

# Minimalan inducirani otpor krila s danim uzgonom i momentom savijanja

---

**Aradski, David**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:692622>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

David Aradski

ZAGREB 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

MINIMALNI INDUCIRANI OTPOR S DANIM UZGONOM I  
MOMENTOM SAVIJANJA

Mentor:  
Doc. dr.sc. Dubravko Matijašević

Student:  
David Aradski

ZAGREB 2020.

*Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr.sc. Dubravku  
Matijaševiću na stručnim savjetima pri izradi završnog  
rada.*

David Aradski

# Izjava

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, rujan 2020.

David Aradski



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**  
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student:  
David Aradski

Mat. br.:  
0035199190

Naslov rada na hrvatskom jeziku: Minimalni inducirani otpor krila s danim uzgonom i momentom savijanja momentom savijanja

Naslov rada na engleskom jeziku: Minimum induced drag of wings with given lift and bending moment

Opis zadatka:

Vitka krila su aerodinamički efikasna. No za određeni uzgon vitkom krilu će uzgon stvarati veći moment u korijenu u odnosu na krilo manje vitkosti. Stoga, prirodno se nameće potreba za proučavanjem krila koje će stvarati minimalni inducirani otpor za dani uzgon i moment savijanja u korijenu

U ovom radu potrebno je razmotriti aerodinamička svojstva krila koje za dani uzgon i moment savijanja stvaraju minimalni inducirani otpor u idealnom fluidu. Promatranju zadaci potrebno je pristupiti analitičkim metodama, a dobivene rezultate potrebno je usporediti s rezultatima dobivenima numeričkom metodom primjerenoj problemu.

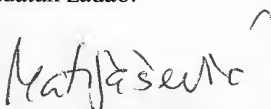
U okviru rada potrebno je prezentirati problem i korištene metode, komentirati dobivene rezultate te navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

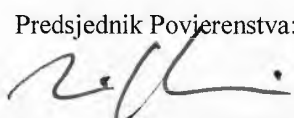
Zadatak zadan:  
28. studenog 2019.

Datum predaje rada:  
**1. rok:** 21. veljače 2020.  
**2. rok (izvanredni):** 1. srpnja 2020.  
**3. rok:** 17. rujna 2020.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 24.2. – 28.2.2020.  
**2. rok (izvanredni):** 3.7.2020.  
**3. rok:** 21.9. - 25.9.2020.

Zadatak zadao:

  
Doc. Dubravko Matijašević

Predsjednik Povjerenstva:  
  
Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

# Sadržaj

Sadržaj . . . . .	I
Popis slika . . . . .	II
Popis tablica . . . . .	III
Popis oznaka . . . . .	IV
Sažetak . . . . .	VI
Summary . . . . .	VII
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Osnovni pojmovi . . . . .	1
1.1.1 Potencijalno strujanje . . . . .	1
1.1.2 Cirkulacija . . . . .	1
1.1.3 Konačno krilo . . . . .	2
1.2 Pregled literature . . . . .	7
1.2.1 Eliptična Munkova raspodjela opterećenja . . . . .	7
1.2.2 "Zvonolika" raspodjela opterećenja . . . . .	8
1.2.3 Raspodjela opterećenja s najmanjim momentom savijanja u korijenu krila . . . . .	11
1.2.4 Revizija "zvonolike" raspodjele opterećenja . . . . .	14
<b>2 Matematički model</b>	<b>18</b>
2.1 Numerička adaptacija klasične Prandtlove noseće linije za proizvoljna krila . . . . .	18
2.1.1 Uvod u metodu . . . . .	18
2.1.2 Određivanje intenziteta vezanog vrtloga i inducirane brzine . . . . .	19
2.1.3 Određivanje aerodinamičke sile i momenta . . . . .	23
<b>3 Rezultati</b>	<b>25</b>
3.1 PrandtlID krilo . . . . .	25
3.2 Rezultati . . . . .	29
<b>4 Zaključak</b>	<b>31</b>

# Popis slika

1.1	Strujanje oko konačnog krila [1] . . . . .	2
1.2	Inducirani napadni kut [3] . . . . .	5
1.3	Munkova eliptična raspodjela opterećenja . . . . .	8
1.4	"Zvonolika" raspodjela opterećenja . . . . .	9
1.5	Jonesova distribucija za linearano ispiranje . . . . .	13
1.6	Raspodjela opterećenja za $B_3 = -0.059716$ . . . . .	17
1.7	Usporedba opisanih raspodjela opterećenja . . . . .	17
2.1	Krilo diskretizirano na segmente za numeričku metodu Prandtlovog tipa [11] . . . . .	19
2.2	Brzina u točki (x,y,z) inducirana $\Pi$ vrtlogom . . . . .	20
2.3	Newtonova metoda za funkciju s jednom varijablom . . . . .	21
3.1	Tlocrt ravnog PrantlID krila . . . . .	25
3.2	Zbroj aerodinamičkog i geometrijskog uvijanja . . . . .	26
3.3	Raspodjela cirkulacije . . . . .	29
3.4	Brzina ispiranja ravne PrantlID geometrije . . . . .	29
3.5	Lilienthala eliptičnog i PrantlID krila . . . . .	30



# Popis tablica

3.1	Kut uvijanja na sekcijama krila . . . . .	26
3.2	Korijenski aeroprofil PrandtlID krila . . . . .	27
3.3	Vršni aeroprofil PrandtlID krila . . . . .	28
3.4	Uzgon, inducirni otpor i moment savijanja u korijenu krila . . . . .	30

# Popis oznaka

$\alpha$	Napadni kut neperturbirane brzine	-
$\alpha_0$	Lokalni napadni kut	-
$\alpha_a$	Apsolutni napadni kut	-
$\alpha_i$	Inducirani napadni kut	-
$\mathcal{R}$	Vitkost krila	-
$\mathbf{r}_{i1j}$	Vektor od data točke 1 segmenta $i$ do evaluacijske točke segmenta $j$	$m$
$\mathbf{r}_{i2j}$	Vektor od data točke 2 segmenta $i$ do evaluacijske točke segmenta $j$	$m$
$\mathbf{u}_{a_i}$	Jedinični vektor u smjeru tetive	-
$\mathbf{u}_{n_i}$	Jedinični vektor normalan na tetivu	-
$\mathbf{u}_{s_i}$	Jedinični vektor u smjeru raspona	-
$\mathbf{V}_\infty$	Vektor neperturbirane brzine	$m/s$
$\mathbf{v}_{ij}$	Vektor bezdimenzijske brzine koju segment $i$ inducira na segmentu $j$	-
$\mathbf{V}_{tot}$	Vektor resultantne lokalne brzine	$m/s$
$\mathbf{w}_i$	Vektor inducirane brzina ispiranja	$m/s$
$\mathbf{F}$	Vektor aerodinamičke sile	$N$
$d\mathbf{l}_i$	Vektor vezanog segmenta	$m$
$\Gamma$	Cirkulacija brzine oko vezanog vrtloga	$m^2/s$
$\gamma$	Cirkulacije brzine oko slobodne vrtložne niti	$m^2/s$
$\rho$	Gustoća fluida	$kg/m^3$

$\rho_m$	Gustoća konstrukcijskog materijala	$kg/m^3$
$\sigma_{max}$	Maksimalno normalno naprezanje	$Pa$
$A_b$	Površina poprečnog presjeka ramenjače	$m^2$
$A_i$	Površina segmenta $i$	$m^2$
$A_n$	Koeficijenti Fourierova reda	-
$A_w$	Površina tlocrta krila	$m^2$
$b$	Raspon	$m$
$c$	Duljina tetive	$m$
$C_L$	Koeficijent uzgona krila	-
$C_M$	Koeficijent aerodinamičkog momenta krila	-
$D_i$	Inducirani otpor	$N$
$g$	Gravitacijska konstanta	$m/s^2$
$h$	Visina poprečnog presjeka ramenjače	$m$
$I$	Moment inercije poprečnog presjeka ramenjače	$m^4$
$L$	Uzgon	$N$
$m_0$	Gradijent koeficijenta uzgona po napadnom kutu	-
$M_b$	Moment savijanja krila	$Nm$
$n_g$	Faktor opterećenja za grubo slijetanje	-
$n_m$	Faktor opterećenja za manevriranje	-
$S_b$	Faktor proporcionalnosti momenta savijanja i težine konstrukcije sekcije	-
$t_{max}$	Maksimalna debljina aeroprofila	$m$
$V_\infty$	Veličina vektora neperturbirane brzine	$m/s$
$W_n$	Težina korisnog tereta u krilu	$N$
$W_r$	Težina korisnog tereta u korijenu krila	$N$
$W_s$	Težina konstrukcije krila	$N$

# Sažetak

Fokus ovog rada su optimalna krila s raspodjelom opterećenja koja minimizira inducirani otpor za različita ograničenja. Ograničenja, uz uzgon, mogu biti geometrijska ili generalnija koja sagledavaju težinu strukture optimalnog letećeg krila. Na početku su definirani osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje problema, zatim su izneseni i uspoređeni do sada poznati analitički rezultati za predmetni problem. Konačno, u proračunu je korištena numerička adaptacija klasične Prandtllove noseće linije za proizvoljna krila, koja je implementirana pomoću knjižnice NumPy u programskom jeziku Python. Koristeći navedenu metodu uspoređeno je krilo s eliptičnom raspodjelom opterećenja i krilo sa "zvonolikom" raspodjelom opterećenja te je validirana geometrija ravnog PrandtlID krila.

**Ključne riječi:** minimalni inducirani otpor krila, integrirani moment savijanja krila, numerička metoda za noseću liniju Prandtllog tipa, eliptična raspodjela uzgona, "zvonolika" raspodjela uzgona

# Summary

This thesis focuses on ideal wings with load distribution that minimizes induced drag for different restrictions. Restrictions, beside lift, can be geometrical, or more general that take in account structure weight of optimal flying wing. In the first part basic concepts needed for understanding the problem are introduced. After that, known analytical solutions for this problem are explained and compared. For calculation, Numerical adaptation of Prandtl's classic lifting line theory is used and is implemented in Python using library NumPy. Using aforementioned method, wings with elliptical load distribution and with bellshaped load distribution were compared and geometry of straight PrandtlID wing was validated.

**Key words:** wing minimum induced drag, integrated wing bending moment, Numerical Prandtl type lifting line method, elliptical lift distribution, bellshaped lift distribution

# 1. Uvod

## 1.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju će biti definirani i pojašnjeni osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje i analizu strujanja oko krila konačnog raspona.

### 1.1.1 Potencijalno strujanje

Potencijalno strujanje je idealizacija realnog fluida u kojoj se pretpostavlja neviskozno, nestlačivo, bezvrtložno strujanje. Može se opisati skalarnim potencijalom  $\Phi$  za koji vrijedi da je divergens gradijenta jednak nuli i da je vektor brzine gradijent tog polja:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$$\mathbf{V}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Potencijalno strujanje daje dovoljno dobre rezultate uzgona i induciranog otpora za preliminarnu konstrukciju krila za podzvučne brzine te je zbog niskih računalnih zahtjeva vrlo praktično.

### 1.1.2 Cirkulacija

Općenito, cirkulacija je linijski integral tangencijalne komponente vektorskog polja duž zatvorene pozitivno orijentirane glatke krivulje. U ovom radu će se pod pojmom cirkulacije podrazumijevati cirkulacija vektora brzine.

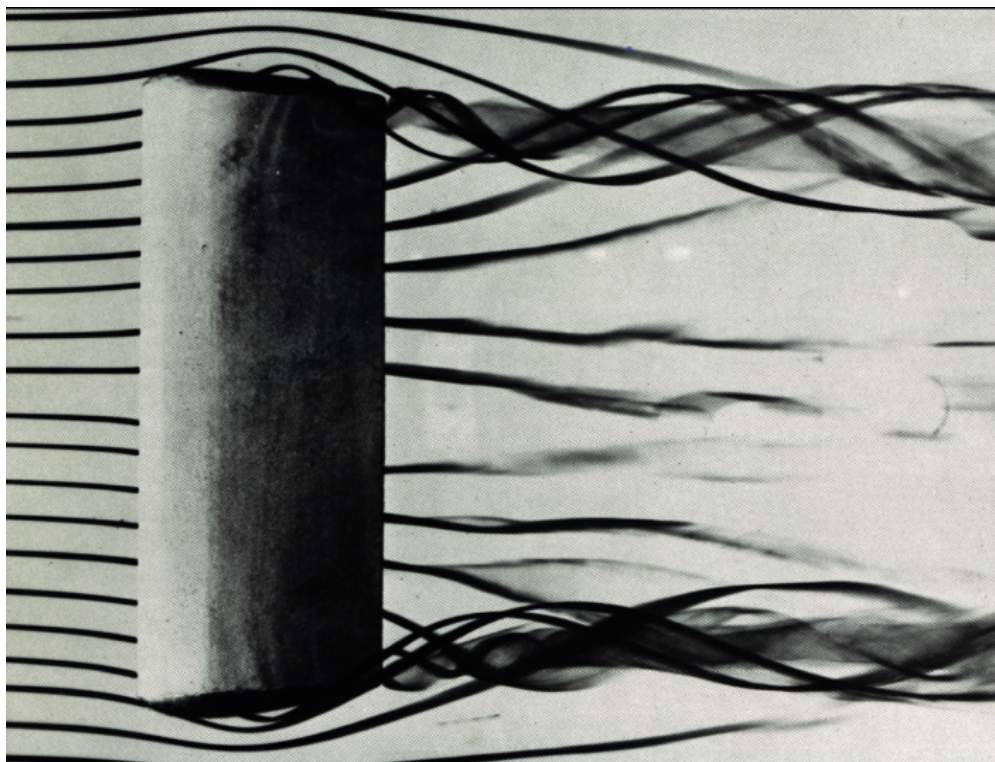
$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$

Obzirom da je pretpostavljeno bezvrtložno strujanje, cirkulacija će postojati kao bezvrtložno cirkulacijsko gibanje oko singulariteta i po teoremu bit će jednaka za bilo koju zatvorenu krivulju koja obuhvaća singularitet. U potencijalnom strujanju oko aeroprofila uvjet za nastajanje cirkulacije se posuđuje iz viskoznog strujanja. Nefizikalnost beskonačne brzine na zadnjem bridu aeroprofila otklanja se Kuttinim uvjetom. Cirkulacija koja nastaje oko aeroprofila je takva da se točka zastoja pomiče na zadnji brid.

Polje vrtložnosti se može prikazati vrtložnim nitima, krivuljama kojima tangenta u svakoj točki ima isti smjer kao i vektor vrtložnosti u toj točki. Za strujanje oko konačnog krila vrtložne niti daju puno više informacija od samih strujnica pa se njih koristi u razmatranju. Važan teorem za cirkulacijsko gibanje je drugi Helmholtzov teorem prema kojem vrtložna nit ne može završiti u fluidu nego mora biti zatvorena ili mora završavati na granicama fluida.

### 1.1.3 Konačno krilo

Strujanje oko krila konačnog raspona je trodimenzionalno jer razlika u tlaku između gornjake i donjake rezultira prestrujavanjem fluida preko vrhova krila.



Slika 1.1: Strujanje oko konačnog krila [1]

To prestrujavanje u odnosu na razliku u tlaku praktičnije je povezati s cirkulacijom. Na vrhovima krila cirkulacija mora pasti u nulu. Po drugom Helmholtzovom teoremu to

nije moguće bez odvajanja slobodne vrtložne plahte koja se proteže u beskonačnost, tj. do startnog vrtloga. Ako se vrtložna plahta prikaže pomoću vrtložnih niti, cirkulacija oko slobodne vrtložne niti koja se odvaja na zadanoj sekciji je jednaka promjeni cirkulacije oko te sekcije:

$$\gamma(y) = \frac{d\Gamma(y)}{dy} = \Gamma'(y) \quad (1.1)$$

### Inducirana brzina

U strujanju oko konačnog krila zbog promjene cirkulacije duž raspona polje brzina je takvo da uz horizontalnu brzinu u smjeru raspona postoji i vertikalna brzina. Ta vertikalna brzina često se naziva induciranom brzinom jer ju je praktično prikazivati kao brzinu koju inducira vrtložna plahta. Takav opis nije fizikalno najtočniji jer je vrtložnost karakteristika polja brzina i singularitet vrtložne niti nema mehanizam induciranja brzine u nekoj točki u prostoru. No, obzirom da se u polju u kojem postoji singularitet vrtložne niti polje brzina može odrediti po Biosavarteovom zakonu, brzina u vertikalnoj ravnini opisuje se kao brzina koju induciraju slobodne vrtložne niti. Pri tome treba imati na umu da to nije potpuno fizikalno točan opis. Brzina koju slobodna vrtložna nit sekcije  $y_0$  inducira na sekciji  $y$  može se odrediti prema Biosavarteovom zakonu:

$$w_{iy,y_0} = \frac{\gamma(y_0)}{4\pi(y_0 - y)} \quad (1.2)$$

Ukupna inducirana brzina na sekciji  $y_0$  određuje se integriranjem brzina koju vrtložne niti induciraju na sekciji  $y_0$ :

$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\gamma(y_0)}{y - y_0} dy \quad (1.3)$$

### Noseća linija

Prema [2] krilo se može svesti na jednu vrtložnu nit koja se nalazi na jednoj četvrtini tetive. Intenzitet vrtložnosti te na određenom presjeku je integral vrtložnosti po bilo kojoj zatvorenoj krivulji koja obuhvaća poprečni presjek krila. Prema teoriji strujanja oko aeroprofila, cirkulacija oko beskonačnog krila je proporcionalna brzini iz beskonačnosti, i za male napadne kuteve, kutu između brzine iz beskonačnosti i pravca nultog uzgona. Pri određivanju cirkulacije oko pojedine sekcije, prema [2] potrebno je brzini iz beskonačnosti pribrojiti induciranu brzinu. Za određivanje cirkulacije oko zadane sekcije koristi se rješenje za strujanje oko krila beskonačnog raspona pri rezultantnoj brzini koja se dobije zbrajanjem brzine iz beskonačnosti i inducirane brzine:



$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{w}_i$$

Stoga, cirkulacija je jednaka:

$$\bar{\Gamma}(y) = \frac{1}{2} a_0 c(y) V_R(y) \alpha_0(y) \quad (1.4)$$

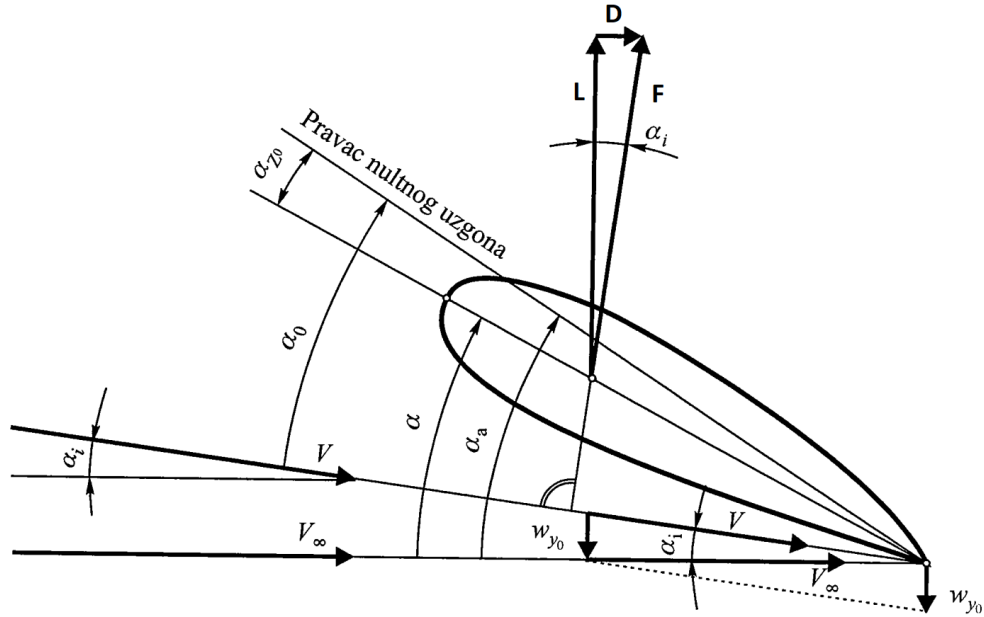
Kut između pravca nultog uzgona rezultantne brzine  $V_R$  razlikuje se od kuta koji pravac nultog uzgona zatvara s brzinom iz beskonačnosti  $V_\infty$ , stoga je potrebno odrediti efektivni napadni kut  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \alpha_a + \alpha_i \quad (1.5)$$

gdje je  $\alpha_i$  inducirani napadni kut koji se, obzirom da je inducirana brzina vrlo mala, može odrediti sljedećim izrazom:

$$\alpha_i = \frac{w_i}{V_\infty} \quad (1.6)$$

Obzirom da je inducirana brzina negativnog predznaka i inducirani kut će biti negativnog predznaka, te će tako efektivni napadni kut biti manji u odnosu na napadni kut brzine iz beskonačnosti. Po d’Alambertovom teoremu aerodinamička sila na beskonačno krilo je okomita na brzinu iz beskonačnosti što znači da ne postoji otpor. U slučaju konačnog krila, obzirom da se smjer lokalne brzine razlikuje od smjera brzine iz besonačnosti za inducirani napadni kut, i vektor aerodinamičke sile će biti zarotirana oko osi  $y$  za kut  $\alpha_i$  u odnosu na aerodinamičku silu na beskonačno krilo, i bit će okomit na rezultantnu brzinu koja je zbroj brzine iz beskonačnosti i inducirane brzine.



Slika 1.2: Inducirani napadni kut [3]

Uvrštavanjem (1.3) i (1.6) u (1.5) i zatim u (1.4) dobiva se izraz za cirkulaciju oko konačnog krila:

$$\bar{\Gamma}(y) = \frac{1}{2} a_0(y) c(y) V_R(y) \left[ \alpha_a(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\gamma(y_0)}{y - y_0} dy_0 \right] \quad (1.7)$$

Zbog pretpostavke da je  $V_\infty \gg w_i$  u izrazu(1.7) umjesto  $V_R$  može se pisati  $V_\infty$  i, koristeći izraz(1.1), (1.7) prelazi u:

$$\bar{\Gamma}(y) = \frac{1}{2} a_0(y) c(y) V_\infty \left[ \alpha_a(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'(y_0)}{y - y_0} dy_0 \right] \quad (1.8)$$

Po Glauertu opće rješenje jednadžbe (1.8) može se odrediti u obliku Fourierova reda:

$$\bar{\Gamma}(\cos \theta) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (1.9)$$

Gdje je  $\cos \theta$  Glauertova varijabla definirana sljedećim izrazima:

$$y = -b/2 \cos \theta \quad (1.10)$$

$$dy = b/2 \sin \theta d\theta \quad (1.11)$$

Koeficijenti  $A_n$  određuju se tako da se pomoću (1.9) izraze  $\Gamma$  i  $\frac{d\Gamma}{dy}$  i uvrste u jednadžbu (1.8),

čime se dobiva sustav  $n$  jednadžbi s  $n$  nepoznanica koji daje vrlo točne rezultate i za mali  $n$ .

## Uzgon

Sila uzgona na sekciju određena je prema Kutta-Žukovski teoremu:

$$\bar{L}(y) = \rho V_\infty \bar{\Gamma}(y) dy \quad (1.12)$$

Integriranjem (1.12) dobiva se izraz za silu uzgona na cijelo krilo:

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \bar{\Gamma}(y) dy \quad (1.13)$$

Ako se koristi izraz (1.9) jednadžba (1.12) prelazi u oblik:

$$L = \rho V_\infty^2 b^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^0 \sin(n\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (1.14)$$

Obzirom na granične vrijednosti integral u jednadžbi (1.14) je jednak nuli za sve slučajeve osim  $n = 1$ , iz čega slijedi:

$$L = \frac{\pi}{2} \rho V_\infty^2 b^2 A_1 \quad (1.15)$$

## Inducirani otpor

Obzirom da je komponenta inducirane brzine u vertikalnoj ravnini okomita na vezani vrtlog, ona će uzrokovati nepoželjnu silu u horizontalnoj ravnini koja je suprotna od smjera leta. Taj otpor postoji kao posljedica inducirane brzine i naziva se inducirani otpor. Inducirani otpor sekcije dan je izrazom:

$$\bar{D}_i(y) = \rho w_i(y) \bar{\Gamma}(y) dy \quad (1.16)$$

Integriranjem (1.16) određuje se ukupni inducirani otpor krila:

$$D_i = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w_i(y) \bar{\Gamma}(y) dy \quad (1.17)$$

Uvrštavanjem (1.3) u izraz (1.17) dobiva se:

$$D_i = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\bar{\Gamma}(y) \Gamma'(y_0)}{y_0 - y} dy_0 dy \quad (1.18)$$

Prema [4] jednadžba (1.18) može se reducirati na oblik:

$$D_i = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\bar{\Gamma}(y)\bar{\Gamma}(y_0)}{(y_0 - y)^2} dy_0 dy \quad (1.19)$$

Ako se jednadžba (1.18) zapiše kao Fourierov red, dobiva se sljedeći izraz:

$$D_i = \frac{2\left(\frac{L}{b}\right)^2}{\pi\rho V_\infty^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{A_n^2}{A_1^2} \quad (1.20)$$

Što se može, koristeći izraz  $B_n = \frac{A_n}{A_1}$ , zapisati u obliku:

$$D_i = \frac{2\left(\frac{W}{b}\right)^2}{\pi\rho V_\infty^2} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} n B_n^2\right) \quad (1.21)$$

## 1.2 Pregled literature

U ovom poglavlju prezentirat će se do sada poznata analitička rješenja varijacijskog problema određivanja krila s minimalnim induciranim otporom.

### 1.2.1 Eliptična Munkova raspodjela opterećenja

Na osnovu svog rješenja za noseću liniju Prandtl je u [5] zaključio da krilo određenog raspona minimalan inducirani otpor stvara za eliptičnu raspodjelu opterećenja. Munk je 1922. godine u [6] pokazao da je (1.22) rješenje varijacijske zadaće u kojoj se minimizira inducirani otpor za propisani uzgon i raspon. Zbog toga se eliptičnu raspodjelu u ovom radu naziva "Munkovom" raspodjelom, te je ona prikazana na slici 1.3. Iz jednadžbe (1.21) može se zaključiti da je za određenu silu uzgona i raspon inducirani otpor minimalan ako su svi  $B_n$  jednaki nuli. Za određeni raspon i silu uzgona minimalan inducirani otpor prema [5] ostvaruje kada opterećenje prati eliptičnu raspodjelu duž raspona:

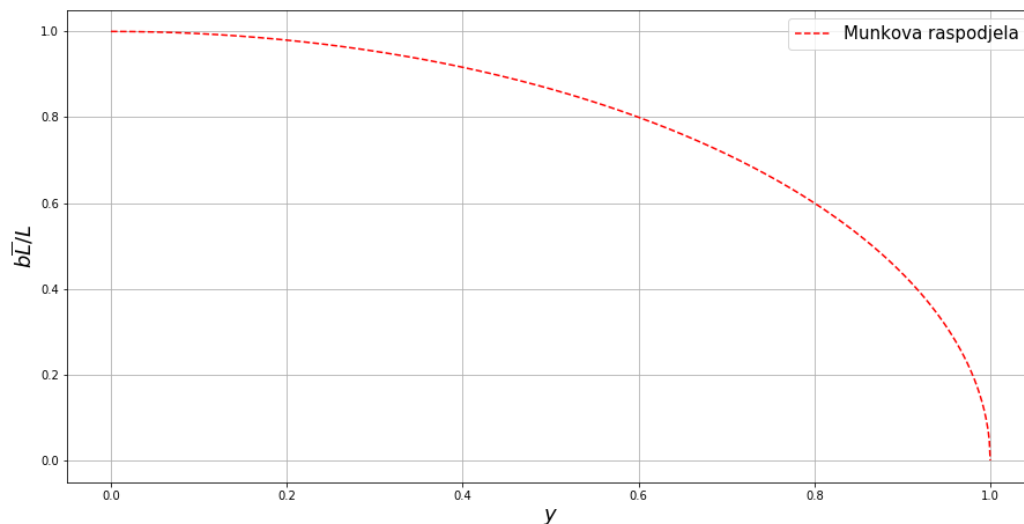
$$\frac{s\bar{L}(y)}{L} = \frac{4}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \quad (1.22)$$

Što zapisano koristeći (1.10) prelazi u:

$$\frac{b\bar{L}(y)}{L} = \frac{4}{\pi} \sin \theta \quad (1.23)$$

Inducirani otpor za ovu raspodjelu opterećenja određen je sljedećom formulom:

$$D_i = \frac{2 \left(\frac{W}{b}\right)^2}{\pi \rho V_\infty^2} \quad (1.24)$$



Slika 1.3: Munkova eliptična raspodjela opterećenja

Eliptična raspodjela stvara veliki moment savijanja jer se velik dio opterećenja nalazi pri vrhovima krila. U ovom radu cilj je minimizirati inducirani otpor za dani uzgon i moment savijanja u korijenu krila, a raspon nije određen. Stoga se traži raspodjela koja će stvarati manji moment savijanja od eliptične raspodjele. Raspodjela koja stvara manje momente savijanja od eliptične dopustit će veći raspon bez povećanja mase jer je masa krila funkcija i raspona i raspodjele opterećenja.

## 1.2.2 "Zvonolika" raspodjela opterećenja

Varijacijski problem konstruiranja krila s apsolutnim minimalnim induciranim otporom prvi je razmatrao Prandtl [7]. U navedenom radu Prandtl je zaključio da bi bilo vrlo teško formulirati i riješiti problem bez da se postave ikakva ograničenja na raspodjelu opterećenja, raspon ili ukupnu težinu. Stoga je u rješavanju problema kao konstantne vrijednosti postavio ukupan uzgon i inercijski moment površine ispod krivulje uzgona sekcija. Da bi inducirani otpor bio minimalan u jednadžbi (1.21) se umjesto postavljanja svih  $B_n$  faktora u nulu može odabrati da su neki faktori negativni. Tako je Prandtl odredio da se smanjenje otpora

u odnosu na eliptičnu raspodjelu opterećenja može postići ako je  $B_n = 0$  za  $n \neq 3$ , pri čemu za  $B_3$  vrijedi:  $-\frac{1}{3} < B_3 < 0$ . Pri tome  $B_3$  ne smije biti manji od  $-\frac{1}{3}$  jer bi onda sila uzgona pri vrhovima krila iz pozitivne prelazila u negativnu. Prema [7] minimiziranje inducirano otpora za takva ograničenja daje da je bezdimenzijska raspodjela opterećenja jednaka:

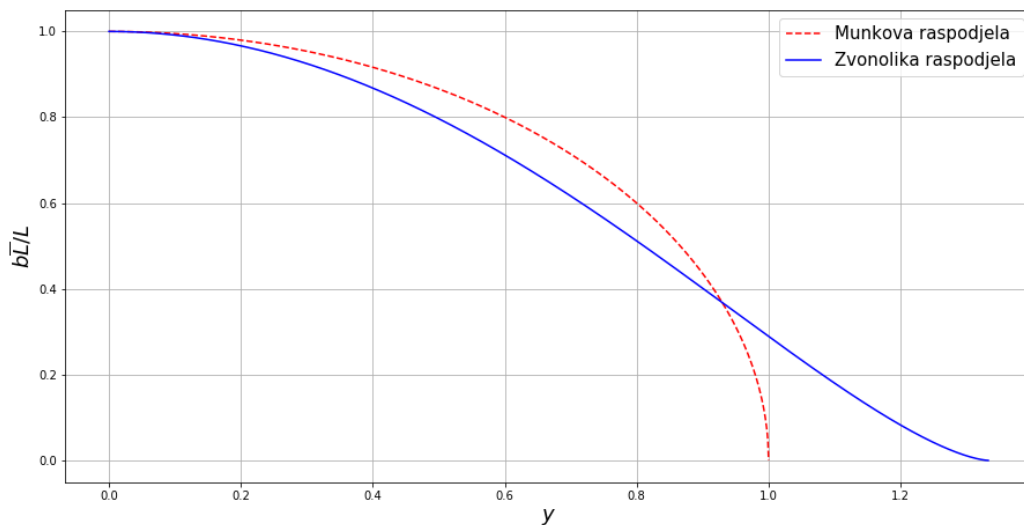
$$\frac{b \bar{L}(y)}{L} = \frac{16}{3\pi} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{b} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

Što se koristeći (1.10) može zapisati u obliku:

$$\frac{b \bar{L}(y)}{L} = \frac{16}{3\pi} \sin^3 \theta \quad (1.25)$$

Nakon primjene trigonometrijske relacije  $4 \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - \sin 3\theta$  izraz (1.25) prelazi u isti oblik kao i izraz (1.23):

$$\frac{b \bar{L}(y)}{L} = \frac{4}{\pi} \left[ \sin \theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta \right]$$



Slika 1.4: "Zvonolika" raspodjela opterećenja

Tada izraz za otpor glasi:

$$D_i = \frac{8 \left( \frac{w}{b} \right)^2}{3\pi \rho V_\infty^2} \quad (1.26)$$

Treba nadodati da Prandtl u [7] ne tvrdi kako ovakva raspodjela opterećenja daje apsolutni najmanji inducirani otpor, nego da minimizira inducirani otpor uz sljedeće pretpostavke: 1. Raspodjela mase po rasponu je proporcionalna raspodjeli momenta uvijanja.

2. Koeficijent proporcionalnosti između težine sekcije i momenta na sekciji ne ovisi o koordinati u smjeru raspona
3. Raspon može varirati, dok su ukupna težina i koeficijent proporcionalnosti između  $W(y)$  i  $M_b(y)$  konstantni
4. Moment savijanja sekcije je funkcija samo uzgona, te je definiran sljedećim izrazom:

$$M_b(y) = \int_{y_0=y}^{b/2} \bar{L}(y_0)(y_0 - y) dy_0 \quad (1.27)$$

Da bi se povezalo opterećenje i težina, potrebno je ukupnu težinu letjelice podijeliti na težinu konstrukcije krila  $W_s$  i na fiksnu težinu koja ne ovisi o opterećenju (net weight)  $W_n$ . Iz Prandtlove pretpostavke da je diferencijalna težina sekcije  $\bar{W}_s(y)$  proporcionalna  $M_b(y)$  i koristeći jednadžbu (1.27), može se izraziti  $W_s(y)$ :

$$\bar{W}_s(y) = \frac{1}{S_b} \int_{y_0=y}^{b/2} \bar{L}(y_0)(y_0 - y) dy_0$$

Ukupna težina konstrukcije  $W_s$  dobiva se integriranjem diferencijalnih težina konstrukcije sekcija  $\bar{W}_s(y)$ :

$$W_s = \int_{-b/2}^{b/2} \bar{W}_s(y) dy = \frac{4W}{S_b(b/2)} \int_0^{b/2} \int_{y_0=y}^b \frac{b \bar{L}(y_0)}{L} (y_0 - y) dy_0 dy \quad (1.28)$$

Koristeći jednadžbu (1.23), u jednadžbi (1.28), ukupna težina konstrukcije koja je potrebna za eliptičnu raspodjelu po pretpostavkama iz [7], može se izraziti:

$$W_s = \frac{Wb^2}{32S_b} \quad ili \quad b^2 = \frac{32S_b W_s}{W} \quad (1.29)$$

Ako se isti postupak primijeni za raspodjelu opterećenja danu u (1.25), može se odrediti težina konstrukcije potrebne za "zvonoliku" raspodjelu opterećenja danu u [7]:

$$W_s = \frac{Wb^2}{48S_b} \quad ili \quad b^2 = \frac{48S_b W_s}{W} \quad (1.30)$$

Uspoređivanjem jednadžbi (1.29) i (1.30) može se zaključiti da "zvonolika" distribucija opterećenja dopušta 22.5% veći raspon od krila s eliptičnom raspodjelom opterećenja za istu težinu konstrukcije. Prandtl je zaključio da će s takvim povećanim rasponom krilo sa "zvonolikom" raspodjelom opterećenja stvarati 11.1% manje inducirano otpora u odnosu na krilo jednake

težine konstrukcije koje ima eliptičnu raspodjelu opterećenja.

### 1.2.3 Raspodjela opterećenja s najmanjim momentom savijanja u korijenu krila

Jones je u [4] varijacijski problem postavio tako da je za ograničenje uz uzgon, umjesto raspona, odabrao moment savijanja u korijenu krila. Tada se problem svodi na minimiziranje dvostrukog integrala (1.19) za konstantne vrijednosti uzgona (1.13) i momenta savijanja u korijenu krila koji se određuje uvrštavanjem  $y = 0$  u izraz (1.27):

$$L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \bar{\Gamma}(y) dy \quad (1.31)$$

$$M_b(0) = \int_0^{b/2} \bar{L}(y)y dy \quad (1.32)$$

Općenito, ako je otpor minimalan, mala promjena u raspodjeli opterećenja neće rezultirati promjenom prvog reda u otporu. Stoga je potrebno naći stanje u kojem je inkrement otpora zbog male promjene jednak nuli. Također potrebno je da promjena opterećenja ne rezultira promjenom ukupnog uzgona (1.31) i momenta u korijenu krila (1.32), tj. površina ispod varijacijske krivulje i moment površine ispod varijacijske krivulje ukupno moraju biti jednaki nuli. Takva varijacijska krivulja se ostvaruje s tri varijacijska elementa opterećenja  $l_1$ ,  $l_2$  i  $l_3$  koji moraju biti takvi da zadovoljavaju sljedeći sustav jednačbi:

$$\begin{aligned} \delta L &= 0, \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ \delta B &= 0, \quad l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3 = 0 \\ \delta L &= 0, \quad l_1 w_{i1} + l_2 w_{i2} + l_3 w_{i3} = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Može se vidjeti da će sustav jednačbi (1.33) biti konzistentan za:

$$\begin{aligned} w_{i1} &\sim a + fy1 \\ w_{i2} &\sim a + fy2 \\ w_{i3} &\sim a + fy3 \end{aligned} \quad (1.34)$$



Gdje su  $a$  i  $f$  konstante koje se određuju za dane uvjete, a obzirom da sustav jednadžbi mora biti zadovoljen za cijeli raspon, općenito vrijedi:

$$w_i \sim a + fy$$

Iz (1.2.3) može se zaključiti da će za zadani uzgon i moment savijanja minimum inducirano otpora biti ostvaren ako se inducirana brzina linearno mijenja po rasponu.

### Raspodjela cirkulacije pri linearnoj brzini ispiranja

Za određivanje cirkulacije koristi se pretpostavka da polje strujanja na velikoj udaljenosti iza krila postaje ravninsko s diskontinuitetom u lateralnoj brzini određenoj s  $\gamma(y)$  i s vertikalnom brzinom danom kao  $2w_i$  [8]. Koristi se izraz dan u [6]:

$$v - iw = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(b/2)^2 - \xi^2}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{w(\eta) \sqrt{(b/2)^2 - \eta}}{\eta - \xi} d\eta \quad (1.35)$$

uz uvjet:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = v(y + oi) - v(y - oi) = 2v(y + oi)$$

te je:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -2a \frac{y}{\sqrt{(b/2)^2 - y^2}} + \frac{2b}{\pi} f \left( \frac{y}{(b/2)} \cosh^{-1} \left( \frac{b/2}{|y|} \right) - \frac{y}{\sqrt{(b/2)^2 - y^2}} \right) \quad (1.36)$$

Nakon integriranja izraza (1.36) dobiva se cirkulacija oko krila s linearnom raspodjelom brzine ispiranja:

$$\Gamma = 2 \left( a + \frac{f(b/2)}{\pi} \right) \sqrt{(b/2)^2 - y^2} + \frac{2f}{\pi} y^2 \cosh^{-1} \left( \frac{b}{2|y|} \right) \quad (1.37)$$

Uvrštavajući jednadžbu (1.37) u izraze (1.31), (1.18) i (1.32) dobije se sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} L &= \rho V b^2 \left( \pi a + \frac{4}{3} b f \right) \\ M_b &= \rho V b^3 \left( \frac{2}{3} a + \frac{1}{\pi} f \right) \\ D_i &= \frac{a}{2V} L + \frac{f}{V} B \end{aligned} \quad (1.38)$$

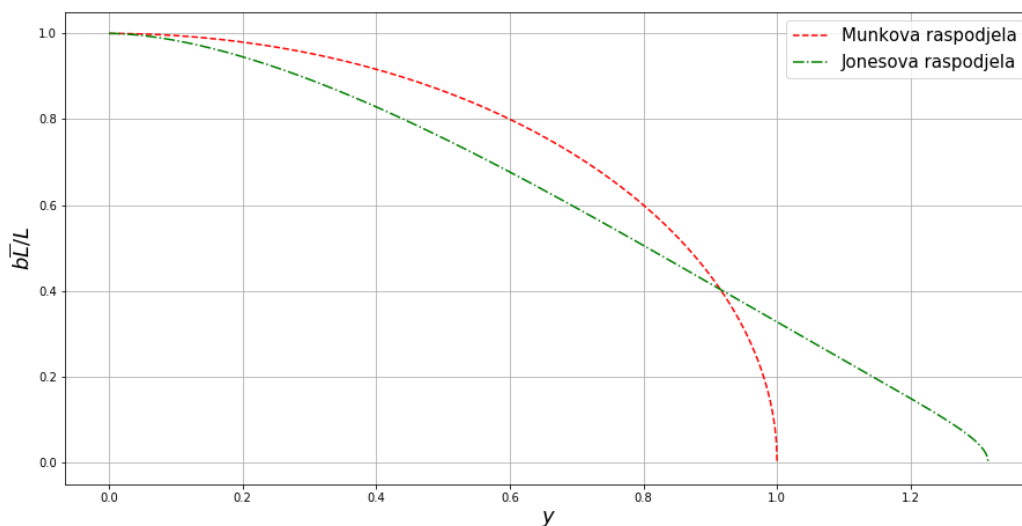
Praktično je moment uzgona odrediti preko lateralne pozicije težišta krivulje uzgona, tj. centra potiska. Ta pozicija može se označiti kao postotak raspona  $y_M$  definirana sljedećom formulom:

$$y_M = \frac{4M_b}{Lb}$$

Tada se rješavanjem sustava (1.38) za  $a$  i  $f$  dobiva:

$$a = \frac{L}{\rho V (b/2)^2} 9 \left( \frac{1}{\pi} - \frac{2}{3} y_0 \right) \quad (1.39)$$

$$f \frac{b}{2} = \frac{L}{\rho V (b/2)^2} 9 \left( \frac{\pi}{2} y_0 - \frac{2}{3} \right) \quad (1.40)$$



Slika 1.5: Jonesova distribucija za linearano ispiranje

Izraz za inducirani otpor (1.19), obzirom na dani uzgon i centar potiska, prelazi u oblik:

$$D_i = \frac{L^2}{\pi \frac{\rho}{2} V^2 b^2} \left( \frac{9}{2} \pi^2 y_0^2 - 12 \pi y_0 + 9 \right) \quad (1.41)$$

$$D_i = \frac{L^2}{\pi \rho / 2 V^2 b^2} \quad (1.42)$$

$$b \frac{\Gamma \rho V}{L} = \left( \frac{12}{\pi} - 6 y_0 \right) \frac{\sqrt{(b/2)^2 - y^2}}{b/2} + \left( 18 y_0 - \frac{24}{\pi} \right) \frac{y^2}{(b/2)^2} \cosh^{-1} \frac{b}{2|y|} \quad (1.43)$$

## 1.2.4 Revizija "zvonolike" raspodjele opterećenja

Raspodjela opterećenja dana u [4] minimizira inducirani otpor za dani moment savijanja u korijenu krila i uzgon povećanjem raspona, ali ne uzima u obzir kako se mijenja težina krila uslijed povećanja raspona, niti utjecaj težine krila na moment savijanja u korijenu krila. Stoga je potrebno dodatno proširiti ograničenja tako da se uzme u obzir i utjecaj mase. Također, pretpostavke koje je Prandtl prepostavio u [7] nisu potpuno opravdane u svim slučajevima. Raspodjela momenta savijanja je kompleksna funkcija raspona, koeficijent proporcionalnosti između  $\overline{W}_s(y)$  i  $M_b(y)$  između ostalog ovisiti i o debljini aeroprofila. Stoga je očito da će i koeficijent proporcionalnosti između  $\overline{W}_s(y)$  i  $M_b(y)$  ovisiti o  $y$ , tj. da neće biti konstantan duž raspona ako krilo nije pravokutno s konstantnom debljinom aeroprofila. Također, moment savijanja na svakoj sekciji nije funkcija samo uzgona, već ovisi i o raspodjeli težine po krilu. Tako da izraz (1.27) treba korigirati tako da prelazi u oblik:

$$M_b(y) = n_a \int_y^{b/2} [W \frac{\overline{L}(y_0)}{L} - \overline{W}_s(y_0) - \overline{W}_n(y_0)](y_0 - y) dy_0, \quad L = n_a W \quad (1.44)$$

Pri tome je  $n_a$  faktor opterećenja.

U ravnotežnom letu najpovoljnija je raspodjela težine  $\overline{W}_n(y) = W \frac{\overline{L}(y)}{L} - \overline{W}_s(y)$ ,  $W_r = 0$  pri kojoj moment savijanja potpuno nestaje. No, pri konstruiranju krila ograničavajući moment savijanja ne određuje se pri uvjetima ravnotežnog leta nego u uvjetima manevriranja (eng. *high load factor maneuvers*) i grubog slijetanja (eng. *hard landing*) pri kojem je ova raspodjela vrlo nepovoljna. Prema [9] do najpovoljnije raspodjele težine se dolazi koristeći sljedeću relaciju:

$$\overline{W}_n(y) = (W - W_r) \frac{\overline{L}(y)}{L} - \overline{W}_s(y) \quad (1.45)$$

Uvrštavanjem (1.45) u (1.44) za uvjete manevriranja i grubog slijetanja prema [9] dobiju se sljedeća dva izraza:

$$M_b(y) = n_m W_r \int_y^{b/2} \frac{\overline{L}(y_0)}{L} (y_0 - y) dy_0 \quad (1.46)$$

$$M_b(y) = - [(n_g - 1)W - n_g W_r] \int_y^{b/2} \frac{\overline{L}(y_0)}{L} (y_0 - y) dy_0 \quad (1.47)$$

Pri tome je  $n_m$  faktor opterećenja za high load maneuvers, a  $n_g$  faktor opterećenja za hard landing. Izjednačavanjem izraza (1.46) i (1.47) dobiva se relacija koja određuje koliko težine

treba postaviti u korijen krila da bi se zadovoljila oba uvjeta (1.46) i (1.47) za zadane  $n_g$  i  $n_m$ :

$$W_r = \frac{n_g - 1}{n_m + n_g} W \quad (1.48)$$

Izraze (1.46) i (1.47) može se zapisati u obliku:

$$|M_b(y)| = k_w W_r \int_y^{b/2} \frac{\bar{L}(y_0)}{L} (y_0 - y) dy_0$$

Gdje je  $k_w$ :

$$k_w = \begin{cases} n_m, & \text{ako je } W_r \geq \frac{n_g - 1}{n_m + n_g} W \\ (n_g - 1) \frac{W}{W_r} - n_g, & \text{ako je } W_r < \frac{n_g - 1}{n_m + n_g} W \end{cases}$$

Prema [9] potrebna težina konstrukcije za proizvoljan tlocrt i raspodjelu opterećenja određuje se sljedećim izrazom:

$$W_s = 2 \int_0^{b/2} \frac{|M_b(y)|}{S_b(y)} dy; S_b(y) = \frac{C_\sigma \frac{(t_{max})}{c(y)} \sigma_{max}}{\rho_m g}, C_\sigma = \frac{2I \frac{h}{t_{max}}}{A_b h^2} \quad (1.49)$$

### Primjena na pravokutna krila

Iz jednadžbe (1.49) očito je da je težina konstrukcije proporcionalna integralu momenta podijeljenog s raspodjelom duljine tetive po rasponu. Stoga je za analitičko rješenje potrebno analizu ograničiti na pravokutna krila kod kojih se ne mijenja duljina tetive ili debljina aeroprofila duž raspona. U tom slučaju jednadžba (1.49) prelazi u oblik:

$$W_s = \frac{2k_w W_r}{S_b} \int_0^{b/2} \int_0^{b/2} \frac{\bar{L}(y_0)}{L} (y_0 - y) dy_0 \quad (1.50)$$

Koristeći izraz (1.15) i trigonometrijsku relaciju  $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$  dobiva se:

$$W_s = \frac{2k_w W_r}{S_b} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \left[ \sin \theta_0 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sin n\theta_0 \right] (\sin 2\theta \sin \theta_0 - \sin 2\theta_0 \sin \theta) d\theta_0 d\theta \quad (1.51)$$

Za simetrično opterećenje svi su Fourierovi koeficijenti  $B_n$  jednaki nuli za parne  $n$ , a integriranjem izraza (1.51) dobiva se nula za sve elemente kod kojih je  $n > 3$ . Tako da izraz

(1.51) postaje:

$$W_s = \frac{k_w W_r b^2}{32S_b} (1 + B_3) \quad (1.52)$$

Iz jednadžbe (1.52) očito je da svi  $B_n$  faktori za  $n > 3$  ne utječu na masu konstrukcije, tako da u minimiziranju induciranog otpora moraju biti 0. To pokazuje da je za pravokutna krila Prandtlova "zvonolika" raspodjela povoljnija od Jonesove, a postavljanjem  $B_3$  u interval  $-1/3 \leq B_3 < 0$  smanjuje se potrebna težina konstrukcije za određeni raspon. Ako se ne postave nikakva dodatna ograničenja, dolazi se do zaključka da je Prandtlova razdioba dana u [7] najpovoljnija.

Ako postoje još neka druga ograničenja, potrebno je dodatno proširiti analizu. Na primjer, često ograničenje pri konstrukciji je opterećenje krila  $W/S$ , koje rezultira drugačijom idealnom raspodjelom opterećenja od zvonolike raspodjele. Ta je raspodjela opisana u [10]. Uvrštavanjem izraza (1.45) u (1.52) dolazi se do sljedećeg izraza:

$$W_s = \frac{\rho_m g \left(\frac{W}{A_w}\right)}{32C_\sigma \frac{t_{max}}{c} \sigma_{max}} \frac{k_W W_r b^2}{W} (1 + B_3) \quad (1.53)$$

Prvi dio gornjeg izraza ne ovisi o rasponu ili težini konstrukcije pa se izraz (1.53) može uvrstiti u izraz (1.21), pri čemu se dobiva:

$$D_i = \frac{2(1 + 3B_3^2)}{\pi \rho V_\infty^2} \left[ \frac{(1 + B_3) \rho_m g \frac{W}{A_w} k_W W_r W^2}{32C_\sigma \frac{t_{max}}{c} \sigma_{max} W_s} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (1.54)$$

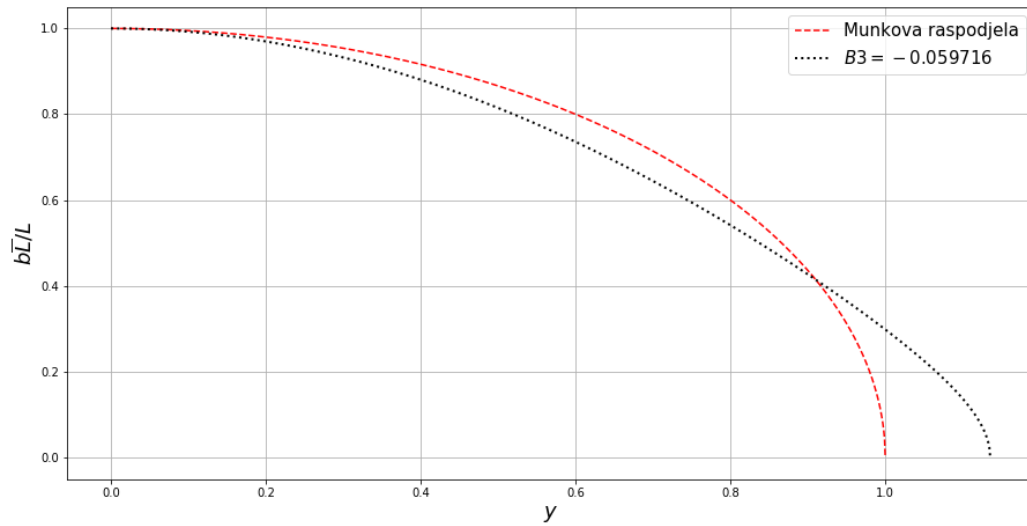
Varijacija izraza (1.54) s  $B_3$  ovisi o izrazu  $(1 + 3B_3)^2(1 + B_3)^{2/3}$  te se  $B_3$  za minimalan otpor određuje iz kvadratne jednadžbe  $1 + 9B_3 + 12B_3^2 = 0$ . Tako se može odrediti da je otpor minimalan za:

$$B_3 = -\frac{3}{8} + \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{1}{12}}; \quad B_n = 0, \quad za \quad n \neq 3 \quad (1.55)$$

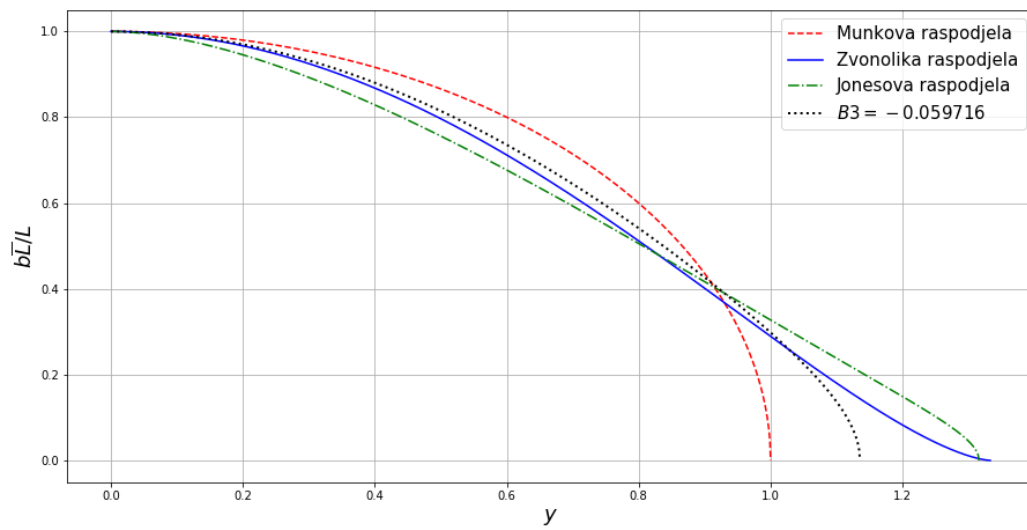
Pri čemu je raspodjela opterećenja dana sljedećim izrazom:

$$\frac{b \bar{L}(y)}{L} = \frac{4}{\pi} [\sin \theta - 0.13563322 \sin 3\theta] \quad (1.56)$$

Na slici 1.6 je prikazana raspodjela opterećenja za  $B_3 = -0.059716$ , a na slici 1.7 je prikazana usporedba svih danih raspodjela opterećenja:



Slika 1.6: Raspodjela opterećenja za  $B_3 = -0.059716$



Slika 1.7: Usporedba opisanih raspodjela opterećenja

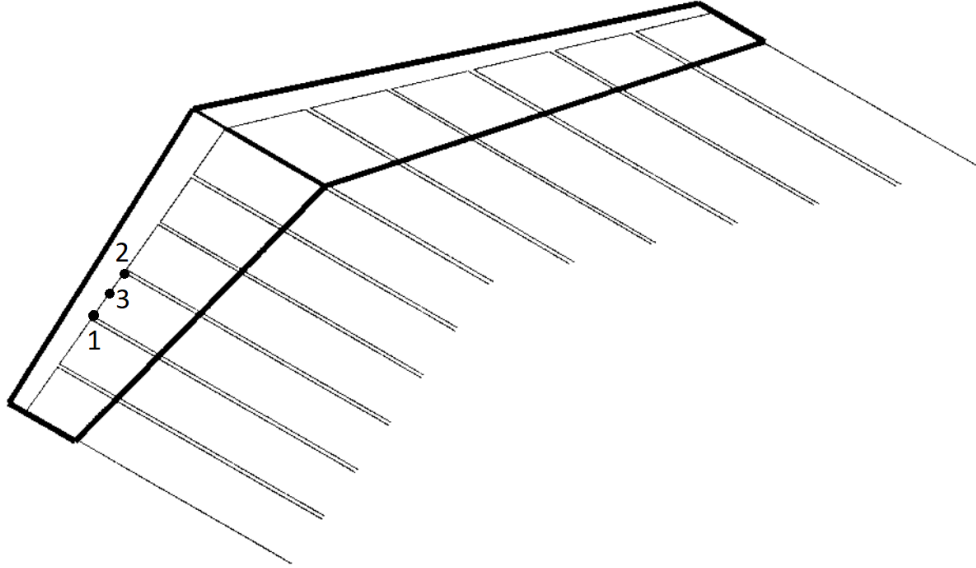
## 2. Matematički model

U ovom poglavlju bit će definirana numerička metoda koja će se koristiti za proračun odabranog krila sa zvonolikom raspodjelom opterećenja.

### 2.1 Numerička adaptacija klasične Prandtlove noseće linije za proizvoljna krila

#### 2.1.1 Uvod u metodu

Za proračune krila koristit će se metoda dana u [11]. Metoda se temelji na Prandtlovoj teoriji noseće linije, tj. na kombinaciji teorema Kutta-Žukovskog o uzgonu vrtloga i Prandtlove hipoteze da svaka sekcija ostvaruje uzgon ekvivalentan sekciji beskonačnog krila s istim lokalnim napadnim kutom. Krilo se dijeli na paran broj segmenata koji se sastoje od vezane vrtložne niti i dvije slobodne vrtložne niti koje se protežu u beskonačnost što zajedno čini  $\Pi$  vrtlog. Svaki segment definira se pomoću tri točke: u točki 1 je početak vezanog vrtloga, u točki 2 kraj vezanog vrtloga (točke 1 i 2 smještene su na četvrtini tetive), a točka 3 je evaluacijska točka u kojoj se određuje brzina ispiranja i ona se smješta između prve i druge točke na segmentu vezanog vrtloga.



Slika 2.1: Krilo diskretizirano na segmente za numeričku metodu Prandtlovog tipa [11]

Prandtl je za procjenu lokalne brzine koristio induciranu brzinu slobodnog vrtloga i brzinu iz beskonačnosti, izostavio je brzinu induciranu vezanim vrtlogom. To izostavljanje opravdano je kada se vezani vrtlozi svih segmenata nalaze na istom pravcu jer je onda brzina koju međusobno iduciraju jednaka nuli. Stoga, primjena takve metode ograničena je na krila s ravnim vezanim vrtlogom. No, za krila s dihedralom ili strijelom vezani vrtlozi segmenata nisu kolinearni duž cijelog vezanog vrtloga te će u tom slučaju inducirati brzinu u ostalim sekcijama. Prandtl je smjer slobodnih vrtloga postavio tako da budu kolinearni s tetivom što omogućuje pronalaženje analitičkog rješenja, a ne stvara veliku grešku. Obzirom da se u ovoj metodi traži numeričko rješenje, slobodne vrtloge postavlja se tako da budu paralelni s brzinom iz beskonačnosti što je točnije.

### 2.1.2 Određivanje intenziteta vezanog vrtloga i inducirane brzine

Iznos i smjer aerodinamičke sile određuje se iz trodimenzionalnog teorema Kutta-Žukovskog:

$$\mathbf{F} = \rho(\mathbf{V} \times \mathbf{\Gamma}) \quad (2.1)$$

Ako se promatra pojedinačni segment, izraz (2.1) praktično je zapisati u obliku:

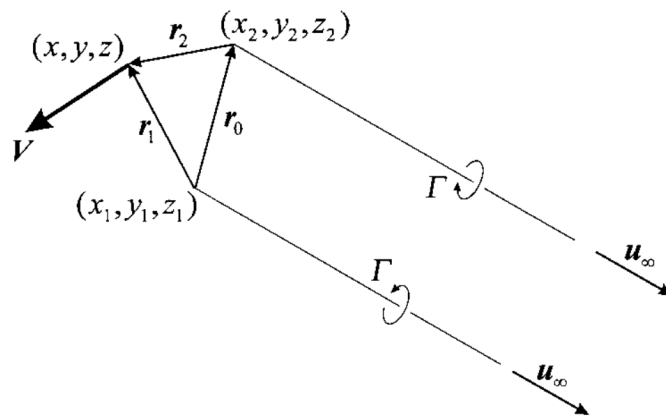
$$d\mathbf{F}_i = \rho\Gamma_i\mathbf{V}_{tot_i} \times d\mathbf{l}_i \quad (2.2)$$



Problem se svodi na određivanje cirkulacije  $\Gamma$  i rezultatne brzine  $\mathbf{V}_{tot}$ . Resultantna brzina  $\mathbf{V}_{tot}$  dobiva se zbrajanjem brzine iz beskonačnosti  $\mathbf{V}_\infty$  i inducirane brzine  $\mathbf{V}_{ind}$ :

$$\mathbf{V}_{tot_i} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_{ind_i} \quad (2.3)$$

Brzina  $\mathbf{V}$  koju  $\Pi$  vrtlog inducira u proizvoljnoj točki prostora prema slici 2.2 izvedena je u [11].



Slika 2.2: Brzina u točki  $(x,y,z)$  inducirana  $\Pi$  vrtlogom

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{u}_\infty \times \mathbf{r}_2}{r_2(r_2 - \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}_2)} + \frac{(r_1 + r_2)\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_2}{r_1 r_2 (r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)} - \frac{\mathbf{u}_\infty \times \mathbf{r}_1}{r_1(r_1 - \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}_1)} \right] \quad (2.4)$$

Ako se izraz (2.4) zapiše u bezdimenzijskom obliku, za brzinu koju će segment  $i$  inducirati u evaluacijskoj točki segmenta  $j$ , (2.4) prelazi u oblik:

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{c}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{u}_\infty \times \mathbf{r}_{i2j}}{r_{i2j}(r_{i2j} - \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}_{i2j})} + \delta_{ij} \frac{(r_{i1j} + r_{i2j})\mathbf{r}_{i2j} \times \mathbf{r}_{i2j}}{r_{i1j} r_{i2j} (r_{i1j} r_{i2j} + \mathbf{r}_{i1j} \cdot \mathbf{r}_{i2j})} - \frac{\mathbf{u}_\infty \times \mathbf{r}_{i1j}}{r_{i1j}(r_{i1j} - \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}_{i1j})} \right] \quad (2.5)$$

Nakon sumiranja induciranih brzina određuje se  $\mathbf{V}_{tot_i}$ :

$$\mathbf{V}_{tot_i} = \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j \mathbf{v}_{ji}}{c_j} \quad (2.6)$$

Koristeći izraze (2.2) i (2.6) dolazi se do izraza za aerodinamičku silu segmenta:

$$d\mathbf{F}_i = \rho\Gamma_i \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j \mathbf{v}_{ji}}{c_j} \right) \times d\mathbf{l}_i \quad (2.7)$$

Ako se  $d\mathbf{F}_i$  izrazi pomoću  $C_{L_i}$ , dobiva se:

$$|d\mathbf{F}_i| = \frac{1}{2}\rho V_{tot_i}^2 C_{L_i}(\alpha_i, \delta_i) A_i, \quad V_{tot_i} = \left| \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \right| \quad (2.8)$$

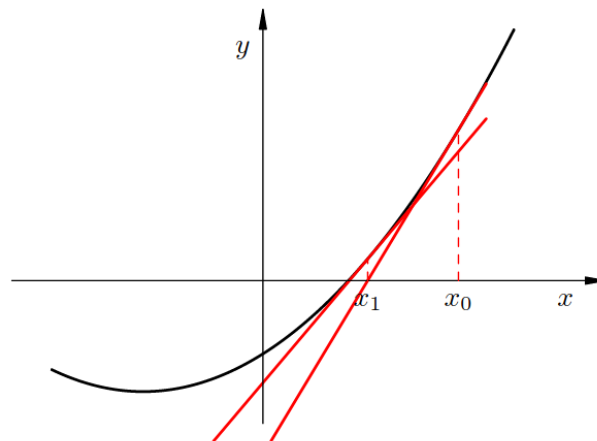
Gdje je  $C_{L_i}$  definiran kao:

$$C_{L_i} = C_{L_i}(\alpha_i, \delta_i) \quad (2.9)$$

Ovakvo definiran  $C_{L_i}$  dopušta primjenu i u slučaju kada ovisnost između koeficijenta uzgona i napadnog kuta nije linearna. Izjednačavanjem (2.7) i (2.8) dobiva se sljedeći sustav nelinearnih jednadžbi:

$$2 \left| \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \right| - V_{tot_i}^2 C_{L_i}(\alpha_i, \delta_i) A_i = 0 \quad (2.10)$$

Za rješavanje sustava koristi se Newtonova metoda koja se često naziva i metodom tangente. U najjednostavnijem slučaju funkcije s jednom varijablom, rezultat za  $x_n$  poboljšava se iteracijama tako da se za  $n + 1$  aproksimaciju odredi vrijednost i prva derivacija funkcije  $f(x)$  za  $x_n$ . Pomoću tih podataka određuje tangenta i kao novo rješenje uzima se nultočka tangente, što je prikazano na slici 2.3.



Slika 2.3: Newtonova metoda za funkciju s jednom varijablom

Tako da se za određivanje  $x_{n+1}$  koristi sljedeći izraz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Opisana metoda nije globalno konvergentna, ali vrlo brzo konvergira ako ne postoje lokalni ekstremi. Obzirom da cirkulacija oko konačnog krila nema lokalnih ekstrema, Newtonova metoda daje dobre rezultate uz vrlo mali broj iteracija. Za rješavanje sustava s više varijabli potrebno je sustav jednadžbi zapisati u vektorskom obliku:

$$f_i(\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{R}$$

$$f_i(\mathbf{\Gamma}) = 2 \left| \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \right| - V_{toti}^2 C_{Li}(\alpha_i, \delta_i) A_i \quad (2.11)$$

Cilj je odrediti vektor  $\mathbf{\Gamma}$  takav da vektor reziduala  $\mathbf{R}$  postane nulvektor. Tako, potrebno je da promjena rezidualnog vektora bude  $-\mathbf{R}$ . Počinje se s prepostavkom za  $\mathbf{\Gamma}$  i Newtonovom korekcijskom jednadžbom iteracijama se poboljšava pretpostavljeni  $\mathbf{\Gamma}$ :

$$[\mathbf{J}] \Delta \mathbf{\Gamma} = -\mathbf{R}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma} + \Omega \Delta \mathbf{\Gamma}$$

Pri tome je  $\Omega$  relaksacijski faktor, a  $[\mathbf{J}]$  Jacobijeva  $n \times n$  matrica definirana kao:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \Gamma_j}$$

Tada je:

$$J_{ij} = \delta_{ij} 2 |\mathbf{W}_i| + \frac{2 \mathbf{W}_i \cdot (\mathbf{v}_{ji} \times d\mathbf{l}_i)}{|\mathbf{W}_i|} \Gamma_i - V_{toti}^2 A_i \frac{\partial C_{Li}}{\partial \alpha_i} \frac{V_{a_i} (\mathbf{v}_{ji} \cdot \mathbf{u}_{n_i}) - V_{n_i} (\mathbf{v}_{ji} \cdot \mathbf{u}_{a_i})}{V_{a_i}^2 + V_{n_i}^2} - 2 A_i C_{Li}(\alpha_i, \delta_i) (\mathbf{V}_{toti} \cdot \mathbf{v}_{ji}) \quad (2.12)$$

gdje je  $\mathbf{W}_i$  je određen izrazom (2.13), a aksijalna i vertikalna komponenta lokalne brzine  $V_{a_i}$  i  $V_{n_i}$  izrazima (2.14) i (2.15):

$$\mathbf{W}_i = \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \quad (2.13)$$

$$V_{a_i} = \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \cdot \mathbf{u}_{a_i} \quad (2.14)$$

$$V_{n_i} = \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \cdot \mathbf{u}_{n_i} \quad (2.15)$$

Za procjenu cirkulacije s kojom se kreće u iterativni postupak, može se koristiti linearizirani oblik jednadžbe (2.10) koja, ako se pretpostavi linearna povezanost napadnog kuta i koeficijenta uzgona, prelazi u oblik:

$$\frac{2}{A_i \frac{\partial C_{L_i}}{\partial \alpha_i}} |\Gamma_i (\mathbf{V}_\infty \times d\mathbf{l}_i)| - V_\infty \sum_{j=1}^N \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \cdot \mathbf{u}_{n_i} = V_\infty (\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{u}_{n_i} - \alpha_{L0_i}) \quad (2.16)$$

Ovaj linearizirani oblik daje vrlo točne rezultate pri malim napadnim kutevima i značajno smanjuje broj potrebnih Newtonovih iteracija.

### 2.1.3 Određivanje aerodinamičke sile i momenta

Kada je određena magnituda  $\Gamma_i$  na svakom segmentu mogu se odrediti sile koje nastaju uslijed te cirkulacije. Sumiranjem sila na segmente dobije se ukupna aerodinamička sila na konačno krilo:

$$\mathbf{F} = \rho \sum_{i=1}^n \left[ \Gamma_i \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \right] \quad (2.17)$$

Aerodinamički moment generiran oko težišta je:

$$\mathbf{M} = \rho \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \left[ \Gamma_i \left( \mathbf{V}_\infty + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \mathbf{v}_{ji} \right) \times d\mathbf{l}_i \right] + \delta \mathbf{M}_i \quad (2.18)$$

Ako se pretpostavi da je  $C_{M_i}$  konstantan na segmentu,  $\delta \mathbf{M}_i$  je određen sljedećim izrazom:

$$\delta \mathbf{M}_i = -\frac{1}{2} \rho V_{tot_i}^2 C_{M_i} A_i \mathbf{u}_{s_i} \quad (2.19)$$

Pri tome je  $\mathbf{u}_{s_i}$  jedinični vektor u smjeru raspona:

$$\mathbf{u}_{s_i} = \mathbf{u}_{a_i} \times \mathbf{u}_{n_i} \quad (2.20)$$

Kao i panelne metode, ova metoda daje rješenja za potencijalno strujanje tako da rezultati dobiveni ovom metodom ne uključuju posljedice viskoznosti kao što je parazitski otpor. Uz to ima dodatno ograničenje. Za male  $\mathcal{R}$  Prantlova pretpostavka koja povezuje cirkulaciju

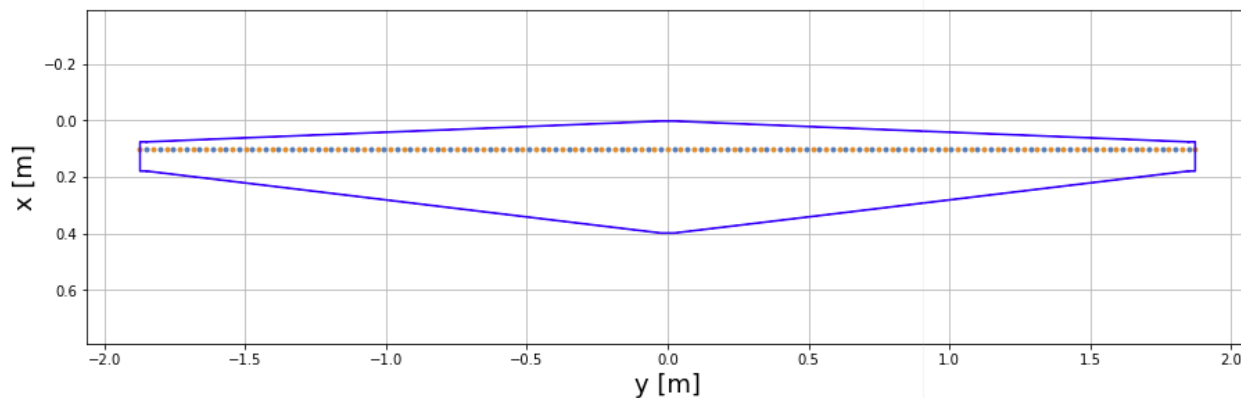
oko sekcije konačnog krila s rezultatom za cirkulaciju oko sekcije beskonačnog krila više ne vrijedi. Stoga da ova metoda ne daje zadovoljavajuće rezultate za  $\mathcal{R} < 4$ , ali za vitka krila koja se razmatraju u ovom radu daje vrlo dobre rezultate uz vrlo male zahtjeve na računalne performanse. Dodatno ograničenje stvara pretpostavka u jednadžbi (2.10) da je sila pozitivnog iznosa, tako da se metodom ne mogu analizirati slučajevi u kojima se pojavljuju napadni kutevi pri kojima je sila na sekciju negativna. Za danu metodu je napisan kod u programskom jeziku Python 3 koristeći knjižnicu NumPy za izvršavanje vektorskih operacija.

## 3. Rezultati

Od raspodjela opterećenja danih u poglavlju 1 numerički će se provjeriti "zvonolika" raspodjela opterećenja dana u [7].

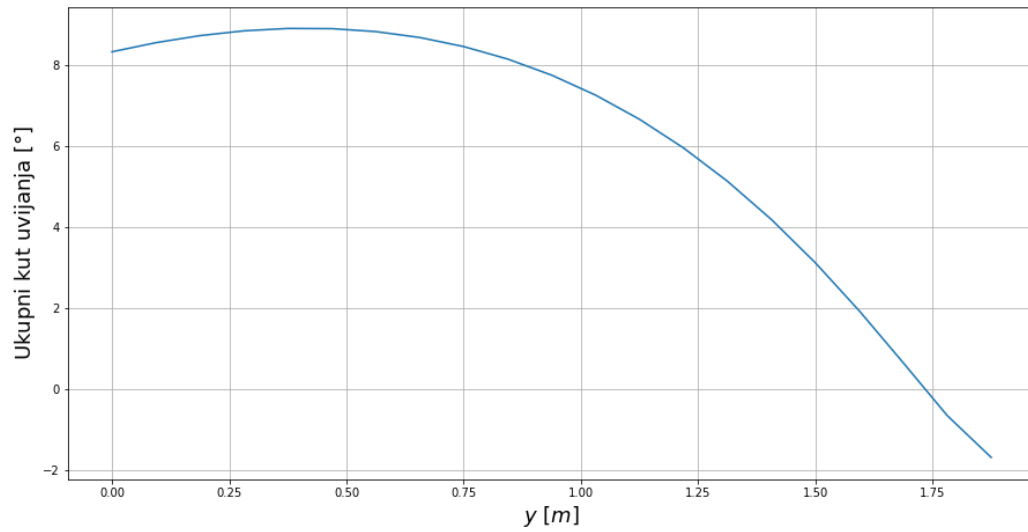
### 3.1 PrandtlID krilo

Geometrija krila dana u [12] ostavaruje zvonoliku raspodjelu opterećenja te će se to krilo koristiti za numeričku analizu. Krilo je trapezno, raspona 3.75 metara. Korijenska tetiva iznosi 0.4 metara, a vršna 0.1 metar. Na slici 3.1 je prikazan tlocrt ravne geometrije PrandtlID krila s nosećom linijom.



Slika 3.1: Tlocrt ravnog PrandtlID krila

Aeroprofil se linearno mijenja od korijena prema vrhu krila. Korijenski aeroprofil je definiran u tablici 3.2, a vršni u tablici 3.3. Analiza danih aeroprofila provedena je u programskom paketu xfoil te su svojstva aeroprofila između korijenskog i vršnog aeroprofila linearno interpolirana. Na slici 3.2 prikazano je ukupno aerodinamičko uvijanje, tj. zbroj aerodinamičkog i geometrijskog uvijanja, koje je definirano na dvadeset sekcija u tablici 3.1. Za segmente koji se nalaze između zadanih sekcija, uvijanje je linearno interpolirano.



Slika 3.2: Zbroj aerodinamičkog i geometrijskog uvijanja

0	8.3274	11	7.2592
1	8.5524	12	6.6634
2	8.7259	13	5.9579
3	8.8441	14	5.1362
4	8.9030	15	4.1927
5	8.8984	16	3.1253
6	8.8257	17	1.9394
7	8.6801	18	0.6589
8	8.4565	19	-0.6417
9	8.1492	20	-1.6726
10	7.7522		

Tablica 3.1: Kut uvijanja na sekcijama krila

x	z	x	z	x	z	x	z
0.99839	0.01595	0.33928	0.09971	0.00107	-0.00520	0.40245	-0.01754
0.98664	0.01580	0.30866	0.09846	0.00428	-0.00882	0.43474	-0.01602
0.95215	0.01710	0.27886	0.09632	0.00961	-0.01205	0.46730	-0.01451
0.89696	0.02355	0.25000	0.09339	0.01704	-0.01502	0.50000	-0.01301
0.82387	0.03690	0.22221	0.08978	0.02653	-0.01800	0.53270	-0.01156
0.80438	0.04073	0.19562	0.08553	0.03806	-0.02062	0.56526	-0.01017
0.77779	0.04590	0.17033	0.08072	0.05156	-0.02237	0.59755	-0.00885
0.75000	0.05124	0.14645	0.07539	0.06699	-0.02406	0.62941	-0.00761
0.72114	0.05668	0.12408	0.06963	0.08427	-0.02524	0.66072	-0.00646
0.69134	0.06218	0.10332	0.06345	0.10332	-0.02598	0.69134	-0.00542
0.66072	0.06768	0.08427	0.05691	0.12408	-0.02642	0.72114	-0.00448
0.62941	0.07312	0.06699	0.05017	0.14645	-0.02653	0.75000	-0.00364
0.59755	0.07840	0.05156	0.04318	0.17033	-0.02631	0.77779	-0.00291
0.56526	0.08341	0.03806	0.03575	0.19562	-0.02584	0.80438	-0.00227
0.53270	0.08800	0.02653	0.02897	0.22221	-0.02512	0.82005	-0.00194
0.50000	0.09201	0.01704	0.02201	0.25000	-0.02419	0.89553	0.00255
0.46730	0.09530	0.00961	0.01424	0.27886	-0.02308	0.95184	0.00908
0.43474	0.09777	0.00428	0.00784	0.30866	-0.02184	0.98662	0.01411
0.40245	0.09936	0.00107	0.00353	0.33928	-0.02047	0.99839	0.01595
0.37059	0.10000	0.00000	0.00000	0.37059	-0.01904		

Tablica 3.2: Korijski aeroprofil PrandtlD krila



x	z	x	z	x	z	x	z
1.00000	0.00070	0.40620	0.04556	0.00002	-0.00038	0.46904	-0.04274
0.96091	0.00428	0.38108	0.04644	0.00028	-0.00161	0.48162	-0.04208
0.94833	0.00540	0.36853	0.04682	0.00174	-0.00435	0.49420	-0.04139
0.93571	0.00654	0.35599	0.04716	0.00460	-0.00763	0.50678	-0.04067
0.92307	0.00769	0.34346	0.04745	0.00681	-0.00956	0.54455	-0.03836
0.89778	0.00999	0.33093	0.04770	0.01384	-0.01430	0.55715	-0.03754
0.88515	0.01114	0.29342	0.04814	0.01925	-0.01718	0.56975	-0.03670
0.84728	0.01455	0.26848	0.04816	0.02619	-0.02030	0.59495	-0.03496
0.82206	0.01679	0.25604	0.04807	0.03452	-0.02347	0.60756	-0.03406
0.80944	0.01789	0.24362	0.04791	0.06460	-0.03186	0.62017	-0.03315
0.79683	0.01898	0.23122	0.04767	0.07556	-0.03415	0.65801	-0.03031
0.78422	0.02006	0.21885	0.04736	0.09825	-0.03801	0.67063	-0.02933
0.77160	0.02113	0.20652	0.04696	0.12166	-0.04103	0.68325	-0.02834
0.73374	0.02428	0.15762	0.04434	0.13355	-0.04229	0.69587	-0.02734
0.72112	0.02531	0.14554	0.04338	0.14554	-0.04338	0.72112	-0.02531
0.69587	0.02734	0.13355	0.04229	0.15762	-0.04434	0.73374	-0.02428
0.68325	0.02834	0.12166	0.04103	0.20652	-0.04696	0.77160	-0.02113
0.67063	0.02933	0.09825	0.03801	0.21885	-0.04736	0.78422	-0.02006
0.65801	0.03031	0.07556	0.03415	0.23122	-0.04767	0.79683	-0.01898
0.62017	0.03315	0.06460	0.03186	0.24362	-0.04791	0.80944	-0.01789
0.60756	0.03406	0.03452	0.02347	0.25604	-0.04807	0.82206	-0.01679
0.59495	0.03496	0.02619	0.02030	0.26848	-0.04816	0.84728	-0.01455
0.56975	0.03670	0.01925	0.01718	0.29342	-0.04814	0.88515	-0.01114
0.55715	0.03754	0.01384	0.01430	0.33093	-0.04770	0.89778	-0.00999
0.54455	0.03836	0.00681	0.00956	0.34346	-0.04745	0.92307	-0.00769
0.50678	0.04067	0.00460	0.00763	0.35599	-0.04716	0.93571	-0.00654
0.49420	0.04139	0.00174	0.00435	0.36853	-0.04682	0.94833	-0.00540
0.48162	0.04208	0.00028	0.00161	0.38108	-0.04644	0.96091	-0.00428
0.46904	0.04274	0.00002	0.00038	0.40620	-0.04556	1.00000	0.00070
0.43132	0.04453	0.00000	0.00000	0.43132	-0.04453		

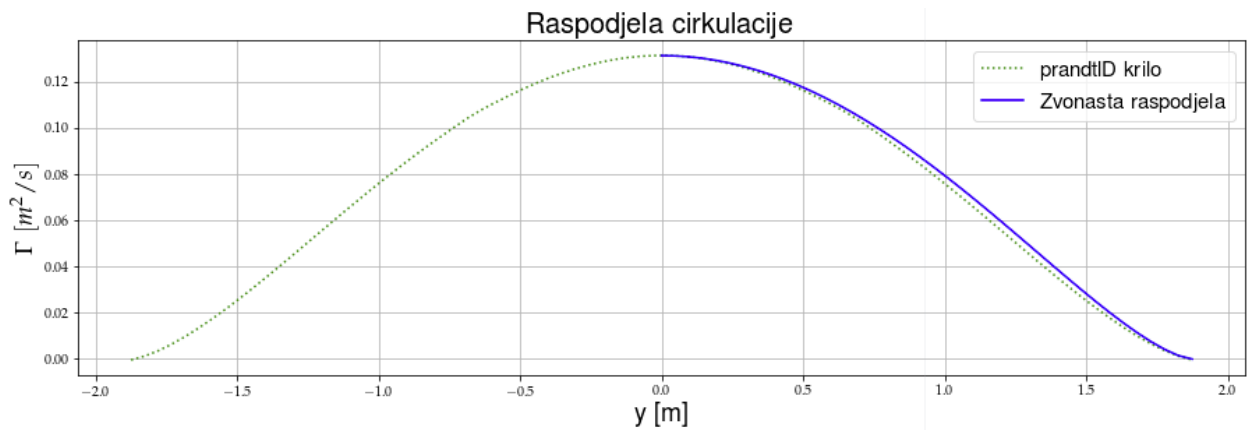
Tablica 3.3: Vršni aeroprofil PrandtlID krila

## 3.2 Rezultati

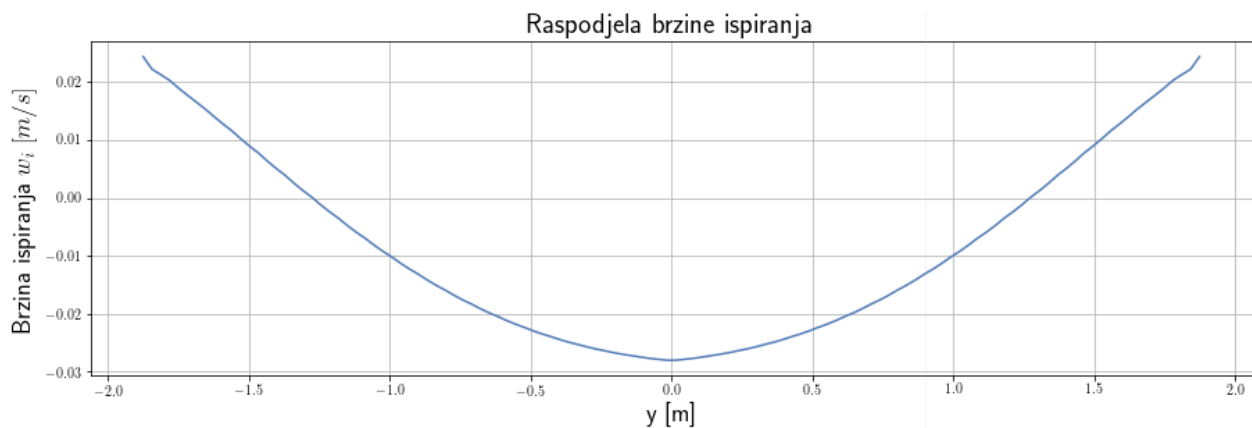
Koristeći opisanu numeričku metodu izvršena je analiza opisanog krila. Na slici 3.3 je prikazana cirkulacija, tj. raspodjela opterećenja koja je uspoređena je s teorijskom zvonolikom raspodjelom opterećenja danom [7]. Numeričkom integracijom sljedećeg izraza:

$$B_3 = \frac{3}{\pi} \int_{\pi}^0 \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma_0} \sin 3\theta d\theta$$

dobije se  $B_3 = -0.3334$  iz čega slijedi da, zanemarujući pogrešku numeričke integracije, vrijedi  $B_3 = -\frac{1}{3}$ . Na slici 3.4 je prikazana brzina ispiranja koja se po rasponu mijenja po paraboli te je zanimljivo primjetiti da brzina ispiranja na oko 70% poluraspona mijenja predznak te postaje pozitivna, što je pojava koju se može koristiti za upravljanje momentom skretanja.



Slika 3.3: Raspodjela cirkulacije



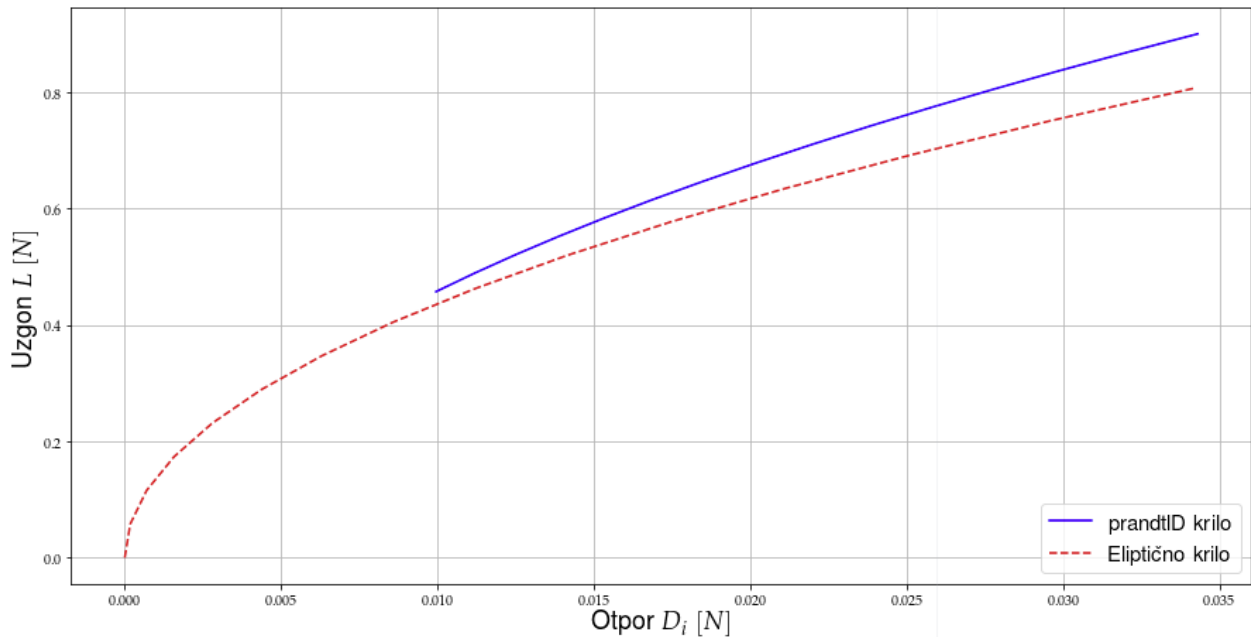
Slika 3.4: Brzina ispiranja ravne PrandtlID geometrije

PrandtlID krilo je uspoređeno s ekvivalentnim eliptičnim krilom, a u tablici 3.4 je prikazana usporedba rezultata:

	$L$ [N]	$D_i$ [N]	$M_b$ [Nm]
PrandtlID	0.434	0.00909	0.13876
Eliptično krilo	0.434	0.01004	0.14061

Tablica 3.4: Uzgon, inducirni otpor i moment savijanja u korijenu krila

Na slici 3.5 može se vidjeti usporedba Lilienthala ravnog PrandtlID krila i eliptičnog krila. Lilienthala ravnog PrandtlID krila ne završava u nuli jer bi se pri manjim napadnim kutevima pojavila negativna cirkulacija na vrhovima krila, što korištena metoda ne dopušta. Pri većim napadnim kutevima se "kviri" zvonolika raspodjela te se više opterećenja pojavljuje pri vrhovima krila, što rezultira još boljim induciranim otporom u odnosu na eliptično krilo, ali značajno raste moment savijanja te se gubi smisao ekvivalentnosti krila sa zvonolikom raspodjelom i eliptičnog krila manjeg raspona.



Slika 3.5: Lilienthala eliptičnog i PrantID krila

## 4. Zaključak

Iz Prandtlovog rada [7] slijedi da eliptična raspodjela nije najpovoljnija s obzirom na moment savijanja te da zvonolika raspodjela dopušta veći raspon za istu težinu konstrukcije i manji inducirani otpor.

Jonesova raspodjela daje minimalan moment savijanja u korijenu krila uzrokovan aerodinamičkim silama, ali ne uzima u obzir težinu konstrukcije, tako da ne postavlja sve  $B_n$  osim  $B_3$  u nulu. To rezultira stvaranjem većeg induciraniog otpora od krila jednakog raspona sa zvonolikom raspodjelom. U suprotnom je potrebna veća težina konstrukcije, odnosno veći raspon da bi se ostvario jednak inducirani otpor kao kod zvonolike raspodjele. Stoga je zvonolika raspodjela opterećenja povoljnija od Jonesove.

Za pravokutna krila vrijedi da je najpovoljnija raspodjela opterećenja kada je  $B_3 = -1/3$ , a za krilo s proizvoljnim tlocrtom potrebno je numerički riješiti (1.49) te se tako određuje koji  $B_3$  iz intervala  $[-\frac{1}{3}, 0]$  je najpovoljniji.

Obzirom da su opterećenja pri manevriranju i pri grubom slijetanju ograničavajući pri konstruiranju krila te da težina konstrukcije ovisi o njima, a ne o opterećenju u ravnotežnom horizontalnom letu, najpovoljnije je rješenje da krilo kombinira eliptičnu i zvonoliku raspodjelu opterećenja. To bi značilo u fazama ograničavajućih opterećenja razvija zvonoliku raspodjelu, a u fazi ravnotežnog leta eliptičnu raspodjelu.

Iz numeričke analize slijedi da ravno PrandtlID krilo sa zvonolikom raspodjelom opterećenja stvara 10% manji inducirani otpor i manji moment savijanja u korijenu krila od krila jednake težine konstrukcije s eliptičnom raspodjelom opterećenja.

# Literatura

- [1] Milton Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. The Parabolic Press USA, 1982.
- [2] L. Prandtl. *Tragflügel Theorie*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Ges-chäeftliche Mitteilungen, Klasse, 1918.
- [3] Petar Kesić. *Osnove aerodinamike*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2003.
- [4] R. T. Jones *The spanwise distribution of lift for minimum induced drag of wing having given lift and a given bending moment*. NACA Technical note 2249, 1963.
- [5] L. Prandtl. *Applications of Modern Hydrodynamics to Aeronautics*. NACA TR-116, June 1921.
- [6] Max M. Munk. *The Minimum Induce Drag of Aerofoils*, NACA report 121, 1923.
- [7] L. Prandtl. *Über Tragflügel kleinsten induzierten Widerstandes*. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Vol. 24, No. 11, 1933.
- [8] Krisnamurty Karamcheti. *Principles od Ideal-Fluid Aerodynamics*. R. E. Krieger Publishing Company, 1980.
- [9] W. F. Phillips, D. F. Hunsaker and J. J. Joo. *Minimizing Induced Drag with Lift Distribution and Wingspan*. Journal of Aircraft, 2019.
- [10] Sarah A. Abdel-Motaleb. *Comparison of Induced and Parasitic Drag on Wings with Minimum Induced Drag*. All Graduate Plan B and other Reports 1353., 2019.
- [11] D. O. Snyder i W. F. Phillips. *Modern Adaptation of Prandtl's Classic Lifting-Line Theory*. Journl of Aircraft, 2000.
- [12] Albion H. Bowers, and Oscar J. Murillo. *On Wings of the Minimum Induced Drag: Spanload Implications for Aircraft and Birds*. NASA/TP—2016–219072, 2016.