

# Aerodinamička svojstva refleksnih aeroprofila

---

**Kos, Matej**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:391513>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Matej Kos

ZAGREB, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

AERODINAMIČKA SVOJSTVA REFLEKSNIH AEROPROFILA

Mentor:

Doc. dr.sc. Dubravko Matijašević

Student:

Matej Kos

ZAGREB, 2020.

*Zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc.  
Dubravku Matijaševiću na stručnoj pomoći,  
strpljenju i prenesenom znanju pri izradi  
ovog završnog rada.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, rujan 2020.

Matej Kos





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**  
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: Matej Kos

Mat. Br.: 0035208685

Naslov rada na hrvatskom jeziku: Aerodinamička svojstva refleksnih aeroprofila

Naslov rada na engleskom jeziku: Reflex airfoils aerodynamic characteristics

Opis zadatka:

Već dugo je poznato da letjelice s repom nisu aerodinamički optimalne. Rep letjelice s tradicionalnom konfiguracijom služi za aerodinamičko trimanje, no njegova površina stvara relativno veliki otpor. Aerodinamički najefikasnije letjelice su leteća krila. Trimani let krila moguće je postići upotrebom refleksnih aeroprofila.

U ovom radu potrebno je promotriti svojstva tipičnih refleksnih aeroprofila i usporediti njihove aerodinamičke karakteristike sa tipičnim standardnim aerofilom. Za analizu strujanja idealnog fluida oko promatranih aeroprofila potrebno je koristiti teoriju tankih aeroprofila. Tako dobivena aerodinamička svojstva potrebno je usporediti sa svojstvima dobivenim numeričkim eksperimentom pomoću volumne metode za velike Reynoldsove brojeve. Zbog bolje usporedivosti dviju metoda te njihovih rezultata, promatrane aeroprofile potrebno je prije analize svesti na srednju liniju.

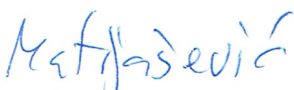
U okviru rada potrebno je prezentirati problem i korištene metode, komentirati dobivene rezultate te navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

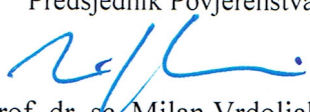
Zadatak zadan:  
28. studenog 2019.

Datum predaje rada:  
**1. rok:** 21. veljače 2020.  
**2. rok (izvanredni):** 1. srpnja 2020.  
**3. rok:** 17. rujna 2020.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 24.2. – 28.2.2020.  
**2. rok (izvanredni):** 3.7.2020.  
**3. rok:** 21.9. - 25.9.2020.

Zadatak zadao:

  
Doc. Dubravko Matijašević

Predsjednik Povjerenstva:  
  
Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

# Sadržaj

Sadržaj	vi
Popis slika	viii
Popis tablica	x
Popis oznaka	xi
Sažetak	xii
Summary	xiii
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Matematički model</b>	<b>3</b>
2.1. Metode dobivanja srednje linije . . . . .	3
2.1.1. NACA četveroznamenkasti aeroprofil . . . . .	3
2.1.2. Metode dobivanja srednje linije . . . . .	4
2.2. Čebiševljevi polinomi prve vrste . . . . .	5
2.3. Teorija tankih aeroprofila . . . . .	7
2.3.1. Formulacija problema preko perturbacijskog polja . . . . .	8
2.3.2. Linearizacija rubnog uvjeta na površini . . . . .	10
2.3.3. Relacija za tlak . . . . .	11



2.3.4. Zakrivljeni beskonačno tanki aeroprofil pod nulnim napadnim kutom: rješenje s vrtložnim listom . . . . .	12
2.3.5. Ravna ploča pod napadnim kutom : rješenje s vrtložnim listom .	17
2.3.6. Aerodinamičke karakteristike beskonačno tankog zakrivljenog aeroprofila pod napadnim kutom . . . . .	19
2.4. Alternativno rješenje teorije tankog aeroprofila . . . . .	20
2.4.1. Veza aerodinamičkih koeficijenata dvaju rješenja . . . . .	22
2.5. Metoda konačnih volumena . . . . .	25
2.5.1. Numeričke sheme . . . . .	26
<b>3. Rezultati</b>	<b>28</b>
<b>4. Zaključak</b>	<b>35</b>
<b>Literatura</b>	<b>37</b>
<b>A. Validacija rješenja za dobivanje srednje linije</b>	<b>38</b>
<b>B. Metode izračuna srednje linije</b>	<b>41</b>
<b>C. OpenFOAM proračun</b>	<b>45</b>
C.1. Postavke proračuna . . . . .	45
C.2. Domena i rubni uvjeti . . . . .	45
<b>D. Aerodinamičke karakteristike srednjih linija nekih refleksnih aeroprofila</b>	<b>47</b>

# Popis slika

2.1	Skeletnica aeroprofila . . . . .	4
2.2	Prikaz potrebnih varijabli za definiranje aeroprofila . . . . .	5
2.3	Čebiševljevi polinomi prve vrste $T_n$ . . . . .	6
2.4	Koordinate i oznake za strujanje oko aeroprofila . . . . .	9
2.5	Koordinate za problem zakrivljenog aeroprofila . . . . .	13
2.6	Raspodjela vrtloga za zakrivljeni aeroprofil . . . . .	13
2.7	Uvođenje Glauertove varijable $\theta$ i $\varphi$ . . . . .	16
2.8	Koordinate i distribucija vrtloga za problem ravne ploče . . . . .	18
2.9	Konačni volumeni . . . . .	26
3.1	Konvergencija alternativnog rješenja s povećanjem broja baznih funkcija . . . . .	28
3.2	Aeroprofil NACA 2412 i srednja linija . . . . .	30
3.3	Koeficijent tlaka za NACA 2400 . . . . .	30
3.4	Aeroprofil NACA 24112 i srednja linija . . . . .	31
3.5	Koeficijent tlaka za srednju liniju aeroprofila NACA 24112 . . . . .	31
3.6	Aeroprofil MH61 i srednja linija . . . . .	32
3.7	Koeficijent tlaka za srednju liniju aeroprofila MH61 . . . . .	32
3.8	Aeroprofil Roncz/Marske-7 i srednja linija . . . . .	33
3.9	Koeficijent tlaka za srednju liniju aeroprofila Roncz/Marske-7 . . . . .	33
A.1	Odstupanje srednje linije od skeletnice aeroprofila . . . . .	39
A.2	Konvergencija $L^\infty$ i $L^2$ greške geometrije srednje linije . . . . .	40

C.1 Proračunska domena *OpenFOAM* proračuna . . . . . **46**

# Popis tablica

2.1	Koeficijenti $B_n$ Čebiševljevih polinoma prve vrste . . . . .	21
2.2	Aerodinamičke karakteristike Čebiševljevih polinoma prve vrste . . . . .	21
3.1	Aerodinamičke karakteristike NACA 2400 . . . . .	30
3.2	Aerodinamičke karakteristike NACA 24112 . . . . .	31
3.3	Aerodinamičke karakteristike MH61 . . . . .	32
3.4	Aerodinamičke karakteristike Roncz/Marske-7 . . . . .	33
C.1	Rubni uvjeti <i>OpenFOAM</i> proračuna . . . . .	46

# Popis oznaka

$\alpha$	Napadni kut aeroprofila, [°] . . . . .	9
$\alpha_{id}$	Idealni napadni kut, [°] . . . . .	16
$\alpha_{L0}$	Kut nultog uzgona, [°] . . . . .	20
$\eta_c$	Srednja linija aeroprofila . . . . .	3
$\Gamma$	Cirkulacija, [m <sup>2</sup> /s] . . . . .	14
$\gamma$	Linijska gustoća vrtložnog lista, [m/s] . . . . .	13
$\Phi$	Potencijal brzine, [m <sup>2</sup> /s] . . . . .	8
$\phi$	Polje perturbacijskog potencijala brzine, [m <sup>2</sup> /s] . . . . .	9
$B_n$	Koeficijenti razvoja nagiba srednje linije aeroprofila . . . . .	16
$C_L$	Koeficijent uzgona . . . . .	15
$C_M$	Koeficijent momenta oko prednjeg brida aeroprofila . . . . .	15
$C_p$	Koeficijent tlaka . . . . .	12
$C_{M\frac{1}{4}}$	Koeficijent momenta oko 1/4 tetive aeroprofila . . . . .	20
$h_n$	Koeficijenti razvoja srednje linije aeroprofila . . . . .	22
$T_n$	Čebiševljevi polinomi prve vrste . . . . .	6
$V_\infty$	Brzina slobodne struje, [m/s] . . . . .	8

# Sažetak

U ovom radu predstavljena je analitička i numerička aerodinamička analiza refleksnih aeroprofila. Implementirana je metoda za dobivanje srednje linije aeroprofila iz standardnog zapisa aeroprofila iz baze podataka. Dobivena srednja linija aeroprofila aproksimirana je Čebiševljevim polinomima prve vrste i na temelju toga prikazano je alternativno rješenje zadaje teorije tankih aeroprofila. Na kraju, izračunate aerodinamičke značajke uspoređene su s rezultatima dobivenim numeričkim pokusom pomoću paketa *OpenFOAM*.

**Ključne riječi:** Refleksni aeroprofil, teorija tankih aeroprofila, srednja linija aeroprofila, idealni napadni kut, metoda konačnih volumena

# Summary

This thesis deals with reflex airfoils aerodynamic characteristics obtained by analytical and numerical methods. The method implemented for extracting the mean airfoil camber line from standard airfoil format found in the database is described. The extracted mean camber line is approximated using Chebyshev polynomials of the first kind and based on that, an alternative solution to thin airfoil theory is shown. In the end, calculated aerodynamic characteristics are compared to results obtained from numerical experiments using *OpenFOAM*.

**Keywords:** Reflex airfoils, thin airfoil theory, mean camber line, ideal angle of attack, finite volume method

# 1 | Uvod

Još od ranih dana zrakoplovstva može se primijetiti da dominiraju konstrukcije klasične konfiguracije, odnosno konstrukcije s repnim površinama koje služe za trimanje zrakoplova. Već je dugo poznato da takve konfiguracije nisu idealne i aerodinamički optimalne te se u današnje doba teži efikasnijim konceptima više nego ikada. Obzirom da konfiguracije s repom stvaraju dodatnu oplahivanu površinu, one stvaraju veći otpor. Veća efikasnost može se postići ukidanjem repnih površina i takva se konfiguracija naziva leteće krilo. Trimanje takve letjelice postiže se refleksnim aeroprofilima, a svojstva upravo te vrste aeroprofila tema su ovog rada.

Izračun polja strujanja i aerodinamičkih svojstava bilo kojeg aeroprofila u praksi je relativno zahtjevan posao. Iako postoje metode za takve izračune, one, u općem slučaju, ne daju procjenu aerodinamičkih svojstava u zatvorenom obliku. Alternativni pristup je teorija tankog aeroprofila koja se veže uz rane dane aerodinamike. Teorija tankih aeroprofila dvojbena je za aeroprofile s debljinom, ali daje jasan uvid u aerodinamičke karakteristike aeroprofila, u nestlačivom i neviskoznom fluidu, predstavljenih svojom srednjom linijom. U ovom se radu promatraju takvi refleksni aeroprofil.

Istovremeno, postavlja se potreba validacije rješenja teorije tankih aeroprofila u odnosu na tok Eulerovog fluida oko aeroprofila. U tu svrhu radi se usporedba rješenja teorije tankih aeroprofila i numeričkog rješenja za Eulerov fluid, za strujanje oko srednjih linija karakterističnih aeroprofila. Eulerov fluid numerički se modelira kao Navier-Stokesov s iščezavajućom viskoznosti. Kako bi se umanjio utjecaj numeričke difuzije, koja se koristi za stabilizaciju konvektivnog člana, usporedba rješenja se radi pri napadnom kutu za koji je strujanje oko prednjeg brida glatko.



Prije svega, opisana je implementirana metoda za dobivanje srednje linije iz standardnog formata zapisa aeroprofila.

## 2 Matematički model

### 2.1. Metode dobivanja srednje linije

Najprije će se prikazati metode za dobivanje srednje linije aeroprofila, a usporedba rezultata, prikazanih u dodatku A, provesti će se na temelju jednog od NACA-inog četveroznamenkastog aeroprofila.

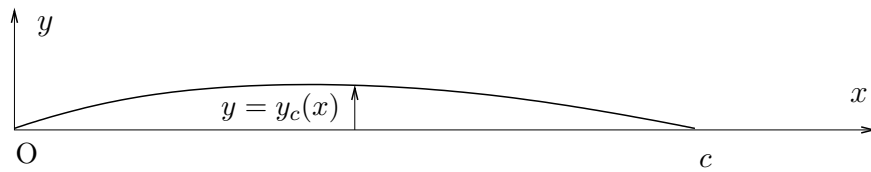
#### 2.1.1. NACA četveroznamenkasti aeroprofil

Prvo će se prikazati način konstrukcije NACA-inog četveroznamenkastog aeroprofila kao što je objašnjeno u [1]. Generalno, svi NACA aeroprofil dobivaju se kombinacijom skeletnice i definirane raspodjele debljine. Najprije se ucrtava tetiva dužine  $c$ , linija koja se proteže od prednjeg do zadnjeg brida, i na temelju zadane ovisnosti  $\eta_c(x)$  ucrtava se skeletnica. Za četveroznamenkasti aeroprofil ovisnost  $\eta_c(x)$  zadana je preko sljedećih jednadžbi:

$$\begin{aligned}\eta_c &= \frac{f}{x_f^2}x(2x_f - x) & 0 \leq x \leq x_f \\ \eta_c &= \frac{f}{(c - x_f)^2}(c - x)(c + x - 2x_f) & x_f \leq x \leq c\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdje je  $f$  zakrivljenost aeroprofila, a  $x_f$  je položaj zakrivljenosti aeroprofila mjeren od prednjeg brida. Nakon definiranja zakrivljenosti  $f$  i njezinog položaja  $x_f$ , definirana je preko jednadžbe (2.1) i skeletnica aeroprofila.

Nos aeroprofila definiran je preko kružnice poznatog radijusa koji iznosi



Slika 2.1: Skeletnica aeroprofila

$$r_0 = 1.1019 \frac{t^2}{c} \quad (2.2)$$

gdje je  $t$  debljina aeroprofila. Središte kružnice koja definira prednji kraj aeroprofila postavlja se na pravac koji tangira liniju skeletnice u prednjem bridu, tj.  $x = 0$ .

Raspodjela poludebljine aeroprofila  $\delta$  zadana je u funkciji debljine  $t$  i udaljenosti  $x$  od prednjeg brida. Za četveroznamenaste aeroprofile ta raspodjela definirana je kao

$$\delta = t \left[ 1.4845 \sqrt{\frac{x}{c}} - 0.6300 \frac{x}{c} - 1.7580 \left(\frac{x}{c}\right)^2 + 1.4215 \left(\frac{x}{c}\right)^3 - 0.5075 \left(\frac{x}{c}\right)^4 \right]. \quad (2.3)$$

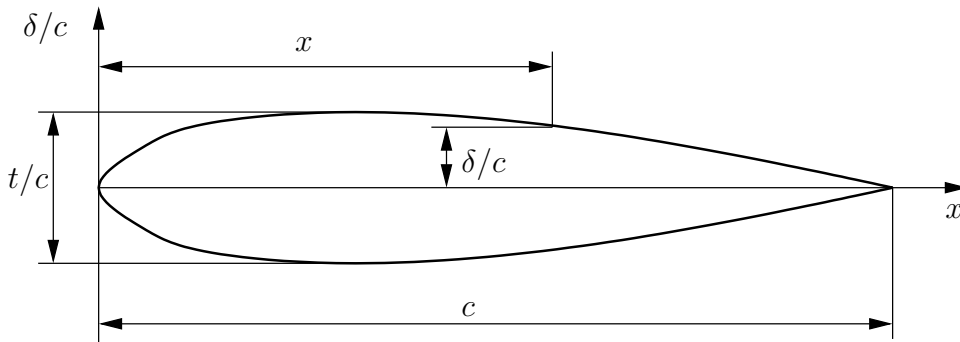
Konačno, definiranjem skeletnice i raspodjele debljine aeroprofila, mogu se izračunati točke gornjake  $(x_g, y_g)$  i donjake  $(x_d, y_d)$ , a one se nalaze na liniji okomitoj na liniju skeletnice za pojedini  $x$ . Stoga, koordinate točaka iznose

$$\begin{aligned} y_g &= y_c + \delta \cos \theta \\ x_g &= x - \delta \sin \theta \\ y_d &= y_c - \delta \cos \theta \\ x_d &= x + \delta \sin \theta \\ \theta &\approx \tan \theta = \frac{dy_c}{dx} \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Metode dobivanja srednje linije

Tijekom izrade rada ispitane su dvije metode za izračun srednje linije aeroprofila. Inicijalni korak u obje metode je uzimanje točaka aeroprofila iz baze podataka i interpolacija tih točaka kubičnim spline-om.

Metoda 1 evaluira vrijednosti točaka na gornjaci i donjaci u preddefiniranim  $x$  koordinatama koje su raspodijeljene prema *Glauertovoj* raspodjeli koja na intervalu



Slika 2.2: Prikaz potrebnih varijabli za definiranje aeroprofila

$-1 \leq x \leq 1$  glasi:

$$x = \cos \theta, \quad (2.5)$$

pri čemu je  $0 \leq \theta \leq \pi$ . S tako dobivenim skupom točaka računa se aritmetička sredina gornjake i donjake te dobivaju točke srednje linije aeroprofila.

Metoda 2 evaluira vrijednost donjake aeroprofila preko parametra  $t$  potrebnog za definiciju kubičnog spline-a. Za određeni  $t$ , pomoću  $x$  koordinate te točke (neka se zove referentna), traži se odgovarajući set točaka na gornjaci koje se nalaze s lijeva i desna od referentne točke te se linearnom interpolacijom određuje konačna  $y$  koordinata točke na gornjaci. S tako dobivenim setom točaka, na gornjaci i donjaci, koje se nalaze na istoj  $x$  koordinati, aritmetičkom sredinom nalazi se  $y$  koordinata srednje linije.

Izračun srednje linije aeroprofila proveden je u programskom jeziku *Python*. Prethodno opisane metode dostupne su u cijelosti u obliku *Python* koda u dodatku B.

## 2.2. Čebiševljevi polinomi prve vrste

Za analizu aerodinamičkih karakteristika, u teoriji tankih aeroprofila, aeroprofil se svode na svoju srednju liniju. Kako će biti prikazano u nastavku rada, praktično, bilo je srednju liniju, bilo njen nagib, prikazati pomoću Čebiševljevih polinoma prve vrste. To je skup ortogonalnih polinoma izvorno definiranih tako da se prva dva polinoma zadaju:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \end{aligned}$$

a ostali polinom se računaju rekurzivnom formulom:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

gdje je  $x \in [-1, 1]$ . Parametar  $x$  vrijednost  $-1$  poprima u prednjem bridu dok je na izlaznom bridu vrijednost parametra  $1$ . Prvih nekoliko polinoma prikazano je idućim jednadžbama, a na slici 2.3 su oni prikazani grafički:

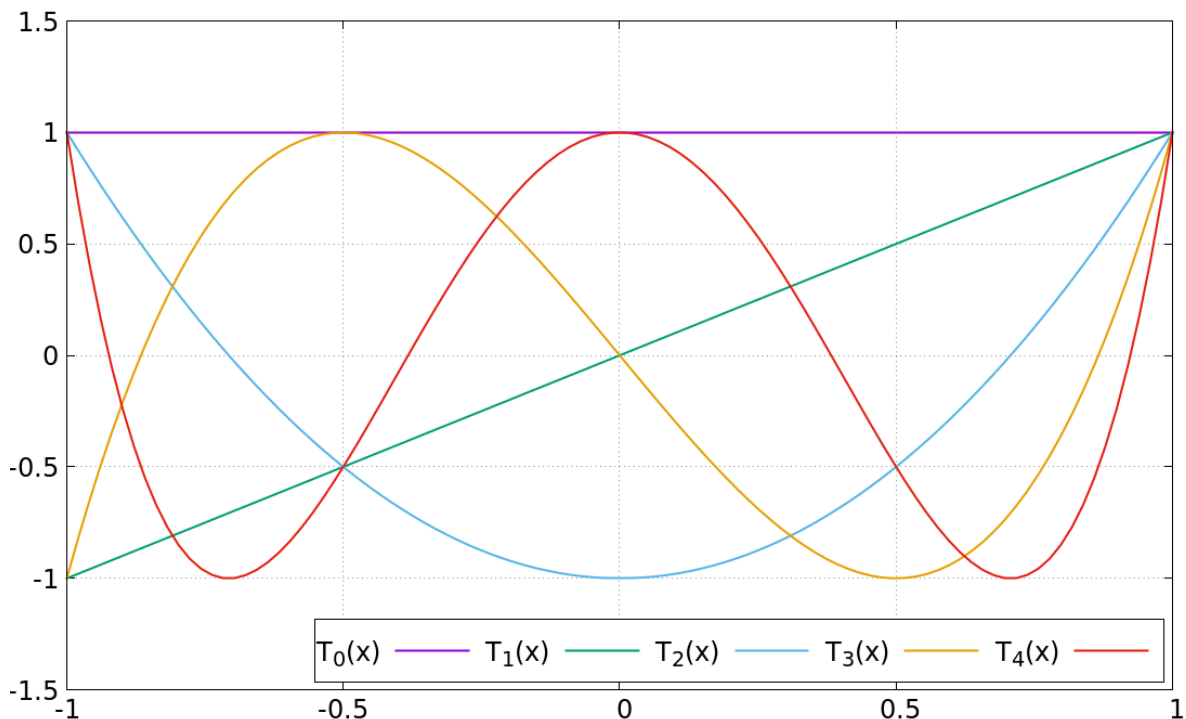
$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$



Slika 2.3: Čebiševljevi polinomi prve vrste  $T_n$

Jedno od osnovnih svojstava  $T_n$  je sljedeći trigonometrijski identitet:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (2.6)$$

pri čemu je  $x = \cos \theta$ , a  $\theta \in [0, \pi]$ . Koristeći ovaj oblik, slijedi njihovo svojstvo ortogonalnosti na intervalu  $-1 < x < 1$ . [2] Uvrštavajući  $x = \cos(\theta)$  u sljedeći poznati integral

$$\int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

dobije se

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

gdje je  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  težinska funkcija.

### 2.3. Teorija tankih aeroprofila

Postavljanje zadaće teorije tankih aeroprofila u nestlačivom toku pripisuje se Munku i Glauertu, kao i njeno prvo rješenje pomoću vrtložnog lista [3]. Kasnije, Theodorsen[4] je općenitiju zadaću riješio i pomoću lista dipola, za izračun aerodinamičkih opterećenja aeroprofila u harmonijskom gibanju. Bitno je spomenuti da je Munk[5] došao do rješenja predmetne zadaće razmatrajući kinetičku energiju i količinu gibanja idealnog fluida.

Naime, matematički gledano, zadaću teorije tankih aeroprofila može se izračunati bilo projekcijom nagiba srednje linije na Čebiševljeve polinome prve vrste,  $T_n$ , bilo projekcijom srednje linije na  $T_n$ . Rješenje zadaće projekcijom nagiba srednje na  $T_n$  će se ovdje nazivati "prirodno" rješenje, dok će se na rješenje projekcijom srednje linije na  $T_n$  referirati kao "alternativno" rješenje.

U nastavku će rješenje zadaće teorije tankih aeroprofila biti izračunato pomoću vrtložnog lista, no na kraju je dana veza između dva rješenja u smislu aerodinamičkih koeficijenata.

### 2.3.1. Formulacija problema preko perturbacijskog polja

Razmatra se stacionarno strujanje oko mirujućeg aeroprofila proizvoljnog oblika (slika 2.4). Promatrani problem zadovoljava:

- Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

gdje je  $\Phi = \Phi(x, y)$  je potencijal brzine,

- Rubne uvjete:

- rubni uvjet na aeroprofilu

$$\text{grad } \Phi \cdot \text{grad } F = 0 \quad \text{na} \quad F(x, y) = 0,$$

pri čemu  $F(x, y) = 0$  opisuje rub aeroprofila,

- uvjet u beskonačnosti

$$\text{grad } \Phi = \mathbf{V}_\infty \quad \text{u beskonačnosti}$$

- Kuttin uvjet: Cirkulacija oko aeroprofila je takva da

*je brzina konačna i kontinuirana na izlaznom bridu*

Označi li se perturbacija polja brzine s  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y)$ , može se zapisati

$$\mathbf{V}(x, y) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{q}(x, y)$$

gdje je  $\mathbf{V}_\infty$  brzina slobodne struje. Označivanjem komponenata vektora  $\mathbf{q}$  s  $u$  i  $v$  i komponente vektora  $\mathbf{V}$  sa  $u_t$  i  $v_t$  tada je

$$u_t(x, y) = V_\infty \cos \alpha + u(x, y),$$

$$v_t(x, y) = V_\infty \sin \alpha + v(x, y),$$

gdje je  $\alpha$  napadni kut (vidi sliku 2.4). Uvede li se  $\phi = \phi(x, y)$  kao polje perturbacijskog potencijala brzine, tada je

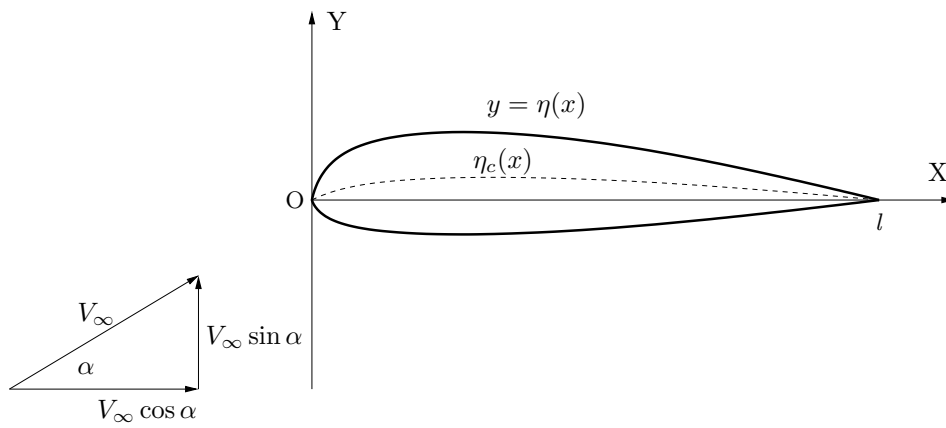
$$u(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

i

$$v(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\text{grad } \Phi = \mathbf{V}_\infty + \text{grad } \phi$$

$$\Phi(x, y) = (xV_\infty \cos \alpha + yV_\infty \sin \alpha) + \phi$$



Slika 2.4: Koordinate i oznake za strujanje oko aeroprofila

U smislu polja perturbacijskog potencijala brzine, gornja zadaća dobiva sljedeći oblik:

- *Diferencijalna jednadžba*

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- *Rubni uvjeti:*

- *Rubni uvjet na aeroprofilu*

$$(\mathbf{V}_\infty + \text{grad } \phi) \cdot \text{grad } F = 0 \quad \text{na} \quad F(x, y) = 0 \quad (2.9)$$

- *Uvjet u beskonačnosti*

komponente  $\text{grad } \phi \rightarrow 0$  u beskonačnosti

- *Kuttin uvjet*

Cirkulacija oko aeroprofila treba biti takva da je perturbacijska

brzina  $\mathbf{q} = \text{grad } \phi$  konačna i kontinuirana na izlaznom rubu



Kako bi se došlo do rješenja, uvodi se pojednostavljenje pretpostavkom malih perturbacija. U toj aproksimaciji rubni uvjeti se mogu svesti na oblike jednostavnije od prethodno navedenih i prenijeti na os (aerodinamičku tetivu) aeroprofila. Tada se problem može predstaviti kao superpozicija tri jednostavnija problema [6]. To su:

1. strujanje oko simetričnog aeroprofila pod nultim napadnim kutom,
2. strujanje oko beskonačno tankog zakrivljenog aeroprofila pod nultim napadnim kutom,
3. strujanje oko beskonačno tanke ravne ploče pod napadnim kutom  $\alpha$ .

Obzirom da se u radu razmatra strujanje oko beskonačno tankog zakrivljenog aeroprofila, rješenja koja uključuju debljinu aeroprofila (problem 1.) se ne razmatraju i nisu potrebna za konačno rješenje. Tako se rješenje može predstaviti kao superpozicija dva problema (problem 2. i 3.). Konačno, do kraja ovog poglavlja postati će jasno da je još jedna, ekvivalentna, dekompozicija strujanja, u teoriji tankih aeroprofila, ona na:

1. Strujanje pod idealnim napadnim kutom (ne ovisi o napadnom kutu  $\alpha$ )
2. Strujanje od idealnog napadnog kuta (ono sadrži singularitet prednjeg brida)

### 2.3.2. Linearizacija rubnog uvjeta na površini

Jednadžba (2.9) zapisana preko komponenata glasi:

$$(V_\infty \cos \alpha + u) \frac{\partial F}{\partial x} + (V_\infty \sin \alpha + v) \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{na} \quad F(x, y) = 0 \quad (2.10)$$

Neka je aeroprofil opisan kao

$$\begin{aligned} y = \eta(x) &= \eta_u(x) && \text{za gornjaku} \\ &= \eta_l(x) && \text{za donjaku} \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \eta(x) - y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{d\eta}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -1$$

Uvrštavanjem prethodnih izraza u (2.10) dobije se

$$v = (V_\infty \cos \alpha + u) \frac{d\eta}{dx} - V_\infty \sin \alpha \quad \text{na } y = \eta(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

Ukoliko aeroprofil nema debljine, odnosno  $y = \eta_c$ , gdje  $\eta_c$  opisuje srednju liniju aeroprofila, i prema sljedećim pretpostavkama[6]:

- napadni kut  $\alpha$  je mali
- $u \ll V_\infty$  i  $v \ll V_\infty$

može se zapisati linearizirani oblik rubnog uvjeta

$$v[x, \eta(x)] = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx} - V_\infty \alpha, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.11)$$

pri čemu prvi član predstavlja rubni uvjet za beskonačno tanki zakrivljeni aeroprofil, a drugi član za beskonačno tanku ravnu ploču.

### 2.3.3. Relacija za tlak

Tlak u bilo kojoj točki dan je Bernoullijevom jednadžbom

$$p(x, y) = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left( 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} \right)$$

U smislu perturbacije  $\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned} V^2 &= (\mathbf{V}_\infty + \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{V}_\infty + \mathbf{q}) = V_\infty^2 + 2\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{q} + q^2 \\ &= V_\infty^2 + 2(V_\infty u \cos \alpha + V_\infty v \sin \alpha) + u^2 + v^2 \end{aligned}$$

Bernoullijeva jednadžba tada poprima oblik

$$\begin{aligned} p &= p_\infty - \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left( 2 \frac{\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{q}}{V_\infty^2} + \frac{q^2}{V_\infty^2} \right) \\ &= p_\infty - \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \left( 2 \frac{u}{V_\infty} \cos \alpha + 2 \frac{v}{V_\infty} \sin \alpha + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right) \end{aligned}$$

Prema uvedenim pretpostavkama:

- napadni kut  $\alpha$  je mali

- $u \ll V_\infty$  i  $v \ll V_\infty$

može se uzeti  $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha = \alpha$  i zanemariti članove u zagradi koji su manji od  $u/V_\infty$ .

Tada se može zapisati

$$p = p_\infty - \rho V_\infty u = p_\infty - \rho V_\infty \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Konačno, odgovarajući koeficijent tlaka je zadan kao

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\rho V_\infty^2 / 2} = -2 \frac{u}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.12)$$

Prethodne jednadžbe izražavaju tlak kao linearnu funkciju komponente brzine  $u$ . To znači da kada se, superpozicijom odvojenih rješenja, riješi po  $u$ , može se dobiti tlak superpozicijom tlakova koji odgovaraju odvojenim rješenjima. Slično, u teoriji tankih aeroprofila, sile i momenti na aeroprofil također se mogu dobiti superpozicijom.

### 2.3.4. Zakrivljeni beskonačno tanki aeroprofil pod nulnim napadnim kutom: rješenje s vrtložnim listom

Matematička zadaća za perturbacijski potencijal  $\phi$ , nakon linearizacije rubnog uvjeta, je sljedeća (vidi sliku 2.5):

- *Diferencijalna jednadžba*

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.13)$$

- *Rubni uvjeti:*

- *Rubni uvjet na aeroprofilu*

$$v(x, 0_\pm) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_\pm) = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.14)$$

- *Uvjet u beskonačnosti*

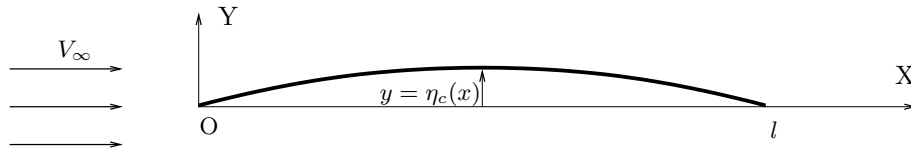
$$\nabla \phi = 0 \quad (2.15)$$

- *Kuttin uvjet:*

Vrijednost cirkulacije treba biti takva da su komponente

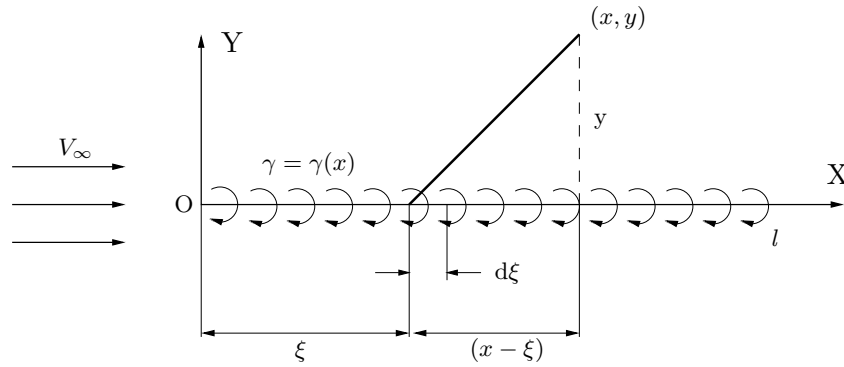
perturbacijske brzine  $u = \partial \phi / \partial x$  i  $v = \partial \phi / \partial y$

konačne i kontinuirane na izlaznom bridu.



Slika 2.5: Koordinate za problem zakrivljenog aeroprofila

Ovi zahtjevi, posebno uvjet na površini (2.14), sugeriraju da se perturbacijsko polje može prikazati preko prigodne raspodjele vrtloga duž  $X$ -osi na intervalu  $0 \leq x \leq l$ . Elementarni vrtlozi raspodijeljeni su kao što je prikazano na slici 2.6, cirkulacija oko



Slika 2.6: Raspodjela vrtloga za zakrivljeni aeroprofil

svakog vrtloga u smjeru je kazaljke na satu. Polje brzina uslijed takve raspodjele vrtloga bilo koje konačne snage automatski zadovoljava Laplaceovu jednadžbu (2.13) i uvjet na beskonačnosti (2.15). Snaga vrtloga bi trebala biti raspodijeljena tako da su rubni uvjet na konturi aeroprofila (2.14) i Kuttin uvjet zadovoljeni.

Jednom kada je raspodjela vrtloga određena, mogu se izračunati sve potrebne informacije o polju strujanja. Neka  $\gamma = \gamma(x)$  označuje linijsku gustoću vrtložnog lista (vidi sliku 2.6). Također,  $\gamma dx$  je cirkulacija oko vrtloga distribuiranih na elementu duljine  $dx$ . Perturbacijski potencijal i komponente perturbacije brzine u točkama  $(x, y)$  dane su sa [6]:

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \tan^{-1} \frac{y}{x - \xi} d\xi \quad (2.16)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (2.17)$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$

Tlak u bilo kakvoj točki dan je preko jednadžbe (2.12):

$$C_p(x, y) = -2 \frac{u(x, y)}{V_\infty}$$

gdje se  $u(x, y)$  izračuna iz (2.17).

Cirkulacija u bilo kojoj točki na distribuciji jednaka je skoku  $u$ -komponente brzine preko plahte vrtloga u toj točki [6]. To slijedi iz rezultata

$$\begin{aligned} u(x, 0_\pm) &= \lim_{y \rightarrow 0_\pm} \frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \\ &= \pm \frac{\gamma(x)}{2}, \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Tada je [6]

$$\gamma(x) = 2u(x, 0_\pm) = u(x, 0_+) - u(x, 0_-)$$

obzirom da je  $u(x, 0_-) = -u(x, 0_+)$ .

Koristeći prethodnu relaciju može se izraziti raspodjela tlaka preko srednje linije aeroprofila i uzgon te moment na srednju liniju aeroprofila u ovisnosti o snazi vrtloga  $\gamma(x)$

$$C_p(x, 0_\pm) = -2 \frac{u(x, 0_\pm)}{V_\infty} = \mp \frac{\gamma(x)}{V_\infty}$$

Uzgon na aerofil je zadan kao

$$\begin{aligned} L &= \int_0^l [p(x, 0_-) - p(x, 0_+)] dx \\ &= \frac{\rho}{2} V_\infty^2 \int_0^l [C_p(x, 0_-) - C_p(x, 0_+)] dx \\ &= \rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) dx \\ &= \rho V_\infty \Gamma \end{aligned}$$

gdje je  $\Gamma = \int_0^l \gamma(x) dx$  cirkulacija oko aeroprofila. Moment na aerofil u odnosu na ishodište (što je ovdje prednji brid) je dan s

$$\begin{aligned} M &= \int_0^l [p(x, 0_+) - p(x, 0_-)] x dx \\ &= -\rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) x dx \end{aligned}$$

Za koeficijente sile uzgona i momenta dobije se

$$C_L = \frac{2}{V_\infty} \frac{1}{l} \int_0^l \gamma(x) dx \quad (2.18)$$

$$C_M = -\frac{2}{V_\infty} \frac{1}{l^2} \int_0^l \gamma(x)x dx \quad (2.19)$$

Sada će se razmotriti pitanje određivanja  $\gamma(x)$ . Prema uvjetu na površini (2.14) zahtijeva se

$$\lim_{y \rightarrow 0_\pm} \left[ -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \right] = v(x, 0_\pm) = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l$$

i dobije se

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \gamma(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi = v(x, 0_\pm) = V_\infty \frac{d\eta_c}{dx}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.20)$$

Prethodna jednadžba treba biti dopunjena Kuttinim uvjetom. Za distribuciju vrtloga onakvu kakva se razmatra,  $v$ -komponenta brzine postaje beskonačna na rubovima distribucije osim ako snaga vrtloga na tom mjestu nije nula. Obzirom da je  $u$  komponenta konačna na rubovima ako je snaga vrtloga konačna, slijedi da je, za zadovoljenje Kuttinog uvjeta, snaga vrtloga na zadnjem bridu jednaka nuli.[6]

$$\gamma(x = l) = 0$$

Uvođenjem varijabli  $\theta$  i  $\varphi$  (slika 2.7) takvih da

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta)$$

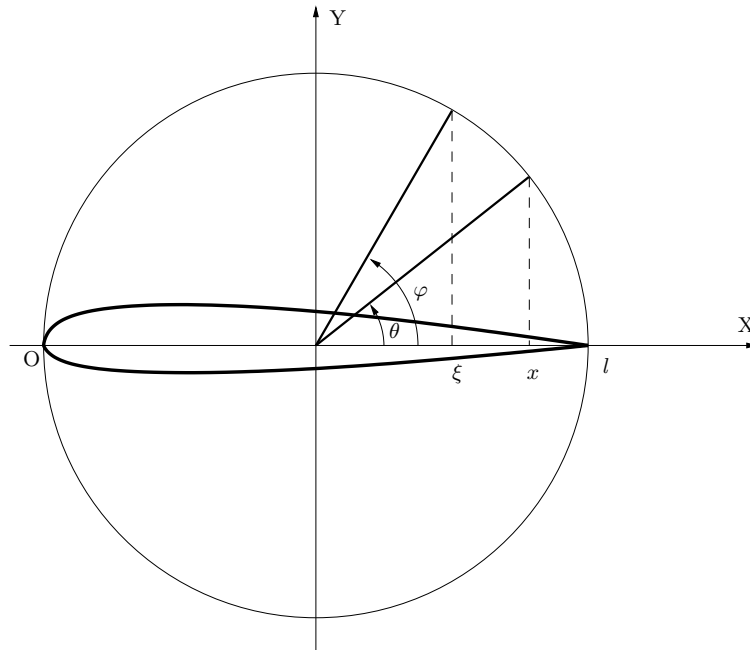
$$\xi = \frac{l}{2}(1 + \cos \varphi)$$

jednadžba (2.20) glasi

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi)}{2V_\infty} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \frac{d\eta_c}{dx}(\theta) \quad (2.21)$$

gdje je

$$\frac{d\eta_c}{dx}(\theta) = \frac{d\eta_c}{dx}[x(\theta)].$$


 Slika 2.7: Uvođenje Glauertove varijable  $\theta$  i  $\varphi$ 

Pošto je  $(d\eta_c/dx)(\theta)$  parna funkcija od  $\theta$ , može se zapisati kao

$$\frac{d\eta_c}{dx}(\theta) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n T_n \quad (2.22)$$

gdje je

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\eta_c}{dx}(\theta) \cos n\theta d\theta \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Korištenjem izraza (2.22), (2.21) postaje

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\varphi)}{2V_{\infty}} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n T_n$$

Rješavanjem dobivene jednadžbe po  $\theta$ , dobiva se izraz za raspodjelu snage vrtloga [6]

$$\gamma(\theta) = -2V_{\infty} \left( \frac{B_0}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} B_n \sin n\theta \right) \quad (2.24)$$

Korištenjem ove relacije mogu se izraziti sva željena aerodinamička svojstva aeroprofila u ovisnosti o  $B_n$ , koji su koeficijenti razvoja  $(d\eta_c/dx)$ . Raspodjela tlaka oko srednje

linije aeroprofila dana je sa

$$\begin{aligned} C_p(\theta) &= C_p[x(\theta), 0_{\pm}] = -\frac{\gamma(\theta)}{V_{\infty}} \\ &= 2 \left[ \alpha_{id} \tan \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} B_n \sin n\theta \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

pri čemu je oznaka  $\alpha_{id} = B_0/2$ . Za dobivanje koeficijenata uzgona i momenta, prvo se zapisuje (2.18) i (2.19) u ovisnosti o varijabli  $\theta$ :

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{1}{V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin \theta \, d\theta \\ C_M &= -\frac{1}{2V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \end{aligned}$$

Zamjenom (2.24) u prethodne jednadžbe, i provođenjem integracija, dobije se

$$C_L = -(B_0 + B_1)\pi \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} C_M &= B_0 \frac{\pi}{4} + B_1 \frac{\pi}{2} + B_2 \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4}(B_0 + B_1) + \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \\ &= -\frac{C_L}{4} + \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \end{aligned} \quad (2.27)$$

gdje je  $B_n$  zadan izrazom (2.23). Relacije (2.26) i (2.27) pokazuju da sustav sila koji djeluje na aeroprofil može biti prikazan kao da se sastoji od sile uzgona koja djeluje na četvrtini tetive mjereno od prednjeg brida i momenta oko te točke.

Time su izražena rješenja za koeficijente uzgona, momenta i tlaka za beskonačno tanki zakrivljeni aeroprofil.

### 2.3.5. Ravna ploča pod napadnim kutom : rješenje s vrtložnim listom

Matematički problem za perturbacijski potencijal izražen je kako slijedi[6] (slika 2.8):

- *Diferencijalna jednadžba*

$$\nabla^2 \phi = 0$$

- *Rubni uvjeti:*



– Rubni uvjet na aeroprofilu

$$v(x, 0_{\pm}) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0_{\pm}) = -V_{\infty} \alpha \quad 0 \leq x \leq l$$

– Uvjet u beskonačnosti

$$\nabla \phi = 0$$

– Kuttin uvjet

Ćirkulacija je takva da su  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  i  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  konačne na zadnjem bridu

Sliĉno kao i ranije, da perturbacijsko polje od ravne ploĉe moŹe biti predstavljeno kao polje sa odgovarajućom distribucijom vrtloga  $\gamma(x)$  duŹ  $X$ -osi na intervalu  $0 \leq x \leq l$  i sada je  $\gamma(x)$  dan je kao rješenje integralne jednadŹbe

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \gamma(\xi) \frac{d\xi}{x - \xi} = v(x, 0_{\pm}) = V_{\infty} \alpha \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.28)$$

s Kuttinim uvjetom

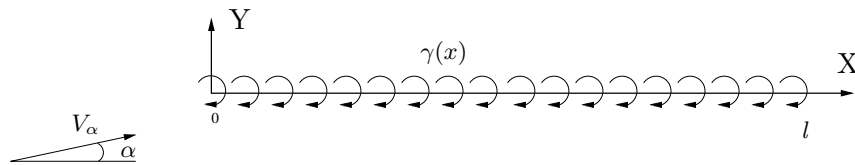
$$\gamma(x = l) = 0$$

Uvode se, kao i ranije, varijable  $\theta$  i  $\varphi$

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$\xi = \frac{l}{2}(1 + \cos \varphi)$$

Tada (2.28) dobiva oblik



Slika 2.8: Koordinate i distribucija vrtloga za problem ravne ploĉe

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \gamma(\varphi) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\theta = -2V_{\infty} \alpha$$

Rješavanjem prethodne jednadŹbe, dolazi se do izraza[6]

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \alpha \tan \frac{\theta}{2} \quad (2.29)$$

Raspodjela tlaka oko ravne ploče dana je sa

$$\begin{aligned} C_p(\theta) &= C_p[x(\theta), 0_{\pm}] = -\frac{\gamma(\theta)}{V_{\infty}} \\ &= -2\alpha \tan \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Koeficijenti sile uzgona i momenta dani su sa

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{1}{V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi\alpha \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} C_M &= -\frac{1}{2V_{\infty}} \int_0^{\pi} \gamma(\theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2}\alpha \\ &= -\frac{C_L}{4} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ove relacije pokazuju da sustav sila na ravnu ploču može biti prikazan kao da se sastoji od samo sile uzgona koja djeluje u točki četvrtini tetive. Ta je točka stoga aerodinamički centar. Ujedno, ona je i centar pritiska za sve napadne kutove.

Nakon prikaza rezultata za oba problema, strujanja oko ravne ploče i beskonačno tankog aeroprofila, zgodno je primijetiti još jedan, ekvivalentan, način dekompozicije predstavljenog problema. Naime, kako je vidljivo iz jednadžbe (2.25), rješenje za beskonačno tanki zakrivljeni aeroprofil uvijek u sebi nosi rješenje strujanja pod idealnim napadnim kutom,  $\alpha_{id}$ ; dok s druge strane, drugi dio rješenja predstavlja strujanje do idealnog napadnog kuta i to je strujanje koje stvara singularitet na prednjem bridu.

### 2.3.6. Aerodinamičke karakteristike beskonačno tankog zakrivljenog aeroprofila pod napadnim kutom

Superpozicijom rješenja za aerodinamičke karakteristike beskonačno tanke ravne ploče pod napadnim kutom  $\alpha$  i beskonačno zakrivljenog aeroprofila pod nulnim napadnim kutom mogu se prikazati konačni izrazi aerodinamičkih karakteristika.

Raspodjela tlaka oko aeroprofila slijedi iz jednadžbi (2.25) i (2.30):

$$C_p(\theta) = -2 \left[ (\alpha - \alpha_{id}) \tan \frac{\theta}{2} - \sum_1^{\infty} B_n \sin n\theta \right] \quad (2.33)$$

Koeficijent sile uzgona aeroprofila iz (2.26) i (2.31):

$$C_L = 2\pi\alpha - (B_0 + B_1)\pi = 2\pi \left( \alpha - \frac{B_0 + B_1}{2} \right) \quad (2.34)$$

Nagib krivulje uzgona u odnosu na napadni kut je konstantan i iznosi  $2\pi$  :

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = 2\pi$$

Iz jednadžbe (2.34), kut nultog uzgona iznosi

$$\alpha_{L0} = \frac{B_0 + B_1}{2}$$

Iz (2.27) slijedi da se sustav sila koji djeluje na aeroprofil može prikazati kao da se sastoji od sile uzgona koja djeluje u točki na četvrtini tetive i momenta oko te točke koji iznosi  $(\pi/4)(B_1 + B_2)$ . Taj moment ne ovisi o napadnom kutu i određen je isključivo zakrivljenošću aeroprofila. Slijedi da je točka na četvrtini tetive *aerodinamički centar*. Stoga, moment oko aerodinamičkog centra iznosi

$$C_{M\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{4}(B_1 + B_2) \quad (2.35)$$

## 2.4. Alternativno rješenje teorije tankog aeroprofila

Projekcijom srednje linije na  $T_n$  moguća je procjena aerodinamičkih svojstava aeroprofila kako će biti prikazano u nastavku. Obzirom na relativno jednostavnu definiciju  $T_n$  preko trigonometrijske funkcije kosinusa (2.6), izračun koeficijenata  $B_n$  iz jednadžbe (2.23) relativno je jednostavno. U tablici 2.1 prikazani su izračunati koeficijenti  $B_n$  za prvih nekoliko  $T_n$ . Ovim se računom projiciraju jedinične bazne funkcije u alternativnom rješenju s  $T_n$  u prirodnu bazu i njihova projekcija u prirodnoj bazi upravo su koeficijenti  $B_n$ .

Iz tablice 2.1 se primjećuje jednostavna veza između koeficijenata  $B_n$  i reda  $T_n$ . Podijeli li se odgovarajuća vrijednost koeficijenta  $B_n$  s redom odgovarajućeg polinoma, dobije se 0 ili 2 ovisno o tome koji se koeficijent promatra i je li je red polinoma paran ili neparan.

Pomoću izračunatih koeficijenata, jednostavno se pomoću formula (2.33), (2.34), (2.35), (2.35) izračunaju aerodinamičke karakteristike  $T_n$ -ova kako je prikazano u tablici 2.2 .

Tablica 2.1: Koeficijenti  $B_n$  Čebiševljevih polinoma prve vrste

Polinom	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$
$T_0$	0	0	0	0	0	0	0
$T_1$	2	0	0	0	0	0	0
$T_2$	0	4	0	0	0	0	0
$T_3$	6	0	6	0	0	0	0
$T_4$	0	8	0	8	0	0	0
$T_5$	10	0	10	0	10	0	0
$T_6$	0	12	0	12	0	12	0
$T_7$	14	0	14	0	14	0	14

Izračunate aerodinamičke karakteristike redom su: idealni napadni kut  $\alpha_{id}$ , koeficijent uzgona pri idealnom napadnom kutu  $C_L(\alpha_{id})$ , koeficijent momenta oko 1/4 tetive  $C_{M_{1/4}}$ , odnosno aerodinamičkog centra, koeficijent momenta oko 1/2 tetive  $C_{M_{1/2}}(\alpha_{id})$  i kut nultog uzgona  $\alpha_{L0}$ . Idealni napadni kut označava kut pri kojem nestaje singularitet prednjeg brida kako je vidljivo iz jednadžbe (2.33).

Tablica 2.2: Aerodinamičke karakteristike Čebiševljevih polinoma prve vrste

Polinom	$\alpha_{id}$	$C_L(\alpha_{id})$	$C_{M_{1/4}}$	$C_{M_{1/2}}$	$\alpha_{L0}(\text{rad})$
$T_2$	0	$-4\pi$	$\pi$	0	2
$T_3$	3	0	$3\pi/2$	$3\pi/2$	3
$T_4$	0	$-8\pi$	$2\pi$	0	4
$T_5$	5	0	$5\pi/2$	$5\pi/2$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{2n-1}$	$2n-1$	0	$(2n-1)\pi/2$	$(2n-1)\pi/2$	$2n-1$
$T_n$	0	$-(2n)\pi$	$n\pi$	0	$2n$

Iz tablice 2.2 ponovo se primjećuje linearna veza aerodinamičkih koeficijenata i reda  $T_n$ -a. Zgodno je primijetiti da je idealni napadni kut parnih  $T_n$ -ova jednak 0 pri čemu je i koeficijent momenta oko 1/2 tetive jednak 0, dok srednje linije oblika neparnih  $T_n$ -ova stvaraju moment oko 1/2 tetive pod  $\alpha_{id}$ , ali ne i uzgon.

### 2.4.1. Veza aerodinamičkih koeficijenata dvaju rješenja

U ovom će se dijelu prikazati veza između, prethodno spomenutog, *prirodnog* i *alternativnog* rješenja zadane teorije tankih aeroprofila.

Prvi korak za izračun aerodinamičkih karakteristika je dobivanje srednje linije iz zadanih točaka aeroprofila. Opći oblik srednje linije aeroprofila može se izraziti pomoću prethodno opisanih Čebiševljevih polinoma prve vrste tako da je

$$\eta_c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n T_n(x). \quad (2.36)$$

Pretpostavi li se da je srednja linija aeroprofila opisana linearnom kombinacijom prvih triju  $T_n$ , dakle  $\eta_c = h_0 T_0 + h_1 T_1 + h_2 T_2$ , gdje su polinomi  $T_n$  zapisani preko trigonometrijskog identiteta (2.6). Za izračun nultog koeficijenta  $h_0$ , primjenom rješenja integrala (2.7) slijedi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left[ h_0 \cos(0\theta) + h_1 \cos(\theta) + h_2 \cos(2\theta) \right] \cos(0\theta) d\theta &= \int_0^{\pi} h_0 \cos(0\theta) \cos(0\theta) d\theta \\ &= \pi h_0 \end{aligned}$$

Slično slijedi i za preostale koeficijente  $h_1$  i  $h_2$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left[ h_0 \cos(0\theta) + h_1 \cos(\theta) + h_2 \cos(2\theta) \right] \cos(\theta) d\theta &= \int_0^{\pi} h_1 \cos(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} h_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left[ h_0 \cos(0\theta) + h_1 \cos(\theta) + h_2 \cos(2\theta) \right] \cos(2\theta) d\theta &= \int_0^{\pi} h_2 \cos(2\theta) \cos(2\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} h_2 \end{aligned}$$

Iz razmatranja slijedi:

$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \eta_c \cos(n\theta) d\theta & n = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \eta_c \cos(n\theta) d\theta & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Konačno, nakon određivanja koeficijenata  $h_n$  za projekciju srednje linije na  $T_n$  moguće je izračunati aerodinamičke karakteristike srednjih linija aeroprofila.

Neka se srednja linija nekog aeroprofila projicira na jedan jedini  $T_n$ , odnosno neka je

$$\eta_c = h_i T_i,$$

u tom slučaju samo  $i$ -ti član doprinosi konačnom rješenju.

Iz jednadžbe (2.33) proizlazi formula za idealni napadni kut koja glasi

$$\alpha_{id} = \frac{B_0}{2}, \quad (2.37)$$

što opravdava oznaku uvedenu u prethodnom poglavlju, gdje je

$$B_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\eta_c}{dx}(\theta) \cos(0\theta) d\theta \quad (2.38)$$

Tada idealni napadni kut, pretpostavljene srednje linije aeroprofila, iznosi

$$\begin{aligned} \alpha_{id} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d(h_i T_i)}{dx}(\theta) \cos(0\theta) d\theta \\ &= h_i \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dT_i}{dx}(\theta) \cos(0\theta) d\theta \\ &= h_i \cdot (\alpha_{id})_i \end{aligned}$$

pri čemu  $(\alpha_{id})_i$  označava idealni napadni kut  $i$ -tog Čebiševljevog polinoma prve vrste kako je prikazano u tablici 2.2.

Koeficijent uzgona  $C_L$ , prema jednadžbi (2.34) i izrazu za  $B_n$  (2.23), može se zapisati kao

$$\begin{aligned} C_L &= 2\pi \left( \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d(h_i T_i)}{dx}(\theta) \cos(0\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d(h_i T_i)}{dx}(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) \\ &= 2\pi \left( \alpha - h_i \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dT_i}{dx}(\theta) \cos(0\theta) d\theta - h_i \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dT_i}{dx}(\theta) \cos(\theta) d\theta \right) \\ &= 2\pi \left( \alpha - h_i \left( \frac{(B_0)_i + (B_1)_i}{2} \right) \right) \\ &= 2\pi (\alpha - h_i \cdot (\alpha_0)_i) \end{aligned}$$

gdje su  $(B_0)_i$  i  $(B_1)_i$  koeficijenti  $B_n$  za  $i$ -ti  $T_n$  (tablica 2.1), a  $(\alpha_0)_i$  kut nultog uzgona  $i$ -tog  $T_n$ . Slično, koeficijent momenta, iz jednadžbe (2.35), glasi

$$\begin{aligned} C_{M\frac{1}{4}} &= \frac{\pi}{4} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d(h_i T_i)}{dx}(\theta) \cos(\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d(h_i T_i)}{dx}(\theta) \cos(2\theta) d\theta \right) \\ &= \frac{\pi}{4} h_i \left( (B_1)_i + (B_2)_i \right) \\ &= h_i \cdot (C_{M\frac{1}{4}})_i \end{aligned}$$

Sada se može prikazati rješenje za najopćenitiji slučaj u kojem se srednja linija projicira na  $n$  modova  $T_n$ . Sada je zapis srednje linije aeroprofila

$$\eta_c = \sum_{i=0}^n h_i T_i = h_0 T_0 + h_1 T_1 + h_2 T_2 + \dots + h_n T_n \quad (2.39)$$

Uvrštavajući izraze (2.39) i (2.38) u (2.37) slijedi

$$\begin{aligned} \alpha_{id} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d}{dx} (h_0 T_0 + h_1 T_1 + h_2 T_2 + \dots + h_n T_n) \cos(0\theta) d\theta \\ &= h_0 \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dT_0}{dx} \cos(0\theta) d\theta}_{\alpha_{id} \text{ ako je } \eta_c=T_0} + h_1 \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dT_1}{dx} \cos(0\theta) d\theta}_{\alpha_{id} \text{ ako je } \eta_c=T_1} + \\ &+ h_2 \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dT_2}{dx} \cos(0\theta) d\theta}_{\alpha_{id} \text{ ako je } \eta_c=T_2} + h_3 \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dT_3}{dx} \cos(0\theta) d\theta}_{\alpha_{id} \text{ ako je } \eta_c=T_3} + \dots + \\ &+ h_n \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dT_n}{dx} \cos(0\theta) d\theta}_{\alpha_{id} \text{ ako je } \eta_c=T_n} \\ &= h_0 (\alpha_{id})_0 + h_1 (\alpha_{id})_1 + h_2 (\alpha_{id})_2 + h_3 (\alpha_{id})_3 + \dots + h_n (\alpha_{id})_n \\ &= \sum_{i=0}^n h_i \cdot (\alpha_{id})_i \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sličnim razmatranjima može se doći do zapisa ostalih aerodinamičkih karakteristika preko  $T_n$ , a oni slijede u nastavku, pri čemu je  $\alpha$  napadni kut aeroprofila:

$$\alpha_{L0} = \sum_{i=0}^n h_i \frac{(B_0)_i + (B_1)_i}{2} \quad (2.41)$$

$$C_L = 2\pi [\alpha - \alpha_{L0}] \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} C_{M_{1/4}} &= \sum_{i=0}^n \left[ h_i \frac{\pi}{4} \left( (B_1)_i + (B_2)_i \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n h_i \cdot (C_{M_{1/4}})_i \end{aligned} \quad (2.43)$$

Iz razmatranja slijedi da je aerodinamičke značajke srednje linije aeroprofila moguće dobiti sumom aerodinamičkih koeficijenata svakog  $T_n$  pomnoženog s odgovarajućim koeficijentom  $h_n$ , osim, naravno, koeficijenta uzgona koji ovisi o napadnom kutu aeroprofila, no on se može prikazati pomoću kuta nultog uzgona.

Također, sličnim postupkom moguće je prikazati koeficijent tlaka u svakoj točki aeroprofila  $C_p(\theta)$ , pri čemu je  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Pozitivne vrijednosti  $\theta$  odgovaraju gornjaci aeroprofila dok negativne vrijednosti odgovaraju donjaci aeroprofila. Za  $\alpha_{id}$  slijedi:

$$\begin{aligned}
C_p(\theta) = & 2 \left[ \left( h_0(B_1)_0 + h_1(B_1)_1 + h_2(B_1)_2 + \cdots + h_k(B_1)_k \right) \sin(\theta) \right. \\
& + \left( h_0(B_2)_0 + h_1(B_2)_1 + h_2(B_2)_2 + \cdots + h_k(B_2)_k \right) \sin(2\theta) \\
& \vdots \\
& \left. + \left( h_0(B_n)_0 + h_1(B_n)_1 + h_2(B_n)_2 + \cdots + h_k(B_n)_k \right) \sin(n\theta) \right] \\
= & 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k h_j(B_i)_j \sin(i\theta)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Obzirom da svi koeficijenti  $h_n$  imaju utjecaj na  $B_0$ ,  $B_1$  i  $B_2$ , sume za aerodinamičke koeficijente, kod *alternativnog* rješenja, su beskonačne. Upravo ta činjenica opravdava termin *prirodno* rješenje za projekciju nagiba srednje linije na Čebiševljeve polinome prve vrste  $T_n$ , odnosno *alternativno* rješenje za projekciju srednje linije na  $T_n$ .

## 2.5. Metoda konačnih volumena

Metoda konačnih volumena integralna je metoda koja se temelji na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednadžbi po dijelovima na koje je podijeljeno područje proračuna, odnosno konačnim volumenima[7]. Integralni oblik transportne jednadžbe glasi

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} (\rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV,$$

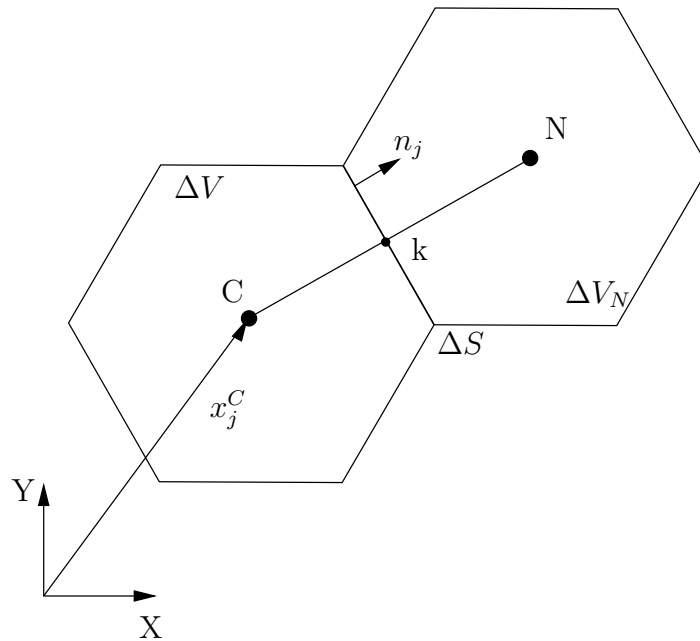
gdje je  $\varphi$  skalarna fizikalna veličina, a čine je redom članovi: član lokalne promjene, konveksijski i difuzijski član te izvorski član.

Diskretizirani oblik jednadžbe (2.45) glasi

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_c}{dt} = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left( F_k \varphi_k - D_k \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_k \right)_{nb} + S_C \Delta V,$$

pri čemu je  $F_k = \rho v_{n,k} \Delta S$  jačina konvekcije ( $v_{n,k}$  označava prosjek komponente brzine normalne na stranicu  $\Delta S$  u točki  $k$ ), odnosno volumni protok fluida kroz površinu





Slika 2.9: Konačni volumeni

$\Delta S$ ,  $D_k = \frac{\Gamma \Delta S}{\Delta n}$  jačina difuzije, a suma  $\sum_{nb=1}^{N_{nb}}$  označava zbroj po svim stranicama ruba konačnog volumena.

### 2.5.1. Numeričke sheme

Obzirom da se u numeričkom postupku računaju i pante samo čvrne vrijednosti polja  $\varphi$  u težištima ćelija, potrebno je definirati tražene vrijednosti na stranicama konačnih volumena koristeći vrijednosti ćelija u najbližoj okolini.

**Shema centralnih razlika** Shema centralnih razlika aproksimira difuzijski protok u centrima dvije susjedne ćelije te se derivacija polja  $\varphi$  u smjeru normale  $n_j$  u točki  $k$  računa kao

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_n = \frac{\varphi_N - \varphi_C}{x_N - x_C}$$

Shema je drugog reda točnosti ukoliko se radi o uniformnoj ortogonalnoj mreži. [8]

**Uzvodna shema** Uzvodna shema (*upwind*) je prvog reda točnosti i vrijednost varijable  $\varphi$  na stranici  $k$  se određuje na temelju smjera strujanja:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_C & \text{za } v_n \geq 0 \\ \varphi_N & \text{za } v_n < 0 \end{cases}$$

Uzvodna shema uvodi u rješenje difuziju koja stabilizira rješenje u području velikih gradijenata, no time narušava red točnosti numeričke metode.

**Linearno uzvodna shema** Linearno uzvodna shema (*linearUpwind*) je shema najviše drugog reda točnosti (tzv. *eng. high-resolution scheme*) i vrijednost  $\varphi_n$  određuje se linearnom ekstrapolacijom iz uzvodnih čvorova

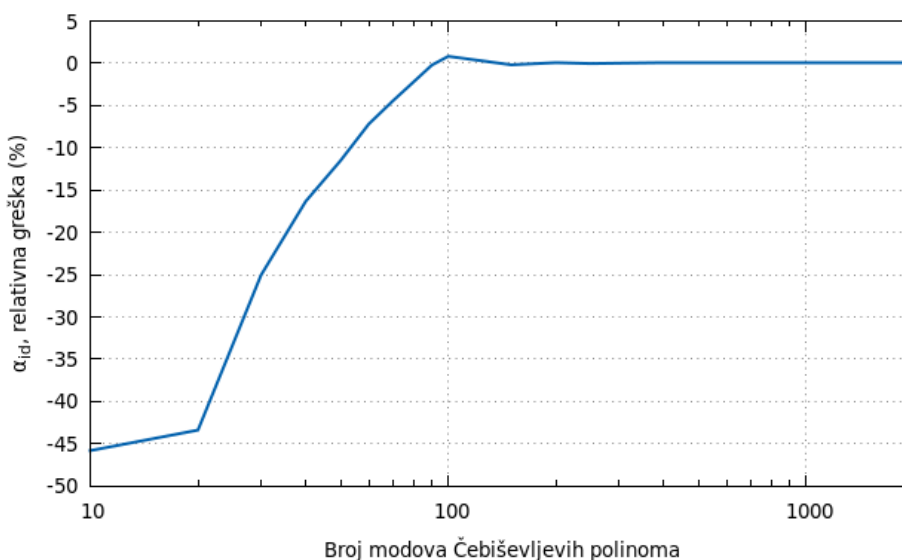
$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_C + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_C |x_j^k - x_j^C| & \text{za } v_n \geq 0 \\ \varphi_N + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_N |x_j^k - x_j^N| & \text{za } v_n < 0 \end{cases}$$

Ova shema nije bezuvjetno stabilna i može uzrokovati nestabilnost numeričkog proračuna.

## 3 Rezultati

U ovom će se poglavlju najprije prikazati greška i dijagram konvergencije alternativnog rješenja s povećanjem broja baznih funkcija. Nadalje, prikazati će se i usporediti rezultati dobiveni teorijom tankih aeroprofila s rezultatima dobivenim numeričkim pokusom u paketu *OpenFOAM*.

Iz izraza za aerodinamičke značajke (jednadžbe (2.40), (2.41), (2.42), (2.43), (2.44)) primjećuje se da je za točno rješenje potrebno uzeti u obzir utjecaj beskonačno mnogo modova  $T_n$ . Stoga će se najprije prikazati koliko je modova potrebno kako bi traženo rješenje bilo odgovarajuće točnosti.



Slika 3.1: Konvergencija alternativnog rješenja s povećanjem broja baznih funkcija

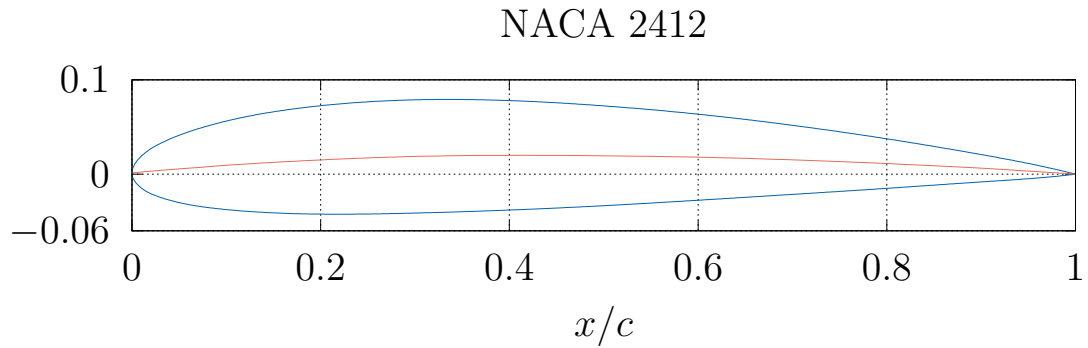
Slika 3.1 prikazuje relativnu grešku aproksimiranog idealnog napadnog kuta,  $\alpha_{id}$ , obzirom na broj modova  $T_n$ . Referentna vrijednost za izračun relativne greške izračunata je pomoću koeficijenata razvoja nagiba srednje linije (jednadžbe (2.23) i (2.37)). Iz priloženog, vidi se da je za relativno točno rješenje potrebno otprilike 200 modova. Obzirom da je *alternativno* rješenje ekvivalentno *prirodnom* rješenju kako je pokazano, rezultate nije potrebno računati računalno skupljim, *alternativnim*, rješenjem.

Sada će se prikazati i usporediti dobiveni rezultati za aerodinamičke karakteristike nekoliko aeroprofila. Uspoređivati će se rezultati dobiveni pomoću teorije tankog aeroprofila i rezultati dobiveni numeričkim proračunom metodom konačnih volumena pomoću paketa OpenFOAM [9].

Najprije će se prikazati aerodinamičke karakteristike tipičnog standardnog aeroprofila kako bi se dobio uvid u njihove karakteristike, a nakon toga će se prikazati aerodinamičke karakteristike odabranih refleksnih aeroprofila. Odabrani standardni aeroprofil je četvero-znamenasti NACA aeroprofil, NACA 2412 (slika 3.2). Refleksni aeroprofil na kojima je provedena analiza su peteroznamenasti NACA aeroprofil NACA 24112 (slika 3.4), Martin Hepperle MH61 (3.6) i aeroprofil niskog otpora Roncz/Marske-7 (slika 3.8).

Na slikama 3.3, 3.5, 3.7, 3.9 prikazani su koeficijenti tlakova dobiveni pomoću teorije tankog aeroprofila i metodom konačnih elemenata dok su u tablicama 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 prikazana ostala svojstva, idealni napadni kut,  $\alpha_{id}$  (°), koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$ , i koeficijent momenta oko aerodinamičkog centra,  $C_{M\frac{1}{4}}$ . Svi koeficijenti tlaka duž srednje linije aeroprofila prikazani su pri idealnom napadnom kutu.

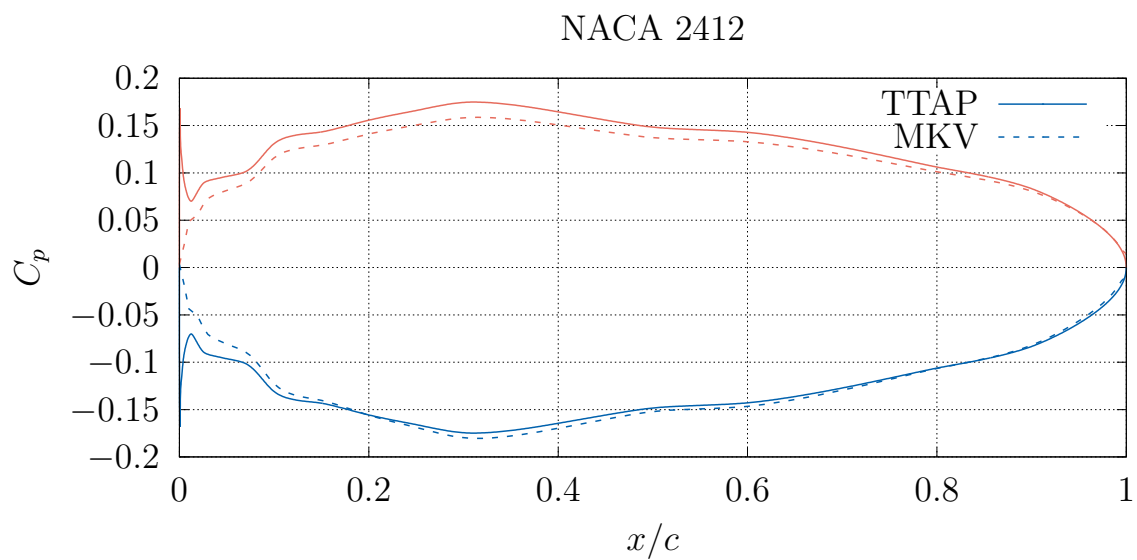
Prilikom određivanja idealnog napadnog kuta aeroprofila metodom konačnih volumena, u obzir je uzeto nekoliko različitih pokazatelja koji bi mogli indicirati da je idealni napadni kut pronađen. Mjerilo odabrano za određivanje idealnog napadnog kuta bio je slučaj u kojem su tlak u prednjem bridu na gornjaci i donjaci najbliže nuli jer je rješenje preko tog pokazatelja davalo najtočnija rješenja obzirom na referentno rješenje. U tom su slučaju tlakovi u prednjem bridu na gornjaci i donjaci jednaki, a strujanje nastrojava tangencijalno na prednji brid[10].



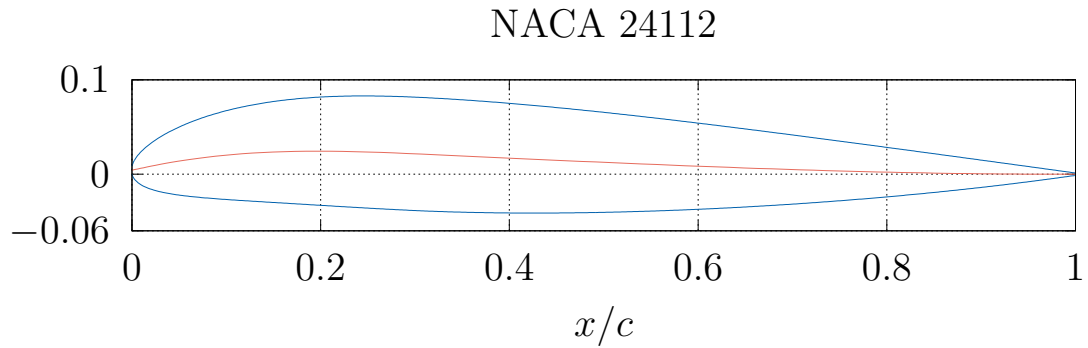
Slika 3.2: Aeroprofil NACA 2412 i srednja linija

Tablica 3.1: Aerodinamičke karakteristike NACA 2400

	TTAP	MKV
Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ), $\alpha_{id}$	0.292	0.2704
Koeficijent uzgona, $C_L(\alpha_{id})$	0.257	0.246
Koeficijent momenta, $C_{M_{\frac{1}{4}}}$	-0.053	-0.053



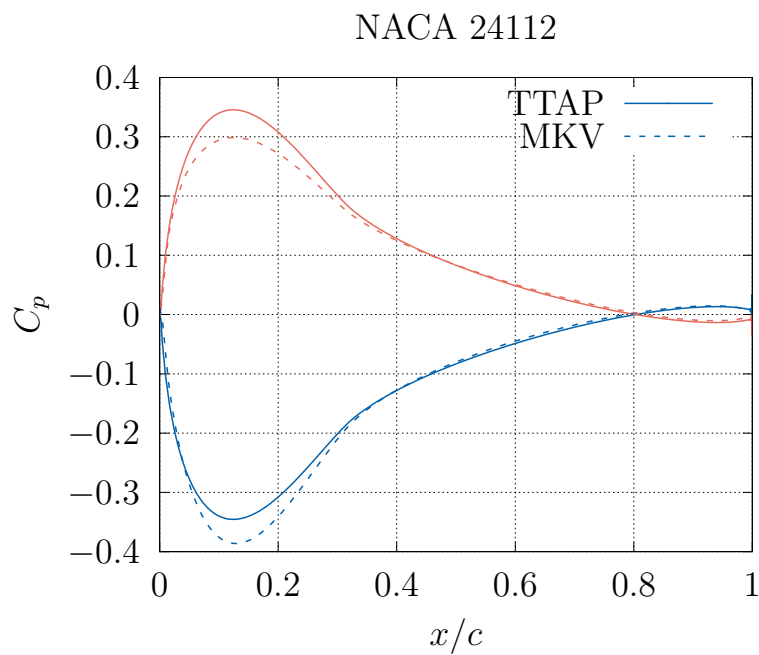
Slika 3.3: Koeficijent tlaka za NACA 2400



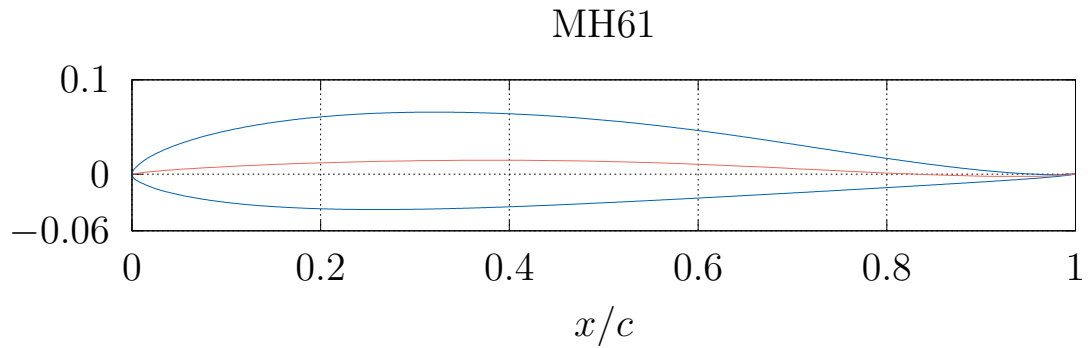
Slika 3.4: Aeroprofil NACA 24112 i srednja linija

Tablica 3.2: Aerodinamičke karakteristike NACA 24112

	TTAP	MKV
Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ), $\alpha_{id}$	1.57	1.53
Koeficijent uzgona, $C_L(\alpha_{id})$	0.239	0.235
Koeficijent momenta, $C_{M_{\frac{1}{4}}}$	0.004	0.0038



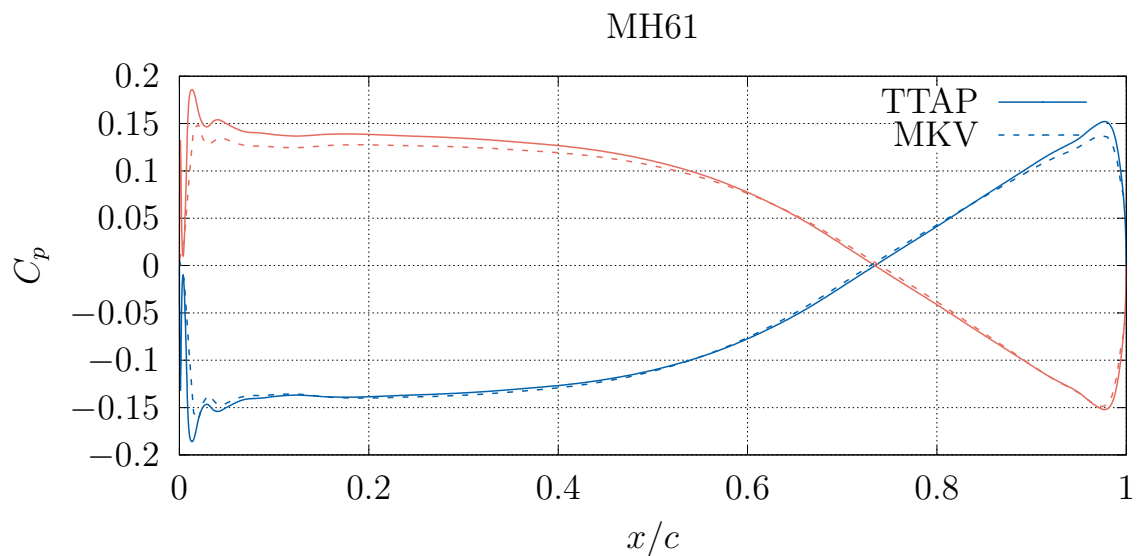
Slika 3.5: Koeficijent tlaka za srednju liniju aeroprofila NACA 24112



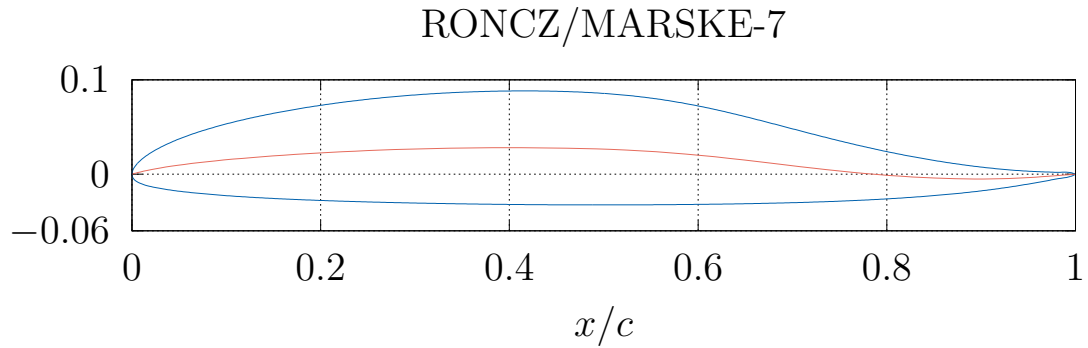
Slika 3.6: Aeroprofil MH61 i srednja linija

Tablica 3.3: Aerodinamičke karakteristike MH61

	TTAP	MKV
Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ), $\alpha_{id}$	1.33	1.29
Koeficijent uzgona, $C_L(\alpha_{id})$	0.120	0.115
Koeficijent momenta, $C_{M\frac{1}{4}}$	0.019	0.018



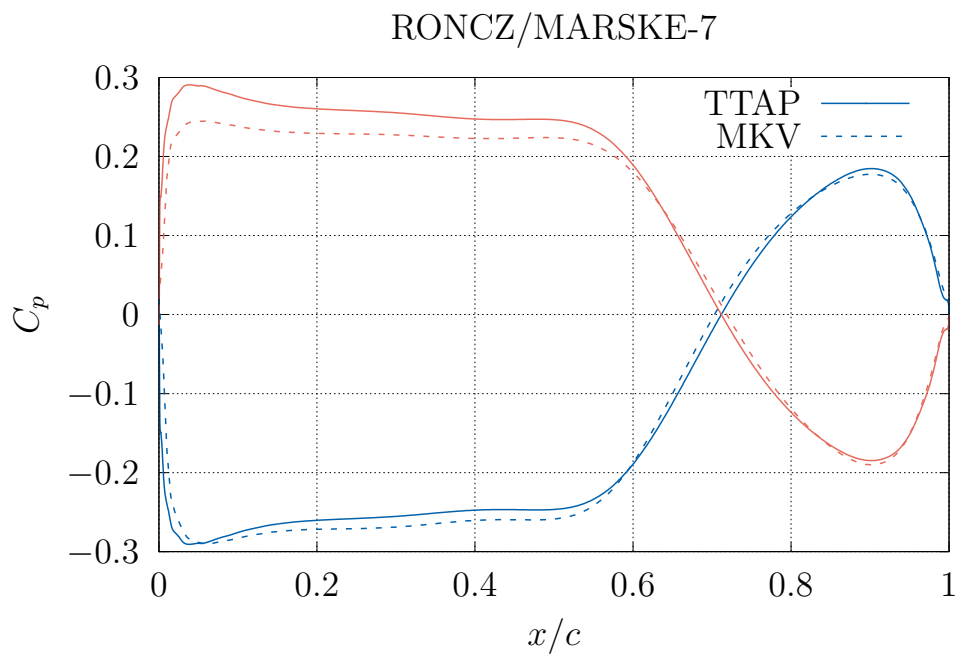
Slika 3.7: Koeficijent tlaka za srednju liniju aeroprofila MH61



Slika 3.8: Aeroprofil Roncz/Marske-7 i srednja linija

Tablica 3.4: Aerodinamičke karakteristike Roncz/Marske-7

	TTAP	MKV
Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ), $\alpha_{id}$	2.22	2.20
Koeficijent uzgona, $C_L(\alpha_{id})$	0.256	0.248
Koeficijent momenta, $C_{M_{\frac{1}{4}}}$	0.0226	0.0216



Slika 3.9: Koeficijent tlaka za srednju liniju aeroprofila Roncz/Marske-7



Na slikama 3.3 i 3.7 jasno vidljiv je problem određivanja idealnog napadnog kuta gdje, na prednjem bridu, postoje skokovi u tlaku. Nadalje, na svim slikama koje prikazuju raspodjelu koeficijenta tlaka primjećuje se sličan trend podbacivanja rješenja u numeričkom pokusu. Obzirom da rješenje na potlačnoj strani podbacuje jednako kao i na pretlačnoj strani, momenti koje stvaraju srednje linije aeroprofila i dalje su relativno točni u usporedbi s teorijom tankih aeroprofila.

Iz prikazanih rezultata vidljiva je razlika između standardnih i refleksnih aeroprofila. Zbog refleksa, tlak na gornjaci i donjaci u tom području mijenja predznak i posljedično se mijenja sila na tom dijelu aeroprofila. Upravo ta promjena u tlaku utječe na promjenu smjera djelovanja momenta oko aerodinamičkog centra,  $C_{M\frac{1}{4}}$ . Iz tog se razloga refleksni aeroprofili koriste za trimani let letjelice bez repa.

## 4 | Zaključak

U ovom radu razmotrena su dva rješenja zadatke teorije tankih aeroprofila. U svrhu dobivanja procjene aerodinamičkih svojstava proizvoljnih aeroprofila, implementirana je metoda za dobivanje srednje linije iz standardnog opisa debelog aeroprofila pri čemu je dobivena srednja linija opisana prirodnim splineom. Konačno, za tako dobivenu srednju liniju proizvoljnog aeroprofila, teorijom tankih aeroprofila dobivene su aerodinamičke značajke referentnih aeroprofila.

Također, u radu je dana usporedba između *prirodnog* i *alternativnog* rješenja teorije tankih aeroprofila. Prikazana je jasna razlika da je za *prirodno* rješenje potrebno samo tri koeficijenta razvoja, dok je za *alternativno* rješenje potrebno njih beskonačno. Obzirom na tu činjenicu, potvrđuje se naziv "alternativno rješenje". Imajući u vidu razliku između *prirodnog* i *alternativnog* rješenja, *prirodno* rješenje je prihvatljivije i s aspekta računalnih resursa i računalnog vremena.

Nadalje, prikazano je da se, u kontekstu teorije tankih aeroprofila, strujanje može rastaviti na strujanje pod idealnim napadnim kutom i strujanje sa singularitetom prednjeg brida. Tako, u svrhu validacije teorije tankih aeroprofila, pristupilo se numeričkom rješavanju ekvivalentnog modela volumnom metodom u kojoj se ne pretpostavljaju male perturbacije brzine uzrokovane prisustvom aeroprofila u struji neviskozog fluida. Kako bi se umanjile greške uzrokovane stabilizacijom konvektivnog člana, rješenja su uspoređena za napadni kut pri kojemu je opstrujavanje prednjeg brida glatko.

Numeričko određivanje idealnog napadnog kuta pokazalo se kao netrivialna zadaća. Kao najbolji kriterij za određivanje  $\alpha_{id}$  pokazala se jednakost tlakova u prvoj ćeliji prednjeg brida. Tako identificirani  $\alpha_{id}^{CFD}$  pokazao je vrlo dobro podudaranje sa  $\alpha_{id}^{TTAP}$ ,

te ne samo da su aerodinamičke (integralne) značajke pokazale dobro podudaranje, već se i raspodjele tlaka iznenađujuće dobro podudaraju.

Nakon validacije rezultata teorije tankih aeroprofila, izračunate su aerodinamičke značajke za cijeli niz refleksnih aeroprofila i tako dobivene aerodinamičke značajke dane su u Dodatku D.

# Literatura

- [1] L.S. Stivers Jr. I. H. Abbot, A.E. von Doenhoff. Summary of airfoil data. Technical Report NACA-TN-824, 1945.
- [2] R. Hollos S. Hollos. *Chebyshev Polynomials*. Exstrom Laboratories LLC, 2006.
- [3] P. Kesić. *Osnove aerodinamike*. Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2003.
- [4] T. Theodorsen. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. Technical Report NACA-TN-496, 1934.
- [5] M. M. Munk. Elements of the wing section theory and of the wing theory. Technical Report NACA-TR-191, 1925.
- [6] K. Karamcheti. *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*. R. E. Krieger Pub. Co., 1980.
- [7] I. Džijan Z. Virag. *Računalna dinamika fluida*. Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [8] D. Matijašević. *Hermiteova interpolacija radijalnim baznim funkcijama u metodi kontrolnih volumena*. PhD thesis, 2011.
- [9] <https://openfoam.org/>.
- [10] P. Bot R. Flay, A. Piard. Aerodynamics of a highly cambered circular arc aerofoil: Experimental investigations, 2017.

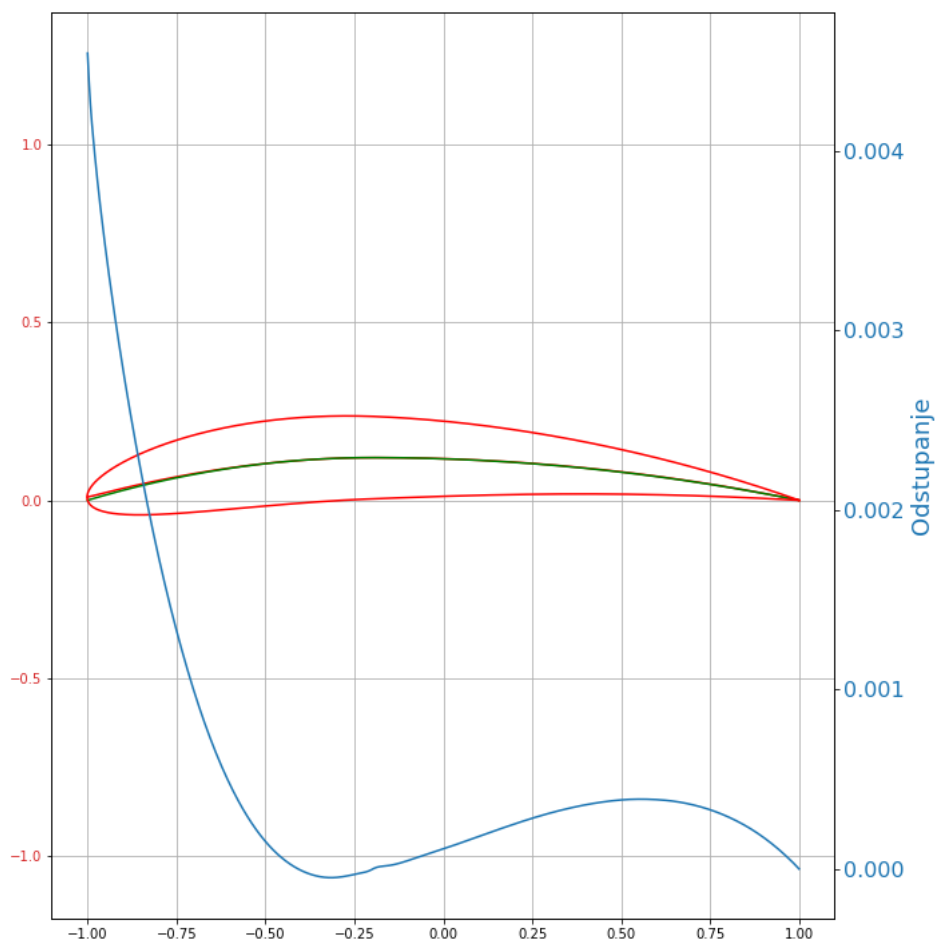
# A Validacija rješenja za dobivanje srednje linije

Za validaciju metoda korišten je četveroznamenkasti aeroprofil NACA 6412. Obzirom na način definiranja NACA aeroprofila koji je opisan u prethodnom potpoglavlju, u usporedbi se javlja "sustavna" greška. Uzrok te greške je što točke gornjake i donjake NACA-inih aeroprofila ovise o iznosu nagiba, tj. derivacije, skeletnice za određeni  $x$ , kao što je vidljivo iz jednadžbe (2.4), dok primjenjene metode srednju liniju računaju kao aritmetičku sredinu gornjake i donjake za određenu koordinatu  $x$ . Nadalje, povećanje broja točaka za izračun srednje linije ne utječe na smanjenje, prethodno navedene, "sustavne" greške i ona daljnjim povećanjem broja točaka ostaje konstantna.

Najveća odstupanja pojavljuju se na prednjem bridu aeroprofila i ona trnu do prihvatljive vrijednosti na 25% tetive aeroprofila kao što je prikazano na slici A.1. Odstupanje je dobiveno kao razlika vrijednosti dobivene srednje linije i skeletnice te je normirano duljinom tetive aeroprofila. Dobiveno odstupanje sa slike A.1 jednako je za obje metode prikazane u radu.

Postavlja se pitanje koliko proračunskih točaka na  $x$ -osi je dovoljno za dobivanje srednje linije. Kako bi se odredio dovoljan broj točaka potrebnih za relativno točnu aproksimaciju srednje linije koriste se evaluacija prema dvije vrste greški, maksimalna greška, ili  $L^\infty$  greška, i greška po Euklidskoj normi, ili  $L^2$  greška.

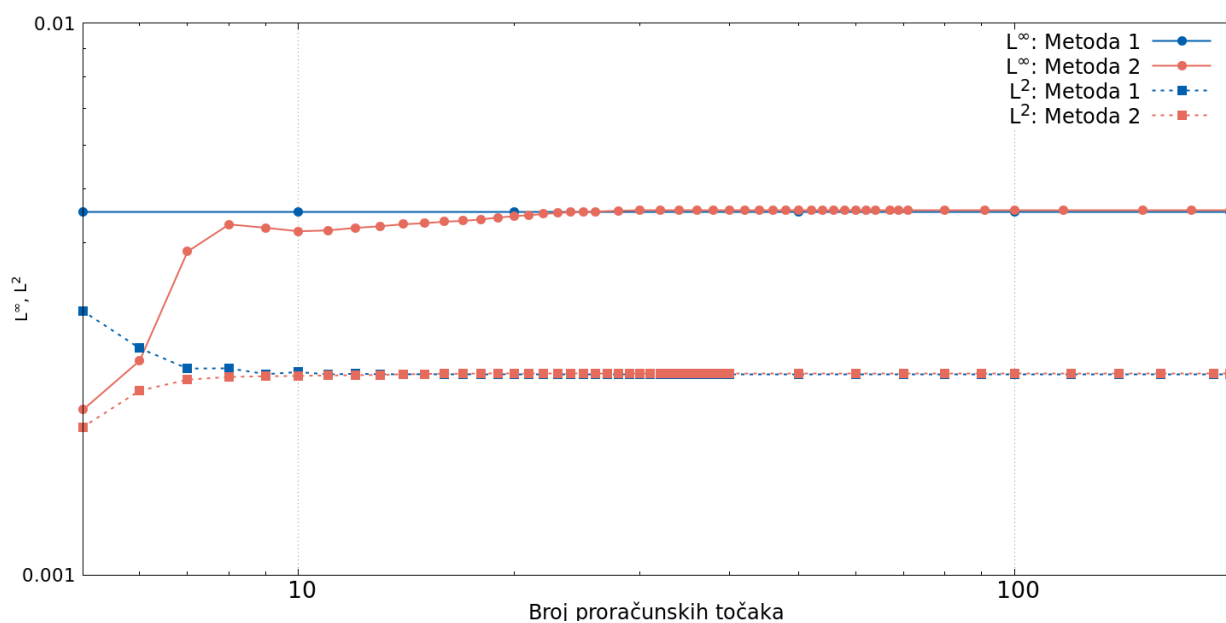
Slika A.2 prikazuje konvergenciju mjere  $L^\infty$  greške, odnosno mjere  $L^2$  greške za pojedinu metodu izračuna srednje linije. Kao što je već opisano, metoda 1 predstavlja metodu izračuna srednje linije gdje su  $x$  koordinate točaka raspoređene prema Glauertovoj raspodjeli, dok metoda 2 predstavlja metodu u kojoj su  $x$  koordinate proračunskih točaka jednake interpoliranim, relativno ravnomjerno raspoređenim,  $x$  koordinatama



Slika A.1: Odstupanje srednje linije od skeletnice aeroprofila

točaka na donjaci aeroprofila. Također, iz slike A.2 može se očitati vrijednost, prethodno spomenute, "sustavne" greške koja se javlja u ovoj usporedbi.

S dobivenih grafova konvergencije vidljivo je da metoda 1 daje jednaku mjeru maksimalne greške bez obzira na broj proračunskih točaka dok je mjera maksimalne greške metode 2 prihvatljiva sa 40 točaka. Nadalje, mjera greške po Euklidskoj normi,  $L^2$  greške, kod metode 1 je prihvatljiva već s 20 proračunskih točaka, jednako kao i mjera  $L^2$  greška metode 2. Prema grafu konvergencije moglo bi se pogrešno zaključiti da je metoda 2 točnija od metode 1, pogotovo kod malog broja proračunskih točaka. Razlog manje greške metode 2, kod malog broja točaka, je taj što metoda 2 nije prilagođena izračunu srednje linije s malim brojem točaka i u tom slučaju izračunata srednja linija nije potpuna, tj. srednja linija nema prednji brid u stvarnom prednjem bridu aeroprofila,

Slika A.2: Konvergencija  $L^\infty$  i  $L^2$  greške geometrije srednje linije

nego je on pomaknut prema četvrtini tetive aeroprofila. Obzirom da mjera greške izračunate srednje linije gotovo nestaje približavanjem četvrtini tetive, kao što je vidljivo prema slici A.1, lako je razumljivo da će i srednja linija, kojoj je prednji brid pomaknut prema tom području, u konačnici imati manju grešku.

Konačno, iz prethodnih razmatranja vidljivo je da obje metode daju jednake greške i da odabir metode ne utječe na konačan rezultat.

# B | Metode izračuna srednje linije

## Metoda 1

```
import numpy as np
from scipy import interpolate
def metoda1(filepath, NN):
    ##NN je broj tocaka u glauertovoj raspodjeli

    AP_points = np.loadtxt(filepath, skiprows=1)
    APx = AP_points[:,0]*2 - 1
    APy = AP_points[:,1]*2
    tck, u = scipy.interpolate.splprep([APx, APy], s=0)
    xi, yi = scipy.interpolate.splev(np.linspace(0, 1, 1000), tck)
    useek=np.linspace(0, 1, 2001)
    tseek = scipy.interpolate.splev(useek, tck)
    xv = tseek[0]
    yv = tseek[1]
    k = 0
    for i in range(np.shape(useek)[0]):
        k += 1
        if xv[i+1] > xv[i]:
            break
```



```

useek2=np.linspace(0, 1, 150000)
tseek2 = scipy.interpolate.splev(useek2, tck)
xv2 = tseek2[0]
yv2 = tseek2[1]
k2 = 0
for i in range(len(useek2)):
    k2 += 1
    if xv2[i+1] > xv2[i]:
        break

k2 = k2
thetag = np.linspace(0, np.pi, NN)
xg = np.cos(thetag)    #x koordinata za Glauertovu raspodjelu
eta = np.zeros([2, len(xg)])
eta[0,:] = xg
for i in range(len(xg)):
    for j in range(k2):
        if xv2[j] < xg[i]:
            break

    x_upl = xv2[j]
    #x_upl = x-up left (x koordinata na gornjaci...
    #lijeva tocka za interpolaciju)

    x_upr = xv2[j-1]
    y_upl = yv2[j]
    y_upr = yv2[j-1]
    y-up = np.interp(xg[i], [x-upl, x-upr], [y-upl, y-upr])

for n in range(len(yv2),k2-1, -1):
    if xv2[n-1] < xg[i]:
        break

x_dwnl = xv2[n-1]

```

```

y_dwnl = yv2[n-1]
x_dwnr = xv2[n]
y_dwnr = yv2[n]
y_dwn = np.interp(xg[i], [x_dwnl, x_dwnr], [y_dwnl, y_dwnr])
eta[1,i] = (y_up + y_dwn)/2
eta = np.fliplr(eta)

```

## Metoda 2

```

import numpy as np
from scipy import interpolate
def metoda2(filepath, NN):
    AP_points = np.loadtxt(filepath, skiprows=1)
    APx = AP_points[:,0]*2 - 1
    APy = AP_points[:,1]*2
    tck, u = scipy.interpolate.splprep([APx, APy], s=0)
    xi, yi = scipy.interpolate.splev(np.linspace(0, 1, 2001), tck)

    useek=np.linspace(0, 1, NN)
    tseek = scipy.interpolate.splev(useek, tck)
    xv = tseek[0]
    yv = tseek[1]
    k = 0
    for i in range(np.shape(useek)[0]):
        k += 1
        if xv[i+1] > xv[i]:
            break

    useek2=np.linspace(0, 1, 80000)
    tseek2 = scipy.interpolate.splev(useek2, tck)
    xv2 = tseek2[0]
    yv2 = tseek2[1]

```

```

k2 = 0
for i in range(np.shape(useek2)[0]):
    k2 += 1
    if xv2[i+1] > xv2[i]:
        break

eta = np.zeros([2, len(range(k-1, len(useek)))]])
for i in range(k-1, len(useek)):
    donja = scipy.interpolate.splev(useek[i], tck)
    for j in range(len(useek2)):
        gornja = scipy.interpolate.splev(useek2[j], tck)
        if gornja[0] <= donja[0]:
            break

eta[0, i-(k-1)] = donja[0]
gornja1 = gornja
gornja2 = scipy.interpolate.splev(useek2[j], tck)
gornja_y = np.interp(donja[0],
                    [gornja1[0], gornja2[0]], [gornja1[1], gornja2[1]])
eta[1, i-(k-1)] = (donja[1] + gornja_y)/2

```

# C | OpenFOAM proračun

## C.1. Postavke proračuna

Za proračune se koristio stacionarni *simpleFoam* rješavač. Za inicijalno polje brzina korištena je stabilna *upwind* numerička shema, a nakon toga konačno rješenje dobiveno je *linearUpwindV* numeričkom shemom. Za veličine  $k$  i  $\omega$  korištena je *upwind* shema.

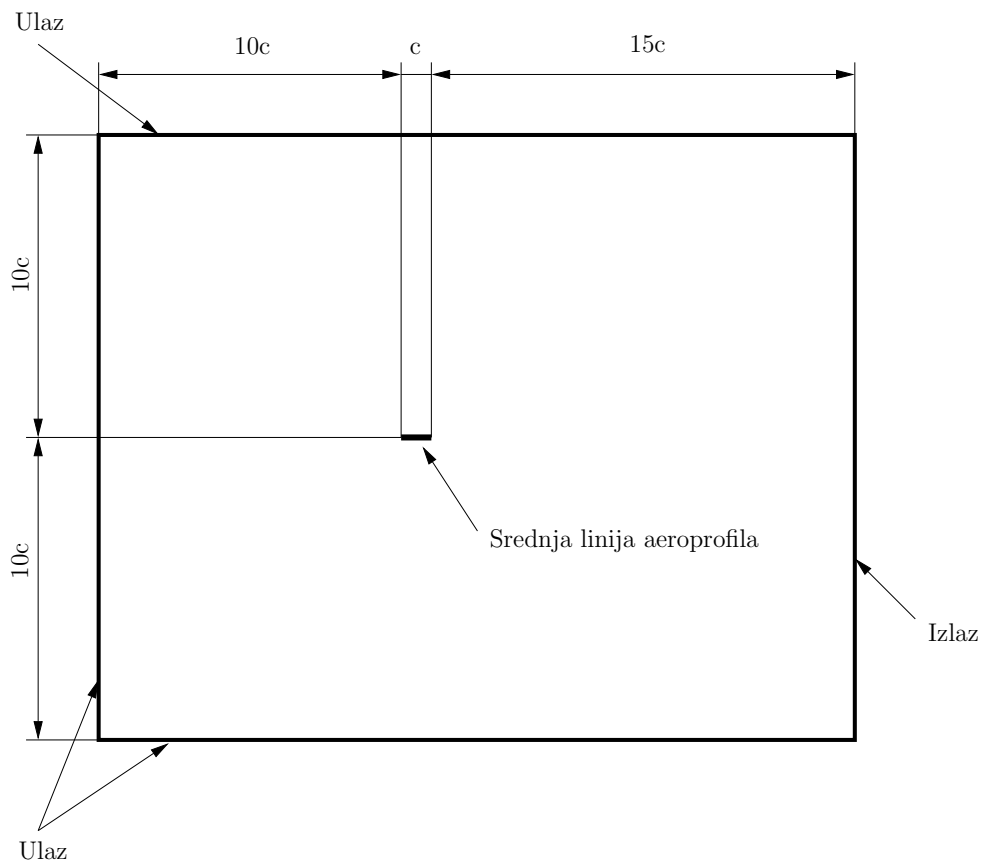
Također, korišteni su uobičajeni podrelaksacijski faktori, 0.3 za polje tlaka i 0.7 za sve ostale veličine.

## C.2. Domena i rubni uvjeti

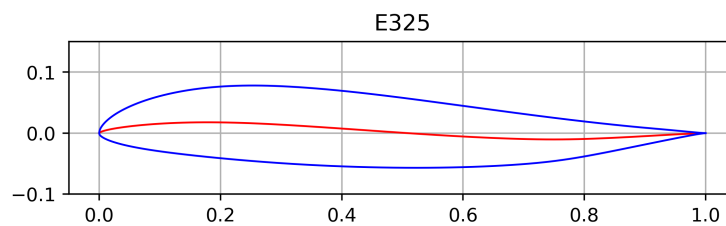
Domena i mreža za *OpenFOAM* proračun napravljeni je uporabom *blockMesh* alata. Udaljenost ruba domene do srednje linije aeroprofila iznosi 10 duljina tetive  $c$  ako se promatra područje ispred, iznad i ispod aeroprofila, dok je 15 duljina tetive ukoliko se promatra područje iza aeroprofila, kako je prikazano na slici C.1. Beskonačno tanka srednja linija aeroprofila modelirana je uporabom *createBaffles* alata koji pretvara unutarnje stranice konačnog volumena u vanjske. Rubni uvjeti primijenjeni u proračunu prikazani su utablici C.1.

Tablica C.1: Rubni uvjeti *OpenFOAM* proračuna

	Ulaz/Izlaz	Stijenka aeroprofila
U	freestreamVelocity	slip
p	freestreamPressure	zeroGradient
nut	calculated	nutkWallFunction
omega	inletOutlet	omegaWallFunction
k	inletOutlet	kqRWallFunction

Slika C.1: Proračunska domena *OpenFOAM* proračuna

# D Aerodinamičke karakteristike srednjih linija nekih refleksnih aeroprofila



E325

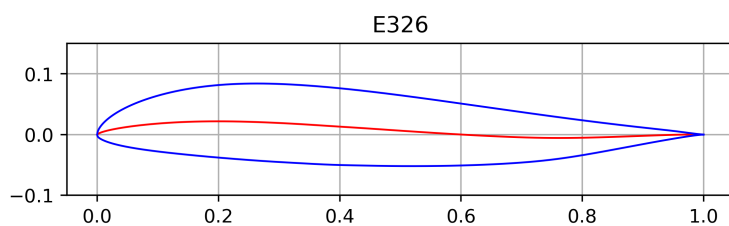
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.90

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.248

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0466

---

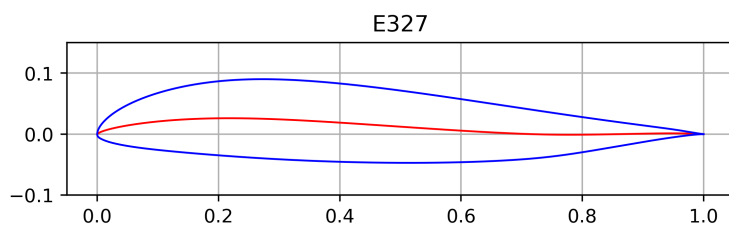


E326

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.09

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.362

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.023

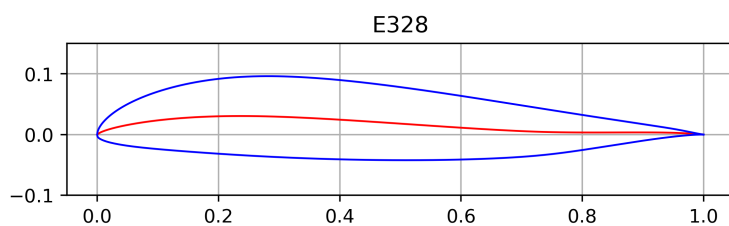


E327

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.93

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.439

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0007



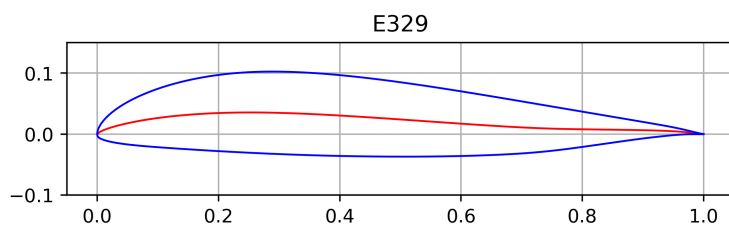
E328

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.75

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.513

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0243

---



E329

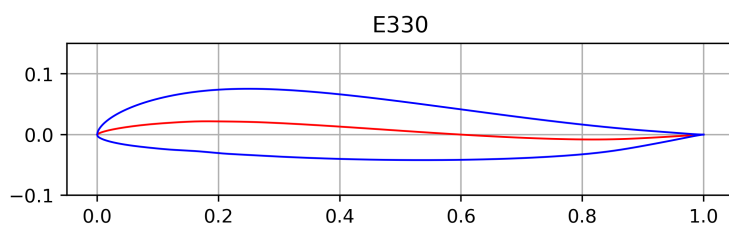
Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.94

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.614

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0439

---





E330

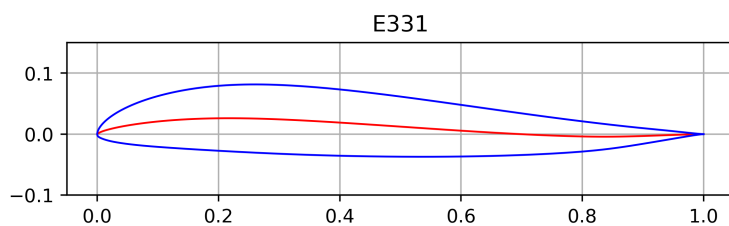
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.27

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.293

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.049

---



E331

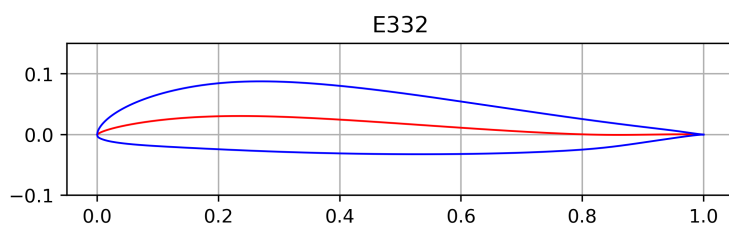
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.08

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.367

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0252

---



E332

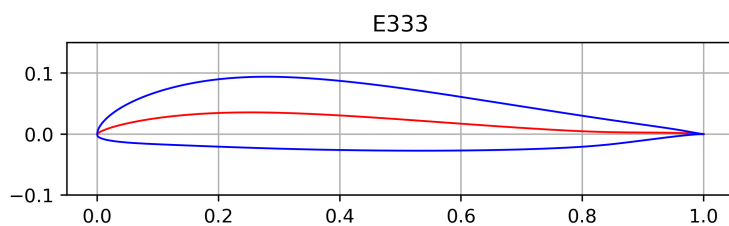
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.09

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.462

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0015

---



E333

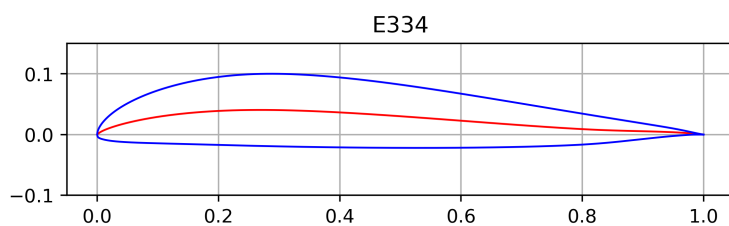
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.58

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.613

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0224

---



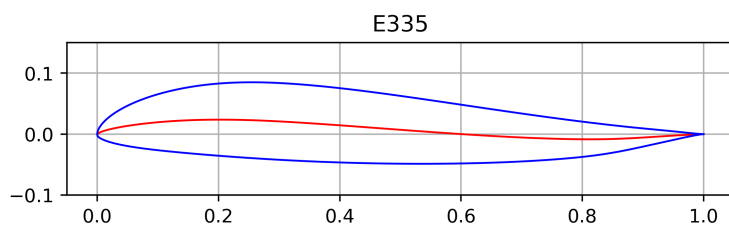
E334

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.08

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.646

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0441

---



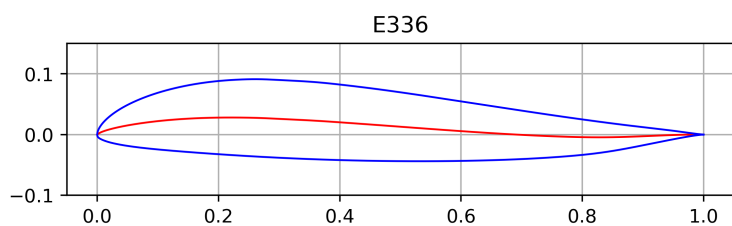
E335

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.73

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.366

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0452

---



E336

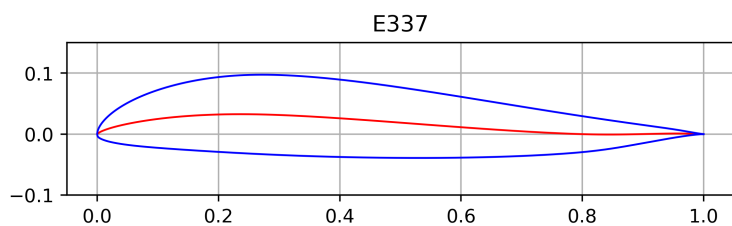
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.18

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.401

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0214

---



E337

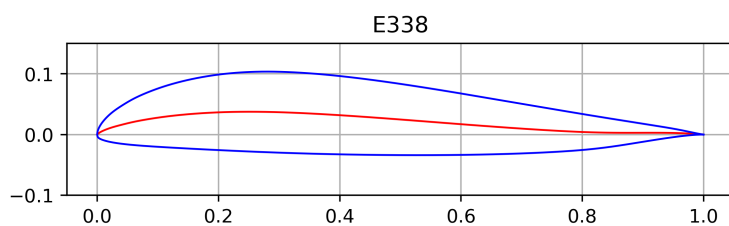
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.15

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.492

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0022

---



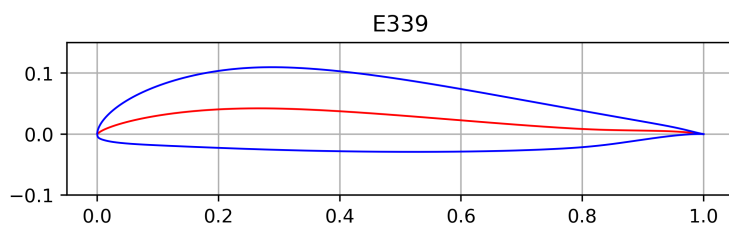
E338

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.15

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.588

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0258

---



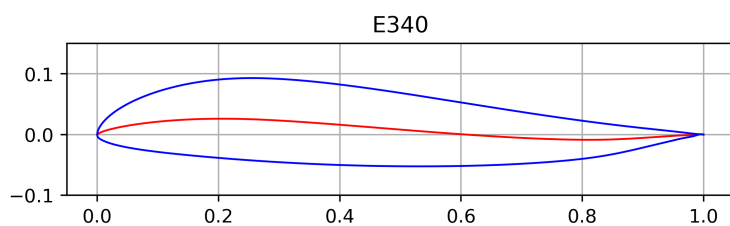
E339

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  1.36

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.486

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0495

---



E340

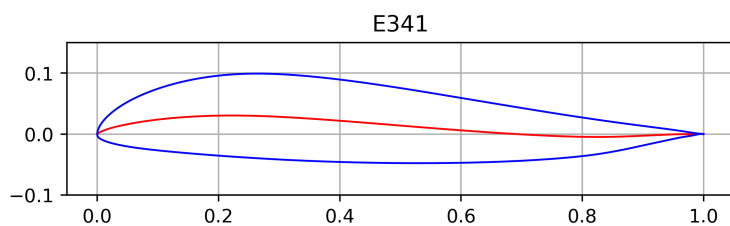
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.96

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.35

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0304

---



E341

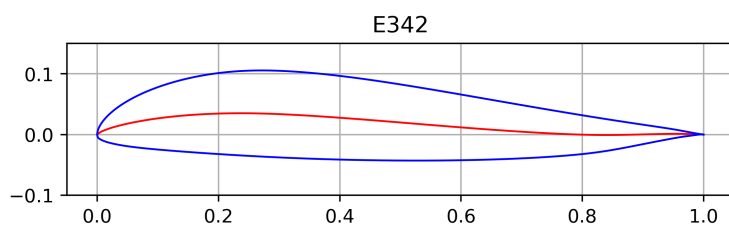
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.13

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.445

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0111

---



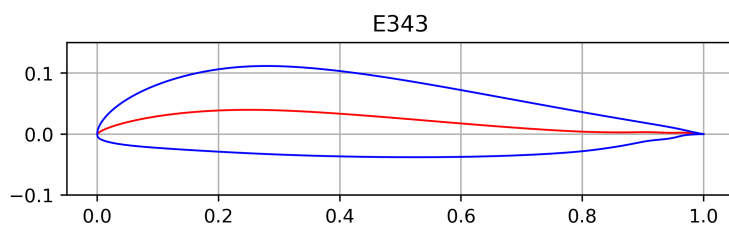
E342

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.33

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.546

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0082

---



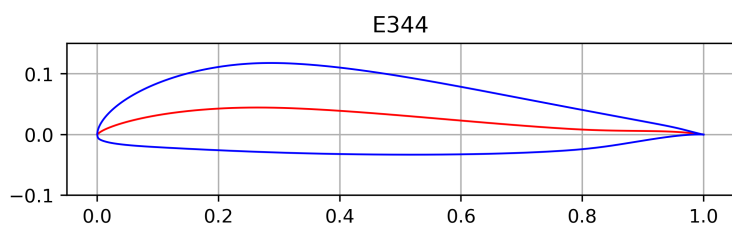
E343

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.09

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.593

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0262

---



E344

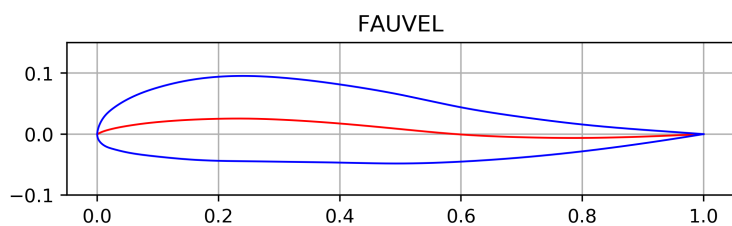
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.00

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.678

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0506

---



FAUVEL

---

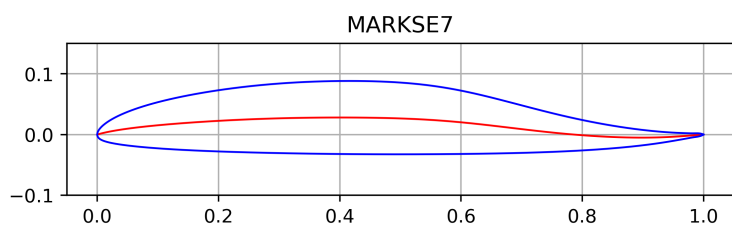
Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  3.00

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.306

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.04

---





MARKSE7

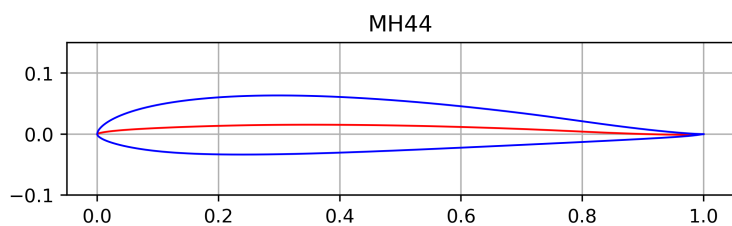
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.22

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.256

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0226

---



MH44

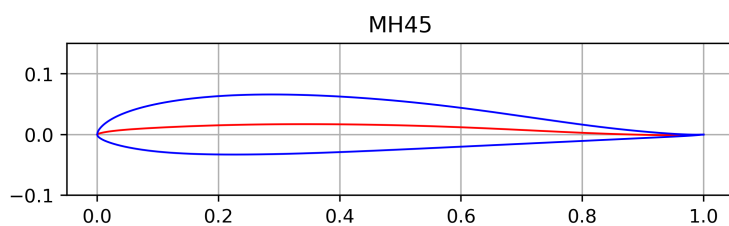
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.17

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.277

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0034

---



MH45

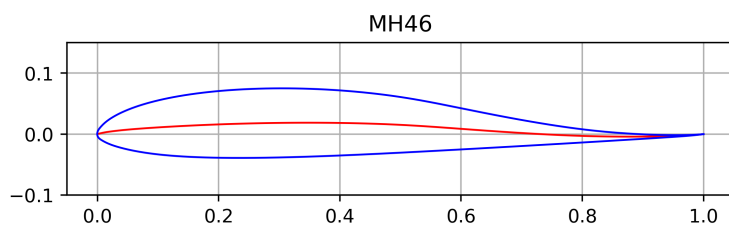
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.44

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.304

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0068

---



MH46

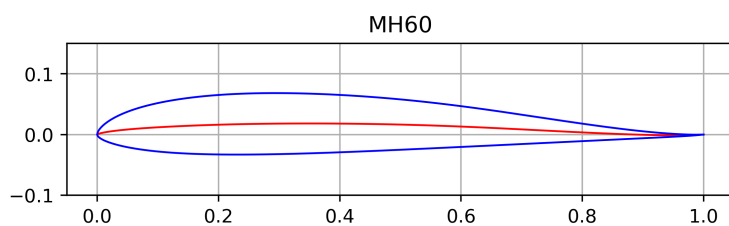
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  1.76

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.139

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0347

---



MH60

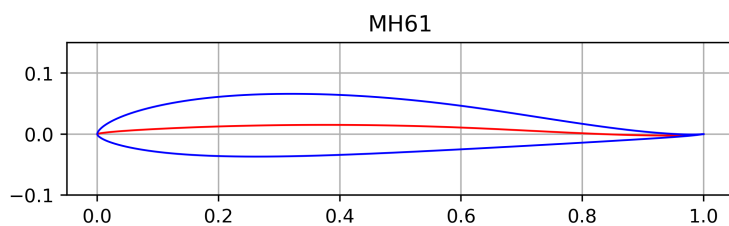
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.36

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.3

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0062

---



MH61

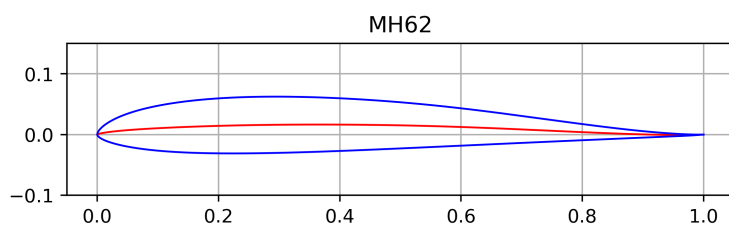
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  1.87

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.185

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.019

---



MH62

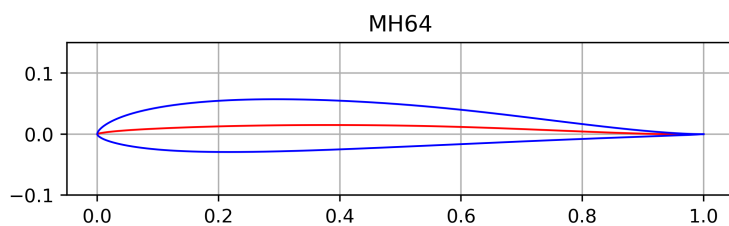
---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  2.02

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.275

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  0.0002

---



MH64

---

Idealni napadni kut ( $^{\circ}$ ),  $\alpha_{id}$  1.69

Koeficijent uzgona,  $C_L(\alpha_{id})$  0.249

Koeficijent momenta,  $C_{M\frac{1}{4}}$  -0.0047

---