

# Analiza i primjena dinamičkog mjerenja toplinske vodljivosti građevinskih materijala

---

**Bezjak, Mladen**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2007**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:946833>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-21**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

**ANALIZA I PRIMJENA DINAMIČKOG MJERENJA TOPLINSKE**  
**VODLJIVOSTI GRAĐEVINSKIH MATERIJALA**

**DOKTORSKI RAD**

**Mr. sc. Mladen Bezjak dipl. inž. stroj.**

**ZAGREB, 2007.**

---

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

**ANALIZA I PRIMJENA DINAMIČKOG MJERENJA TOPLINSKE**  
**VODLJIVOSTI GRAĐEVINSKIH MATERIJALA**

**DOKTORSKI RAD**

**MENTOR:**

**Dr. sc. Davor Zvizdić, red. prof.**

**Mr. sc. Mladen Bezjak, dipl. inž. stroj.**

**ZAGREB, 2007.**

---

## PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU:

### UDK:

**Ključne riječi:** Toplinska provodnost, dinamičko mjerenje, vruća žica, građevni materijali.

**Znanstveno područje:** TEHNIČKE ZNANOSTI

**Znanstveno polje:** Strojarsstvo

**Institucija u kojoj je rad izrađen:** Institut građevinarstva Hrvatske d.d.

**Mentor rada:** Dr. sc. Davor Zvizdić, red. prof.

**Broj stranica:** 132

**Broj priloga:** 8

**Broj slika:** 33

**Broj tablica:** 23

**Broj korištenih bibliografskih jedinica:** 52

### Datum obrane:

**Povjerenstvo:** Dr. sc. Ivan Galaso, red. prof., FSB – predsjednik povjerenstva  
Dr. sc. Davor Zvizdić, red. prof., FSB – voditelj doktorske disertacije  
Dr. sc. Anton Galović, red. prof., FSB – član povjerenstva  
Dr. sc. Tomislav Filetin, red. prof., FSB – član povjerenstva  
Dr. sc. Juraj Božićević, red. prof. u m., FKIT – član povjerenstva

**Institucija u kojoj je rad pohranjen:** Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

**Sveučilište u Zagrebu**

**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

**Poslijediplomski studij**

**Zagreb, lipanj 2007.**

## ZAHVALA

Posebno želim zahvaliti profesoru i mentoru Davoru Zvizdiću na pomoći i savjetima tijekom izrade ovog rada.

Kolegama Zlatku Franoliću i Željku Tavasuu zahvaljujem na pomoći pri osmišljavanju i razradi mjernog postupka.

Kolegi Branku Ribičiću zahvaljujem na izradi izvora stalne snage.

Kolegama iz Instituta građevinarstva Hrvatske zahvaljujem na podršci i preuzimanju obveza tijekom izrade ovog rada.

Ivani, Borni, Bartolu i Andriji zahvaljujem na razumijevanju i potpori koju sam imao ovih godina.

# SADRŽAJ

Opći popis oznaka i mjernih jedinica .....	VIII
Popis slika .....	X
Popis tablica .....	XII
Popis priloga .....	XIII
Predgovor .....	XIV
Sažetak .....	XV
Summary .....	XV

## 1 UVOD

1.1 Definicija problema .....	XVI
1.2 Povijest dinamičkih mjerenja toplinske provodnosti .....	XVII
1.3 Hipoteza .....	XVIII

## 2 DINAMIČKO MJERENJE TOPLINSKE PROVODNOSTI

2.1 Teorijske osnove .....	1
2.2 Analitičko rješenje .....	4
2.3 Numeričko rješenje .....	13
2.4 Izračun toplinske provodnosti .....	20
2.5 Priprema mjerenja, određivanje $t_K$ .....	24
2.6 Iskazivanje mjernih rezultata .....	27

## 3 UREĐAJ ZA DINAMIČKO MJERENJE TOPLINSKE PROVODNOSTI

3.1 Tehnički opis uređaja .....	30
3.2 Princip mjerenja .....	34
3.3 Ispitni uzorci .....	35

## 4 STACIONARNO MJERENJE TOPLINSKE PROVODNOSTI

4.1 Teorijske osnove .....	36
4.2 Tehnički opis uređaja .....	38
4.3 Ispitni uzorci .....	41
4.4 Izračun toplinske provodnosti iz mjernih rezultata	
4.4.1 Proračun gubitaka topline tijekom mjerenja .....	42
4.4.2 Toplinska provodnost pri nekoj ispitnoj temperaturi .....	43
4.4.3 Toplinska provodnost pri + 23°C ( $\lambda_{23}$ ) .....	44

## 5 PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI

5.1 Metode procjene standardne mjerne nesigurnosti	
5.1.1 Procjena standardne mjerne nesigurnosti vrste A .....	46
5.1.2 Procjena standardne mjerne nesigurnosti vrste B .....	48
5.2 Procjena sastavljene standardne mjerne mjerne nesigurnosti	
5.2.1 Nekorelirane ulazne veličine .....	51
5.2.2 Korelirane ulazne veličine .....	51
5.3 Određivanje proširene mjerne nesigurnosti .....	53
5.4 Iskazivanje mjerne nesigurnosti .....	55

## **6 PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI ODREĐIVANJA TOPLINSKE PROVOĐNOSTI DINAMIČKOM METODOM**

6.1 Mjerna nesigurnost duljine platinske žice .....	57
6.2 Mjerna nesigurnost vremena .....	58
6.3 Mjerna nesigurnost snage .....	59
6.4 Mjerna nesigurnost temperature	
6.4.1 Mjerna nesigurnost izračuna iz izmjerenih vrijednosti napona i jakosti struje ..	61
6.4.2 Mjerna nesigurnost temperature zbog aproksimacije pravcem regresije .....	63
6.4.3 Mjerna nesigurnost porasta temperature .....	63
6.5 Mjerna nesigurnost toplinske provodnosti .....	65

## **7 PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI ODREĐIVANJA TOPLINSKE PROVOĐNOSTI STACIONARNOM METODOM**

7.1 Mjerna nesigurnost debljine uzoraka .....	67
7.2 Mjerna nesigurnost referentne temperature .....	68
7.3 Mjerna nesigurnost termonapona .....	69
7.4 Mjerna nesigurnost temperaturnog pada na uzorcima .....	74
7.5 Mjerna nesigurnost ispitne temperature .....	75
7.6 Mjerna nesigurnost snage na grijalici .....	76
7.7 Mjerna nesigurnost gubitaka snage .....	78
7.8 Mjerna nesigurnost gustoće toplinskog toka .....	81
7.9 Mjerna nesigurnost toplinske provodnosti .....	82



## **8 REZULTATI USPOREDNIH MJERENJA I PROCJENE MJERNE NESIGURNOSTI**

8.1 Mjerenje uzoraka od mineralne vune	
8.1.1 Mjernje uzoraka od staklene vune .....	85
8.1.2 Mjernje uzoraka od kamene vune .....	88
8.2 Mjerenje uzoraka od tvrde poliuretanske pjene .....	90
8.3 Mjerenje uzoraka od ekspaniranog polistirena .....	93
8.4 Mjerenje uzoraka od ekstrudiranog polistirena .....	97
8.5 Mjerenje uzoraka od toplinske žbuke .....	101
8.6 Mjerenje uzoraka od pluta .....	104
8.7 Ocjena rezultata usporednih mjerenja .....	107
8.8 Usporedna mjerenja toplinske provodnosti na uzorku ekstrudiranog polistirena pomoću izvedbi (1), (2) i (3) .....	111
<b>9 ZAKLJUČAK</b>	
9.1 Pregled provedenog istraživanja .....	112
9.2 Glavni rezultati rada i mogućnosti daljnjeg istraživanja .....	113
<b>10 LITERATURA</b> .....	115
<b>Životopis</b> .....	XIX
<b>Biography</b> .....	XX

## OPĆI POPIS OZNAKA I MJERNIH JEDINICA

$\lambda$	$\frac{W}{m \cdot K}$	toplinska provodnost
$a$	$\frac{m^2}{s}$	temperaturna provodnost i nagib regresijskog pravca
$c$	$\frac{J}{kg \cdot K}$	specifični toplinski kapacitet
$\rho$	$\frac{kg}{m^3}$	gustoća
$t$	s	vrijeme
$d$	m	debljina
$L$	m	duljina
$U$	V	električni napon
$I$	A	jakost električne struje
$P$	W	električna snaga
$R$	$\Omega$	električni otpor
$R_0$	$\Omega$	električni otpor pri 0 °C
$\alpha$	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	linearizirani temperaturni koeficijent električnog otpora
$T$	K	termodinamička temperatura
$\vartheta$	°C	celzijeva temperatura
$Q$	J	toplina

$U$	J	unutrašnja energija
$\dot{Q}$	W	toplinski tok
$\dot{q}$	$\frac{W}{m^2}$	gustoća toplinskog toka
$A$	$m^2$	površina presjeka
$V$	$m^3$	volumen
$ Fo $		Fouriereova značajka (Fouriereov broj)
$ R^2 $		koeficijent korelacije regresijskog pravca
$ s(x) $		standardna devijacija
$ u $		mjerna nesigurnost
$ U $		proširena mjerna nesigurnost
$ k $		obuhvatni faktor
$ n $		broj ponovljenih mjerenja (pokusa)
$ \eta $		stupanj slobode

## POPIS SLIKA

<b>Slika 1</b>	Principi dinamičkog mjerenja toplinske provodnosti metodom vruće žice .....	1
<b>Slika 2</b>	Presjek mjernog složaja .....	4
<b>Slika 3</b>	Prikaz izoterme za uzorak ekspaniranog polistirena ( $\lambda = 0,04 \text{ W}/(\text{m K})$ ) čiji je presjek $200 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$ , početne temperature $\vartheta_0 = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ , zagrijavan snagom $P = 0,5 \text{ W}$ u trajanju $t = 150 \text{ s}$ (simulacija - MATLAB <sup>®</sup> ) .....	11
<b>Slika 4</b>	Izoterme u $XY$ ravnini, unutar uzorka ekspaniranog polistirena ( $\lambda = 0,04 \text{ W}/(\text{m K})$ ), čiji je presjek $200 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$ , početne temperature $\vartheta_0 = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ , zagrijavan snagom $P = 0,5 \text{ W}$ u trajanju $t = 150 \text{ s}$ (simulacija - MATLAB <sup>®</sup> ) .....	12
<b>Slika 5</b>	Presjek uzorka u $XY$ ravnini i raspored diskretnih točaka kojima se numeričkom metodom određuje temperatura .....	13
<b>Slika 6</b>	Čvor (1) .....	14
<b>Slika 7</b>	Čvor (2) .....	17
<b>Slika 8</b>	Čvorovi (3) i (4) .....	18
<b>Slika 9</b>	Prikaz izoterme za uzorak ekspaniranog polistirena ( $\lambda = 0,04 \text{ W}/(\text{m K})$ ), početne temperature $\vartheta_0 = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ , zagrijavan snagom od $P = 0,5 \text{ W}$ u trajanju $t = 150 \text{ s}$ (simulacija - MATLAB <sup>®</sup> ) .....	19
<b>Slika 10</b>	Presjek uzorka .....	24
<b>Slika 11</b>	Kvalitativni prikaz distribucije temperatura kroz presjek uzorka .....	25
<b>Slika 12</b>	Dijagrami koji prikazuju promjenu snage i temperature u odnosu na prirodni logaritam vremena za uzorak ekspaniranog polistirena .....	28
<b>Slika 13</b>	Mjerna komora .....	30
<b>Slika 14</b>	Izvor stalne snage .....	31
<b>Slika 15</b>	Voltmetar i ampermetar .....	32
<b>Slika 16</b>	Platinska žica .....	33
<b>Slika 17</b>	Pönsgenov uređaj sa zaštićenom vrućom pločom - shematski prikaz .....	36
<b>Slika 18</b>	Pönsgenov uređaj sa zaštićenom vrućom pločom - mjerni složaj .....	38

<b>Slika 19</b>	Presjek grijalice sa zaštitnim prstenom .....	39
<b>Slika 20</b>	Presjek hladila .....	40
<b>Slika 21</b>	Folija s termočlancima .....	40
<b>Slika 22</b>	Mjerni lanac .....	41
<b>Slika 23</b>	Grafički prikaz mjernih rezultata .....	44
<b>Slika 24</b>	Pravac regresije .....	44
<b>Slika 25</b>	Normalna razdioba .....	49
<b>Slika 26</b>	Pravokutna razdioba .....	50
<b>Slika 27</b>	Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti staklene vune, mjerene s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja) .....	85
<b>Slika 28</b>	Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti kamene vune, mjerene s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja) .....	88
<b>Slika 29</b>	Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti poliuretana, mjerene s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja) .....	91
<b>Slika 30</b>	Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti ekspaniranog polistirena, mjenog s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja) .....	94
<b>Slika 31</b>	Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena, mjenog s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja) .....	98
<b>Slika 32</b>	Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti toplinske žbuke, mjerene s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja) .....	102
<b>Slika 33</b>	Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti pluta, mjenog s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja) .....	105
<b>Slika 34</b>	Grafički prikaz usporednih mjerenja toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena pomoću izvedbe (1), (2) i (3) .....	111

## POPIS TABLICA

<b>Tablica 1</b>	Izmjerene vrijednosti .....	29
<b>Tablica 2</b>	Faktor pokrivanja (k) za odgovarajuću razinu povjerenja .....	54
<b>Tablica 3</b>	Rezultati mjerenja toplinske provodnosti staklene vune metodom vruće žice .	85
<b>Tablica 4</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti staklene vune za dinamičku metodu .....	86
<b>Tablica 5</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti staklene vune za stacionarnu metodu .....	87
<b>Tablica 6</b>	Rezultati mjerenja toplinske provodnosti kamene vune metodom vruće žice ..	88
<b>Tablica 7</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti kamene vune za dinamičku metodu .....	89
<b>Tablica 8</b>	Rezultati mjerenja toplinske provodnosti poliuretana metodom vruće žice .....	91
<b>Tablica 9</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti poliuretana za dinamičku metodu .....	92
<b>Tablica 10</b>	Rezultati mjerenja toplinske provodnosti ekspaniranog polistirena metodom vruće žice .....	94
<b>Tablica 11</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti ekspaniranog polistirena za dinamičku metodu .....	95
<b>Tablica 12</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti ekspaniranog polistirena za stacionarnu metodu .....	96
<b>Tablica 13</b>	Rezultati mjerenja toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena metodom vruće žice .....	98
<b>Tablica 14</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena za dinamičku metodu .....	99
<b>Tablica 15</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena za stacionarnu metodu .....	100
<b>Tablica 16</b>	Rezultati mjerenja toplinske provodnosti toplinske žbuke metodom vruće žice .....	102
<b>Tablica 17</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti toplinske žbuke za dinamičku metodu .....	103
<b>Tablica 18</b>	Rezultati mjerenja toplinske provodnosti pluta metodom vruće žice .....	105
<b>Tablica 19</b>	Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti pluta za dinamičku metodu .....	106
<b>Tablica 10</b>	Relativna pogreška ponovljivosti (%) mjerenja toplinske provodnosti dinamičkom metodom vruće žice .....	108
<b>Tablica 21</b>	Skupni prikaz rezultata usporednih mjerenja .....	108
<b>Tablica 22</b>	Rezultati mjerenja toplinske provodnosti starog poliuretana metodom vruće žice .....	110
<b>Tablica 23</b>	Rezultati usporednih mjerenja toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena pomoću izvedbe (1), (2) i (3) .....	111

## POPIS PRILOGA

- Prilog 1** Električna blok-shema izvora konstantne snage
- Prilog 2** MATLAB® simulacija - program za 3D prikaz temperaturnog polja dobivenog analitičkom metodom
- Prilog 3** MATLAB® simulacija - program za 2D prikaz temperaturnog polja dobivenog analitičkom metodom
- Prilog 4** MATLAB® simulacija - program za 3D prikaz temperaturnog polja dobivenog numeričkom metodom
- Prilog 5** EXCEL - program za prikupljanje izmjerenih podataka i izračun snage i temperature
- Prilog 6** EXCEL - program za grafički prikaz promjene snage s prirodnim logaritmom vremena
- Prilog 7** EXCEL - program za grafički prikaz promjene temperature s prirodnim logaritmom vremena
- Prilog 8** EXCEL - program za izračun i grafički prikaz promjene temperature s prirodnim logaritmom vremena u odabranom mjernom intervalu te za izračun konačnih vrijednosti

## PREDGOVOR

Izbor odgovarajućih toplinsko-izolacijskih materijala pri projektiranju u graditeljstvu izravno utječe na uštedu energije i zaštitu okoliša. Također, trajnost i udobnost građevnih objekata u kojima ljudi borave i kojima se služe ovise i o toplinsko-izolacijskim svojstvima materijala od kojih su načinjeni. Toplinsko-izolacijski materijali koji se rabe u graditeljstvu većinom su šupljikavi i male su gustoće. Prijenos topline kroz takve proizvode sastoji se od različitih udjela provođenja, konvekcije i zračenja. Mjeriti, računati i iskazivati iznose udjela ovih načina prijenosa topline, zahtjevan je posao čime bi postupak provjere toplinskih svojstava građevnih materijala značajno poskupio, pogotovo ako se uzme u obzir da su ova ispitivanja dužni provoditi i proizvođač (koji deklarira svojstva) i korisnik (u čije ime ih se provjerava). Normirani međunarodni postupci provjere toplinskih svojstava takvih materijala nužni su i predstavljaju kompromis između fizikalnih načela pri prijenosu topline i očekivanog opsega znanja proizvođača i korisnika. Međunarodna norma [1] koja govori o postupku određivanja toplinskih svojstava pri ustaljenom stanju s uređajem sa zaštićenom vrućom pločom, propisuje da se izbor fizikalnih veličina koje opisuju prijenos topline kroz neki materijal treba temeljiti na provjeri slijedećih parametara:

- utjecaj vlage
- utjecaj vremena (ustaljenosti)
- utjecaj njihove toplinske prošlosti (utjecaj starenja materijala u eksploataciji)
- utjecaj temperature
- debljina uzorka koji predstavlja materijal.

U graditeljstvu, fizikalna veličina kojom se deklariraju toplinsko-izolacijska svojstva i koja se koristi pri projektiranju toplinske zaštite zgrada i ostalih građevnih objekata, naziva se: "*projektna toplinska provodnost za sadržaj vlage u materijalu koji je u ravnoteži sa zrakom temperature 23 °C i relativne vlažnosti 80 %*" [2] ili kraće: "*projektna toplinska provodnost*" i označava se s  $\lambda$ . Vrijednosti projektne toplinske provodnosti utvrđene su i popisane u tehničkom propisu [2] ili u važećoj hrvatskoj normi [3]. Za one materijale kojima se projektna toplinska provodnost ne nalazi u spomenutim dokumentima, postoji hrvatska norma [4] koja propisuje kako se ona određuje, odnosno kako se računa.

Premda je jasno da se ne radi isključivo o provođenju kao načinu prijenosa topline, na ovaj su način (u jezičnome smislu) iznevjerena fizikalna načela prijenosa topline s ciljem terminološke jedinstvenosti i jednoobraznosti označavanja i iskazivanja toplinsko-izolacijskih svojstava građevnih materijala. Terminologija i nazivlje u ovome radu, kao i samom naslovu, prilagođeni su terminologiji i nazivlju kakvi se koriste u graditeljstvu.



## SAŽETAK

Temelj ove disertacije su *dinamička mjerenja toplinske provodnosti građevnih materijala metodom vruće žice*. Postavljen je teorijski model s analitičkim i numeričkim rješenjem i provedena su mjerenja na stvarnim uzorcima toplinsko-izolacijskih materijala koji se ponajviše rabe u graditeljstvu. Projektiran je i izrađen mjerni sustav koji zadovoljava svim teoretskim zahtjevima i pretpostavkama. Budući da se dosadašnja praksa ispitivanja toplinskih svojstava građevnih materijala sastoji od mjerenja metodom zaštićene vruće ploče (Pönsngen) u ustaljenom stanju, provedena su i usporedna mjerenja na istovrsnim uzorcima pomoću ove metode. Oba mjerna sustava su detaljno opisana i procijenjena im je mjerna nesigurnost. Hipoteza disertacije jest da se za određene vrste građevnih materijala mogu primjenjivati obje metode, što je značajno s obzirom da je dinamička mjerna metoda jeftinija i traje bitno kraće od stacionarne. Rezultati usporednih mjerenja prikazani su tablicama i dijagramima za svaku grupu materijala posebno.

## KLJUČNE RIJEČI

Toplinska provodnost  
Dinamičko mjerenje  
Vruća žica  
Građevni materijali

## SUMMARY

This work is based on dynamic thermal conductivity measurements of building materials by the hot wire method. Analytical and numerical solutions were developed from the established theoretical model. Measurements were performed on the samples which represent those building materials that most commonly used as thermal isolators. Established measuring system fulfils all theoretical requirements and presumptions that came out of the analytical solution. Regarding the fact that thermal properties of building materials are commonly tested by standard guarded hot plate method (Pönsngen) in stady-state conditions, those stationary measurements are performed on the same samples as dynamic measurements. Both measurement systems are described in detail and measurement uncertainties were estimated. The hypothesis is that for the certain types of building materials both methods are appropriate. This is very important, because dynamic measurements cost less and need less time than methods in stady-state conditions. The results of comparisons with both methods are shown by tables and diagrams, for each types of building materials.

## KEY WORDS

Thermal conductivity  
Dynamic measurement  
Hot wire  
Building materials

# 1 UVOD

## 1.1 Definicija problema

Mjerenja toplinske provodnosti toplinsko-izolacijskih materijala koji se koriste u graditeljstvu spadaju u red svakodnevnih mjerenja u laboratoriju građevne fizike Instituta građevinarstva Hrvatske (LGF) i provode se od 1981. god. Mjerenja se provode u Pönsgenovom uređaju sa zaštićenom vrućom pločom u ustaljenom stanju. To je apsolutna mjerna metoda jer se mjerenjem temperature, električne snage i debljine uzoraka izravno može izračunati toplinska provodnost. Ustaljeno stanje, odnosno stanje toplinske ravnoteže, u skladu s [1], definirano je kao mjerni interval unutar kojega se barem četiri uzastopna niza mjerenja međusobno ne razlikuju više od 1 % i ne mijenjaju se monotono u jednom smjeru. Poznato je iz iskustva da postizanje ustaljenog stanja pri ispitivanju toplinsko-izolacijskih građevnih materijala nikad nije kraće od 8 sati.

Proizvođač toplinsko-izolacijskog materijala, mjeri, računa i iskazuje tzv. "deklariranu toplinsku provodnost"[4], s obzirom na koju se materijal svrstava u odgovarajući razred. Takva deklarirana toplinska provodnost se provjerava u neovisnom laboratoriju (LGF). Praksa je u LGF da se toplinska provodnost mjeri u tri mjerne točke pri čemu se dobiju tri toplinske provodnosti za tri različite temperature. Za ove se tri mjerne točke linearnom regresijom izračuna zavisnost toplinske provodnosti o temperaturi i izrazi se jednadžbom pravca.

S obzirom da za svaku od tri mjerne točke period ustaljenosti traje barem 8 sati, mjerenje toplinske provodnosti stacionarnom metodom na jednom uzorku toplinsko-izolacijskog materijala traje barem jedan dan. Budući da se toplinska provodnost ispituje jednom u laboratoriju proizvođača i jednom u neovisnim laboratorijima i to za svaku pojedinu debljinu i gustoću s kojima se materijal šalje na tržište, javlja se potreba za smanjenjem vremena (i troškova) ispitivanja. Također, izvedba uređaja za zaštićenom vrućom pločom komplicirana je i skupa.

Ovi problemi rezultirali su potrebom za drugim mjernim metodama koje ne traju toliko dugo, kao i za jeftinijom i jednostavnijom opremom. Međutim, stacionarne metode su i dalje dominantne metode ispitivanja toplinske provodnosti toplinsko-izolacijskih materijala, premda su komplicirane, dugotrajne i skupe. Postavlja se pitanje zašto. Naime, stacionarne mjerne metode se u domeni građevne fizike smatraju vjerodostojnijim od postojećih dinamičkih metoda. To je stoga što se sustavnim dinamičkim mjerenjima toplinske provodnosti građevnih materijala pomoću jednostavne i jeftine opreme dosad nije pokazalo da se za određene skupine ovih materijala toplinska provodnost može mjeriti jednako dobro kao i sa stacionarnim metodama.

Ovaj rad pokušaj je da se to ispravi. Odabrana je metoda "vruće žice", dinamička metoda koja koristi vrlo tanku žicu od čiste platine koja je ujedno izvor topline i temperaturno osjetilo. Definiran je fizikalni model, početni i geometrijski uvjeti, sažete su sve pretpostavke i ograničenja na odabrani model i pronađeno je analitičko i numeričko rješenje.

Također, izrađen je uređaj koji u potpunosti zadovoljava svim zahtjevima, pretpostavkama i ograničenjima proizašlim iz analitičkog i numeričkog rješenja definiranog temperaturnog polja. Na kraju, provedena su mjerenja na više različitih vrsta toplinsko-izolacijskih građevnih materijala pomoću obje metode (stacionarne i dinamičke), izračunata je i iskazana mjerna nesigurnost, a mjerni su rezultati prikazani tablicama i dijagramima za pojedinu vrstu materijala. Vođenje mjernog procesa, prikupljanje mjernih podataka (data acquisition) i izračuni izvode se pomoću računala i u potpunosti su automatizirani. Programe koji se pritom koriste izradio je autor samostalno, rabeći pri tom svakom dostupne i jeftine Microsoft alate (Windows, Excel) i standardnu RS 232 komunikaciju.

## 1.2 Povijest dinamičkih mjerenja toplinske provodnosti

Još 1872. Verdet (Théorie mécanique de la chaleur, 1872) je definirao temperaturno polje koje nastaje zbog zagrijavanja tanke metalne žice kroz koju teče istosmjerna električna struja konstantnog iznosa. Nadalje, Schieirmacher je 1888. opisao metodu vruće žice. Izniman doprinos teoriji mjerenja toplinske provodnosti u nestacionarnim temperaturnim uvjetima dali su Carslaw i Jaeger u prvom izdanju "Conduction of heat in solids", 1946. Oni su dali izraz za promjenu temperature u ovisnosti o vremenu za kontinuirani linijski izvor topline. Prva praktična primjena datira iz 1949. kada su Van der Held i Van Drunen kapljevinama mjerili toplinsku provodnost. Haupin je 1960. ovu metodu primjenio pri ispitivanjima toplinske provodnosti keramike. Veliki broj mjerenja i radova koji je uslijedio, rezultirao je izdavanjem nacрта DIN norme iz 1969: "Ispitivanje materijala od keramike, određivanje toplinske provodnosti metodom vruće žice pri temperaturama do 1600 °C". Nakon objave ovog nacрта, ispitivanja toplinske provodnosti metodom vruće žice pokazala su se vrlo dobrim za one materijale kojima:

- a) toplinska provodnost nije veća od  $2 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
- b) temperaturna provodnost nije veća od  $0,002 \text{ m}^2/\text{h}$ .

Ovaj je nacrt 1976. postao DIN norma koja je prihvaćena kao metoda od Fédération Européenne des Fabricants de Produits Réfractaires (PRE) i to kao preporuka broj 32 i ujedno je potvrđena i od ISO Tehničkog odbora TC 33. Sljedeći značajan doprinos razvoju ove mjerne metode dali su 1984. godine P. Prelovšek i B. Uran: "Generalised hot wire method for thermal conductivity measurements". Oni su definirali temperaturno polje koje nastaje uslijed zagrijavanja vrlo tanke žice koja se nalazi između dva uzorka materijala različitih toplinskih provodnosti i čija se temperatura mjeri pomoću malenog termočlanka smještenog tik do žice. Također, postavili su hipotezu da se metodom vruće žice može ispitivati toplinska provodnost i onim materijalima kojima je temperaturna provodnost veća od  $0,002 \text{ m}^2/\text{h}$ , ali koji svojom geometrijom u odnosu na promjer vruće žice osiguravaju da je trajanje mjerenja dovoljno dugo da se iz izmjerenih podataka može odrediti toplinska provodnost. U skladu s ovom teorijom, u Ljubljani, na "Fakultetu za naravoslovlje in tehnologijo", izrađen je uređaj koji je služio za ispitivanje toplinske provodnosti građevnih materijala metodom vruće žice.

Koristeći ovaj uređaj J. Papković i Z. Franolić pokazali su 1985. u elaboratu: "Neka iskustva u mjerenju toplinske provodnosti metodom vruće žice" da su između ostalih, glavni nedostaci ovog uređaja:

- a) električna snaga kojom se žica napaja nije, kako pretpostavlja matematičko rješenje, konstantna odnosno nije vremenski stabilna, što značajno utječe na mjerni rezultat
- b) teškoća pri univerzalnom određivanju vremenskog intervala ( $t_1, t_2$ ) iz kojeg se uzimaju mjerni podaci za računanje toplinske provodnosti
- c) glavica termočlanka<sup>(1)</sup> (osjetilo temperature) skupa sa svojim žicama, kao mjerilo temperature kod tvrdih uzoraka (beton, opeka, žbuka, ...) značajno narušava homogenost temperaturnog polja i utječe na mjerni rezultat.

<sup>(1)</sup> Termočlanci su osjetila temperature koji se sastoje od dva različita metala ili legura. Zagrijavanjem njihovih spojišta na krajevima se stvara termoelektrični napon. Ovisno o vrsti metala (legura), razlikuju se vrste termočlanaka (tip T, tip K, tip S, ....). Odnos napon-temperatura za pojedinu vrstu termočlanka iskazuje se tablicom ili polinomom.

Usljed ovih nedostataka, pogreška mjerenja toplinske provodnosti s ovakvim uređajem bitno je veća od one dobivene mjerenjima s uređajima koji koriste stacionarne metode. Za pretpostaviti je da će, ukoliko se otklone gore navedeni nedostaci, za određene skupine materijala metoda vruće žice kao dinamička metoda biti jednako dobra kao i stacionarne metode.

Nadalje, razvoju dinamičkih metoda mjerenja toplinske provodnosti doprinijele su skupine znanstvenika okupljene oko Gustafssona i Watanabea. Također, značajan doprinos dali su i Slovački znanstvenici Kubičar, Boháč i Vretenar.

### **1.3 Hipoteza**

Rad se temelji na hipotezi da je za većinu toplinsko-izolacijskih građevnih materijala, toplinsku provodnost moguće odrediti u laboratorijskim uvjetima pomoću dinamičke metode (metoda vruće žice) jednako dobro kao i pomoću normirane stacionarne metode sa zaštićenom vrućom pločom (Pönsgenov uređaj). Odnosno, da je usporednim mjerenjima za većinu toplinsko-izolacijskih građevnih materijala, moguće dokazati da se rezultati ispitivanja toplinske provodnosti metodom vruće žice ne razlikuju značajno od rezultata dobivenih stacionarnom metodom. S ciljem dokazivanja ove hipoteze osmišljen je princip mjerenja takav da je tanka žica od čiste platine istodobno i izvor toplinske energije i mjerilo promjene temperature.

Za navedeni mjerni postupak nužno je definirati fizikalni model, postaviti rubne i početne uvjete te izvesti matematičko rješenje (analitički i numerički).

Projektirati mjerni složaj, odnosno mjernu opremu i uređaje čija svojstva zadovoljavaju uvjete koji proizlaze iz matematičkog rješenja.

Izraditi programe koji će pomoću računala upravljati mjernim procesom, prikupljati mjerne podatke, računati konačne vrijednosti i crtati dijagrame.

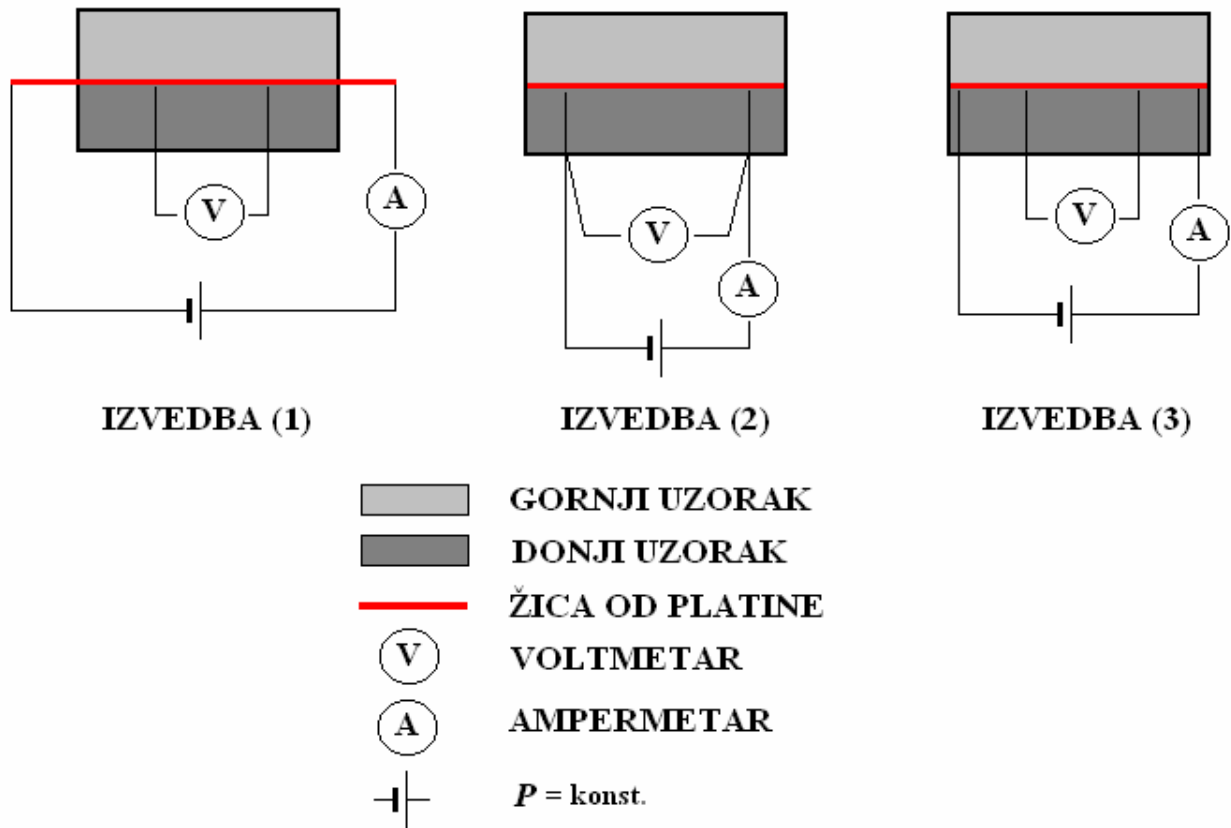
Provesti usporedna mjerenja s dinamičkom metodom (metoda vruće žice) i stacionarnom metodom (metoda zaštićene vruće ploče) za većinu toplinsko-izolacijskih građevnih materijala.

Procijeniti mjerne nesigurnosti za obje metode i pridodati ih mjernim rezultatima.

Na kraju, usporediti rezultate usporednih ispitivanja toplinske provodnosti, mjerne nesigurnosti i izvesti zaključak.

## 2 DINAMIČKO MJERENJE TOPLINSKE PROVODNOSTI

### 2.1 Teorijske osnove



**Slika 1:** Principi dinamičkog mjerenja toplinske provodnosti metodom vruće žice

Dinamičko mjerenje toplinske provodnosti metodom vruće žice temelji se na sljedećem: između dva istovrsna uzorka jednakih izmjera, postavi se žica od platine promjera  $d_{Pt} = 0,01778$  mm ili 0,0254 mm, 99,999 % čistoće i čiji se električni otpor mijenja s promjenom temperature. Pt žica je ujedno izvor topline i mjerilo temperature (čime se eliminira utjecaj termočlanka i njegovih žica na mjerni rezultat). Žica se postavi tako da ostvaruje što je moguće bolji toplinski dodir s oba uzorka. Ovakav se mjerni složaj smjesti u komoru koja je u toplinskom smislu izolirana od okoliša tako da okoliš ne utječe na mjerni proces. Platinska žica se spoji na izvor istosmjernog električnog napona stalne snage ( $P = \text{konst.}$ ) zbog čega će se žica zagrijavati, odnosno temperatura žice će rasti i toplina će se prenositi na uzorke. Slika 1 prikazuje tri različite izvedbe mjerenja napona i jakosti električne struje na platinskoj žici koja se zagrijeva snagom konstantnog iznosa. Svaka od navedenih izvedbi ima svoje prednosti i mane. Izvedbom (1) će se dobiti najbolje mjerne karakteristike i stabilno temperaturno polje, ali je teško održavati snagu konstantnom jer se platinska žica različitom dinamikom hladi na zraku odnosno unutar uzorka. Izvedba (2) omogućava odlično održavanje snage konstantnom tijekom mjerenja, ali je polje temperatura narušeno zagrijavanjem dovodnih žica kojim se platinska žica zagrijava. Međutim, ovom se izvedbom smanjuje broj spojišta (lemljenjem) dovodnih žica s žicom od platine. Izvedba (3) također može dobro održavati snagu konstantnom tijekom mjerenja, ali isto tako je stabilnost temperaturnog polja lošija nego kod izvedbe (1).

Za dokazivanje hipoteze ove disertacije odabrana je izvedba (2), pri čemu se procijenjuje da će se temperatura dovodnih bakrenih žica ( $L_{Cu} = 0,1$  m,  $d_{Cu} = 0,2$  mm) u odnosu na temperaturu platinske žice ( $d_{Pt} = 0,01778$  mm ili 0,0254 mm), promijeniti beznačajno malo. U svrhu dokazivanja ove procijene provedena su usporedna mjerenja na uzorku ekstrudiranog polistirena (vidi točku 8.8).

Dakle, na duljini  $L$ , u vremenu  $t = 0$ , počinje se mjeriti napon platinske žice  $U_{Pt}(t)$ . Također, istodobno se počinje mjeriti jakost struje  $I_{Pt}(t)$  i vrijeme ( $t$ ).

Ako se s ( $t_1, t_2$ ) označi mjerni interval unutar kojeg se iz izmjerenih vrijednosti napona, struje i vremena izračunava toplinska provodnost uzorka, i ako se s  $t_K$  označi vrijeme potrebno da toplinski impulsi dosegnu rubove uzorka, mora vrijediti sljedeće:

- a)  $t_1 > 0$
- b)  $t_2 = t_K$
- c) interval ( $t_1, t_2$ ) se mora nalaziti u onom području krivulje koja prikazuje odnos temperatura/vrijeme, koje se najbolje može aproksimirati pravcem (linearno područje).

Vrijeme potrebno da toplinski impulsi dosegnu rubove uzorka ovisi o vrsti materijala uzorka (toplinsko-izolacijskim svojstvima) i njegovim izmjerama.

O izboru mjernog intervala više na kraju ovog poglavlja, u točki 2.4.

Iz izmjerenog napona platinske žice i jakosti struje koja prolazi sustavom, u skladu s Ohmovim zakonom, može se izračunati električni otpor žice u nekom vremenu  $t$ :

$$R_{Pt}(t) = \frac{U_{Pt}(t)}{I_{Pt}(t)}$$

Ovisnost promjene električnog otpora platine o promjeni temperature dana je Callendar - van Dusenovom jednadžbom [5]:

$$R_{Pt}(t) = R_0 \cdot [1 + A \cdot \vartheta(t) + B \cdot \vartheta^2(t) + C \cdot (\vartheta(t) - 100) \cdot \vartheta^3(t)]$$

Gdje su:

$\vartheta(t)$       °C ..... temperatura u nekom vremenu  $t$ .

$R_0$           Ω ..... električni otpor platine pri temperaturi od 0 °C

konstante:

$$A = 3,985 \cdot 10^{-3} \quad \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

$$B = - 5,85 \cdot 10^{-7} \quad \frac{1}{^\circ\text{C}^2}$$

$$C = 0 \quad \frac{1}{^\circ\text{C}^4} \quad - \text{ za temperature iznad } 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Budući da je ovom metodom obuhvaćeno mjerno područje temperatura od 20 °C - 60°C, pretpostavlja se da se ova jednadžba može zamijeniti sa sljedećim izrazom [5]:

$$R_{Pt}(t) = R_0 \cdot [1 + \alpha \cdot \vartheta(t)] \quad \Omega$$

Gdje je:

$\alpha$            $\frac{\Omega}{\Omega \text{ } ^\circ\text{C}}$  ..... linearizirani temperaturni koeficijent električnog otpora platine

Razlika između električnog otpora platine izračunatog pomoću Callendar-van Dusenove jednadžbe i pomoću gornjeg izraza za primjerice 60 °C iznosi 0,12 % i može se zanemariti. Ova aproksimacija Callendar-van Dusenove jednadžbe imat će za posljedicu povećanje ukupne mjerne nesigurnosti. (vidi poglavlje 6)

Također, budući da je platina vrlo visoke čistoće (99,999 %), utjecaj nečistoće platine na mjerenje, u skladu s Mathiessenovim pravilom [5] također se može zanemariti.

*Proizvođač platinske žice je iskazao sljedeće podatke:*

$$\alpha = 0,003926 \frac{\Omega}{\Omega \text{ } ^\circ\text{C}} \pm 0,000002 \frac{\Omega}{\Omega \text{ } ^\circ\text{C}}$$

$$\text{za } d_{Pt} = 0,01778 \text{ mm} \quad ; \quad R'_0 = 402,820 \Omega/\text{m}$$

(Tolerancije promjera žice su unutar 0,1 %).

$$\text{za } d_{Pt} = 0,02540 \text{ mm} \quad ; \quad R'_0 = 197,408 \Omega/\text{m}$$

$R'_0$  ..... električni otpor Pt žice po jedinici duljine  $L$  pri 0 °C.

Iz čega slijedi:  $R_0 = L \cdot R'_0$

Dakle, ovisnost promjene temperature platine o promjeni električnog otpora u vremenu  $t$  glasi:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{R_{Pt}(t)}{R_0} - 1 \right)$$

U skladu s Ohmovim zakonom i nakon sređivanja:

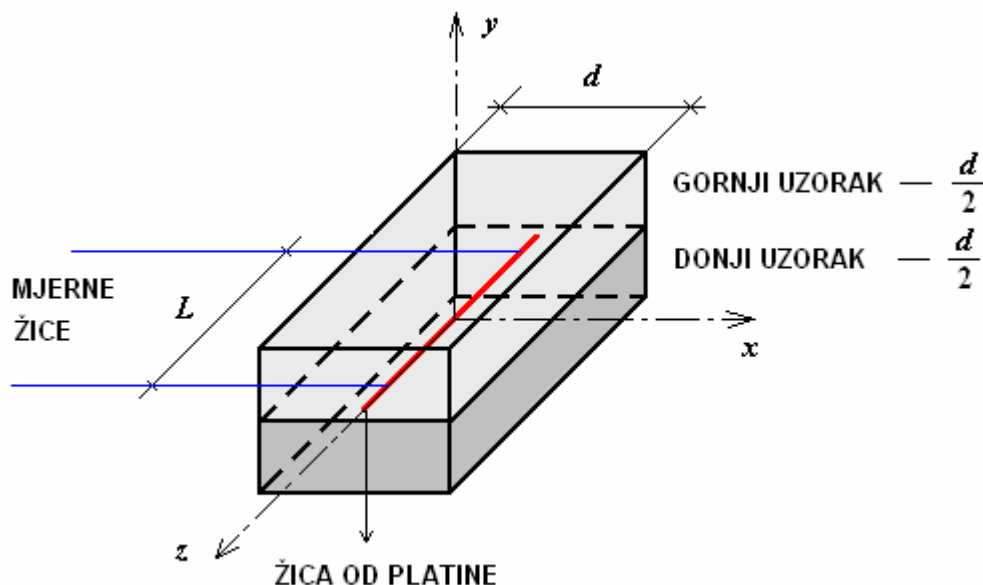
$$\vartheta(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{U_{Pt}(t)}{I_{Pt}(t) \cdot R_0} - 1 \right) \quad \text{..... (2.1)}$$

*Dakle, istodobno mjereći napon platinske žice (duljine  $L$  i debljine  $d_{Pt}$ ) i jakost struje koja prolazi kroz žicu, može se izračunati temperatura u nekom vremenu  $t$ .*

Sljedeći korak je pronaći i matematički izraziti dinamiku prijenosa topline kroz uzorak s obzirom na ovako postavljeni mjerni složaj.

Opširnije o uređaju za mjerenje toplinske provodnosti dinamičkom metodom, u poglavlju 3.

## 2.2 Analitičko rješenje



Slika 2: Presjek mjernog složaja

Parcijalna diferencijalna jednačba provođenja topline u izotropnom tijelu [6]:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{Q}}{c \cdot \rho}$$

Sljedeća jednačba predstavlja Fourierovu jednačbu trodimenzijskog nestacionarnog temperaturnog polja, uz pretpostavku da osim topline koja je dovedena platinskoj žici ne postoje dodatni unutrašnji izvori ili ponori topline negdje u samom uzorku ( $\dot{Q} = 0$ ):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right)$$

gdje je:

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \dots\dots\dots \text{temperaturna provodnost}$$

S obzirom da se radi o provođenju topline kroz krutninu, može se reći da je tijekom zagrijavanja Pt žice promjena volumena jednaka nuli. Odnosno, u skladu s I. glavnim stavkom termodinamike, zbog dovođenja topline mijenjat će se jedino unutrašnja energija krutog tijela, a nipošto neće doći do obavljanja rada zbog promjene volumena.

Budući da je toplinski izvor vrlo tanka Pt žica koja se proteže duž z osi (vidi sliku 2) i kojoj je odnos duljine i promjera velik, slijedi:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0$$



Opće rješenje dvodimenzijskog nestacionarnog temperaturnog polja sada glasi:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right)$$

Prethodni se izraz prema [7] može izraziti kao:

$$\vartheta(x, y, t) = \vartheta_1(x, t) \cdot \vartheta_2(y, t) \dots\dots\dots (2.2)$$

Treba dakle naći rješenja za  $\vartheta_1(x, t)$  i  $\vartheta_2(y, t)$ ,

$$\frac{\partial \vartheta_1(x, t)}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta_1(x, t)}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\frac{\partial \vartheta_2(y, t)}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta_2(y, t)}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (2.4)$$

Ovi izrazi predstavljaju parcijalne diferencijalne jednadžbe II. reda koje se mogu riješiti separacijom varijabli i Fourierovim integralima [8].

**RJEŠENJE ZA  $\vartheta_1(X, T)$  - RJEŠENJE JEDNADŽBE (2.3):**

RUBNI UVJETI:

$\vartheta_1(x = 0, t) = \vartheta_1(t)$  ..... temperatura žice u nekom vremenu  $t$ .

$\vartheta_1(x = d/2, t) = \vartheta_0$  ..... početna temperatura na rubovima uzorka u nekom vremenu  $t \ll t_K$   
 $t_K$  - vrijeme potrebno da toplinski impulsi dosegnu rubove uzorka.  
 Ovo vrijeme, osim o debljini, ovisi i o vrsti materijala uzorka.

$d$  ..... ukupna debljina - debljina oba uzorka.

POČETNI UVJETI:

$\vartheta_1(x, t = 0) = \vartheta_0$  ..... početne temperature uzorka i žice neposredno prije mjerenja su izjednačene.

Zbog pojednostavljenja uvodi se transformacija:

$$\theta(x, y, t) = \vartheta(x, y, t) - \vartheta_0$$

Tako da se jednadžbe (2.2), (2.3) i (2.4) mogu pisati:

$$\theta(x, y, t) = \theta_1(x, t) \cdot \theta_2(y, t) \dots\dots\dots (2.2a)$$

$$\frac{\partial \theta_1(x, t)}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \theta_1(x, t)}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots (2.3a)$$

$$\frac{\partial \theta_2(y, t)}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \theta_2(y, t)}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (2.4a)$$

Također, transformirani rubni i početni uvjeti:

$$\theta_1(0, t) = \vartheta_1(t) - \vartheta_0$$

$$\theta_1(d/2, t) = \vartheta_1(d/2, t) - \vartheta_0 = \vartheta_0 - \vartheta_0 = 0$$

$$\theta_1(x, 0) = \vartheta_1(x, 0) - \vartheta_0 = \vartheta_0 - \vartheta_0 = 0$$

### SEPARACIJA VARIJABLI:

$$\theta_1(x, t) = F(x) \cdot G(t)$$

Uvrštavanjem u (2.3a) se dobiva:

$$F(x) \cdot \frac{\partial G(t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \cdot G(t)$$

$$F(x) \cdot \dot{G}(t) = a \cdot G(t) \cdot F''(x)$$

$$\frac{\dot{G}}{a \cdot G} = \frac{F''}{F}$$

Lijeva strana gornje jednadžbe ovisi isključivo o varijabli  $t$ , dok desna ovisi o varijabli  $x$ . Ova jednakost općenito može vrijediti samo ako su obje strane jednadžbe jednake istoj konstanti (separativna konstanta  $k$ ):

$$\frac{\dot{G}}{a \cdot G} = \frac{F''}{F} = k \quad k = \text{konst.}$$

Opća rješenja [8]:

$$k = 0 \quad \dots \quad \begin{aligned} F &= \alpha \cdot x + \beta \\ G &= \gamma = \text{konst.} \end{aligned}$$

$$k = +p^2 \quad \dots \quad \begin{aligned} F &= A \cdot e^{px} + B \cdot e^{-px} \\ G &= e^{ap^2t} \end{aligned}$$

$$k = -p^2 \quad \dots \quad \begin{aligned} F &= A \cdot \cos(px) + B \cdot \sin(px) \\ G &= e^{-ap^2t} \end{aligned}$$

Za  $k = 0$  slijedi da jedino rješenje jednadžbe  $\theta_1 = F \cdot G$ , koje zadovoljava rubni uvjet  $\theta_1(d/2, t) = 0$ , je  $\theta_1 = 0$  (trivijalno rješenje).

I za  $k = p^2$  slijedi da jedino rješenje od  $\theta_1 = F \cdot G$ , koje zadovoljava rubni uvjet  $\theta_1(d/2, t) = 0$ , je također  $\theta_1 = 0$  (trivijalno rješenje).

Ostaje dakle  $k = -p^2$ . Rješenja od  $\theta_1 = F \cdot G$ , koja zadovoljavaju rubni uvjet  $\theta_1(d/2, t) = 0$ , su:

$$\sin\left(p \cdot \frac{d}{2}\right) = 0 \Rightarrow p = \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{d} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

i

$$\cos\left(p \cdot \frac{d}{2}\right) = 0 \Rightarrow p = \frac{\pi \cdot (2 \cdot n + 1)}{d} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Dakle, opće rješenje za  $k = -p^2$  glasi:

$$\theta_1(x, t) = F(x) \cdot G(t) = (A \cos(px) + B \sin(px)) \cdot e^{-ap^2 t}$$

Ovo rješenje je kontinuirana, neprekinuta periodička funkcija s periodom  $p$  i koja vrijedi za svaki  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ). S obzirom na rubne uvjete i izbor koordinatnog sustava, prijenos topline odvija se unutar intervala  $(-d/2 = x = d/2)$  gdje je  $d$  - debljina oba uzorka (poželjno je da se istovrsni uzorci izrađuju u jednakim izmjerama).

Iz teorije Fourierovih transformacija (teorem) slijedi da se neperiodička funkcija koja je u svakom konačnom intervalu kontinuirana, derivabilna i integrabilna po  $x$ , može prikazati kao periodička funkcija pomoću Fourierovih integrala [8].

Općenito, prikazivanje funkcije  $f(x)$  pomoću Fourierovog integrala:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)) dp$$

gdje su:

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(pv) dv \quad B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(pv) dv$$

Perioda  $p$  od  $x$  ovdje predstavlja varijablu, konstante  $A$  i  $B$  su funkcije od  $p$ , a  $v$  i  $f(v)$  predstavljaju transformiranu varijablu  $x$ , odnosno funkciju  $f(x)$ .

Za ovaj slučaj vrijedi sljedeća analogija s Fourierovim integralom, za  $t = 0$ :

$$\theta_1(x) = \int_0^{\infty} (A(p) \cos(px) + B(p) \sin(px)) dp$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot [\cos(pv) \cos(px) + \sin(pv) \sin(px)] dv \right] dp$$

Odnosno, u nekom vremenu  $t$ :

$$\theta_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot [\cos(pv) \cos(px) + \sin(pv) \sin(px)] dv \right] \cdot e^{-ap^2 t} dp$$

Sređivanjem se dobiva:

$$\theta_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \cos(px - pv) dv \right] \cdot e^{-ap^2 t} dp$$

Promjenom slijeda integracije:

$$\theta_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-ap^2 t} \cdot \cos(p(x - v)) dp \right] \cdot f(v) dv$$

Uvodi se supstitucija:

$$s^2 = ap^2t$$

Iz čega slijedi:

$$p = \frac{s}{\sqrt{at}} \quad \text{i} \quad dp = \frac{ds}{\sqrt{at}}$$

Uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu se dobiva:

$$\theta_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-s^2} \cdot \cos\left(\frac{s}{\sqrt{at}}(x-v)\right) ds \right] \cdot f(v) dv$$

Uvodi se još jedna supstitucija:

$$b = \frac{x-v}{2\sqrt{at}}$$

Iz čega slijedi:

$$\theta_1(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-s^2} \cdot \cos(2bs) ds \right] \cdot f(v) dv$$

Prema [8]:

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} \cos(2bs) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

Uvrštavanjem slijedi:

$$\theta_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-v)^2}{4at}} \cdot f(v) dv$$

Što predstavlja rješenje od (2.3a).

Analognim postupkom dobiva se i rješenje za  $\theta_2(y, t)$ , odnosno rješenje od (2.4a):

$$\theta_2(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\omega)^2}{4at}} \cdot f(\omega) d\omega$$

Ovdje  $\omega$  i  $f(\omega)$  predstavljaju transformiranu varijablu  $y$ , odnosno funkciju  $f(y)$ .

Uvrštavanjem prethodne dvije jednadžbe u transformiranu jednadžbu (2.2a) dobiva se:

$$\theta(x, y, t) = \frac{1}{4\pi at} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v, \omega) \cdot e^{-\frac{(x-v)^2 + (y-\omega)^2}{4at}} dv d\omega \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

Gornja jednadžba (2.5) predstavlja porast temperature (s početne  $\theta_0$ ) negdje u uzorku u točki  $(x, y)$ , u vremenu  $t > 0$  zbog zagrijavanja platinske žice koja prolazi točkom  $(v, \omega)$  i čija temperatura iznosi  $f(v, \omega)$ .

Sljedeći je korak pomoću I. gl. stavka termodinamike (zakon održanja energije) odrediti temperaturu platinske žice  $f(v, \omega)$ .

## BILANCA TOPLINE:

Toplinski tok koji vruća žica predaje u diferencijal uzorka:

$$\dot{Q}(x, y) = \dot{q}(x, y) \cdot dx dy$$

Toplinski tok koji "izlazi" iz diferencijala uzorka:

$$\dot{Q}_{izl}(x, y) = \left( \dot{q}(x, y) + \frac{\partial^2 \dot{Q}(x, y)}{\partial x \partial y} \right) dx dy$$

Pretičak odvedene topline namiruje se smanjenjem unutrašnje energije mase diferencijala uzorka temperature  $f(x, y)$  u nekom vremenu  $t$  i iznosi [6]:

$$\dot{U}_{hl}(x, y) = \dot{Q}_{izl}(x, y) - \dot{Q}(x, y) = c \cdot dm \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial t}$$

Za cijelu Pt žicu duljine  $L$  u nekom vremenu  $t$ :

$$\dot{U}_{hl}(x, y) = \dot{Q}_{izl}(x, y) - \dot{Q}(x, y) = c \cdot \rho \cdot L \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial t} \cdot dx dy$$

Gdje su:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot L \cdot dx dy$$

$$\dot{U}_{hl}(x, y) = \dot{Q}_{izl}(x, y) - \dot{Q}(x, y) = c \cdot \rho \cdot L \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial t} \cdot dx dy$$

Uvrštavanjem u prethodni izraz se dobiva:

$$c \cdot \rho \cdot L \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \dot{Q}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Integriranjem po vremenu  $t$ :

$$c \cdot \rho \cdot L \cdot f(x, y) = \int_0^t \frac{\partial^2 \dot{Q}(x, y)}{\partial x \partial y} dt$$

Dvostrukim integriranjem ( $x$  i  $y$ ):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \frac{1}{c \cdot \rho \cdot L} \cdot \int_0^t \dot{Q}(x, y) dt$$

Analogno, u točki ( $v, \omega$ ) - na samoj vrućoj žici:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v, \omega) dv d\omega = \frac{1}{c \cdot \rho \cdot L} \cdot \int_0^t \dot{Q}(v, \omega) dt$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza u (2.5) dobiva se:

$$\theta(x, y, t) = \frac{\dot{Q}(v, \omega)}{4 \cdot \pi \cdot a \cdot c \cdot \rho \cdot L} \int_0^t \cdot e^{-\frac{(x-v)^2 + (y-\omega)^2}{4at}} \frac{dt}{t}$$

S obzirom da je žica od platine duljine cca 20 cm i promjera 0,0254 mm izrazito male mase ( $m < 0,001$  g), gubitak topline zbog zagrijavanja same žice se može zanemariti, odnosno može se reći da se toplinski tok koji nastaje zbog zagrijavanja platinske žice, u cijelosti predaje uzorku.

Također, s obzirom da je uređaj koji zagrijava žicu dovođenjem električne energije konstruiran tako da je njegova električna snaga konstantna, može se pisati:

$$\dot{Q}(v, \omega) = P = \text{konst.}$$

Gdje je  $P$  električna snaga kojom se žica zagrijava.

*Iz gornje jednadžbe proizlazi da na samoj žici, promjena snage s vremenom mora biti jednaka nuli. Odnosno, uređaj kojim se žica napaja mora biti takve konstrukcije da bez obzira na dinamiku odvođenja topline, snaga ( $P$ ) s kojom se žica napaja mora biti konstantna. Više u poglavlju 3.*

Dakle, za kontinuirani linijski izvor topline, uz  $\lambda = a \cdot c \cdot \rho$ , vrijedi:

$$\theta(x, y, t) = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \int_0^t \cdot e^{-\frac{(x-v)^2 + (y-\omega)^2}{4at}} \frac{dt}{t}$$

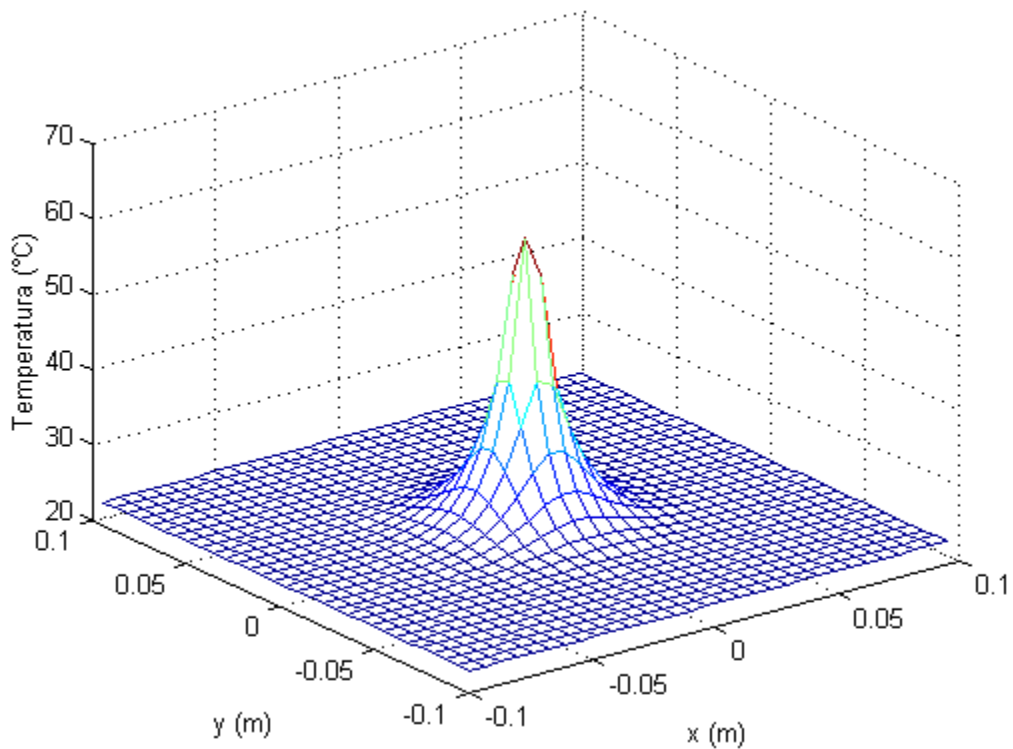
I na kraju, budući da je uvedena transformacija s obzirom na početnu temperaturu:

$$\theta(x, y, t) = \vartheta(x, y, t) - \vartheta_0$$

Konačna jednadžba koja određuje analitičko rješenje, odnosno temperaturu u nekoj točki ( $x, y$ ) u tijelu čija je početna temperatura iznosila  $\vartheta_0$  i koje se zagrijava (uz  $P = \text{konst.}$ ) pomoću vrlo tanke žice od platine koja prolazi njegovim središtem ( $v, \omega$ ), glasi:

$$\vartheta(x, y, t) = \vartheta_0 + \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \int_0^t \cdot e^{-\frac{(x-v)^2 + (y-\omega)^2}{4at}} \frac{dt}{t} \dots\dots\dots (2.6)$$

U svrhu grafičkog predočenja dinamike promjene temperaturnog polja kroz uzorak, kako je definirano ovom jednadžbom, izrađen je program u programskom jeziku MATLAB<sup>®</sup>. Program simulira uzorak toplinske provodnosti 0,04 W/(mK), poprečnog presjeka 200 mm · 200 mm, početne temperature 23 °C. Kroz središte uzorka prolazi vrlo tanka (0,0254 mm) žica od platine, duljine 200 mm, koja se grije pomoću posebnog uređaja koji žicu napaja s konstantnom snagom iznosa 0,5 W. Vrijeme trajanja pokusa (simulacije) iznosi 150 s. Radi se o simulaciji pri čemu je ishodište koordinatnog sustava odabrano tako da se nalazi na Pt žici u središtu uzorka (slika 2). Koordinatne osi  $x$  i  $y$  označavaju udaljenost od središta uzorka, a os  $z$  temperaturu  $\vartheta(x, y, t)$ .

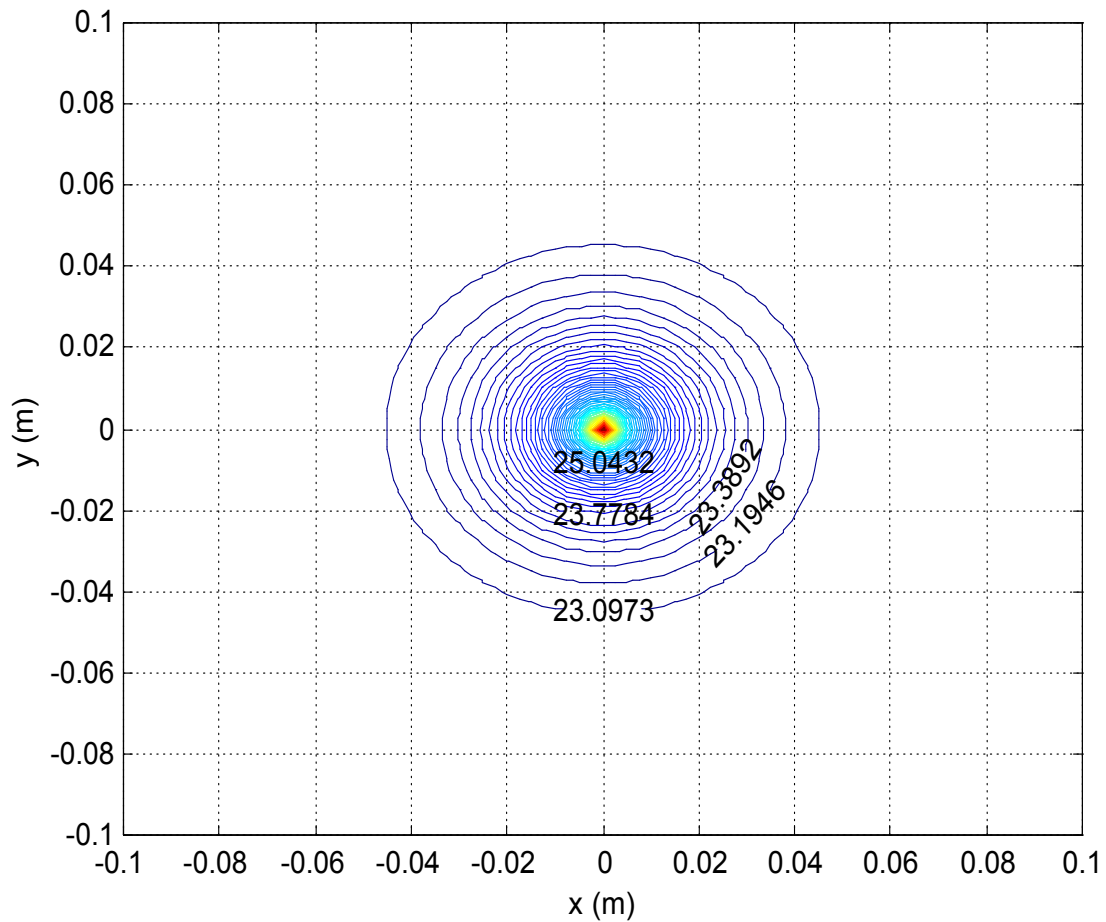


**Slika 3:** Prikaz izoterma za uzorak ekspaniranog polistirena ( $\lambda = 0,04 \text{ W}/(\text{m K})$ ) čiji je presjek  $200 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$ , početne temperature  $\vartheta_0 = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ , zagrijavan snagom  $P = 0,5 \text{ W}$  u trajanju  $t = 150 \text{ s}$  (simulacija - MATLAB<sup>®</sup>).

Iz ove se slike naslućuje da su izoterme u  $XY$  ravnini predstavljene kružnicama koncentrično postavljenim oko izvora topline koji se nalazi u središtu uzorka. S obzirom da je temperatura u središtu najveća, slijedi da izoterme većeg promjera imaju manju temperaturu od izoterma manjeg promjera.

Naravno, ovo vrijedi samo za idealan slučaj kada su uzorci izrađeni od toplinski homogenih i izotropnih materijala pri čemu se toplina prenosi isključivo provođenjem i kada je trajanje mjerenja dovoljno kratko da toplinski impulsi ne dosegnu rubove uzorka.

Zanimljivo bi bilo vidjeti grafički prikaz promjene temperaturnog polja ako se provede potpuno ista simulacija, ali ovoga puta u  $XY$  ravnini s ishodištem koordinatnog sustava na samoj Pt žici u središtu uzorka.



**Slika 4:** Izoterme u  $XY$  ravnini, unutar uzorka ekspaniranog polistirena ( $\lambda = 0,04 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ) čiji je presjek  $200 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$ , početne temperature  $\vartheta_0 = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ , zagrijavan snagom  $P = 0,5 \text{ W}$  u trajanju  $t = 150 \text{ s}$  (simulacija - MATLAB<sup>®</sup>).

Dakle, analitičko rješenje promjene temperaturnog polja s vremenom zbog zagrijavanja tanke platinske žice koja prolazi središtem uzorka prikazano je jednačbom (2.6). Slikama 3 i 4 dan je grafički prikaz ovog analitičkog rješenja. Za numeričko rješenje primjenjena je metoda konačnih razlika (diferencija).



## 2.3 Numeričko rješenje

### METODA KONAČNIH RAZLIKA

Numeričko rješenje metodom konačnih razlika se svodi na određivanje temperature pojedinih diskretnih točaka. Numeričkom metodom konačnih razlika nepoznate se temperature pojedinih točaka u nekom diskretnom vremenu određuju pomoću poznatih temperatura u vremenu netom prije. Broj i gustoća ovih točaka određuje kakvoću numeričkog rješenja. Kao i kod analitičkog rješenja, polazna točka je parcijalna diferencijalna jednačba nestacionarnog dvodimenzijanskog provođenja topline:

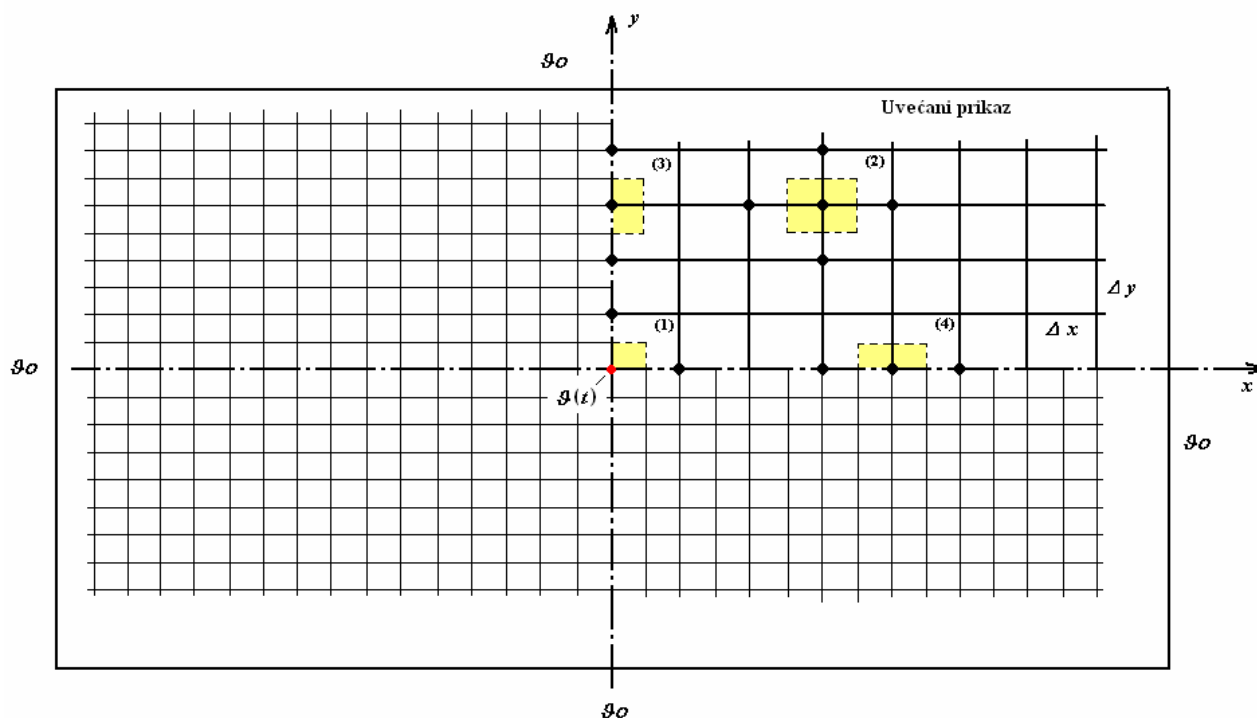
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

Zadani rubni i početni uvjeti:

$$\vartheta(x = 0, y = 0, t) = \vartheta(t) \quad \dots\dots\dots \text{temperatura u nekom vremenu } t.$$

$$\vartheta(x = d, y = d, t) = \vartheta_0 \quad \dots\dots \text{temperatura na rubovima uzorka debljine } d.$$

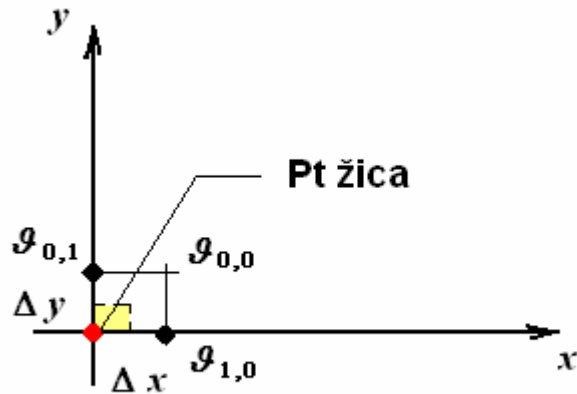
$$\vartheta(x, y, t = 0) = \vartheta_0 \quad \dots\dots\dots \text{početna temperatura.}$$



**Slika 5:** Presjek uzorka u  $XY$  ravnini i raspored diskretnih točaka kojima se numeričkom metodom određuje temperatura

S obzirom na zadani fizikalni model, postoje četiri vrste karakterističnih čvorišta. Čvor (1) predstavlja samu okoliš toplinskog izvora (Pt žice), čvor (2) predstavlja bilo koji čvor unutar uzorka, dok čvorovi (3) i (4) predstavljaju sve one čvorove koji se nalaze na koordinatnim osima. Budući da se Pt žica nalazi u središtu uzorka, može se pretpostaviti da će se toplina u svim smjerovima prenositi simetrično, tako da se rješenje za jedan kvadrant može primjeniti i na ostale.

## ČVOR (1)



Slika 6: Čvor (1)

Za ovaj čvor prema zakonu o održanju energije (energijska bilanca) slijedi [9]:

$$\dot{Q}_{ul} + \dot{Q} - \dot{Q}_{izl} = \dot{U}_{hl} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

Gdje su:

$\dot{Q}_{ul}$  ..... toplinski tok koji je doveden u čvor

$\dot{Q}$  ..... toplinski tok koji Pt žica predaje u čvor

$\dot{Q}_{izl}$  ..... toplinski tok koji je odveden iz čvora

$\dot{U}_{hl} = \frac{dU_{hl}}{dt}$  ..... promjena unutrašnje energije zbog hlađenja diferencijala mase čvora

Iz samog fizikalnog modela poznato je da nema dotoka topline sa strane u čvor, tako da vrijedi:

$$\dot{Q}_{ul} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

Također, rečeno je da se gubici topline na samoj Pt žici mogu zanemariti i da je snaga kojom se žica zagrijava konstantna, tako da vrijedi:

$$\dot{Q} = P$$

Odnosno, toplina predana samo jednom kvadrantu:

$$\dot{Q} = \frac{P}{4} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

Nadalje, količina topline koju je Pt žica u jedinici vremena predala susjednim točkama unutar čvora ovisi o toplinsko izolacijskim svojstvima materijala uzorka i prema [9] glasi:

$$\dot{Q}_{\text{izl}} = -\left(\lambda_x \cdot A_x \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \lambda_y \cdot A_y \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)$$

Budući da se pretpostavlja da su uzorci toplinski homogeni i izotropni, vrijedi da je  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$

U skladu s numeričkom metodom konačnih razlika, za dovoljno malene  $\Delta x$  i  $\Delta y$ , u nekom diskretnom vremenu  $t = p \Delta t$ :

$$\dot{Q}_{\text{izl}} = \lambda \cdot A_x \frac{\vartheta_{0,0}^p - \vartheta_{1,0}^p}{\Delta x} + \lambda \cdot A_y \frac{\vartheta_{0,0}^p - \vartheta_{0,1}^p}{\Delta y}$$

Ako su pojedine diskretne točke međusobno jednako udaljene, odnosno ako je udaljenost od točke do točke unutar svakog čvora u smjeru osi  $x$  i  $y$  jednaka, može se pisati:

$$\Delta x = \Delta y$$

U skladu s ovime:

$$A_x = \frac{\Delta y}{2} \cdot \Delta z = A_y = \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z = A$$

Budući da se Pt žica proteže duž koordinatne  $z$  - osi, za neku duljinu žice  $L$ , može se pisati:

$$A = \frac{\Delta x}{2} \cdot L$$

Uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu za  $\dot{Q}_{\text{izl}}$  se dobiva:

$$\dot{Q}_{\text{izl}} = \frac{\lambda \cdot L}{2} \cdot (2 \cdot \vartheta_{0,0}^p - \vartheta_{1,0}^p - \vartheta_{0,1}^p) \quad \dots \dots \dots \quad (2.11)$$

I na kraju, promjena unutrašnje energije zbog hlađenja diferencijala mase čvora (1), iznosi [9]:

$$\dot{U}_{\text{hl}} = \frac{dU_{\text{hl}}}{dt} = \Delta V \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \Delta V \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\vartheta_{0,0}^{p+1} - \vartheta_{0,0}^p}{\Delta t}$$

Gdje je:

$$\Delta V = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot \Delta z = \frac{\Delta x^2}{4} \cdot L \quad \dots \dots \dots \quad \text{diferencijal volumena svih čvorova duž Pt žice duljine } L.$$

$\rho$  ..... gustoća materijala uzorka

$c$  ..... specifični toplinski kapacitet materijala uzorka

Uvrštavanjem u jednadžbu za  $\dot{U}_{hl}$  se dobiva:

$$\dot{U}_{hl} = \frac{L \cdot \Delta x^2}{4} \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\vartheta_{0,0}^{p+1} - \vartheta_{0,0}^p}{\Delta t} \dots\dots\dots (2.12)$$

Uvrštavanjem ovih izraza (2.9, 2.10, 2.11 i 2.12) u (2.8) i nakon sređivanja, dobiva se:

$$\vartheta_{0,0}^{p+1} = \vartheta_{0,0}^p (1 - 4 \cdot Fo) + 2 \cdot Fo \cdot (\vartheta_{1,0}^p + \vartheta_{0,1}^p) + \frac{Fo \cdot P}{\lambda \cdot L} \dots\dots\dots (2.13)$$

Gdje je:

$$Fo \dots\dots\dots \text{Fourierov broj: } Fo = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2}$$

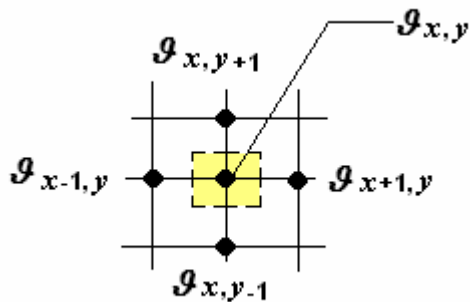
Fourierov broj je bezdimenzijska veličina koja daje obilježja nestacionarnom provođenju topline.

S obzirom na gornji izraz (2.13), Fourierov broj mora biti takav da je zadovoljen *uvjet stabilnosti*:

$$Fo \leq \frac{1}{4}$$

Uvjet stabilnosti proizlazi iz kriterija da koeficijent uz točku u središtu bilo kojeg čvora ( $\vartheta_{x,y}^p$ ) bude veći ili jednak nuli:  $(1 - 4 \cdot Fo) \geq 0$ . U protivnom, rješenja difuzijske jednačice (2.7) numeričkom metodom konačnih razlika mogu biti nesukladna s II. zakonom termodinamike [9].

## ČVOR (2)



Slika 7: Čvor (2)

Za ovaj čvor primjenit će se parcijalna diferencijalna jednačba nestacionarnog dvodimenzijskog provođenja topline (2.7), u skladu s numeričkom metodom konačnih razlika [9]:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x}_{x+0,5,y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}_{x-0,5,y}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial y}_{x,y+0,5} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y}_{x,y-0,5}}{\Delta y} \quad \dots \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\vartheta_{x,y}^{p+1} - \vartheta_{x,y}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{a}$$

Gdje je u nekom diskretnom vremenu  $t = p \cdot \Delta t$ :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}_{x+0,5,y} = \frac{\vartheta_{x+1,y}^p - \vartheta_{x,y}^p}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}_{x-0,5,y} = \frac{\vartheta_{x,y}^p - \vartheta_{x-1,y}^p}{\Delta x}$$

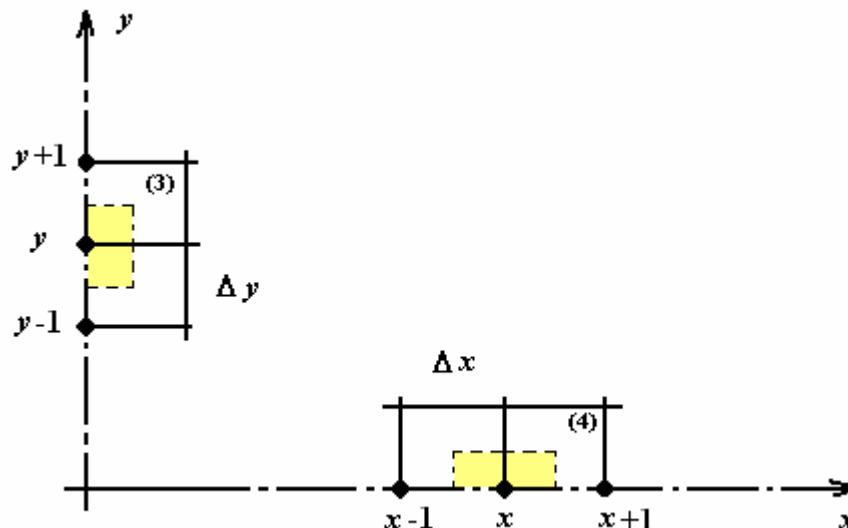
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y}_{x,y+0,5} = \frac{\vartheta_{x,y+1}^p - \vartheta_{x,y}^p}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y}_{x,y-0,5} = \frac{\vartheta_{x,y}^p - \vartheta_{x,y-1}^p}{\Delta y}$$

Uvrštavanjem ovih jednačbi u (2.14) i sređivanjem, uz pretpostavku da je  $\Delta x = \Delta y$ , slijedi:

$$\vartheta_{x,y}^{p+1} = \vartheta_{x,y}^p (1 - 4 \cdot Fo) + Fo \cdot (\vartheta_{x+1,y}^p + \vartheta_{x-1,y}^p + \vartheta_{x,y+1}^p + \vartheta_{x,y-1}^p) \quad \dots \quad (2.15)$$

### ČVOROVI (3) i (4)



Slika 8: Čvorovi (3) i (4)

Ovi čvorovi predstavljeni su točkama koje leže na jednoj od koordinatnih osi i kao takvi računaju se tako da se izraz (2.15) reducira s obzirom na os  $x$ , odnosno s obzirom na os  $y$ , tako da se dobiva:

Za čvor (3):  $x = 0$

$$\vartheta_{0,y}^{p+1} = \vartheta_{0,y}^p (1 - 2 \cdot Fo) + Fo \cdot (\vartheta_{0,y+1}^p + \vartheta_{0,y-1}^p) \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

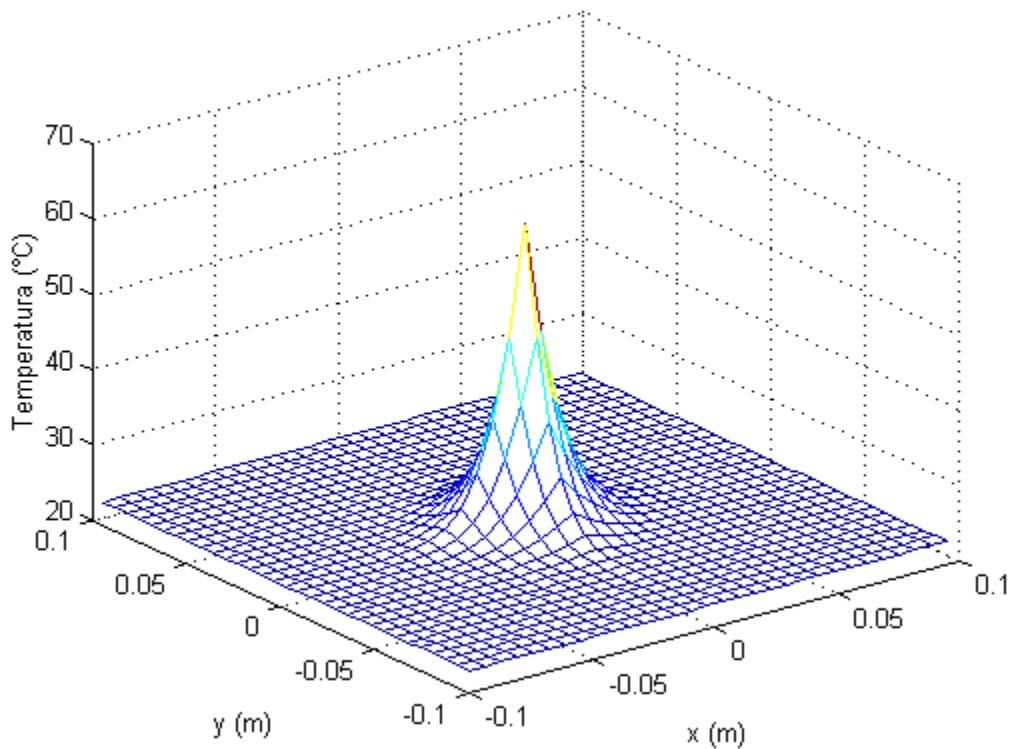
Za čvor (4):  $y = 0$

$$\vartheta_{x,0}^{p+1} = \vartheta_{x,0}^p (1 - 2 \cdot Fo) + Fo \cdot (\vartheta_{x+1,0}^p + \vartheta_{x-1,0}^p) \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

Sad kada su poznate jednačbe za sve karakteristične čvorove (2.13), (2.15), (2.16) i (2.17), definirano je numeričko rješenje dvodimenzijskog nestacionarnog temperaturnog polja opisanog jednačbom (2.7).

Jednako kao i za analitičko rješenje i ovdje je s ciljem grafičkog predočenja numeričkog rješenja izrađen program (MATLAB<sup>®</sup>) koji računa i crta raspored temperatura unutar uzorka kroz čije središte prolazi tanka (0,0254 mm) žica od platine duljine 200 mm i koja se zagrijava s konstantnom snagom 0,5 W. Također, i ovdje se simulira uzorak dimenzija 200 mm · 200 mm, početne temperature 23 °C i toplinske provodnosti 0,04 W/(m·K). Vrijeme trajanja pokusa (simulacije) i ovdje iznosi 150 s.

Nadalje, zbog usporedbe, i numeričko je rješenje predočeno grafički s jednakim položajem koordinatnih osi.



**Slika 9:** Pikaz izoterma za uzorak ekspaniranog polistirena ( $\lambda = 0,04 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ) početne temperature  $\vartheta_0 = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ , zagrijavan snagom od  $P = 0,5 \text{ W}$  u trajanju  $t = 150 \text{ s}$  (simulacija - MATLAB<sup>®</sup>).

Slika 9 predstavlja prikaz dvodimenzijskog nestacionarnog temperaturnog polja koje nastaje zbog zagrijavanja (konstantnom snagom) tanke žice od platine koja prolazi središtem uzorka ekspaniranog polistirena i koje je dobiveno pomoću numeričke (eksplicitne) metode konačnih razlika. Usporedi li se ova slika sa slikom 3 koja također predstavlja prikaz ovog temperaturnog polja za isti uzorak, ali pomoću analitičke metode (metode separacije varijabli i primjenom Fourierovih integrala), vidi se da se ove dvije slike podudaraju.

Na ovaj su način analitičkim i numeričkim metodama pronađena rješenja jednadžbe nestacionarnog dvodimenzijskog provođenja topline, koja su međusobno komplementarna pri čemu se numerička metoda može primjenjivati za proračune temperaturnog polja u nehomogenim materijalima.

## 2.4 Izračun toplinske provodnosti

Toplinska provodnost može se izvesti iz jednadžbe (2.6), koja glasi:

$$\vartheta(x, y, t) = \vartheta_0 + \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \int_0^t \cdot e^{-\frac{(x-v)^2 + (y-\omega)^2}{4at}} \frac{dt}{t}$$

Budući da je pokus osmišljen tako da se temperatura promatra (mjeri) na samom toplinskom izvoru (slika 2), odnosno na platinskoj žici koja prolazi središtem uzorka, u točki  $(v, \omega)$ , odnosno da je predmet interesa upravo ona temperatura za koju vrijedi:

$$x = v \text{ i } y = \omega$$

Prethodna jednadžba (2.6) poprima oblik:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \int_0^t \frac{dt}{t}$$

S obzirom da je u točki 2.1, na početku ovog poglavlja, s  $(t_1, t_2)$  označen mjerni interval unutar kojeg se iz izmjerenih vrijednosti napona, struje i vremena izračunava toplinska provodnost uzorka, slijedi da temperatura u nekom vremenu  $t_1$ , odnosno  $t_2$  glasi:

$$\vartheta(t_1) = \vartheta_0 + \frac{P}{4 \cdot L \cdot \lambda \cdot \pi} \cdot \int_0^{t_1} \frac{dt}{t}$$

$$\vartheta(t_2) = \vartheta_0 + \frac{P}{4 \cdot L \cdot \lambda \cdot \pi} \cdot \int_0^{t_2} \frac{dt}{t}$$

Odnosno, razlika temperatura između ovih vremena:

$$\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1) = \frac{P}{4 \cdot L \cdot \lambda \cdot \pi} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t}$$

Integriranjem se dobiva:

$$\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1) = \frac{P}{4 \cdot L \cdot \lambda \cdot \pi} \cdot \ln \frac{t_2}{t_1} \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

Iz gornje jednadžbe proizlazi da će se mjerni interval između točaka  $[(\vartheta(t_1), \ln(t_1))]$  i  $[(\vartheta(t_2), \ln(t_2))]$  birati na onom dijelu krivulje koji se može smatrati linearnim.



**Duljina platinske žice ( $L$ )** određena je spojištima mjernih žica (slika 2) i precizno se mjeri pomoću pomične mjerke.

**Snaga ( $P$ )** koja se posebnim uređajem dovodi žici, kako je već rečeno, mora biti konstantna, odnosno neovisna o vremenu. Snaga se računa iz izmjerenih veličina napona i struje na platinskoj žici:

$$P = U_{Pt}(t) \cdot I_{Pt}(t) \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

**Vrijeme ( $t$ )** također se kontinuirano mjeri i bilježi.

Kako je opisano u točki 2.1 ovog poglavlja, električni otpor platine mijenja se u skladu:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{U_{Pt}(t)}{I_{Pt}(t) \cdot R_0} - 1 \right)$$

Iz ove jednadžbe, mjerenjem napona i električne struje na žici, lako se mogu izračunati temperature u vremenima  $t_1$  i  $t_2$ , a onda i njihova temperaturna razlika  $[\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)]$ .

Premda su sada poznati svi parametri za izračun toplinske provodnosti, ovaj bi račun generirao malu, ali ne i beznačajnu pogrešku. Naime, koliko god se trudili odabrati interval  $[\ln(t_1), \ln(t_2)]$  unutar kojeg je ovisnost promjene temperature s prirodnim logaritmom vremena linearna, ona to zapravo nikad nije. Mora se odabrati onaj dio krivulje između točaka  $[(\vartheta(t_1), \ln(t_1))]$  i  $[(\vartheta(t_2), \ln(t_2))]$  takav da koeficijent korelacije regresijskog pravca koji se provlači između ovih točaka bude približno jednak broju jedan ( $R^2 \sim 1$ ).

Postupak izračuna toplinske provodnosti se može precizno opisati na sljedeći način:

### 1. korak

Iz izmjerenih vrijednosti napona i električne struje, u skladu s (2.19), izračunati snagu kojom se Pt žica napaja.

### 2. korak

Nacrtati dijagram:  $P/\ln(t)$  i locirati onaj dio gdje je  $\Delta P/P = 0,01 \%$ .

### 3. korak

Iz izmjerenih vrijednosti napona i električne struje, u skladu s (2.1), izračunati promjenu temperature s vremenom. Nacrtati dijagram ovisnosti promjene temperature s prirodnim logaritmom vremena:  $\vartheta(t)/\ln(t)$ .

#### 4. korak

Na dijagramu  $\vartheta(t)/\ln(t)$  locirati onaj dio gdje pravac regresije, dobiven metodom najmanjih kvadrata [8], izmjerene vrijednosti aproksimira tako dobro da je koeficijent korelacije  $R^2 \sim 1$ . Jednadžba pravca regresije glasi:

$$\vartheta_R(t) = a \cdot \ln(t) + b$$

Gdje su:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln t_i - \ln \bar{t}) \cdot (\vartheta_i - \bar{\vartheta})}{\sum_{i=1}^n (\ln t_i - \ln \bar{t})^2} \quad \dots \text{ koeficijent smjera regresijskog pravca} \quad \dots \quad (2.20)$$

$$b = \bar{\vartheta} - a \cdot \ln \bar{t} \quad \dots \text{ odsječak na ordinati}$$

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \vartheta_i \quad \dots \text{ aritmetička sredina izmjerenih temperatura na odabranom intervalu}$$

$$\ln \bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i \quad \dots \text{ aritmetička sredina logaritma vremena na odabranom intervalu}$$

$n$  ..... broj izmjerenih podataka unutar odabranog intervala.

#### 5. korak

Na regresijskome pravcu locirati onaj dio gdje porast temperature na Pt žici nije manji od 3 K. Naime, što je temperaturni interval  $[\vartheta_R(t_2) - \vartheta_R(t_1)]$  veći, manja je mjerna nesigurnost izmjerene toplinske provodnosti. Njegov iznos ovisi o toplinsko-izolacijskim svojstvima materijala uzorka. Mjerenjima je ustanovljeno da je najmanji iznos ovog intervala, a koji ne utječe bitno na mjerni rezultat, približno 2,5 K. Dakle, zbog povećanja mjerne nesigurnosti mjerenja temperature, kao jedne od sastavnice mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti, uzima se da razlika temperatura mora biti takva da vrijedi:

$$\vartheta_R(t_2) - \vartheta_R(t_1) = 3 \text{ K.}$$

O mjernoj nesigurnosti više u poglavlju 5.

## 6. korak

U gore navednu jednadžbu regresijskog pravca uvrstiti početno i završno vrijeme iz kojih se računaju pripadne temperature koje se nalaze na pravcu:

$$\begin{aligned}\vartheta_R(t_1) &= a \cdot \ln(t_1) + b \\ \vartheta_R(t_2) &= a \cdot \ln(t_2) + b\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

NAPOMENA:

Temperature koje tvore interval  $[\vartheta_R(t_2) - \vartheta_R(t_1)]$  sada se nalaze na pravcu i u jednadžbi (2.18) zamjenjuju temperature  $\vartheta(t_2)$  i  $\vartheta(t_1)$ . Što će koeficijent korelacije pravca više težiti k broju 1, odnosno što će pravac bolje aproksimirati izmjerene vrijednosti, to će razlika između ovih temperatura biti manja:  $\vartheta_R(t) - \vartheta(t) \rightarrow 0$ . Bez obzira koliko je ova razlika mala, ona se mora uzeti u obzir.

O izračunu mjerne nesigurnosti zbog ove aproksimacije, više u točki 6.4.2.

## 7. korak

Izračunati porast temperature u intervalu  $[\ln(t_1), \ln(t_2)]$ :

$$\vartheta_R(t_2) - \vartheta_R(t_1) = a \cdot [\ln(t_2) - \ln(t_1)] = a \cdot \ln \frac{t_2}{t_1} \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

Uvrštavanjem gornjeg izraza u (2.18) i sređivanjem dobiva se:

$$\lambda = \frac{P}{4 \cdot L \cdot a \cdot \pi} \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

*Iz ove jednadžbe slijedi da se toplinska provodnost izmjerena dinamičkom metodom vruće žice izračunava iz snage kojom se žica zagrijava i koja mora biti konstantna, iz duljine žice koja se mora što preciznije izmjeriti, te iz koeficijenta smjera regresijskog pravca između točaka  $[(\vartheta_R(t_1), \ln(t_1))]$  i  $[(\vartheta_R(t_2), \ln(t_2))]$ .*

*S obzirom na sve dosad navedeno, toplinska se provodnost metodom vruće žice od platine može odrediti mjerenjem i poznavanjem sljedećih veličina:*

*Napona, U*

*Jakosti električne struje, I*

*Vremena, t*

*Duljine žice, L*

*Električnog otpora platine po jedinici duljine pri 0 °C, R'₀*

*Lineariziranog temperaturnog koeficijenta električnog otpora platine, α*

## 2.5 Priprema mjerenja, određivanje $t_K$

Na početku u točki 2.1 navedeno je da pokus (mjerenje) mora prestati prije nego što toplinski impulsi dosegnu rubove uzoraka ( $d/2$ ). Ovime se osigurava da se rubni uvjeti (rubna temperatura,  $\vartheta_0$ ) tijekom mjerenja neće mijenjati. Također, vrijeme potrebno da toplinski impulsi dosegnu rubove uzoraka označeno je s  $t_K$  a mjerni interval unutar kojeg se iz izmjerenih vrijednosti napona i struje izračunava toplinska provodnost uzorka, označava se s ( $t_1, t_2$ ). Tada mora vrijediti:

$$t_2 = t_K$$

Brzina kojom se toplina širi kroz uzorak ovisi o vrsti materijala, odnosno o njegovoj temperaturnoj provodnosti ( $a$ ):

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$$

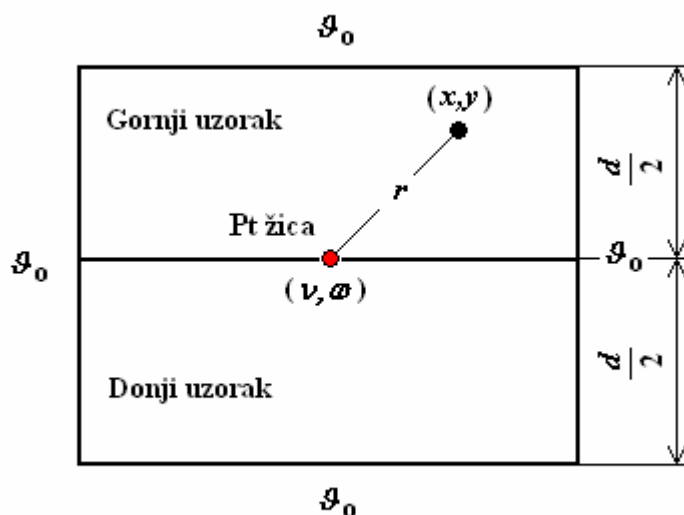
Dakle, može se reći da vrijeme  $t_K$  ovisi o temperaturnoj provodnosti uzorka ( $a$ ) i njegovim izmjerama ( $d$ ).

Jednadžba koja opisuje porast temperature zbog zagrijavanja platinske žice (kontinuirani linijski izvor topline) glasi (2.6):

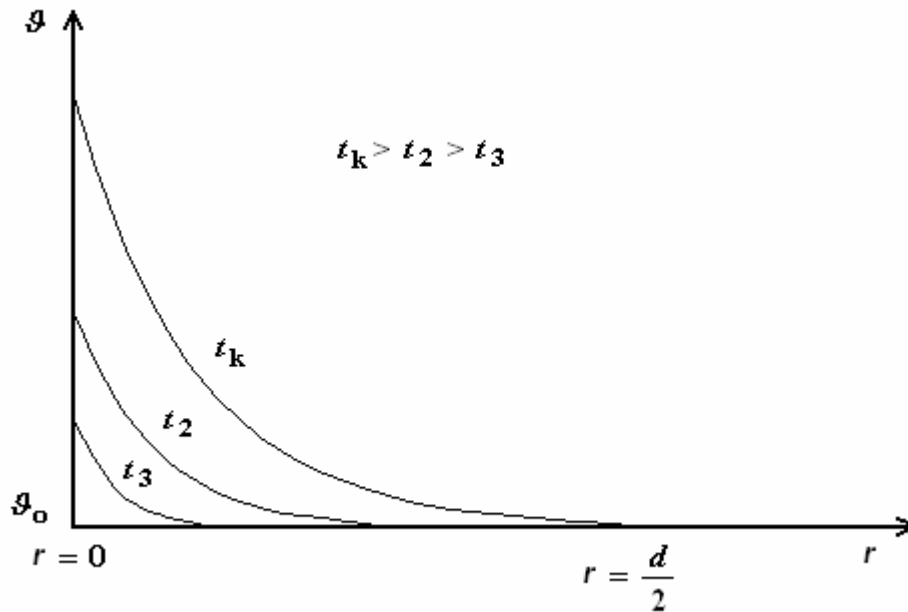
$$\vartheta(x, y, t) = \vartheta_0 + \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L_0} \int_0^t \cdot e^{-\frac{r^2}{4at}} \frac{dt}{t}$$

Ako s  $r$  označimo udaljenost od Pt žice do neke točke unutar uzorka:

$$r = \sqrt{(x - v)^2 + (y - \omega)^2}$$



Slika 10: Presjek uzorka



**Slika 11:** Kvalitativni prikaz distribucije temperatura kroz presjek uzorka

U točki  $r = 0$ , dakle na samoj Pt žici jednačba (2.6) poprima oblik koji nam omogućava izračun toplinske provodnosti kako je opisano točkom 2.4.

Odnosno, ako je ( $r = d/2$ ), jednačba (2.6) poprima slijedeći oblik:

$$\Theta(x, y, t) = \Theta_0 + \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L_0} \int_0^t \cdot e^{-\frac{d^2}{16at}} \frac{dt}{t}$$

Budući da želimo biti sigurni da će mjerenje prestati prije nego što toplinski impulsi dosegnu rubove uzorka, odnosno temperaturu  $\Theta_0$  desni član gornjeg izraza mora biti jednak nuli:

$$\frac{P}{4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L_0} \int_0^t \cdot e^{-\frac{d^2}{16at}} \frac{dt}{t} = 0$$

A to će biti onda ako:  $e^{-\frac{d^2}{16at}} \rightarrow 0$

Odnosno ako:  $e^{\frac{d^2}{16at}} \rightarrow \infty$

A to je onda kad je:  $16 \cdot a \cdot t \ll d^2$

Iz čega proizlazi uvjet za konačno vrijeme unutar kojega se izabire mjerni interval ( $t_1, t_2$ ):

$$t_k \ll \frac{d^2}{16 \cdot a} \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

Dobra procjena vremena  $t_k$  prije početka mjerenja je od velikog značaja na točnost mjerenja i na iznos mjerne nesigurnosti.

## OPĆENITO O VREMENIMA $t_1$ , $t_2$ i $t_K$

Određivanje mjernog intervala poprilično je osjetljivo jer ne postoji način kojim bi se uniformno propisala metoda određivanja  $t_1$  i  $t_2$ , a koja bi vrijedila baš za sve uzorke.

Pri određivanju ( $t_1$ ,  $t_2$ ), na osnovu mjeriteljskog iskustva i u skladu s dosad navedenim, mjeritelj se mora ravnati prema sljedećem:

- a) Koeficijent korelacije pravca kojim se pomoću metode najmanjih kvadrata aproksimiraju mjerni rezultati mora biti takav da vrijedi:  $R^2 \sim 1$
- b) Temperaturni interval [ $\vartheta_R(t_2) - \vartheta_R(t_1)$ ] ovisi o toplinsko-izolacijskim svojstvima materijala koji se ispituje. Razlika temperatura ne smije biti manja od 3 K:  
$$\vartheta_R(t_2) - \vartheta_R(t_1) = 3 \text{ K.}$$
- c) Rasipanje izmjerenih vrijednosti snage u odabranom intervalu ne smije biti veće od 0,01 %:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P(t_2) - P(t_1)}{P(t_1)} \cdot 100 \leq 0,01\%$$

Ako makar jedan od ovih stavaka nije ispunjen, mjerenje nije pozdano i mjerna nesigurnost će značajno porasti.

## 2.6 Iskazivanje mjernih rezultata

Budući da je ova metoda određivanja toplinske provodnosti dinamička metoda, svi mjerni parametri se promatraju u odnosu na vrijeme. Izmjerene vrijednosti se bilježe s određenim vremenskim intervalom ( $i$ ), odnosno nakon svakog  $i$  – tog vremena izmjeri se i zabilježi sljedeće:

- vrijeme,  $t$
- jakost električne struje,  $I_{Pt}(t)$
- napon,  $U_{Pt}(t)$

Mjernim se procesom upravlja pomoću računala na kojem se bilježe i spremaju svi izmjereni podaci u realnom vremenu. Računalo komunicira s dva univerzalna mjerna instrumenta pomoću RS 232 standardne komunikacije i pomoću programa kojeg je izradio autor.

S obzirom na mjerne kapacitete dva univerzalna mjerna instrumenta i sposobnosti programa da istodobno bilježi i sprema mjerne podatke s oba uređaja, moguće je očitati i spremati mjerne podatke najviše 25 puta u sekundi. Dakle  $i = 1/25$  s, što daje dovoljnu gustoću zapisa.

Platinska sežica napaja pomoću uređaja "konstantne snage" koji je u tu svrhu izradila tvrtka "LME SISTEMI" i koji mjereći i napon i struju, računa snagu na trošilu (Pt žica) i korekcijama nad izmjerenim vrijednostima napona i jakosti struje osigurava da je snaga (u skladu s analitičkim rješenjem) konstantna s obzirom na vrijeme trajanja pokusa.

Također, neovisno od samog uređaja kojim se Pt žica napaja, napon  $U_{Pt}(t)$  i jakost struje  $I_{Pt}(t)$  mjere se i bilježe pomoću računala i dva univerzalna mjerna instrumenta proizvođača "KEITHLEY".

Iz izmjerenih se vrijednosti prema (2.19) izračunava snaga i promjena temperature (2.18).

Za ovako izračunate vrijednosti snage i temperature nacrtaju se dijagrami koji pokazuju prirodu njihove promjene u odnosu na prirodni logaritam vremena. Ovi dijagrami definiraju kvalitetu mjernog procesa.

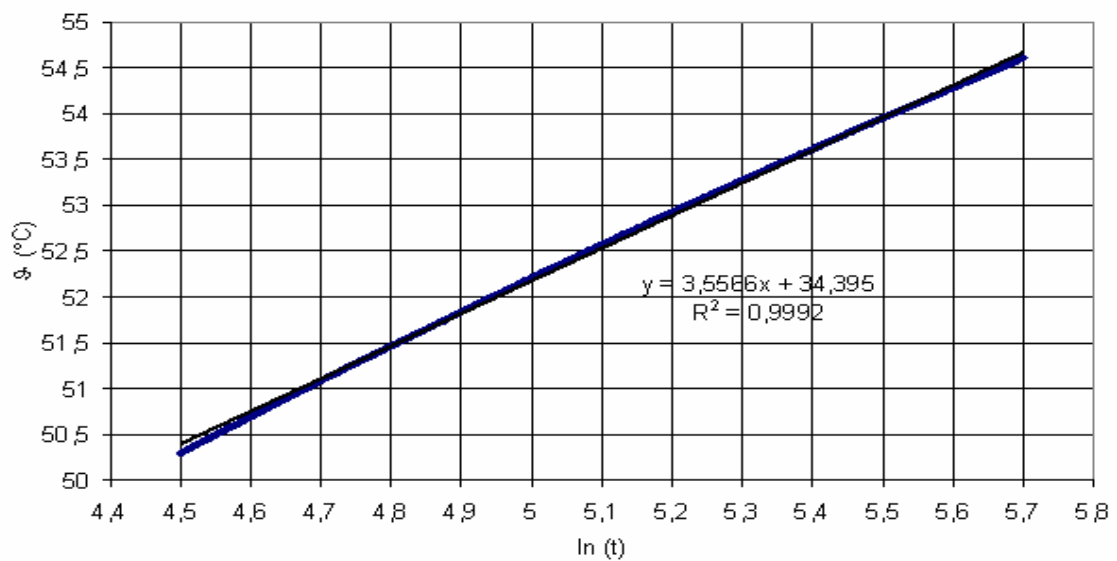
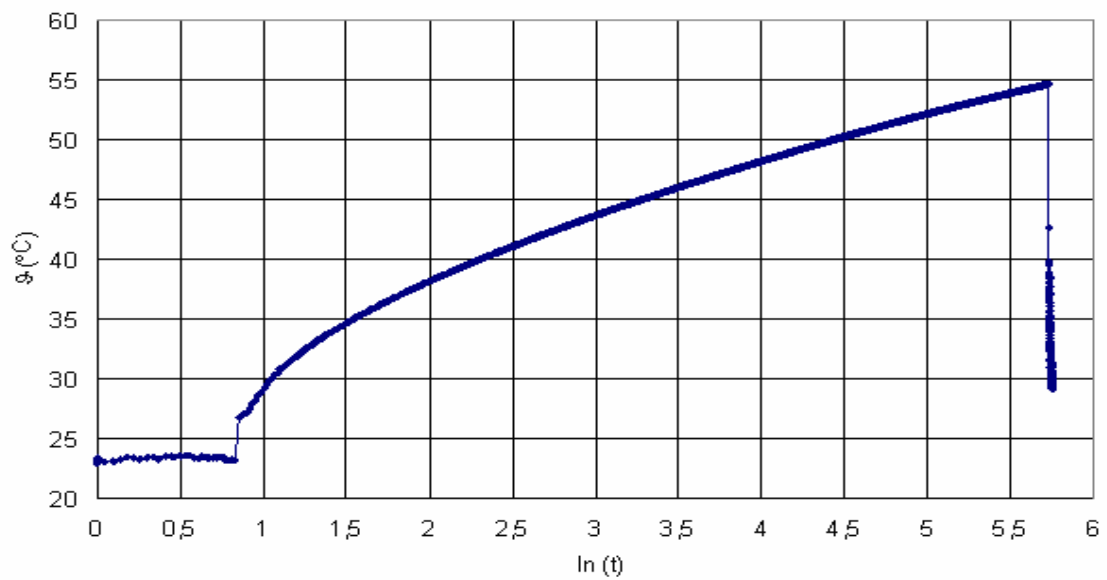
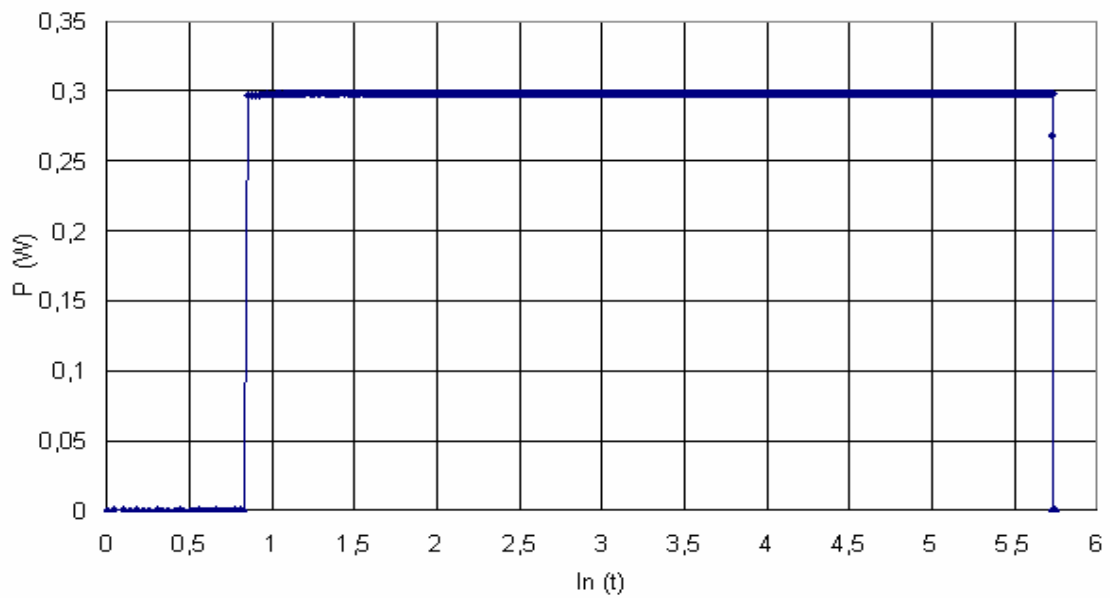
Uvažavajući uvjete iz točke 2.5, odabire se mjerni interval i prikaže ga se dijagramom.

Izmjerene vrijednosti se "lineariziraju" tako da se pomoću metode najmanjih kvadrata kroz izmjerene vrijednosti u odabranom intervalu  $[\ln(t_1), \ln(t_2)]$  "provlači" pravac regresije.

U jednadžbu regresijskog pravca uvrsti se početno i krajnje vrijeme i računaju se pripadne temperature, odnosno promjena temperature u navedenom intervalu.

Izračuna se toplinska provodnost (2.23).

Izračunate se vrijednosti skupa s pripadnim mjernim nesigurnostima prikažu tablicom.



**Slika 12:** Dijagrami koji prikazuju promjene snage i temperature u odnosu na prirodni logaritam vremena za uzorak ekspanziranog polistirena.



		IZMJERENE VRIJEDNOSTI	<i>U</i>
<b><i>L</i></b>	mm	191,0	0,0703
<b><math>\ln(t_1)</math></b>	s	4,50	0,0012
<b><math>\ln(t_2)</math></b>	s	5,70	0,0012
$\vartheta_R(t_1)$	°C	50,4	0,036
$\vartheta_R(t_2)$	°C	54,7	0,04
$\vartheta_R(t_2) - \vartheta_R(t_1)$	K	4,27	0,063
<b><i>P</i></b>	W	0,298	0,0000
$\Delta P/P$	%	0,003	
<b><math>\lambda</math></b>	W/m·K	0,0349	0,0026
<b><math>R^2</math></b>		0,999	

**Tablica 1:** Izmjerene vrijednosti

Gdje su:

*L* ..... izmjerena duljina Pt žice

$\ln(t_1)$  i  $\ln(t_2)$  ..... dobiveni izravnim mjerenjima

$\vartheta_R(t_1)$  i  $\vartheta_R(t_2)$  ..... u skladu s (2.21)

$\vartheta_R(t_1) - \vartheta_R(t_2)$  ..... razlika temperatura

*P* ..... u skladu s (2.19)

$$\frac{\Delta P}{P} \cdot 100 = \frac{P_{max} - P_{min}}{\bar{P}}_{(t_1, t_2)} \cdot 100\% \quad \text{- mora biti} = 0,01 \%$$

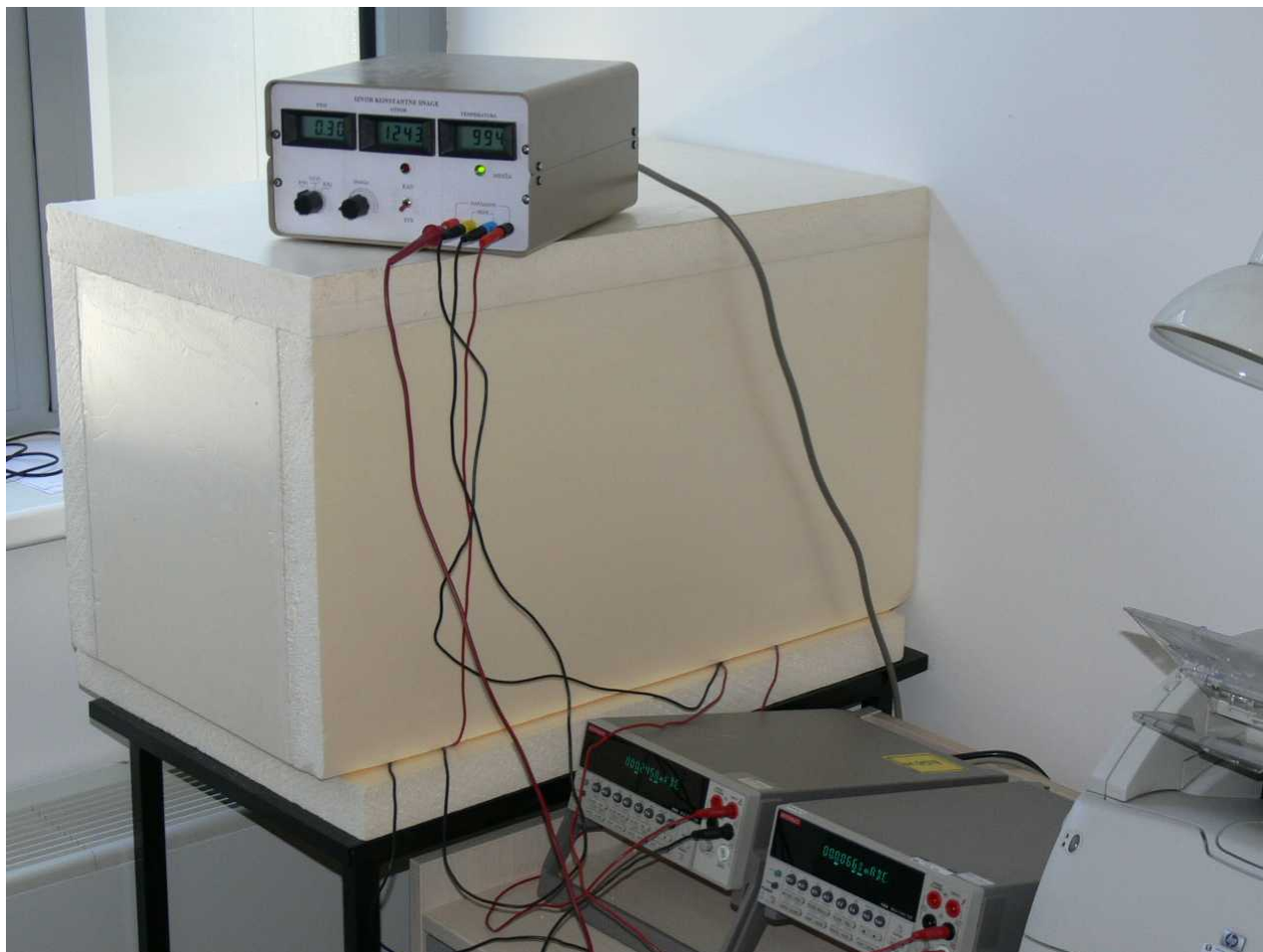
$\lambda$  ..... u skladu s (2.23)

$R^2$  ..... metodom najmanjih kvadrata - mora biti  $\sim 1$

*U* ..... standardna proširena mjerna nesigurnost

### 3 UREĐAJ ZA DINAMIČKO MJERENJE TOPLINSKE PROVODNOSTI

#### 3.1 Tehnički opis uređaja



Slika 13: Mjerna komora

Gornja slika predstavlja mjernu komoru s postoljem unutar koje se smješta mjerni složaj. Komora je izrađena od kvalitetnog toplinsko-izolacijskog materijala (ekstrudirani polistiren) i njena je osnovna zadaća spriječiti promjenu temperature u okolišu uzorka tijekom mjerenja.

Premda je prostorija u kojoj se mjerenja provode kondicionirana, do promjene temperature tijekom mjerenja može doći zbog neočekivanog otvaranja i zatvaranja vrata što bez obzira na kratko vrijeme trajanja mjerenja može utjecati na promjenu zadanih rubnih uvjeta.

Vanjske izmjere komore: 75 cm · 45 cm · 45 cm.

Unutrašnja izmjere komore: 65 cm · 35 cm · 40 cm.



**Slika 14:** Izvor stalne snage

Osnovna je zadaća ovog izvora stalne snage da žici od platine kontinuirano dovodi zadani iznos električne snage koja se tijekom mjerenja ne smije mijenjati, odnosno unutar intervala  $[\ln(t_1), \ln(t_2)]$  se ne smije mijenjati više od 0,01 %. To znači da je ovaj uređaj sposoban mjeriti promjenu napona i/ili jakosti električne struje tijekom mjerenja (zbog promjene električnog otora Pt žice do kojeg opet dolazi zagrijavanjem) i korigirati obje veličine tako da je njihov umnožak (snaga) konstantan.

Ovo je neobično važno jer bez stalne snage čitava mjerna koncepcija "pada u vodu", odnosno nije ispunjena pretpostavka iz analitičkog rješenja da je izvor toplinske energije vremenski neovisan i da se kao takav smije staviti ispred integrala.

Elektronička shema izvora stalne snage dana je u privitku ovog rada.

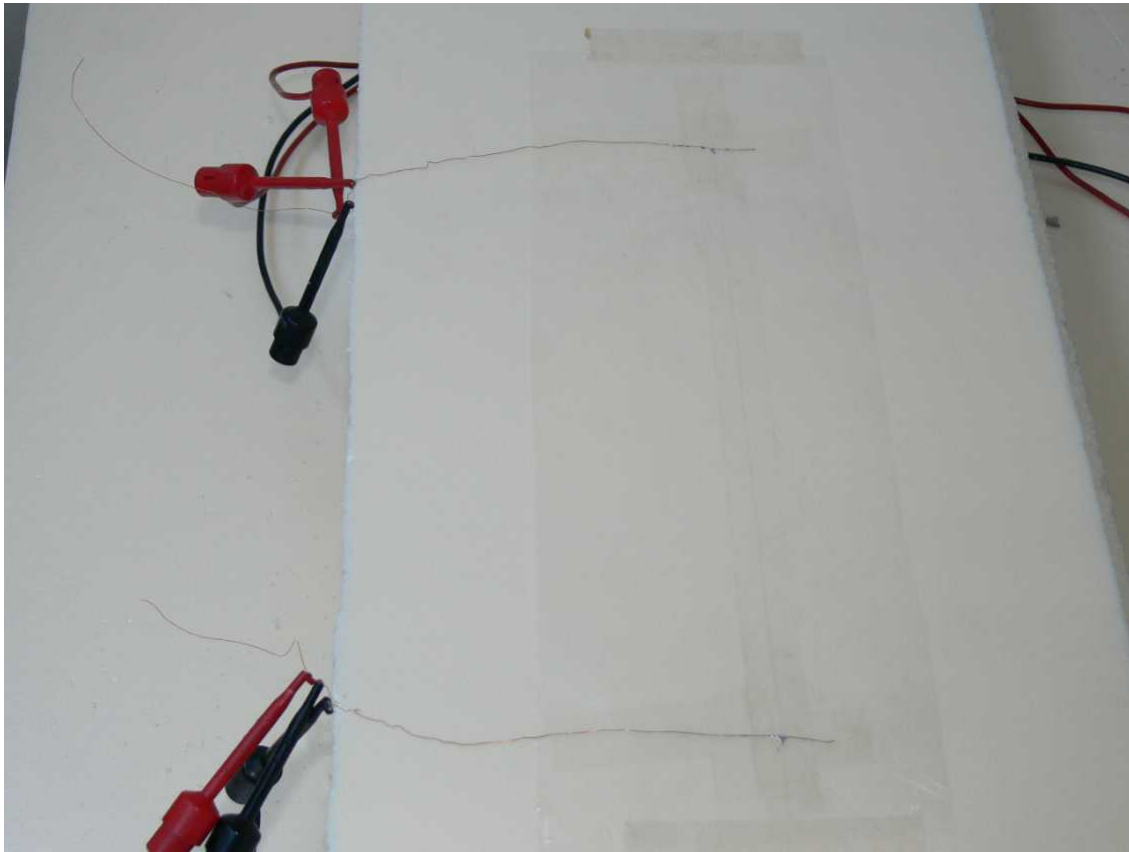


**Slika 15:** Voltmetar i ampermetar

Slika 13 predstavlja dva univerzalna mjerna instrumenta (multimetra) proizvođača "Keithley", tip: 2000, razlučivosti  $6^{1/2}$  digita, pri kojoj je mjerenu vrijednost moguće izmjeriti, očitati i "poslati" 50 puta u sekundi. Komunikacija ovih instrumenta s računalom je odlična i ostvariva pomoću RS 232 i ne nul modemskog kabla ili IEEE 488 bus-a s odgovarajućom mjernom karticom. Za mjerenja toplinske provodnosti korištena je RS 232 komunikacija.

Nadalje, to su mjerni instrumenti koji vrlo precizno mjere male iznose napona ( $1 \mu\text{V}$ ), male vrijednosti jakosti električne struje ( $10 \text{ nA}$ ) i male vrijednosti otpora ( $100 \mu\Omega$ ). Tijekom mjerenja toplinske provodnosti jedan se uređaj koristi za mjerenje napona na Pt žici, a drugi se koristi za mjerenje jakosti električne struje.

Obje mjerene veličine se pomoću RS 232 i prikladne programske podrške prenose na računalo gdje se pohranjuju i istodobno preračunavaju u električnu snagu, otpor i temperaturu.



**Slika 16:** Platinska žica

Tanka žica od platine smještena je unutar tanke PVC folije ( $d = 0,05$  mm) na koju su tanko zalemljene dvije bakrene i pocinčane žice ( $d = 0,2$  mm) čija se međusobna udaljenost mjeri i označava s  $L$ . Na ove se žice pomoću mehaničkih hvataljki spajaju oba mjerna instrumenta i izvor stalne snage, u skladu sa slikom 1 (mjerna skica).

Ovdje je bitno naglasiti da platinska žica mora biti između spojišta s bakrenim žicama ravna i blago zategnuta. Budući da su promjeri Pt žica koje se koriste pri mjerenju toplinske provodnosti ( $d_{Pt} = 0,0254$  mm ili  $d_{Pt} = 0,01778$  mm) vrlo mali, ravnosti žice i kakvoći njenih spojišta s bakrenim žicama mora se posvetiti maksimalna pažnja.

Platinske žice su isporučene u čistoći od 99,999 % (prema specifikaciji proizvođača).

## 3.2 Princip mjerenja

Uzorak toplinsko izolacijskog materijala nad kojim se provodi mjerenje toplinske provodnosti, izrađuje se iz dva jednaka dijela čije su duljine barem 20 cm veće od duljine Pt žice. Donji se dio smješta u mjernu komoru tako da naliže na dva potpornja od ekstrudiranog polistirena čime se osigurava da se mjerni dio površine uzorka (duž Pt žice) nalazi u zraku. Na donji se dio ljepljivom trakom pričvršćuje tanka PVC folija na kojoj se nalazi Pt žica na koju se namješta gornji dio uzorka tako da pocinčane bakrene žice vire izvan uzorka. Na bakrene se žice pomoću hvataljki pričvršćuju mjerne žice, koje se priključuju na odgovarajuće stezaljke mjernih instrumenata i izvora stalne snage uvažavajući pri tom pravila mjerenja istosmjernog električnog napona (voltmetar spojiti paralelno s trošilom - Pt žicom) i jakosti struje (ampermetar spojiti u seriju s izvorom i trošilom).

Mjerne instrumente i izvor stalne snage potrebno je uključiti barem 2 sata prije mjerenja. Prema specifikaciji proizvođača, idealno vrijeme zagrijavanja ovih uređaja iznosi cca 2 sata. Također, to je dovoljno vremena da se temperatura uzorka izjednači s temperaturom u samoj komori.

Mjerni se instrumenti u međuvremenu spoje (ne nul modem serijski kablovi) s računalom (RS 232) i pozove se program koji prikuplja izmjerene vrijednosti (vrijeme, napon i jakost struje) i iz kojih u realnom vremenu računa promjenu temperature s vremenom. Program se pusti u pogon i odmah se zatim uključi i izvor stalne snage. Važno je paziti da ukupno vrijeme trajanja mjerenja ne premaši iznos  $t_k$  koje je za određenu vrstu toplinsko izolacijskog materijala procijenjeno onako kako je opisano točkom 2.5.

Nakon svršetka mjerenja, izvor stalne snage postavlja se u stanje "stand by" i pokrene se onaj dio programa za mjerenje, prikupljanje i izračun izmjerenih vrijednosti koji crta dijagrame ovisnosti izmjerene snage i temperature o prirodnom logaritmu vremena. Iz ovih se dijagrama odabire mjerni interval  $[\ln(t_1), \ln(t_2)]$  koji zadovoljava uvjete opisane točkom 2.5. i za koji se izračunaju i u tablici iskažu mjerni rezultati.

### 3.3 Ispitni uzorci

S obzirom da će se rezultati mjerenja toplinske provodnosti, dobiveni dinamičkom metodom (metoda vruće žice), uspoređivati s onima dobivenim stacionarnim postupkom u Pönsgenovom uređaju, nužno je osigurati jednake ispitne uvjete u oba slučaja.

Norme proizvođača koje propisuju uvjete pri kojima se ispituje toplinska provodnost određenog građevnog materijala, propisuju dva različita stanja. Za lake betone, žbuke i mortove, ispitivanja se provode na isušanim uzorcima pri čemu se na kraju ispitivanja moraju računati korekcije s obzirom na promjenu masenog sadržaja vlage tijekom ispitivanja (ako postoji). Ovakvi se uzorci suše u ventiliranim sušionicima do stalne mase (mase suhe tvari). Postupak isušivanja propisan je normom: HRN EN ISO 12570:2002. Za sve ostale građevne materijale (polistireni, mineralne vune, poliuretani i drugi) norme proizvođača propisuju ispitivanja pri 23 °C i 50 % vlage.

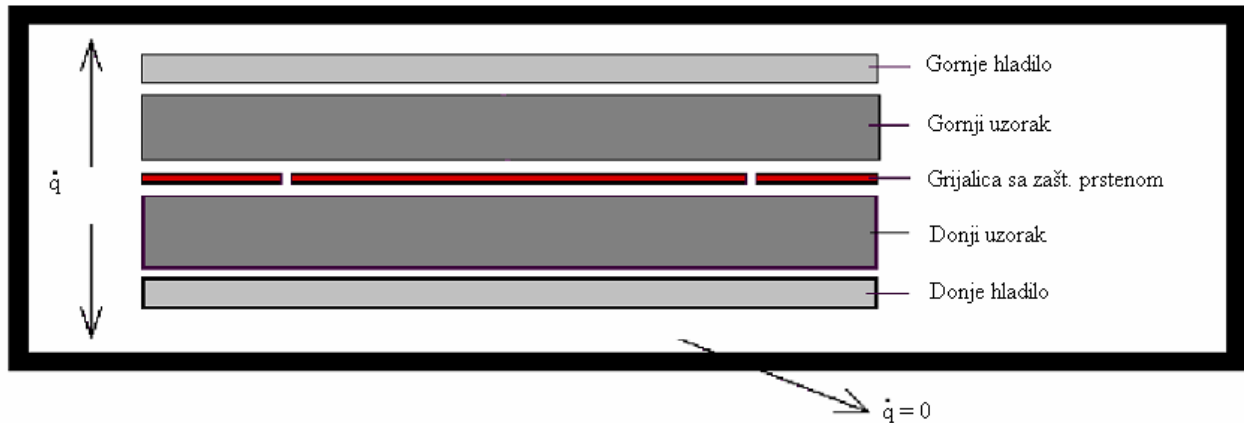
Budući da su sva ispitivanja toplinske provodnosti dinamičkom metodom provedena pod istim uvjetima (23 °C i 50 % vlage), uzorak toplinske žbuke se prije ispitivanja u Pönsgenovom uređaju neće sušiti, tako da je uvjet jednakih uvjeta za obje ispitne metode ispunjen.

Toplinski impulsi koje proizvodi platinska žica brže prolaze kroz uzorak veće toplinske provodnosti nego kroz uzorak manje toplinske provodnosti, tako da će se debljina uzoraka prilagođavati vrsti materijala. Prije svakog mjerenja za određenu vrstu materijala uzorka nužno je, na način opisan točkom 2.5, unaprijed procijeniti vrijeme za koje će toplinski impulsi doseći rubove uzoraka, odnosno procijenti koliko će trajati mjerenje i koja je debljina uzorka potrebna.

Ispitni uzorci istovrsnog materijala koji se sastoje od dva dijela, režu se na jednake debljine. Pri izradi i postavljanju bitno je paziti da su uzorci ravnih i glatkih površina, tako da se ostvari što je moguće bolje nalijeganje jednog uzorka na drugi. Na ovaj se način izbjegava značajni utjecaj dodirnih otpora. Također, žicu od platine skupa s dvije mjerne žice treba postaviti tako da ostvaruju idealan dodir s oba dijela uzorka, tako da ne postoje zračni jastučići između gornjeg i donjeg dijela uzorka. Širina uzorka mora biti barem jednakog iznosa kao i debljina, s obzirom da se temperaturno polje prostire radijalno oko izvora topline - Pt žice, dok se duljina uzoraka prilagođava mjernoj duljini platinske žice.

# 4 STACIONARNO MJERENJE TOPLINSKE PROVODNOSTI

## 4.1 Teorijske osnove



**Slika 17:** Pönsgeinov uređaj sa zaštićenom vrućom pločom - shematski prikaz

Fourierova diferencijalna jednačina provođenja topline u homogenom i izotropnom tijelu [6]:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}_i}{c \cdot \rho}$$

Budući da se ovdje radi o stacionarnom temperaturnom polju te da je mjerni uređaj projektiran tako da svojom geometrijom i mjernim složajem ostvaruje da se prijenos topline u najvećoj mjeri odvija u smjeru samo jedne koordinatne osi i s obzirom da u uzorcima ne postoji izvor ili ponor topline, Fourierova se jednačina može reducirati:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0$$

Integriranjem se dobiva:

$$\vartheta(x) = C_1 \cdot x + C_2 \quad \dots \quad (4.1)$$

Gdje su  $C_1$  i  $C_2$  konstante integracije.

Iz gornje jednačine slijedi da stacionarno provođenje topline kroz uzorak debljine  $d = x_2 - x_1$ , u smjeru samo jedne koordinatne osi, slijedi zakon pravca [10].

Ako se postave rubni uvjeti tako da vrijedi:

$$\vartheta(x_1) = \vartheta_1 = C_1 \cdot x_1 + C_2$$

$$\vartheta(x_2) = \vartheta_2 = C_1 \cdot x_2 + C_2$$

Gdje su  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  ..... temperatura grijalice, odnosno hladila ( $\vartheta_1 > \vartheta_2$ )



Nakon sređivanja se dobiva:

$$C_1 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{d}$$

$$C_2 = \frac{\vartheta_1 \cdot x_2 - \vartheta_2 \cdot x_1}{d},$$

Također u skladu s [10], prijenos topline između dvije nivo plohe koje imaju različitu temperaturu:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad}\vartheta = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \vec{k} \right)$$

Gdje je  $\text{grad}\vartheta$  - gradijent temperature ili usmjerena derivacija temperaturnog polja.

Odnosno, za smjer samo jedne koordinatne osi:

$$\dot{q}_x = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

Ako se prethodni izraz za temperaturu uvrsti u jednadžbu (4.1) dobit će se:

$$\dot{q}_x = -\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} (C_1 \cdot x + C_2)$$

Što daje:

$$\dot{q}_x = -\lambda \cdot C_1 = \lambda \cdot \frac{\Delta \vartheta}{d}$$

Gdje je s  $\Delta \vartheta$  označen pad temperature kroz uzorak,  $\Delta \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$

Naposlijetku, izraz za toplinsku provodnost:

$$\lambda = \dot{q}_x \cdot \frac{d}{\Delta \vartheta} \quad \frac{W}{m \cdot K} \quad \dots \quad (4.2)$$

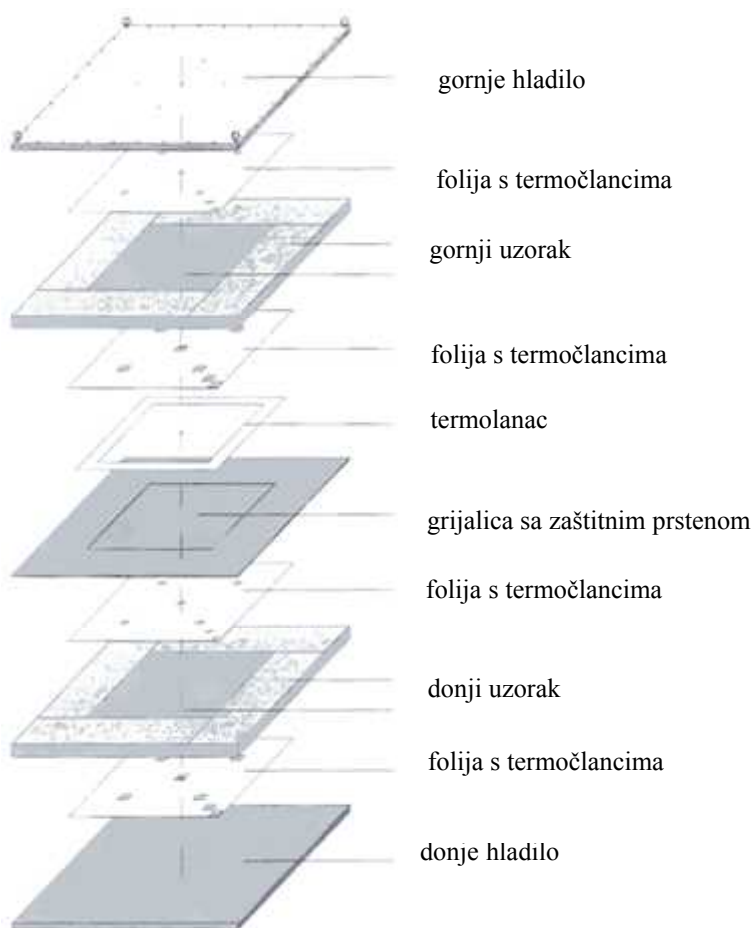
Gdje  $\dot{q}_x$  predstavlja gustoću toplinskog toka kroz oba uzorka (gornji i donji).

## 4.2 Tehnički opis uređaja

Stacionarna mjerenja toplinske provodnosti uzoraka s ciljem usporedbe rezultata dobivenih mjerenjem toplinske provodnosti dinamičkom metodom, provedena su u uređaju sa zaštićenom vrućom pločom u Laboratoriju građevne fizike IGH u Zagrebu.

Uređaj se sastoji od grijalice sa zaštitnim prstenom, gornjeg i donjeg hladila, četiri folije s termočlancima i mjernog toplinskog lanca, kako je prikazano slikom 13. Uređaj rabi dva uzorka od istog materijala od kojih je jedan je smješten ispod, a drugi iznad grijalice. Također, iznad, odnosno ispod uzoraka nalaze se dva hladila. Zbog temperaturnog pada od grijalice prema hladilima, kroz oba se uzorka prenosi toplina.

Bit mjerenja je ostvariti prijenos topline provođenjem i okomito na uzorke bez značajnijih bočnih gubitaka (vođenje topline u smjeru jedne osi). Ovo se ostvaruje prisnim nalijeganjem toplinski homogenih izotropnih uzoraka na površine grijalice i hladila, i pomoću tzv. zaštitnog prstena. Zaštitni prsten postavljen je oko grijalice tako da se između njih nalazi zračni raspor. Temperatura zaštitnog prstena se, mjereći pad temperature na zračnom rasporu, regulira na temperaturu grijalice. Ovakav se mjerni složaj smješta u komoru čija se temperatura može unaprijed odrediti i tijekom mjerenja regulirati tako da bude jednaka temperaturi grijalice, temperaturi hladila ili aritmetičkoj sredini ovih dviju temperatura [11].



**Slika 18:** Pöngsenov uređaj sa zaštićenom vrućom pločom - mjerni složaj

Ovakav je mjerni složaj smješten u mjernu komoru u kojoj se temperatura može svesti na temperaturu hladila, grijalice ili njihovu aritmetičku sredinu. Temperatura u komori regulira se i provjerava pomoću platinskog termometra<sup>(2)</sup> (Pt 100 termometar).

<sup>(2)</sup> Pt 100 je platinski otpornički termometar kojemu je poznata ovisnost električnog otpora o temperaturi i kojemu pri 0 °C izmjereni električni otpor iznosi 100 Ω.

Ovisno o materijalu i debljini toplinskog izolatora koji se ispituje te rashladnom mediju, moguće je ostvariti sljedeće parametre [11]:

Temperaturna razlika na uzorcima: od 5 K do 55 K,

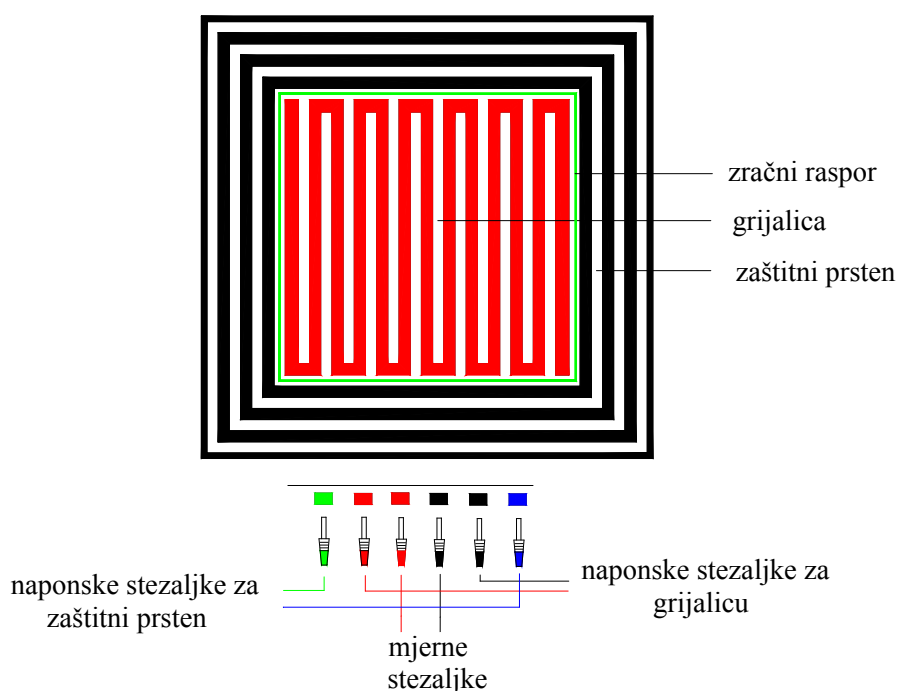
Ispitna temperatura: od - 10 °C do 70 °C,

Toplinska provodnost ispitnog uzorka: od  $0,01 \frac{W}{m \cdot K}$  do  $2,0 \frac{W}{m \cdot K}$ .

S obzirom na materijal ispitnog uzorka, debljina koja se može mjeriti je od 10 mm do 200 mm.

## GRIJALICA SA ZAŠTITNIM PRSTENOM

Grijalica je kvadratičnog presjeka i konstruirana je tako da električnu energiju pretvara u toplinsku po cijeloj svojoj površini (mjerna površina) ploštine:  $0,25 \text{ m}^2$ . Zaštitni prsten površine  $0,56 \text{ m}^2$  (nije mjerna površina), odvojen je zračnim rasporom<sup>(3)</sup> (2 mm) od grijalice i također se zagrijava i regulira na temperaturu grijalice [11]. Na ovaj se način postiže da se toplina koju grijalica predaje uzorcima prenosi samo u jednom smjeru i to okomito na uzorke.

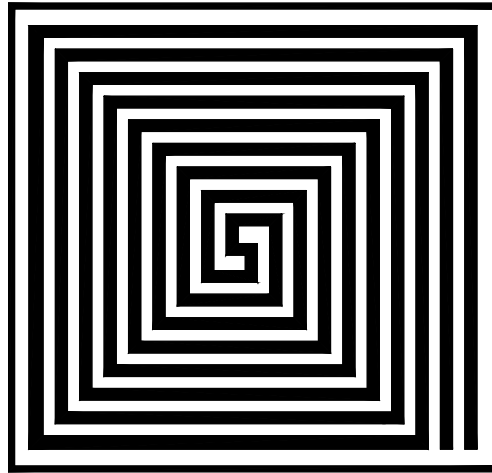


**Slika 19:** Presjek grijalice sa zaštitnim prstenom

<sup>(3)</sup> 1926. godine M. Jakob sastavio je pločasti uređaj s jednom grijaćom pločom i jednim hladilom između kojih se nalazi jedan uzorak. 1965. godine Fritz i Bode su izračunali korekcijsku značajku zračnog raspora Jakobovog uređaja. M. Brezinščak je 1980. godine uveo nove korekcije nužne da bi Jakobov uređaj mjerio "vrhunskom točnošću" (opus citatum). J. Papković je 1998. godine izračunao korekcije za Pönsgenov (1912) uređaj koristeći analogiju s Jakobovim.

## DONJE I GORNJE HLADILO

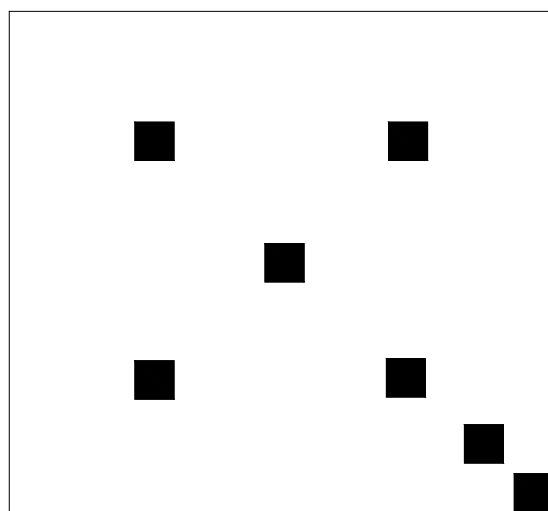
Oba hladila su kvadratičnog presjeka i povezana su u jedinstveni sustav hlađenja i upravljanja. Medij kojim se u hladilu odvodi toplina je voda i hladilo je konstruirano tako da hladi cijelom svojom površinom ploštine  $0,81 \text{ m}^2$ .



Slika 20: Presjek hladila

## FOLIJE S TERMOČLANCIMA

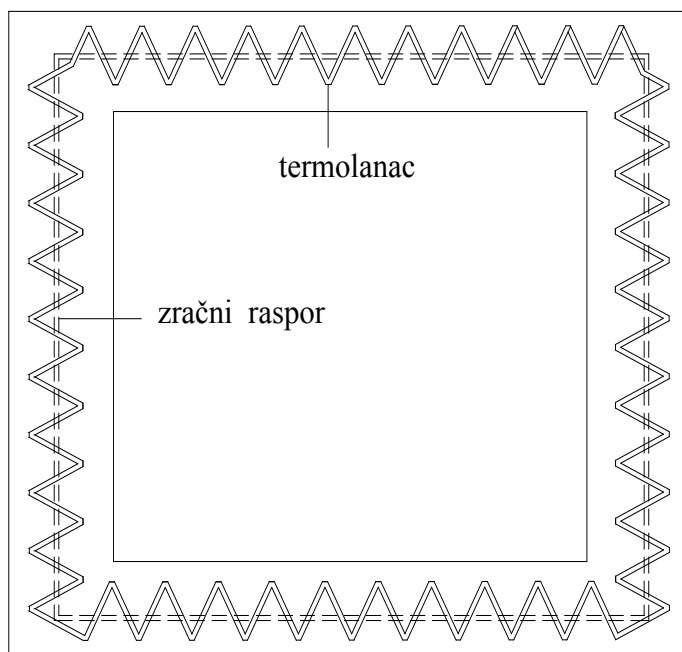
Tanke (0,5 mm) plastične folije (500 mm · 500 mm) s termočlancima postavljaju se izravno na uzorke. Na svakoj se foliji nalazi po pet termočlanaka (bakar - konstantan: tip T) koji služe za mjerenje temperaturnog polja na uzorku. Na one dvije folije koje se nalaze između uzoraka i s obje strane grijalice nalaze se još dva dopunska termočlanka od kojih jedan mjeri temperaturu grijalice, a drugi temperaturu zaštitnog prstena uz zračni raspor. Termočlanci su zalemljeni za bakrene listiće koji su pak nalijepljeni na tanku PVC foliju.



Slika 21: Folija s termočlancima

## MJERNI LANAC

Mjerni lanac je folija s nizom serijski spojenih termočlanaka smještena iznad zračnog raspora između grijalice i zaštitnog prstena, tako da precizno mjeri pad temperature na rasporu i utvrđuje kolika je ujednačenost temperatura površina grijalice i zaštitnog prstena. Na ovaj se način reguliraju bočni gubitci topline [11].



Slika 22: Mjerni lanac

### 4.3 Ispitni uzorci

Ovaj uređaj za mjerenje toplinske provodnosti koristi dva uzorka osim u iznimnim slučajevima kada iz nekog razloga nije moguće pribaviti dva uzorka, nego samo jedan. U tom se slučaju umjesto drugog uzorka rabi umjereni referentni materijal poznate toplinske provodnosti i poznate ovisnosti njegove toplinske provodnosti o temperaturi.

Uzorci su kvadratičnog presjeka i moraju kondicionirani na 23 °C i 50 % ravnotežne vlage, odnosno za neke tipove materijala kao što su toplinske žbuke moraju se ispitivati u isušenom stanju. Uzorci se isušuju u ventiliranim sušionicima do stalne mase (u skladu s HRN EN ISO 12570:2002).

Najmanja debljina uzoraka koji se mogu ispitivati iznosi 20 mm, a najveća 200 mm. Površina uzorka mora biti što je moguće više glatka i ravna tako da prisno prijanja uz površine grijalice i hladila, odnosno da se izbjegne značajni utjecaj dodirnih otpora.

Duljina jedne stranice uzorka ne smije biti manja od 0,5 m i ne smije biti veća od 1 m, (unutrašnja izmjera uređaja). Najpovoljnije je kad se uzorci izrađuju tako da površina presjeka uzorka iznosi 0,81 m<sup>2</sup>.

## 4.4 Izračun toplinske provodnosti iz mjernih rezultata

Toplinska provodnost izračunava se iz (u ustaljenom stanju) prikupljenih mjernih podataka [1]:

- temperatura toplijih i hladnijih strana obaju uzorka,
- električne snage dovedene grijalici  $P = U \cdot I$ , koja se prenosi na oba uzorka
- gubitaka snage na zračnom rasporu između grijalice i zaštitnog prstena.

Ustaljenost ili ustaljeno stanje je dovoljno dugačak vremenski interval u kojem se mjerni podaci međusobno ne razlikuju (ne rasipaju se) za više od onog iznosa koji je propisan ili važećom normom ili nekim drugim dokumentom. Za ovaj slučaj to je vremenski interval u kojem se izmjerene vrijednosti toplinske provodnosti u četiri niza mjerenja (jedan niz = 60 min) ne razlikuju međusobno za više od 1 % [1]. Mjerenje se provodi u 3 mjerne točke, odnosno na 3 različite ispitne temperature. Iz ovisnosti izmjerenih toplinskih provodnosti ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) na tri različite temperature ( $\vartheta_{SR1}, \vartheta_{SR2}, \vartheta_{SR3}$ ) linearnom se regresijom izračuna toplinska provodnost ( $\lambda_{23}$ ) pri + 23 °C [3].

### 4.4.1 Proračun gubitaka snage tijekom mjerenja

Tijekom mjerenja dio energije koja se dovodi grijalici se zbog određenih gubitaka ne pretvara u toplinu koja se predaje uzorcima [12]. Analizom ovih gubitaka [13] pokazalo se da gubici koji se mogu smatrati značajnim su:

#### 1. utjecaj neizoternosti ploha grijalice i oba hladila:

$$C = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta\vartheta_A}{\Delta\vartheta}}$$

Gdje je  $\Delta\vartheta$  aritmetička sredina temperaturnog pada na oba uzorka, a  $\Delta\vartheta_A$  je pad temperature na rubovima grijalice i hladila koji prema podacima Laboratorija za građevinsku fiziku (LGF) nikad ne premašuje iznos od 0,1 K, uz pretpostavku da su obje plohe grijalice i hladila jednako dobro, odnosno loše mehanički obrađene

#### 2. bočni gubici snage na uzorcima ispod zračnog raspora:

$$P_b = \frac{8 \cdot L_S}{\pi} \cdot \ln \left[ \frac{4}{1 - e^{-\frac{\pi \cdot l_R}{d}}} \right] \cdot \lambda_{PUZ} \cdot \Delta\vartheta_{ZR}$$

Gdje su:

- duljina jedne stranice mjerne površine grijalice (od sredine jednog zračnog raspora do sredine drugog):  $L_S = 502,29 \text{ mm} \pm 1,86 \text{ mm}$  - prema podacima LGF
- širina zračnog raspora:  $l_R = 2,29 \text{ mm} \pm 0,052 \text{ mm}$  - prema podacima LGF
- izmjereni pad temperature na zračnom rasporu,  $\Delta\vartheta_{ZR}$
- procjenjena toplinska provodnost uzorka (iz tablica ili prethodnih mjerenja),  $\lambda_{PUZ}$
- izmjerena debljina uzorka,  $d$

### 3. gubitci snage u prostoru ispod zračnog raspora:

$$P_R = \frac{A_R \cdot P}{4 \cdot A_G}$$

Gdje su (prema podacima LGF):

- $A_R = 0,0046 \text{ m}^2 \pm 2,86 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$  - površina zračnog raspora, i
- $A_G = 2 \cdot 0,2523 = 0,5046 \text{ m}^2 \pm 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  - površina obje strane grijalice.

Zbroj gubitaka toplinskog toka tijekom mjerenja iznosi:

$$\sum P_i = P_b + P_R + \frac{P}{C} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

#### 4.4.2 Toplinska provodnost pri nekoj ispitnoj temperaturi

Prema (4.2) slijedi:

$$\lambda = \frac{d \cdot \dot{q}_x}{\Delta \vartheta}$$

Gdje su:

- aritmetička sredina izmjerenih debljina gornjeg i donjeg uzorka:  $d = \frac{\bar{d}_G + \bar{d}_D}{2}$

- pad temperature na oba uzorka:  $\Delta \vartheta = \frac{(\bar{\vartheta}_{TG} - \bar{\vartheta}_{HG}) + (\bar{\vartheta}_{TD} - \bar{\vartheta}_{HD})}{2}$

- temperatura toplije strane gornjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{TG}$

- temperatura hladnije strane gornjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{HG}$

- temperatura toplije strane donjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{TD}$

- temperatura hladnije strane donjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{HD}$

\* Indeksi G i D označavaju gornji, odnosno donji uzorak, a indeksi T i H označavaju topliju, odnosno hladniju stranu uzorka.

- gustoća toplinskog toka kroz oba uzorka:  $\dot{q}_x = \frac{\dot{Q}_x}{A_G}$

- ploština obje strane grijalice:  $A_G = 0,5 \text{ m}^2$

- toplinski tok koji se u jedinici vremena predaje uzorcima:  $\dot{Q}_x = P - \sum P_i$

- snaga dovedena grijalici:  $P = U \cdot I$

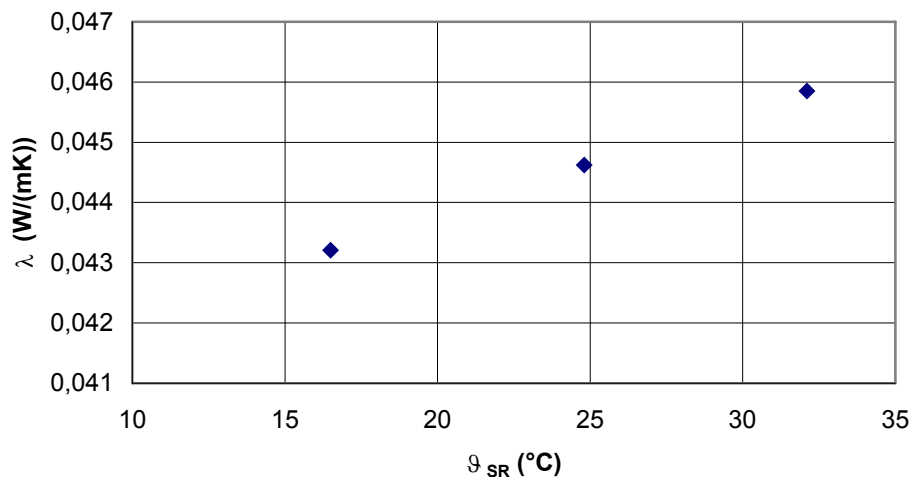
- zbroj gubitaka toplinskog toka tijekom mjerenja (4.3):  $\sum P_i = P_b + P_R + \frac{P}{C}$

Dakle, kada se navedeno uvrsti, izraz za toplinsku provodnost glasi:

$$\lambda = \frac{d \cdot \left( P - P_b - P_R - \frac{P}{C} \right)}{A_G \cdot \Delta \vartheta}$$

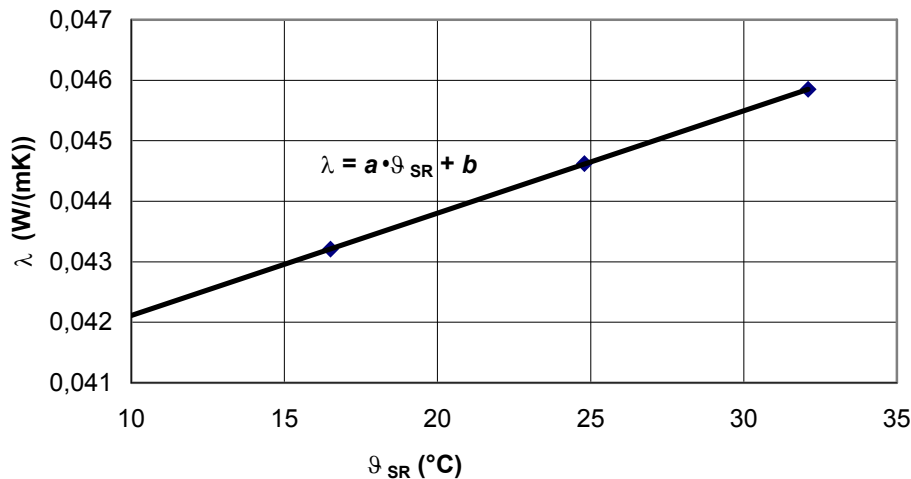
#### 4.4.3 Toplinska provodnost pri + 23°C ( $\lambda_{23}$ )

Kada se izračunaju sve tri vrijednosti toplinskih provodnosti na tri različite temperature, kako je opisano točkom 4.4.2, ovisnost  $\lambda / \vartheta_{SR}$  prikaže se grafički.



Slika 23: Grafički prikaz mjernih rezultata

Sljedeći je korak aproksimirati ove tri mjerne točke s pravcem regresije (metoda najmanjih kvadrata) i jednadžbom ovog pravca ( $\lambda = a \cdot \vartheta_{SR} + b$ ) prikazati ovisnost toplinske provodnosti o ispitnoj temperaturi.



Slika 24: Pravac regresije

I na kraju se iz jednadžbe pravca, za  $\vartheta_{SR} = 23$  °C, izračuna:

$$\lambda_{23} = a \cdot 23 + b \quad \dots\dots\dots (4.4)$$



## 5 PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI

Krajnji proizvod mjerenja je mjerni rezultat. Da bi mjerni rezultat bio uporabiv i usporediv s drugim mjernim rezultatima, on mora iskazivati kolika su mu odstupanja, odnosno mora se procijeniti kolika je mjerna nesigurnost mjernog rezultata u odnosu na idealnu, nikad postignutu "pravu" vrijednost mjerene fizikalne veličine.

Također, kad se uspoređuju mjerni rezultati istih mjernih veličina s istom mjernom opremom koje je izveo isti mjeritelj u istom laboratoriju, vidi se da između njih postoje razlike. Ove razlike su nepredvidive i upućuju na uporabu teorije vjerojatnosti pri obradi mjernih rezultata.

Način iskazivanja mjernog rezultata jest:

*mjerni rezultat = najbolja procjena mjerne veličine + mjerna nesigurnost*

Mjerna veličina je [14] *posebna veličina koja se mjeri*. Mjerna veličina je približno jednaka definiranoj odnosno stvarnoj mjernoj vrijednosti. Ova razlika između "prave" i "slučajne" mjerne veličine također je sastavni dio nesigurnosti mjernog rezultata koji je također "slučajna", a ne "prava" veličina.

Odgovor na pitanje zašto se ne iskazuje pogreška mjerenja ili točnost, leži u činjenici da i kad se definiraju i izračunaju svi uzročnici (slučajni i sustavni) mjerne pogreške, još uvijek postoji sumnja, odnosno nesigurnost koliko je takav mjerni rezultat blizu idealnoj, odnosno "pravoj" vrijednosti mjerne veličine. Definicija mjerne nesigurnosti [14] glasi: "Mjerna nesigurnost je parametar koji je pridružen mjernom rezultatu i kojim se obilježava rasipanje rezultata koji se može pridružiti mjernoj veličini."

Idealna ("prava") vrijednost mjerene veličine ne može se izravno izmjeriti. Svaka vrijednost mjerene veličine dio je populacije koja ima određenu matematičku očekivanost ( $m$ ) "prave" vrijednosti mjerene veličine i najmanje očekivano odstupanje od te vrijednosti (standardnu devijaciju -  $\sigma$ ). Najmanje očekivano kvadratno odstupanje naziva se varijanca ( $\sigma^2$ ).

Prema [14] sljedi:

$$p(Y_j) = \int_{Y_j+\Delta Y}^{Y_j-\Delta Y} \varphi(Y) dY$$

gdje je :

$Y_i$  ..... mjerna veličina,

$p(Y_j)$  ..... vjerojatnost da je mjerni rezultat jednak "pravoj" vrijednosti mjerene veličine s razlučivosti (rezolucijom) od  $\Delta Y$ ,

$\varphi(Y)$  ..... funkcija gustoće vjerojatnosti mogućih mjernih rezultata s parametrima  $m$  i  $\sigma$ .

Dobro poznavanje postupka mjerenja u praksi značilo bi znati procijeniti vrijednosti od  $m$  i  $\sigma$  i znati odrediti matematički oblik funkcije gustoće vjerojatnosti  $\varphi(Y)$  (npr. normalnu ili Studentova razdioba).

U mnogo se slučajeva izlazna veličina ( $Y$ ) ne mjeri izravno, nego se određuje iz drugih izravno mjerenih veličina (ulazne veličine) -  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N$ .

$$Y = f(X_i)$$

Procjena izravno mjerene (ulazne) veličine ( $X$ ) se označava s  $x$  i može se odrediti za svaku ulaznu veličinu ( $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N$ ) što daje:  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ .

Najbolju procjenu očekivane vrijednosti ( $m$ ) dobivenu iz većeg broja neovisnih mjerenja ( $n$  ponovljenih opažanja slučajne varijable  $X_i$ ) daje aritmetička sredina:

$$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k}$$

Algebarska suma odstupanja pojedinih mjernih rezultata od aritmetičke sredine jednaka je nuli.

Procjena izlazne veličine ( $Y$ ) se označava s  $y$  i dobiva se iz procjena ulaznih veličina ( $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ )

$$y = f(x_i)$$

Dakle, procjena izlazne veličine najčešće se sastoji od više procjena izravno mjerenih (ulaznih) veličina koje povezuju određeni fizikalni zakoni kojima su definirani njihovi međusobni odnosi i koji se mogu matematički predočiti funkcijom  $f$ .

Standardna devijacija procijenjene izlazne veličine (rezultata) naziva se sastavljena standardna mjerna nesigurnost i označava s  $u_c(y)$ , a standardna devijacija procijenjene ulazne veličine naziva se standardna mjerna nesigurnost i označava se  $u(x_i)$ .

## 5.1 Metode procjene standardne mjerne nesigurnosti

Standardna mjerna nesigurnost,  $u(x_i)$  procijenjuje se na dva načina [14].

Prvi je način procjena koja se temelji na statističkoj procjeni rezultata (analizi ponovljenih mjerenja – izravno mjerenih veličina) i zove se "Procjena standardne mjerne nesigurnosti vrste A". Ovdje je mjera nesigurnosti standardna devijacija aritmetičke sredine.

Drugi je način procjena koja se ne temelji na ponovljenim mjerenjima, nego na iskustvu, prije izmjerenim podacima, raznim uputama, podacima iz umjernica i slično, i zove se "Procjena standardne mjerne nesigurnosti vrste B". Ova procjena postupa s nestatistički procijenjenim standardnim devijacijama jednako kao s onima koje su procijenjene na statistički način.

### 5.1.1 Procjena standardne mjerne nesigurnosti vrste A

Ako je mjerni postupak moguće organizirati tako da je broj ponovljenih mjerenja jedne te iste ulazne veličine velik ( $n > 30$ ), onda se može tvrditi da se radi o normalnoj razdiobi s  $\eta = (n - 1)$  stupnjeva slobode i nije nužno računati stvarni broj stupnjeva slobode. Ako je broj ponovljenih mjerenja mali i/ili ako razdioba nije poznata, a radi se o razdiobi aritmetičkih sredina, tada se može rabiti Studentova razdioba. Po definiciji Studentova se razdioba za veliki broj ponovljenih pokusa približava normalnoj.

Središnji granični teorem:

*Ako se izlazna veličina sastoji od više ulaznih veličina koje se opisuju normalnim razdiobama, konačna, konvolucijom dobivena razdioba, bit će također normalna. Čak i ako razdiobe ulaznih veličina nisu normalne, razdioba izlazne veličine može se približno opisati normalnom.*

Iz ovog središnjeg graničnog teorema može se izvesti zaključak da razdioba *aritmetičkih* sredina uzoraka vrlo brzo teži k normalnoj, neovisno o razdiobi varijabli u osnovnom skupu, ako veličina uzorka teži k beskonačnom.

Za broj uzoraka koji je veći od 30, praktički ne postoje razlike između normalne i Studentove razdiobe.

Najbolja procjena varijance ( $\sigma^2$ ) i-te ulazne veličine ( $X_i$ ) koja se dobiva iz  $n$  ponovljenih mjerenja ( $k=1,2,\dots,n$ ), naziva se procijenjena varijanica,  $s^2(X_i)$ :

$$s^2(X_i) = \frac{\sum_{k=1}^n (X_{i,k} - \bar{X}_i)^2}{n-1}$$

čiji se pozitivni drugi korijen naziva procijenjena standardna devijacija,  $s(X_i)$ :

$$s(X_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (X_{i,k} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

Potonji izraz opisuje rasipanja izmjerenih vrijednosti ( $X_{i,k}$ ) oko aritmetičke sredine  $\bar{X}_i$ .

Ako se za ulaznu veličinu postavi procjena ulazne veličine ( $x_i$ ), odnosno aritmetička sredina, onda će s obzirom na središnji granični teorem razdioba težiti k normalnoj.

Dakle, ako se umjesto  $X_{i,k}$  uvrsti  $x_i$  (odnosno  $\bar{X}_i$ ), može se reći da  $s^2(\bar{X}_i)$  predstavlja procijenjenu varijancu aritmetičke sredine ulazne veličine, koja se računa:

$$s^2(\bar{X}_i) = \frac{s^2(X_i)}{n}$$

Što znači da je razdioba na aritmetičkoj sredini,  $n$  - puta uža od one na ulaznoj veličini.

I analogno, procijenjena standardna devijacija aritmetičke sredine, naziva se standardna pogreška, i glasi:

$$s(\bar{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}}$$

U skladu s [14] standardna mjerna nesigurnost ulazne veličine se označava s  $u(x_i)$ , i glasi:

$$u(x_i) = s(\bar{X}_i)$$

### 5.1.2 Procjena standardne mjerne nesigurnosti vrste B

Kada se procjena očekivane vrijednosti ( $m$ ) ne određuje iz ponovljenih mjerenja, standardna mjerna nesigurnost,  $u(x_i)$ , procjenjuje se temeljem svih raspoloživih podataka o mjerenoj veličini. Ovakav postupak procjene standardne mjerne nesigurnosti zahtjeva znanje i iskustvo mjeritelja.

Standardna mjerna nesigurnost vrste B može se procijeniti na jednako dobar način i u skladu sa statističkim zakonitostima kao i nesigurnost vrste A, ako se posjeduje dovoljno mjeriteljskog iskustva i znanja o mjernom procesu kojemu se mjerna nesigurnost procjenjuje.

Sve procijenjene ulazne veličine ( $x_i$ ) koje se ne podvrgavaju višekratnim mjerenjima (vrsta B) mogu se također opisati određenom vjerojatnosnom razdiobom i svaka se vjerojatnosna razdioba može obilježiti standardnom devijacijom koja se pak može rabiti kao mjerna nesigurnost određene ulazne veličine.

Procjena standardne mjerne nesigurnosti vrste B odvija se prema sljedećem algoritmu:

- 1. korak:** pretpostaviti promjenu ulazne veličine (najveću ili najvjerojatniju)
- 2. korak:** pretpostavljenoj promjeni pridjeliti vjerojatnosnu razdiobu
- 3. korak:** za pridjeljenu razdiobu izračunati standardnu devijaciju
- 4. korak:** izjednačiti ovu standardnu devijaciju s procjenom mjerne nesigurnosti i pridružiti ga procijenjenoj vrijednosti ulazne veličine.

U 2. koraku odabire se razdioba. Parametri koji se trebaju uzeti u obzir pri odabiru razdiobe su:

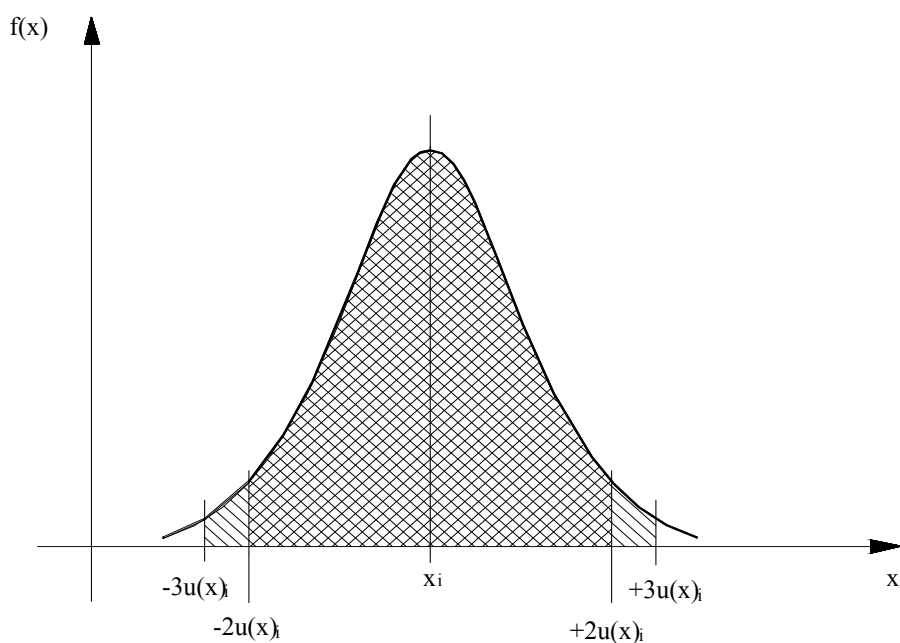
- prijašnji mjerni podaci,
- proizvođačeve specifikacije (mjerila i opreme),
- podaci iz umjernica i izvještaja o umjeravanju, i sl.

Pri procjeni standardne mjerne nesigurnosti vrste B najčešće se pojavljuju sljedeće razdiobe:

- normalna razdioba
- pravokutna razdioba

## NORMALNA RAZDIoba

Procijenjene ulazne veličine ( $x_i$ ) (uz vjerodostojnost od 99 %) rasipaju se u rasponu od  $\pm 3 \cdot u(x_i)$ , a uz vjerodostojnost od 95 % rasipaju se u rasponu od  $\pm 2 \cdot u(x_i)$ .

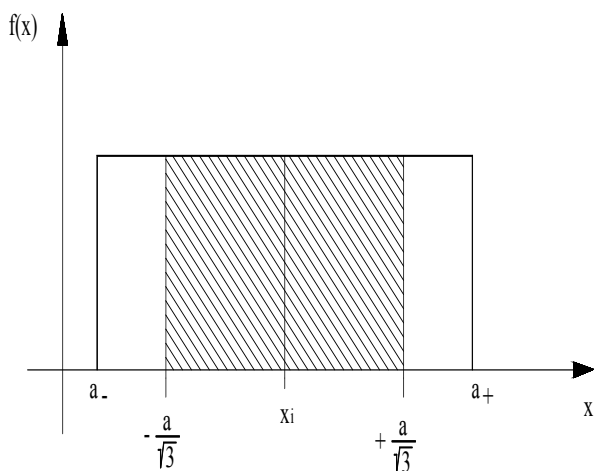


**Slika 25:** normalna razdioba

$u(x_i)$  se dobiva tako da se najveća vrijednost podijeli s 2 (u slučaju 95 %-tne vjerodostojnosti).

## PRAVOKUTNA RAZDIOBA

Standardna mjerna nesigurnost dobiva se tako da se najveća (ili najvjerojatnija) vrijednost procijenjene ulazne veličine ( $a$ ) podijeli s  $\sqrt{3}$ .



Slika 26: Pravokutna razdioba

Može se pretpostaviti da se sve izmjerene vrijednosti nalaze u intervalu ( $a_-$ ,  $a_+$ ). Ako vrijedi da je vjerojatnost da se izmjerena vrijednost nalazi unutar tog intervala jednaka za sve izmjerene vrijednosti, to je onda pravokutna razdioba:

$$x_i = \frac{1}{2}(a_- + a_+)$$

$$u(x_i) = \sqrt{\frac{1}{12}(a_+ - a_-)^2}$$

Razdioba koja ima diskontinuitete na graničnim točkama (nesimetričnost) iznimno je rijetka, tako da se može pisati:  $(a_+ - a_-) = 2a$  i tada vrijedi:

$$u(x_i) = \frac{1}{\sqrt{3}}a$$

## 5.2 Procjena sastavljene standardne mjerne mjerne nesigurnosti

Već je prije rečeno da je sastavljena standardna mjerna nesigurnost jednaka procijeni standardne devijacije procijenjene izlazne veličine i da se označava s  $u_c(y)$ .

Također, rečeno je i da se procijenjena izlazna veličina sastoji od više procijenjenih ulaznih veličina i da ih povezuju određeni fizikalni zakoni kojima su definirani njihovi međusobni odnosi i koji se mogu matematički predočiti funkcijom  $f$ .

Odnosi između ulaznih (izravno mjerenih) veličina mogu biti takvi da one međusobno ovise jedna o drugoj (korelirane ulazne veličine) tako da promjena jedne ulazne veličine utječe na promjenu ostalih. Također, ovi odnosi mogu biti takvi da su ulazne veličine potpuno neovisne jedna o drugoj (nekorelirane ulazne veličine) što znači da ako se jedna ulazna veličina mijenja to nema nikakvog utjecaja na ostale.

### 5.2.1 Nekorelirane ulazne veličine

Sastavljena standardna mjerna nesigurnost nekoreliranih procijenjenih ulaznih veličina je pozitivni drugi korijen potpunog diferencijala funkcije koja proizlazi iz fizikalnih zakonitosti i koja određuje međusobne odnose procijenjenih ulaznih veličina i računa se:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

gdje je:

$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  ..... parcijalna derivacija funkcije  $f$  naziva se još i koeficijent osjetljivosti ( $c_i$ ).

Koeficijent osjetljivosti opisuje kako se procjena izlazne veličine mijenja s promjenom određene ulazne veličine ( $x_i$ ).

### 5.2.2 Korelirane ulazne veličine

Koliko jedna procijenjena ulazna veličina ( $x_i$ ) ovisi o drugoj ( $x_j$ ), određuje koeficijent korelacije,  $r$ :

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)}$$

Gdje su:

$x_i, x_j$  ..... procjene ulaznih veličina  $X_i, X_j$

$u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$  ..... procijenjena kovarijanca pridružena  $x_i$  i  $x_j$

$u(x_i), u(x_j)$  ..... procijenjene standardne devijacije od  $x_i$  i  $x_j$

Za koeficijent korelacije vrijedi:

$$r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i) \quad \text{i} \quad -1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$$

Sastavljena standardna mjerna nesigurnost koreliranih procijenjenih ulaznih veličina je pozitivni drugi korijen sastavljene varijance koreliranih procijenjenih ulaznih veličina koja glasi:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j)$$

Ako se u gornju jednadžbu uvrsti  $r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)}$ , dobiva se:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)$$

Iz gornjeg se izraza vidi da je za  $r(x_i, x_j) = 0$  stupanj korelacije jednak ničiti, odnosno ne postoji međusobna ovisnost ovih procijenjenih ulaznih veličina što znači da su one nekorelirane procijenjene ulazne veličine.

Gornja jednadžba primjenjuje se pri procjeni standardne mjerne nesigurnosti vrste B. Za slučaj procjene standardne mjerne nesigurnosti vrste A, gdje se svaka procijenjena ulazna veličina dobiva kao aritmetička sredina:

$$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k}, \text{ i analogno:}$$

$$x_j = \bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{j,k}, \text{ sastavljena varijanca koreliranih procijenjenih ulaznih veličina glasi:}$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i, x_j),$$

Gdje je:

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{k=1}^n (X_{i,k} - x_i) \cdot (X_{j,k} - x_j)$$

Odnosno, budući da vrijedi (vidi 5.1.1) da je  $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ , gornji se izraz može pisati:

$$s(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{k=1}^n (X_{i,k} - \bar{X}_i) \cdot (X_{j,k} - \bar{X}_j)$$



## 5.3 Određivanje proširene mjerne nesigurnosti

Sastavljena standardna mjerna nesigurnost ( $u_c$ ) iskazuje se u obliku standardnih devijacija i obveza je iskazivati ju kako u ispitnim tako i u umjernim laboratorijima [15]. Također, nužno je iskazivati je i u međulaboratorijskim usporedbama.

Često je nužno iskazati i proširenu mjernu nesigurnost ( $U$ ) koja se koristi kad je potrebno iskazati mjernu nesigurnost koja obuhvaća široki raspon vjerojatnosne razdiobe, a koju obilježavaju mjerni rezultati i sastavljena standardna mjerna nesigurnost:

$$U = k \cdot u_c(y)$$

gdje je:

$k$  ..... faktor pokrivanja

Dakle, proširena mjerna nesigurnost dodatna je mjera nesigurnosti koja određuje interval oko mjernog rezultata za koji se može očekivati da obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti koje se razumno mogu pridružiti mjernoj veličini.

Mjerni se rezultat tada izražava:

$$Y = y \pm U$$

Što znači da je  $y$  najbolja procjena vrijednosti koja se može pripisati mjerenoj veličini  $Y$ , dok je  $(y - U ; y + U)$  interval za koji se očekuje da obuhvaća onoliko veliki dio razdiobe vrijednosti koje se razumno mogu pripisati veličini  $Y$ .

Ako su sve sastavnice sastavljene standardne mjerne nesigurnosti  $u_c(y)$  dobivene proračunima vrste  $A$ , onda se ovaj interval zove *interval povjerenja*, dok se *razinom povjerenja* naziva onaj (veliki) dio razdiobe vrijednosti koje se razumno mogu pripisati veličini  $Y$ .

Kolika je razina povjerenja, određuje se pomoću faktora pokrivanja ( $k$ ). Primjerice, kod normalne razdiobe, za razine povjerenja od 95 % ili 99 %, faktor pokrivanja iznosi 2, odnosno 3. Odavde proizlazi da je za ispravan odabir faktora pokrivanja (razine povjerenja) nužno znati o kojoj je razdiobi riječ. Zapravo, proširena se nesigurnost ne može iskazati ako se dobro ne poznaje razdioba vrijednosti.

Problemi nastaju kada razdiobe ulaznih veličina nisu poznate ili nisu normalne. U ovom se slučaju razdioba vjerojatnosti izlazne veličine može dobiti složenim postupkom tvorbe konvolucije razdioba vjerojatnosti. Međutim, pojednostavljenje je ipak moguće primjenjujući središnji granični teorem. Jedna od značajki središnjeg graničnog teorema je da pokazuje da konvolucijom dobivena razdioba teži k normalnoj kada broj ulaznih veličina raste.

Što to znači u mjeriteljskoj praksi? Iako nije poznata razdioba, ali su u sastavljenoj nesigurnosti dominantne one sastavnice dobivene proračunom vrste A iz više ponovljenih opažanja, proračun proširene mjerne nesigurnosti može se približno provesti uz faktor pokrivanja i razine povjerenja (koji se u mjeriteljstvu najčešće rabe, a koji proizlaze iz normalne razdiobe) kako je prikazano sljedećom tablicom:

Razina povjerenja (%)	Faktor pokrivanja
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

**Tablica 2:** Faktor pokrivanja ( $k$ ) za odgovarajuću razinu povjerenja

S mjeriteljskog stanovišta ovakvo je približenje dovoljno. Međutim, bitno je još naglasiti da se uz ovako izabrani faktor pokrivanja mora navesti i broj stupnjeva slobode ( $\eta$ ). Kad su sastavnice mjerne nesigurnosti dobivene proračunom vrste A, stupnjevi slobode određuju se na jedan od sljedećih načina:

- za pojedinu ulaznu veličinu procijenjenu pomoću aritmetičke sredine od  $n$  neovisnih opažanja, broj stupnjeva slobode iznosi:  $\eta = (n - 1)$ ,
- ako se rezultat iskazuje pomoću linearne regresije gdje se nagib i odsječak pravca određuju metodom najmanjeg kvadrata od  $n$  neovisnih opažanja, broj stupnjeva slobode je:  $\eta = (n - 2)$ ,
- ako se  $m$  parametara prilagođava podacima koji su prikazani s  $n$  točaka metodom najmanjih kvadrata, broj stupnjeva slobode iznosi:  $\eta = (n - m)$ ,

Ostaje, međutim, nejasno što onda kada razdioba nije poznata, a sastavnice mjerne nesigurnosti nisu dobivene proračunom vrste A, ili jesu, ali temeljem samo nekoliko opažanja? U tom se slučaju može rabiti Studentova razdioba ( $t$  – razdioba) na sljedeći način:

**0. korak:** uočiti da se mjerna nesigurnost izlazne veličine sastoji od 2 ili više sastavnica,

**1. korak:** razdioba izlazne veličine može se smatrati Studentovom razdiobom,

**2. korak:** za Studentovu se razdiobu može izračunati stvarni broj stupnjeva slobode ( $\eta$ ) pomoću Welch – Satterthwaiteove formule [14]:

$$\eta = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^n \frac{u_i^4(y)}{\eta_i}}$$

gdje su:

$n$  ..... broj sastavnica mjerne nesigurnosti,

$\eta_i$  ..... broj stupnjeva slobode  $i$ -te sastavnice mjerne nesigurnosti,

$u_i(y)$  ..... standardna mjerna nesigurnost  $i$ -te sastavnice.

**3. korak:** za ovako izračunati broj stupnjeva slobode, za odabranu se "razinu povjerenja" <sup>(4)</sup> iz statističkih tablica očita faktor Studentove razdiobe ( $t$ ).

**4. korak:** sada se proširena mjerna nesigurnost može pisati kao:

$$U = k \cdot u_c(y) = t \cdot u_c(y)$$

## 5.4 Iskazivanje mjerne nesigurnosti

Postoji četiri načina kako se mjerni rezultat i pridružena mu mjerna nesigurnost iskazuju. Međutim, u mjeriteljskoj praksi najčešća su dva načina, ovisno da li se uz mjerni rezultat daje sastavljena standardna ili proširena mjerna nesigurnost.

**1. način:** kada se uz mjerni rezultat iskazuje sastavljena standardna mjerna nesigurnost,  $u_c(y)$

Primjer:

$\lambda = 0,0336 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  sa sastavljenom standardnom mjernom nesigurnošću  $u_c = 0,000122 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$

**2. način:** kada se uz mjerni rezultat iskazuje proširena mjerna nesigurnost,  $U = k \cdot u_c(y)$

Primjer:

$\lambda = (0,0336 \pm 0,000244) \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , gdje je  $U = 0,000244 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$  proširena mjerna nesigurnost dobivena umnoškom sastavljene standardne mjerne nesigurnosti ( $u_c = 0,000122 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ) i faktora pokrivanja ( $k = 2$ ), temeljem normalne razdiobe s  $\eta = 39$  stupnjeva slobode uz razinu povjerenja (vjerodostojnost) od 95 %.

---

<sup>(4)</sup> Izraz razina povjerenja je u navodnim znacima, jer se on može rabiti onda kad su sastavnice nesigurnosti dobivene proračunom vrste A. Budući da to ovdje nije slučaj, ispravno bi bilo reći vjerojatnost pokrivanja.

## 6 PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI ODREĐIVANJA TOPLINSKE PROVODNOSTI DINAMIČKOM METODOM

Tijekom mjerenja toplinske provodnosti metodom vruće žice, izravno se mjere sljedeće veličine:

- napon platinske žice,  $U_{Pt}$
- jakost struje koja prolazi žicom,  $I_{Pt}$
- vrijeme,  $t$
- duljina platinske žice (određena spojištima Pt žice s pocinčanim bakrenim žicama),  $L$

Nadalje, proizvođač platinske žice iskazao je sljedeće:

- promjeri žica,  $d_{Pt}$

$$d_{Pt} = 0,01778 \cdot 10^{-3} \text{ m} \pm 0,01778 \cdot 10^{-6} \text{ m} \dots\dots\dots \text{tanja žica}$$

$$d_{Pt} = 0,02540 \cdot 10^{-3} \text{ m} \pm 0,02540 \cdot 10^{-6} \text{ m} \dots\dots\dots \text{deblja žica}$$

- linearizirani temperaturni koeficijent električnog otpora platine od 0 °C do 100 °C,  $\alpha$

$$\alpha = 0,003926 \frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ\text{C}} \pm 0,000002 \frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ\text{C}}$$

- električni otpor platine po jedinici duljine  $L$  za promjer  $d_{Pt}$  pri 0 °C,  $R'_0$

$$\text{za tanju žicu } (d_{Pt} = 0,01778 \text{ mm}): \quad R'_0 = 402,820 \ \Omega/\text{m} \pm 98,5 \cdot 10^{-9} \ \Omega/\text{m}$$

$$\text{za deblju žicu } (d_{Pt} = 0,02540 \text{ mm}): \quad R'_0 = 197,408 \ \Omega/\text{m} \pm 98,5 \cdot 10^{-9} \ \Omega/\text{m}$$

$$\text{Gdje je:} \quad R_0 = L \cdot R'_0$$

Također, iz zadnjeg umjeravanja univerzalnog mjernog instrumenta mjerna nesigurnost iznosi:

- proširena mjerna nesigurnost pri mjerenju istosmjernog napona u području do 10 V:

$$U_V = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

- proširena mjerna nesigurnost pri mjerenju jakosti struje u području do 10 mA:

$$U_A = 3,7 \cdot 10^{-7} \text{ A}$$

Glavne sastavnice mjerne nesigurnosti:

- mjerna nesigurnost izmjerene duljine Pt žice,  $u_L$
- mjerna nesigurnost izmjerenog vremena,  $u_t$
- mjerna nesigurnost snage Pt žice,  $u_P$  - sastoji se od mjernih nesigurnosti izmjerenih veličina napona i električne struje.
- mjerna nesigurnost temperature Pt žice,  $u_\theta$  - sastoji se od mjernih nesigurnosti izmjerenih veličina napona i električne struje. Također, u sebi sadrži i pogrešku metode najmanjih kvadrata (izračuna nagiba regresijskog pravca,  $a$ ).

## 6.1 Mjerna nesigurnost duljine platinske žice

Kako je opisano točkom 3.1 promjena temperature s vremenom mjeri se tako da se na žici od platine, između dvije točke međusobno udaljene  $L$  (m), kontinuirano mjeri promjena električnog napona. Ova udaljenost ( $L$ ) mjeri se i utvrđuje pomoću umjerenog pomičnog mjerila čija proširena mjerna nesigurnost iznosi:  $U_R = 0,000015$  m. Odnosno, za normalnu razdiobu uz razinu povjerenja od 95 % (podatak iz umjernice), sastavljena mjerna nesigurnost pomičnog mjerila glasi:

$$u_R = \frac{U_R}{2} = \frac{0,000015}{2} = 75 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Budući da se duljina žice od platine ( $L$ ) mjeri pet puta, njena aritmetička sredina iznosi:

$$\bar{L} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 L_i$$

I također, standardna mjerna nesigurnost:

$$s^2(L) = \frac{\sum_{i=1}^n [L_i - \bar{L}]^2}{20}$$

Sastavljena mjerna nesigurnost duljine Pt žice iznosi:

$$u_L = \sqrt{u_R^2 + s^2(L)} \quad \dots\dots\dots (6.1)$$

## 6.2 Mjerna nesigurnost vremena

Budući da je promjena temperature Pt žice ovisna o promjeni njezinog električnog otpora, mjereći napon i jakost struje na žici, slijedom Ohmovog zakona i jednadžbe (2.1) ova se promjena može mjeriti i bilježiti u nekom vremenu.

Na platinskoj žici kojoj se kontinuirano dovodi energija, dolazi do porasta temperature s vremenom. Promjena temperature mjeri se tako da se pomoću dva mjerna instrumenta istodobno mjeri istosmjerni napon (DCV) i jakost struje (DCI). Neobično je važno ovu dinamičku pojavu pratiti u vremenu što je moguće bliže stvarnom, odnosno pokušati izmjeriti nastalu promjenu upravo onda kako se ona i dogodi.

Mjerni instrumenti s kojima se promjena napona i jakosti električne struje mjeri i bilježi imaju svoju iskazanu vremensku mjernu karakteristiku. U tehničkim podacima multimetra, proizvođača "Keithley", model: 2000, piše da ukupno vrijeme potrebno da instrument izmjeri mjernu veličinu (u području DCV / DCI) iznosi 0,1 NPLC ukoliko je vrijednost parametra brzine postavljen na vrijednost: "FAST". Što to zapravo znači ?

Brzina mjerenja može se postaviti na sljedeće vrijednosti: "FAST", "MEDIUM" i "SLOW". Izbor jedne od ovih brzina predstavlja kompromis između kvalitete mjernog signala (koliko šum utječe na izmjerenu veličinu) i potrebne brzine mjerenja. Budući da je ovaj mjerni postupak izrazito dinamičan i s obzirom da multimeter model 2000 spada u red visoko preciznih i softiciranih mjernih instrumenata (slab utjecaj šuma), izbor je pao na područje brzine rada "FAST".

Nadalje, vrijeme potrebno da se izmjeri neka mjerna veličina najviše ovisi o vremenu koje troši A/D pretvornik za pretvorbu analogne izmjerene veličine u digitalni signal. Ovo vrijeme određuje se pomoću parametra NPLC (Number of Power Line Cycles) - broj ciklusa napajanja iz mreže - koji prema specifikaciji proizvođača mjernog instrumenta, za mrežu frekvencije 50 Hz iznosi  $20 \cdot 10^{-3}$  s, odnosno 20 milisekundi (msec). Dakle, ako je brzina mjerenja u području "FAST" (NPLC = 0,1) i ako je sustav napajan električnom energijom iz mreže frekvencije 50 Hz ( $20 \cdot 10^{-3}$  s), vrijeme jednog mjerenja iznosi:

$$t_m = 0,1 \cdot 20 \text{ msec} = 2 \text{ msec} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Može se reći da je pravodobnost prepoznavanja (mjerenja) nastale promjene napona i jakosti električne struje na platinskoj žici, unutar vremena  $t_m = 2 \text{ msec}$ , odnosno unutar intervala  $\pm 1 \text{ msec}$ , i to u cijelom području mjerenja napona (DCV) i jakosti struje (DCI). Budući da se radi o pravokutnoj razdiobi, mjerna nesigurnost mjerenja vremena iznosi:

$$u_t = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 0,0012 \text{ s} \dots\dots\dots (6.2)$$

### 6.3 Mjerna nesigurnost snage

Snaga dovedena platinskoj žici računa se prema izrazu (2.19):

$$P_i = U_{Pt}(t)_i \cdot I_{Pt}(t)_i$$

Odnosno, za odabrani interval  $(t_1, t_2)$ :

$$\bar{P} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_i$$

Gdje je:  $n$  = broj zapisa unutar intervala  $(t_1, t_2)$

U skladu s [14] slijedi:

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U_{Pt}(t)} \cdot u_V\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I_{Pt}(t)} \cdot u_A\right)^2}$$

Odnosno, nakon sređivanja:

$$u(P) = \sqrt{(\bar{I}_{Pt}(t) \cdot u_V)^2 + (\bar{U}_{Pt}(t) \cdot u_A)^2}$$

*Ove dvije veličine  $[\bar{U}_{Pt}(t), \bar{I}_{Pt}(t)]$  međusobno ne koreliraju jer se svaka od njih mjeri vlastitim mjernim instrumentom.*

Gdje su:

$$\bar{U}_{Pt}(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n U_{Pt}(t)_i$$

$$\bar{I}_{Pt}(t) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n I_{Pt}(t)_i$$

Također, slijedi:

$$s^2(P) = \frac{\sum_{i=1}^n [P_i - \bar{P}]^2}{n \cdot (n-1)}$$

I na kraju, ukupna mjerna nesigurnost snage dovedene platinskoj žici iznosi:

$$u_p = \sqrt{s^2(P) + u^2(P)} \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

## 6.4 Mjerna nesigurnost temperature

Kako je opisano u točki 2.1, temperatura se računa iz izmjerenih vrijednosti napona i električne struje, u skladu s (2.1):

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{U_{Pt}(t)}{I_{Pt}(t) \cdot R_0} - 1 \right)$$

Za ovako izračunate temperature odabire se mjerni interval  $[\ln(t_1), \ln(t_2)]$ , u skladu s točkom 2.5

U ovom se intervalu za izmjerene vrijednosti, metodom najmanjih kvadrata, izračuna pravac regresije čija jednadžba glasi:

$$\vartheta(t) = a \cdot \ln(t) + b$$

Gdje je s **a** označen nagib pravca, a s **b** odsječak na ordinati.

Na odabranom se intervalu poštujući uvjete iz točke 2.5 izračunava temperatura u vremenu  $\ln(t_1)$  i temperatura u vremenu  $\ln(t_2)$ , odnosno računa se porast temperature u tom intervalu:

$$\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1) = a \cdot \ln \frac{t_2}{t_1}$$

S obzirom na navedeno, nužno je pri procjeni mjerne nesigurnosti temperature uzeti u obzir i one sastavnice koje nastaju zbog izračuna u skladu s (2.1), kao i one sastavnice koje nastaju zbog pogreške metode najmanjih kvadrata.

Sastavnice mjerne nesigurnosti temperature su:

- mjerna nesigurnost izmjerenog napona,  $u_V$
- mjerna nesigurnost izmjerene električne struje,  $u_A$
- mjerna nesigurnost lineariziranog temperaturnog koeficijenta električnog otpora platine,  $u_\alpha$
- mjerna nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C,  $u_{R_0}$  - koji se sastoji od:
  - mjerne nesigurnosti električnog otpora platine po jedinici duljine pri 0 °C,  $u_{R'_0}$  i
  - mjerne nesigurnosti izmjerene duljine platinske žice,  $u_L$



#### 6.4.1 Mjerna nesigurnost zbog izračuna iz izmjerenih vrijednosti napona i jakosti struje

Napon na Pt žici kontinuirano se mjeri pomoću instrumenta čija proširena mjerna nesigurnost iz izvještaja o umjeravanju iznosi:

$$U_V = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

odnosno sastavljena mjerna nesigurnost za normalnu razdiobu uz razinu povjerenja od 95 % (podatak iz umjernice) glasi:

$$u_V = \frac{U_V}{2}$$

Jakost struje na Pt žici kontinuirano se mjeri pomoću instrumenta čija relativna proširena mjerna nesigurnost iz izvještaja o umjeravanju iznosi:

$$U_A = 3,7 \cdot 10^{-7} \text{ A}$$

odnosno sastavljena mjerna nesigurnost za normalnu razdiobu uz razinu povjerenja od 95 % (podatak iz umjernice) glasi:

$$u_A = \frac{U_A}{2}$$

Proizvođač platinske žice iskazao je mjernu nesigurnost lineariziranog temperaturnog koeficijenta električnog otpora platine u području temperatura od 0 °C do 100 °C:

$$u_\alpha = 0,000002 \frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ\text{C}}$$

Također, proizvođač platinske žice iskazao je mjerne nesigurnosti električnog otpora platine po jedinici duljine pri 0 °C:

$$u_{R'_0} = \frac{U_{R'_0}}{2} = \frac{98,5 \cdot 10^{-9}}{2} \text{ } \Omega/\text{m}$$

Budući da je:

$$R_0 = L \cdot R'_0$$

Gdje je proizvođač iskazao, kako je opisano točkom 2.1:

$$\text{za } d_{Pt} = 0,01778 \text{ mm} \quad R'_0 = 402,820 \text{ } \Omega/\text{m}$$

$$\text{za } d_{Pt} = 0,02540 \text{ mm} \quad R'_0 = 197,408 \text{ } \Omega/\text{m}$$

Sastavljena mjerna nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, u skladu s [14] iznosi:

$$u_{R_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_0}{\partial L} \cdot u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial R_0}{\partial R'_0} \cdot u_{R'_0}\right)^2}$$

Sređivanjem se dobiva:

$$u_{R_0} = \sqrt{(R'_0 \cdot u_L)^2 + (L \cdot u_{R'_0})^2}$$

S obzirom da se promjena temperature računa iz izmjerenih podataka prema izrazu (2.1), temperature u vremenima  $t_1$ , odnosno  $t_2$  glase:

$$\vartheta(t_i) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{U_{Pt}(t_i)}{I_{Pt}(t_i) \cdot R_0} - 1 \right) \quad i = 1,2$$

Sastavljena mjerna nesigurnost temperature Pt žice u nekom vremenu iznosi:

$$u_{\vartheta}(t_i) = \sqrt{\left( \frac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial \alpha} \cdot u_{\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial U_{Pt}(t_i)} \cdot u_V \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial I_{Pt}(t_i)} \cdot u_A \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial R_0} \cdot u_{R_0} \right)^2 + u_{apr}^2 + u_{Cu}^2} \quad \dots\dots\dots (6.4)$$

Gdje su:

$$\frac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left( 1 - \frac{U_{Pt}(t_i)}{I_{Pt}(t_i) \cdot R_0} \right) \quad i = 1,2$$

$$\frac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial U_{Pt}(t_i)} = \left( \frac{1}{\alpha \cdot I_{Pt}(t_i) \cdot R_0} \right) \quad i = 1,2$$

$$\frac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial I_{Pt}(t_i)} = \left( - \frac{U_{Pt}(t_i)}{\alpha \cdot I_{Pt}^2(t_i) \cdot R_0} \right) \quad i = 1,2$$

$$\frac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial R_0} = \left( - \frac{U_{Pt}(t_i)}{\alpha \cdot I_{Pt}(t_i) \cdot R_0^2} \right) \quad i = 1,2$$

$\alpha$  i  $R_0$  ..... dobiveni od proizvođača Pt žice

$U_{Pt}(t_i)$  i  $I_{Pt}(t_i)$  ..... izmjerene vrijednosti napona i jakosti struje u vremenu  $t_i$

$u_V, u_A, u_{\alpha}$  i  $u_{R_0}$  ..... sastavljene mjerne nesigurnosti - računaju se na prije opisani način

Budući da je na početku (točka 2.1) Callendar-van Dusenova jednadžba zamijenjena jednostavnijim izrazom, ova će aproksimacija svakako doprinijeti ukupnom povećanju mjerne nesigurnosti. Također, rečeno je da za mjerno područje od 20 °C do 60 °C njen najveći doprinos iznosi 0,12 %, što upućuje na trokutnu razdiobu:

$$u_{apr} = \frac{\vartheta(t_i)}{\sqrt{6}} \cdot \frac{0,12}{100} \quad i = 1,2$$

Također, u točki 2.1 rečeno je da će se temperatura dovodnih bakrenih žica u odnosu na temperaturu platinske žice promijeniti beznačajno malo. Koliko je to malo? Za žicu od platine promjera 0,0254 mm i duljine 0,2 m, pri temperaturi od 60 °C, električni otpor iznosi 48,8 Ω. Za istu temperaturu, električni otpor bakrene žice promjera 0,2 mm i duljine koja nije veća od 0,1 m, iznosi 0,0625 Ω, što predstavlja 0,13 % od otpora platinske žice, odnosno 0,26 % jer se radi o dvije bakrene žice.

Budući da je promjena električnog otpora proporcionalna promjeni temperature, može se reći da će se mjerna nesigurnost izmjerene temperature povećati za 0,26 %, iz čega za trokutnu razdiobu slijedi:

$$u_{Cu} = \frac{\vartheta(t_i)}{\sqrt{6}} \cdot \frac{0,26}{100} \quad i = 1,2$$

#### 6.4.2 Mjerna nesigurnost temperature zbog aproksimacije pravcem regresije

Budući da se u skladu s (2.21) temperature u vremenima  $\ln(t_1)$  i  $\ln(t_2)$  računaju metodom najmanjih kvadrata iz regresijskog pravca, u skladu s [16] mjerna nesigurnost zbog linearne regresije metodom najmanjih kvadrata svodi se na Rezidualnu <sup>(5)</sup> standardnu devijaciju i glasi:

$$s_{\vartheta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\vartheta_i - (a \cdot \ln t_i + b))^2}{(n-2)} \quad \dots\dots\dots (6.5)$$

#### 6.4.3 Mjerna nesigurnost porasta temperature

Mjerna nesigurnost porasta temperature  $[\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)]$  računa se kao sastavljena mjerna nesigurnost iz mjerne nesigurnosti zbog aproksimacije pravcem regresije i mjernih nesigurnosti zbog izračuna iz izmjerenih vrijednosti napona i jakosti struje, i glasi:

$$u_{\Delta\vartheta} = \sqrt{s_{\vartheta}^2 + u_{\vartheta}^2(t_1) + u_{\vartheta}^2(t_2)} \quad \dots\dots\dots (6.6)$$

---

<sup>(5)</sup> Rezidualna standardna devijacija izvodi se iz rezidualnih odstupanja koja predstavljaju odstupanja regresijskih od empirijskih (izmjenjenih) vrijednosti.

## 6.5 Mjerna nesigurnost toplinske provodnosti

U skladu s (2.23) toplinska provodnost izračunava se prema izrazu:

$$\lambda = \frac{P}{4 \cdot L \cdot a \cdot \pi}$$

Gdje je:

$$a = \frac{\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)}{\ln \frac{t_2}{t_1}}$$

a ..... koeficijent smjera regresijskog pravca koji se računa pomoću metode najmanjih kvadrata i čiji je doprinos ukupnoj mjernoj nesigurnosti sadržan u mjernoj nesigurnosti rasta temperature ( $u_{\Delta\vartheta}$ ), kako je opisano točkom 6.4.3.

Sastavnice mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti su:

$u_L$  ..... mjerna nesigurnost duljine platinske žice, (6.1)

$u_t$  ..... mjerna nesigurnost vremena u kojem se mjerene veličine mjere i bilježe, (6.2)

$u_P$  ..... mjerna nesigurnost snage dovedene Pt žici, računa se prema (6.3)

$u_{\Delta\vartheta}$  ..... mjerna nesigurnost porasta temperature na Pt žici, (6.6)

Sastavljena mjerna nesigurnost toplinske provodnosti iznosi:

$$u_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial L} \cdot u_L\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial P} \cdot u_P\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t_1} \cdot u_{t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t_2} \cdot u_{t_2}\right)^2 + u_{t_1}^2 \cdot r(t_1, t_2) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial \Delta\vartheta} \cdot u_{\Delta\vartheta}\right)^2} \dots\dots (6.7)$$

Gdje su:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial L} = -\frac{P}{4 \cdot L^2 \cdot [\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)] \cdot \pi} \cdot \ln \frac{t_2}{t_1}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial P} = \frac{1}{4 \cdot L \cdot [\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)] \cdot \pi} \cdot \ln \frac{t_2}{t_1}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t_1} = -\frac{P}{4 \cdot L \cdot [\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)] \cdot \pi} \cdot \frac{1}{t_1}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t_2} = \frac{P}{4 \cdot L \cdot [\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)] \cdot \pi} \cdot \frac{1}{t_2}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial \Delta\vartheta} = -\frac{P}{4 \cdot L \cdot [\vartheta(t_2) - \vartheta(t_1)]^2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{t_2}{t_1}$$

$r(t_1, t_2)$  ..... koeficijent korelacije, u skladu s točkom 5.2.2.

$r(t_1, t_2) = 1$  ..... pretp. da je korelacija najveća (najnepovoljniji slučaj)

I na kraju, proširena mjerna nesigurnost toplinske provodnosti izmjerene dinamičkom metodom, uz 95 %-tnu razinu povjerenja ( $k=2$ ), iznosi:

$$U_\lambda = 2 \cdot u_\lambda \quad \text{..... (6.8)}$$

## 7 PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI ODREĐIVANJA TOPLINSKE PROVODNOSTI STACIONARNOM METODOM

Uređaj za mjerenje toplinske provodnosti prikuplja i bilježi sljedeće podatke:

- referentnu temperaturu,  $\vartheta_{\text{ref}}$ ,
- termonapone na toplijoj strani gornjeg uzorka,  $\vartheta_{\text{TG}\mu\text{G}}^i \quad i = 1, 5$
- termonapone na hladnijoj strani gornjeg uzorka,  $\vartheta_{\text{HG}\mu\text{G}}^i \quad i = 1, 5$
- termonapone na toplijoj strani donjeg uzorka,  $\vartheta_{\text{TD}\mu\text{V}}^i \quad i = 1, 5$
- termonapone na hladnijoj strani donjeg uzorka,  $\vartheta_{\text{HD}\mu\text{D}}^i \quad i = 1, 5$
- napon grijalice,  $U$
- jakost struje koja se dovodi grijalici,  $I$
- termonapon zbog pada temperature na zračnom rasporu između grijalice i zaštitnog prstena, mjeren s termolancem,  $U_{\text{TL}}$

## SASTAVNICE MJERNE NESIGURNOSTI:

- mjerna nesigurnost debljine gornjeg uzorka,  $u_{dG}$
- mjerna nesigurnost debljine donjeg uzorka,  $u_{dD}$
- mjerna nesigurnost aritmetičke sredine debljina gornjeg i donjeg uzorka,  $u_d$
- mjerna nesigurnost referentne temperature,  $u_{\vartheta_{ref}}$
- mjerna nesigurnost temperature na toplijoj strani gornjeg uzorka,  $u_{TG}$
- mjerna nesigurnost temperature na hladnijoj strani gornjeg uzorka,  $u_{HG}$
- mjerna nesigurnost temperature na toplijoj strani donjeg uzorka,  $u_{TD}$
- mjerna nesigurnost temperature na hladnijoj strani donjeg uzorka,  $u_{HD}$
- mjerna nesigurnost temperaturnog pada na uzorcima,  $u_{\Delta\vartheta}$
- mjerna nesigurnost aritmetičke sredine ispitne temperature,  $u_{\vartheta_{SR}}$
- mjerna nesigurnost napona grijalice,  $u_U$
- mjerna nesigurnost jakosti struje koja se dovodi grijalici,  $u_I$
- mjerna nesigurnost snage koja se dovodi grijalici,  $u_P$
- mjerna nesigurnost neizoternosti ploha grijalice i oba hladila,  $u_C$
- mjerna nesigurnost temperaturnog pada na zračnom rasporu između grijalice i zaštitnog prstena,  $u_{\Delta\vartheta_{ZR}}$
- mjerna nesigurnost bočnih gubitaka snage na uzorcima ispod zračnog raspora,  $u_{Pb}$
- mjerna nesigurnost gubitaka snage u prostoru ispod zračnog raspora,  $u_{PR}$
- mjerna nesigurnost gustoće toplinskog toka,  $u_q$

## 7.1 Mjerna nesigurnost debljine uzoraka

### MJERNA NESIGURNOST DEBLJINE GORNJEG UZORKA

Debljina gornjeg uzorka mjeri se na dvanaest mjernih mjesta pomoću digitalne pomične mjerke čija se mjerna nesigurnost ( $u_{pm}$ ) dobiva iz izvještaja o umjeravanju.

Aritmetička sredina debljine gornjeg uzorka:

$$\bar{d}_G = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{12} d_G^i$$

Standardna mjerna nesigurnost izmjerene debljine gornjeg uzorka:

$$s_{dG} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_G^i - \bar{d}_G)^2}{n \cdot (n-1)}} \quad n = 12$$

U skladu s [13] mjerna nesigurnost debljine gornjeg uzorka iznosi:

$$u_{dG} = \sqrt{s_{dG}^2 + u_{pm}^2}$$

### MJERNA NESIGURNOST DEBLJINE DONJEG UZORKA

Debljina donjeg uzorka također se mjeri na dvanaest mjernih mjesta i također s digitalnom pomičnom mjerkom čija se mjerna nesigurnost ( $u_{pm}$ ) dobiva iz izvještaja o umjeravanju.

Aritmetička sredina debljine donjeg uzorka:

$$\bar{d}_D = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} d_D^i$$

Standardna mjerna nesigurnost izmjerene debljine donjeg uzorka:

$$s_{dD} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_D^i - \bar{d}_D)^2}{n \cdot (n-1)}} \quad n = 12$$

Mjerna nesigurnost debljine donjeg uzorka iznosi:

$$u_{dD} = \sqrt{s_{dD}^2 + u_{pm}^2}$$

## MJERNA NESIGURNOST ARITMETIČKE SREDINE DEBLJINA OBA UZORKA

Aritmetička sredina:

$$d = \frac{\bar{d}_G + \bar{d}_D}{2}$$

Mjerna nesigurnost: ..... (7.1)

$$u_d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{u_{dG}^2 + u_{dD}^2}$$

### 7.2 Mjerna nesigurnost referentne temperature

Referentna temperatura mjeri se na stezaljkama gdje se spajaju slobodni krajevi termočlanaka. Mjeri se pomoću Pt100 osjetila čija se mjerna nesigurnost ( $u_{Pt100}$ ) dobiva iz izvješća o umjeravanju.

Aritmetička sredina izmjerenih referentnih temperatura iznosi:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ref}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \vartheta_{\text{ref}}^j$$

Standardna mjerna nesigurnost izmjerene referentne temperature:

$$s_{\vartheta_{\text{ref}}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\vartheta_{\text{ref}}^j - \bar{\vartheta}_{\text{ref}})^2}{n \cdot (n - 1)}}$$

Gdje je  $n$  - broj zapisa unutar odabranog mjernog intervala koji zadovoljava uvjet stacionarnosti, kako je opisano u poglavlju 4.4

S obzirom da je proizvođač uređaja za mjerenje toplinske provodnosti iskazao pogrešku mjerenja napona manjom od 0,01 % od izmjerene vrijednosti (podatak LGF), može se pretpostaviti da su voltmetrom izmjerene referentne temperature (iskazane u °C) također mjerene s pogreškom od 0,01 % od izmjerenih vrijednosti temperatura.

Mjerna nesigurnost voltmetra za pravokutnu razdiobu, u skladu s [13] iznosi:

$$u_V = \frac{0,01}{100} \cdot \frac{\bar{\vartheta}_{\text{ref}}}{\sqrt{3}}$$

Mjerna nesigurnost referentne temperature iznosi:

$$u_{\vartheta_{\text{ref}}} = \sqrt{u_{Pt100}^2 + s_{\vartheta_{\text{ref}}}^2 + u_V^2}$$



### 7.3 Mjerna nesigurnost termonapona

#### MJERNA NESIGURNOST TERMONAPONA NA TOPLIJOJ STRANI GORNJEG UZORKA

Ove temperature mjere se pomoću 5 termočlanaka čija se mjerna nesigurnost ( $u_{T\check{C}}$ ) izražena u °C, dobiva iz izvještaja o umjeravanju.

Aritmetička sredina od  $j = 1, n$  izmjerenih termonapona, unutar odabranog mjernog intervala koji zadovoljava uvjet stacionarnosti, na svakom od 5 termočlanaka na toplijoj strani gornjeg uzorka, iznosi:

$$\bar{\vartheta}_{TG\mu G}^i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \vartheta_{TG\mu G}^{ij} \quad i = 1,5$$

Standardna mjerna nesigurnost izmjerenog termonapona na toplijoj strani gornjeg uzorka:

$$s_{TG\mu G}^i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\vartheta_{TG\mu G}^{ij} - \bar{\vartheta}_{TG\mu G}^i)^2}{n \cdot (n - 1)}} \quad i = 1,5$$

S obzirom da je proizvođač uređaja za mjerenje toplinske provodnosti iskazao pogrešku mjerenja napona manjom od 0,01 % od izmjerene vrijednosti, mjerna nesigurnost voltmetra iznosi:

$$u_V = \frac{0,01}{100} \cdot \frac{\bar{\vartheta}_{TG\mu G}^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1,5$$

Da bi se mjerna nesigurnost ovih 5 izmjerenih temperatura na toplijoj strani gornjeg uzorka mogla izračunati, nužno je mjernu nesigurnost termočlanka (u izvještaju o umjeravanju izraženu u °C) izraziti u  $\mu V$  dijeleći je pri tom s obuhvatnim faktorom  $k$  s kojim je ova mjerna nesigurnost i pomnožena od strane laboratorija koji je i proveo umjeravanje termočlanka. Najčešće je  $k = 2$  (za normalnu razdiobu uz vjerodostojnost od 95 %).

Proizvođač termočlanaka u deklaraciji je iskazao polinom kojim se izmjerene vrijednosti temperatura izražene u  $\mu V$  mogu preračunati u temperature izražene u °C:

$$\vartheta_{\text{°C}} = -1,265 \cdot 10^{-18} \cdot \vartheta_{\mu V}^5 + 1,358 \cdot 10^{-14} \cdot \vartheta_{\mu V}^4 - 2,402 \cdot 10^{-11} \cdot \vartheta_{\mu V}^3 - 6,250 \cdot 10^{-7} \cdot \vartheta_{\mu V}^2 + 2,585 \cdot 10^{-2} \cdot \vartheta_{\mu V} - 9,383 \cdot 10^{-3} \dots \dots \dots (7.2)$$

Inverzijom ovog polinoma postiže se da se temperature, odnosno mjerne nesigurnosti izražene u °C mogu preračunati u termonapone iskazane u  $\mu V$ :

$$\vartheta_{\mu V} = 6,732 \cdot 10^{-9} \cdot \vartheta_{\text{°C}}^5 - 1,963 \cdot 10^{-6} \cdot \vartheta_{\text{°C}}^4 + 1,935 \cdot 10^{-4} \cdot \vartheta_{\text{°C}}^3 + 3,429 \cdot 10^{-2} \cdot \vartheta_{\text{°C}}^2 + 3,870 \cdot 10^{+1} \cdot \vartheta_{\text{°C}} + 3,223 \cdot 10^{-1}$$

Odnosno za mjernu nesigurnost termočlanka:

$$u_{T\check{C}\mu} = 6,732 \cdot 10^{-9} \cdot u_{T\check{C}}^5 - 1,963 \cdot 10^{-6} \cdot u_{T\check{C}}^4 + 1,935 \cdot 10^{-4} \cdot u_{T\check{C}}^3 + 3,429 \cdot 10^{-2} \cdot u_{T\check{C}}^2 + 3,870 \cdot 10^{+1} \cdot u_{T\check{C}} + 3,223 \cdot 10^{-1}$$

Kada se na ovaj način mjerna nesigurnost termočlanaka izrazi u  $\mu\text{V}$ , moguće je izračunati mjernu nesigurnost aritmetičkih sredina ( $j = 1, n$ ) termonapona na svakom od 5 ( $i = 1, 5$ ) mjernih mjesta (termočlanaka) na toplijoj strani gornjeg uzorka iznosi:

$$u_{\text{TG}\mu\text{G}}^i = \sqrt{u_{\text{TČČ}\mu}^2 + (s_{\text{TG}\mu\text{G}}^i)^2 + u_{\text{V}}^2} \quad i = 1, 5$$

Budući da temperaturu toplije strane gornjeg uzorka određuje 5 ( $\bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}^i$ ) termonapona na svakom termočlanku na foliji, slijedi:

$$\bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}^i$$

S obzirom da se svaki od ovih 5 termonapona mjeri s istim instrumentom (voltmetar), odnosno s obzirom da promjena mjernih svojstava voltmetra značajno utječe na izmjerene termonapone, može se reći da termonaponi na foliji s toplije strane gornjeg uzorka međusobno koreliraju uz faktor korelacije:

$$r(u_{\text{TG}\mu\text{G}}^i, u_{\text{TG}\mu\text{G}}^j) = 1.$$

Nadalje, budući da je:

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}}{\partial \vartheta_{\text{TG}\mu\text{G}}^1} = \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}}{\partial \vartheta_{\text{TG}\mu\text{G}}^2} = \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}}{\partial \vartheta_{\text{TG}\mu\text{G}}^i} = \frac{1}{5},$$

Mjerna nesigurnost termonapona na toplijoj strani gornjeg uzorka glasi:

$$u_{\text{TG}\mu\text{V}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^5 (u_{\text{TG}\mu\text{G}}^i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 u_{\text{TG}\mu\text{G}}^i \cdot u_{\text{TG}\mu\text{G}}^j \cdot r(u_{\text{TG}\mu\text{G}}^i, u_{\text{TG}\mu\text{G}}^j)}$$

## MJERNA NESIGURNOST TERMONAPONA NA HLADNIJOJ STRANI GORNJEG UZORKA

Analogno gore navedenom, aritmetička sredina od 5 termonapona ( $\bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}}^i$ ) na svakom od 5 termočlanaka koji mjere temperaturno polje na hladnijoj strani gornjeg uzorka, s pripadnom mjernom nesigurnošću, iznosi:

$$\bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}}^i$$

$$u_{\text{HG}\mu\text{G}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^5 (u_{\text{HG}\mu\text{G}}^i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 u_{\text{HG}\mu\text{G}}^i \cdot u_{\text{HG}\mu\text{G}}^j \cdot r(u_{\text{HG}\mu\text{G}}^i, u_{\text{HG}\mu\text{G}}^j)}$$

Gdje su:

$$u_{\text{HG}\mu\text{G}}^i = \sqrt{u_{\text{TČČ}\mu}^2 + (s_{\text{HG}\mu\text{G}}^i)^2 + u_{\text{V}}^2} \quad i = 1,5$$

$$s_{\text{HG}\mu\text{G}}^i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\vartheta_{\text{HG}\mu\text{G}}^{ij} - \bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}}^i)^2}{n(n-1)}} \quad i = 1,5$$

$$\bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}}^i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \vartheta_{\text{HG}\mu\text{G}}^{ij} \quad i = 1,5$$

$$r(u_{\text{HG}\mu\text{G}}^i, u_{\text{HG}\mu\text{G}}^j) = 1$$

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}}}{\partial \vartheta_{\text{HG}\mu\text{G}}^1} = \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}}}{\partial \vartheta_{\text{HG}\mu\text{G}}^2} = \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}}}{\partial \vartheta_{\text{HG}\mu\text{G}}^i} = \frac{1}{5}$$

## MJERNA NESIGURNOST TERMONAPONA NA TOPLIJOJ STRANI DONJEG UZORKA

Također, aritmetička sredina od 5 termonapona ( $\bar{\mathfrak{G}}_{\text{TD}\mu\text{D}}^i$ ) na svakom od 5 termočlanaka koji mjere temperaturno polje na toplijoj strani donjeg uzorka, s pripadnom mjernom nesigurnošću, iznosi:

$$\bar{\mathfrak{G}}_{\text{TD}\mu\text{D}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \bar{\mathfrak{G}}_{\text{TD}\mu\text{D}}^i$$

$$u_{\text{TD}\mu\text{D}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^5 (u_{\text{TD}\mu\text{D}}^i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 u_{\text{TD}\mu\text{D}}^i \cdot u_{\text{TD}\mu\text{D}}^j \cdot r(u_{\text{TD}\mu\text{D}}^i, u_{\text{TD}\mu\text{D}}^j)}$$

Gdje su:

$$u_{\text{TD}\mu\text{D}}^i = \sqrt{u_{\text{TC}\check{\text{C}}\mu}^2 + (s_{\text{TD}\mu\text{D}}^i)^2 + u_{\text{V}}^2} \quad i = 1,5$$

$$s_{\text{TD}\mu\text{D}}^i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\mathfrak{g}_{\text{TD}\mu\text{D}}^{ij} - \bar{\mathfrak{G}}_{\text{TD}\mu\text{D}}^i)^2}{n(n-1)}} \quad i = 1,5$$

$$\bar{\mathfrak{G}}_{\text{TD}\mu\text{D}}^i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathfrak{g}_{\text{TD}\mu\text{D}}^{ij} \quad i = 1,5$$

$$r(u_{\text{TD}\mu\text{D}}^i, u_{\text{TD}\mu\text{D}}^j) = 1$$

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_{\text{TD}\mu\text{D}}}{\partial \mathfrak{g}_{\text{TD}\mu\text{D}}^1} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_{\text{TD}\mu\text{D}}}{\partial \mathfrak{g}_{\text{TD}\mu\text{D}}^2} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{G}}_{\text{TD}\mu\text{D}}}{\partial \mathfrak{g}_{\text{TD}\mu\text{D}}^i} = \frac{1}{5}$$

## MJERNA NESIGURNOST TERMONAPONA NA HLADNIJOJ STRANI DONJEG UZORKA

I na kraju, aritmetička sredina od 5 termonapona ( $\bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}}^i$ ) na svakom od 5 termočlanaka koji mjere temperaturno polje na hladnijoj strani donjeg uzorka, s pripadnom mjernom nesigurnošću, iznosi:

$$\bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}}^i$$

$$u_{\text{HD}\mu\text{D}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^5 (u_{\text{HD}\mu\text{D}}^i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 u_{\text{HD}\mu\text{D}}^i \cdot u_{\text{HD}\mu\text{D}}^j \cdot r(u_{\text{HD}\mu\text{D}}^i, u_{\text{HD}\mu\text{D}}^j)}$$

Gdje su:

$$u_{\text{HD}\mu\text{D}}^i = \sqrt{u_{\text{TČČ}\mu}^2 + (s_{\text{HD}\mu\text{D}}^i)^2 + u_{\text{V}}^2} \quad i = 1,5$$

$$s_{\text{HD}\mu\text{D}}^i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\vartheta_{\text{HD}\mu\text{D}}^{ij} - \bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}}^i)^2}{n \cdot (n-1)}} \quad i = 1,5$$

$$\bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}}^i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \vartheta_{\text{HD}\mu\text{D}}^{ij} \quad i = 1,5$$

$$r(u_{\text{HD}\mu\text{D}}^i, u_{\text{HD}\mu\text{D}}^j) = 1$$

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}}}{\partial \vartheta_{\text{HD}\mu\text{D}}^1} = \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}}}{\partial \vartheta_{\text{HD}\mu\text{D}}^2} = \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}}}{\partial \vartheta_{\text{HD}\mu\text{D}}^i} = \frac{1}{5}$$

## 7.4 Mjerna nesigurnost temperaturnog pada na uzorcima

Dosadašnjim proračunima dobiveni su aritmetička sredina od  $n$  izmjerenih termonapona na 5 mjernih mjesta (termočlanaka) i pripadne mjerne nesigurnosti, izražene u  $\mu\text{V}$ , koje glase:

- za topliju stranu gornjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}$  i  $u_{\text{TG}\mu\text{G}}$

- za hladniju stranu gornjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{\text{HG}\mu\text{G}}$  i  $u_{\text{HG}\mu\text{G}}$

- za topliju stranu donjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{\text{TD}\mu\text{D}}$  i  $u_{\text{TD}\mu\text{D}}$

- za hladniju stranu donjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{\text{HD}\mu\text{D}}$  i  $u_{\text{HD}\mu\text{D}}$

Vrijednosti termonapona ( $\mu\text{V}$ ) pomoću polinoma (7.2) pretvaraju se u temperature ( $^{\circ}\text{C}$ ) što doprinosi povećanju mjerne nesigurnosti.

Primjerice, temperatura toplije strane gornjeg uzorka i pripadna mjerna nesigurnost iznose:

$$\vartheta_{\text{TG}} = -1,265 \cdot 10^{-18} \cdot \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}^5 + 1,358 \cdot 10^{-14} \cdot \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}^4 - 2,402 \cdot 10^{-11} \cdot \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}^3 - 6,250 \cdot 10^{-7} \cdot \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}^2 + 2,585 \cdot 10^{-2} \cdot \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}} - 9,383 \cdot 10^{-3}$$

$$u_{\text{TG}^{\circ}\text{C}} = -1,265 \cdot 10^{-18} \cdot u_{\text{TG}\mu\text{G}}^5 + 1,358 \cdot 10^{-14} \cdot u_{\text{TG}\mu\text{G}}^4 - 2,402 \cdot 10^{-11} \cdot u_{\text{TG}\mu\text{G}}^3 - 6,250 \cdot 10^{-7} \cdot u_{\text{TG}\mu\text{G}}^2 + 2,585 \cdot 10^{-2} \cdot u_{\text{TG}\mu\text{G}} - 9,383 \cdot 10^{-3}$$

Doprinos ukupnoj mjernoj nesigurnosti:

$$u_{\mu\text{V} \rightarrow ^{\circ}\text{C}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{TG}}}{\partial \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}}\right)^2 \cdot u_{\text{TG}\mu\text{G}}^2} = \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}_{\text{TG}}}{\partial \bar{\vartheta}_{\text{TG}\mu\text{G}}}\right) \cdot u_{\text{TG}\mu\text{G}}$$

I na kraju, mjerna nesigurnost temperature toplije strane gornjeg uzorka:

$$u_{\text{TG}} = \sqrt{u_{\text{TG}^{\circ}\text{C}}^2 + u_{\mu\text{V} \rightarrow ^{\circ}\text{C}}^2}$$

Na jednaki se način izračunaju i ostale temperature i njihove mjerne nesigurnosti. Nakon sređivanja dobiju se temperature kao aritmetičke sredine od  $n$  izmjerenih termonapona na 5 mjernih mjesta (termočlanaka) i pripadne mjerne nesigurnosti, izražene u  $^{\circ}\text{C}$ :

- za topliju stranu gornjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{\text{TG}}$  i  $u_{\text{TG}}$

- za hladniju stranu gornjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{\text{HG}}$  i  $u_{\text{HG}}$

- za topliju stranu donjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{\text{TD}}$  i  $u_{\text{TD}}$

- za hladniju stranu donjeg uzorka:  $\bar{\vartheta}_{\text{HD}}$  i  $u_{\text{HD}}$

Iz ovih se vrijednosti računa pad temperature na uzorcima:

$$\Delta\vartheta = \frac{(\bar{\vartheta}_{TG} - \bar{\vartheta}_{HG}) + (\bar{\vartheta}_{TD} - \bar{\vartheta}_{HD})}{2}$$

i pripadna mjerna nesigurnost:  $u_{\Delta\vartheta} = \frac{1}{4} \sqrt{u_{TG}^2 + u_{HG}^2 + u_{TD}^2 + u_{HD}^2}$  ..... (7.3)

## 7.5 Mjerna nesigurnost ispitne temperature

Kako je opisano točkom 4.4.2, toplinska provodnost mjeri se na tri različite ispitne temperature. Pri izračunu pada temperature na uzorcima ( $\Delta\vartheta$ ) nije bilo nužno poznavati referentnu temperaturu jer ona pri samom izračunu temperaturnog pada iščezava. Kod izračuna ispitne temperature to nije slučaj. Budući da termočlanak mjeri razliku temperature od mjesta gdje se nalazi spojište (glavica) termočlanaka do njegovih krajeva (stezaljke voltmetra), da bi se odredila stvarna temperatura mjesta koju termočlanak mjeri nužno je znati temperaturu stezaljke voltmetra, odnosno referentnu temperaturu i njenu mjernu nesigurnost, kako je opisano točkom 5.6.

Ispitna temperatura:

$$\vartheta_{SR} = \vartheta_{SR}^* + \vartheta_{ref}$$

Gdje je :

$$\vartheta_{SR}^* = \frac{\bar{\vartheta}_{TG} + \bar{\vartheta}_{HG} + \bar{\vartheta}_{TD} + \bar{\vartheta}_{HD}}{4}$$

S obzirom da se referentna temperatura mjeri s istim mjernim instrumentom (voltmetar) kao i aritmetička sredina izmjerenih temperatura toplije i hladnije strane oba uzorka, može se reći da te dvije veličine međusobno koreliraju uz faktor korelacije  $r(u_{TSR}^*, u_{Tref}) = 1$ . Nadalje, budući da je

$$\frac{\partial \vartheta_{SR}}{\partial \vartheta_{SR}^*} = \frac{\partial \vartheta_{SR}}{\partial \vartheta_{ref}} = 1, \text{ mjerna nesigurnost ispitne temperature glasi:}$$

$$u_{TSR} = \sqrt{(u_{TSR}^*)^2 + (u_{Tref})^2 + 2 \cdot u_{TSR}^* \cdot u_{Tref}}$$

Gdje je:

$$u_{TSR}^* = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{u_{TG}^2 + u_{HG}^2 + u_{TD}^2 + u_{HD}^2}$$

Dakle, ispitna temperatura i pripadna mjerna nesigurnost glase:

$$\vartheta_{SR} = \vartheta_{SR}^* + \vartheta_{ref} \text{ ..... (7.4)}$$

$$u_{TSR} = \sqrt{(u_{TSR}^*)^2 + (u_{Tref})^2 + 2 \cdot u_{TSR}^* \cdot u_{Tref}}$$

## 7.6 Mjerna nesigurnost snage na grijalici

### MJERNA NESIGURNOST NAPONA GRIJALICE

Napon grijalice se mjeri pomoću voltmetra kojemu je proizvođač deklarirao pogrešku mjerenja napona manjom od 0,01 % od izmjerene vrijednosti (podatak LGF).

Mjerna nesigurnost voltmetra, za pravokutnu razdiobu, u skladu s [13] iznosi:

$$u_V = \frac{0,01}{100} \cdot \frac{\bar{U}_G}{\sqrt{3}}$$

Aritmetička sredina od  $n$  izmjerenih napona grijalice unutar odabranog mjernog intervala koji zadovoljava uvjet stacionarnosti, kako je opisano u poglavlju 4.4, iznosi:

$$\bar{U}_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_{Gj}$$

Standardna mjerna nesigurnost izmjerenog napona grijalice:

$$s_U = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (U_{Gj} - \bar{U}_G)^2}{n \cdot (n-1)}}$$

Proizvođač opreme za mjerenje toplinske provodnosti propisao je da se stvarni napon grijalice dobiva korekcijom izmjerenih vrijednosti:

$$U = \frac{\bar{U}_G \cdot 1,00014}{1000}$$

Doprinos korekcije ukupnoj mjernoj nesigurnosti:

$$u_{\text{KOR}} = \left( \frac{\partial U}{\partial \bar{U}_G} \right) \cdot s_U$$

Dakle, vrijednost napona grijalice i pripadna mjerna nesigurnost:

$$U = \frac{\bar{U}_G \cdot 1,00014}{1000} \dots\dots\dots (7.5)$$

$$u_U = \sqrt{u_V^2 + s_U^2 + u_{\text{KOR}}^2}$$



## MJERNA NESIGURNOST JAKOSTI STRUJE NA GRIJALICI

Jakost struje mjeri se pomoću ampermetra kojemu je proizvođač deklarirao pogrešku mjerenja jakosti struje manjom od 0,01 % od izmjerene vrijednosti (podatak LGF).

Mjerna nesigurnost ampermetra, za pravokutnu razdiobu, u skladu s [13] iznosi:

$$u_A = \frac{0,01}{100} \cdot \bar{I}_G \cdot \sqrt{3}$$

Aritmetička sredina od  $n$  izmjerenih jakosti struje koja se dovodi grijalici unutar odabranog mjernog intervala koji zadovoljava uvjet stacionarnosti, kako je opisano u poglavlju 4.4, iznosi:

$$\bar{I}_G = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{Gj}$$

Standardna mjerna nesigurnost izmjerene jakosti struje:

$$s_I = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (I_{Gj} - \bar{I}_G)^2}{n \cdot (n - 1)}}$$

Proizvođač opreme za mjerenje toplinske provodnosti propisao je da se stvarna jakost struje koja se dovodi grijalici dobiva korekcijom izmjerenih vrijednosti:

$$I = \frac{\bar{I}_G \cdot 0,0302}{1000}$$

Doprinos korekcije ukupnoj mjernoj nesigurnosti:

$$u_{\text{KOR}} = \left( \frac{\partial I}{\partial \bar{I}_G} \right) \cdot s_I$$

Dakle, jakost struje koja se dovodi grijalici i pripadna mjerna nesigurnost:

$$I = \frac{\bar{I}_G \cdot 0,0302}{1000}$$

$$u_I = \sqrt{u_A^2 + s_I^2 + u_{\text{KOR}}^2}$$

..... (7.6)

## MJERNA NESIGURNOST SNAGE NA GRIJALICI

Snaga je umnožak aritmetičkih sredina napona grijalice i jakosti struje koja se grijalici dovodi:

$$P = U \cdot I$$

Mjerna nesigurnost snage koja se dovodi grijalici uz koeficijent korelacije  $r(u_U, u_I) = 1$

$$u_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U} \cdot u_U\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} \cdot u_I\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial P}{\partial U} \cdot \frac{\partial P}{\partial I} \cdot u_U \cdot u_I} \quad \dots\dots\dots (7.7)$$

## 7.7 Mjerna nesigurnost gubitaka snage

### MJERNA NESIGURNOST NEIZOTERMNOSTI PLOHA GRIJALICE I OBA HLADILA

Neizotermnost ploha grijalice i oba hladila iznosi (točka 4.4.1):

$$C = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{0,1}{\Delta\vartheta_{ZR}}}$$

Mjerna nesigurnost neizotermnosti [13]:

$$u_C = \frac{\partial C}{\partial \Delta\vartheta_{ZR}} \cdot u_{\Delta\vartheta_{ZR}} \quad \dots\dots\dots (7.8)$$

### Mjerna nesigurnost temperaturnog pada na zračnom rasporu između grijalice i zaštitnog prstena

Pad temperature na zračnom rasporu mjeri se pomoću termolanca, kako je prikazano slikom 20 i čija se mjerna nesigurnost ( $u_{TL}$ ) izražena u K, dobiva iz izvještaja o umjeravanju.

Također, proizvođač opreme za mjerenje toplinske provodnosti propisao je način na koji se napon izmjeren na stezaljkama termolanca ( $U_{TL}^j$ ) korekcijom pretvori u vrijednost pada temperature na zračnom rasporu između grijalice i zaštitnog prstena:

$$\Delta\vartheta_{ZR}^j = \frac{U_{TL}^j \cdot 1,00014}{1000}$$

Aritmetička sredina pada temperature na zračnom rasporu između grijalice i zaštitnog prstena:

$$\Delta\bar{\vartheta}_{ZR} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta\vartheta_{ZR}^j$$

U skladu s [13], mjerna nesigurnost pada temperature na zračnom rasporu između grijalice i zaštitnog prstena iznosi:

$$u_{\Delta\vartheta_{ZR}} = \sqrt{u_{TL}^2 + s_{TL}^2 + u_{KOR}}$$

Gdje je:

$u_{TL}$  ..... podatak iz izvještaja o umjeravanju

$$s_{TL} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\Delta\vartheta_{ZR}^j - \Delta\bar{\vartheta}_{ZR})^2}{n \cdot (n-1)}} \quad \text{..... standardna mjerna nesigurnost}$$

$$u_{KOR} = \frac{\partial \Delta\vartheta_{ZR}}{\partial U_{TL}} \cdot u_V \quad \text{..... mjerna nesigurnost pretvaranja termonapona u pad temperature}$$

Gdje je:

$$u_V = \frac{0,01}{100} \cdot \frac{\bar{U}_{TL}}{\sqrt{3}} \quad \text{..... mjerna nesigurnost voltmetra}$$

$$\bar{U}_{TL} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U_{TL}^j, \quad \text{..... aritmetička sredina termonapona izmjerenih termolancem}$$

Dakle, aritmetička sredina pada temperature na zračnom rasporu između grijalice i zaštitnog prstena i pripadna mjerna nesigurnost:

$$\Delta\bar{\vartheta}_{ZR} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta\vartheta_{ZR}^j \quad \text{..... (7.9)}$$

$$u_{\Delta\vartheta_{ZR}} = \sqrt{u_{TL}^2 + s_{TL}^2 + u_{KOR}}$$

## MJERNA NESIGURNOST BOČNIH GUBITAKA SNAGE NA UZORCIMA, ISPOD ZRAČNOG RASPORA

Bočni gubitci snage na uzorcima iznosi (točka 4.4.1):

$$P_b = \frac{8 \cdot L_S}{\pi} \cdot \ln \left[ \frac{4}{1 - e^{-\frac{\pi \cdot l_R}{d}}} \right] \cdot \lambda_{PUZ} \cdot \Delta \vartheta_{ZR}$$

Mjerna nesigurnost zbog bočnih gubitaka [13]:

$$u_{Pb} = \sqrt{\left( \frac{\partial P_b}{\partial L_S} \cdot u_{LS} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_b}{\partial l_R} \cdot u_{lR} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_b}{\partial d} \cdot u_d \right)^2 + \left( \frac{\partial P_b}{\partial \lambda_{PUZ}} \cdot u_{\lambda_{PUZ}} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_b}{\partial \Delta \vartheta_{ZR}} \cdot u_{\Delta \vartheta_{ZR}} \right)^2} \dots (7.10)$$

Gdje je:

- duljina jedne stranice mjerne površine grijalice (od sredine jednog zračnog raspora do sredine drugog):  $L_S = 502,29 \text{ mm} \pm u_{LS} = 1,86$  - prema podacima LGF
- širina zračnog raspora:  $l_R = 2,29 \text{ mm} \pm u_{lR} = 0,052$  - prema podacima LGF
- izmjereni pad temperature na zračnom rasporu,  $\Delta \vartheta_{ZR} \pm u_{\Delta \vartheta_{ZR}} (7.9)$
- procjenjena toplinska provodnost uzorka (iz tablica),  $\lambda_{PUZ} \pm u_{\lambda_{PUZ}} = 5 \%$
- izmjerena debljina uzorka,  $d \pm u_d (7.1)$

## MJERNA NESIGURNOST GUBITAKA SNAGE U PROSTORU ISPOD ZRAČNOG RASPORA

Gubitci snage u prostoru ispod zračnog raspora (točka 4.4.1):

$$P_R = \frac{A_R \cdot P}{4 \cdot A_G}$$

Mjerna nesigurnost zbog gubitaka snage u prostoru ispod zračnog raspora [13]:

$$u_{PR} = \sqrt{\left( \frac{\partial P_R}{\partial A_R} \cdot u_{AR} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_R}{\partial A_G} \cdot u_{AG} \right)^2 + \left( \frac{\partial P_R}{\partial P} \cdot u_P \right)^2} \dots (7.11)$$

Gdje su:

- $A_R = 0,0046 \text{ m}^2 \pm u_{AR} = 2,86 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$  - površina zračnog raspora (podatak LGF) i
- $A_G = 2 \cdot 0,2523 = 0,5046 \text{ m}^2 \pm u_{AG} = 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  - površina obje strane grijalice (podatak LGF).
- izmjerena snaga koja se dovodi grijalici,  $P \pm u_P (7.7)$

## 7.8 Mjerna nesigurnost gustoće toplinskog toka

Gustoća toplinskog toka kroz oba uzorka:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A_G}$$

Mjerna nesigurnost gustoće toplinskog toka kroz oba uzorka:

$$u_{\dot{q}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \cdot u_{\dot{Q}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial A_G} \cdot u_{A_G}\right)^2} \quad \dots\dots\dots (7.12)$$

Gdje je:

-  $A_G = 0,5046 \text{ m}^2 \pm 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  - površina obje strane grijalice (podatak LGF).

-  $\dot{Q} = P - P_b - P_R - \frac{P}{C}$  ..... toplina koja se predaje uzorcima (točka 4.4.2).

Gdje je:

$$- u_{\dot{Q}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial P} \cdot u_P\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial P_b} \cdot u_{P_b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial P_R} \cdot u_{P_R}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial C} \cdot u_C\right)^2}$$

- Vrijednosti  $u_P$ ,  $u_{P_b}$ ,  $u_{P_R}$  i  $u_C$ , računaju se prema: (7.7), (7.10), (7.11) i (7.8), respektivno.

## 7.9 Mjerna nesigurnost toplinske provodnosti

### MJERNA NESIGURNOST TOPLINSKE PROVODNOSTI PRI NEKOJ ISPITNOJ TEMPERATURI

Kako je opisano točkom 4.4, toplinska provodnost mjeri se na tri međusobno različite (barem 8 K) ispitne temperature. U skladu s (4.1), mjerna nesigurnost pri jednoj od tri ispitne temperature glasi:

$$\lambda_i = \frac{d \cdot \dot{q}_i}{\Delta \vartheta_i} \quad i = 1, 2, 3$$

Mjerna nesigurnost toplinske provodnosti:

$$u_{\lambda_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial d_i} \cdot u_d\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \dot{q}_i} \cdot u_{\dot{q}_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \Delta \vartheta_i} \cdot u_{\Delta \vartheta_i}\right)^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (7.13)$$

### PROŠIRENA MJERNA NESIGURNOST TOPLINSKE PROVODNOSTI PRI TEMPERATURI OD + 23 °C

Kako je opisano točkom 4.4.3, toplinska provodnost pri + 23 °C računa se iz pravca koji je dobiven pomoću linearne regresije izmjerenih vrijednosti toplinske provodnosti na tri različite ispitne temperature ( $\vartheta_{SR1}$ ,  $\vartheta_{SR2}$ ,  $\vartheta_{SR3}$ ). Jednadžba regresijskog pravca dobiva se pomoću metode najmanjih kvadrata [8].

Jednadžba  $\lambda = a \cdot \vartheta_{SR} + b$  predstavlja jednadžbu regresijskog pravca dobivenog iz tri mjerne točke: ( $\vartheta_{SR1}$ ,  $\lambda_1$ ); ( $\vartheta_{SR2}$ ,  $\lambda_2$ ) i ( $\vartheta_{SR3}$ ,  $\lambda_3$ ).

Gdje je:

$\vartheta_{SR}$  ..... nezavisna varijabla

$\lambda$  ..... zavisna varijabla

$$a = \frac{\sum_{i=1}^3 (\vartheta_{SRi} - \bar{\vartheta}_{SR}) \cdot (\lambda_i - \bar{\lambda})}{\sum_{i=1}^3 (\vartheta_{SRi} - \bar{\vartheta}_{SR})^2} \quad \dots\dots\dots \text{koeficijent smjera regresijskog pravca}$$

$$b = \bar{\lambda} - a \cdot \bar{\vartheta}_{SR} \quad \dots\dots\dots \text{odsječak pravca na ordinati}$$

$$\bar{\vartheta}_{SR} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 \vartheta_{SRi} \quad \dots\dots \text{aritmetička sredina od tri ispitnih temperatura}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 \lambda_i \quad \dots\dots\dots \text{aritmetička sredina od tri toplinskih provodnosti}$$

Toplinska se provodnost pri 23 °C, u skladu s (4.3), računa iz regresijskog pravca koji je dobiven pomoću metode najmanjih kvadrata iz izmjerenih vrijednosti toplinske provodnosti na tri različite ispitne temperature. Prema [16], mjerna nesigurnost izračuna neke veličine iz regresijskog pravca iznosi:

$$u(y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - (b + a \cdot x_i)]^2}{n - 2}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{\text{reg.}} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]$$

Na primjer, za slučaj ( $x_{\text{reg.}} = 23$  °C):

$$u(\lambda_{\text{reg.}}^{23}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 [\lambda_i - (b + a \cdot \vartheta_{\text{SR}i})]^2}{3}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{3} + \frac{(23 - \bar{\vartheta}_{\text{SR}})^2}{\sum_{i=1}^3 (\vartheta_{\text{SR}i} - \bar{\vartheta}_{\text{SR}})^2} \right]$$

Nadalje, budući da uz svaku izmjerenu toplinsku provodnost postoje tri mjerne nesigurnosti: ( $u_{\lambda i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), ukupnu mjernu nesigurnost regresijom dobivene toplinske provodnosti (pri 23 °C) treba uvećati za najveću od ove tri mjerne nesigurnosti, ( $u_{\lambda \text{imax}}$ ).

Tako da je mjerna nesigurnost toplinske provodnosti pri 23 °C:

$$u_{\lambda 23} = \sqrt{u^2(\lambda_{\text{reg.}}^{23}) + u_{\lambda \text{imax}}^2}$$

I na kraju, proširena mjerna nesigurnost uz 95 %-tnu razinu povjerenja ( $k = 2$ ) iznosi:

$$U_{\lambda 23} = 2 \cdot u_{\lambda 23} \quad \dots\dots\dots (7.14)$$

## 8 REZULTATI USPOREDNIH MJERENJA I PROCJENE MJERNE NESIGURNOSTI

### 8.1 Mjerenje uzoraka od mineralne vune

Staklena vuna i kamena vuna spadaju u red mineralnih vuna koje su već stotinu godina prisutne u graditeljstvu i prepoznate su kao izvrstan toplinski izolator. Osim dobrih toplinsko-izolacijskih svojstava, mineralne vune su dobri apsorberi dolaznih zvučnih valova. Kamena vuna se zbog kritične točke zapaljenja iznad 1000 °C svrstava u red protupožarnih materijala. Nadalje, budući da proizvodi od mineralnih vuna bitno smanjuju potrošnju energije za zagrijavanje, čime u atmosferu dopijevaju manje količine CO<sub>2</sub>, mineralne vune spadaju u red ekološki prihvatljivih proizvoda. Tijekom životnog vijeka proizvoda od kamene vune, uštedi se više od tisuću puta više energije nego što je potrebno za njihovu proizvodnju.

Mineralne vune proizvode se od sirovina za proizvodnju stakla i kamena kojima se dodaje reciklirano staklo, veziva i ulja i pri temperaturi od 1500 °C od njih se u posebnom uređaju formiraju vlakna. Vlakna se prepuštaju vrućoj struji zraka pri čemu se iz umjetne smole uklanjaju štetne i hlapljive tvari, npr. fenol i formaldehid, tako da u sastavu vune ostaje samo čvrsta umjetna smola, npr. bakelit. Gotov proizvod smjesa je mineralnih tvari, smole i zraka zarobljenog u porama. Gustoća, sadržaj veziva i orijentacija vlakana određuju namjenu proizvoda. Primjerice, mineralne vune veće gustoće koriste se kod ravnih krovova, dok se mineralne vune manje gustoće polažu oko cijevi čime smanjuju gubitke cijevnih instalacija. Mineralna vuna sastoji se od [17]:

- umjetnih mineralnih vlakana koja čine osnovnu staklenu, odnosno kamenu strukturu - cca 90 %
- veziva na osnovi umjetne smole koja daju postojan oblik - cca 7 %
- ulja koja smanjuju formiranje i oslobađanje staklene, odnosno kamene prašine - do 1 %
- ostalih sastojaka - razni dodaci koji ne upijaju vodu - cca 2 %

**Utjecaj mineralne vune na zdravlje čovjeka [17].** Osim što rad s mineralnom vunom može izazvati osip na koži čovjeka i u najgorem slučaju izazvati upalni proces, alergijske pojave pri radu s kamenom i staklenom vunom nisu dosad zabilježene. Pravilna zaštita ruku otklanja ovu i slične opasnosti, ali se postavlja pitanje što je sa česticama mineralne vune koje čovjek udiše? Osim što se udisanjem čestica mineralne vune nadražuje sluznica nosa i grla i što može dovesti do upale dišnih puteva, važno je znati mogu li one izazvati kancerozene pojave u čovjeka?

Sva vlakna koja su takvog promjera i duljine da ih je disanjem moguće unijeti u pluća, potencijalno mogu izazvati rak. Primjerice, azbest je materijal poznat po svojim kancerogenim svojstvima. Azbestna vlakna sklona su učinku "spljoštenosti", naime ona tijekom obrade postaju sve tanja i tanja i samim time ih je lakše udahnuti. Mineralna se pak vlakna tijekom eksploatacije lome, ali im je promjer nepromijenjen, tako da je bojazan od udisanja manja (osim ako se "izlome" u jako sitnu prašinu). Nadalje, vrijeme biološke razgradivosti mineralnih vlakana je 40 dana (danas), odnosno nekoliko stotina dana (nekad). Azbestna vlakna biološki se razgrađuju tek nakon 100 godina. Važno je reći da su proizvodi od mineralne vune koji se danas proizvode manje kancerogeno rizični u odnosu na proizvode od mineralne vune koji su se proizvodili prije 2000. godine. Tijekom 2000. godine većina je Europskih zemalja uvela drastičnije zakonske mjere u pogledu proizvodnje i prodaje proizvoda od mineralnih vuna. Bez obzira na ovu činjenicu, važno je biti oprezan i držati se pravila o zaštiti pri rukovanju s ovim proizvodima, a posebno ne dopustiti ugradnju starih, negdje prije već ugrađenih proizvoda od mineralnih vuna. Dopuštena tolerancija čestica mineralnih

vlakana u zraku, u skladu sa [17] iznosi:  $\frac{250.000 \text{ čestica}}{\text{m}^3}$



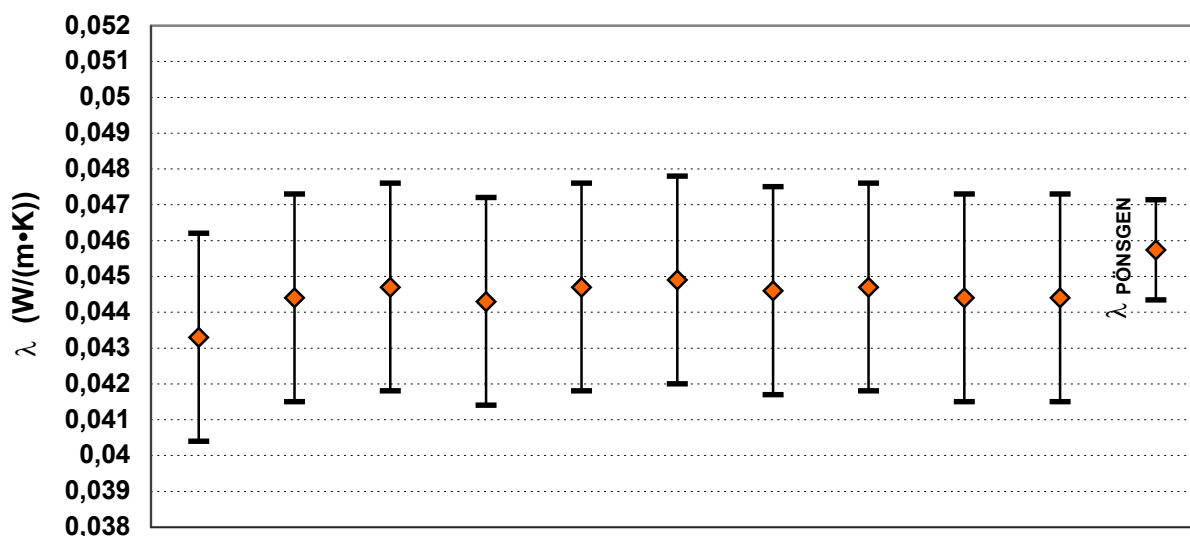
## 8.1.1 Mjerenje uzoraka od staklene vune

Rezultat mjerenja toplinske provodnosti staklene vune gustoće  $13 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i debljine 80 mm s

Pönsgenovim uređajem:  $\lambda = 0,0457 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0014 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

Mjerna veličina (jedinica)	Redni broj mjerenja									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(t_1)$	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50
$\ln(t_2)$	5,48	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50
$\vartheta(t_1)$ (°C)	49,3	48,9	48,8	48,2	48,7	48,5	49,0	49,4	49,6	49,9
$\vartheta(t_2)$ (°C)	52,6	52,1	52,1	51,4	51,9	51,7	52,3	52,6	52,8	53,2
$\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$ (K)	3,26	3,23	3,21	3,24	3,20	3,19	3,21	3,20	3,23	3,23
$P$ (W)	0,361	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360
$\Delta P/P$ (%)	0,007	0,005	0,002	0,001	0,002	0,004	0,000	0,003	0,001	0,005
$\lambda$ (W/(m·K))	0,0433	0,0444	0,0447	0,0443	0,0447	0,0449	0,0446	0,0447	0,0444	0,0444
$U_\lambda$ (W/(m·K))	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029	0,0029
$R^2$	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tablica 3: Rezultati mjerenja toplinske provodnosti staklene vune, metodom vruće žice



Slika 27: Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti staklene vune, mjerene s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja).

	Opis	Jedinica	Iznos	Osjetljivost	Opis sastavnice	Tip	Jedinica	Iznos	Osjetljivost
1	Nesigurnost duljine Pt žice, $u_L$	m	$7,909 \cdot 10^{-6}$	0,0431	Nesigurnost pomičnog mjerila, $u_R$	B	m	$75 \cdot 10^{-7}$	1
					Standardna nesigurnost duljine, $s(L)$	A	m	$2,51 \cdot 10^{-6}$	1
2	Nesigurnost snage, $u_P$	W	$3,102 \cdot 10^{-5}$	0,1195	Nesigurnost voltmetra, $u_V$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	4,1354
					Nesigurnost ampermetra, $u_A$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	0,0872
					Standardna nesigurnost snage, $s(P)$	A	W	$1,27 \cdot 10^{-7}$	1
3	Nesigurnost poč. vremena, $u_{t1}$	s	0,0012	0,000486	---	B	--	--	--
4	Nesigurnost zavr. vremena, $u_{t2}$	s	0,0012	0,000182	---	B	--	--	--
5	KORELACIJA $r(t_1, t_2)$	s	0,0012	1	---	1	--	--	--
6	Nesigurnost promjene temperature $u_{\Delta\theta}$	K	0,06531	0,01312	Nesigurnost voltmetra, $u_{V1}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	73,371
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A1}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3456,9
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,1}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 12158,6
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R01}$	B	$\Omega$	$15,61 \cdot 10^{-4}$	- 7,6224
					Nesigurnost voltmetra, $u_{V2}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	73,768
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A2}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3513,1
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,2}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 12990,1
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R02}$	B	$\Omega$	$15,61 \cdot 10^{-4}$	- 7,7046
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr1}$	B	°C	0,02417	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu1}$	B	°C	0,02618	1
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr2}$	B	°C	0,02576	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu2}$	B	°C	0,02791	1
					Nesigurnost zbog aproksimacije pravcem regresije, $s_{\theta}^2$	A	°C	$5,26 \cdot 10^{-7}$	1
Proširena nesigurnost toplinske provodnosti: $u_\lambda = 2 \cdot u_\alpha = 0,0029 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$									

Tablica 4: Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti staklene vune za dinamičku metodu

	Opis	Jedinica	Tip	1. mjerna točka - iznos	1. mjerna točka - osjetljivost	2. mjerna točka - iznos	2. mjerna točka - osjetljivost	3. mjerna točka - iznos	3. mjerna točka - osjetljivost
1.1	Nesigurnost debljine uzorka, $u_d$	m	A	0,0001	0,5271	0,0001	0,5614	0,0001	0,5994
1.2	Nesigurnost razlike temperatura, $u_{\Delta\theta}$	K	A	0,236	- 0,00432	0,236	- 0,00463	0,235	- 0,00499
1.3	Nesigurnost gustoće toplinskog toka, $u_{\dot{q}}$	$\frac{W}{m^2}$	A	0,001	0,00819	0,002	0,00826	0,002	0,00832
1.4	Ostale nesigurnosti	--	--	0,00072	1	0,00077	1	0,00083	1
1	Nesigurnost toplinske provodnosti, $u_{\lambda 1}$	$\frac{W}{m \cdot K}$	A	0,00125	1	0,00134	1	0,00144	1
2	Nesigurnost temperat. $u_{\theta SR}$	°C	A	0,118	1	0,118	1	0,117	1

**Tablica 5:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti staklene vune za stacionarnu metodu

Iznos toplinske provodnosti pri + 23 °C računa se pomoću linearne regresije iz triju izmjerenih vrijednosti toplinske provodnosti pri ispitnim temperaturama. Doprinos mjerne nesigurnosti linearne regresije ukupnoj mjernoj nesigurnosti računa se kako je opisano točkom 7.9.

Mjerna nesigurnost toplinske provodnosti staklene vune pri + 23 °C iznosi: 0,00144  $\frac{W}{m \cdot K}$

Podaci prema ispitivanjima provedenim u LGF.

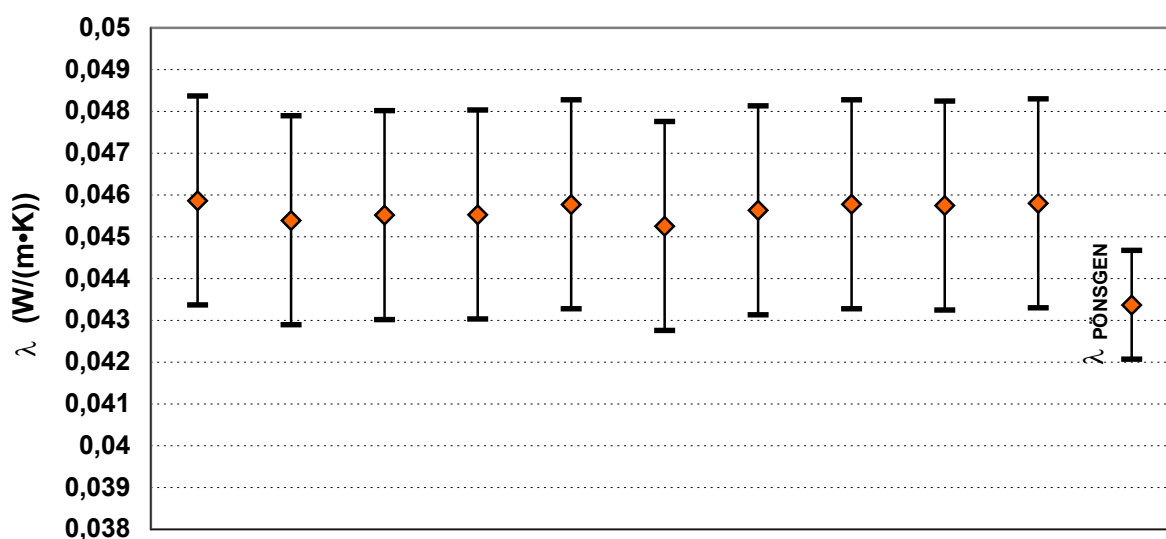
## 8.1.2 Mjerenje uzoraka od kamene vune

Rezultat mjerenja toplinske provodnosti kamene vune gustoće  $142 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i debljine 160 mm

s Pönsgenovim uređajem:  $\lambda = 0,0434 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0013 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

Mjerna veličina (jedinica)	Redni broj mjerenja									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(t_1)$	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50
$\ln(t_2)$	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00
$\vartheta(t_1)$ (°C)	37,5	37,8	38,2	37,1	37,1	37,0	37,6	38,4	37,8	38,1
$\vartheta(t_2)$ (°C)	45,2	45,6	46,0	44,8	44,8	44,8	45,4	46,2	45,5	45,8
$\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$ (K)	7,71	7,78	7,77	7,76	7,73	7,81	7,76	7,72	7,72	7,72
$P$ (W)	0,356	0,355	0,355	0,356	0,356	0,355	0,356	0,355	0,356	0,355
$\Delta P/P$ (%)	0,009	0,010	0,008	0,011	0,017	0,008	0,008	0,009	0,009	0,009
$\lambda$ (W/(m·K))	0,0459	0,0454	0,0455	0,0455	0,0458	0,0453	0,0456	0,0458	0,0457	0,0458
$U_\lambda$ (W/(m·K))	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
$R^2$	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tablica 6: Rezultati mjerenja toplinske provodnosti kamene vune, metodom vruće žice



Slika 28: Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti kamene vune, mjerene s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja).

	Opis	Jedinica	Iznos	Osjetljivost	Opis sastavnice	Tip	Jedinica	Iznos	Osjetljivost
1	Nesigurnost duljine Pt žice, $u_L$	m	$12,60 \cdot 10^{-6}$	0,04586	Nesigurnost pomičnog mjerila, $u_R$	B	m	$75 \cdot 10^{-7}$	1
					Standardna nesigurnost duljine, $s(L)$	A	m	$10,13 \cdot 10^{-6}$	1
2	Nesigurnost snage, $u_P$	W	$3,037 \cdot 10^{-5}$	0,12900	Nesigurnost voltmetra, $u_V$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	4,0490
					Nesigurnost ampermetra, $u_A$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	0,0878
					Standardna nesigurnost snage, $s(P)$	A	W	$7,4 \cdot 10^{-8}$	1
3	Nesigurnost poč. vremena, $u_{t1}$	s	0,0012	0,000554	---	B	--	--	--
4	Nesigurnost zavr. vremena, $u_{t2}$	s	0,0012	0,0000455	---	B	--	--	--
5	KORELACIJA $r(t_1, t_2)$	s	0,0012	1	---	1	--	--	--
6	Nesigurnost promjene temperature $u_{\Delta \theta}$	K	0,05823	0,005947	Nesigurnost voltmetra, $u_{V1}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	72,806
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A1}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3296,5
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,1}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 9524,2
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{Ro1}$	B	$\Omega$	$24,87 \cdot 10^{-4}$	- 7,3985
					Nesigurnost voltmetra, $u_{V2}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	73,773
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A2}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3429,2
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,2}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 11506,7
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{Ro2}$	B	$\Omega$	$24,87 \cdot 10^{-4}$	- 7,5956
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednačbe, $u_{apr1}$	B	°C	0,01838	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu1}$	B	°C	0,01991	1
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednačbe, $u_{apr2}$	B	°C	0,02215	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu2}$	B	°C	0,02400	1
					Nesigurnost zbog aproksimacije pravcem regresije, $s^2_{\theta}$	A	°C	$7,18 \cdot 10^{-7}$	1
Proširena nesigurnost toplinske provodnosti: $U_\lambda = 2 \cdot u_\lambda = 0,0025 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$									

**Tablica 7:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti kamene vune za dinamičku metodu

## 8.2 Mjerenje uzoraka od tvrde poliuretanske pjene

Premda su poliuretani najrašireniji polimerni proizvod i premda se poliuretanske pjene mogu smatrati najboljim toplinskim izolatorima (imaju najnižu toplinsku provodnost), one se u graditeljstvu rijetko postavljaju samostalno, kao toplinski izolatori. Najčešće se koriste kao ispuna u različitim kombinacijama (najčešće između raznih profila) i kao brtvila pri montaži građevinske stolarije. Razlog je najčešće u tome što spadaju u red lako zapaljivih materijala. Poliuretanske pjene se dijele na tvrde (veća primjena u graditeljstvu) i meke (spužve). Moguće ih je izravno ubrizgavati u kalupe najrazličitijih oblika i dimenzija, kao npr. u različitim toplinskim izolacijama (hladnjaci, bojleri, perilice...). Također, zbog činjenice da se mogu izrađivati i u vrlo tvrdim, elastičnim i savitljivim proizvodima koji imaju odličnu prionljivost, proizvodi od poliuretanskih pjena jedni su od najraširenijih danas.

Za proizvodnju tvrdih poliuretanskih pjena koriste se derivati prirodnih sirovina petroleja i prirodnih plinova (kemijska reakcija između dvostrukih ili višestrukih poliizocionata i polihidroksilnih spojeva). Ovu reakciju je 1937. godine otkrio Otto Bayer. Riječ je o egzotermnoj reakciji (vrlo brza reakcija koja ne zahtjeva dovod topline izvana) na sobnoj temperaturi uz pomoć katalizatora, inhibitora plamena, aktivnih agensa i tekućih agensa za ekspaniranje. Tijekom proizvodnje tvrde poliuretanske pjene ne dolazi do nusproizvoda. Toplina koja se oslobađa tijekom ove kemijske reakcije služi za hlapljenje agensa za ekspaniranje. Plin koji je pri tom proizveden ostaje zarobljen unutar pjene u obliku velikog broja sitnih mjehurića. Kad je reakcija gotova, dobiva se neporozni materijal s površinom koja je zatvorena s unakrsno povezanim polimerom [18].

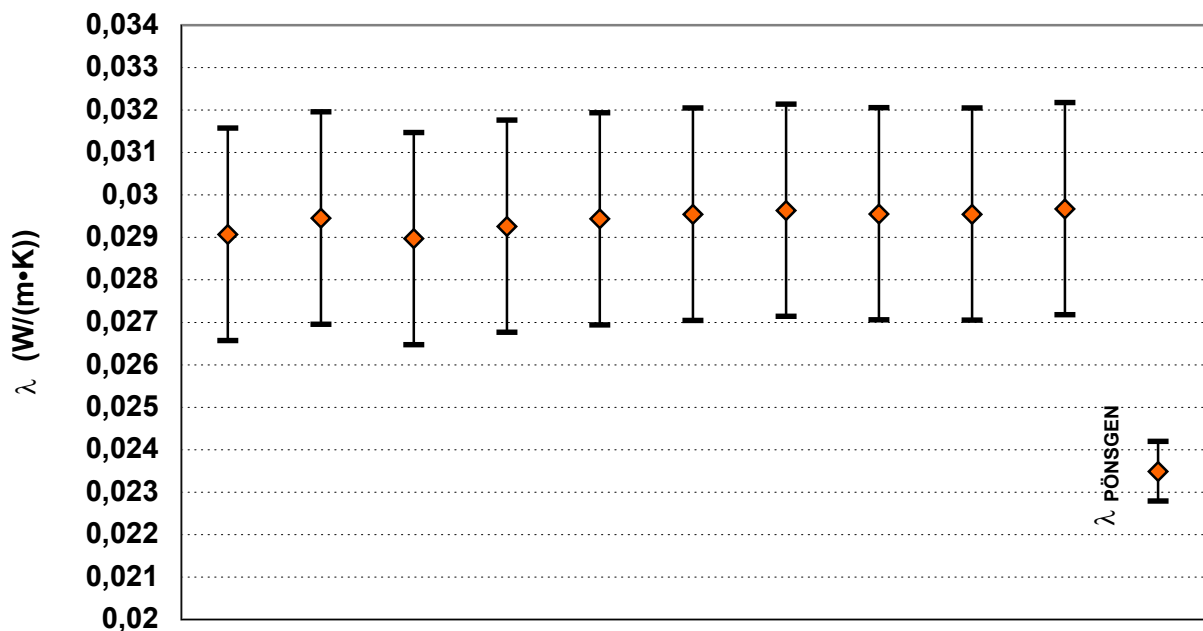
S ekološkog stanovišta, poliuretanske pjene relativno su bezazlen proizvod, mogu se odlagati u gradskim odlagalištima otpada. Također, promatravši utjecaj poliuretanskih pjena na zdravlje čovjeka, fiziološki je sasvim sigurna, ne sadrži toksične tvari i nije poznat utjecaj na povećanje rizika od kancerogenih oboljenja. Recikliranje proizvoda od poliuretana moguće je bilo da se radi o recikliranju u novi materijal, sirovinu (kemijsko recikliranje) ili u energiju (toplinsko recikliranje).

Rezultat mjerenja toplinske provodnosti poliuretana gustoće  $42 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i debljine 100 mm s

Pönsgenovim uređajem:  $\lambda = 0,0235 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0007 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

Mjerna veličina (jedinica)	Redni broj mjerenja									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(t_1)$	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
$\ln(t_2)$	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00
$\vartheta(t_1)$ (°C)	43,4	45,5	43,7	43,4	43,9	44,4	44,6	44,9	45,7	44,9
$\vartheta(t_2)$ (°C)	47,5	49,6	47,9	47,5	48,0	48,4	48,7	49,0	49,7	48,9
$\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$ (K)	4,11	4,09	4,16	4,11	4,09	4,07	4,06	4,07	4,07	4,06
$P$ (W)	0,300	0,303	0,303	0,303	0,303	0,303	0,303	0,303	0,302	0,302
$\Delta P/P$ (%)	0,004	0,006	0,000	0,001	0,001	0,003	0,002	0,001	0,004	0,000
$\lambda$ (W/(m·K))	0,0291	0,0295	0,0290	0,0293	0,0294	0,0295	0,0296	0,0296	0,0295	0,0297
$U_\lambda$ (W/(m·K))	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
$R^2$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tablica 8: Rezultati mjerenja toplinske provodnosti poliuretana, metodom vruće žice



Slika 29: Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti poliuretana, mjerene s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja).

	Opis	Jedinica	Iznos	Osjetljivost	Opis sastavnice	Tip	Jedinica	Iznos	Osjetljivost
1	Nesigurnost duljine Pt žice, $u_L$	m	$7,899 \cdot 10^{-6}$	0,0291	Nesigurnost pomičnog mjerila, $u_R$	B	m	$75 \cdot 10^{-7}$	1
					Standardna nesigurnost duljine, $s(L)$	A	m	$2,48 \cdot 10^{-6}$	1
2	Nesigurnost snage, $u_P$	W	$2,804 \cdot 10^{-5}$	0,0969	Nesigurnost voltmetra, $u_V$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	3,7383
					Nesigurnost ampermetra, $u_A$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	0,08026
					Standardna nesigurnost snage, $s(P)$	A	W	$8,8 \cdot 10^{-8}$	1
3	Nesigurnost poč. vremena, $u_{t1}$	s	0,0012	0,000196	---	B	--	--	--
4	Nesigurnost zavr. vremena, $u_{t2}$	s	0,0012	0,0000721	---	B	--	--	--
5	KORELACIJA $r(t_1, t_2)$	s	0,0012	1	---	1	--	--	--
6	Nesigurnost promjene temperature $u_{\Delta\theta}$	K	0,06531	0,00708	Nesigurnost voltmetra, $u_{V1}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	80,066
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A1}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3699,8
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,1}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 11055,9
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R01}$	B	$\Omega$	$15,59 \cdot 10^{-4}$	- 7,5508
					Nesigurnost voltmetra, $u_{V2}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	80,617
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A2}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3746,3
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,2}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 11484,5
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R02}$	B	$\Omega$	$15,59 \cdot 10^{-4}$	- 7,5934
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr1}$	B	°C	0,02126	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu1}$	B	°C	0,02303	1
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr2}$	B	°C	0,02327	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu2}$	B	°C	0,02521	1
					Nesigurnost zbog aproksimacije pravcem regresije, $s_{\theta}^2$	A	°C	$4,17 \cdot 10^{-7}$	1
Proširena nesigurnost toplinske provodnosti: $U_\lambda = 2 \cdot u_\lambda = 0,0025 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$									

**Tablica 9:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti poliuretana za dinamičku metodu



## 8.3 Mjerenje uzoraka od ekspaniranog polistirena

Ekspanirani polistiren ili kraće - EPS je toplinsko-izolacijski materijal s najvećom primjenom u graditeljstvu. Njegov udjel u potrošnji toplinsko-izolacijskih materijala u graditeljstvu premašuje 40 %. EPS je nastao 1954. godine u laboratoriju tvrtke BASF (tadašnja SR Njemačka) pod imenom "STYROPOR" - i danas se najčešće ekspanirani polistiren kolokvijalno u nas naziva "Stiropor". Postupak proizvodnje EPS provodi se u tri faze [19]:

### I. faza: Predekspaniranje

Ekspanirajuće granule polistirena kratkotrajno se griju s vodenom parom zbog čega stijenke polistirena omekšaju i lako hlapljivi ugljikovodik iz granula prelazi u plinovito stanje. Granule ekspaniraju povećavajući svoj volumen za 20 do 40 puta. Istodobno, gustoća se smanji za cca 20 puta.

### II. faza: Dozrijevanje

Ovakve predekspanirane granule premještaju se u paropropusne silose gdje se difuzijski stabiliziraju - dozrijevaju. Ova faza traje do 24 sata.

### III. faza: Konačna ekspanzija

Stabilizirane granule premještaju se u zatvorene metalne i nepropusne kalupe gdje uz djelovanje suhozasićene vodene pare dolazi do konačne ekspanzije. Na ovaj način granule ponovno omekšaju i budući da zbog zatvorenih nepropusnih kalupa promjena volumena nije moguća, granule se međusobno slijepe i tvore kompaktni materijal sa zatvorenim porama (ćelijama) u kojima se nalazi plin ugljikovodik. Gotovi blokovi polistirena vade se iz kalupa, dimenzijski stabiliziraju i režu u ploče. Ovdje je važno napomenuti da nije nebitno kada su granule polistirena proizvedene, odnosno koliko vremena će proći od proizvodnje granula do njihove ekspanzije i proizvodnje EPS. Naime, zbog dugotrajne izloženosti atmosferskim uvjetima, a pogotovo pri povišenim temperaturama, plin iz granula hlapi i bitno snižava toplinsko-izolacijska svojstva budućeg proizvoda, odnosno EPS.

Ekspanirani se polistiren (EPS) najčešće proizvodi u 6 različitih tipova (gustoća). Svaki od ovih tipova ima svoje područje primjene u graditeljstvu, odnosno ugradnje. Najčešće se primjenjuje za fasadne sustave i plivajuće podove.

Osim što je izvrstan toplinski izolator, EPS spada u red "teško zapaljivih građevnih materijala" i vrlo malo upija vodu.

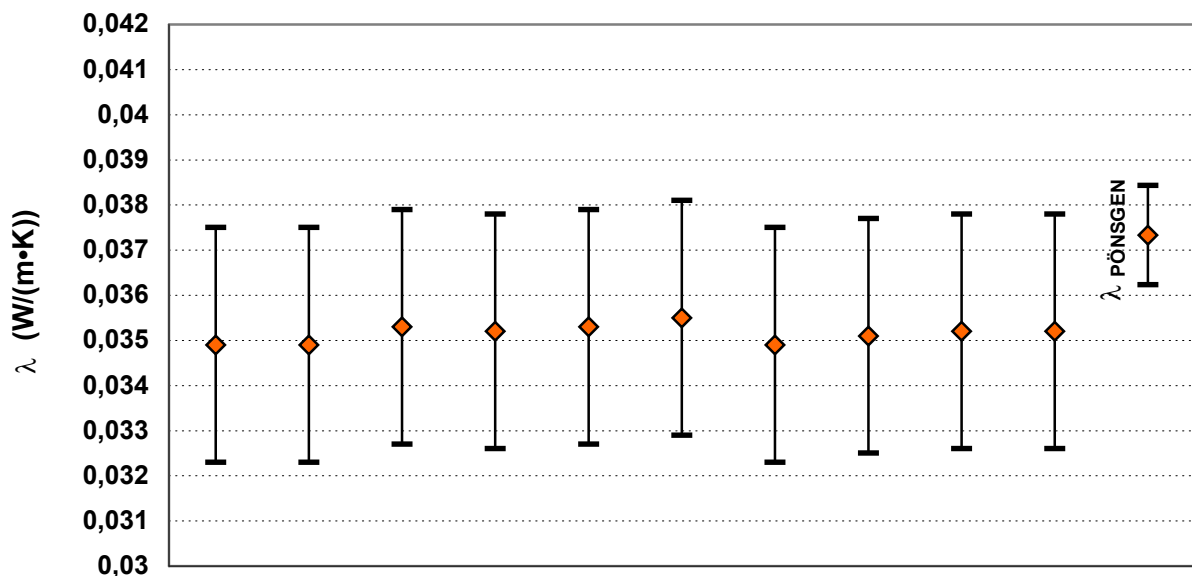
EPS je za ljude i okoliš neškodljiv, nije otrovan i prilikom zapaljenja ne razvija štetne plinove. Lako se reciklira i budući da je jedan od najboljih toplinskih izolatora i on, kao i ostali uštedom energije fosilnih goriva, sudjeluje u smanjenju emisije CO<sub>2</sub>.

Rezultat mjerenja toplinske provodnosti ekspaniranog polistirena gustoće  $20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

i debljine 60 mm s Pönsgenovim uređajem:  $\lambda = 0,0373 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0011 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

Mjerna veličina (jedinica)	Redni broj mjerenja									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(t_1)$	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50
$\ln(t_2)$	5,70	5,70	5,70	5,70	5,70	5,70	5,70	5,70	5,70	5,70
$\vartheta(t_1)$ (°C)	51,2	50,4	51,0	51,4	49,5	50,5	51,2	49,7	50,7	51,1
$\vartheta(t_2)$ (°C)	55,4	54,7	55,3	55,7	53,7	54,7	55,5	53,9	54,9	55,4
$\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$ (K)	4,26	4,27	4,29	4,30	4,23	4,20	4,27	4,25	4,24	4,23
$P$ (W)	0,298	0,298	0,303	0,303	0,299	0,298	0,298	0,298	0,298	0,298
$\Delta P/P$ (%)	0,000	0,003	0,005	0,003	0,006	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003
$\lambda$ (W/(m·K))	0,0349	0,0349	0,0353	0,0352	0,0353	0,0355	0,0349	0,0351	0,0352	0,0352
$U_\lambda$ (W/(m·K))	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026	0,0026
$R^2$	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tablica 10: Rezultati mjerenja toplinske provodnosti ekspaniranog polistirena metodom vruće žice



Slika 30: Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti ekspaniranog polistirena, mjenog s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja).

	Opis	Jedinica	Iznos	Osjetljivost	Opis sastavnice	Tip	Jedinica	Iznos	Osjetljivost
1	Nesigurnost duljine Pt žice, $u_L$	m	$8,67 \cdot 10^{-6}$	0,0350	Nesigurnost pomičnog mjerila, $u_R$	B	m	$75 \cdot 10^{-7}$	1
					Standardna nesigurnost duljine, $s(L)$	A	m	$4,34 \cdot 10^{-6}$	1
2	Nesigurnost snage, $u_P$	W	$2,766 \cdot 10^{-5}$	0,1173	Nesigurnost voltmetra, $u_V$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	3,68849
					Nesigurnost ampermetra, $u_A$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	0,08079
					Standardna nesigurnost snage, $s(P)$	A	W	$7,2 \cdot 10^{-8}$	1
3	Nesigurnost poč. vremena, $u_{t1}$	s	0,0012	0,000324	---	B	--	--	--
4	Nesigurnost zavr. vremena, $u_{t2}$	s	0,0012	0,0000975	---	B	--	--	--
5	KORELACIJA $r(t_1, t_2)$	s	0,0012	1	---	1	--	--	--
6	Nesigurnost promjene temperature $u_{\Delta\theta}$	K	0,06908	0,00810	Nesigurnost voltmetra, $u_{V1}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	83,259
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A1}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3768,9
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,1}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ\text{C}}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 13012,5
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R01}$	B	$\Omega$	$17,11 \cdot 10^{-4}$	- 8,1104
					Nesigurnost voltmetra, $u_{V2}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	83,259
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A2}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3795,5
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,2}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ\text{C}}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 13561,0
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R02}$	B	$\Omega$	$17,11 \cdot 10^{-4}$	- 8,1675
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr1}$	B	°C	0,02507	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu1}$	B	°C	0,02716	1
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr2}$	B	°C	0,02716	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu2}$	B	°C	0,02942	1
					Nesigurnost zbog aproksimacije pravcem regresije, $s_{\theta}^2$	A	°C	$5,43 \cdot 10^{-7}$	1
Proširena nesigurnost toplinske provodnosti: $U_{\lambda} = 2 \cdot u_{\lambda} = 0,0026 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$									

**Tablica 11:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti ekspaniranog polistirena za dinamičku metodu

	Opis	Jedinica	Tip	1. mjerna točka - iznos	1. mjerna točka - osjetljivost	2. mjerna točka - iznos	2. mjerna točka - osjetljivost	3. mjerna točka - iznos	3. mjerna točka - osjetljivost
1.1	Nesigurnost debljine uzorka, $u_d$	m	A	0,00018	0,5901	0,00018	0,6138	0,00018	0,6399
1.2	Nesigurnost razlike temperatura, $u_{\Delta\theta}$	K	A	0,240	- 0,0035	0,240	- 0,0037	0,230	- 0,0039
1.3	Nesigurnost gustoće toplinskog toka, $u_{\dot{q}}$	$\frac{W}{m^2}$	A	0,002	0,0060	0,002	0,0060	0,003	0,0060
1.4	Ostale nesigurnosti	--	--	0,00053	1	0,00045	1	0,00063	1
1	Nesigurnost toplinske provodnosti, $u_{\lambda}$	$\frac{W}{m \cdot K}$	A	0,0010	1	0,0011	1	0,0011	1
2	Nesigurnost temperat. $u_{\theta SR}$	°C	A	0,118	1	0,118	1	0,117	1

**Tablica 12:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti ekspandiranog polistirena za stacionarnu metodu

Iznos toplinske provodnosti pri + 23 °C računa se pomoću linearne regresije iz triju izmjerenih vrijednosti toplinske provodnosti pri ispitnim temperaturama. Doprinos mjerne nesigurnosti linearne regresije ukupnoj mjernoj nesigurnosti računa se kako je opisano točkom 7.9.

Mjerna nesigurnost toplinske provodnosti staklene vune pri + 23 °C iznosi:  $0,0011 \frac{W}{m \cdot K}$

Podaci prema ispitivanjima provedenim u LGF.

## 8.4 Mjerenje uzoraka od ekstrudiranog polistirena

Za razliku od paropropusnog ekspaniranog polistirena (EPS), ekstrudirani polistiren (XPS) je potpuno paronepropustan i stoga se najviše primjenjuje za izolaciju površina gdje se očekuje vlaga (podrumski zidovi, ravni krovovi, temelji, podne izolacije i sl.). Spada u red teško zapaljivih materijala i visoke je tlačne čvrstoće. Nadalje, ekstrudirani polistiren otporan je na truljenje i s obzirom na njegov sastav jedini je materijal koji se široko primjenjuje u graditeljstvu, a da je kapilarna vodoupojnost u potpunosti onemogućena.

Također, ekološki je potpuno prihvatljiv ukoliko se sukladno sporazumu iz Kyota proizvodi bez halogenih i poluhalogenih elemenata: CFCs, HCFCs i HFCs. Budući da izlaganje proizvoda od ekspaniranog polistirena UV zračenju negativno djeluje na njegova tehnička svojstva, prilikom dužeg skladištenja ove proizvode je nužno zaštititi od utjecaja sunčevih zraka [20].

**Postupak ekstrudiranja.** Za razliku od procesa ekspaniranja, ovdje se granule polistirena skupa s dodacima stavljaju u ekstruder <sup>(6)</sup>. U ekstruderu se ova mješavina uz dodatak topline i visoki tlak (kontrolirani uvjeti) topi i miješa u gustu plastičnu tekućinu. Ovakva zagijana i gusta smjesa se potom pomoću posebnog pužnog mehanizma sabija u kalupe u kojima se i hladi. U trenutku izlaska iz ekstrudera, smjesa u kalupima ekspanira u jedinstvenu, sitnozrnatu jednoličnu pjenu s potpuno zatvorenim porama i izuzetno glatkom površinom.

Rezultat mjerenja toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena gustoće  $40 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i debljine 50 mm

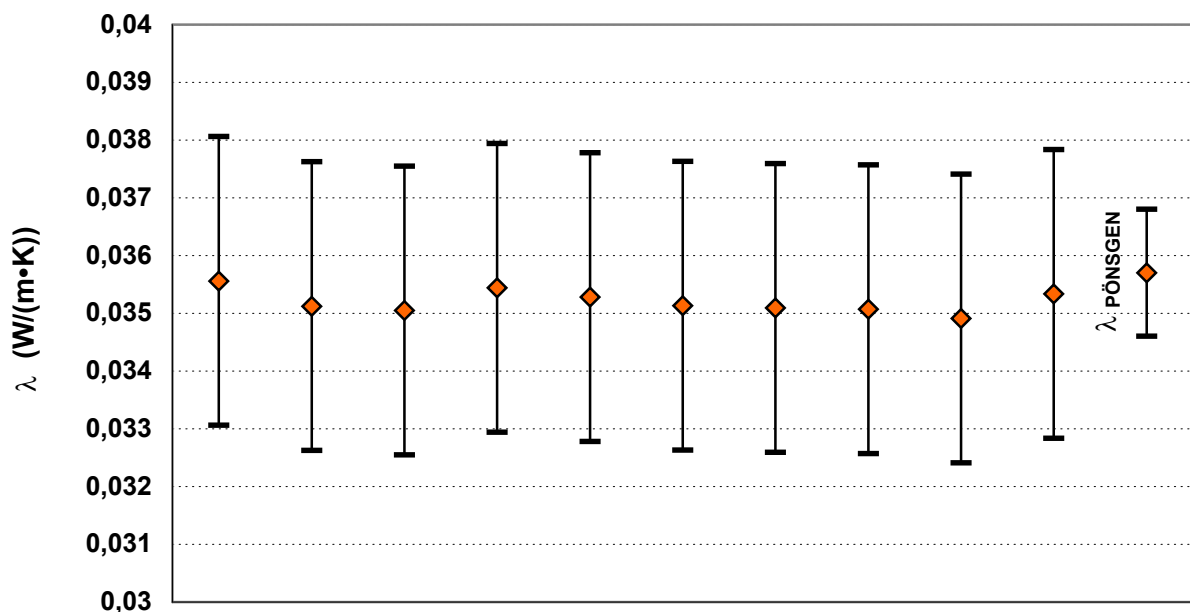
s Pönsgenovim uređajem:  $\lambda = 0,0357 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0011 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

---

<sup>(6)</sup> Ekstruder je stroj koji s jednim ili više pužnih vijaka pod tlakom sabija rastaljenu smjesu polistirena u odgovarajuće kalupe.

Mjerna veličina (jedinica)	Redni broj mjerenja									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(t_1)$	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50	4,50
$\ln(t_2)$	5,90	5,90	5,90	5,90	5,90	5,90	5,90	5,90	5,90	5,90
$\vartheta(t_1)$ (°C)	54,6	54,1	54,4	53,8	53,1	53,5	53,6	54,3	55,1	55,2
$\vartheta(t_2)$ (°C)	60,2	59,8	60,1	59,4	58,8	59,2	59,3	59,9	60,8	60,8
$\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$ (K)	5,60	5,67	5,68	5,62	5,65	5,67	5,70	5,68	5,70	5,63
$P$ (W)	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356	0,356
$\Delta P/P$ (%)	0,000	0,009	0,000	0,003	0,009	0,005	0,005	0,004	0,005	0,011
$\lambda$ (W/(m·K))	0,0356	0,0351	0,0350	0,0354	0,0353	0,0351	0,0351	0,0351	0,0349	0,0353
$U_\lambda$ (W/(m·K))	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
$R^2$	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999

Tablica 13: Rezultati mjerenja toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena metodom vruće žice



Slika 31: Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena, mjenog s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja).

	Opis	Jedinica	Iznos	Osjetljivost	Opis sastavnice	Tip	Jedinica	Iznos	Osjetljivost
1	Nesigurnost duljine Pt žice, $u_L$	m	$12,05 \cdot 10^{-6}$	0,1787	Nesigurnost pomičnog mjerila, $u_R$	B	m	$75 \cdot 10^{-7}$	1
					Standardna nesigurnost duljine, $s(L)$	A	m	$9,43 \cdot 10^{-6}$	1
2	Nesigurnost snage, $u_P$	W	$3,108 \cdot 10^{-5}$	0,0999	Nesigurnost voltmetra, $u_V$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	4,1434
					Nesigurnost ampermetra, $u_A$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	0,0859
					Standardna nesigurnost snage, $s(P)$	A	W	$6,7 \cdot 10^{-8}$	1
3	Nesigurnost poč. vremena, $u_{t1}$	s	0,0012	0,000282	---	B	--	--	--
4	Nesigurnost zavr. vremena, $u_{t2}$	s	0,0012	0,0000696	---	B	--	--	--
5	KORELACIJA $r(t_1, t_2)$	s	0,0012	1	---	1	--	--	--
6	Nesigurnost promjene temperature $u_{\Delta\theta}$	K	0,06697	0,005345	Nesigurnost voltmetra, $u_{V1}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	75,057
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A1}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3579,8
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,1}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 13890,2
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R01}$	B	$\Omega$	$23,78 \cdot 10^{-4}$	- 7,2330
					Nesigurnost voltmetra, $u_{V2}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	75,739
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A2}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3678,3
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,2}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 15328,8
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R02}$	B	$\Omega$	$23,78 \cdot 10^{-4}$	- 8,0158
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr1}$	B	°C	0,02677	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu1}$	B	°C	0,02900	1
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr2}$	B	°C	0,02951	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu2}$	B	°C	0,03197	1
Nesigurnost zbog aproksimacije pravcem regresije, $s_{\theta}^2$	A	°C	$8,28 \cdot 10^{-7}$	1					
Proširena nesigurnost toplinske provodnosti: $u_\lambda = 2 \cdot u_\lambda = 0,0025$									

**Tablica 14:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena za dinamičku metodu

	Opis	Jedinica	Tip	1. mjerna točka - iznos	1. mjerna točka - osjetljivost	2. mjerna točka - iznos	2. mjerna točka - osjetljivost	3. mjerna točka - iznos	3. mjerna točka - osjetljivost
1.1	Nesigurnost debljine uzorka, $u_d$	m	A	0,000015	0,6867	0,000015	0,7084	0,000015	0,7342
1.2	Nesigurnost razlike temperatura, $u_{\Delta\theta}$	K	A	0,240	- 0,0034	0,240	- 0,0036	0,240	- 0,0037
1.3	Nesigurnost gustoće toplinskog toka, $u_{\dot{q}}$	$\frac{W}{m^2}$	A	0,002	0,0050	0,002	0,0050	0,002	0,0050
1.4	Ostale nesigurnosti	--	--	0,00058	1	0,00050	1	0,00065	1
1	Nesigurnost toplinske provodnosti, $u_{\lambda}$	$\frac{W}{m \cdot K}$	A	0,0010	1	0,0010	1	0,0011	1
2	Nesigurnost temperat. $u_{\theta SR}$	°C	A	0,118	1	0,118	1	0,117	1

**Tablica 15:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena za stacionarnu metodu

Iznos toplinske provodnosti pri + 23 °C računa se pomoću linearne regresije iz triju izmjerenih vrijednosti toplinske provodnosti pri ispitnim temperaturama. Doprinos mjerne nesigurnosti linearne regresije ukupnoj mjernoj nesigurnosti računa se kako je opisano točkom 7.9.

Mjerna nesigurnost toplinske provodnosti staklene vune pri + 23 °C iznosi:  $0,0011 \frac{W}{m \cdot K}$

Podaci prema ispitivanjima provedenim u LGF.



## 8.5 Mjerenje uzoraka od toplinske žbuke

Žbuka je sveprisutni građevni materijal koji ne spada u red toplinsko-izolacijskih proizvoda i koji se gotovo uvijek spominje tek kao jedna od sastavnica sustava toplinske zaštite u graditeljstvu. Budući da je na tržištu već duže vrijeme prisutan proizvod čiji je komercijalni naziv: "Termo žbuka" čija su tehnička svojstva i sastav bitno različiti od obične žbuke, projektanti i investitori ponekad (rijetko) ipak zahtjevaju ispitivanje toplinske provodnosti toplinske žbuke.

Toplinska žbuka sastoji se od cementa, vapna i laganog agregata (pijesak do 4 mm) kao i obična žbuka, ali uz dodatak perlita i aditiva. Perlit je ekspanzirani vulkanski pijesak, odnosno amorfni mineral koji se sastoji od stopljenog natrij-kalij-aluminij silikata. Perlit se dodaje s ciljem povećavanja toplinsko-izolacijskih svojstava. Ponekad se umjesto perlita u sastav toplinske žbuke miješaju granule ekspanziranog polistirena. Aditivi su različiti dodaci kao zgušćivači, ubrzivači, stabilizatori, dodaci koji služe za poboljšanje adhezivnih svojstava žbuke, vodoodbojnosti i sl.

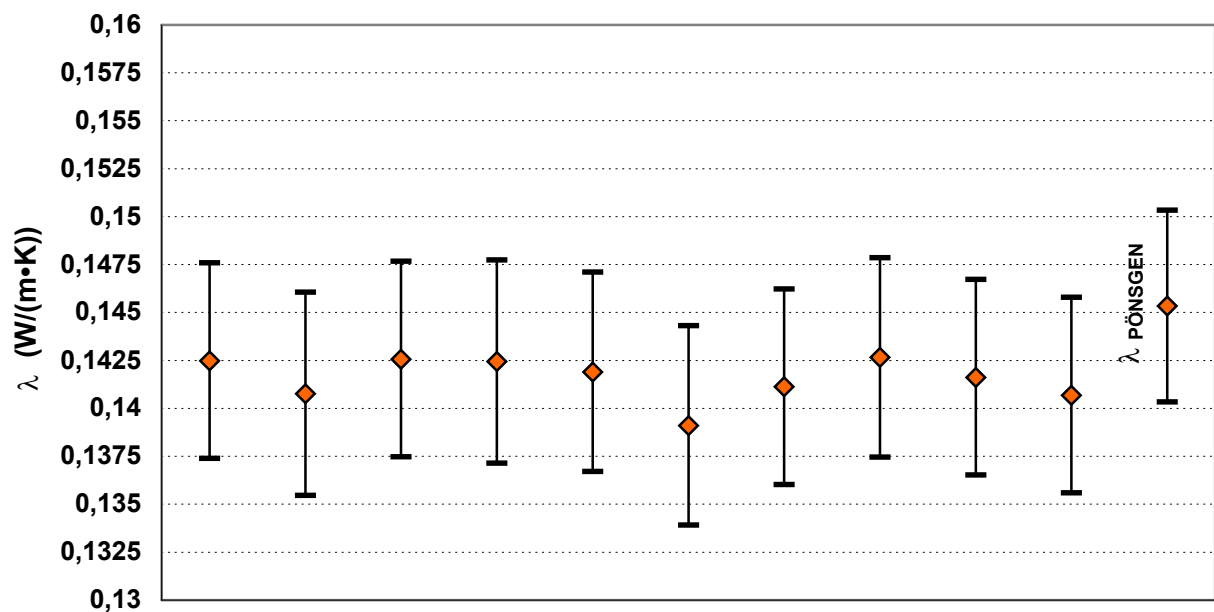
Zbog ovih dodataka, osim poboljšanja toplinsko-izolacijskih svojstava, toplinska žbuka manje je tlačne čvrstoće i manje gustoće od obične žbuke. Primjenjuje se za ručno žbukanje vanjskih i unutrašnjih zidova.

Rezultat mjerenja toplinske provodnosti toplinske žbuke gustoće  $600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i debljine 50 mm s

Pönsgenovim uređajem:  $\lambda = 0,1453 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0050 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

Mjerna veličina (jedinica)	Redni broj mjerenja									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(t_1)$	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00
$\ln(t_2)$	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00
$\vartheta(t_1)$ (°C)	27,9	27,4	27,6	28,4	28,5	28,8	29,4	29,2	29,2	29,5
$\vartheta(t_2)$ (°C)	30,9	30,4	30,6	31,4	31,5	31,9	32,4	32,2	32,2	32,5
$\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$ (K)	2,99	3,03	2,99	2,99	3,00	3,06	3,01	2,99	3,01	3,02
$P$ (W)	0,357	0,357	0,357	0,357	0,357	0,357	0,357	0,357	0,357	0,357
$\Delta P/P$ (%)	0,008	0,007	0,002	0,002	0,008	0,007	0,001	0,001	0,000	0,005
$\lambda$ (W/(m·K))	0,1425	0,1408	0,1426	0,1424	0,1419	0,1391	0,1411	0,1427	0,1416	0,1407
$U_\lambda$ (W/(m·K))	0,0051	0,0053	0,0051	0,0053	0,0052	0,0052	0,0051	0,0052	0,0051	0,0051
$R^2$	0,999	0,998	0,999	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,998	0,998

Tablica 16: Rezultati mjerenja toplinske provodnosti toplinske žbuke metodom vruće žice



Slika 32: Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti toplinske žbuke, mjerene s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja).

	Opis	Jedinica	Iznos	Osjetljivost	Opis sastavnice	Tip	Jedinica	Iznos	Osjetljivost
1	Nesigurnost duljine Pt žice, $u_L$	m	$14,93 \cdot 10^{-6}$	0,7125	Nesigurnost pomičnog mjerila, $u_R$	B	m	$75 \cdot 10^{-7}$	1
					Standardna nesigurnost duljine, $s(L)$	A	m	$12,91 \cdot 10^{-6}$	1
2	Nesigurnost snage, $u_P$	W	$2,979 \cdot 10^{-5}$	0,3994	Nesigurnost voltmetra, $u_V$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	3,972
					Nesigurnost ampermetra, $u_A$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	0,0898
					Standardna nesigurnost snage, $s(P)$	A	W	$9,2 \cdot 10^{-8}$	1
3	Nesigurnost poč. vremena, $u_{t1}$	s	0,0012	0,00236	---	B	--	--	--
4	Nesigurnost zavr. vremena, $u_{t2}$	s	0,0012	0,000118	---	B	--	--	--
5	KORELACIJA $r(t_1, t_2)$	s	0,0012	1	---	1	--	--	--
6	Nesigurnost promjene temperature $u_{\Delta\theta}$	K	0,04745	0,04768	Nesigurnost voltmetra, $u_{V1}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	71,858
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A1}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3180,8
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,1}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 7859,7
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R01}$	B	$\Omega$	$29,47 \cdot 10^{-4}$	- 7,2330
					Nesigurnost voltmetra, $u_{V2}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	71,467
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A2}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3129,4
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,2}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 7076,4
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R02}$	B	$\Omega$	$29,47 \cdot 10^{-4}$	- 7,1551
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr1}$	B	°C	0,01367	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu1}$	B	°C	0,01481	1
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr2}$	B	°C	0,01513	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu2}$	B	°C	0,01640	1
					Nesigurnost zbog aproksimacije pravcem regresije, $s_{\theta}^2$	A	°C	$1,44 \cdot 10^{-6}$	1
Proširena nesigurnost toplinske provodnosti: $U_\lambda = 2 \cdot u_\lambda = 0,0051 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$									

**Tablica 17:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti toplinske žbuke za dinamičku metodu

## 8.6 Mjerenje uzoraka od pluta

Pluto je od svih prije navedenih građevnih materijala najmanje u upotrebi u graditeljstvu kao toplinski izolator. Budući da je pluto prirodni materijal, njegova cijena je nekoliko puta veća od najskupljeg umjetnog toplinsko-izolacijskog materijala. Međutim, upravo zbog toga što je potpuno prirodni materijal, nemoguće ga je zanemariti jer na tržištu postoji interes (nevelik) za prirodnim i ekološki neškodljivim materijalima, bez obzira na cijenu.

Pluto se proizvodi od kore hrasta plutnjaka (*Quercus Suber L.*) koji raste u zapadnom Mediteranu. Prva kora hrasta skida se tek nakon 25 godina njegova rasta i onda se proces može ponavljati svakih 9 godina. U presjeku pluto podsjeća na pčelinje saće, njegovu strukturu čine 50 % gusto zbijene četverobridne ćelije i 50 % zrak. Kora hrasta plutnjaka nakon skidanja se usitnjava i preša u kalupe na visokoj temperaturi pri čemu se smole iz hrastove kore lijepe (često se dodaje i umjetna fenol - formaldehidna smola) i nastaje plutena podloga [21].

Osim spomenute činjenice da je pluto prirodni materijal, u njegove dobre strane spada i svojstvo samogasivosti. Savitljiv je, elastičan, udoban i gibak i ne postoji rizik od statičkog elektriciteta. Također, lako se uklapa u različito dizajnirane stilove i interijere. Najčešće se koristi kao podloga za drvene podove (parket) i kao završna i ukrasna obloga unutrašnjih zidova.

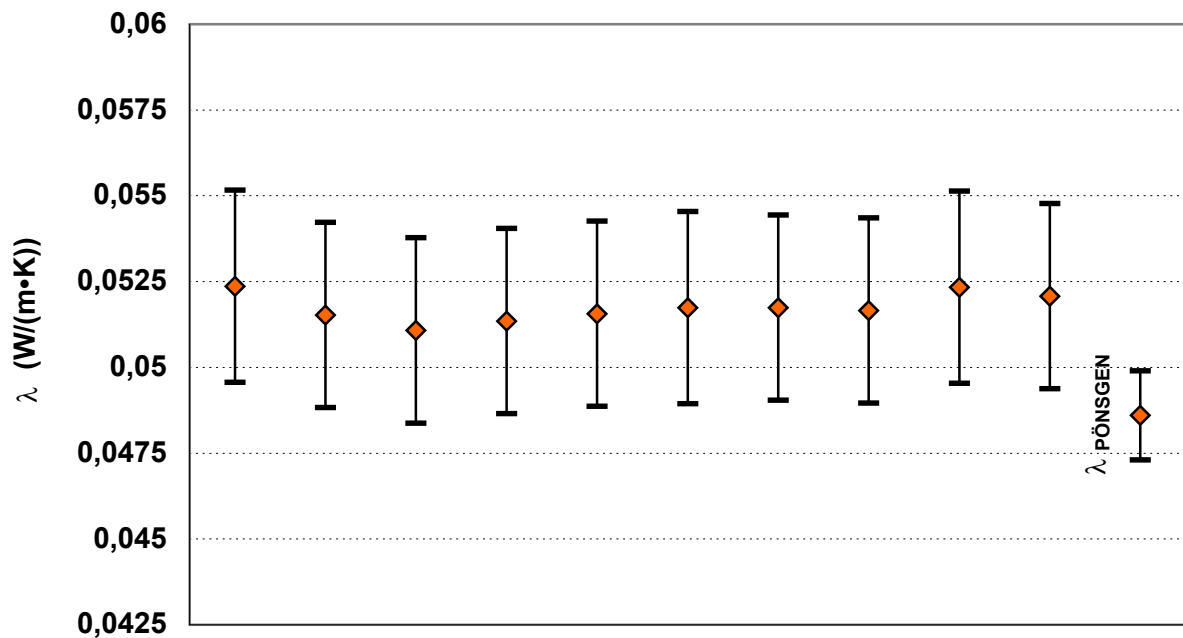
Cijena plutnih podloga nije jedino loše svojstvo koje ovaj materijal posjeduje. Budući da se hrast plutnjak tijekom rasta tretira s pesticidima i insekticidima, ovo značajno utječe na kakvoću zraka u prostoriji.

Rezultat mjerenja toplinske provodnosti pluta gustoće  $198 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i debljine 34 mm s Pönsgenovim

uređajem:  $\lambda = 0,0486 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0013 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

Mjerna veličina (jedinica)	Redni broj mjerenja									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(t_1)$	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00
$\ln(t_2)$	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30
$\vartheta(t_1)$ (°C)	38,5	38,7	38,7	38,2	38,2	38,6	38,6	38,8	38,9	38,9
$\vartheta(t_2)$ (°C)	42,0	42,4	42,3	41,8	41,8	42,1	42,1	42,4	42,5	42,5
$\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$ (K)	3,54	3,60	3,64	3,61	3,60	3,58	3,58	3,59	3,54	3,56
$P$ (W)	0,359	0,359	0,359	0,359	0,359	0,358	0,358	0,359	0,359	0,359
$\Delta P/P$ (%)	0,008	0,001	0,003	0,004	0,006	0,004	0,004	0,007	0,004	0,009
$\lambda$ (W/(m·K))	0,0524	0,0515	0,0511	0,0514	0,0516	0,0517	0,0517	0,0517	0,0523	0,0521
$U_\lambda$ (W/(m·K))	0,0028	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0028	0,0027	0,0027	0,0028	0,0027
$R^2$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tablica 18: Rezultati mjerenja toplinske provodnosti pluta metodom vruće žice



Slika 33: Dijagram s izmjerenim vrijednostima i pripadnom mjernom nesigurnosti toplinske provodnosti pluta, mjenog s Pönsgenovim uređajem i s vrućom žicom (10 mjerenja).

	Opis	Jedinica	Iznos	Osjetljivost	Opis sastavnice	Tip	Jedinica	Iznos	Osjetljivost
1	Nesigurnost duljine Pt žice, $u_L$	m	$7,861 \cdot 10^{-6}$	0,2619	Nesigurnost pomičnog mjerila, $u_R$	B	m	$75 \cdot 10^{-7}$	1
					Standardna nesigurnost duljine, $s(L)$	A	m	$2,357 \cdot 10^{-6}$	1
2	Nesigurnost snage, $u_P$	W	$3,039 \cdot 10^{-5}$	0,1461	Nesigurnost voltmetra, $u_V$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	4,0516
					Nesigurnost ampermetra, $u_A$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	0,0885
					Standardna nesigurnost snage, $s(P)$	A	W	$15,5 \cdot 10^{-8}$	1
3	Nesigurnost poč. vremena, $u_{t1}$	s	0,0012	0,000738	---	B	--	--	--
4	Nesigurnost zavr. vremena, $u_{t2}$	s	0,0012	0,0000201	---	B	--	--	--
5	KORELACIJA $r(t_1, t_2)$	s	0,0012	1	---	1	--	--	--
6	Nesigurnost promjene temperature $u_{\Delta\theta}$	K	0,05298	0,01441	Nesigurnost voltmetra, $u_{V1}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	72,628
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A1}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3300,7
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,1}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 9801,9
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R01}$	B	$\Omega$	$15,52 \cdot 10^{-4}$	- 7,4261
					Nesigurnost voltmetra, $u_{V2}$	B	V	$7,5 \cdot 10^{-6}$	73,068
					Nesigurnost ampermetra, $u_{A2}$	B	A	$1,85 \cdot 10^{-7}$	- 3360,7
					Nesigurnost lineariziranog koeficijenta električnog otpora platine, $u_{\alpha,2}$	B	$\frac{\Omega}{\Omega \cdot ^\circ C}$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 10703,0
					Nesigurnost električnog otpora platine pri 0 °C, $u_{R02}$	B	$\Omega$	$15,52 \cdot 10^{-4}$	- 7,5157
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr1}$	B	°C	0,01886	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu1}$	B	°C	0,02043	1
					Nesigurnost aproksimacije Callendar-van Dusenove jednadžbe, $u_{apr2}$	B	°C	0,02060	1
					Nesigurnost zbog temperature dovodnih bakrenih žica, $u_{Cu2}$	B	°C	0,02231	1
					Nesigurnost zbog aproksimacije pravcem regresije, $s_{\theta}^2$	A	°C	$6,15 \cdot 10^{-7}$	1
Proširena nesigurnost toplinske provodnosti: $U_{\lambda} = 2 \cdot u_{\lambda} = 0,0028 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$									

**Tablica 19:** Prikaz sastavnica mjerne nesigurnosti toplinske provodnosti pluta za dinamičku metodu

## 8.7 Ocjena rezultata usporednih mjerenja

Usporedna mjerenja provedena su tako da su se toplinske provodnosti na uzorcima građevnih materijala prvobitno ispitivale u Laboratoriju građevinske fizike (LGF) u Pönsgenovom uređaju u stacionarnom stanju. Svi su uzorci prije ispitivanja bili izloženi laboratorijskim uvjetima: ( $23\text{ °C} \pm 1\text{ °C}$  i  $55\% \pm 5\%$  relativne vlažnosti zraka). Sva ispitivanja toplinske provodnosti Pönsgenovim uređajem provedena su u tri točke, odnosno pri trima ispitnim temperaturama ( $10\text{ °C}$ ,  $20\text{ °C}$  i  $30\text{ °C}$ ). Za ove tri ispitne točke izračunat je pravac regresije iz kojeg se onda izračuna toplinska provodnost pri  $23\text{ °C}$ , kako je opisano točkom 4.4.3. Mjerne nesigurnosti ovih ispitivanja iskazane su i procijenjene u skladu sa 7. poglavljem.

Uzorci koji su ispitivani u Pönsgenovom uređaju sastojali su se od po dvije ploče izmjera:  $900\text{ mm} \times 900\text{ mm}$  pri nazivnim debljinama. Odstupanje je bilo jedino u slučaju toplinske žbuke, gdje se ispitivanje provelo na samo jednom uzorku koji je bio smješten ispod glavne grijalice, dok je s gornje strane grijalice bio referentni uzorak od ekstrudiranog polistirena, poznatih toplinskih svojstava, koji se u LGF i rabi upravo za ovakva ispitivanja. Uzorak toplinske žbuke je prije ispitivanja 28 dana sazrijevaao u laboratorijskim uvjetima i nije prije ispitivanja bio isušivan kako propisuje njegova norma proizvoda, nego je s ciljem usporedivosti s dinamičkim ispitivanjima, bio kondicioniran na  $23\text{ °C}$  i  $55\%$  relativne vlažnosti zraka.

Dinamička ispitivanja pomoću metode vruće žice provedena su na uzorcima pri nazivnim debljinama i izrezanima tako da se mogu smjestiti u komoru u kojoj su ispitivanja izvršena. Prije svakog mjerenja uzorci su u komori kondicionirani najmanje dva sata s ciljem da ne postoji razlika između temperature zraka u komori i temperature uzorka. Također, s ovime se postiže da razlika temperatura po presjeku uzorka teži k nuli. Mjerenja su provedena pri laboratorijskim uvjetima i svaki uzorak je ispitan 10 puta pri istim uvjetima: promjer i duljina platinske žice, snaga kojom se žica napaja, temperatura okoliša i vrijeme. Prije ispitivanja za svaku vrstu građevnog materijala odabirao se mjerni interval unutar kojeg se onda iz izmjerenih podataka izračunava toplinska provodnost, pazeći pri tom da su zadovoljena sva tri uvjeta kako je opisano točkom 2.5. Mjerne nesigurnosti za svako od 10 provedenih ispitivanja procijenjene su i iskazane u skladu sa 6. poglavljem. Izmjerene vrijednosti toplinske provodnosti metodom vruće žice se uspoređuju s toplinskom provodnošću dobivenom u Pönsgenovom uređaju (slike 25 - 31).

Mjerna oprema koja je korištena pri ovim ispitivanjima (i dinamičkim i stacionarnim) toplinske provodnosti je sljediva prema međunarodnim etalonima.

Parametar koji zorno prikazuje sposobnost nekog mjernog instrumenta ili postupka, u ovom slučaju metode vruće žice, da pri uvijek istim ulaznim veličinama, uz isti uzorak, s istim ispitivačem, ali u drugo vrijeme, daje isti rezultat, zove se relativna pogreška ponovljivosti i označava se s *b*.

Nadalje, iz 10 izmjerenih vrijednosti toplinske provodnosti, dobivenih pomoću metode vruće žice, izračunava se aritmetička sredina i pridružuje se najveća pojedina procjenjena mjerna nesigurnost. Ova se aritmetička sredina toplinske provodnosti dobivena pomoću metode vruće žice, također uspoređuje s toplinskom provodnosti koja je dobivena u LGF u Pönsgenovom uređaju u stacionarnom stanju (tablica 11).

**Relativna pogreška ponovljivosti (b):**

Za ovaj slučaj:

$$b = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\bar{\lambda}} \cdot 100 \quad \dots\dots\dots (8.1)$$

Gdje su:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i \quad \dots\dots\dots \text{Aritmetička sredina toplinske provodnosti pojedinog uzorka}$$

 $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$  ..... Najveća i najmanja izmjerena vrijednost toplinske provodnosti

Staklena vuna	Kamena vuna	Poliuretan	Ekspandirani polistiren	Ekstrudirani i polistiren	Toplinska žbuka	Pluto
3,6	1,3	2,3	1,7	2,0	2,5	2,5

**Tablica 20:** Relativna pogreška ponovljivosti (%) mjerenja toplinske provodnosti dinamičkom metodom vruće žice

**Usporedba toplinskih provodnosti dobivenih pomoću metode vruće žice i toplinskih provodnosti dobivenih Pönsgenovim uređajem:**

UZORAK	$\lambda_{\text{VRUĆA ŽICA}}$ $\frac{W}{m \cdot K}$	$\lambda_{\text{PÖNSGEN}}$ $\frac{W}{m \cdot K}$	RAZLIKA REZULTATA %
STAKLENA VUNA	0,0444 ± 0,0029	0,0457 ± 0,0014	- 2,8
KAMENA VUNA	0,0456 ± 0,0025	0,0434 ± 0,0013	5,1
POLIURETAN	0,0294 ± 0,0025	0,0235 ± 0,0007	25,1
EKSPANDIRANI POLISTIREN	0,0352 ± 0,0026	0,0373 ± 0,0011	- 5,6
EKSTRUDIRANI POLISTIREN	0,0352 ± 0,0025	0,0357 ± 0,0011	- 1,4
TOPLINSKA ŽBUKA	0,1415 ± 0,0053	0,1453 ± 0,0050	- 2,6
PLUTO	0,0517 ± 0,0028	0,0486 ± 0,0013	6,4

**Tablica 21:** Skupni prikaz rezultata usporednih mjerenja



Iz tablice 21 slijedi da se, osim kod poliuretana, svi rezultati usporednih ispitivanja razlikuju unutar 7 %. Nadalje, dijagrami (slike) označeni brojevima od 25 do 31 prikazuju preklapanje mjernih rezultata ovih metoda s obzirom na mjernu nesigurnost. I ovdje su također, osim kod tvrdih ploča od poliuretana, rezultati vrlo dobri. Važno je istaknuti da se u svim mjerenjima, osim kod uzorka toplinske žbuke, mjerne nesigurnosti ovih metoda razlikuju tako da su mjerne nesigurnosti kod dinamičke metode veće. Analizom sastavnica mjerne nesigurnosti dinamičke metode utvrđeno je da je najdominantnija sastavnica mjerna nesigurnost razlike temperature  $u_{\Delta 9}$ , pogotovo u onim slučajevima kad se ova razlika približava vrijednosti od 3 K. Što je razlika temperatura veća, to je ukupna mjerna nesigurnost dinamičke metode vruće žice manja. Nažalost, uz veću razliku temperatura ponekad je nemoguće ostvariti ostala dva uvjeta iz točke 2.5 (uvjet o konstantnosti snage i koeficijent korelacije).

Razlog zašto se rezultati mjerenja toplinske provodnosti metodom vruće žice i stacionarnom metodom u Pönsgenovom uređaju kod poliuretana više razlikuju nego kod ostalih materijala, može biti u sljedećem: *Promjena kontinuiteta strukture materijala može biti uzroku razlike između toplinske provodnosti na tim mjestima.*

Činjenica je da su uzorci mineralnih vuna i polistirena prvobitno bili o ispitani u komercijalne svrhe u Laboratoriju građevinske fizike IGH i da su od strane naručitelja ispitivanja dostavljeni u stanju koje zadovoljava zahtjeve norme dotičnog proizvoda s obzirom na starenje. Nakon ispitivanja u Pönsgenovom uređaju u LGF, ove sam uzorke dobio na korištenje skupa s rezultatima mjerenja. Upravo su iz ovih "ostarenih" uzoraka izrađeni i uzorci za ispitivanje dinamičkom metodom vruće žice koji su onda dali rezultate sljedivi onima iz Pönsgenovog uređaja. Slično je bilo i s toplinskom žbukom. Uzorak toplinske žbuke izrađen je u kalupu i ostavljen na starenje više od 28 dana kako propisuje norma proizvoda. Prvobitno je ispitan u Pönsgenovom uređaju, a odmah potom i metodom vruće žice. Sljedivost ovih rezultata s onima iz Pönsgena također je vrlo dobra.

Što se dogodilo s poliuretanom? Iz tablice 21 vidi se da su razlike rezultata dobivenih dinamičkom metodom od onih dobivenih stacionarnom metodom približno 25 %. Uzorak poliuretana nabavljen je kao donacija iz tvornice koja se bavi izradom sirovih proizvoda od tvrde poliuretanske pjene koja se potom u drugim tvrtkama reže i ugrađuje kao ispuna u različite toplinsko-izolacijske svrhe. Uzorak nije prošao proceduru starenja u određenim uvjetima, ispitan je prvo u Pönsgenovom uređaju, a potom je izrezan i ispitan pomoću metode vruće žice. Budući da je poliuretan porozni materijal u kojem se nalazi plin polietilen zarobljen unutar pjene u obliku velikog broja mjehurića, moguće je da proces stabilizacije plina nije bio dovršen. Nakon ovog, nabavljen je još jedan uzorak od poliuretana, nepoznatog proizvođača, izrezan iz jednog starog limenog panela. Međutim, ovaj je uzorak bio u lošem stanju, neravnih površina i malo zakrivljen. Rezanjem uzorka na manju debljinu dobiveno je na kakvoći površine, a donekle se smanjila i zakrivljenost. Ipak, i ovaj je uzorak ispitan koristeći obje ispitne metode i rezultati ovog dopunskog ispitivanja su kako slijedi:

Rezultati mjerenja toplinske provodnosti *starog uzorka poliuretana*, gustoće  $22 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i debljine 75 mm s Pönsgenovim uređajem:

$$\lambda = 0,0309 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0023 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

Ispitivanje pomoću dinamičke metode vruće žice je ponovljeno 5 puta, relativna ponovljivost ispitivanja u skladu s (8.1) iznosi:  $b = 1,4 \%$ , a aritmetička sredina izmjerene toplinske provodnosti:

$$\lambda = 0,0283 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \pm 0,0026 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

Iz ovih se rezultata vidi da su im mjerne nesigurnosti podjednake što, osim kod toplinske žbuke, nije bio slučaj kod ostalih materijala. To se može opravdati zakrivljenošću ploče što je za posljedicu imalo povećanje mjerne nesigurnosti pri ispitivanju u Pönsgenovom uređaju.

Razlike između rezultata dobivenih stacionarnom i rezultata dobivenih dinamičkom mjernom metodom na ovom ostarenom uzorku poliuretana manja su od onih na svježem uzorku, te za aritmetičku sredinu toplinske provodnosti iznose: - 8,4 %.

Iz navedenog se može zaključiti da je kod ispitivanja neostarenog uzorka poliuretana *promjena kontinuiteta strukture materijala bila uzrok razlike između toplinske provodnosti*. Budući da je poliuretan uzorak s nestalnim punilom, odnosno da se sastoji od plina zarobljenog unutar pjene, očito je da disperzija gustoće nije jednolika po presjeku svježeg uzorka. Također, može se zaključiti da su nestabilnosti veće pri samoj površini uzorka gdje je ujedno i mjesto područje Pönsgenovog uređaja. Tijekom vremena ovo se stanje izjednači, a dio plina otiče u atmosferu i toplinsko-izolacijska svojstva degradiraju. Budući da se mjesto područje dinamičke metode vruće žice nalazi u središtu uzorka, dakle u stabilnijem području, ove su razlike bitno manje.

Mjerna veličina (jedinica)	Redni broj mjerenja				
	1	2	3	4	5
$\ln(t_1)$	5,30	5,30	5,20	5,20	5,20
$\ln(t_2)$	6,00	6,00	6,00	6,00	6,00
$\vartheta(t_1)$ (°C)	46,9	47,0	46,1	46,6	48,0
$\vartheta(t_2)$ (°C)	49,9	50,0	49,6	50,1	51,4
$\vartheta(t_1) - \vartheta(t_2)$ (K)	3,02	3,02	3,44	3,45	3,40
$P$ (W)	0,306	0,306	0,306	0,305	0,305
$\Delta P/P$ (%)	0,007	0,001	0,003	0,001	0,001
$\lambda$ (W/(m·K))	0,0282	0,0284	0,0283	0,0281	0,0285
$U_\lambda$ (W/(m·K))	0,0026	0,0026	0,0025	0,0025	0,0025
$R^2$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

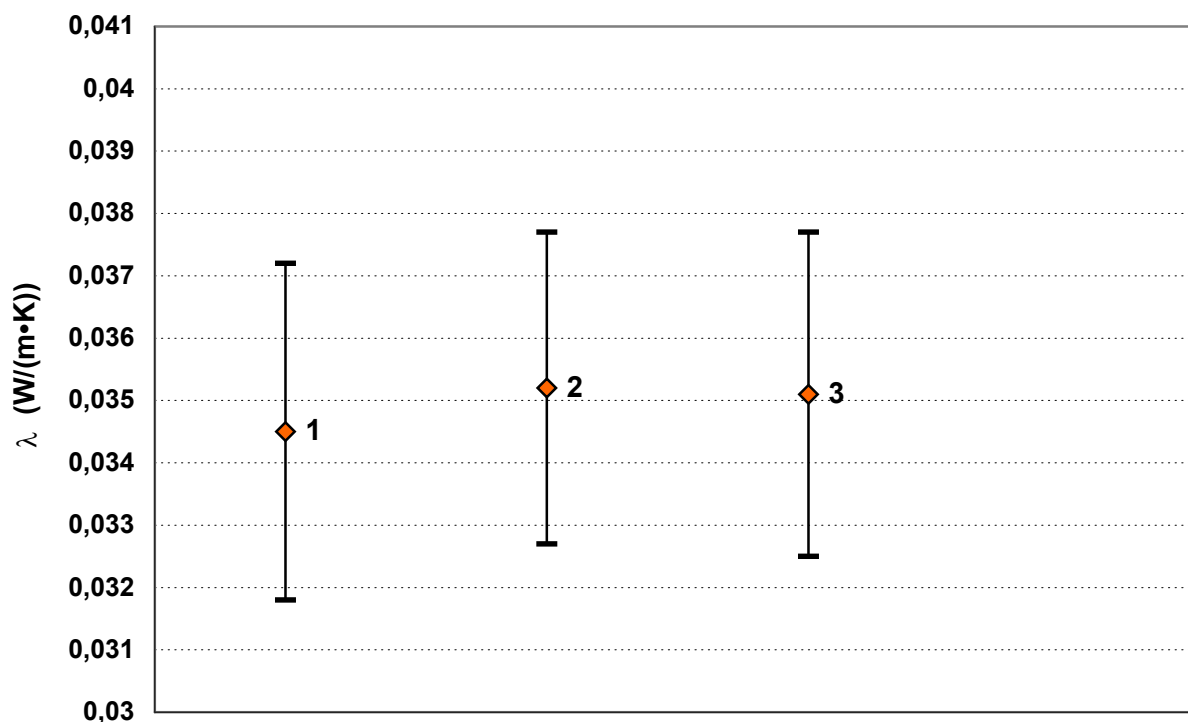
**Tablica 22:** Rezultati mjerenja toplinske provodnosti starog poliuretana metodom vruće žice

## 8.8 Usporedna mjerenja toplinske provodnosti na uzorku ekstrudiranog polistirena pomoću izvedbi (1), (2) i (3)

Na početku, u točki 2.1 bilo je govora o tri načina mjerenja napona i struje na platinskoj žici unutar uzorka kojemu se određuje toplinska provodnost. Također, rečeno je da je izvedba označena s brojem (2) odabrana kao ona koja će dati najbolje rezultate uz zadane mjerne uvjete: stabilnost snage kojom se Pt žica napaja i stabilnost temperaturnog polja u okolišu žice te na rubovima uzorka. Nadalje, u točki 2.1 najavljena su usporedna mjerenja kojima će se dokazati ova tvrdnja. U tu svrhu odabran je uzorak ekstrudiranog polistirena, nad kojim su osim mjerenja opisanih točkom 8.4 - izvedba (2), provedena i mjerenja označena brojevima (1) i (3). Rezultati ovih usporednih mjerenja prikazani su tablicom i dijagramom kako slijedi.

	$\lambda$ IZVEDBA (1) $\frac{W}{m \cdot K}$	$\lambda$ IZVEDBA (2) $\frac{W}{m \cdot K}$	$\lambda$ IZVEDBA (3) $\frac{W}{m \cdot K}$
Aritmetička sredina od $n = 10$ mjerenja	$0,0345 \pm 0,0027$	$0,0352 \pm 0,0025$	$0,0351 \pm 0,0026$

**Tablica 23:** Rezultati usporednih mjerenja toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena pomoću izvedbi (1), (2) i (3)



**Slika 34:** Grafički prikaz usporednih mjerenja toplinske provodnosti ekstrudiranog polistirena pomoću izvedbi (1), (2) i (3)

Iz navedenih mjernih rezultata vidi se da su sve tri izvedbe podjednako dobre. Razlika rezultata je unutar 2 % za uzorak ekstrudiranog polistirena.

## 9 ZAKLJUČAK

### 9.1 Pregled provedenih istraživanja

Zadaća ovog rada je dokazati hipotezu da se toplinska provodnost nekog građevnog toplinsko-izolacijskog materijala može odrediti pomoću dinamičke metode vruće žice u laboratorijskim uvjetima jednako dobro kao i normiranom stacionarnom metodom.

Počevši od teorijske pretpostavke i fizikalnog modela, definirajući rubne i početne uvjete, dobiveno je analitičko rješenje. Također, do rješenja koje opisuje temperaturno polje zbog zagrijavanja vrlo tanke Pt žice, došlo se i numeričkom metodom konačnih razlika. Definiran je mjerni sustav, analizirane su mjerne veličine i parametri koji određuju koliko dobro i s kojom se razlučivosti neka veličina mora mjeriti.

Temeljem ovih analiza, izrađen je uređaj koji žicu od platine zagrijava s konstantnom snagom i odabrani su instrumenti za mjerenje električnog napona i jakosti struje. Upravljanje mjernim procesom, prikupljanje mjernih podataka, izračuni i grafički prikaz tijeka mjerenja, provodilo se računalom.

Također, procjenjena je mjerna nesigurnost određivanja toplinske provodnosti metodom vruće žice. I na kraju, izvodeći brojna mjerenja pri različitim uvjetima (snaga, vrijeme, duljina i debljina žice) i na različitim uzorcima toplinsko-izolacijskih materijala, zaključeno je sljedeće:

- a) Koeficijent korelacije pravca kojim se pomoću metode najmanjih kvadrata aproksimiraju mjerni rezultati unutar odabranog intervala:  $R^2 \sim 1$
- b) Razlika temperatura na mjernom intervalu  $[\vartheta_R(t_2) - \vartheta_R(t_1)] = 3 \text{ K}$
- c) Rasipanje izmjerenih vrijednosti snage u odabranom mjernom intervalu ne smije biti veće od 0,01 %:

Ako niti jedan od ova tri uvjeta nije izostavljen, mjerenje toplinske provodnosti dinamičkom metodom vruće žice može se smatrati vjerodostojnim.

Iz gore navedenih uvjeta proizlazi da je kritična točka dinamičkog mjerenja upravo izbor mjernog intervala. Nažalost, taj se izbor ne može točno matematički odrediti, nego je rezultat subjektivne procjene mjeritelja, odnosno ovisi o njegovu iskustvu te sposobnosti promatranja i stvaranja zaključaka. Neki od ovih zaključaka su:

- Što je veća temperaturna provodnost materijala uzorka koji se ispituje, bit će i veći utjecaj ispravne procjene mjernog intervala na točnost mjerenja.
- Mjerni se interval u pravilu izabire pri kraju krivulje koja prikazuje dinamiku promjene temperature s vremenom (slika 10).
- Pri manjim temperaturnim razlikama mjerna nesigurnost raste. Izbor mjernog intervala ograničen je i karakteristikama mjernog sustava
- Promjer Pt žice u odnosu na duljinu i debljinu uzorka mora biti zanemariv.

S obzirom na ovdje provedena ispitivanja, dinamička metoda mjerenja toplinske provodnosti toplinsko-izolacijskih građevnih materijala, najbolje rezultate postiže od  $0,03 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$  do  $0,2 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ .

## 9.2 Glavni rezultati rada i mogućnosti daljnjeg istraživanja

Rezultati mjerenja provedenih nad najvažnijim toplinsko-izolacijskim građevnim materijalima su takvi da se može zaključiti sljedeće: "Dinamička metoda vruće žice može se primjenjivati pri ispitivanju toplinske provodnosti na materijalima od mineralnih vuna, ekstrudiranih i ekspandiranih polistirena, pluta i za toplinske žbuke. Što se tiče poliuretanskih materijala, to se sa sigurnošću ne može reći. Ove materijale bi svakako trebalo ispitati u različitim debljinama i u strogo kontroliranim i identičnim ispitnim uvjetima za obje metode.

Ako se u razmatranje uzmu u obzir iskazane mjerne nesigurnosti dinamičkih odnosno stacionarnih mjerenja, vidi se da su mjerne nesigurnosti dinamičkih ispitivanja dvostruko veće od onih stacionarnih uz jednaku razinu vjerodostojnosti od 95 %. To svakako ne ide u prilog dinamičkoj metodi, ali ako se uzme u obzir cijena jednog Pönsgenovog uređaja i vrijeme trajanja stacionarnih mjerenja, onda se metoda vruće žice može preporučiti u svim onim mjernim postupcima određivanja toplinske provodnosti toplinsko-izolacijskih materijala gdje su zahtjevi na točnost manji. Primjerice, mjerenja tijekom proizvodnje toplinsko-izolacijskih materijala, kontrolna mjerenja, mjerenja na terenu (in situ) i ostala mjerenja koja se onda mogu nadzirati postupkom umjeravanja pomoću normirane stacionarne metode.

Ukratko, glavne prednosti dinamičke metode nad stacionarnom su:

- jednostavnija i jeftinija mjerna oprema ;
- vrijeme trajanja ispitivanja je kraće;
- ispitivanja se mogu provoditi i izvan laboratorija pri zatečenim atmosferskim uvjetima.

Nedostaci dinamičke metode u odnosu na stacionarnu:

- subjektivnost pri određivanju mjernog intervala;
- veća mjerna nesigurnost uz istu vjerodostojnost od 95 %;
- stacionarna metoda je normirana mjerna metoda određivanja toplinske provodnosti toplinsko-izolacijskih građevnih materijala.

Istraživanja opisana ovim radom u budućnosti se mogu nastaviti u sljedećem:

- Provesti usporedna mjerenja nad svim ovdje navedenim grupama toplinsko-izolacijskih građevnih materijala na sljedeći način:
  - Tijekom stacionarnih mjerenja, osim ispitne temperature, precizno mjeriti i bilježiti relativnu vlažnost zraka u mjernoj komori.
  - Dinamička mjerenja provesti u komorama s kontroliranim sadržajem vlage i temperaturnim poljem tako da se i ova mjerenja provode u istim mjernim uvjetima kao i stacionarna.
  - Na ovaj bi se način izbjegao utjecaj pogreške pri uspoređivanju mjernih rezultata koju kod stacionarnih mjerenja generira metoda najmanjih kvadrata. Primjerice, toplinska provodnost mjerena stacionarnom metodom, pri 23 °C i 55 % relativne vlažnosti zraka, ne bi se računala iz regresijskog pravca, nego bi se izmjerila upravo pri navedenim uvjetima. Također, mjerenje toplinske provodnosti dinamičkom metodom provelo bi se pri identičnim mjernim uvjetima i moglo bi se kao i kod stacionarne metode pravcem iskazati ovisnost toplinske provodnosti o temperaturi.
- Izmjeriti koliki je stvarni utjecaj odnosa duljine i debljine platinske žice na točnost mjerenja. U tu svrhu trebalo bi napraviti usporedna mjerenja na uzorku materijala koji ima najbolje usporedne rezultate (npr. ekstrudirani polistiren), pri istim mjernim uvjetima, ali na više različitih odnosa debljine i duljine Pt žice. Mjerenja provesti u kondicioniranim ispitnim uvjetima.
- Pokušati pronaći ili usavršiti postojeći model izbora mjernog intervala kako bi se subjektivnost onoga koji mjeri svela na najmanju moguću razinu.
- Istražiti, odnosno izmjeriti utjecaj dodirnih otpora i nesavršenosti površina uzoraka, utjecaj kakvoće i debljine lemovi, odnosno spojišta platinske žice s bakrenim mjernim vodovima ("end effect") na točnost mjerenja dinamičkom metodom vruće žice.

## 10 LITERATURA

- [1] HRN ISO 8302:1998, Toplinska izolacija - Mjerenje toplinskog otpora i srodnih veličina u ustaljenom stanju - Pločasti uređaj sa zaštićenom vrućom pločom.
- [2] Tehnički propis o uštedi energije i toplinskoj zaštiti u zgradama, Ministarstvo zaštite okoliša, prostornog uređenja i graditeljstva, 2005.
- [3] HRN EN 12524:2002, Građevni materijali i proizvodi - Svojstva s obzirom na toplinu i vlagu - Određivanje nazivnih i projektnih toplinskih vrijednosti.
- [4] HRN EN ISO 10456:2002, Toplinska izolacija - Građevni materijali i proizvodi - Određivanje nazivnih i projektnih toplinskih vrijednosti.
- [5] Traceable temperatures, J. V. Nicholas and D. R. White, Wiley 1995, West Sussex, England
- [6] Nauka o Toplini II, F. Bošnjaković, Tehnička knjiga, Zagreb, 1976.
- [7] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: Conduction of heat in solids, second edition, Oxford, 1959.
- [8] Advanced Engineering Mathematics, E. Kreyszig, Wiley & Sons INC., 1997.
- [9] Introduction to Heat Transfer, F. P. Incropera & D. P. DeWitt, Wiley & Sons INC., 1996.
- [10] Termodinamika II, A. Galović, FSB, 2003.
- [11] User Manual TLP-900/5, TAURUS Daten + Meßtechnik GmbH, Weimar, 1998.
- [12] M. Brezinščak: Vrlo točna metoda mjerenja toplinske provodnosti izolatora, Strojstvo, br. 23, Zagreb, 1981.
- [13] M. Bezjak: Mjerna nesigurnost određivanja toplinske vodljivosti građevinskih materijala, Magistarski rad, Zagreb, 2002.
- [14] Uputa za iskazivanje mjerne nesigurnosti, DZNM, Zagreb 1995.
- [15] HRN EN ISO/IEC 17025:2006, Opći zahtjevi za osposobljenost ispitnih i umjernih laboratorija (ISO/IEC 17025:2005)
- [16] Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement, EURACHEM / CITAC Guide CG 4, Second Edition, 2000.
- [17] M. Malekin: Vrednovanje / Ocjenjivanje vlakana od mineralne vune, Portal Gradimo d.o.o., 2004.
- [18] Priručnik za projektiranje zračnih kanala po sistemu ALP, Zagreb. ALP-AIR d.o.o. 2004.
- [19] Stiropor podsjetnik, www.novolit.com, 2005.
- [20] CertiFoam: Extruded polystyrene Insulation, Product Guide, www.diversifoam.com, 2006.
- [21] Podovi od pluta, Portal Gradimo d.o.o., 2006.

- [22] HRN EN ISO 12570:2002, Značajke građevnih materijala i proizvoda s obzirom na toplinu i vlagu - Određivanje vlage sušenjem na povišenoj temperaturi.
- [23] Jan L. M. Hensen, Abdullatif E. Nakhi: Fourier and Biot numbers and the accuracy of conduction modelling, Glasgow, 2005.
- [24] HRN EN ISO 7345:1998, Toplinska izolacija - Fizikalne veličine i definicije.
- [25] J. N. Bronštejn – K. A. Semendajev: Matematički priručnik za inženjere i polaznike visokih škola, Tehnička knjiga Zagreb, 1971.
- [26] M. Bezjak: Analitičko definiranje temperaturnog polja tijekom mjerenja toplinske provodnosti Pönsgenovim uređajem, Strojstvo, Zagreb 2004.
- [27] M. Brezinščak: Mjerenje i računanje u tehnici i znanosti, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [28] Termodinamika I, A. Galović, FSB, 2004.
- [29] M. Bezjak: Dinamička metoda mjerenja toplinske provodnosti, XVIII IMEKO WORLD CONGRESS, Rio de Janeiro, Brazil, 2006.
- [30] ISO 5725:1994: Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results Part 2: Basic method for the determination of repeatability and reproducibility of a standard measurement method.
- [31] BCR Information. Report EUR 7677 EN: Certification report on a reference material for the thermal conductivity of insulating materials between 170 K and 370 K.
- [32] Generalised hot wire method for thermal conductivity measurements, P. Prelovšek i B. Uran, J. Phys. E: Sci. Instrum., Vol. 17, Great Britain, 1984.
- [33] Neka iskustva u mjerenju toplinske provodnosti metodom vruće žice, J. Papković i Z. Franolić, Elaborat: 2900-2920-85-01, Zagreb, 1985.
- [34] D. Gracin i U. Desnica: Windows with heat mirrors for energy conservation, Energy Research, Vol. 8, 53-60 (1984).
- [35] Hideo Watanabe: Further examination of the transient hot-wire method for the simultaneous measurement of thermal conductivity and diffusivity, Metrologia, 2002., 39, 65-81.
- [36] Alojz Caharija: Dinamičko mjerenje toplinske vodljivosti kapljevine, doktorska disertacija, Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Zagreb, 1996.
- [37] W. N. dos Santos, R. Gregorio: Numerical and experimental determination of the minimum and maximum measuring times for the hot wire parallel technique, Ceramica vol. 49 no. 309, Sao Paulo 2003.
- [38] Jiri Zach, Stanislav Stasnik: Assessment of thermal conductivity of the building materials - Hot wire method, International symposium: Non-Destructive Testing in Civil Engineering, Berlin, 2003.
- [39] B Boháč, M. Gustavsson, L. Kubičar, V. Vretenar: Measurements of building materials by transient methods, Institute of Physics SAS, Bratislava. Slovakia, 2001.



- [40] L. Kubičar, B. Boháč, V. Vretenar, Š. Barta, G. Neuer, R. Brandt: Thermophysical parameters mesured by classic and transient methods, Institute of Physics SAS, Bratislava. Slovakia, 2001.
- [41] A. Galović, I. Boras, S. Švaić: The calculation of temperature field and heat flux of single-layered flat plate - Comparison of numericaly and mathematicaly obtained results. FSB Zagreb, Hrvatska.
- [42] Anter Corporation: Technical Note 74: Thermal Conductivity Measurement by the line Heat Source Method, [www.anter.com](http://www.anter.com), 2004.
- [43] Silas E. Gustafsson: Transient hot strip technicques for measuring thermal conductivity and thermal diffusivity, The Rigaku Journal, 1987.
- [44] R. N. S. Fassani, O. V. Trevisan: Analytical modeling of multipass welding process with distributed heat source, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Rio de Janeiro, 2005.
- [45] N. T. Nguyen, Y. W. Mai, S. Simpson, A. Ohta: Analytical aproximate Analytical approximate solution for double ellipsoidal heat source in finite thick plate, Welding research, 2004.
- [46] S. P. Andersson, C. Däcker: Measurement of thermal conductivity for non electrically conduction liquids and solids up to 1550 °C - for research and testing, Swedish Institute for Metals Researsch.
- [47] User's Manual Multimeter Model 2000, KEITHLEY INSTRUMENTS INC. , USA, 2000.
- [48] Catalogue: Resistance alloys, ISABELLENHÜTTE, Dillenburg, Deutschland.
- [49] International Catalogue: RS-COMPONENTS, UK, 2004.
- [50] Ω OMEGA, The Temperature Handbook, Vol 29, USA, 1995.
- [51] MICROSOFT: Visual Basic, Proffesional Edition, Version 5.0, USA, 2005.
- [52] Babić, Finka, Moguš: Hrvatski pravopis, VI. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

# ŽIVOTOPIS

Mladen Bezjak rođen je 19. studenoga 1963. u Zagrebu. Maturirao je 1982. godine na XV gimnaziji (tadašnji MIOC), a Fakultet strojarstva i brodogradnje upisao godinu dana poslije nakon izvršene vojne obveze u tadašnjoj državi. Diplomirao je 1989. godine, smjer proizvodni, usmjerenje automatika i regulacija. Iste godine zapošljava se u tvornici "Rade Končar - Generatori" gdje radi na poslovima izrade i montaže visokonaponskih motora i generatora. U studenome 1991. godine dragovoljno se priključuje Domovinskom ratu gdje ostaje do travnja 1992. U Institut građevinarstva Hrvatske dolazi 1995. godine gdje radi u Laboratoriju građevinske fizike na poslovima toplinskih, akustičnih i protivpožarnih ispitivanja građevnih materijala, konstrukcija i objekata. Tijekom rada u ovom laboratoriju značajno doprinosi akreditiranju laboratorija prema normi HRN EN ISO/IEC 17025 u područjima toplinskih i protupožarnih mjerenja. Također, objavljuje dva znanstvena rada:

1. J. Papković, M. Bezjak: *Ispitivanje koeficijenta prolaza topline (toplinska prohodnost, k) građevnih konstrukcija*, Zbornik radova XVI. Međunarodnog simpozija o grijanju, hlađenju i klimatizaciji i V. konferenciji o termografiji - INTERKLIMA 2001., Zagreb, Hrvatska.

2. M. Bezjak: *Procjena mjerne nesigurnosti mjerenja buke okoline*, Zbornik radova III. Europskog kongresa akustike - FORUM ACUSTICUM 2002., Sevilla, Španjolska.

U listopadu 2002. obranio je magistarski rad pod naslovom: "Mjerna nesigurnost određivanja toplinske vodljivosti građevinskih materijala".

Godine 2003. prelazi u Laboratorij za umjeravanje mjerila sile, također u Institutu građevinarstva Hrvatske, gdje postojeći mjerni postupak prevodi u novi, koristeći suvremenu računalom vođenu mjernu opremu. Piše programe za upravljanje mjernim procesom, izračun rezultata umjeravanja i uvodi laboratorij u sustav akreditacije prema HRN EN ISO/IEC 17025. U međuvremenu objavljuje još tri znanstvena rada:

3. M. Bezjak: *Mjerna nesigurnost toplinske vodljivosti građevinskih materijala*, Građevinar, Vol 56. 289-293, Zagreb, Hrvatska, 2004.

4. M. Bezjak: *Analitičko definiranje temperaturnog polja tijekom mjerenja toplinske provodnosti Pönsgenovim uređajem*, Strojarsvo, Vol 46, Zagreb, Hrvatska, 2004.

5. M. Bezjak: *Dinamička metoda mjerenja toplinske provodnosti*, Zbornik radova XVIII. Svjetskog mjeriteljskog kongresa – XVIII IMEKO WORLD CONGRESS 2006., Rio de Janeiro, Brazil.

Član je Hrvatskog mjeriteljskog društva i CROLAB-a.

Govori i piše engleskim jezikom.

Oženjen je i ima troje djece.

## **BIOGRAPHY**

Mladen Bezjak was born on September 19, 1963 in Zagreb. He graduated on XV Gymnasium (MIOC) in 1982 and enrolled Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture in Zagreb in 1983 (after obligate military service) where he graduated on Automatic and Regulation Department in 1989.

Since 1989, he worked on Technology and Assembly of generators and high-voltage motors Department at "Rade Končar - Generatori" factory.

During the 1991 and first half of 1992 he joined to Croatian liberation war.

From 1995 to 2003, he worked in Civil Engineering Institute of Croatia on acoustic, thermal and fire-resistance testings, where he developed quality system according to EN ISO/IEC 17025 International Standard.

In 2002 Mladen Bezjak acquired the M. Sc. degree at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture of Zagreb University with the thesis "Measurement uncertainty of thermal conductivity measurements".

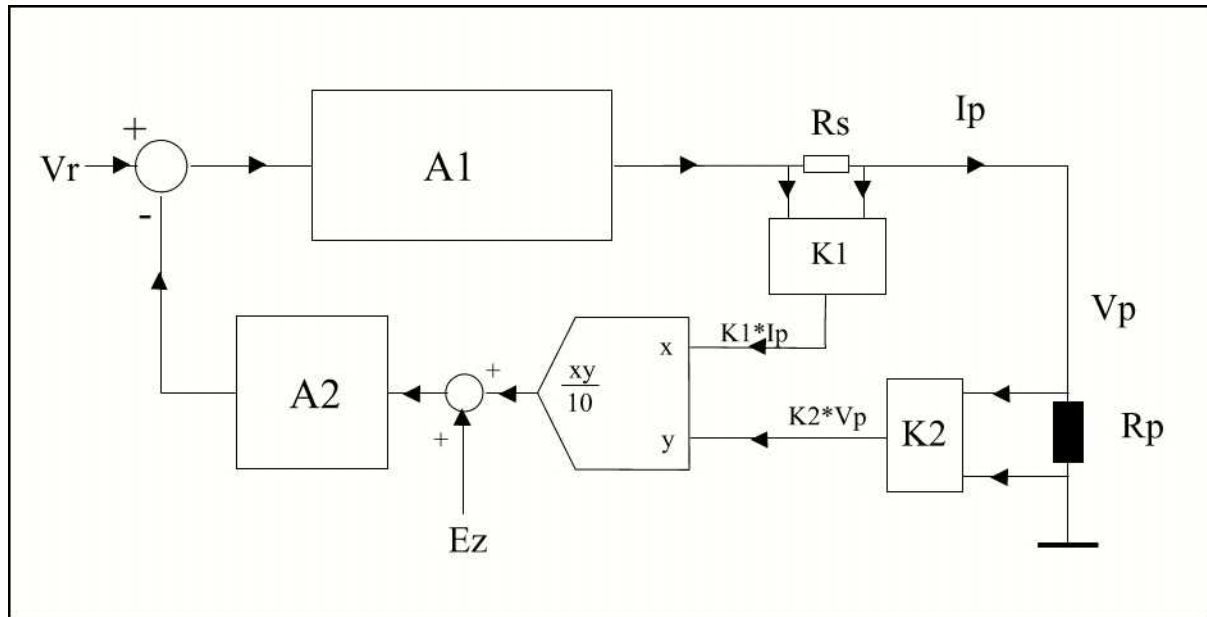
Since 2003, he works in Civil Engineering Institute of Croatia on calibration of force measurement instruments, where he up-to-dates a measuring system, develop a new quality system according to EN ISO/IEC 17025 and develop a measurement software.

As the author he published 5 scientific papers in Croatia and abroad. He is a member of the Croatian Metrology Association and CROLAB.

He is fluent in English. He is married and has three children.

# PRILOG 1

## ELEKTRIČNA BLOK-SHEMA IZVORA KONSTANTNE SNAGE



$A_1$  = pojačalo s uključenim izlaznim emitterskim sljedilom

$A_2$  = pojačalo u povratnoj vezi s uključenom frekventnom korekcijom

$V_r$  = referentni napon

$E_z$  = napon namještanja izlazne snage

$K_1$  = konverzionna konstanta struje trošila u napon x

$K_2$  = konverzionna konstanta napona na trošilu u napon y

$V_p$  = napon na trošilu

$I_p$  = struja trošila

$R_s$  = serijski mjerni otpor

$R_p$  = otpor trošila

Vrijednosti:

$A_1 = 800$

$A_2 = -1000$

$V_r = 7,15 \text{ V}$

$K_1 = -37,5 \text{ V/A}$

$K_2 = 0,5$

$R_s = 7,5 \text{ Ohm}$

## PRILOG 2

### MATLAB® SIMULACIJA - PROGRAM ZA 3D PRIKAZ TEMPERATURNOG POLJA DOBIVENOG ANALITIČKOM METODOM

```
[X,Y] = meshgrid(-0.1:0.0065:0.1);
m=150;
P=0.5;
L=0.201;
lambda=0.04;
a=0.00000168;
A=P/(L*lambda*4*3.141492654);
TMP=0;
To=23;
for t=1:0.5:m
    TMP=TMP+(1/t)*exp(-(X.^2+Y.^2)/(4*a*t));
end
TMP=To+A*TMP;
mesh(X,Y,TMP)
XLABEL('x (m)')
YLABEL('y (m)')
ZLABEL('Temperatura (°C)')
grid on
%axis('square')
%hold on
%pause(0.2)
```

## PRILOG 3

### MATLAB® SIMULACIJA - PROGRAM ZA 2D PRIKAZ TEMPERATURNOG POLJA DOBIVENOG ANALITIČKOM METODOM

```
[X,Y] = meshgrid(-0.1:0.0025:0.1);
%definira skalu (-0,1 m), (0,1 m) i raster (0,0025 m) koordinatnih osi grafa
m=600;
P=0.5;
L=0.201;
lambda=0.04;
T0=23;
a=0.00000168;
A=P/(L*lambda*4*3.141492654);
SUM=0;
% ulazne veličine za račun temp. polja.
for t=1:m
    TMP=(1/t)*exp(-(X.^2+Y.^2)/(4*a*t));
    SUM=SUM+TMP;
    if t==1
        SUM=T0+A*SUM;
    end
end
contour(X,Y,SUM,100)
XLABEL('x (m)')
YLABEL('y (m)')
grid on
```

## PRILOG 4

### MATLAB® SIMULACIJA - PROGRAM ZA 3D PRIKAZ TEMPERATURNOG POLJA DOBIVENOG NUMERIČKOM METODOM

```
clear all
a=0.00000168; % konstanta
dt=3; % konstanta
dx=0.0065; % konstanta
Fo=dt*a/dx^2; % konstanta
n=15; % maksimalni x
h=n; % maksimalni y
k=n;
t=35; % konacno vrijeme
T(1,1:k+n+1,1:k+h+1)=23; % početni uvjeti
T(2:t+1,k+n+1,1:k+h)=23; % rubni uvjeti
T(2:t+1,1:k+n+1,k+h+1)=23; % rubni uvjeti
TM(1:k+n+1,k+h+1)=23; % TM .... isto što i T, samo reduciran s obzirom na
vrijeme
TM(k+n+1,1:k+h)=23;
TM(1,1:k+h)=23;
TM(2:k+n,1)=23;
P=0.5; % konstanta
L=0.201; % konstanta
lambda=0.04; % konstanta
To=0;
%X=1:k+n+1;
%Y=1:k+h+1;
[X,Y] = meshgrid(-0.1:0.0065:0.1); %PAZITI DA SE X,Y SLAŽU S n=15 !!!!!!!
for i=1:t % petlja za vrijeme
    T(i+1,k+1,k+1)=T(i,k+1,k+1)*(1-
4*Fo)+2*Fo*(T(i,k+2,k+1)+T(i,k+1,k+2))+P*Fo/(lambda*L); % računa Too
    TM(k+1,k+1)=T(i,k+1,k+1)*(1-
4*Fo)+2*Fo*(T(i,k+2,k+1)+T(i,k+1,k+2))+P*Fo/(lambda*L);
    for w=2:h
        T(i+1,k+1,k+w) = Fo*(T(i,k+1,k+w+1)+T(i,k+1,k+w-1))+(1-
2*Fo)*T(i,k+1,k+w); % računa T na osi x
        TM(k+1,k+w)=Fo*(T(i,k+1,k+w+1)+T(i,k+1,k+w-1))+(1-2*Fo)*T(i,k+1,k+w);
        TM(k+1,k-w+2)=TM(k+1,k+w); % simetrični su s obzirom na obje koord.
osi
    end
    for j=2:n % petlja za x ----- j = x
        T(i+1,k+j,k+1) = Fo*(T(i,k+j+1,k+1)+T(i,k+j-1,k+1))+(1-
2*Fo)*T(i,k+j,k+1); % računa T na osi y
        TM(k+j,k+1)=Fo*(T(i,k+j+1,k+1)+T(i,k+j-1,k+1))+(1-2*Fo)*T(i,k+j,k+1);
        TM(k-j+2,k+1)=TM(k+j,k+1); % simetrični su s obzirom na obje koord.
osi
        for w=2:h % petlja za y ----- w = y
            T(i+1,k+j,k+w) = Fo*(T(i,k+j+1,k+w)+T(i,k+j-
1,k+w)+T(i,k+j,k+w+1)+T(i,k+j,k+w-1))+(1-4*Fo)*T(i,k+j,k+w); % računa T u
dubini uzorka
            TM(k+j,k+w)=Fo*(T(i,k+j+1,k+w)+T(i,k+j-
1,k+w)+T(i,k+j,k+w+1)+T(i,k+j,k+w-1))+(1-4*Fo)*T(i,k+j,k+w);
            TM(k+j,k-w+2)=TM(k+j,k+w); % simetrični su s obzirom na obje
koord. osi
            TM(k-j+2,k+w)=TM(k+j,k+w); % simetrični su s obzirom na obje
koord. osi
            TM(k-j+2,k-w+2)=TM(k+j,k+w); % simetrični su s obzirom na obje
koord. osi
        end
    end
end
%axis('square')
```

```
%hold on
%pause(0.2)
end
mesh(X,Y,TM)
grid on
XLABEL('x (m)')
YLABEL('y (m)')
ZLABEL('Temperatura (°C)')
```



## PRILOG 5

### EXCEL - PROGRAM ZA PRIKUPLJANJE IZMJERENIH PODATAKA I IZRAČUN SNAGE I TEMPERATURE

Sub Macro1()

'Brisanje izmjerenih vrijednosti od prošlog mjerenja i postavak kursora na I1  
Worksheets("Sheet1").Range("I:J").ClearContents

L = InputBox("Upisite duljinu Pt žice")  
alfa = 0.003926 ' temp. koeficijent otpora platine - CORRADI  
otpor = 60.17 ' otpor platine debele 0,02540 mm po stopi  
stope = 3.28083 ' 1m = 3,28083 stope  
Ro = L \* otpor \* stope  
Range("A2:D20000").Select  
Selection.Delete Shift:=xlToLeft  
Application.Goto Reference:="R1C11"  
Range("A2:A20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("B2:B20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("C2:C20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("D2:D20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("E2:E20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("F2:F20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("G2:G20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("H2:H20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("I2:I20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"  
Range("J2:J20000").Select  
Selection.NumberFormat = "general"

Application.Goto Reference:="R1C11"

'Upisivanje izmjerenih vrij. u centar svake ćelije i postavak kursora na I1

Range("A1:T20000").Select  
With Selection  
    .HorizontalAlignment = xlCenter  
    .VerticalAlignment = xlBottom  
    .WrapText = False  
    .Orientation = 0  
    .AddIndent = False  
    .IndentLevel = 0  
    .ShrinkToFit = False  
    .ReadingOrder = xlContext

```
.MergeCells = False  
End With
```

```
' Otvara serijski port i cisti buffer  
frmComm.MSComm1.PortOpen = True  
frmComm.MSComm1.Output = "Abor" & Chr(13)  
frmComm.MSComm3.PortOpen = True  
frmComm.MSComm3.Output = "Abor" & Chr(13)
```

```
' Petlja za upisivanje izmjerenih vrijednosti po retcima  
For counter = 2 To 20000
```

```
  ' Naredba voltmetru da posalje izmjerenu vrijednost  
  frmComm.MSComm1.Output = "FETC?" & Chr(13)
```

```
  ' Petlja za osiguravanje vremena odziva voltmetra  
  Do  
  dummy = DoEvents()  
  Loop Until frmComm.MSComm1.InBufferCount >= 3  
  frmComm.MSComm3.Output = "FETC?" & Chr(13)
```

```
  Do  
  dummy = DoEvents()  
  Loop Until frmComm.MSComm3.InBufferCount >= 3
```

```
  B$ = frmComm.MSComm1.Input ' String B$ = izmjerena vrijednost na ser. portu  
  c$ = Mid(B$, 2) ' String C$ = B$ ali bez prva dva alfanumerika  
  d$ = Mid(B$, 1, 1) ' String D$ = PRVI ALFANUMERIK OD B$ - EXPONENT  
  E$ = c$ + d$ ' STRING E$ JE ZBROJ C$ I D$ - NADOŠTUKALI SMO EXPONENT JER SE  
  ' GUBI U PRIJENOSU PODATAKA S MULTIMETRA JER SMO NA VOLTMETRU  
  ISKLJUČILI ' HANDSHAKING : X_ON i X_OFF !
```

```
  bb$ = frmComm.MSComm3.Input  
  CC$ = Mid(bb$, 2)  
  DD$ = Mid(bb$, 1, 1)  
  EE$ = CC$ + DD$
```

```
  ' Za tekuću ćeliju našeg worksheeta proglašava: Red = Counter, Kolona = A = 1  
  ' Iznos tekuće ćelije = Time (vrijeme)  
  Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 1)  
  curCell.Value = Timer  
  ' Iznos tekuće ćelije = Vrijeme u stotinkama  
  Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 2)  
  curCell.Value = "=+RC[-1]-R2C1"  
  If counter = 2 Then curCell.Value = "0.0001"  
  ' Iznos tekuće ćelije = prirodni logaritam vremena  
  Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 3)  
  curCell.Value = "=Ln(RC[-1])"  
  'Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 3)  
  If curCell.Value <= 0 Then curCell.Value = 0  
  ' Iznos tekuće ćelije = Numerička vrijednost od C$ = Izmjereni napon  
  Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 4)  
  curCell.Value = Val(E$)
```

```

' Iznos tekuće ćelije = Numerička vrijednost od CC$ = Izmjerena struja
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 5)
curCell.Value = Val(EE$)
' Iznos tekuće ćelije = izračunata snaga
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 6)
curCell.Value = "="+RC[-2]*RC[-1]"
' Iznos tekuće ćelije = izračunati otpor
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 7)
curCell.Value = "="+RC[-3]/RC[-2]"
' Iznos tekuće ćelije = izračunata temperatura
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 7)
R = curCell.Value
T = ((R / Ro) - 1) / alfa
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 8)
curCell.Value = T "="+((RC[-1]/Ro)-1)/alfa"
If curCell.Value > 100 Then curCell.Value = Worksheets("Sheet1").Cells(counter - 1, 8)
If curCell.Value < 0 Then curCell.Value = Worksheets("Sheet1").Cells(counter - 1, 8)

```

5 Next counter

```

Application.Goto Reference:="R1C11"
frmComm.MSComm1.PortOpen = False ' Zatvara serijski port
frmComm.MSComm3.PortOpen = False ' Zatvara serijski port

```

End Sub

## PRILOG 6

### EXCEL - PROGRAM ZA GRAFIČKI PRIKAZ PROMJENE SNAGE S PRIRODNIM LOGARITMOM VREMENA

```
Sub Macro3()  
,  
' Macro3 Macro  
' Macro recorded 31.8.2006 by User  
,  
' Keyboard Shortcut: Ctrl+c  
,  
  
Charts.Add  
ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmooth  
ActiveChart.SetSourceData Source:=Worksheets("Sheet1").Range("C2:C20000,F2:F20000"), _  
    PlotBy:=xlColumns  
ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsNewSheet  
With ActiveChart  
    .HasTitle = False  
    .Axes(xlCategory, xlPrimary).HasTitle = True  
    .Axes(xlCategory, xlPrimary).AxisTitle.Characters.Text = "Vrijeme (s)"  
    .Axes(xlValue, xlPrimary).HasTitle = True  
    .Axes(xlValue, xlPrimary).AxisTitle.Characters.Text = "Snaga (W)"  
End With  
With ActiveChart.Axes(xlCategory)  
    .HasMajorGridlines = True  
    .HasMinorGridlines = False  
End With  
With ActiveChart.Axes(xlValue)  
    .HasMajorGridlines = True  
    .HasMinorGridlines = False  
End With  
ActiveChart.HasLegend = False  
ActiveChart.Name = "Snaga"  
End Sub
```

## PRILOG 7

### EXCEL - PROGRAM ZA GRAFIČKI PRIKAZ PROMJENE TEMPERATURE S PRIRODNIM LOGARITMOM VREMENA

```
Sub Macro4()  
Charts.Add  
    ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmooth  
    ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Sheet1").Range("C2:C20000,H2:H20000"), _  
        PlotBy:=xlColumns  
    ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsNewSheet  
    With ActiveChart  
        .HasTitle = False  
        .Axes(xlCategory, xlPrimary).HasTitle = True  
        .Axes(xlCategory, xlPrimary).AxisTitle.Characters.Text = "ln t (s)"  
        .Axes(xlValue, xlPrimary).HasTitle = True  
        .Axes(xlValue, xlPrimary).AxisTitle.Characters.Text = "Temperatura (°C)"  
    End With  
    With ActiveChart.Axes(xlCategory)  
        .HasMajorGridlines = True  
        .HasMinorGridlines = False  
    End With  
    With ActiveChart.Axes(xlValue)  
        .HasMajorGridlines = True  
        .HasMinorGridlines = False  
    End With  
    ActiveChart.HasLegend = False  
    ActiveChart.Name = "Temperatura"  
  
End Sub
```

## PRILOG 8

### EXCEL - PROGRAM ZA IZRAČUN I GRAFIČKI PRIKAZ PROMJENE TEMPERATURE S PRIRODNIM LOGARITMOM VREMENA U ODABRANOM MJERNOM INTERVALU, I ZA IZRAČUN KONAČNIH VRIJEDNOSTI

```
Sub Macro5()  
,  
' Macro5 Macro  
' Macro recorded 8.9.2006 by User  
,  
' Keyboard Shortcut: Ctrl+d  
Worksheets("Sheet1").Range("I:W").ClearContents  
  
I = InputBox("Upisite pocetak intervala")  
J = InputBox("Upisite kraj intervala")  
L = InputBox("Upisite duljinu Pt žice")  
  
Intt = 0  
ttemp = 0  
s = 0  
brojac = 0  
brojnik = 0  
nazivnik = 0  
suma_U = 0  
suma_I = 0  
summaP = 0  
summaT = 0  
sT_brojnik = 0  
  
uV = 0.0000075 ' mjerna nesig. napona  
uA = 0.000000185 ' mjerna nesig. struje  
uR = 0.000015 / 2  
sL = 0.00001406  
alfa = 0.003926 ' temp. koeficijent otpora platine - CORRADI  
u_alfa = 0.000002  
otpor = 60.17 ' otpor platine debele 0,02540 mm po stopi  
stope = 3.28083 ' 1m = 3,28083 stope  
Ro = L * otpor * stope  
uL = (uR ^ 2 + sL ^ 2) ^ 0.5 ' mjerna nesigurnost duljine žice = 0,15 mm !!!!  
u_ot_st = 0.0000000985 / 2  
uRo = ((otpor * stope * uL) ^ 2 + (L * u_ot_st) ^ 2) ^ 0.5  
  
For counter = I To J ' izračun intervala  
  
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 3)  
Int = curCell.Value ' ln(t) = x  
Intt = Intt + Int  
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 4)  
U = curCell.Value  
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 5)  
IT = curCell.Value
```

```

Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 8)
temp = curCell.Value ' temp = y
ttemp = ttemp + temp
brojac = brojac + 1
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 10)
curCell.Value = temp
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 9)
curCell.Value = lnt
Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 6)
s2 = curCell.Value ' s2 = P ..... snaga u vremenu !!
s = s + s2 ' Računa sumu snage
suma_U = suma_U + U ' Računa sumu napona
suma_I = suma_I + IT ' Računa sumu struje
If brojac = 1 Then
    lnt1 = lnt
    temp1 = temp
    s1 = s
    U1 = U
    I1 = IT
Else
End If
lnt2 = lnt
temp2 = temp
U2 = U
I2 = IT
Next counter

```

```

SRVR_U = suma_U / brojac ' aritmetička sredina napona
SRVR_I = suma_I / brojac ' aritmetička sredina struje
SRVR_S = s / brojac ' aritmetička sredina snage
SRVR_temp = ttemp / brojac ' aritmetička sredina temperature
SRVR_lnt = lnt / brojac ' aritmetička sredina logaritma vremena

```

```

For counter = I To J
    Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 3)
    x = curCell.Value ' ln(t) = x
    Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 8)
    y = curCell.Value ' temp = y
    brojnik = brojnik + (x - SRVR_lnt) * (y - SRVR_temp)
    nazivnik = nazivnik + (x - SRVR_lnt) ^ 2
    summaT = summaT + (y - SRVR_temp) ^ 2
    Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 6)
    P = curCell.Value ' P = snaga
    summaP = summaP + (P - SRVR_S) ^ 2
Next counter

```

```

Slope = brojnik / nazivnik ' nagib pravca ..... k
odsjecak = SRVR_temp - Slope * SRVR_lnt ' odsjecak na osi y

```

```

Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(I, 3) ' izracun ln(t1) i T1 koji leze na pravcu
lnt1 = curCell.Value
t1 = Slope * lnt1 + odsjecak

```

Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(J, 3) ' izracun ln(t2) i T2 koji leze na pravcu  
ln2 = curCell.Value  
t2 = Slope \* ln2 + odsjecak

DT = t2 - t1

k = DT / (ln2 - ln1) ' izracun k

lambda = SRVR\_S / (4 \* L \* 3.141592654 \* k) ' izracun toplinske provodnosti

dP = Abs(100 \* (s1 - s2) / s2) ' relativno rasipanje snage

' MJERNA NESIGURNOST VREMENA !!!!!

u\_vrijeme = 0.0012 ' = 0,0012 s

' MJERNA NESIGURNOST SNAGE !!!!!

SP = (summaP / (brojac \* (brojac - 1))) ^ 0.5

uuP = ((SRVR\_U \* uA) ^ 2 + (SRVR\_I \* uV) ^ 2) ^ 0.5

uP = (SP ^ 2 + uuP ^ 2) ^ 0.5

' MJERNA NESIGURNOST TEMPERATURA !!!!!

u\_Talfa1 = ((u\_alfa / alfa ^ 2) \* (1 - (U1 / (I1 \* Ro)))) ^ 2

u\_Talfa2 = ((u\_alfa / alfa ^ 2) \* (1 - (U2 / (I2 \* Ro)))) ^ 2

u\_Tnapon1 = (uV / (alfa \* I1 \* Ro)) ^ 2

u\_Tnapon2 = (uV / (alfa \* I2 \* Ro)) ^ 2

u\_Tstruja1 = (-U1 \* uA / (alfa \* Ro \* I1 ^ 2)) ^ 2

u\_Tstruja2 = (-U2 \* uA / (alfa \* Ro \* I2 ^ 2)) ^ 2

u\_otporRo1 = (-U1 \* uRo / (alfa \* I1 \* Ro ^ 2)) ^ 2

u\_otporRo2 = (-U2 \* uRo / (alfa \* I2 \* Ro ^ 2)) ^ 2

uut1 = (u\_Talfa1 + u\_Tnapon1 + u\_Tstruja1 + u\_otporRo1) ^ 0.5

uut2 = (u\_Talfa2 + u\_Tnapon2 + u\_Tstruja2 + u\_otporRo2) ^ 0.5

For counter = I To J

Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 3)

x = curCell.Value ' ln(t) = x

Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(counter, 8)

y = curCell.Value ' temp = y

sT\_brojnik = sT\_brojnik + (y - (Slope \* x + odsjecak)) ^ 2

Next counter

sT = (sT\_brojnik / (brojac - 2)) ^ 0.5

u\_deltat = (sT ^ 2 + uut1 ^ 2 + uut2 ^ 2) ^ 0.5

' MJERNA NESIGURNOST LAMBDE !!!!!

Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(I, 2) ' izracun ln(t1) i T1 koji leze na pravcu

vrijeme\_1 = curCell.Value

Set curCell = Worksheets("Sheet1").Cells(J, 2) ' izracun ln(t1) i T1 koji leze na pravcu

vrijeme\_2 = curCell.Value

u\_lam\_L = (SRVR\_S \* uL / (4 \* 3.141592654 \* k \* L ^ 2)) ^ 2

u\_lam\_P = (uP / (4 \* 3.141592654 \* k \* L)) ^ 2

u\_lam\_vrijeme1 = (SRVR\_S \* u\_vrijeme / (4 \* 3.141592654 \* DT \* L \* vrijeme\_1)) ^ 2

u\_lam\_vrijeme2 = (SRVR\_S \* u\_vrijeme / (4 \* 3.141592654 \* DT \* L \* vrijeme\_2)) ^ 2

u\_lam\_deltat = (SRVR\_S \* u\_deltat / (4 \* 3.141592654 \* k \* L \* DT)) ^ 2

kor\_vrijeme = u\_vrijeme ^ 2



```
u_lam = (u_lam_L + u_lam_P + u_lam_vrijeme1 + u_lam_vrijeme2 + kor_vrijeme +  
u_lam_deltat) ^ 0.5  
u_lambda = 2 * u_lam ' relativna proširena mjerna nesig. lambde !!
```

```
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(3, 4)  
curCell.Value = Int1  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(5, 4)  
curCell.Value = Int2  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(7, 4)  
curCell.Value = t1  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(9, 4)  
curCell.Value = t2  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(11, 4)  
curCell.Value = DT  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(13, 4)  
curCell.Value = SRVR_S  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(15, 4)  
curCell.Value = dP  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(17, 4)  
curCell.Value = lambda
```

```
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(3, 5)  
curCell.Value = u_vrijeme  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(5, 5)  
curCell.Value = u_vrijeme  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(7, 5)  
curCell.Value = uut1  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(9, 5)  
curCell.Value = uut2  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(11, 5)  
curCell.Value = u_deltat  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(13, 5)  
curCell.Value = uP  
Set curCell = Worksheets("Sheet2").Cells(17, 5)  
curCell.Value = u_lambda
```

```
Charts.Add
```

```
ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmooth  
ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Sheet1").Range("I:J"), PlotBy:=xlColumns  
ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsNewSheet  
With ActiveChart  
    .HasTitle = False  
    .Axes(xlCategory, xlPrimary).HasTitle = True  
    .Axes(xlCategory, xlPrimary).AxisTitle.Characters.Text = "ln (t)"  
    .Axes(xlValue, xlPrimary).HasTitle = True  
    .Axes(xlValue, xlPrimary).AxisTitle.Characters.Text = "Temperatura (K)"  
End With  
With ActiveChart.Axes(xlCategory)  
    .HasMajorGridlines = True  
    .HasMinorGridlines = False  
End With  
With ActiveChart.Axes(xlValue)  
    .HasMajorGridlines = True
```

```
.HasMinorGridlines = False  
End With  
ActiveChart.HasLegend = False  
ActiveChart.Name = "T1 - T2"
```

```
End Sub
```