije b) 3D prikaz s istaknutim segmentom

### 3.3. Aproksimacija domene

U svrhu pojednostavljenja i dobivanja strukturirane numeričke mreže pri kasnijoj diskretizaciji prostora, stvarni oblik poprečnog presjeka će se aproksimirati isječkom kružnog vijenca, u slučaju kojeg je najpogodnije koristiti polarne koordinate -  $r, \varphi$ . Navedena aproksimacija domene je označena crvenom bojom na slici [Slika 10.]. Može se zaključiti da će se smanjenjem središnjeg kuta kojeg zatvaraju bočne stranice isječka, dobiti domena koja bolje aproksimira stvarni presjek, međutim kut mora biti dovoljno velik da se pri kasnijoj eksperimentalnoj validaciji modela po rubovima domene i na prihvatljivoj međusobnoj udaljenosti mogu

postaviti termoparovi kojima bi se utvrdila stvarna temperaturna distribucija. Iz tog razloga je uzeta vrijednost središnjeg kuta od 0.35 rad, što je približno 20°. Najveća debljina izolacije odgovara duljini bočnih stranica isječka to jest jednaka je razlici radijusa zakrivljenosti unutarnje i vanjske strane segmenta:

$$\Delta_{\max} = R_2 - R_1 = 49.5 \text{ mm.} \quad (3.6)$$



Slika 10. Aproximacija domene

### 3.4. Diferencijalne jednačbe

Matematički model kojim će se opisati proces sušenja u definiranom segmentu celulozne izolacije, razvio je Henry 1939. godine pokušavajući objasniti fenomen apsorpiranja vlage u tekstilom materijalu. Model je kasnije revidiran u [21], a koristi se za opis simultanog prijenosa topline i vlage. U tom je slučaju potrebno riješiti sustav od dvije parcijalne diferencijalne jednačbe, jednačbe difuzije vlage i jednačbe provođenja topline. S obzirom na definiranu domenu, nezavisne će varijable u jednačbama biti dvije prostorne koordinate ( $r$  i  $\varphi$ ) i vrijeme  $t$  (jer je promatrani problem tranzijentan). U sljedećim potpoglavljima prikazan je kratak izvod jednačbi uz odgovarajuće pretpostavke.

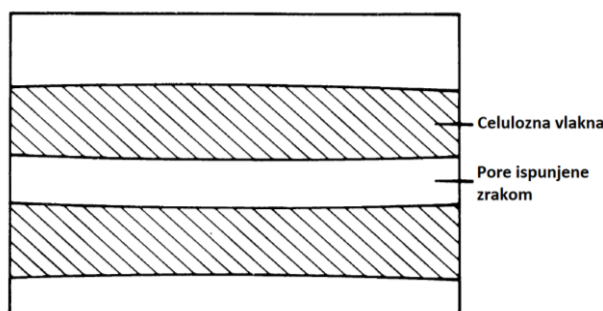
#### 3.4.1. Stanje ravnoteže

Papirna izolacija ima izrazito poroznu strukturu. U načelu, zrak zauzima i do 70% volumena papira [22] što je i poželjno kako bi se olakšala impregnacija ulja u celuloznu izolaciju. Fizikalno gledajući, zbog toga se svaka točka izolacije sastoji od određenog volumena zraka i

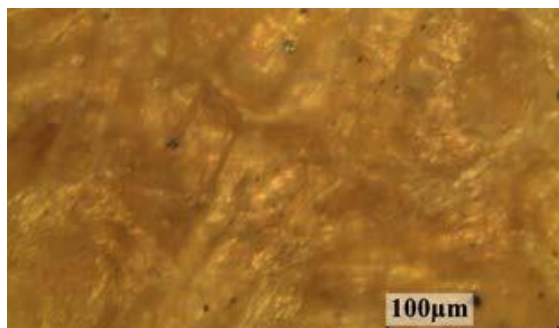
određenog volumena celuloze kako je prikazano na slici [Slika 11.]. Tako prikazan element celulozne izolacije daje pojednostavljen prikaz stvarne strukture [Slika 12.], ali će poslužiti svrsi - dobivanje uvida o tijeku procesa. Prva bitna pretpostavka ovog modela je postojanje lokalnog stanja ravnoteže što znači da se sadržaj vlage celuloznog vlakna trenutno prilagođava temperaturi i koncentraciji vlage u zraku koji ispunjava pore promatranog elementa. U matematičkom smislu, to bi značilo da je vlaga u svakoj točki domene funkcijski određena temperaturom i koncentracijom vlage u toj istoj točki. Ako se grafički prikaže ta funkcija, dobiva se familija sorpcijskih izoterma o kojima će biti riječi kasnije. Zasad se usvaja sljedeća bitna pretpostavka, a to je linearna ovisnost sadržaja vlage o temperaturi i koncentraciji vlage:

$$X = \text{konst.} + \sigma C - \omega T, \quad (3.7)$$

gdje je  $X$  sadržaj vlage u  $\text{kg vlage/kg celuloze}^2$ ,  $C$  je koncentracija vlage u  $\text{kg vlage/m}^3$  zraka,  $T$  je temperatura u K, a  $\sigma$  i  $\omega$  su konstante. Da bude jasnije, ako se promotri element izolacije na slici [Slika 11.] u određenoj točki prostora, temperatura celuloznih vlakana i zraka u porama je jednaka i iznosi  $T$ , koncentracija vlage u porama je  $C$ , a sadržaj vlage u celuloznim vlaknima je određen jednadžbom (3.7).



Slika 11. Element papirne izolacije [21]



Slika 12. Mikroskopska slika prešpana [23]

<sup>2</sup> čista celuloza će se smatrati potpuno suhim papirom = suha supstancija

### 3.4.2. *Jednadžba difuzije vlage*

Vlaga može difundirati samo kroz zrak u porama izolacije. To je pretpostavka koja se usvaja jer je difuzivnost vlage u zraku za nekoliko redova veličina veća u odnosu na difuzivnost vlage u vlažnoj celulozi. Imajući to u vidu, potrebno je razmotriti kako sve može doći do vremenske promjene koncentracije vlage u promatranom elementu. Prvi mehanizam je difuzija, to jest transport kao posljedica promjenjivog gradijenta koncentracije, a drugi mehanizam je apsorpcija ili desorpcija vlage iz celuloznih vlakana. To bi značilo kako je vremenska promjena koncentracije vlage u elementu (točki prostora) jednaka neto protoku vlage kroz element uslijed difuzije umanjenom ili uvećanom za masu apsorbirane ili desobirane vlage iz vlakna u jedinici vremena što se može prikazati sljedećom diferencijalnom jednadžbom svedenom na jedinicu volumena izolacije<sup>3</sup>:

$$v \frac{\partial C}{\partial t} = vgD_a \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} \right) - (1 - v)\rho_c \frac{\partial X}{\partial t}, \quad (3.8)$$

gdje je  $v$  poroznost papirne izolacije, definirana kao omjer volumena zraka i volumena izolacije,  $D_a$  je difuzivnost vlage u zraku, a  $\rho_c$  gustoća celuloze. Faktor  $g$  se naziva faktor otpora difuziji i njime se uzima u obzir složena struktura papirne izolacije, a može poprimiti vrijednosti između 0 i 1, gdje bi jedinica predstavljala difuziju kroz ravne, pravilne kanale.

### 3.4.3. *Jednadžba provođenja topline*

Temperatura promatranog elementa papirne izolacije mijenja se uslijed provođenja topline kroz celulozna vlakna i zrak te uslijed oslobađanja ili vezivanja topline zbog kondenzacije ili ishlapljivanja vode iz celuloznih vlakana. Ova energetska bilanca se može zapisati u obliku sljedeće jednadžbe:

$$c_c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_c \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + q\rho \frac{\partial X}{\partial t}, \quad (3.9)$$

gdje je  $c_c$  specifični toplinski kapacitet celuloze,  $\rho$  je gustoća papirne izolacije,  $\lambda_c$  je toplinska provodnost celuloze, a  $q$  je specifična latentna toplina isparavanja ili kondenzacije. U jednadžbi provođenja je zanemaren toplinski kapacitet i toplinska provodnost zraka. Usto je zanemarena i masa zraka, pa je gustoća papirne izolacije  $\rho^4$  jednaka masi celuloznih vlakana

<sup>3</sup> volumen izolacije = volumen zraka + volumen celuloze

<sup>4</sup> gustoća papirne izolacije se može izraziti jednadžbom  $\rho = (1 - v)\rho_c$

podijeljenoj s ukupnim volumenom izolacije. Valja također primijetiti da su prešutno pretpostavljene konstantne vrijednosti svih fizikalnih svojstava.

### 3.4.4. Formiranje sustava jednadžbi

Kako bi se uparile jednadžbe difuzije vlage i provođenja topline, potrebno je eliminirati parcijalnu derivaciju sadržaja vlage po vremenu. U tu svrhu će se iskoristiti jednadžba sorpcijske izoterme. Ako se jednadžba (3.7) parcijalno derivira po vremenu dobiva se sljedeća jednadžba:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - \omega \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (3.10) u jednadžbe (3.8) i (3.9), dobiva se sljedeći sustav:

$$v \frac{\partial C}{\partial t} = v g D_a \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} \right) - (1 - v) \rho_c \left( \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - \omega \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (3.11)$$

$$c_c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_c \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + q \rho \left( \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - \omega \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (3.12)$$

u kojem je eliminirana zavisna varijabla  $X$ . Ako se jednadžba (3.11) podijeli s  $v$ , a jednadžba (3.12) s  $c_c \rho$ , nakon prebacivanja svih članova na jednu stranu, dobiva se:

$$g D_a \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{(1 - v) \rho_c}{v} \left( \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - \omega \frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\lambda_c}{c_c \rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q}{c_c} \left( \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - \omega \frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.14)$$

Sada se mogu uvesti sljedeće supstitucije za faktore u jednadžbama:

$$D_v = g D_a \quad D_t = \lambda_c / c_c \rho \quad \gamma = (1 - v) \rho_c / v \quad \varepsilon = q / c_c,$$

gdje  $D_v$  predstavlja efektivnu difuzivnost vlage kroz zrak, a  $D_t$  je temperaturna provodnost, ali će se u ovom smislu koristiti naziv toplinska difuzivnost. Nakon što se sredi sustav jednadžbi (3.13) i (3.14), u konačnici se dobivaju uparene jednadžbe matematičkog modela:

$$D_v \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} \right) - (1 + \gamma \sigma) \frac{\partial C}{\partial t} + \gamma \omega \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3.15)$$

$$D_t \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) - (1 + \varepsilon \omega) \frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \quad (3.16)$$

### 3.4.5. Pregled pretpostavki

Kako bi se zaključila definicija matematičkog modela, još će se jednom pobrojati sve važeće pretpostavke i ograničenja:

1. Pretpostavlja se lokalno stanje ravnoteže između celuloznih vlakana i vlažnog zraka u porama koje je definirano jednadžbom sorpcijske izoterme
2. Pretpostavlja se linearna funkcija sorpcijske izoterme
3. Difuzija vlage se odvija samo kroz zrak u porama
4. Sva fizikalna svojstva su konstantna (poroznost  $v$ , gustoća celuloze  $\rho_c$ , gustoća papirne izolacije  $\rho$ , specifični toplinski kapacitet celuloze  $c_c$  i toplinska provodnost celuloze  $\lambda_c$ )
5. Specifična latentna toplina isparavanja/kondenzacije je konstantna,  $q = \text{konst.}$
6. Zanemaruje se specifični toplinski kapacitet, toplinska provodnost i masa zraka
7. Zanemaruje se histereza sorpcijskih izoterma (nema razlike između apsorpcije i desorpcije vlage)

### 3.5. Linearizacija sorpcijskih izoterma

Sorpcijske izoterme su eksperimentalno dobivene krivulje koje pokazuju skup svih mogućih ravnotežnih stanja nekog materijala s obzirom na relativnu vlažnost i temperaturu okolnog zraka. Ravnotežno stanje je postignuto kada su zrak i materijal na jednakoj temperaturi i kada prestane prijenos vlage to jest kada iščeznu svi gradijenti. Ravnotežni sadržaji vlage se u pravilu razlikuju ovisno o tome da li je materijal prije stanja ravnoteže bio podvrgnut sušenju ili vlaženju, a razlika između te dvije vrijednosti sadržaja vlage se naziva histereza. Primjer familije sorpcijskih krivulja drvene pulpe, u kojima je zanemarena histereza, prikazan je na slici [Slika 13.].

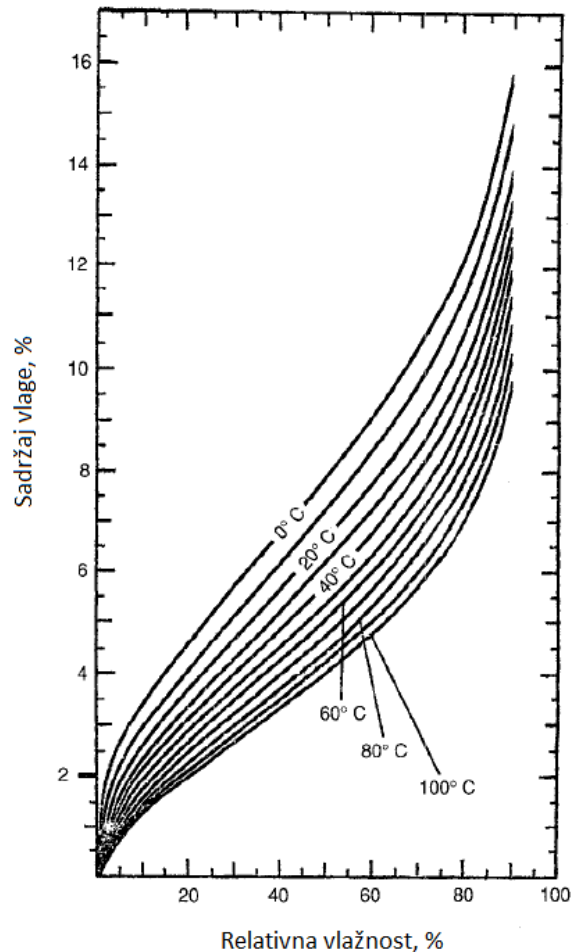
Sorpcijske krivulje se mogu također mogu dobiti, ako se na x-os stavi parcijalni tlak vodene pare umjesto relativne vlažnosti. Tako su, Fessler i sur. 1987. godine kombinirajući podatke različitih istraživanja zajedno s vlastitim eksperimentom dobili sljedeću empirijsku jednadžbu sorpcijskih krivulja za transformatorski papir: [12]

$$X = 2,173 \cdot 10^{-7} \cdot p_d^{0,6685} \cdot e^{\frac{4725,6}{T}}, \quad (3.17)$$

gdje je  $p_d$  parcijalni tlak vodene pare u vlažnom zraku koji se uvrštava u fizikalnim atmosferama (atm),  $X$  je sadržaj vlage u kg vlage/kg suhog papira, a  $T$  je temperatura u K.

Du i sur.[12] su također ispravili Fesslerovu pogrešku u inverznoj funkciji od (3.17), odnosno dali izraz za ravnotežni parcijalni tlak vodene pare u ovisnosti o sadržaju vlage i temperaturi:

$$p_d = 9,2683 \cdot 10^9 \cdot X^{1,4959} \cdot e^{\frac{-7069}{T}}. \quad (3.18)$$



Slika 13. Krivulje ravnotežne vlažnosti za drvenu pulpu [12]

Pošto je jednadžbom (3.7) dana funkcijska ovisnost  $X = f(C, T)$ , parcijalni tlak vodene pare u jednadžbi (3.17) je potrebno izraziti pomoću koncentracije vodene pare u zraku. U tu svrhu, uvodi se pretpostavka kako se vodena para u zraku ponaša kao idealni plin, pa stoga za vodenu paru vrijedi jednadžba stanja:

$$p_d V = m_d R_d T, \quad (3.19)$$

gdje je  $R_d$  plinska konstanta vodene pare i iznosi  $R_d = 461,5 \text{ J/kgK}$ . Ako se cijela jednadžba podijeli s volumenom dobiva se:



$$p_d = \frac{m_d R_d T}{V} = C R_d T. \quad (3.20)$$

Tlak  $p_d$  je izražen u Pa, a da bi se dobio u fizikalnim atmosferama, cijela jednačba se mora podijeliti s 101325 Pa,

$$p_d = \frac{C R_d T}{101325}. \quad (3.21)$$

Sada je potrebno uvrstiti jednačbu (3.21) u jednačbu (3.17):

$$X = 2,173 \cdot 10^{-7} \cdot \left( \frac{R_d T}{101325} \right)^{0,6685} \cdot e^{\frac{4725,6}{T}} \cdot C^{0,6685}. \quad (3.22)$$

Uvrštavanjem jednačbe (3.21) u jednačbu (3.18), dobiva se funkcija  $C = f(X, T)$ ,

$$C = 9,2683 \cdot 10^9 \cdot \left( \frac{101325}{R_d T} \right) \cdot X^{1,4959} \cdot e^{\frac{-7069}{T}}. \quad (3.23)$$

Skalarna funkcija dana jednačbom (3.22) je kontinuirana i diferencijabilna što znači da se razvijanjem u Taylorov red oko neke točke  $(C_0, T_0)$  i odbacivanjem nelinearnih članova može dobiti linearna funkcija  $X = f_L(C, T)$ , koja dobro aproksimira originalnu funkciju u okolini točke  $(C_0, T_0)$ . Ta funkcija ima oblik:

$$X \approx f_L(C, T) = X(C_0, T_0) + \left. \frac{\partial X}{\partial C} \right|_0 (C - C_0) + \left. \frac{\partial X}{\partial T} \right|_0 (T - T_0) \quad (3.24)$$

odnosno nakon sređivanja:

$$X = X(C_0, T_0) - \left. \frac{\partial X}{\partial C} \right|_0 C_0 - \left. \frac{\partial X}{\partial T} \right|_0 T_0 + \left. \frac{\partial X}{\partial C} \right|_0 C + \left. \frac{\partial X}{\partial T} \right|_0 T. \quad (3.25)$$

Prva tri člana su konstantna i ovise samo o točki oko koje se razvija red,

$$X = \text{konst.} + \left. \frac{\partial X}{\partial C} \right|_0 C + \left. \frac{\partial X}{\partial T} \right|_0 T. \quad (3.26)$$

Može se uočiti da je jednačba (3.26) po obliku identična jednačbi (3.7). Deriviranjem obje jednačbe po vremenu i izjednačavanjem desnih strana, dobiva se:

$$\left. \frac{\partial X}{\partial C} \right|_0 \frac{\partial C}{\partial t} + \left. \frac{\partial X}{\partial T} \right|_0 \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma \frac{\partial C}{\partial t} - \omega \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.27)$$

Primjećuje se da je Henry [21] već poveo računa o predznaku koeficijentata, što se lako može provjeriti uvrštavanjem proizvoljnih vrijednosti  $C_0$  i  $T_0$  u derivacije. Između ostalog, drugačiji predznaci ne bi imali fizikalnog smisla. To bi značilo da bi se povećanjem koncentracije vlage

u zraku, ravnotežni sadržaj vlage u materijalu smanjivao, odnosno povišenjem temperature bi se povećavao. Zaključuje se da su, do sada nepoznate konstante  $\sigma$  i  $\omega$  uvijek pozitivne i jednake apsolutnim vrijednostima parcijalnih derivacija u točki oko koje se razvija red, to jest:

$$\sigma = \left| \frac{\partial X}{\partial C}(C_0, T_0) \right|, \quad (3.28)$$

$$\omega = \left| \frac{\partial X}{\partial T}(C_0, T_0) \right|. \quad (3.29)$$

Ove funkcije se mogu dobiti parcijalnim deriviranjem jednadžbe (3.22) po  $C$  i po  $T$ .

$$\sigma(C_0, T_0) = \left| 2,173 \cdot 10^{-7} \left( \frac{R_d T_0}{101325} \right)^{0,6685} e^{\frac{4725,6}{T_0}} \frac{0,6685}{C_0^{0,3315}} \right|, \quad (3.30)$$

$$\omega(C_0, T_0) = \left| 2,173 \cdot 10^{-7} \left( \frac{R_d C_0}{101325} \right)^{0,6685} e^{\frac{4725,6}{T_0}} \left( \frac{0,6685}{T_0^{0,3315}} - \frac{4725,6}{T_0^{1,3315}} \right) \right|. \quad (3.31)$$

### 3.6. Početni i rubni uvjeti

Kako bi se dobila egzaktna rješenja sustava jednadžbi (3.15) i (3.16), a to su skalarna polja  $C(r, \varphi, t)$ ,  $T(r, \varphi, t)$  i  $X(r, \varphi, t)$ . potrebno je zadati određene početne i rubne uvjete. Početni uvjeti će se zadati uz pretpostavku da je cijela izolacija na početku sušenja u potpunosti progrijana i da je sadržaj vlage jednolik. Ta dva podatka se također mogu dobiti adekvatnim postupcima mjerenja. Naime, temperatura se može izmjeriti npr. pomoću termoparova, a sadržaj vlage uzimanjem uzorka papirne izolacije i mjerenjem mase vlage na analitičkoj vagi (gravimetrijska metoda). Početni uvjeti su stoga:

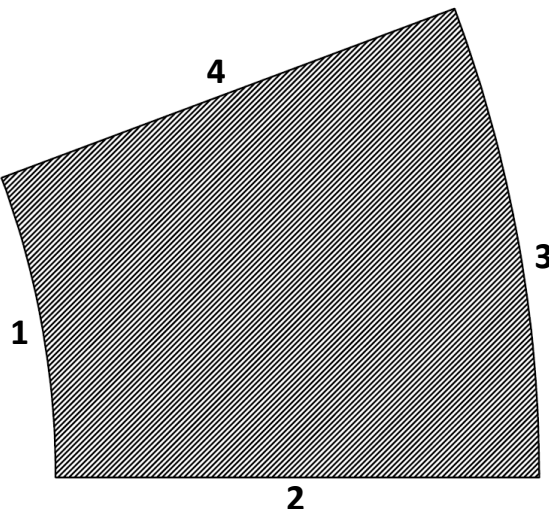
$$X(r, \varphi, t = 0) = X_i, \quad (3.32)$$

$$T(r, \varphi, t = 0) = T_i. \quad (3.33)$$

Pošto su zavisne varijable u sustavu jednadžbi (3.15) i (3.16) koncentracija  $C$  i temperatura  $T$ , potrebno je zadati početnu koncentraciju vlage u porama,  $C_i$ . To se može dobiti, ako se u jednadžbu sorpcijske izoterme (3.23) uvrste zadani  $X_i$  i  $T_i$ , odnosno

$$C(r, \varphi, t = 0) = 9,2683 \cdot 10^9 \left( \frac{101325}{R_d T_i} \right) X_i^{1,4959} e^{\frac{-7069}{T_i}} = C_i. \quad (3.34)$$

Rubni uvjeti se zadaju posebno za svaku od dvije jednadžbe u sustavu. Prije nego se pristupi njihovoj definiciji, brojevima će se na promatranj geometriji naznačiti sve rubne plohe što je prikazano na slici [Slika 14.].



Slika 14. Geometrija s naznačenim plohama

### 3.6.1. Rubni uvjeti jednadžbe difuzije vlage

#### 3.6.1.1. Ploha 1

Na plohi 1 se propisuje sljedeći rubni uvjet 3. vrste:

$$-D_v \frac{\partial C}{\partial r}(R_1, \varphi, t) = \alpha_m(t)[C_\infty(t) - C(R_1, \varphi, t)], \quad (3.35)$$

gdje je  $\alpha_m(t)$  vremenski ovisan koeficijent transporta mase (vlage) u m/s,  $C_\infty(t)$  vremenski ovisna koncentracija vlage u okolnom zraku, a  $R_1$  je radijus zakrivljenosti vanjske plohe koji je jednak  $R_1 = 87.5 \text{ mm} = 0.0875 \text{ m}$ . Dijeljenjem jednadžbe (3.35) s  $-D_v$ , slijedi:

$$\frac{\partial C}{\partial r}(R_1, \varphi, t) = -\frac{\alpha_m(t)}{D_v}[C_\infty(t) - C(R_1, \varphi, t)]. \quad (3.36)$$

#### 3.6.1.2. Ploha 2

Pretpostavlja se jednoliko sušenje izolacije po debljini (u radijalnom smjeru). To znači da je gustoća masenog toka vlage na plohi 2 jednaka nuli, odnosno da je rubni uvjet propisan sljedećom jednadžbom:

$$-D_v \frac{\partial C}{\partial(r\varphi)}(r, \phi_1, t) = 0, \quad (3.37)$$

gdje je  $\phi_1 = 0 \text{ rad}$ . Dijeljenjem jednadžbe (3.37) s  $-D_v$ , slijedi:

$$\frac{\partial C}{\partial(r\varphi)}(r, \phi_1, t) = 0. \quad (3.38)$$

### 3.6.1.3. Ploha 3

Zbog metalne stijenke s unutarnje strane promatrane geometrije, ploha 3 je nepropusna za vlagu. To znači da je gustoća masenog toka vlage jednaka nuli.

$$-D_v \frac{\partial C}{\partial r}(R_2, \varphi, t) = 0, \quad (3.39)$$

gdje je  $R_2$  radijus zakrivljenosti unutarnje plohe i iznosi  $R_2 = 137 \text{ mm} = 0.137 \text{ m}$ . Dijeljenjem jednadžbe (3.39) s  $-D_v$ , slijedi:

$$\frac{\partial C}{\partial r}(R_2, \varphi, t) = 0. \quad (3.40)$$

### 3.6.1.4. Ploha 4

Na plohi 4 se propisuje jednak rubni uvjet kao i na plohi 2:

$$-D_v \frac{\partial C}{\partial(r\varphi)}(r, \phi_2, t) = 0, \quad (3.41)$$

gdje je  $\phi_2 = 20.05^\circ = 0.35 \text{ rad}$ . Dijeljenjem jednadžbe (3.41) s  $-D_v$ , slijedi:

$$\frac{\partial C}{\partial(r\varphi)}(r, \phi_2, t) = 0. \quad (3.42)$$

## 3.6.2. Rubni uvjeti jednadžbe provođenja topline

### 3.6.2.1. Ploha 1

Na plohi 1 se propisuje sljedeći rubni uvjet 3. vrste:

$$-\lambda_c \frac{\partial T}{\partial r}(R_1, \varphi, t) = \alpha_v(t) [T_{v,\infty}(t) - T(R_1, \varphi, t)], \quad (3.43)$$

gdje je  $\alpha_v(t)$  vremenski ovisan koeficijent prijelaza topline na vanjskoj plohi, a  $T_{v,\infty}(t)$  vremenski ovisna temperatura okolnog zraka s vanjske strane. Dijeljenjem jednadžbe (3.43) s  $-\lambda_c$ , slijedi:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(R_1, \varphi, t) = -\frac{\alpha_v(t)}{\lambda_c} [T_{v,\infty}(t) - T(R_1, \varphi, t)]. \quad (3.44)$$

## 3.6.2.2. Ploha 2

Na plohi 2 se propisuje adijabatski rubni uvjet jer se pretpostavlja jednoliko zagrijavanje izolacije po debljini (u radijalnom smjeru). To znači da je gradijent temperature u tangencijalnom smjeru jednak nuli:

$$\frac{\partial T}{\partial(r\varphi)}(r, \phi_1, t) = 0. \quad (3.45)$$

## 3.6.2.3. Ploha 3

Na plohi 3 se propisuje sljedeći rubni uvjet 3. vrste:

$$\lambda_c \frac{\partial T}{\partial r}(R_2, \varphi, t) = \alpha_u(t)[T_{u,\infty}(t) - T(R_2, \varphi, t)], \quad (3.46)$$

gdje je  $\alpha_u(t)$  vremenski ovisan koeficijent prijelaza topline na unutarnjoj plohi, a  $T_{u,\infty}(t)$  vremenski ovisna temperatura okolnog zraka s unutarnje strane. Ovaj rubni uvjet slijedi iz činjenice da se toplinski otpor metalne stijenke može zanemariti. Dijeljenjem jednadžbe (3.46) s  $\lambda_c$ , slijedi:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(R_2, \varphi, t) = \frac{\alpha_u(t)}{\lambda_c} [T_{u,\infty}(t) - T(R_2, \varphi, t)]. \quad (3.47)$$

## 3.6.2.4. Ploha 4

Na plohi 4 se propisuje jednak rubni uvjet kao i na plohi 2:

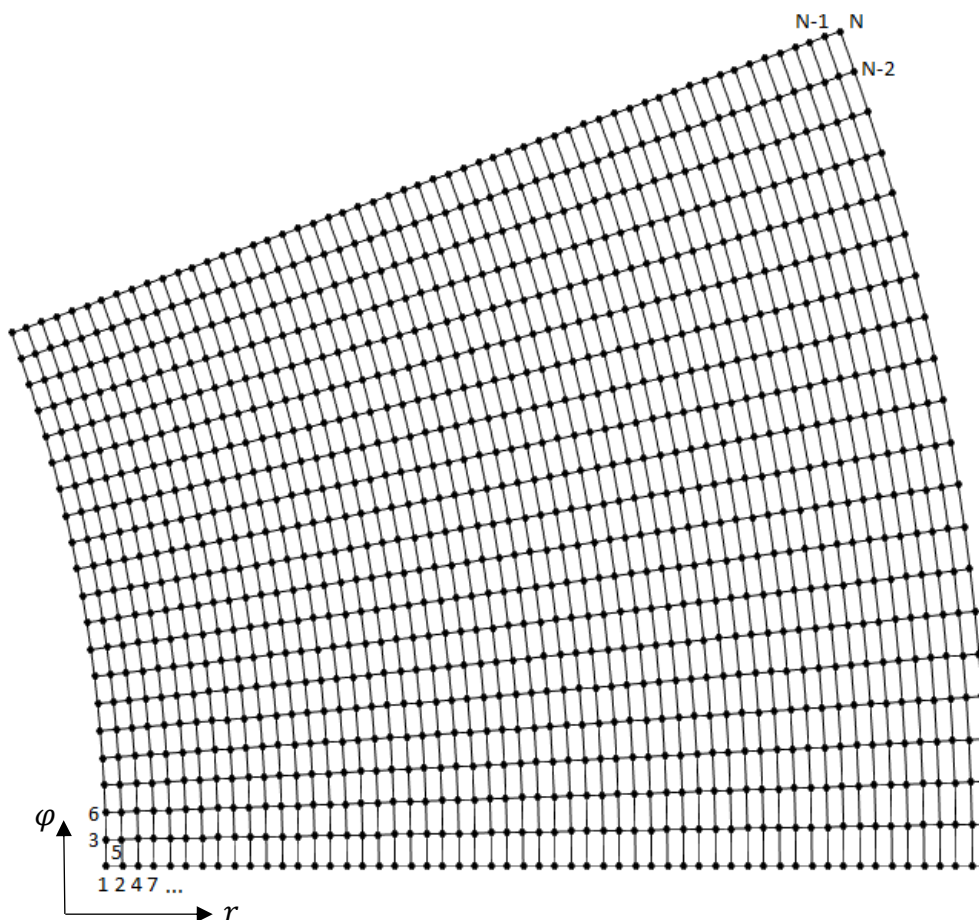
$$\frac{\partial T}{\partial(r\varphi)}(r, \phi_2, t) = 0. \quad (3.48)$$

## 4. POSTUPAK NUMERIČKOG RJEŠAVANJA

Sustav jednačbi (3.15) i (3.16), rješava se metodom konačnih razlika (diferencija). To iziskuje diskretizaciju prostora, vremena, diferencijalnih jednačbi i rubnih uvjeta. Na koncu se dobivaju dva sustava linearnih algebarskih jednačbi koje je potrebno riješiti kako bi se dobila diskretna polja zavisnih varijabli to jest rješenja.

### 4.1. Diskretizacija prostorne domene rješavanja

Prvi korak kod primjene metode konačnih razlika je diskretizacija prostora odnosno matematičke domene. Prostor se diskretizira na način da se beskonačan broj točaka kontinuuma zamjeni konačnim brojem čvorova. Svaki čvor ima svoje koordinate, pripisane vrijednosti zavisnih varijabli i konačan broj susjednih čvorova. Dakle rješenja sustava diferencijalnih jednačbi su poznata samo u konačnom broju točaka domene to jest u čvorovima mreže. U načelu se povećanjem broja čvorova povećava rezolucija, ali i točnost rješenja.[24] Diskretizacija promatrane geometrije zajedno s ucrtanim koordinatnim osima, prikazana je na slici [Slika 15.].



Slika 15. Mreža čvorova s naznačenom shemom numeracije

Broj čvorova u radijalnom smjeru je  $N_r$ , a u tangencijalnom je smjeru  $N_\varphi$ . To znači da je ukupan broj čvorova jednak  $N = N_r \cdot N_\varphi$ . Inkrementi u smjeru osi  $r$  odnosno  $\varphi$  iznose:

$$\Delta r = \frac{R_2 - R_1}{N_r - 1} \quad (4.1)$$

$$\Delta \varphi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{N_\varphi - 1}. \quad (4.2)$$

Svaki čvor ima dva indeksa koji označuju poziciju u domeni:  $i$  kojim se pobrojavaju čvorovi u smjeru osi  $r$  (radijalnom smjeru) i  $j$  kojim se pobrojavaju čvorovi u smjeru osi  $\varphi$  (tangencijalnom smjeru). Pomoću tih indeksa su zadane  $r$  i  $\varphi$  koordinate svakog čvora, a mogu se izračunati iz sljedećih jednadžbi:

$$r_{i,j} = R_1 + i \cdot \Delta r, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, N_r - 1 \quad (4.3)$$

$$\varphi_{i,j} = j \cdot \Delta \varphi, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, N_\varphi - 1. \quad (4.4)$$

Tako su primjerice koordinate čvora s indeksima  $i = 0$  i  $j = 0$  jednake  $r_{0,0} = R_1$  i  $\varphi_{0,0} = 0$ .

Na kraju je još bitno naglasiti važnost načina na koji se numeriraju čvorovi. Na slici [Slika 15.] se vidi kako su čvorovi numerirani dijagonalnom shemom. Na taj se način na kraju dobiva matrica koeficijenata linearnih algebarskih jednadžbi koja je dijagonalno orijentirana čime se poboljšava stabilnost pri rješavanju sustava jednadžbi iterativnim metodama. Dijagonalna orijentiranost znači da se ne-nulti elementi matrice nalaze u blizini glavne dijagonale. Razlog tome je taj što su redni brojevi susjednih čvorova „u blizini“ rednog broja promatranog čvora.

## 4.2. Vremenska diskretizacija

Diskretizacijom vremenske varijable se ukupno vrijeme trajanja sušenja razdjeljuje na konačan broj vremenskih intervala. Tijekom svakog vremenskog intervala zavisne varijable imaju konstantne vrijednosti, a zatim se u idućem intervalu mijenjaju. Uz poznato ukupno vrijeme sušenja  $t_{uk}$  i odabrani vremenski korak (inkrement)  $\Delta t$ , može se izračunati potreban broj vremenskih koraka:

$$N_t = \frac{t_{uk}}{\Delta t}. \quad (4.5)$$

Indeksom  $n$  se označava trenutni vremenski korak, pa je proteklo vrijeme jednako:

$$t = n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_t. \quad (4.6)$$

### 4.3. Diskretizacija diferencijalnih jednadžbi

Ako se promotri sustav jednadžbi (3.15) i (3.16), vidi se kako se pojavljuju dva različita operatora: vremenska derivacija i Laplaceov operator u polarnim koordinatama. Njih je potrebno aproksimirati nekom od diferencijskih shema. U načelu se diferencijske sheme dijele na implicitne, eksplicitne ili hibridne (djelomično implicitne odnosno djelomično eksplicitne). Glavna razlika između eksplicitnih i implicitnih shema je ta što se u eksplicitnim shemama koriste vrijednosti zavisnih varijabli iz trenutnog vremenskog koraka koje su poznate jer se započinje od zadanih početnih uvjeta. U tom slučaju se ne iziskuje rješavanje sustava algebarskih jednadžbi jer je rješenje iz sljedećeg vremenskog intervala dano eksplicitno i dobiva se uvrštavanjem vrijednosti zavisnih varijabli iz trenutnog vremenskog intervala. S druge strane, implicitne sheme koriste vrijednosti zavisnih varijabli iz vremenskog intervala koji tek slijedi i to su nepoznate vrijednosti koje se na kraju određuju rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

Diskretizacija započinje tako da se svaki operator u diferencijalnoj jednadžbi aproksimira odabranom shemom diferencija, recimo implicitnom. Nakon toga se izvuku koeficijenti i dobiva se linearna algebarska jednadžba u kojoj su nepoznanice vrijednosti neke zavisne varijable u proizvoljnom čvoru i njemu susjednim čvorovima iz vremenskog intervala koji slijedi.

#### 4.3.1. Jednadžba difuzije vlage

Prije nego se definiraju diskretizacijske sheme, razjasniti će se pojednostavljeno zapisivanje varijabli u diskretiziranim jednadžbama. Na primjer, koncentracija vlage u točki s koordinatama  $r$  i  $\varphi$ , u vremenskom trenutku  $t$ , može se zapisati na sljedeći način:

$$C(r, \varphi, t) = C(R_1 + i\Delta r, j\Delta\varphi, n\Delta t) \equiv C_{i,j}^n. \quad (4.7)$$

Dakle donji par indeksa  $i, j$  označava lokaciju točke, a gornji indeks  $n$  označava trenutni vremenski interval. Slijedom navedenog,  $C_{i,j}^{n+1}$  označava vrijednost koncentracije u promatranom čvoru u sljedećem vremenskom intervalu dok primjerice  $C_{i+1,j}^n$  označava vrijednost koncentracije u trenutnom vremenskom intervalu, ali u susjednom čvoru u pozitivnom smjeru koordinate  $r$  itd.

Derivacije po vremenu će se aproksimirati shemom diferencija unaprijed.[25] To jest:



$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (4.9)$$

Laplaceov operator u polarnim koordinatama će se aproksimirati implicitnom shemom centralnih diferencija: [26]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} \\ & \approx \frac{C_{i+1,j}^{n+1} + C_{i-1,j}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{R_1 + i\Delta r} \frac{C_{i+1,j}^{n+1} - C_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta r} \\ & + \frac{1}{(R_1 + i\Delta r)^2} \frac{C_{i,j+1}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1}}{\Delta \varphi^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ako se u jednadžbi (3.15) operatori zamjene navedenim diferencijskim shemama, dobiva se diskretizirana jednadžba difuzije vlage:

$$\begin{aligned} & D_v \left[ \frac{C_{i+1,j}^{n+1} + C_{i-1,j}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{R_1 + i\Delta r} \frac{C_{i+1,j}^{n+1} - C_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta r} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(R_1 + i\Delta r)^2} \frac{C_{i,j+1}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1}}{\Delta \varphi^2} \right] - (1 + \gamma\sigma) \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} \\ & + \gamma\omega \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

U jednadžbi (4.11) se javljaju koeficijenti  $\sigma$  i  $\omega$ . Kako je pokazano u 3.5, to su funkcije varijabli  $C_0$  i  $T_0$  oko kojih se razvija Taylorov red u svrhu linearizacije sorpcijskih izoterma. Vrijednosti tih koeficijenata, dobivaju se, ako se u jednadžbe (3.30) i (3.31) uvrste koncentracija vlage i temperatura promatranog čvora iz trenutnog vremenskog intervala, to jest  $C_{i,j}^n$  i  $T_{i,j}^n$ . Nadalje će se stoga skraćeno zapisivati:

$$\sigma(C_{i,j}^n, T_{i,j}^n) \equiv \sigma, \quad (4.12)$$

$$\omega(C_{i,j}^n, T_{i,j}^n) \equiv \omega. \quad (4.13)$$

Također se mogu uvesti sljedeće supstitucije:

$$a_{1v} = \frac{\Delta t D_v}{\Delta r^2} \quad (4.14)$$

$$a_{2v,i} = \frac{\Delta t D_v}{[\Delta \varphi (R_1 + i \Delta r)]^2} \quad (4.15)$$

$$b_{1,i} = 1 - \frac{\Delta r}{2(R_1 + i \Delta r)} \quad (4.16)$$

$$b_{2,i} = 1 + \frac{\Delta r}{2(R_1 + i \Delta r)}. \quad (4.17)$$

Sređivanjem jednadžbe (4.11) i uvođenjem supstitucija, dobiva se konačni oblik diskretizirane jednadžbe difuzije vlage za proizvoljni čvor u mreži:

$$\begin{aligned} & -a_{1v} b_{1,i} C_{i-1,j}^{n+1} - a_{1v} b_{2,i} C_{i+1,j}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v,i}) + \gamma \sigma] C_{i,j}^{n+1} \\ & - a_{2v,i} C_{i,j-1}^{n+1} - a_{2v,i} C_{i,j+1}^{n+1} - \gamma \omega T_{i,j}^{n+1} = (1 + \gamma \sigma) C_{i,j}^n - \gamma \omega T_{i,j}^n. \end{aligned} \quad (4.18)$$

#### 4.3.2. Jednadžba provođenja topline

Analognim postupkom kao u 4.3.1, prvo se operatori u jednadžbi (3.16) zamjene odgovarajućim shemama diferencije:

$$\begin{aligned} & D_t \left[ \frac{T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{R_1 + i \Delta r} \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta r} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(R_1 + i \Delta r)^2} \frac{T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1}}{\Delta \varphi^2} \right] - (1 + \varepsilon \omega) \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \\ & + \varepsilon \sigma \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Zatim se jednadžba sredi i uvedu se supstitucije. U diskretiziranoj jednadžbi provođenja topline će se koeficijenti  $a_{1v}$  i  $a_{2v,i}$  zamijeniti sljedećim supstitucijama:

$$a_{1t} = \frac{\Delta t D_t}{\Delta r^2} \quad (4.20)$$

$$a_{2t,i} = \frac{\Delta t D_t}{[\Delta \varphi (R_1 + i \Delta r)]^2}. \quad (4.21)$$

Slijedi konačni oblik diskretizirane jednadžbe provođenja topline za proizvoljni čvor u mreži:

$$\begin{aligned}
& -a_{1t}b_{1,i}T_{i-1,j}^{n+1} - a_{1t}b_{2,i}T_{i+1,j}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t,i}) + \varepsilon\omega]T_{i,j}^{n+1} \\
& - a_{2t,i}T_{i,j-1}^{n+1} - a_{2t,i}T_{i,j+1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{i,j}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{i,j}^n - \varepsilon\sigma C_{i,j}^n.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

#### 4.4. Diskretizacija rubnih uvjeta

Ako se za rubne čvorove raspišu diskretizirane jednadžbe (4.18) i (4.22), u njima će se kao nepoznanice pojaviti pojedini susjedni čvorovi koji su izvan domene. Riječ je o takozvanim zamišljenim točkama (eng. *image point*). Koristeći propisane, diskretizirane rubne uvjete, varijable u tim čvorovima se mogu, kao što će pokazati jednadžbe u sljedećim potpoglavljima, izraziti pomoću vrijednosti varijabli u stvarnim čvorovima. To je između ostaloga i svrha rubnih uvjeta u procesu formiranja algebarskih jednadžbi.

U jednadžbama rubnih uvjeta definiranih u 3.6.1 i 3.6.2, kao operator se javlja samo gradijent kojeg će se aproksimirati implicitnom shemom centralne diferencije. Brojevi ploha na kojima se propisuju rubni uvjeti su u skladu s oznakama na slici [Slika 14.].

##### 4.4.1. Diskretizacija rubnih uvjeta jednadžbe difuzije vlage

###### 4.4.1.1. Ploha 1

Čvorovi na plohi 1 imaju indekse:

$$i = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, N_\varphi - 1.$$

Diskretizacijom jednadžbe (3.36), dobiva se:

$$\frac{C_{1,j}^{n+1} - C_{-1,j}^{n+1}}{2\Delta r} = -\frac{\alpha_m}{D_v}(C_\infty - C_{0,j}^{n+1}). \tag{4.23}$$

Kao što je već bilo rečeno, iz rubnog uvjeta se izražava zamišljeni čvor  $C_{-1,j}^{n+1}$ :

$$C_{-1,j}^{n+1} = C_{1,j}^{n+1} + 2\frac{\alpha_m\Delta r}{D_v}(C_\infty - C_{0,j}^{n+1}). \tag{4.24}$$

Sažetijeg zapisa radi, može se uvesti supstitucija:

$$d_v = \frac{\alpha_m\Delta r}{D_v} \tag{4.25}$$

odakle slijedi konačni oblik diskretiziranog rubnog uvjeta:

$$C_{-1,j}^{n+1} = C_{1,j}^{n+1} + 2d_v(C_\infty - C_{0,j}^{n+1}). \tag{4.26}$$

U prethodnim se jednadžbama prešutno izostavio funkcijski zapis  $C_\infty(t)$  i  $\alpha_m(t)$ , međutim treba imati na umu kako će se pri rješavanju sustava diferencijalnih jednadžbi te veličine promatrati kao zadane funkcije vremena koje će se mijenjati u svakom nadolazećem vremenskom intervalu.

#### 4.4.1.2. Ploha 2

Čvorovi na plohi 2 imaju indekse:

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots, N_r - 1, \quad j = 0.$$

Diskretizacijom jednadžbe (3.38), dobiva se:

$$\frac{C_{i,1}^{n+1} - C_{i,-1}^{n+1}}{2(R_1 + i\Delta r)\Delta\varphi} = 0 \quad (4.27)$$

odakle direktno slijedi konačni oblik diskretiziranog rubnog uvjeta:

$$C_{i,-1}^{n+1} = C_{i,1}^{n+1}. \quad (4.28)$$

#### 4.4.1.3. Ploha 3

Čvorovi na plohi 3 imaju indekse:

$$i = N_r - 1, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, N_\varphi - 1.$$

Diskretizacijom jednadžbe (3.40), dobiva se:

$$\frac{C_{N_r,j}^{n+1} - C_{N_r-2,j}^{n+1}}{2\Delta r} = 0 \quad (4.29)$$

odakle direktno slijedi konačni oblik diskretiziranog rubnog uvjeta:

$$C_{N_r,j}^{n+1} = C_{N_r-2,j}^{n+1}. \quad (4.30)$$

#### 4.4.1.4. Ploha 4

Čvorovi na plohi 4 imaju indekse:

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots, N_r - 1, \quad j = N_\varphi - 1.$$

Diskretizacijom jednadžbe (3.42), dobiva se:

$$\frac{C_{i,N_\varphi}^{n+1} - C_{i,N_\varphi-2}^{n+1}}{2(R_1 + i\Delta r)\Delta\varphi} = 0 \quad (4.31)$$

odakle direktno slijedi konačni oblik diskretiziranog rubnog uvjeta:

$$C_{i,N\varphi}^{n+1} = C_{i,N\varphi-2}^{n+1}. \quad (4.32)$$

Sada se analognim postupkom, mogu dati diskretizirani oblici rubnih uvjeta jednadžbe provođenja topline. Indeksi rubnih čvorova naravno, ostaju nepromijenjeni.

#### 4.4.2. Diskretizacija rubnih uvjeta jednadžbe provođenja topline

##### 4.4.2.1. Ploha 1

Diskretizacijom jednadžbe (3.44), dobiva se:

$$\frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{-1,j}^{n+1}}{2\Delta r} = -\frac{\alpha_v}{\lambda_c} (T_{v,\infty} - T_{0,j}^{n+1}) \quad (4.33)$$

ili, ako se izrazi zamišljeni čvor  $T_{-1,j}^{n+1}$ :

$$T_{-1,j}^{n+1} = T_{1,j}^{n+1} + 2\frac{\alpha_v\Delta r}{\lambda_c} (T_{v,\infty} - T_{0,j}^{n+1}). \quad (4.34)$$

Nakon uvođenja supstitucije

$$d_{1t} = \frac{\alpha_v\Delta r}{\lambda_c} \quad (4.35)$$

slijedi konačni oblik diskretiziranog rubnog uvjeta:

$$T_{-1,j}^{n+1} = T_{1,j}^{n+1} + 2d_{1t}(T_{v,\infty} - T_{0,j}^{n+1}). \quad (4.36)$$

##### 4.4.2.2. Ploha 2

Diskretizacijom jednadžbe (3.45), dobiva se:

$$\frac{T_{i,1}^{n+1} - T_{i,-1}^{n+1}}{2(R_1 + i\Delta r)\Delta\varphi} = 0 \quad (4.37)$$

odakle direktno slijedi konačni oblik diskretiziranog rubnog uvjeta:

$$T_{i,-1}^{n+1} = T_{i,1}^{n+1}. \quad (4.38)$$

##### 4.4.2.3. Ploha 3

Diskretizacijom jednadžbe (3.47), dobiva se:

$$\frac{T_{N_r,j}^{n+1} - T_{N_r-2,j}^{n+1}}{2\Delta r} = \frac{\alpha_u}{\lambda_c} (T_{u,\infty} - T_{N_r-1,j}^{n+1}). \quad (4.39)$$

Nakon uvođenja supstitucije

$$d_{2t} = \frac{\alpha_u \Delta r}{\lambda_c} \quad (4.40)$$

slijedi konačni oblik diskretiziranog rubnog uvjeta:

$$T_{N_r,j}^{n+1} = T_{N_r-2,j}^{n+1} + 2d_{2t}(T_{u,\infty} - T_{N_r-1,j}^{n+1}). \quad (4.41)$$

#### 4.4.2.4. Ploha 4

Diskretizacijom jednadžbe (3.48), dobiva se:

$$\frac{T_{i,N_\varphi}^{n+1} - T_{i,N_\varphi-2}^{n+1}}{2(R_1 + i\Delta r)\Delta\varphi} = 0 \quad (4.42)$$

odakle direktno slijedi konačni oblik diskretiziranog rubnog uvjeta:

$$T_{i,N_\varphi}^{n+1} = T_{i,N_\varphi-2}^{n+1}. \quad (4.43)$$

### 4.5. Formiranje linearnih algebarskih jednadžbi

Svakom čvoru numeričke mreže odgovaraju dvije linearne algebarske jednadžbe. Dakako riječ je o diskretiziranim oblicima jednadžbe difuzije vlage (4.18) odnosno jednadžbe provođenja topline (4.22). Sljedeći zadatak je raspisati diskretizirane diferencijalne jednadžbe za rubne i ne-rubne čvorove te supstituirati vrijednosti zavisnih varijabli u zamišljenim čvorovima, koristeći odgovarajuće rubne uvjete.

#### 4.5.1. Jednadžbe za čvorove na plohi 1

Uzimajući u obzir indekse čvorova navedene u 4.4.1.1, slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned} -a_{1v}b_{1,0}C_{-1,j}^{n+1} - a_{1v}b_{2,0}C_{1,j}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v,0}) + \gamma\sigma]C_{0,j}^{n+1} \\ - a_{2v,0}C_{0,j-1}^{n+1} - a_{2v,0}C_{0,j+1}^{n+1} - \gamma\omega T_{0,j}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{0,j}^n - \gamma\omega T_{0,j}^n \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} -a_{1t}b_{1,0}T_{-1,j}^{n+1} - a_{1t}b_{2,0}T_{1,j}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t,0}) + \varepsilon\omega]T_{0,j}^{n+1} \\ - a_{2t,0}T_{0,j-1}^{n+1} - a_{2t,0}T_{0,j+1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{0,j}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{0,j}^n - \varepsilon\sigma C_{0,j}^n. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Koristeći činjenicu da je za bilo koji indeks  $i$ :

$$b_{1,i} + b_{2,i} = 2 \quad (4.46)$$

te supstituirajući  $C_{-1,j}^{n+1}$  i  $T_{-1,j}^{n+1}$  izrazima s desne strane jed. (4.26) i (4.36), nakon sređivanja se dobiva:

$$\begin{aligned} & -2a_{1v}C_{1,j}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.1}) + \gamma\sigma + 2a_{1v}b_{1,0}d_v]C_{0,j}^{n+1} - a_{2v,0}C_{0,j-1}^{n+1} \\ & - a_{2v,0}C_{0,j+1}^{n+1} - \gamma\omega T_{0,j}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{0,j}^n - \gamma\omega T_{0,j}^n + 2a_{1v}b_{1,0}d_v C_\infty \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} & -2a_{1t}T_{1,j}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.i}) + \varepsilon\omega + 2a_{1t}b_{1,0}d_{1t}]T_{0,j}^{n+1} - a_{2t,0}T_{0,j-1}^{n+1} \\ & - a_{2t,0}T_{0,j+1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{0,j}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{0,j}^n - \varepsilon\sigma C_{0,j}^n + 2a_{1t}b_{1,0}d_{1t}T_{v,\infty}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

#### 4.5.2. Jednadžbe za čvor na sučelju ploha 1 i 2

Čvor na sučelju ovih dviju ploha ima indekse:

$$i = 0, \quad j = 0.$$

odakle slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned} & -a_{1v}b_{1,0}C_{-1,0}^{n+1} - a_{1v}b_{2,0}C_{1,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.0}) + \gamma\sigma]C_{0,0}^{n+1} \\ & - a_{2v,0}C_{0,-1}^{n+1} - a_{2v,0}C_{0,1}^{n+1} - \gamma\omega T_{0,0}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{0,0}^n - \gamma\omega T_{0,0}^n \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & -a_{1t}b_{1,0}T_{-1,0}^{n+1} - a_{1t}b_{2,0}T_{1,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.0}) + \varepsilon\omega]T_{0,0}^{n+1} \\ & - a_{2t,0}T_{0,-1}^{n+1} - a_{2t,0}T_{0,1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{0,0}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{0,0}^n - \varepsilon\sigma C_{0,0}^n. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Supstituirajući  $C_{-1,0}^{n+1}$ ,  $C_{0,-1}^{n+1}$ ,  $T_{-1,0}^{n+1}$  i  $T_{0,-1}^{n+1}$  izrazima s desne strane jed. (4.26), (4.28), (4.36) i (4.38), nakon sređivanja slijedi:

$$\begin{aligned} & -2a_{1v}C_{1,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.1}) + \gamma\sigma + 2a_{1v}b_{1,0}d_v]C_{0,0}^{n+1} \\ & - 2a_{2v,0}C_{0,1}^{n+1} - \gamma\omega T_{0,0}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{0,0}^n - \gamma\omega T_{0,0}^n + 2a_{1v}b_{1,0}d_v C_\infty \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} & -2a_{1t}T_{1,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.i}) + \varepsilon\omega + 2a_{1t}b_{1,0}d_{1t}]T_{0,0}^{n+1} \\ & - 2a_{2t,0}T_{0,1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{0,0}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{0,0}^n - \varepsilon\sigma C_{0,0}^n + 2a_{1t}b_{1,0}d_{1t}T_{v,\infty}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

#### 4.5.3. Jednadžbe za čvorove na plohi 2

Uzimajući u obzir indekse čvorova navedene u 4.4.1.2, slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned} & -a_{1v}b_{1,i}C_{i-1,0}^{n+1} - a_{1v}b_{2,i}C_{i+1,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.i}) + \gamma\sigma]C_{i,0}^{n+1} \\ & - a_{2v,i}C_{i,-1}^{n+1} - a_{2v,i}C_{i,1}^{n+1} - \gamma\omega T_{i,0}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{i,0}^n - \gamma\omega T_{i,0}^n \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}
& -a_{1t}b_{1,i}T_{i-1,0}^{n+1} - a_{1t}b_{2,i}T_{i+1,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.i}) + \varepsilon\omega]T_{i,0}^{n+1} \\
& - a_{2t,i}T_{i,-1}^{n+1} - a_{2t,i}T_{i,1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{i,0}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{i,0}^n - \varepsilon\sigma C_{i,0}^n.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Supstituirajući  $C_{i,-1}^{n+1}$  i  $T_{i,-1}^{n+1}$  izrazima s desne strane jed. (4.28) i (4.38), nakon sređivanja se dobiva:

$$\begin{aligned}
& -a_{1v}b_{1,i}C_{i-1,0}^{n+1} - a_{1v}b_{2,i}C_{i+1,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.i}) + \gamma\sigma]C_{i,0}^{n+1} \\
& - 2a_{2v,i}C_{i,1}^{n+1} - \gamma\omega T_{i,0}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{i,0}^n - \gamma\omega T_{i,0}^n
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{1t}b_{1,i}T_{i-1,0}^{n+1} - a_{1t}b_{2,i}T_{i+1,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.i}) + \varepsilon\omega]T_{i,0}^{n+1} \\
& - 2a_{2t,i}T_{i,1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{i,0}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{i,0}^n - \varepsilon\sigma C_{i,0}^n.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

#### 4.5.4. Jednadžbe za čvor na sučelju ploha 2 i 3

Čvor na sučelju ovih dviju ploha ima indekse:

$$i = N_r - 1, \quad j = 0.$$

odakle slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned}
& -a_{1v}b_{1,N_r-1}C_{N_r-2,0}^{n+1} - a_{1v}b_{2,N_r-1}C_{N_r,0}^{n+1} \\
& + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.N_r-1}) + \gamma\sigma]C_{N_r-1,0}^{n+1} - a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,-1}^{n+1} \\
& - a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,1}^{n+1} - \gamma\omega T_{N_r-1,0}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{N_r-1,0}^n - \gamma\omega T_{N_r-1,0}^n
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{1t}b_{1,N_r-1}T_{N_r-2,0}^{n+1} - a_{1t}b_{2,N_r-1}T_{N_r,0}^{n+1} \\
& + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.N_r-1}) + \varepsilon\omega]T_{N_r-1,0}^{n+1} - a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,-1}^{n+1} \\
& - a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,0}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{N_r-1,0}^n - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,0}^n.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Supstituirajući  $C_{N_r,0}^{n+1}$ ,  $C_{N_r-1,-1}^{n+1}$ ,  $T_{N_r,0}^{n+1}$  i  $T_{N_r-1,-1}^{n+1}$  izrazima s desne strane jed. (4.28), (4.30), (4.38) i (4.41), nakon sređivanja slijedi:

$$\begin{aligned}
& -2a_{1v}C_{N_r-2,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.N_r-1}) + \gamma\sigma]C_{N_r-1,0}^{n+1} \\
& - 2a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,1}^{n+1} - \gamma\omega T_{N_r-1,0}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{N_r-1,0}^n - \gamma\omega T_{N_r-1,0}^n
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
& -2a_{1t}T_{N_r-2,0}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.N_r-1}) + \varepsilon\omega + 2a_{1t}b_{2,N_r-1}d_{2t}]T_{N_r-1,0}^{n+1} \\
& - 2a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,0}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{N_r-1,0}^n - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,0}^n \\
& + 2a_{1t}b_{2,N_r-1}d_{2t}T_{u,\infty}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$



#### 4.5.5. *Jednadžbe za čvorove na plohi 3*

Uzimajući u obzir indekse čvorova navedene u 4.4.1.3, slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned}
& -a_{1v}b_{1,N_r-1}C_{N_r-2,j}^{n+1} - a_{1v}b_{2,N_r-1}C_{N_r,j}^{n+1} \\
& + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.N_r-1}) + \gamma\sigma]C_{N_r-1,j}^{n+1} - a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,j-1}^{n+1} \\
& - a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,j+1}^{n+1} - \gamma\omega T_{N_r-1,j}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{N_r-1,0}^n - \gamma\omega T_{N_r-1,0}^n
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{1t}b_{1,N_r-1}T_{N_r-2,j}^{n+1} - a_{1t}b_{2,N_r-1}T_{N_r,j}^{n+1} \\
& + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.N_r-1}) + \varepsilon\omega]T_{N_r-1,j}^{n+1} - a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,j-1}^{n+1} \\
& - a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,j+1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,j}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{N_r-1,j}^n - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,j}^n.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Supstituirajući  $C_{N_r,j}^{n+1}$  i  $T_{N_r,j}^{n+1}$  izrazima s desne strane jed. (4.30) i (4.41), nakon sređivanja se dobiva:

$$\begin{aligned}
& -2a_{1v}C_{N_r-2,j}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.N_r-1}) + \gamma\sigma]C_{N_r-1,j}^{n+1} - a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,j-1}^{n+1} \\
& - a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,j+1}^{n+1} - \gamma\omega T_{N_r-1,j}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{N_r-1,j}^n - \gamma\omega T_{N_r-1,j}^n
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
& -2a_{1t}T_{N_r-2,j}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t.N_r-1}) + \varepsilon\omega + 2a_{1t}b_{2,N_r-1}d_{2t}]T_{N_r-1,j}^{n+1} \\
& - a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,j-1}^{n+1} - a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,j+1}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,j}^{n+1} \\
& = (1 + \varepsilon\omega)T_{N_r-1,j}^n - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,j}^n + 2a_{1t}b_{2,N_r-1}d_{2t}T_{u,\infty}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

#### 4.5.6. *Jednadžbe za čvor na sučelju ploha 3 i 4*

Čvor na sučelju ovih dviju ploha ima indekse:

$$i = N_r - 1, \quad j = N_\varphi - 1.$$

odakle slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned}
& -a_{1v}b_{1,N_r-1}C_{N_r-2,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{1v}b_{2,N_r-1}C_{N_r,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v.N_r-1}) + \gamma\sigma]C_{N_r-1,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,N_\varphi-2}^{n+1} \\
& - a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,N_\varphi}^{n+1} - \gamma\omega T_{N_r-1,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& = (1 + \gamma\sigma)C_{N_r-1,N_\varphi-1}^n - \gamma\omega T_{N_r-1,N_\varphi-1}^n
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{1t}b_{1,N_r-1}T_{N_r-2,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{1t}b_{2,N_r-1}T_{N_r,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t,N_r-1}) + \varepsilon\omega]T_{N_r-1,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,N_\varphi-2}^{n+1} \\
& - a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,N_\varphi}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& = (1 + \varepsilon\omega)T_{N_r-1,N_\varphi-1}^n - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,N_\varphi-1}^n.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Supstituirajući  $C_{N_r,N_\varphi-1}^{n+1}$ ,  $C_{N_r-1,N_\varphi}^{n+1}$ ,  $T_{N_r,N_\varphi-1}^{n+1}$  i  $T_{N_r-1,N_\varphi}^{n+1}$  izrazima s desne strane jed. (4.30), (4.32), (4.41) i (4.43), nakon sređivanja slijedi:

$$\begin{aligned}
& -2a_{1v}C_{N_r-2,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v,N_r-1}) + \gamma\sigma]C_{N_r-1,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& - 2a_{2v,N_r-1}C_{N_r-1,N_\varphi-2}^{n+1} - \gamma\omega T_{N_r-1,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& = (1 + \gamma\sigma)C_{N_r-1,N_\varphi-1}^n - \gamma\omega T_{N_r-1,N_\varphi-1}^n
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
& -2a_{1t}T_{N_r-2,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t,N_r-1}) + \varepsilon\omega \\
& + 2a_{1t}b_{2,N_r-1}d_{2t}]T_{N_r-1,N_\varphi-1}^{n+1} - 2a_{2t,N_r-1}T_{N_r-1,N_\varphi-2}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& = (1 + \varepsilon\omega)T_{N_r-1,N_\varphi-1}^n - \varepsilon\sigma C_{N_r-1,N_\varphi-1}^n + 2a_{1t}b_{2,N_r-1}d_{2t}T_{u,\infty}.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

#### 4.5.7. Jednadžbe za čvorove na plohi 4

Uzimajući u obzir indekse čvorova navedene u 4.4.1.4, slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned}
& -a_{1v}b_{1,i}C_{i-1,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{1v}b_{2,i}C_{i+1,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v,i}) + \gamma\sigma]C_{i,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& - a_{2v,i}C_{i,N_\varphi-2}^{n+1} - a_{2v,i}C_{i,N_\varphi}^{n+1} - \gamma\omega T_{i,N_\varphi-1}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{i,N_\varphi-1}^n - \gamma\omega T_{i,N_\varphi-1}^n
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{1t}b_{1,i}T_{i-1,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{1t}b_{2,i}T_{i+1,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t,i}) + \varepsilon\omega]T_{i,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& - a_{2t,i}T_{i,N_\varphi-2}^{n+1} - a_{2t,i}T_{i,N_\varphi}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{i,N_\varphi-1}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{i,N_\varphi-1}^n - \varepsilon\sigma C_{i,N_\varphi-1}^n.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Supstituirajući  $C_{i,N_\varphi}^{n+1}$  i  $T_{i,N_\varphi}^{n+1}$  izrazima s desne strane jed. (4.32) i (4.43), nakon sređivanja se dobiva:

$$\begin{aligned}
& -a_{1v}b_{1,i}C_{i-1,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{1v}b_{2,i}C_{i+1,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v,i}) + \gamma\sigma]C_{i,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& - 2a_{2v,i}C_{i,N_\varphi-2}^{n+1} - \gamma\omega T_{i,N_\varphi-1}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{i,N_\varphi-1}^n - \gamma\omega T_{i,N_\varphi-1}^n
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{1t}b_{1,i}T_{i-1,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{1t}b_{2,i}T_{i+1,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t,i}) + \varepsilon\omega]T_{i,N_\varphi-1}^{n+1} \\
& - 2a_{2t,i}T_{i,N_\varphi-2}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{i,N_\varphi-1}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{i,N_\varphi-1}^n - \varepsilon\sigma C_{i,N_\varphi-1}^n.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

#### 4.5.8. *Jednadžbe za čvor na sučelju ploha 4 i 1*

Čvor na sučelju ovih dviju ploha ima indekse:

$$i = 0, \quad j = N_\varphi - 1.$$

odakle slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned} & -a_{1v}b_{1,0}C_{-1,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{1v}b_{2,0}C_{1,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v,0}) + \gamma\sigma]C_{0,N_\varphi-1}^{n+1} \\ & - a_{2v,0}C_{0,N_\varphi-2}^{n+1} - a_{2v,0}C_{0,N_\varphi}^{n+1} - \gamma\omega T_{0,N_\varphi-1}^{n+1} \\ & = (1 + \gamma\sigma)C_{0,N_\varphi-1}^n - \gamma\omega T_{0,N_\varphi-1}^n \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} & -a_{1t}b_{1,0}T_{-1,N_\varphi-1}^{n+1} - a_{1t}b_{2,0}T_{1,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t,0}) + \varepsilon\omega]T_{0,N_\varphi-1}^{n+1} \\ & - a_{2t,0}T_{0,N_\varphi-2}^{n+1} - a_{2t,0}T_{0,N_\varphi}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{0,N_\varphi-1}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{0,N_\varphi-1}^n - \varepsilon\sigma C_{0,N_\varphi-1}^n. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Supstituirajući  $C_{-1,N_\varphi-1}^{n+1}$ ,  $C_{0,N_\varphi}^{n+1}$ ,  $T_{-1,N_\varphi-1}^{n+1}$  i  $T_{0,N_\varphi}^{n+1}$  izrazima s desne strane jed. (4.26), (4.32), (4.36) i (4.43), nakon sređivanja slijedi:

$$\begin{aligned} & -2a_{1v}C_{1,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1v} + a_{2v,0}) + \gamma\sigma + 2a_{1v}b_{1,0}d_v]C_{0,N_\varphi-1}^{n+1} \\ & - 2a_{2v,0}C_{0,N_\varphi-2}^{n+1} - \gamma\omega T_{0,N_\varphi-1}^{n+1} = (1 + \gamma\sigma)C_{0,N_\varphi-1}^n - \gamma\omega T_{0,N_\varphi-1}^n \\ & + 2a_{1v}b_{1,0}d_v C_\infty \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} & -2a_{1t}T_{1,N_\varphi-1}^{n+1} + [1 + 2(a_{1t} + a_{2t,0}) + \varepsilon\omega + 2a_{1t}b_{1,0}d_{1t}]T_{0,N_\varphi-1}^{n+1} \\ & - 2a_{2t,0}T_{0,N_\varphi-2}^{n+1} - \varepsilon\sigma C_{0,N_\varphi-1}^{n+1} = (1 + \varepsilon\omega)T_{0,N_\varphi-1}^n - \varepsilon\sigma C_{0,N_\varphi-1}^n \\ & + 2a_{1t}b_{1,0}d_{1t}T_{v,\infty}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

#### 4.5.9. *Jednadžbe za ne-rubne čvorove*

Linearne algebarske jednadžbe za ne-rubne čvorove odgovaraju jednadžbama (4.18) i (4.22). Na ovaj se način dobivaju dva sustava (po jedan za svaku diferencijalnu jednadžbu) od  $N$  linearnih algebarskih jednadžbi s ukupno  $N$  nepoznanica u svakom vremenskom intervalu. Veliki sustavi linearnih algebarskih jednadžbi poput ovog se obično rješavaju pomoću nekog od dostupnih iterativnih rješavača (eng. *iterative solver*) koji su uglavnom već ugrađeni u postojeće računalne pakete tipa *Matlab*.

#### 4.6. Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

Skup svih jednadžbi se skraćeno može zapisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{A}_v^n \mathbf{C}^{n+1} + \mathbf{B}_v^n \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{b}_v^n \quad (4.77)$$

$$\mathbf{A}_t^n \mathbf{T}^{n+1} + \mathbf{B}_t^n \mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{b}_t^n, \quad (4.78)$$

gdje su  $\mathbf{A}_v^n$ ,  $\mathbf{B}_v^n$ ,  $\mathbf{A}_t^n$  i  $\mathbf{B}_t^n$  matrice koeficijena tipa  $N \times N$ . Ne-nulti elementi u redovima ovih matrica predstavljaju koeficijente sustava linearnih jednadžbi postavljenih na pojedini čvor, počevši od prvog s obzirom na shemu numeracije [Slika 15.]. Dijagonalni elementi su koeficijenti uz varijable promatranog čvora, a ne-dijagonalni elementi su koeficijenti uz varijable susjednih čvorova. Dakle redovi ovih matrica predstavljaju jednadžbe, a stupci redne brojeve čvorova. Indeks  $n$  označava da se matrice koeficijena formiraju za svaki vremenski interval koristeći poznate vrijednosti rješenja iz trenutnog intervala. Članovi  $\mathbf{C}^{n+1}$  i  $\mathbf{T}^{n+1}$  su vektori rješenja u vremenskom intervalu  $n + 1$ , a  $\mathbf{b}_v^n$  i  $\mathbf{b}_t^n$  su vektori desne strane koji se dobivaju pomoću rubnih uvjeta i rješenja iz vremenskog intervala  $n$ , koja su naravno poznata jer su izračunata u prethodnom koraku.

Ako se promotre linearne algebarske jednadžbe u 4.5, može se zaključiti da su matrice  $\mathbf{B}_v^n$  i  $\mathbf{B}_t^n$  dijagonalne, to jest da su svi ne-nulti elementi smješteni na glavnoj dijagonali matrice. To znači da se inverzi ovih matrica pronalaze vrlo jednostavno. Naime, inverz dijagonalne matrice je također dijagonalna matrica, ali s recipročnim vrijednostima elemenata.

Ako se jednadžba (4.77) pomnoži inverznom matricom  $(\mathbf{B}_v^n)^{-1}$  slijeva, dobiva se:

$$(\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{A}_v^n \mathbf{C}^{n+1} + (\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{B}_v^n \mathbf{T}^{n+1} = (\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{b}_v^n \quad (4.79)$$

$$\mathbf{A}_t^n \mathbf{T}^{n+1} + \mathbf{B}_t^n \mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{b}_t^n. \quad (4.80)$$

Koristeći činjenicu da je umnožak matrice i njenog inverza jednak matrici identiteta  $\mathbf{I}$ , moguće je izraziti vektor temperature:

$$\mathbf{T}^{n+1} = (\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{b}_v^n - (\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{A}_v^n \mathbf{C}^{n+1} \quad (4.81)$$

koji se sada može supstituirati u jednadžbu (4.80):

$$\mathbf{A}_t^n [(\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{b}_v^n - (\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{A}_v^n \mathbf{C}^{n+1}] + \mathbf{B}_t^n \mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{b}_t^n \quad (4.82)$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$[\mathbf{B}_t^n - \mathbf{A}_t^n (\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{A}_v^n] \mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{b}_t^n - \mathbf{A}_t^n (\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{b}_v^n. \quad (4.83)$$

Ovakva matricna jednadžba se sada svodi na već poznato rješavanje sustava  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Matrica  $[\mathbf{B}_t^n - \mathbf{A}_t^n (\mathbf{B}_v^n)^{-1} \mathbf{A}_v^n]$  se inače u linearnoj algebri naziva Schurov komplement.

Za pronalaženje rješenja  $\mathbf{C}^{n+1}$ , koristiti će se već implementirane metode rješavanja unutar programskog paketa *Matlab*. Rješavanje se provodi iterativnom metodom stabiliziranom bikonjugiranim gradijentima (*bicgstab*). Nakon što se pronade rješenje  $\mathbf{C}^{n+1}$ , jednadžba (4.80) se može preoblikovati u sljedeću matricnu jednadžbu:

$$\mathbf{A}_t^n \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{b}_t^n - \mathbf{B}_t^n \mathbf{C}^{n+1} \quad (4.84)$$

koju je zatim potrebno riješiti ponovno koristeći iterativnu metodu *bicgstab*. Nakon što se dobiju vektori rješenja ( $\mathbf{T}^{n+1}$  i  $\mathbf{C}^{n+1}$ ), ponovno se formiraju matrice i vektori desne strane, kako bi se pronašlo rješenje u idućem vremenskom intervalu; postupak se ponavlja  $N_t$  puta nakon čega se dobivaju rješenja u obliku diskretnih tranzijentnih polja temperature i koncentracije vlage. Lokalno ravnotežni sadržaj vlage  $X$  se u svakom intervalu  $i$  u svakom čvoru može odrediti pomoću preoblikovane Fesslerove empirijske jednadžbe sorpcijske krivulje (3.22) uvrštavajući u nju poznate vrijednosti koncentracije vlage i temperature.

## 5. PARAMETRI SIMULACIJE

### 5.1. Svojstva tvari

Svojstva papirne izolacije su navedena u tablici [Tablica 1.].

Tablica 1. Svojstva papirne izolacije

$D_a$	$2.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
$\rho_c$	$1550 \text{ kg}/\text{m}^3$
$\lambda_c$	$0.335 \text{ W}/(\text{mK})$
$c_c$	$1340 \text{ J}/(\text{kgK})$
$v$	$0.7 \text{ m}_{\text{zr}}^3/\text{m}^3$
$\rho$	$465 \text{ kg}/\text{m}^3$
$g$	$0.05$
$q$	$2522000 \text{ J}/\text{kg}$
$R_d$	$461.5 \text{ J}/(\text{kgK})$

Svojstva papira mogu značajno varirati s obzirom na unutarnju strukturu, pa su stoga  $\rho_c$ ,  $\lambda_c$  i  $c_c$  uzeti za čistu celulozu, kako je navedeno u [26]. Procjene difuzivnosti vlage u zraku  $D_a$  i latentne topline isparavanja/kondenzacije  $q$  su uzete iz [27] gdje su korištene za modeliranje sušenja poroznog materijala. Poroznost  $v$  i faktor otpora difuziji  $g$  se znatno razlikuju u ovisnosti o vrsti papira, ali i o sadržaju vlage. Zbog toga su korištene neke od vrijednosti koje se navode u [22].

### 5.2. Parametri diskretizacije

Parametri diskretizacije uključuju podatke vezane uz rezoluciju numeričke mreže i veličinu vremenskog koraka. Vrijednosti su odabrane na način da se skрати vrijeme simulacije uz prihvatljivu točnost rješenja. Ukupno trajanje sušenja je 4 dana i uzeto je okvirno s obzirom na veličinu transformatora i uobičajeno trajanje vakuumskeg sušenja. Parametri diskretizacije su navedeni u tablici [Tablica 2.].

Tablica 2. Parametri diskretizacije

$N_r$	56
$N_\varphi$	21
$N$	1176
$\Delta r$	$0.9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.9 \text{ mm}$
$\Delta \varphi$	$1.53125 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1.53125 \text{ mm}$
$\Delta t$	60 s
$N_t$	5760

### 5.3. Početni uvjeti

Pretpostavlja se da je početni sadržaj vlage u promatranom segmentu izolacije jednak 8%, a temperatura 20 °C. U skladu s postupkom opisanom u 3.6, slijede definicije rubnih uvjeta:

$$X_i = X^0 = 0.08, \quad (5.1)$$

$$T_i = T^0 = 293.15 \text{ K}, \quad (5.2)$$

$$C_i = C^0 = 0.005346 \text{ kgm}^{-3}. \quad (5.3)$$

### 5.4. Rubni uvjeti

Razmotriti će se tri različita slučaja vremenski promjenjivih rubnih uvjeta. Kao vremenske funkcije će se zadati: tlak u komori  $p_\infty(t)$ , temperatura zraka s vanjske strane  $T_{v,\infty}(t)$  i temperatura zraka s unutarnje strane  $T_{u,\infty}(t)$ . Koncentracija vlage u okolnom zraku će se odrediti pomoću jednadžbe stanja idealnog plina:

$$C_\infty(t) = \frac{p_{d,\infty}(t)}{R_d T_{v,\infty}(t)}. \quad (5.4)$$

gdje je  $p_{d,\infty}(t)$  parcijalni tlak vodene pare u okolnom zraku. Ovdje će se uvesti pretpostavka da se molni udio vlage u zraku ne mijenja s vremenom, odnosno da je omjer parcijalnog tlaka vodene pare i apsolutnog tlaka u komori konstantan:

$$\frac{p_{d,\infty}(t)}{p_\infty} = k. \quad (5.5)$$

Konstanta  $k$  se može odrediti, ako se uzme u obzir da je komora na početku ispunjena zrakom temperature 20 °C i relativne vlažnosti 60 %. Tada je parcijalni tlak vodene pare u komori jednak:

$$p_{d,\infty} = 0.6p_s(20\text{ °C}) = 0.6 \cdot 2337\text{ Pa} = 1402.2\text{ Pa}. \quad (5.6)$$

gdje je  $p_s$  tlak zasićenja vodene pare.[28] Odavde slijedi vrijednost konstante  $k$  (molni udio):

$$k = \frac{1402.2}{101325} = 0.01384, \quad (5.7)$$

pa je vremenski promjenjiva funkcija koncentracije vlage u okolnom zraku:

$$C_\infty(t) = \frac{0.01384 \cdot p_\infty(t)}{R_d T_{v,\infty}(t)}. \quad (5.8)$$

Koeficijenti prijelaza topline  $\alpha_v(t)$  i  $\alpha_u(t)$ , kao i koeficijent transporta mase  $\alpha_m(t)$ , smatrati će se konstantnima te se usvajaju sljedeće vrijednosti:

$$\alpha_v(t) = 20\text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}, \quad (5.9)$$

$$\alpha_u(t) = 0.5\text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}, \quad (5.10)$$

$$\alpha_m(t) = 0.1\text{ ms}^{-1}. \quad (5.11)$$

Preostalo je još za svaki promatrani slučaj, zadati funkcije  $p_\infty(t)$ ,  $T_{u,\infty}(t)$  i  $T_{v,\infty}(t)$ .

#### 5.4.1. 1. slučaj

Režimi su u ovom slučaju (a i u ostalima) odabrani na način da se uzme u obzir tromost dinamičkog sustava međutim, vrijednosti vremenskih konstanti ovise o mnogim faktorima kao što su veličina komore i ulazna toplinska snaga električnih grijača. Analiza tih utjecaja bi prelazila interesne okvire ovog rada, pa se iz tog razloga pretpostavljene vrijednosti vremenskih konstanti vjerojatno značajno razlikuju od stvarnih. Ipak, dio informacija o postizivim temperaturama i tlakovima je preuzet iz [29] i pomoću njih su definirane vremenske funkcije prikazane u tablici [

Tablica 3.].

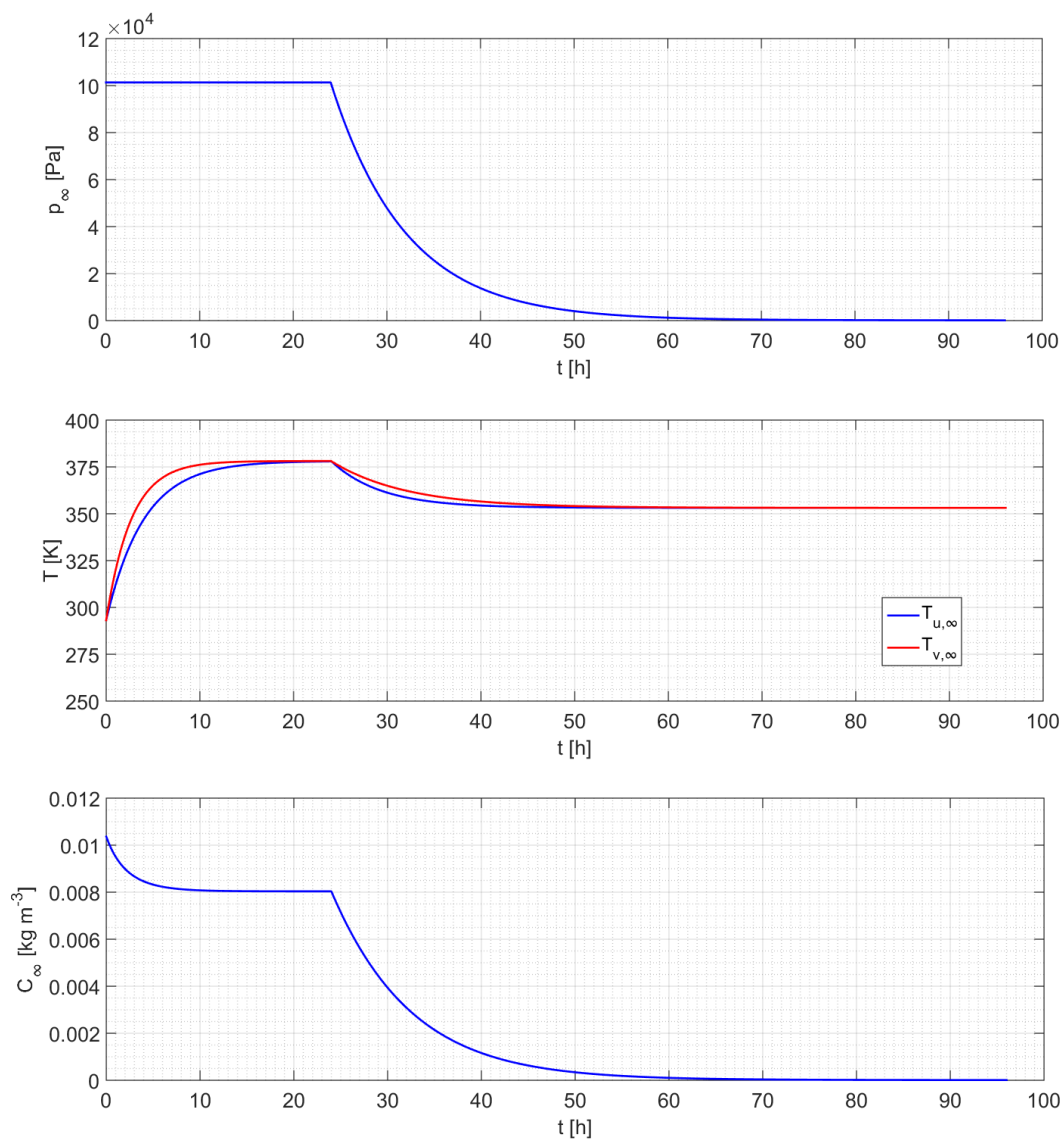


U ovom slučaju se prvi dan sporo podiže temperatura s početnih 20 °C na konačnih 105 °C. Zagrijavanje se odvija pri atmosferskom tlaku, a zatim se uključuje vakuumska pumpa i tlak se kroz sljedeći dan spušta sa atmosferske razine na razinu od 100 Pa pri čemu također dolazi do smanjenja temperature na 80 °C. Pretpostavlja se da temperatura zraka s vanjske strane izolacije opada jednakom brzinom kao i tlak, dok temperatura zraka s unutarnje strane izolacije opada brže jer unutarnja strana nije direktno izložena električnim grijačima u komori.

Tablica 3. Rubni uvjeti (1. slučaj)

$p_{\infty}(t)$ [Pa]	$= \begin{cases} 101325, & t \leq 36000 \text{ s} \\ (101325 - 100)e^{\frac{-(t-86400)}{28800}} + 100, & t > 86400 \text{ s} \end{cases}$
$T_{v,\infty}(t)$ [K]	$= \begin{cases} (293.15 - 378.15)e^{-\frac{t}{9600}} + 378.15, & 0 \leq t \leq 86400 \text{ s} \\ (378.15 - 353.15)e^{\frac{-(t-86400)}{28800}} + 353.15, & t > 86400 \text{ s} \end{cases}$
$T_{u,\infty}(t)$ [K]	$= \begin{cases} (293.15 - 378.15)e^{-\frac{t}{14400}} + 378.15, & 0 \leq t \leq 86400 \text{ s} \\ (378.15 - 353.15)e^{\frac{-(t-86400)}{19200}} + 353.15, & t > 86400 \end{cases}$

Kada su definirane funkcije  $p_{\infty}(t)$  i  $T_{v,\infty}(t)$  tada se pomoću jednadžbe (5.8) može u svakom vremenskom trenutku izračunati koncentracija vlage u okolnom zraku  $C_{\infty}(t)$ . [Slika 16.] grafički prikazuje kako se u 1. slučaju mijenjaju tlak u komori, temperature s unutarnje i vanjske strane te koncentracija vlage u okolnom zraku.



Slika 16. Promjene rubnih uvjeta u vremenu (1. slučaj)

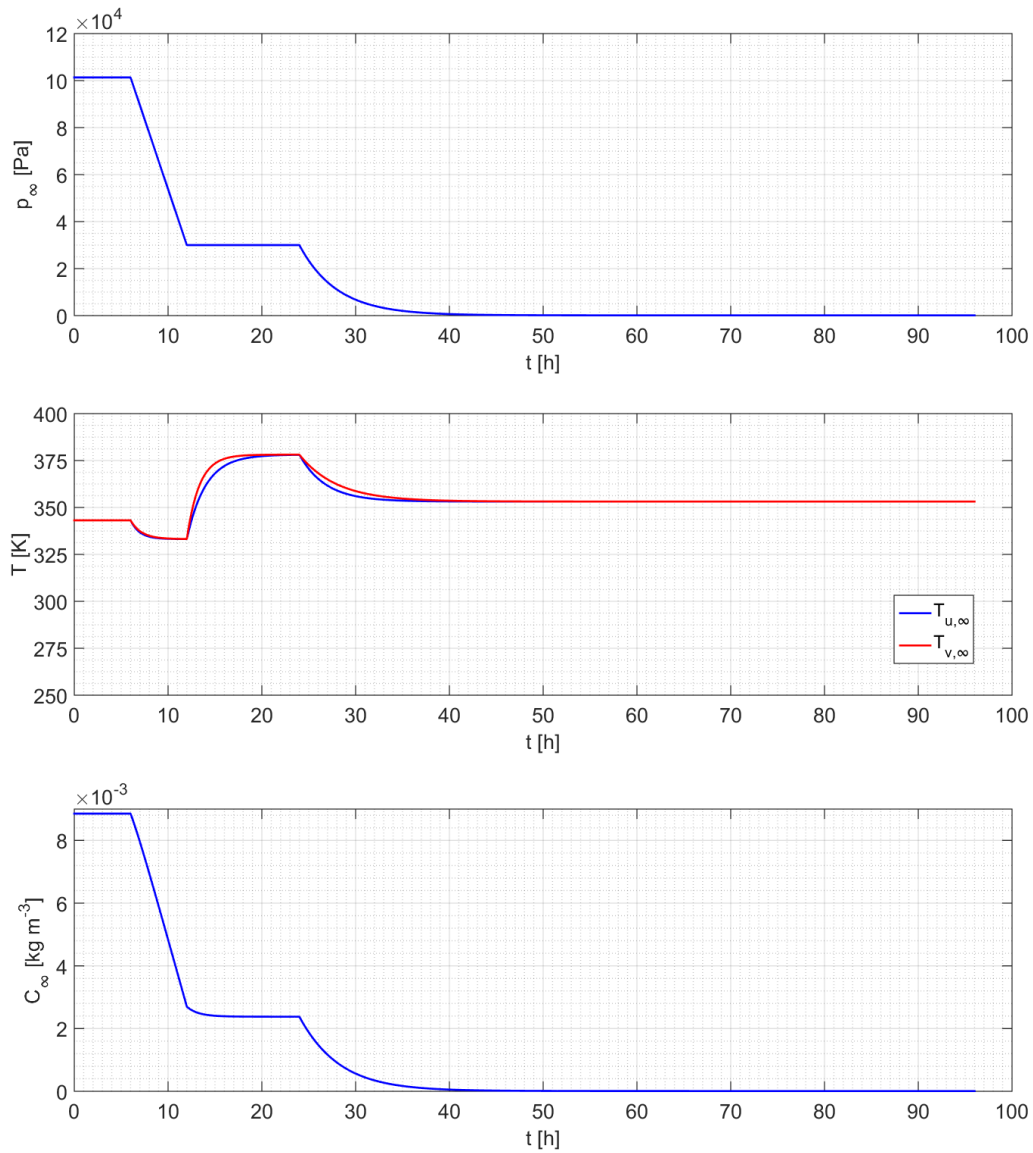
### 5.4.2. 2. slučaj

U drugom je slučaju vakuumska komora predgrijana na 70 °C. Ta se temperatura kroz sljedećih šest sati održava nakon što se transformator stavi u komoru. Nakon toga se tlak naglo spušta na razinu od 30000 Pa (300 mbar), a zatim se sljedećih dvanaest sati temperatura podiže na 105 °C. Na kraju se primjenjuje vakuum, pri čemu se tlak u komori spušta na 100 Pa, a temperatura, kao i u 1. slučaju, pada na 80 °C. Vremenske funkcije ovih režima su definirane u tablici [Tablica 4.].

Tablica 4. Rubni uvjeti (2. slučaj)

$p_{\infty}(t)$ [Pa]	$= \begin{cases} 101325, & t \leq 21600 \text{ s} \\ -3.3021(t - 21600) + 101325, & 21600 < t \leq 43200 \text{ s} \\ 30000, & 43200 < t \leq 86400 \text{ s} \\ (30000 - 100)e^{\frac{-(t-86400)}{14400}} + 100, & t > 86400 \text{ s} \end{cases}$
$T_{v,\infty}(t)$ [K]	$= \begin{cases} 343.15, & t \leq 21600 \text{ s} \\ (343.15 - 333.15)e^{\frac{-(t-21000)}{4200}} + 333.15, & 21600 < t \leq 43200 \text{ s} \\ (333.15 - 378.15)e^{\frac{-(t-43200)}{4800}} + 378.15, & 43200 < t \leq 86400 \text{ s} \\ (378.15 - 353.15)e^{\frac{-(t-86400)}{14400}} + 353.15, & t > 86400 \text{ s} \end{cases}$
$T_{u,\infty}(t)$ [K]	$= \begin{cases} 343.15, & t \leq 21600 \text{ s} \\ (343.15 - 333.15)e^{\frac{-(t-21000)}{3500}} + 333.15, & 21600 < t \leq 43200 \text{ s} \\ (333.15 - 378.15)e^{\frac{-(t-43200)}{7200}} + 378.15, & 43200 < t \leq 86400 \text{ s} \\ (378.15 - 353.15)e^{\frac{-(t-86400)}{10000}} + 353.15, & t > 86400 \text{ s} \end{cases}$

[Slika 17.] prikazuje kako se u 2. slučaju mijenjaju tlak u komori, temperature s unutarnje i vanjske strane te koncentracija vlage u okolnom zraku.



Slika 17. Promjene rubnih uvjeta u vremenu (2. slučaj)

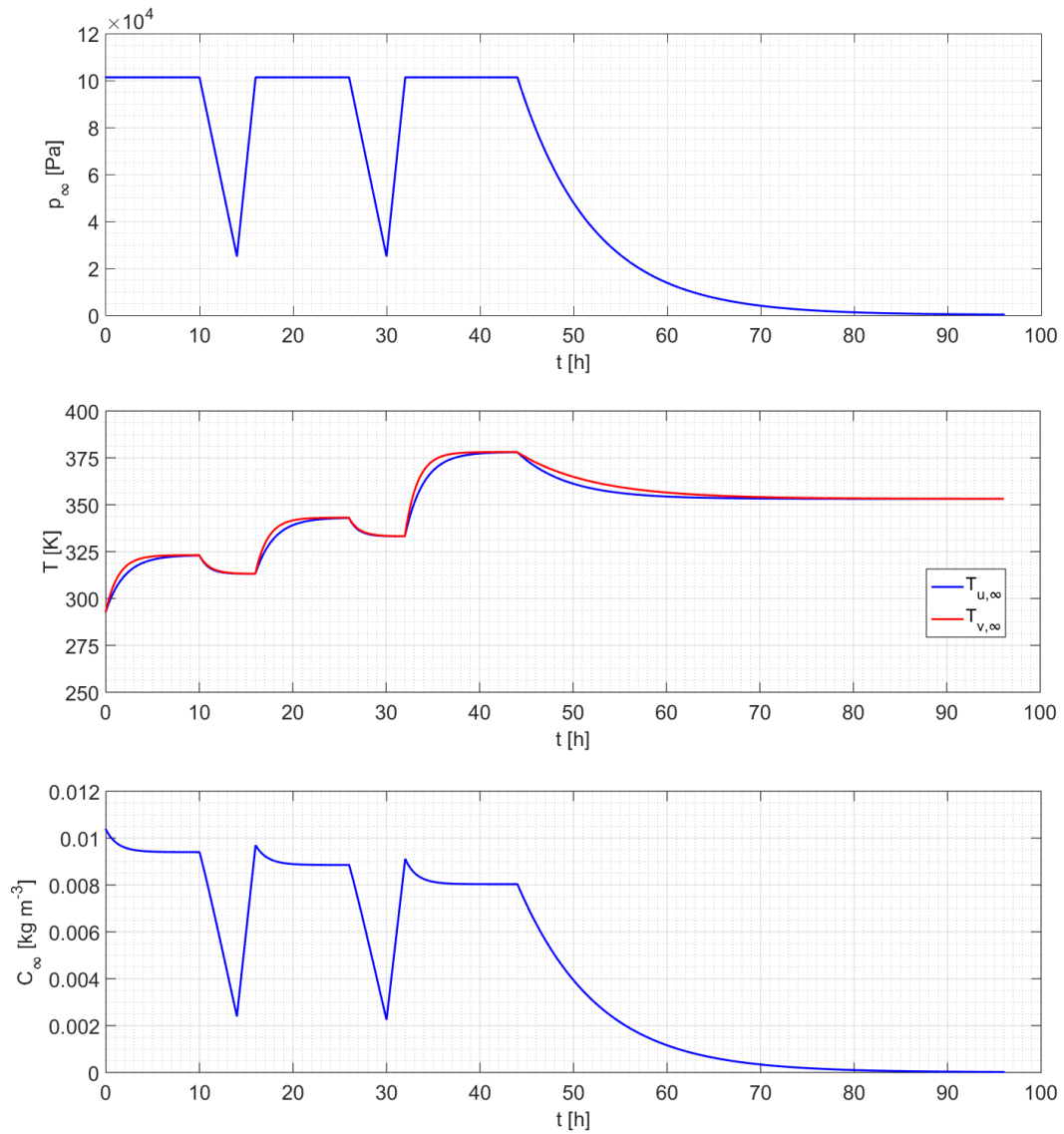
### 5.4.3. 3. slučaj

U ovom se slučaju temperatura postepeno povećava od 20 °C do 105 °C dok se u razmaku između zagrijavanja primjenjuje pulsni režim slabijeg vakuuma. Na kraju se tlak spušta na razinu od 100 Pa, a temperatura pada na 80 °C. Vremenske funkcije rubnih uvjeta za 3. slučaj, definirane su u tablici [Tablica 5.].

Tablica 5. Rubni uvjeti (3. slučaj)

$p_{\infty}(t)$ [Pa]	$= \begin{cases} 101325, & t \leq 36000 \text{ s} \\ -5.3003(t - 36000) + 101325, & 36000 < t \leq 50400 \text{ s} \\ 10.6007(t - 50400) + 25000, & 50400 < t \leq 57600 \text{ s} \\ 101325, & 57600 < t \leq 93600 \text{ s} \\ -5.3003(t - 93600) + 101325, & 93600 < t \leq 108000 \text{ s} \\ 10.6007(t - 108000) + 25000, & 108000 < t \leq 115200 \text{ s} \\ 101325, & 115200 \leq t \leq 158400 \text{ s} \\ (101325 - 100)e^{\frac{-(t-86400)}{28800}} + 100, & t > 86400 \text{ s} \end{cases}$
$T_{v,\infty}(t)$ [K]	$= \begin{cases} (293.15 - 323.15)e^{-\frac{t}{4800}} + 323.15, & t \leq 36000 \text{ s} \\ (323.15 - 313.15)e^{\frac{-(t-36000)}{4000}} + 313.15, & 36000 < t \leq 57600 \text{ s} \\ (313.15 - 343.15)e^{\frac{-(t-57600)}{4800}} + 343.15, & 57600 < t \leq 93600 \text{ s} \\ (343.15 - 333.15)e^{\frac{-(t-93600)}{4000}} + 333.15, & 93600 < t \leq 115200 \text{ s} \\ (333.15 - 378.15)e^{\frac{-(t-115200)}{4800}} + 378.15, & 115200 < t \leq 158400 \text{ s} \\ (378.15 - 353.15)e^{\frac{-(t-158400)}{28800}} + 353.15, & t > 158400 \text{ s} \end{cases}$
$T_{u,\infty}(t)$ [K]	$= \begin{cases} (293.15 - 323.15)e^{-\frac{t}{7200}} + 323.15, & t \leq 36000 \text{ s} \\ (323.15 - 313.15)e^{\frac{-(t-36000)}{3500}} + 313.15, & 36000 < t \leq 57600 \text{ s} \\ (313.15 - 343.15)e^{\frac{-(t-57600)}{7200}} + 343.15, & 57600 < t \leq 93600 \text{ s} \\ (343.15 - 333.15)e^{\frac{-(t-93600)}{3500}} + 333.15, & 93600 < t \leq 115200 \text{ s} \\ (333.15 - 378.15)e^{\frac{-(t-115200)}{7200}} + 378.15, & 115200 < t \leq 158400 \text{ s} \\ (378.15 - 353.15)e^{\frac{-(t-158400)}{19200}} + 353.15, & t > 158400 \text{ s} \end{cases}$

[Slika 18.] prikazuje kako se u 3. slučaju mijenjaju tlak u komori, temperature s unutarnje i vanjske strane te koncentracija vlage u okolnom zraku.



Slika 18. Promjene rubnih uvjeta u vremenu (3. slučaj)

## 6. REZULTATI

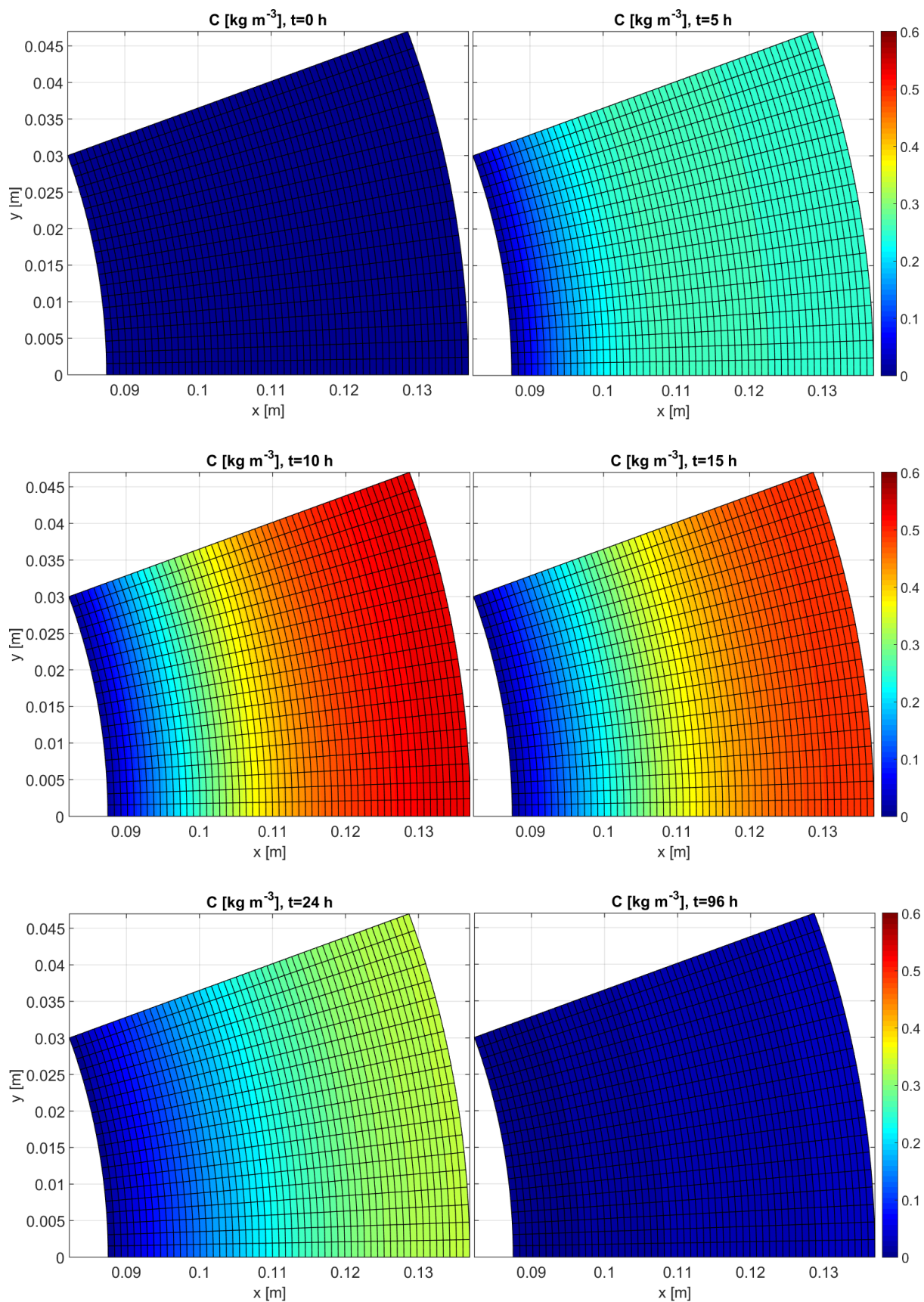
Nakon implementacije definiranih rubnih uvjeta, za svaki su vremenski interval, pomoću programskog paketa *Matlab*, dobivene distribucije relevantnih veličina u promatranom komadu izolacije. U sljedećim potpoglavljima će se analizirati rezultati po slučajevima, a na kraju će međusobno usporediti osrednjeni odzivi modela za svaki režim tlaka i temperature u vakuumskoj komori.

### 6.1. 1. slučaj

[Slika 19.] prikazuje distribucije koncentracije vlage u zraku koji se nalazi u porama izolacije. Gradijenti u smjeru koordinate  $\varphi$  su jednaki nuli što se i očekuje zbog propisanih rubnih uvjeta na bočnim plohama. Valja primijetiti da je koncentracija vlage niža uz vanjski rub segmenta izolacije što je također u skladu s propisanim rubnim uvjetom 3. vrste. S druge strane, gradijent je uz unutarnji rub segmenta uvijek jednak nuli jer je ta granica nepropusna za vlagu. Sudeći prema prikazanim distribucijama, intenzivniji porast koncentracije u „dubljim“ slojevima segmenta se javlja nakon petog sata sušenja, a zatim dolazi do postupnog iščezavanja gradijenata sve dok se ne postigne ravnoteža s okolnim zrakom.

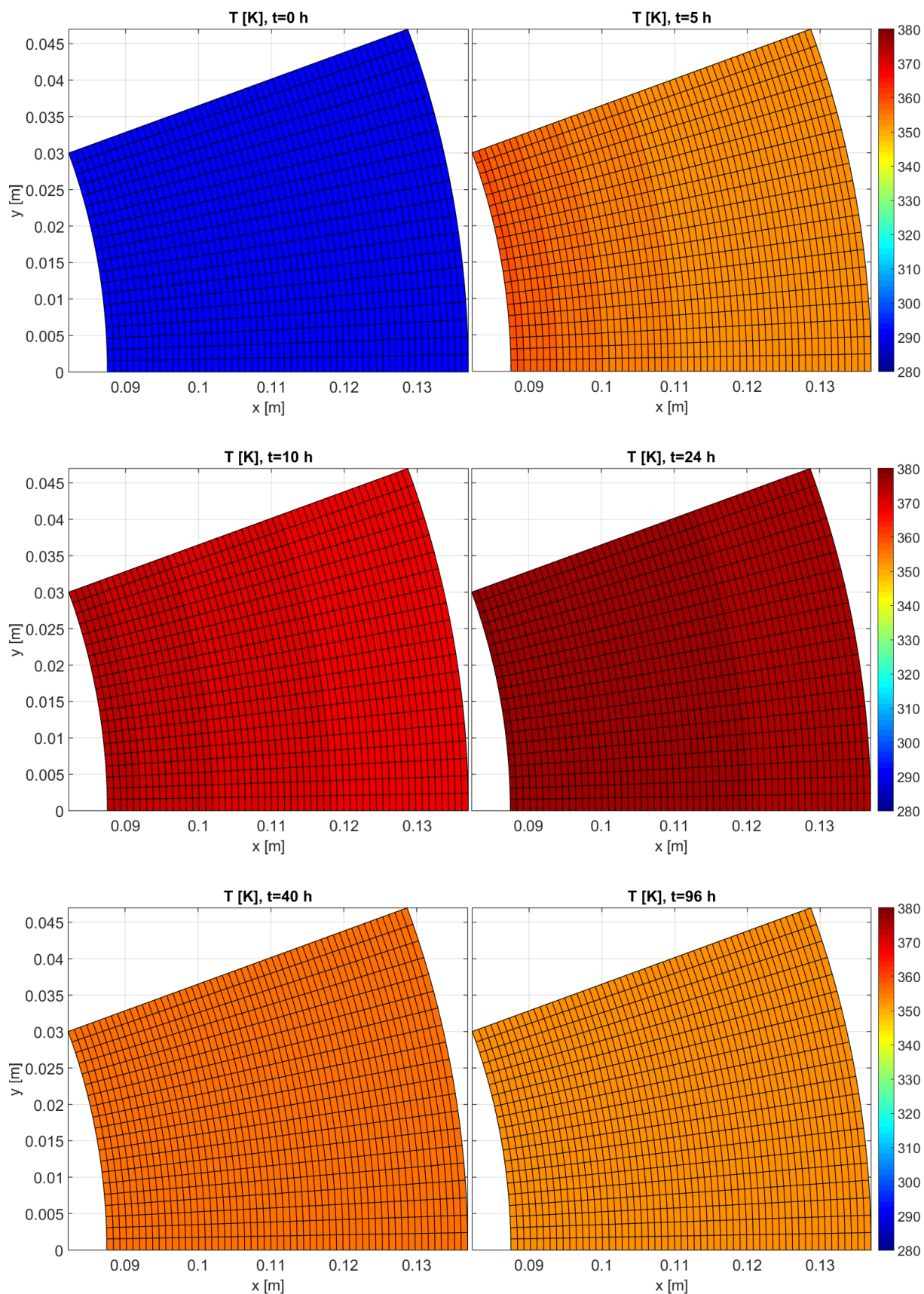
[Slika 20.] prikazuje distribucije temperature u izolaciji. Gradijenti u smjeru koordinate  $\varphi$  su i ovdje u skladu s propisanim rubnim uvjetima. U smjeru koordinate  $r$ , gradijenti temperature su u prikazanim vremenskim trenutcima izrazito niski jer je promatrani komad izolacije male debljine, a temperature okolnog zraka se relativno sporo mijenjaju. Također se i dio topline (pogotovo uz vanjsku plohu) troši na ishlapljivanje vlage iz celuloznih vlakana.

[Slika 21.] prikazuje distribucije sadržaja vlage dobivene pomoću polja koncentracije vlage i temperature uvrštavanjem vrijednosti u pojedinim čvorovima u jednadžbu (3.22). To znači da područja s većom koncentracijom i nižom temperaturom odgovaraju područjima s višim sadržajem vlage što se može i vidjeti međusobnom usporedbom distribucija. Također se može primijetiti sporije sušenje „dubljih“ slojeva izolacije što je i za očekivati u ovakvom procesu.

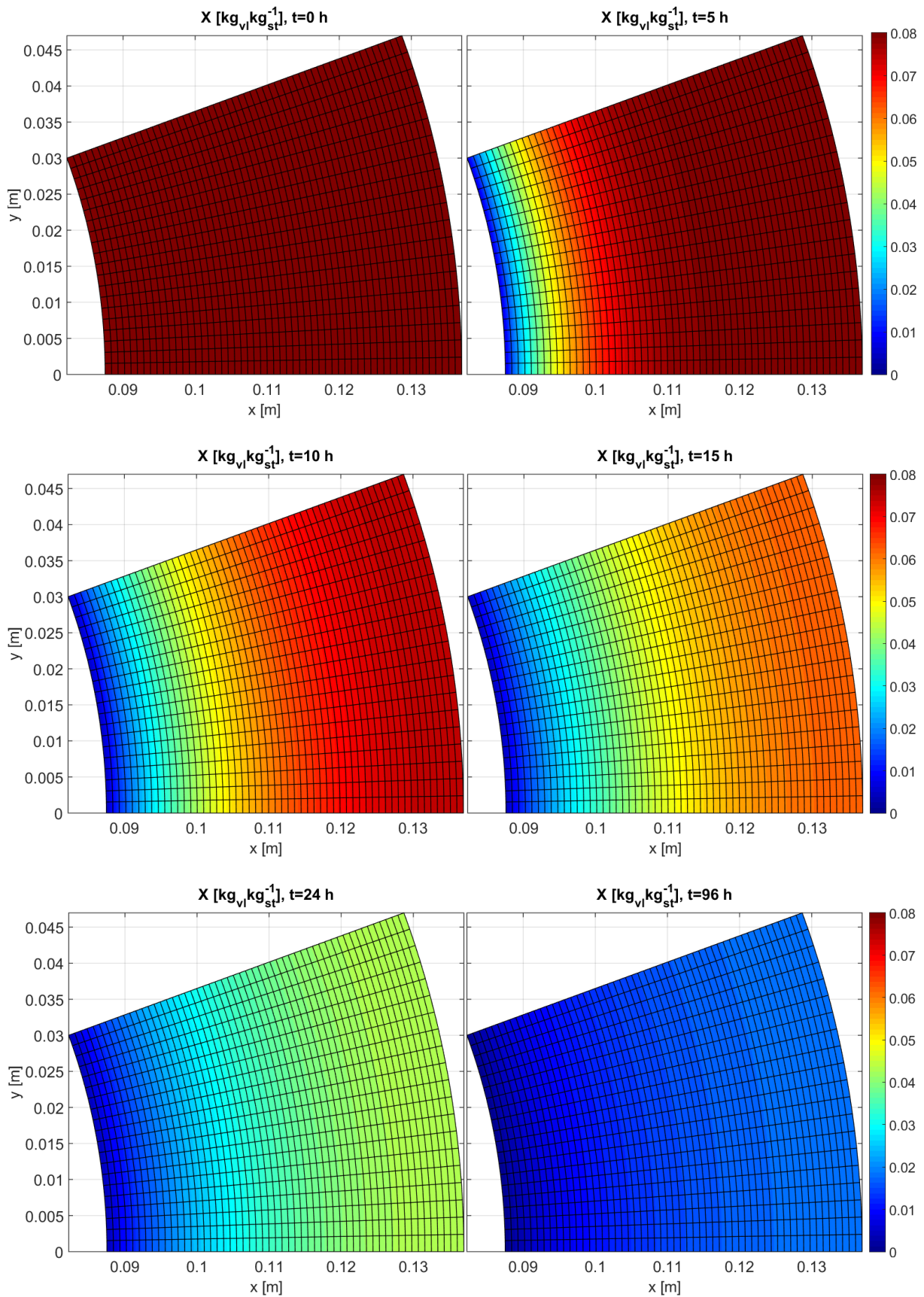


Slika 19. Distribucija koncentracije vlage u različitim vremenskim trenucima (1. slučaj)



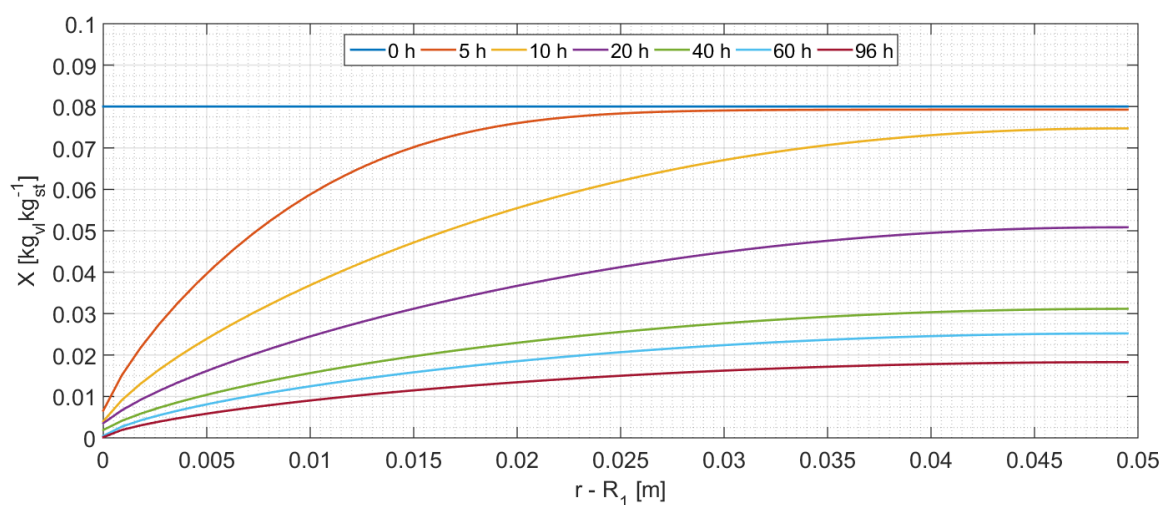


Slika 20. Distribucija temperature u različitim vremenskim trenucima (1. slučaj)



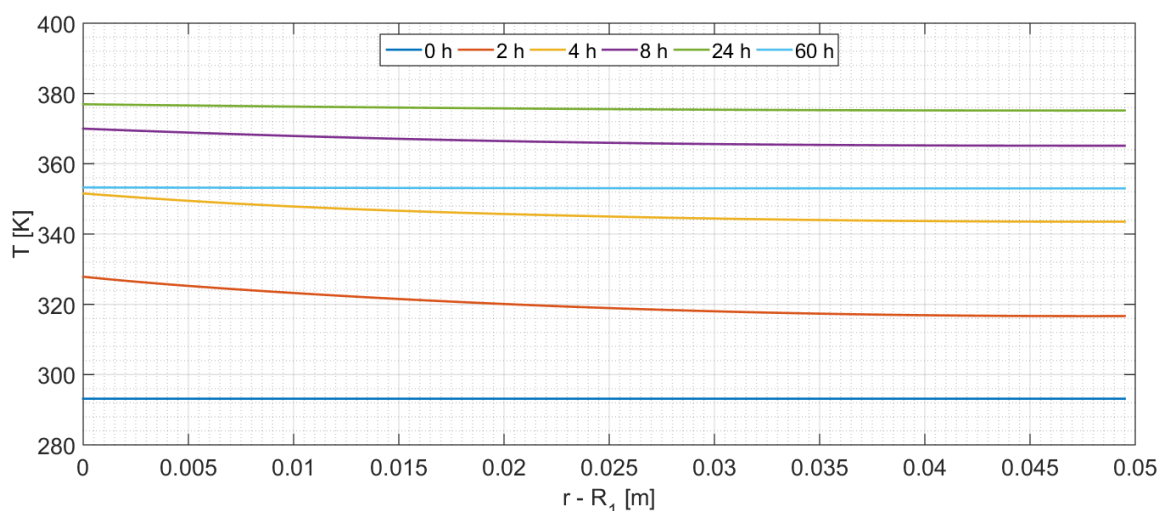
Slika 21. Distribucija sadržaja vlage u različitim vremenskim trenucima (1. slučaj)

[Slika 22.] prikazuje kako se mijenja sadržaj vlage po debljini izolacije odakle se može zaključiti da se proces sušenja odvija sve sporije. Sadržaj vlage na kraju sušenja uz unutarnji rub iznosi oko 1,8 % što nikako ne bi zadovoljavalo uvjet spomenut u 2. poglavlju prema kojemu sadržaj vlage na kraju sušenja ne bi smio premašiti 0,5 %. Međutim, u ovom radu se neće pridavati poseban značaj postignutim vrijednostima promatranih veličina jer bi bilo naivno očekivati da su rubni uvjeti i fizikalna svojstva izolacije, definirani koristeći različite literarne izvore, jednaki onima koji se pojavljuju u stvarnoj situaciji tijekom procesa sušenja. Veća pozornost će stoga biti posvećena kvalitativnoj analizi rezultata.



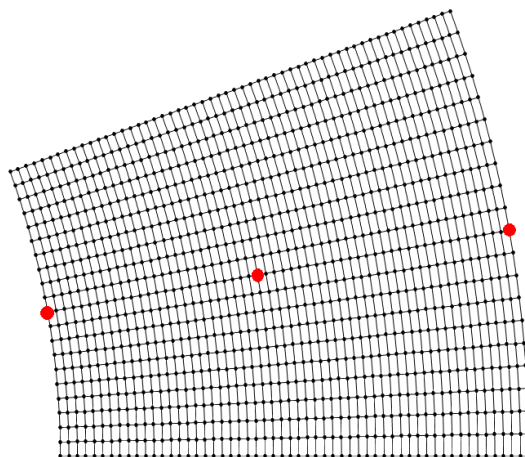
Slika 22. Sadržaj vlage po debljini izolacije (1. slučaj)

[Slika 23.] prikazuje kako se u vremenu mijenja temperatura po debljini izolacije. Kao što je bilo i za očekivati, temperaturno polje je gotovo jednoliko dok se manji gradijenti, pojavljuju u prvih nekoliko sati sušenja kada i temperatura okolnog zraka brže raste.



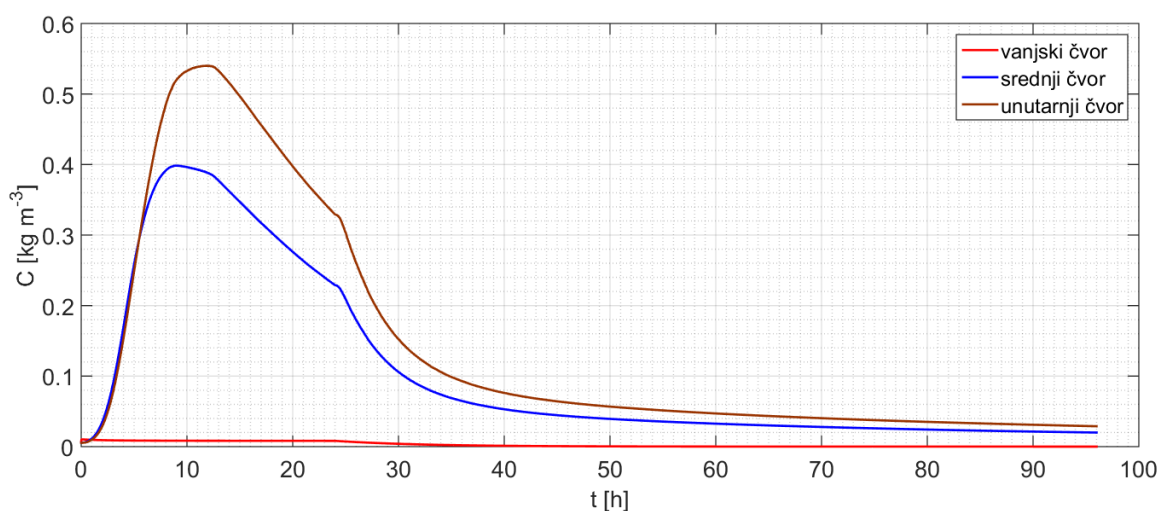
Slika 23. Temperatura po debljini izolacije (1. slučaj)

Kako bi se dobio bolji uvid u tranzijentne pojave po debljini izolacijskog sloja, analizirati će se vremenska promjena relevantnih veličina u tri karakteristična čvora numeričke mreže [Slika 24.]. Promatrani čvorovi se nalaze na osi simetrije segmenta, a uzimajući u obzir da se gradijenti fizikalnih veličina u tangencijalnom smjeru mogu zanemariti, vrijednosti u karakterističnim čvorovima se ne mijenjaju s obzirom na  $\varphi$  koordinatu.



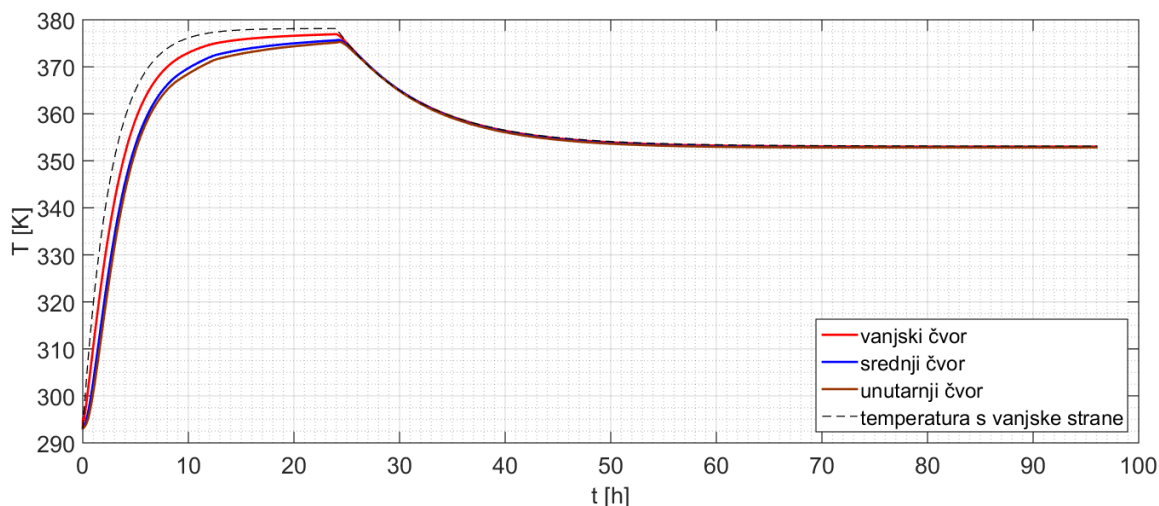
Slika 24. Tri promatrana čvora numeričke mreže

[Slika 25.] prikazuje promjenu koncentracije vlage u tri karakteristična čvora mreže. Vrijednost koncentracije u vanjskom čvoru se stalno održava na niskoj razini zbog neprekidnog transporta vlage u okolni zrak. S druge strane, u dijelovima izolacije koji su dalje od vanjske plohe dolazi do akumulacije vlage ishlapljele iz celuloznih vlakana. To se na slici [Slika 25.] očituje u porastu koncentracije vlage u srednjem i unutarnjem čvoru sve do otprilike dvanaestog sata sušenja, kada se temperatura izolacije ustaljuje na 105 °C. Tada se može primijetiti da se uslijed difuzije koncentracija postepeno smanjuje i to brže u srednjem čvoru koji je bliži vanjskoj plohi.



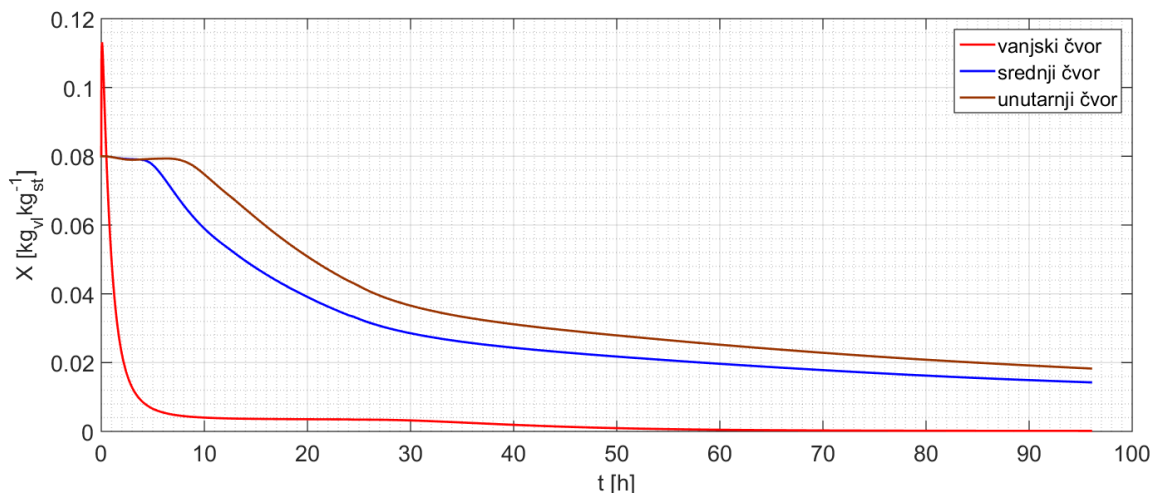
Slika 25. Promjena koncentracije vlage u tri čvora mreže (1. slučaj)

[Slika 26.] prikazuje promjenu temperature okolnog zraka s vanjske strane segmenta (crtkana linija) i promjenu temperature izolacije u tri karakteristična čvora. Ovdje se ponovno može vidjeti da se uslijed spore promjene vanjske temperature segment izolacije praktički uniformno zagrijava odnosno hladi što je posebno izraženo u intervalu sporog spuštanja tlaka nakon dvadeset i četvrtog sata sušenja kada gotovo svi gradijenti iščezavaju.



Slika 26. Promjena temperature u tri čvora mreže (1. slučaj)

Na slici [Slika 27.] je prikazana promjena sadržaja vlage u tri karakteristična čvora. Može se primijetiti da se na samom početku sušenja sadržaj vlage u vanjskom čvoru naglo povećao. Razlog tome je pretpostavka da zrak u komori ima relativnu vlažnost od 60 %. Pri temperaturi od početnih 20 °C, koncentracija vlage u takvom zraku je veća od ravnotežne koncentracije izračunate u jednadžbi (5.3) pa dolazi do upijanja vlage sve dok se dovoljno ne poveća temperatura vanjskog zraka odnosno dok koncentracija vlage u vanjskom zraku ne postane manja od ravnotežne koncentracije vlage u izolaciji. Nakon toga transport vlage mijenja smjer i započinje proces sušenja. Odavde se također može zaključiti da papirna izolacija prethodno izložena uobičajenim atmosferskim uvjetima (relativna vlažnost 60 % i temperatura 20 °C) može imati sadržaj vlage znatno veći od 8 %. U [29] se navodi da su moguće vrijednosti i do 12 %.



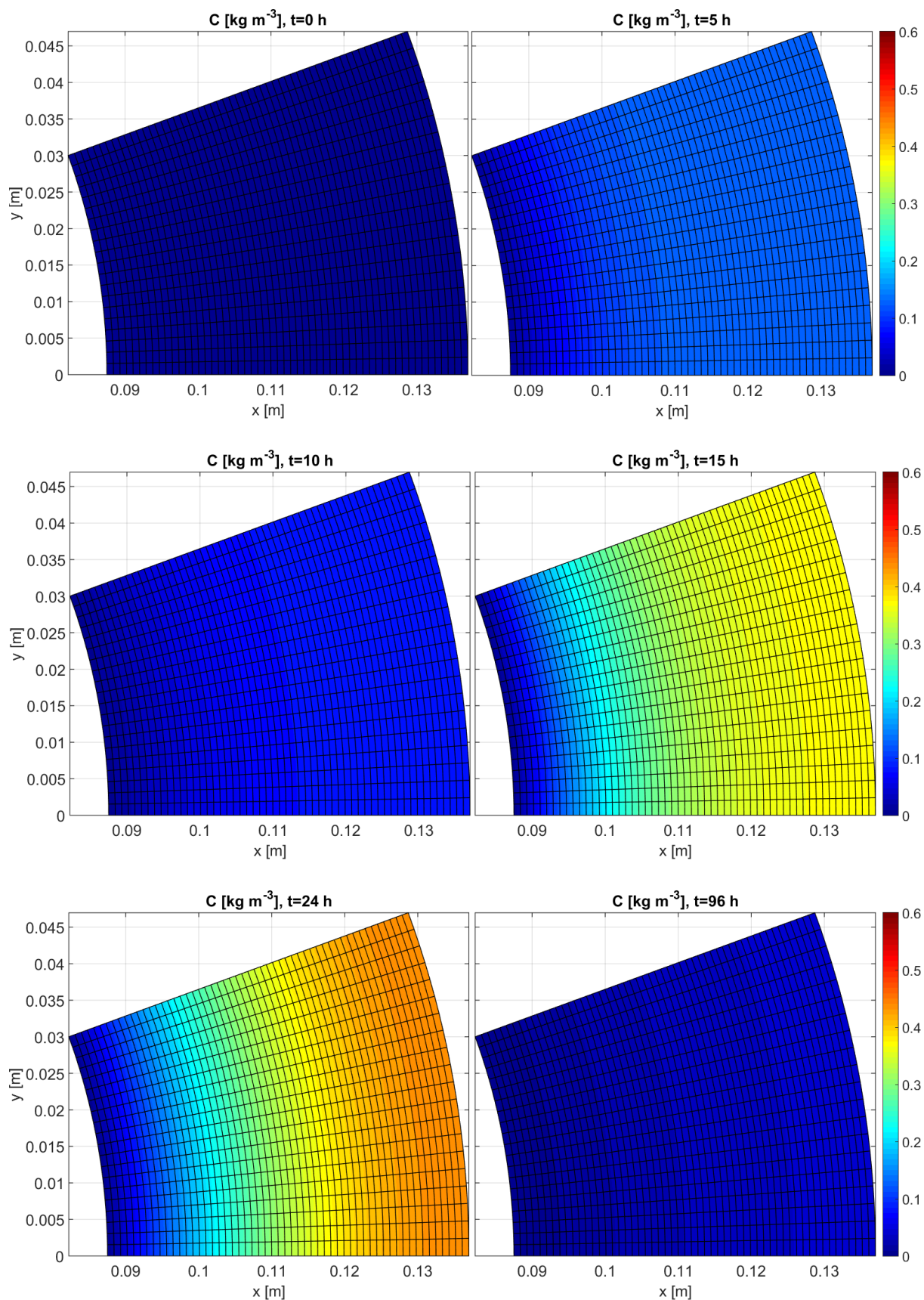
Slika 27. Promjena sadržaja vlage u tri čvora mreže (1. slučaj)

## 6.2. 2. slučaj

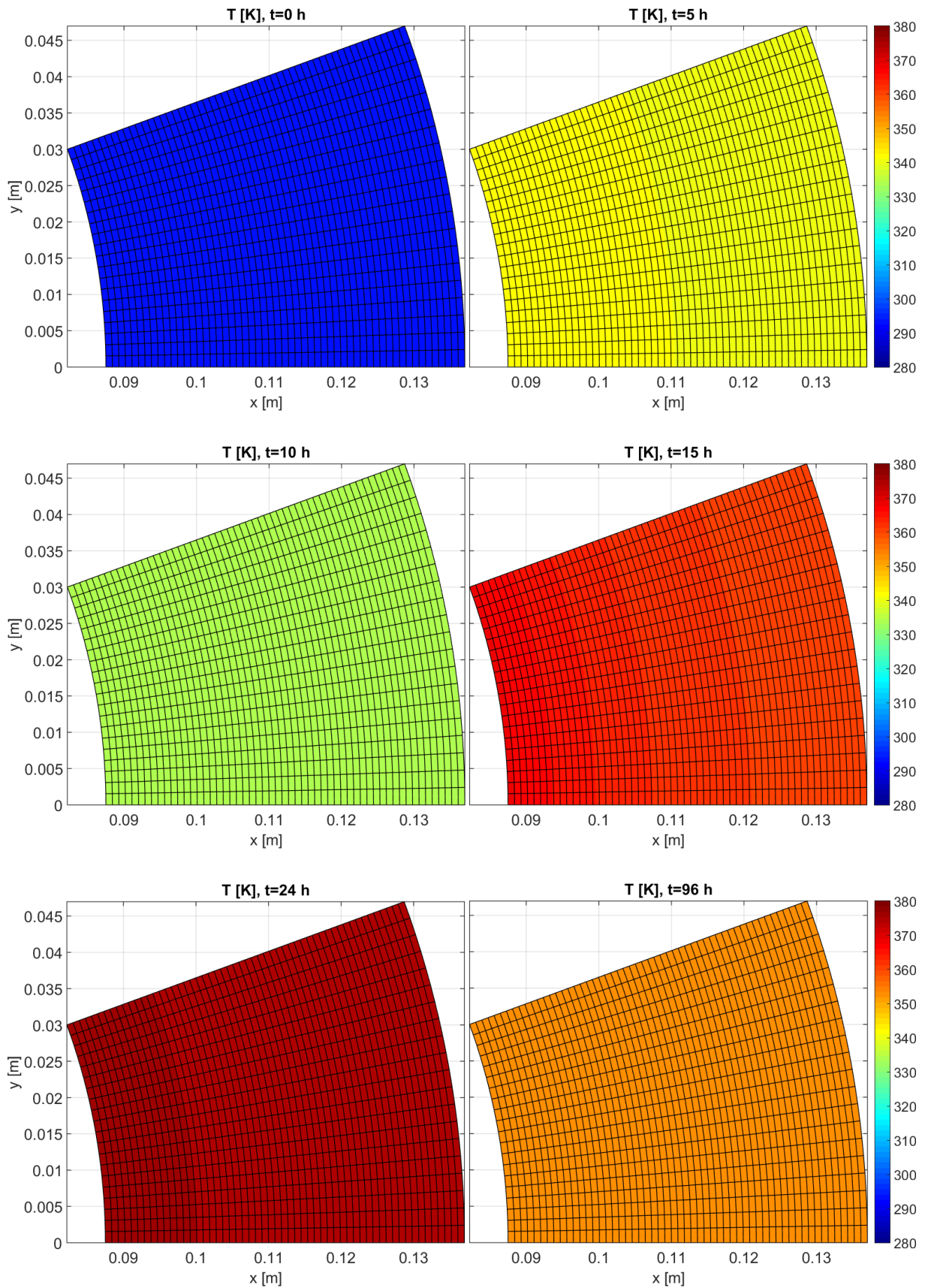
[Slika 28.] prikazuje distribuciju koncentracije vlage za 2. slučaj u različitim vremenskim trenucima. Intenzivniji porast koncentracije u dubljim slojevima segmenta se javlja nakon desetog sata sušenja što se može pripisati kasnijem postizanju maksimalne temperature u vakuumskoj komori [Slika 17.]. Povišenjem temperature [Slika 29.], pojavljuju se gradijenti koncentracije vlage pomoću kojih je osigurana daljnja difuzija prema vanjskoj plohi izolacije.

[Slika 30.] prikazuje distribuciju sadržaja vlage u različitim trenucima s obzirom na propisne rubne uvjete 2. slučaja. Može se primijetiti da prijevremeno spuštanje tlaka ne igra preveliku ulogu na intenzivnost sušenja. Tek s povišenjem temperature dolazi do značajnijeg smanjenja sadržaja vlage što se zaključuje iz distribucije u trenutku  $t = 24$  h gdje je sadržaj vlage uz unutarnju plohu segmenta pao ispod 6 %. To je naravno rezultat difuzije vlage kroz zrak u porama uslijed već spomenutih gradijenata koncentracije nastalih zbog povišenja temperature.

[Slika 31.] prikazuje promjenu sadržaja vlage po debljini izolacije za 2. slučaj u različitim vremenskim trenucima. Dijelovi izolacije uz vanjsku plohu se očekivano brže suše u odnosu na dijelove uz unutarnju plohu segmenta. S obzirom da je temperaturno polje jednoliko, gradijent sadržaja vlage je u skladu s propisanim gradijentom koncentracije na unutarnjoj plohi koji u svakom trenutku iznosi nula. Kada bi temperaturno polje bilo nejednoliko, što je svakako moguće u slučaju debljeg segmenta, drugačijih fizikalnih svojstava ili drugačije propisanih rubnih uvjeta, tada bi se sadržaj vlage također prilagodio tom polju, pa bi se maksimalne vrijednosti mogle postizati na srednjim dijelovima izolacije, a ne nužno uz unutarnji rub. Sve navedeno također vrijedi i za 1. slučaj propisanih rubnih uvjeta.

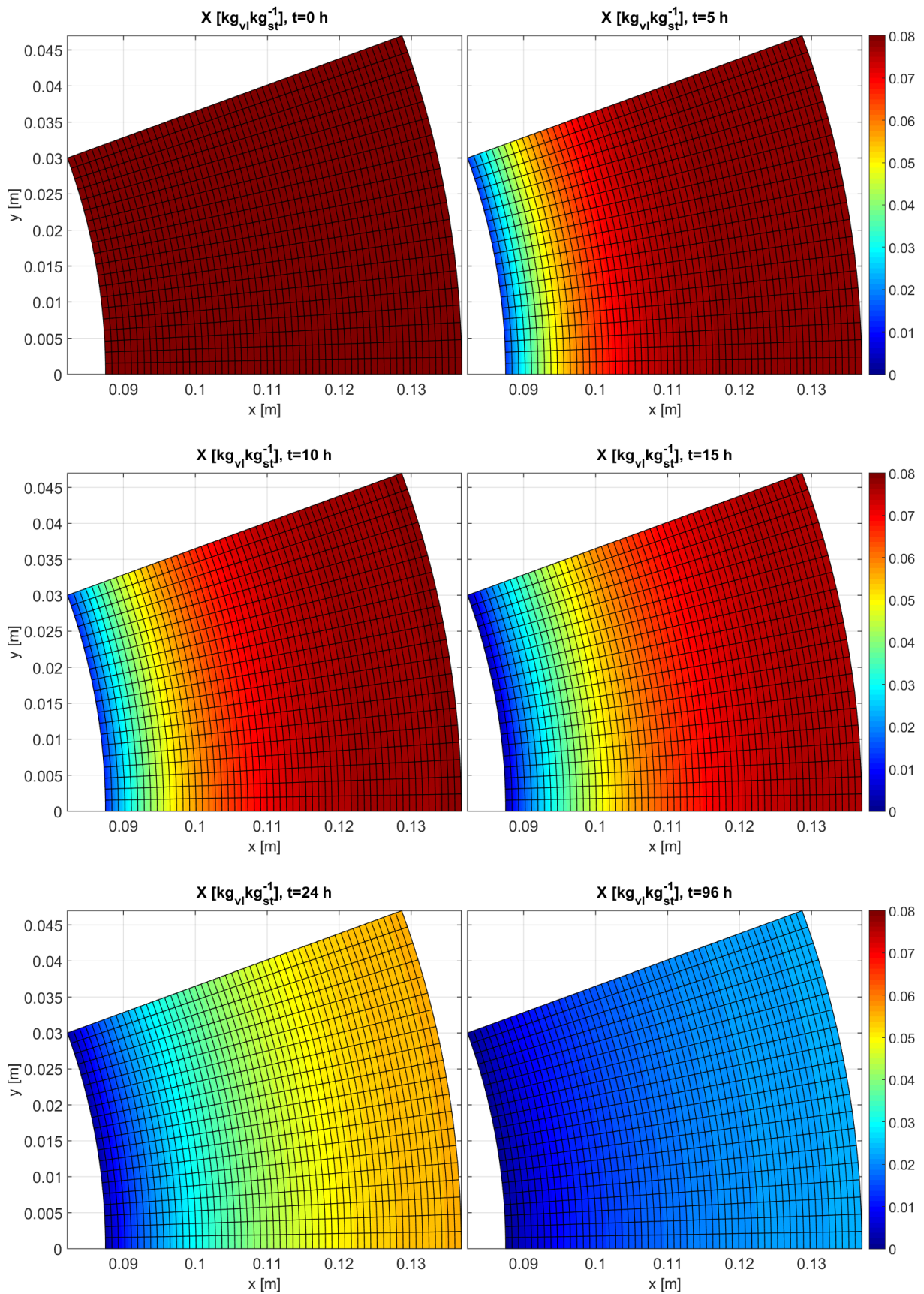


Slika 28. Distribucija koncentracije vlage u različitim vremenskim trenucima (2. slučaj)

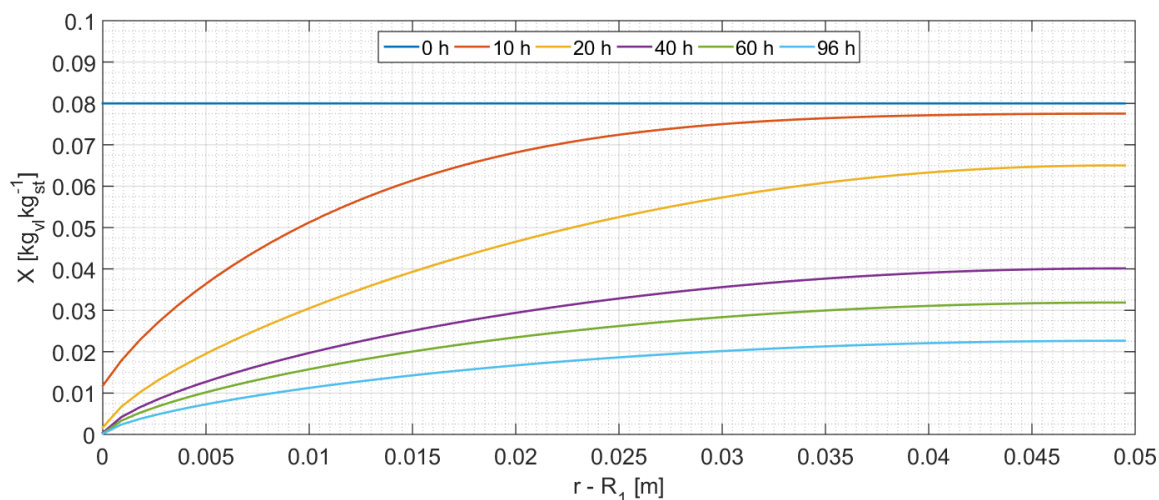


Slika 29. Distribucija temperature u različitim vremenskim trenucima (2. slučaj)



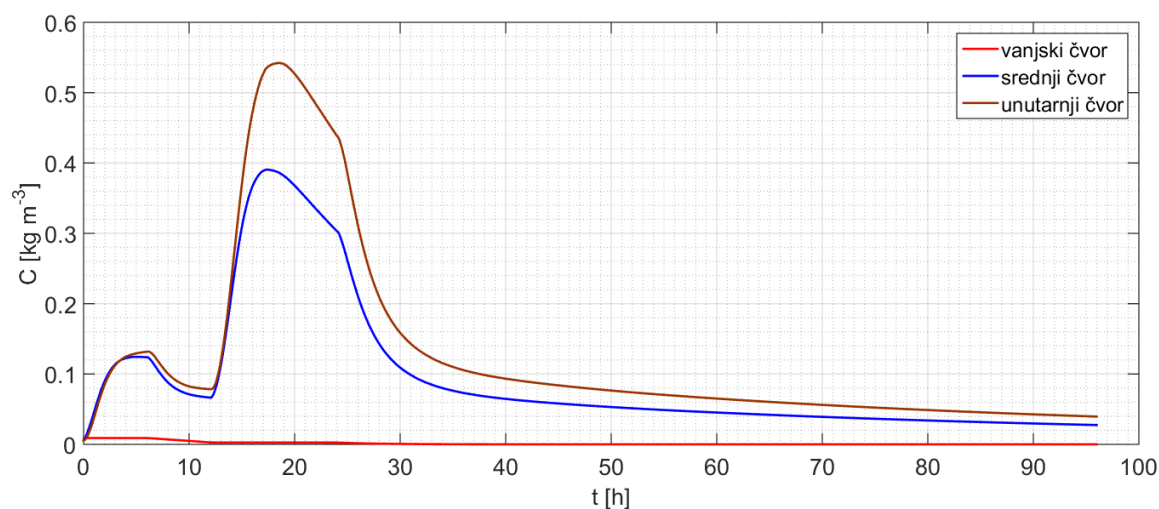


Slika 30. Distribucija sadržaja vlage u različitim vremenskim trenucima (2. slučaj)



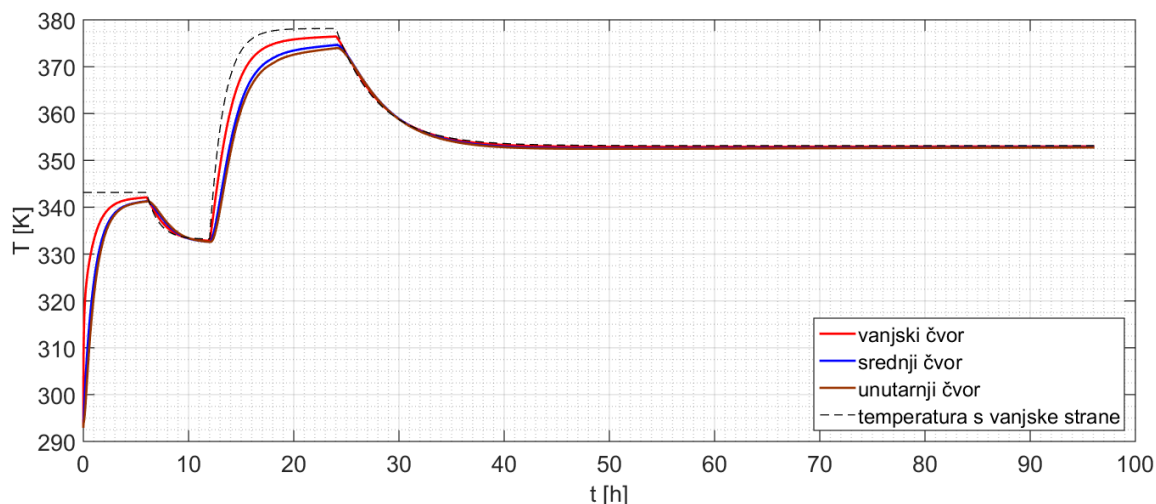
Slika 31. Sadržaj vlage po debljini izolacije (2. slučaj)

[Slika 32.] prikazuje vremensku promjenu koncentracije vlage u tri karakteristična čvora mreže označena na slici [Slika 24.]. Povećanje koncentracije vlage u srednjem i unutarnjem čvoru, rezultat je ishlapljivanja vlage iz celuloznih vlakana uslijed porasta temperature izolacije dok se u periodu od šestog do dvanaestog sata koncentracija vlage smanjuje što je rezultat pojave većih gradijenata u polju koncentracije što je i vidljivo na slici [Slika 32.].



Slika 32. Promjena koncentracije vlage u tri čvora mreže (2. slučaj)

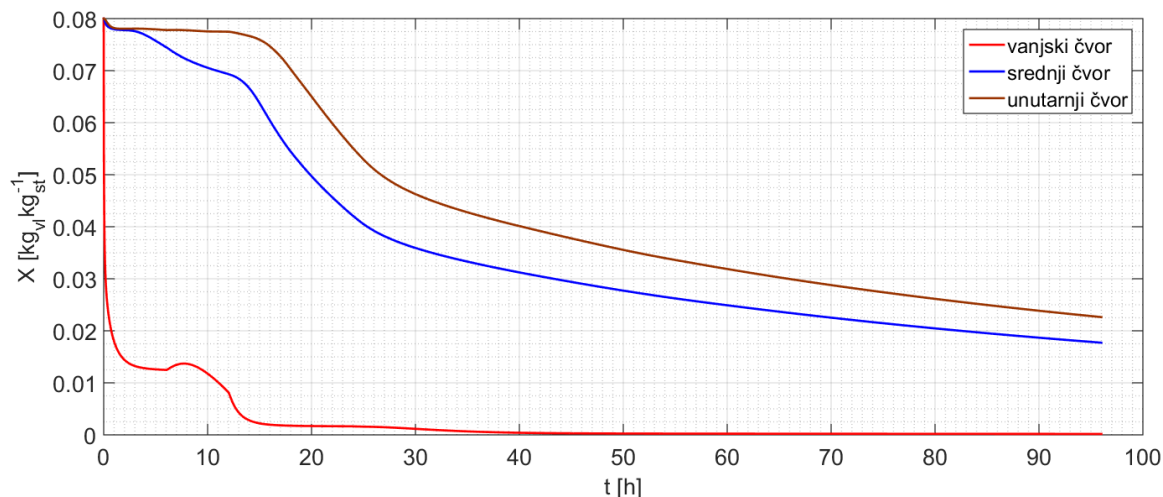
Na slici [Slika 33.] je prikazana vremenska promjena temperature u tri karakteristična čvora mreže te promjena temperature s vanjske strane segmenta (crtkana linija). Vidljivo je da su temperature po debljini segmenta uglavnom jednolike, a manja razlika u temperaturi između unutarnje i vanjske strane uočljiva je samo u periodima zagrijavanja kada je i razlika u temperaturi između okoline i vanjske plohe značajnija.



Slika 33. Promjena temperature u tri čvora mreže (2. slučaj)

[Slika 34.] prikazuje vremensku promjenu sadržaja vlage u tri karakteristična čvora. U skladu s očekivanim, sadržaj vlage u unutarnjem i srednjem čvoru se na početku procesa uslijed povećanja temperature izolacije smanjuje ishlapljujući u zrak sadržan u porama izolacije. Pošto u tom periodu transport difuzijom nije izražen zbog niskih gradijenata koncentracije vlage, to rezultira već opisanim povećanjem koncentracije u srednjem i unutarnjem čvoru [Slika 32.]. Nakon toga se može primijetiti da dolazi do smanjenja i koncentracije i sadržaja vlage (pogotovo u srednjem čvoru). Naime smanjenjem temperature i padom tlaka, dolazi do pojave značajnijih gradijenata uslijed čega vlaga intenzivnije difundira prema vanjskoj plohi. Zato dolazi do smanjenja koncentracije u dubljim slojevima, a time i do smanjenja ravnotežnog sadržaj vlage u celuloznim vlaknima. Taj pad u sadržaju vlage je posebno izražen u periodu oko dvadesetog sata sušenja kada je i gradijent koncentracije u segmentu najveći.

Također valja primjetiti da u 2. slučaju nema naglog upijanja vlage u vanjskom čvoru, kao što je to bilo u prethodnom slučaju. To je jednostavno posljedica propisnog rubnog uvjeta u kojem je na početku zrak u vakuumskoj komori zagrijan na 70 °C zbog čega je i koncentracija okolnog zraka znatno manja od početne (ravnotežne) koncentracije zraka u izolaciji pa odmah dolazi do sušenja. Međutim u šestom satu ponovno dolazi do upijanja vlage u čvorovima uz vanjsku plohu jer se smanjenjem temperature povećala koncentracija vlage u okolnom zraku. Sadržaj vlage u tim čvorovima se povećava sve dok se smanjenjem tlaka u komori, koncentracija u okolnom zraku ponovno ne smanji.



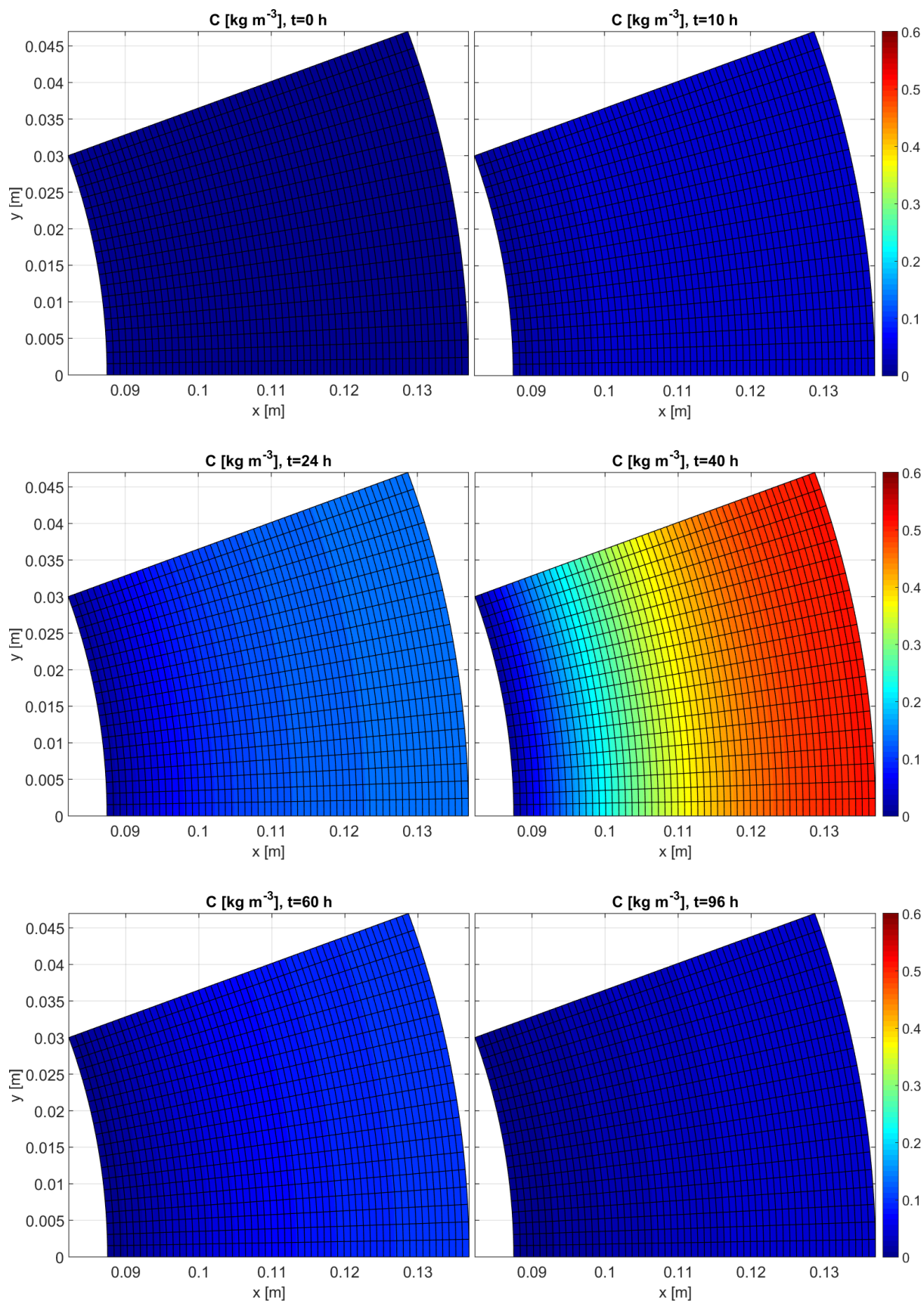
Slika 34. Promjena sadržaja vlage u tri čvora mreže (2. slučaj)

### 6.3. 3. slučaj

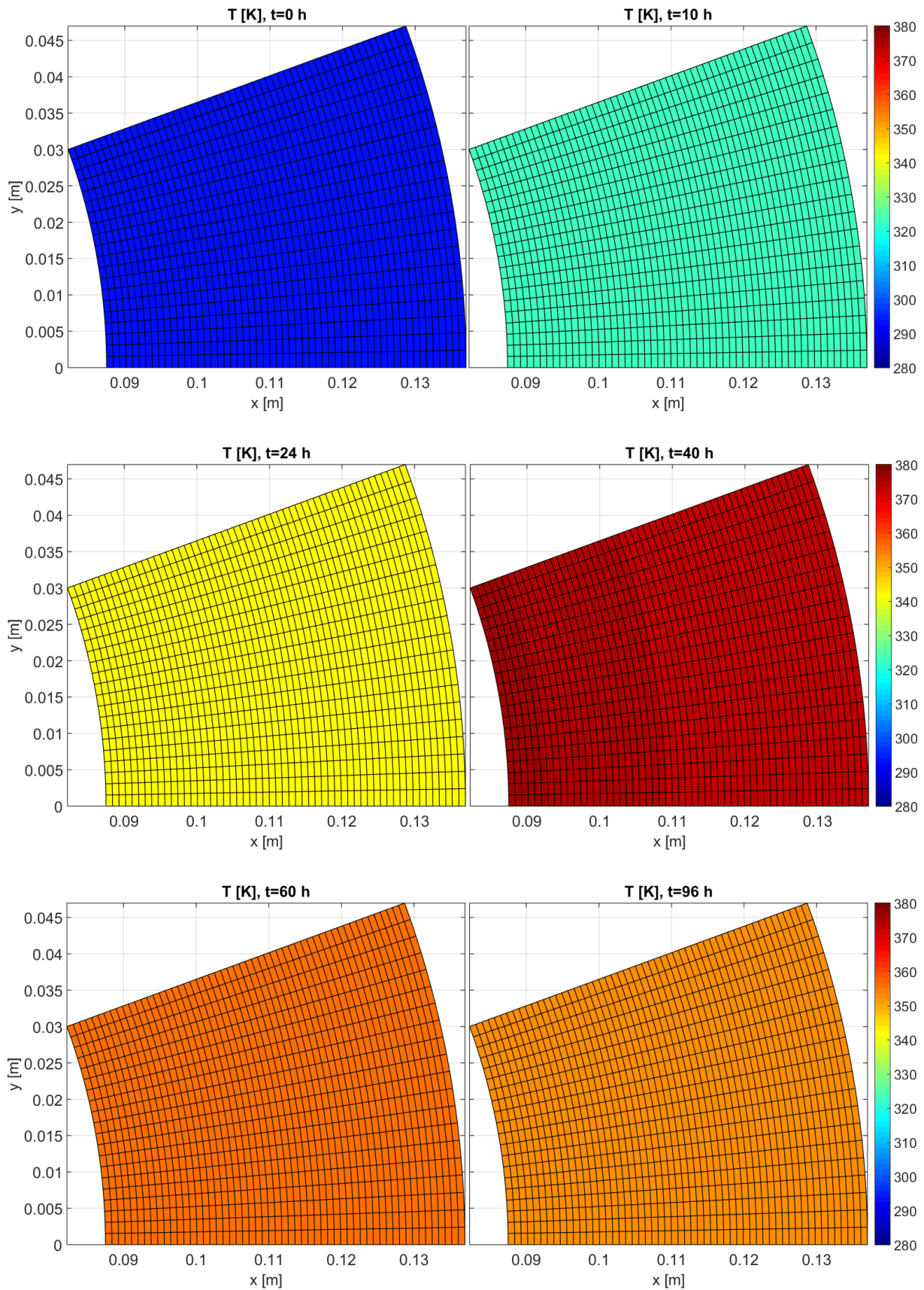
[Slika 35.] prikazuje distribuciju koncentracije vlage za 3. slučaj u različitim vremenskim trenucima odakle se vidi da se značajnije povećanje koncentracije u dubljim slojevima, a time i intenzivniji transport vlage difuzijom, javlja nakon dvadeset i četvrtog sata sušenja, kada se temperatura izolacije zagrijava na 105 °C.

Distribucija temperature je prikazana na slici [Slika 36.] i u svakom je trenutku, zbog sporog zagrijavanja, manjih dimenzija i relativno povoljnih toplinskih svojstava izolacije, praktički jednolika.

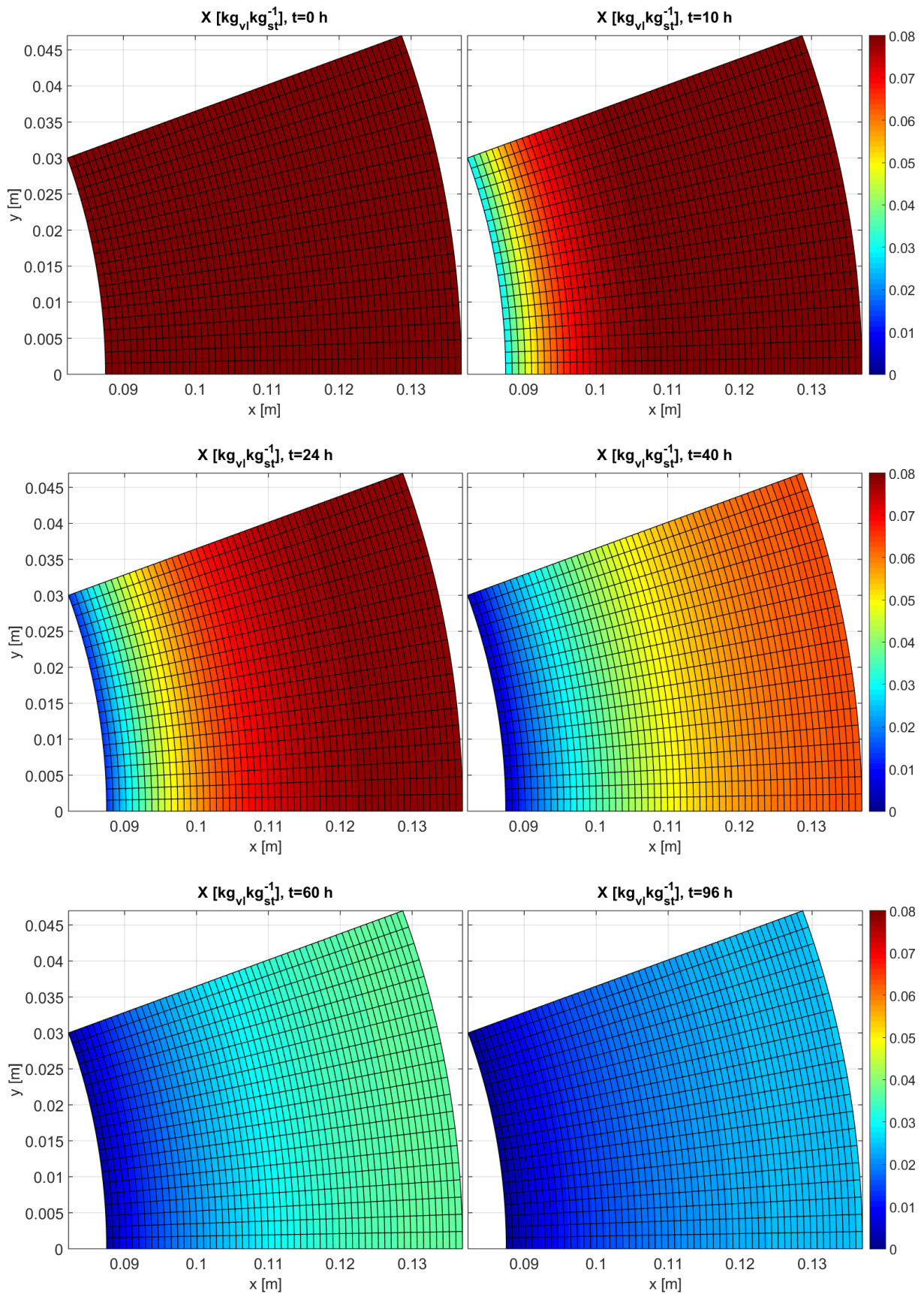
[Slika 37.] prikazuje vremensku promjenu distribucije sadržaja vlage u izolaciji koja se s obzirom na sporiji i postepeni proces zagrijavanja slabije mijenja u slojevima bližim unutarnjoj plohi segmenta. Značajan pad u sadržaju vlage, kako je već spomenuto, povezan je s intenzivnijim transportom vlage putem difuzije, što se također može zaključiti usporedbom slika [Slika 35.] i [Slika 37.] nakon četrdesetog sata sušenja.



Slika 35. Distribucija koncentracije vlage u različitim vremenskim trenucima (3. slučaj)

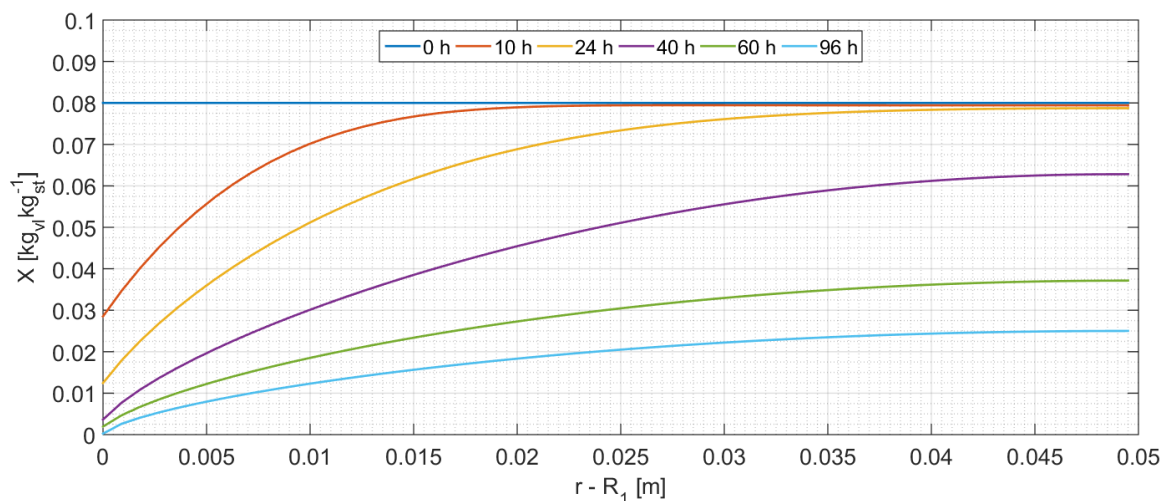


Slika 36. Distribucija temperature u različitim vremenskim trenucima (3. slučaj)



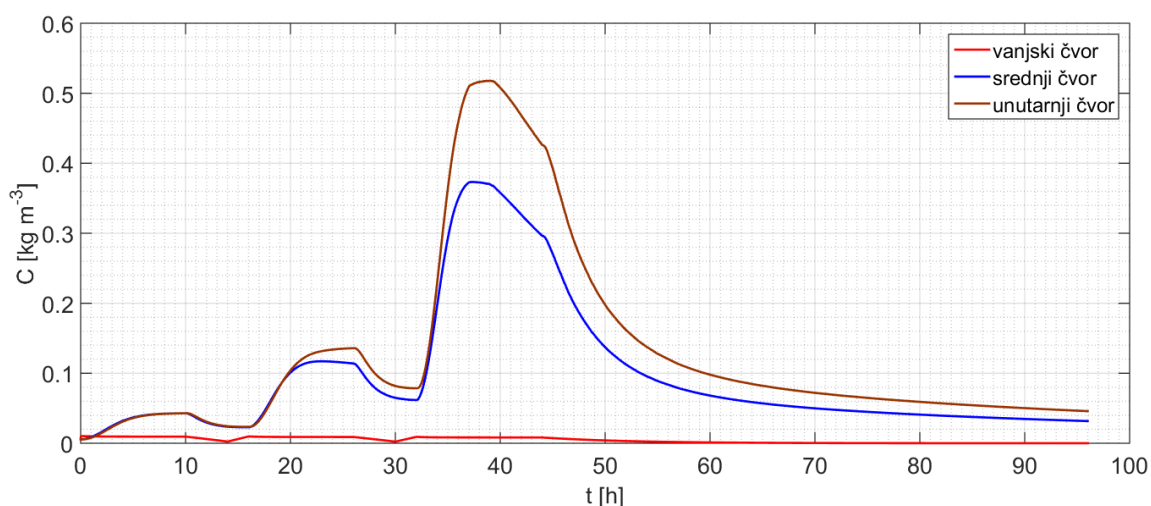
Slika 37. Distribucija sadržaja vlage u različitim vremenskim trenucima (3. slučaj)

[Slika 38.] prikazuje promjenu sadržaja vlage po debljini izolacije u različitim trenucima s obzirom na rubne uvjete definirane za 3. slučaj. Odavde se također može dati zaključak o sporijem sušenju; pogotovo ako se s prethodnim slučajevima uspoređi sadržaj vlage u vanjskim čvorovima.



Slika 38. Sadržaj vlage po debljini (3. slučaj)

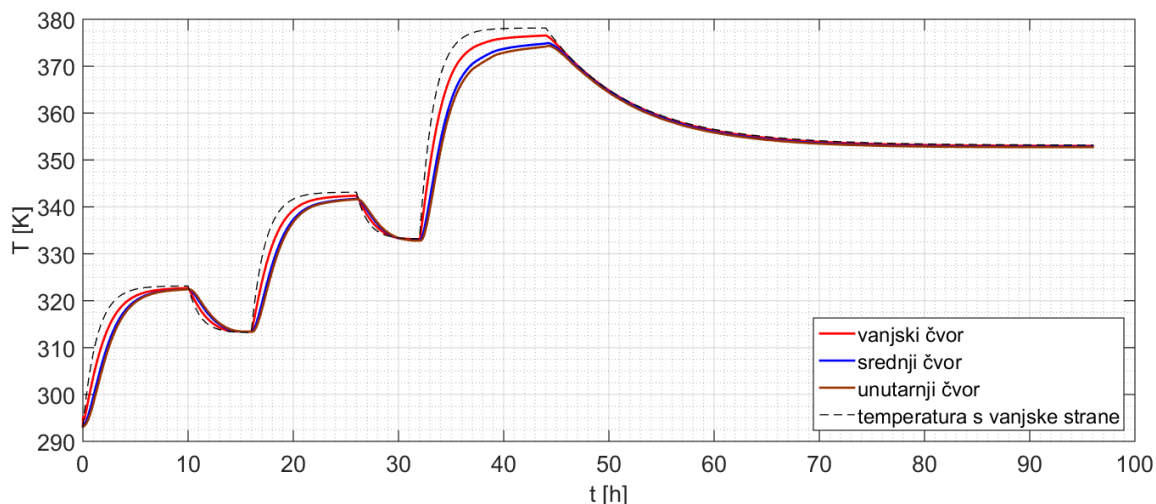
[Slika 39.] prikazuje promjenu koncentracije vlage u tri karakteristična čvora naznačena na slici [Slika 24.]. Iz slike se može zaključiti da se tijekom svakog povećanja temperature, nakon što se temperatura izolacije ustali, gradijenti koncentracije povećavaju što rezultira transportom vlage prema vanjskoj plohi.



Slika 39. Promjena koncentracije vlage u tri čvora mreže (3. slučaj)

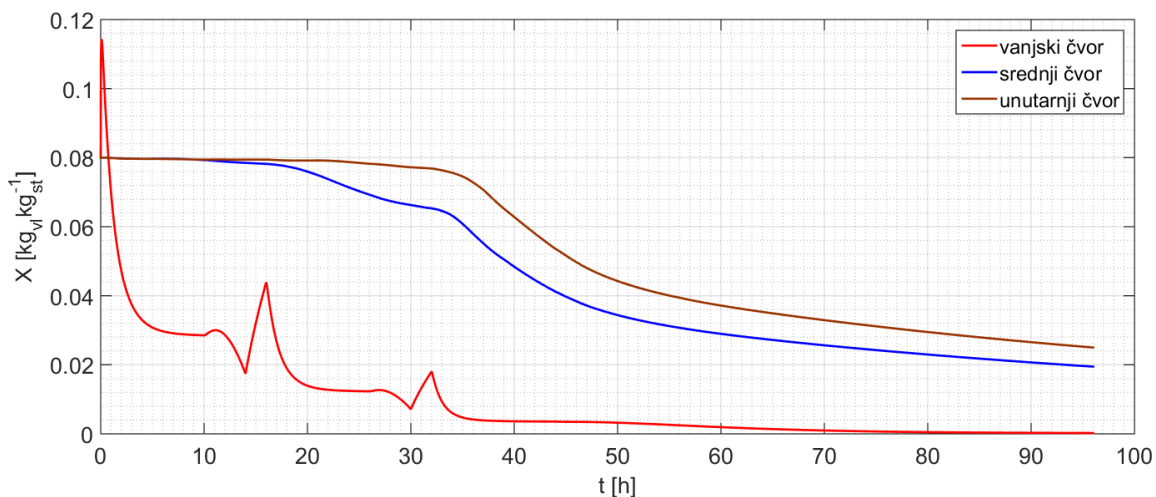
[Slika 40.] prikazuje promjenu temperature u tri karakteristična čvora mreže i promjenu okolne temperature s vanjske strane, označenu crtkanom linijom odakle si vidi da gradijenti temperature nisu značajno drugačiji u odnosu na prethodne slučajeve.





Slika 40. Promjena temperature u tri čvora mreže (3. slučaj)

Na slici [Slika 41.] su prikazane promjene sadržaja vlage u tri karakteristična čvora mreže. U ovom slučaju na početku sušenja ponovno dolazi do porasta sadržaja vlage u vanjskim čvorovima, jer proces započinje s temperaturom okolnog zraka od 20 °C. Također se može primijetiti da tijekom perioda povećanja tlaka u vanjskom čvoru dolazi do upijanja vlage dok se sadržaj vlage u srednjem i unutarnjem čvoru izrazito sporo smanjuje što je posljedica niskih gradijenata koncentracije vlage.



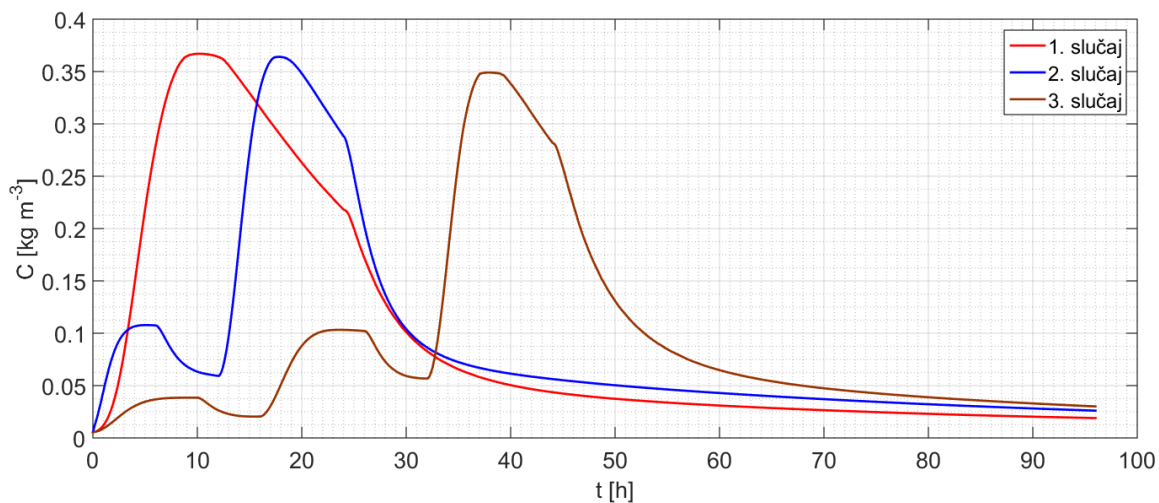
Slika 41. Promjena sadržaja vlage u tri čvora mreže (3. slučaj)

#### 6.4. Usporedba odziva

Jednom kada su dobivena vremenski promjenjiva polja koncentracije vlage, temperature i sadržaja vlage, tada se za svaki vremenski trenutak mogu pronaći osrednjene vrijednosti koristeći sljedeću jednadžbu:

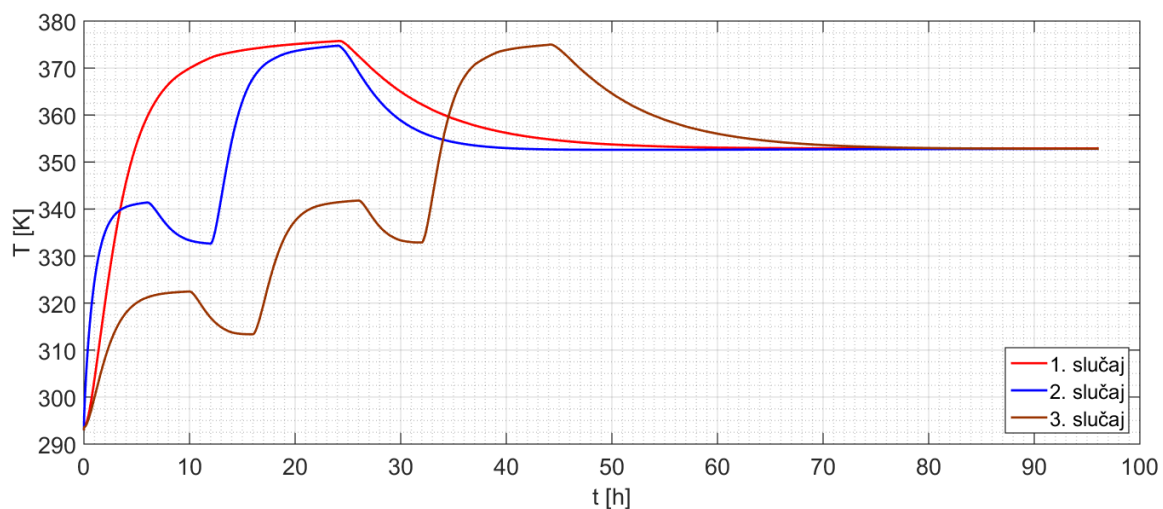
$$F_{sr}^n = \frac{\sum_{i=0}^{N_r} \sum_{j=0}^{N_\varphi} F_{i,j}^n}{N}, \quad (6.1)$$

gdje je  $F$  bilo koja od relevantnih veličina ( $C$ ,  $T$  ili  $M$ ). Slijedom navedenog, [Slika 42.] prikazuje promjenu osrednjene koncentracije u vremenu za sva tri slučaja. Ovdje se primjećuje da koncentracija dostiže maksimum kada se ustali maksimalna temperatura izolacije. Tada se, sudeći po prethodno opisanim rezultatima postižu i najveći gradijenti u polju koncentracije vlage, odnosno transport uslijed difuzije postaje najintenzivniji.



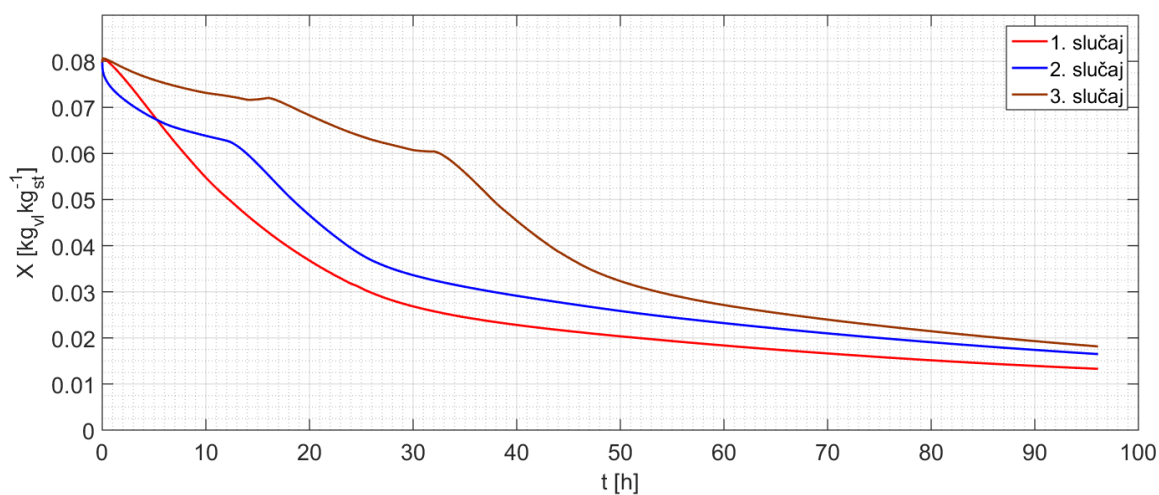
Slika 42. Osrednjene koncentracije vlage

[Slika 43.] prikazuje promjenu osrednjenih temperatura u vremenu za sva tri slučaja. Temperature se za pojedini slučaj, u većoj ili manjoj mjeri te s određenim vremenskim kašnjenjem, preklapaju s vremenskom promjenom temperature u vakuumskoj komori.



Slika 43. Osrednjene temperature

[Slika 44.] prikazuje vremensku promjenu osrednjenog sadržaja vlage u izolaciji za sva tri slučaja. Ovi dijagrami su izuzetno važni, kako bi se ocijenila učinkovitost, odnosno brzina sušenja. Može se primijetiti da su režimi tlaka i temperature u prvom slučaju najpogodniji s obzirom na konačan sadržaj vlage u izolaciji. Takvi režimi se uglavnom i primjenjuju u procesima sušenja izolacije transformatora (prvo podizanje temperature, a zatim primjena vakuuma). Također se može usporedbom slika [Slika 42.] i [Slika 44.] primijetiti da se maksimalne koncentracije vlage otprilike javljaju u trenucima koji odgovaraju točkama pregiba krivulja promjene osrednjenog sadržaja vlage u vremenu, a koje su fizikalno gledajući područja maksimalne brzine sušenja izolacije.



Slika 44. Osrednjeni sadržaji vlage

## 7. ZAKLJUČAK

Sušenje celulozne izolacije je iznimno važan korak u postupku proizvodnje mjernog transformatora. Naime, nedovoljno osušena izolacija transformatora će gotovo sigurno izazvati kvar uređaja što u pravilu rezultira visokim troškovima popravaka ili čak potpune zamjene transformatora. Sušenje transformatorske izolacije je dugotrajan i energijski intenzivan proces koji je u novije vrijeme, kada je posebna pozornost usmjerena na što veću učinkovitost u pogledu potrošnje energije, zadobio osobit interes. Dakako, tu je i nastojanje poduzeća da ostvari što bržu i ekonomičniju proizvodnju, približavajući se time optimumu procesa. Sve je to rezultiralo pojavom tehnološki modernijih, bržih i učinkovitijih postupaka sušenja.

Nastojeći smanjiti trajanje proizvodnje i pritom postići što niži sadržaj vlage na kraju sušenja, proizvođači često pribjegavaju evaluaciji procesa sušenja putem računalne simulacije, koristeći određeni matematički model. Kako je sušenje fizikalno gledajući kompleksan proces tijekom kojeg se transport vlage odvija različitim mehanizmima od difuzije pa do kapilarnog i hidrodinamičkog transporta, u novije vrijeme su razvijeni različiti jednostavniji i složeniji matematički modeli koji u obzir uzimaju više ili manje mehanizama transporta vlage. Jednom kada je validiran, matematički model predstavlja dobru osnovu za predviđanje rezidualnog sadržaja vlage ili temperature celulozne izolacije tijekom procesa sušenja.

U svrhu simulacije procesa sušenja celulozne izolacije mjernog transformatora, u ovom je radu formuliran matematički model koji obuhvaća simultani prijenos topline i vlage. Uz propisane vremenski promjenjive rubne uvjete, provedena je analiza različitih odziva koji su se pokazali fizikalnima i na tome je zasada stao daljnji rad na modelu.

Problem u dobivanju odziva koji bi se mogli smatrati ostvarivima tijekom realnog procesa sušenja u vakuumskoj komori, bio je nedostatak informacija o svojstvima celulozne izolacije, a koja imaju velik utjecaj na tijek sušenja, kao što su poroznost, gustoća, faktor otpora difuziji, toplinska provodnost, itd. Većinu svojstava bi najbolje bilo utvrditi eksperimentalnim putem, a zatim uzeti u obzir i njihovu promjenjivost s obzirom na temperaturu, sadržaj vlage, tlak itd. Nadalje, apsolutno su nepoznate promjene temperature, tlaka i relativne vlažnosti u vakuumskoj komori, kao i koeficijenti prijelaza topline, za utvrđivanje kojih bi trebala detaljna analiza zračenja s poznatim temperaturama električnih grijača i poznatim ukupnim brojem te prostornim rasporedom transformatora u komori. Vrijednost koeficijenta transporta mase je također pretpostavljena, i sigurno odudara od stvarnih vrijednosti, koje bi trebalo utvrditi mjerenjima. Poznavanjem svih nabrojanih nepoznanica, mogli bi se dobiti rezultati s kojima bi

zatim bilo potrebno validirati model i eventualno provesti korekciju ulaznih podataka. To je relativno dugačak proces iterativnog karaktera, ali kao rezultat daje dobar matematički alat koji omogućuje egzaktniju procjenu sadržaja vlage čime se ostvaruju brojne, već spomenute, uštede i dobrobiti. Nabrojani problemi u svakom slučaju stvaraju izuzetno širok prostor daljnjoj djelatnosti započetoj u ovom diplomskom radu.

**LITERATURA**

- [1] Skalicki, B., Grilec, J.: *Električni strojevi i pogoni*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 953-6313-67-7, str. 1, 2, 41, 2004.
- [2] Goić, R., Jakus, D., Penović, I.: *Distribucija električne energije – interna skripta*, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 2008.
- [3] Saha, T. K., Purkait, P.: *Transformer Ageing – Monitoring and Estimation Techniques*, John Wiley and Sons, Singapore, 9781119239994, str. 1-32, 329, 2017.
- [4] Harlow, J. H.: *Electric Power Transformer Engineering*, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 9781439856369, str. (7-1), (7-12), (7-33), (12-1-17), (22-44-45), 2012.
- [5] Przybyłek, P.: *A New Concept of Applying Methanol to Dry Cellulose Insulation at the Stage of Manufacturing a Transformer*, MDPI, Energies, 11(7), 1658, 2018.
- [6] Abu-Siada, A.: *Power Transformer Condition Monitoring and Diagnosis*, The Institution of Engineering and Technology, London, 9781785612558, str. 41, 43, 46, 48, 87-92, 127 2018.
- [7] Heathcote, M. J.: *The J & P Transformer Handbook*, Elsevier, Oxford, 9780750681643, str. 2, 79, 87, 285-288, 2007.
- [8] Kulkarni, S. V., Khaparde, S. A.: *Transformer Engineering – Design, Technology and Diagnostics*, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 9781439854181, str. 1-3, 369-372, 674, 2013.
- [9] Freiburg, M.: *Testing and diagnostics of medium- and high-voltage instrument transformers*, Transformers Magazine, 5(4), str. 104, 105, 2018.
- [10] <http://www.koncar-mjt.hr/> (pristupljeno 10.10.2020.)
- [11] [https://www.sciencedaily.com/terms/sulfur\\_hexafluoride.htm](https://www.sciencedaily.com/terms/sulfur_hexafluoride.htm) (pristupljeno 15.10.2020.)
- [12] Du, Y., Zahn, M., Lesieutre, B., C., Mamishev, A., V., Lindgren, S., R.: *Moisture Equilibrium in Transformer Paper-Oil Systems*, DEIS, 15(1), str. 11-20, 1999.
- [13] James, R. E., Su, Q.: *Condition Assessment of High Voltage Insulation in Power System Equipment*, The Institution of Engineering and Technology, London, 978-0-86341-737-5, str. 31, 32, 36, 46, 2008.
- [14] Roizman, O.: *Water in Transformers*, Transformers Magazine, 6(1), str. 68-74, 2019.
- [15] Steeves, G.: *Vapor phase transformer drying – part I*, Transformers Magazine, 3(2), str. 52-56, 2016.

- [16] Betie, A., Meghnefi, F., Fofana, I., Yeo, Z.: *Modeling the Insulation Paper Drying Process from Thermogravimetric Analyses*, MDPI, Energies, 11(3), 517, 2018.
- [17] Bangar, A., Sharma, R., Tripathi, H. P., Bhanpurkar, A.: *Comparative Analysis of Moisture Removing Processes from Transformer which are Used to Increase its Efficiency*, Global Journal of Researches in Engineering, 12(5), 2012.
- [18] Kulkarni, R. R., et al.: *A Comparative Study of Drying Processes for Removing Moisture from Transformer Coil Insulation*, International Journal of New Technologies in Science and Engineering, 5(10), 2018.
- [19] Siddiqui, M. T., Pattiwar, J. T., Paranjape, A. P.: *Vapor Phase Drying for Moisture Removal from Transformer Coil Insulation*, International Journal of Scientific & Engineering Research, 8(4), 2017.
- [20] Srikiatden, J., Roberts, J. S.: *Moisture Transfer in Solid Food Materials: A Review of Mechanisms, Models, and Measurements*, International Journal of Food Properties, Taylor & Francis Group LLC, 10, str. 739-777, 2007.
- [21] Crank, J.: *The Mathematics of Diffusion*, Oxford University Press, 0198533446, str. 1-2, 352-358 1975.
- [22] Derluyn, H., Janssen, H., Diepens, J., Derome, D., Carmeliet, J.: *Hygroscopic Behaviour of Paper and Books*, Journal of Building Physics, 31(1), str. 10, 2007.
- [23] Shkolnik, A.: *Estimation of water content in oil-impregnated cellulose materials in transformers*, Transformers Magazine, 4(2), str. 111, 2017.
- [24] Recktenwald, G.W.: *Finite-Difference Approximations to the Heat Equation*, str. 1-3, 2004.
- [25] Özisk, M. N.: *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2002.
- [26] Nowak, A. J., Buliński, Z. P., Kasza, K., Matysiak, Ł.: *Inverse thermal problem in computational modelling of the paper vacuum drying process*, Inverse Problem in Science and Engineering, Taylor & Francis Group, 19(1), str. 63, 2011.
- [27] Haghi, A. K.: *Mechanism of Heat and Mass Transfer in Moist Porous Materials*, Jurnal Teknologi, 36(F), str. 12, 2002.
- [28] Halasz, B., Galović, A., Boras, I.: *Toplinske tablice*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2015.
- [29] Tarandek, Ž.: *Utjecaj aluminijskih dijelova na pojavu vodika u mjernom transformatoru*, Fakultet strojarstva i brodogradnje – magistarski rad, str. 2-15,6-10,6-11, Zagreb, 2011.