

# Novi algoritam za povezivanje polja brzine i tlaka

---

**Krizmanić, Severino**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2011**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:419465>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**NOVI ALGORITAM ZA POVEZIVANJE POLJA  
BRZINE I TLAKA**

DOKTORSKI RAD

SEVERINO KRIZMANIĆ

ZAGREB, 2011.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**NOVI ALGORITAM ZA POVEZIVANJE POLJA  
BRZINE I TLAKA**

DOKTORSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. ZDRAVKO VIRAG

SEVERINO KRIZMANIĆ

ZAGREB, 2011.

## PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK:	519.6: 532.5 519.6: 536.2 519.6: 519.254
Ključne riječi:	Računalna dinamika fluida, Metoda konačnih volumena, Algoritam FLOP, Algoritam SIMPLE, Brzina konvergencije Nepomaknuta mreža, Nestrukturirana mreža
Znanstveno područje:	TEHNIČKE ZNANOSTI
Znanstveno polje:	Strojarstvo
Institucija u kojoj je rad izrađen:	Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje
Mentor rada:	Prof. dr. sc. Zdravko Virag
Broj stranica:	200
Broj slika:	62
Broj tablica:	11
Broj korištenih bibliografskih jedinica:	64
Datum obrane:	29. lipnja 2011.
Povjerenstvo:	Prof. dr. sc. Jurica Sorić Prof. dr. sc. Zdravko Virag Prof. dr. sc. Mario Šavar Prof. dr. sc. Hrvoje Jasak Prof. dr. sc. Senka Maćešić
Institucija u kojoj je rad pohranjen:	Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje

*Posebno se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Zdravku Viragu. Njegovo znanje, stručnost i velikodušnost pratili su me i bili poticaj tijekom cijelog studija i izrade ovog rada.*

*Zahvaljujem prof. dr. sc. Mariu Šavaru na podršci i savjetima, te prof. dr. sc. Antunu Galoviću.*

*Svim kolegama s Katedre, zahvaljujem na savjetima i preuzetim obvezama tijekom izrade ovog rada.*

*Zahvaljujem roditeljima i bratu na ljubavi i potpori, ocu i ujacima Janku i Vladiju na motivaciji za ovaj studij.*

*Najdublju zahvalnost iskazujem svome životnom suputniku, supruzi Sandri. Njena beskrajna ljubav i podrška omogućili su da moj studij i ovaj rad budu dovršeni.*

# SADRŽAJ

<b>1</b>	<b>UVOD.....</b>	<b>1</b>
1.1	Motivacija.....	3
1.2	Pregled dosadašnjih istraživanja.....	4
1.3	Hipoteza rada.....	9
1.4	Pregled rada.....	10
<b>2</b>	<b>MATEMATIČKI MODEL STRUJANJA FLUIDA.....</b>	<b>12</b>
2.1	Osnovne jednačbe dinamike fluida.....	12
2.2	Konstitutivne jednačbe.....	14
2.3	Jednačbe nestlačivog strujanja newtonovskog fluida.....	16
2.4	Matematički model slobodne konvekcije.....	18
2.5	Opća konveksijsko-difuzijska jednačba.....	20
<b>3</b>	<b>METODA KONAČNIH VOLUMENA.....</b>	<b>22</b>
3.1	Diskretizacija prostora.....	23
3.2	Diskretizacija opće konveksijsko-difuzijske jednačbe.....	29
	Sheme diferencije.....	31
	Vremenska diskretizacija.....	37
3.3	Sustav lineariziranih algebarskih jednačbi.....	39
3.4	Rubni uvjeti za opću konveksijsko-difuzijsku jednačbu.....	41
	Doprinos dijagonalnom koeficijentu sustava jednačbi.....	46
	Ulazna granica.....	47
	Izlazna granica.....	47
	Zid.....	48
	Simetrija.....	50
<b>4</b>	<b>PRIMJENA METODE KONAČNIH VOLUMENA ZA RJEŠAVANJE JEDNAČBI STRUJANJA FLUIDA.....</b>	<b>51</b>
4.1	Diskretizacija jednačbi strujanja fluida.....	51
4.2	Algoritam SIMPLE na pomaknutoj mreži.....	52
4.3	Algoritam SIMPLE na nepomaknutoj mreži.....	55
4.4	Novi algoritam.....	60
	Veza između masenih protoka na stranicama konačnog volumena i brzine u njegovom centru.....	61
	Eliminacija polja tlaka iz uvjeta nulte cirkulacije gradijenta tlaka.....	63
	Konzervativna korekcija masenih protoka.....	67
	Određivanje koeficijenata u sustavu jednačbi za korekciju protoka.....	70
4.5	Rekapitulacija algoritama.....	82
	Algoritam SIMPLE.....	83
	Algoritam FLOP.....	86
	Usporedni prikaz postupaka u algoritmima SIMPLE i FLOP.....	92
4.6	Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednačbi.....	93

<b>5</b>	<b>PRIMJERI I DISKUSIJA.....</b>	<b>95</b>
5.1	Potencijalno strujanje u pravom kutu .....	98
5.2	Potencijalno strujanje izvora uz nepropusnu stjenku.....	112
5.3	Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja $Re=1$ .....	120
5.4	Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja $Re=100$ .....	129
5.5	Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja $Re=5000$ .....	134
	Primjena EDSI sheme diferencije .....	146
5.6	Laminarno strujanje oko cilindra pri iznosu Reynoldsova broja $Re=0.1$ .....	149
5.7	Strujanje u kanalu s naglim proširenjem pri iznosu Reynoldsova broja $Re=229$ .....	153
5.8	Slobodna konvekcija u pravokutnoj šupljini .....	156
	Strujanje pri nižim vrijednostima Rayleighova broja .....	158
	Strujanje pri višim vrijednostima Rayleighova broja .....	161
5.9	Primjeri trodimenzijskog strujanja.....	167
5.10	Usporedba učinkovitosti algoritama SIMPLE i FLOP .....	171
<b>6</b>	<b>ZAKLJUČCI.....</b>	<b>176</b>
	<b>LITERATURA.....</b>	<b>178</b>

## PREDGOVOR

Na Katedri za mehaniku fluida Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu prepoznat je značaj računalne dinamike fluida još početkom 1980-tih godina, u vrijeme kada su mogućnosti dostupnih računala bile nedovoljne za njenu ozbiljniju primjenu. Znanstveni rad Katedre u području računalne dinamike fluida potaknuo je prof. dr. Zdravko Doliner, koji je prešavši s Mašinskog fakulteta Sveučilišta u Sarajevu prenio ideje svojih kolega koji su se u tom području usavršavali u eminentnim svjetskim centrima. U to se vrijeme značajan dio znanstvenog rada Katedre u području računalne dinamike fluida odnosio na metode opisa i rješavanja turbulentnog strujanja fluida. Od ovih početaka pa do danas, na Katedri su razvijene već tri generacije proračunskih postupaka i računalnih programa. Svaka generacija išla je ukorak sa svjetskim trendovima. U okviru prve generacije, razvijen je proračunski postupak i računalni program koji se temelji na rješavanju jednadžbi strujanja i modela turbulencije u općim ortogonalnim koordinatama, Virag 1985 [57]. U sklopu druge generacije, početkom 1990-tih godina na Katedri je razvijen proračunski postupak i računalni program koji se temelji na rješavanju jednadžbi u općim neortogonalnim koordinatama uz primjenu strukturirane pomaknute mreže i shema diferencije višeg reda, Virag 1991 [58], Korbar 1992 [29]. Nakon toga je dio znanstvenog rada Katedre u ovom području obuhvaćao analizu i unapređenje shema diferencije, Virag 1994 [56], Šavar 1996 [49]. Daljnji razvoj računala, omogućio je primjenu nestrukturiranih mreža kojima se jednostavno opisuju geometrijski složena područja proračuna. Time je ostvaren i veliki prodor računalne dinamika fluida u tehničku praksu sa novim izazovima. Tako je u sklopu razvoja računalnog programa treće generacije, znanstveni rad Katedre u području računalne dinamike fluida usmjeren na poboljšanje svojstava algoritama za rješavanje jednadžbi strujanja, u smislu brzine konvergencije i olakšane primjene. Razvoj je započeo od generatora lokalno-ortogonalne geometrijske mreže na kojoj je definiran postupak rješavanja opće konveksijsko-difuzijske jednadžbe Džijan 2000 [15]. Ovaj je rad omogućio primjenu SIMPLER algoritma na nestrukturiranim mrežama - Džijan 2004 [16], čime su ostvarena poboljšanja spram danas najviše zastupljenog SIMPLE algoritma, u smislu brzine konvergencije i jednostavnosti upotrebe proračunskog postupka. Ovaj rad predstavlja nastavak istraživanja u smjeru poboljšavanja svojstava proračunskog postupka.



## SAŽETAK

### Novi algoritam za povezivanje polja brzine i tlaka

U radu je razvijena metoda konačnih volumena za rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi za slučaj laminarnog nestlačivog strujanja. Metoda se temelji na novom algoritmu za povezivanje polja brzine i tlaka. Osnovna razlika novog algoritma u odnosu na danas najčešće korišteni SIMPLE algoritam, sastoji se u tome da je u njemu jednadžba kontinuiteta zadovoljena u svakoj iteraciji, a konačnom se rješenju približava korigiranjem masenih protoka kroz stranice konačnih volumena sve dok polje gradijenta tlaka ne postane bezcirkulacijsko. Brzina konvergencije novog algoritma (primijenjena u vlastito razvijenom računalnom programu) uspoređena je s brzinom konvergencije algoritma SIMPLE (primijenjenom u komercijalnom računalnom programu FLUENT) u nekoliko tipičnih slučajeva strujanja fluida pri niskim i visokim vrijednostima Reynoldsova broja, te za slučaj slobodne konvekcije pri niskim i visokim vrijednostima Rayleighova broja. Temeljem dobivenih rezultata zaključuje se da je u primjerima neviskoznog i viskozno strujanja: (1) brzina konvergencije novog algoritma značajno veća, pri čemu korisnik ne treba zadavati podrelaksacijske faktore za brzinu i tlak o kojima bi ta brzina ovisila, kao u slučaju algoritma SIMPLE. (2) Brzina konvergencije novog algoritma praktično ne ovisi o gustoći mreže, za razliku od brzine konvergencije algoritma SIMPLE koja opada s porastom gustoće mreže. Brzina konvergencije novog algoritma blago opada s porastom složenosti slike strujanja u konačnom rješenju (pojava vrtloga, tj. odvajanja strujanja) i primjenom sheme višeg reda točnosti (zbog primjene „deferred correction“ postupka). Kod primjene sheme višeg reda, s porastom gustoće mreže brzina konvergencije raste. (3) Učinkovitost novog algoritma (u smislu utroška računalnog vremena za postizanje željene točnosti rješenja) pokazala se većom, unatoč manje optimalnoj implementaciji novog algoritma u usporedbi s implementacijom algoritma SIMPLE u komercijalnom paketu FLUENT.

U primjerima slobodne konvekcije broj potrebnih iteracija za postizanje rješenja zadane točnosti raste obzirom na slučaj neviskoznog i viskozno strujanja, zbog nepotpune implicitnosti u obračunu uzgonskih sila. Brzina konvergencije novog algoritma bi se povećala kad bi se jednadžbe za korekcije protoka i temperature rješavale simultano. Primijećeno je da broj potrebnih iteracija raste s porastom Rayleighova broja, ali u svim slučajevima novi algoritam brže konvergira od algoritma SIMPLE.

Novi algoritam rezultira sustavom linearnih algebarskih jednadžbi s manje nepoznanica, ali je matrica sustava gušće popunjena, tako da je sa stajališta zauzeća memorije zahtjevniji. Daljnji nedostatak novog algoritma se ogleda u činjenici da ova matrica nema svojstva poznate M-matrice, kao u slučaju SIMPLE algoritma, što zahtijeva dodatna istraživanja na razvoju efikasnih iterativnih rješavača za takav tip matrice sustava.

#### **Ključne riječi:**

Računalna dinamika fluida, Metoda konačnih volumena, Algoritam FLOP, Algoritam SIMPLE, Brzina konvergencije, Nepomaknuta mreža, Nestrukturirana mreža

## SUMMARY

### A New Pressure-Velocity Coupling Algorithm

A finite volume method for solving Navier-Stokes equations in cases of laminar incompressible flows was developed. The method is based on a new-proposed pressure-velocity coupling algorithm. The fundamental difference of the new algorithm, compared to the most frequently used SIMPLE algorithm, is that in the new algorithm, the continuity equation is satisfied in each iteration. Within the new algorithm, the final solution is approached by correcting the cell face mass flux until the pressure gradient field becomes irrotational. The new algorithm (implemented in a in-house computer code) and the SIMPLE algorithm (implemented in the commercial software package, FLUENT) are compared in terms of convergence rate in few typical cases of laminar flow ranging from low to high Reynolds number, and in cases of natural convection covering the range from low to high Rayleigh number. In accordance with the obtained results, it is concluded that in the cases of inviscid and viscous flow: (1) The convergence rate of the new algorithm is significantly higher, and the user need not to prescribe pressure and velocity under-relaxation factors on which this rate would depend, as is the case with the SIMPLE algorithm; (2) The convergence rate of the new algorithm is practically independent on mesh density (mesh size), in contrast to the convergence rate of the SIMPLE algorithm, which decreases with increasing mesh density. Rate of convergence of the new algorithm slightly decreases with increasing complexity of flow pattern (the appearance of vortices and zones of flow separation) and with applying a higher order differencing scheme (due to deferred correction approach). Here, when applying the higher order scheme, the convergence rate increases with increasing mesh density; (3) The new algorithm shows better efficiency than SIMPLE, regardless to possibly suboptimal coding of the new algorithm when compared to the SIMPLE algorithm, professionally coded within the FLUENT software package.

In cases of natural convection the number of iterations required to achieve the prescribed solution accuracy is greater with respect to the cases of pure inviscid and laminar flows, due to partially explicit treatment of the buoyancy force. Here, in order to increase the convergence rate of the new algorithm, the equations for the mass flux and temperature corrections should be treated in a coupled manner. The number of iterations required in new algorithm increases with the Rayleigh number, but here also, throughout the whole range of Rayleigh number, the new algorithm shows better performance than the SIMPLE algorithm.

The new algorithm results in a linear system with less unknowns, but with a denser matrix than in the case of SIMPLE algorithm, thus it is more memory demanding. The drawback of the new algorithm is that this matrix does not possess the properties of the well known M-matrix, as in the case of the SIMPLE algorithm, which requires additional research in finding of an efficient iterative solver for such type of matrix.

#### **Key words:**

Computational Fluid Dynamics, Finite Volume Method, FLOP Algorithm, SIMPLE Algorithm, Convergence Rate, Collocated Grid, Unstructured Grid

## POPIS VAŽNIJIH OZNAKA

$a_C$	[kg/s]	centralni koeficijent u diskretiziranoj općoj konvekcijsko-difuzijskoj jednažbi
$a_N$	[kg/s]	koeficijent sheme diferencije, izvan-dijagonalni koeficijent u diskretiziranoj općoj konvekcijsko-difuzijskoj jednažbi
$b$	[-]	slobodni član u diskretiziranoj općoj konvekcijsko-difuzijskoj jednažbi
$c, c_v$	[J/(kg·K)]	specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu
$\overline{CN}$	[m]	spojnica između težišta dvaju susjednih konačnih volumena
$f_i$	[m/s <sup>2</sup> ]	komponente vektora specifične masene sile
$f_R$	[-]	funkcija u Robinovom rubnom uvjetu
$F$	[kg/s]	maseni protok kroz stranicu konačnog volumena, jačina konvekcije
$\Delta F_L$	[kg/s]	konzervativna korekcija masenog protoka po petlji
$D$	[kg/s]	jačina difuzije
$ic$	[-]	globalni indeks vrha mreže konačnih volumena
$if$	[-]	globalni indeks stranice
$il$	[-]	globalni indeks petlje
$iv$	[-]	globalni indeks konačnog volumena
$iter$	[-]	broj iteracije iterativnog postupka
$J$	[-]	konvekcijsko-difuzijski protok fizikalne veličine kroz stranicu konačnog volumena
$nb_{iv}$	[-]	broj volumena susjednih volumenu $iv$
$nc$	[-]	broj vrhova mreže konačnih volumena
$nf$	[-]	broj stranica
$nl$	[-]	broj petlji
$ns_{il}$	[-]	broj segmenata, volumena i stranica u petlji $il$
$nv$	[-]	broj konačnih volumena
$n_i$	[1]	komponente vektora normale površine

$p$	[N/m <sup>2</sup> ]	tlak
$\Delta p$	[N/m <sup>2</sup> ]	pad tlaka u petlji
$P$	[1]	lokalni Pecletov broj
$Pr$	[1]	Prandtlov broj
$Re$	[1]	Reynoldsov broj
$Ra$	[1]	Rayleighov broj
$Q_\phi$	[-]	izvorski član pripadne veličine $\Phi$
$r_m$	[1]	rezidual jednadžbe kontinuiteta u FLOP algoritmu
$r_{\Delta p}$	[1]	rezidual pada tlaka u petljama u FLOP algoritmu
$r_p$	[1]	rezidual jednadžbe kontinuiteta u SIMPLE algoritmu
$r_u$	[1]	rezidual $v_1$ komponente količine gibanja u SIMPLE algoritmu
$r_v$	[1]	rezidual $v_2$ komponente količine gibanja u SIMPLE algoritmu
$r_{\Delta v_{rel}}$	[1]	srednja relativna pogreška brzine, vlastita srednja relativna razlika brzine
$r_{\Delta v_{rel}1}$	[1]	srednja relativna razlika brzine
$R$	[J/(kg·K)]	plinska konstanta
$sfv_{iv}^{if}$	[1]	operator veze između konačnih volumena i stranica
$sfl_{il}^{if}$	[1]	operator veze između petlji i stranica
$S$	[m <sup>2</sup> ]	kontrolna površina globalnog kontrolnog volumena, ploha, ploština
$\Delta S$	[m <sup>2</sup> ]	ploština stranice konačnog volumena
$t$	[s]	vremenska koordinata
$t_{rac}$	[s]	računalno vrijeme provedbe iterativnog postupka
$T$	[K]	termodinamička temperatura
$x_i$	[m]	komponente vektora položaja ( $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$ )
$v_i$	[m/s]	komponente vektora brzine ( $u \equiv v_1, v \equiv v_2, w \equiv v_3$ )
$\Delta v_{rel}$	[1]	relativna pogreška polja brzine, vlastita relativna razlika polja brzine
$\Delta v_{rel}1$	[1]	relativna razlika polja brzine
$V$	[m <sup>3</sup> ]	globalni kontrolni volumen, volumen, obujam
$\Delta V$	[m <sup>3</sup> ]	obujam konačnog volumena

$\alpha_\Phi$	[1]	podrelaksacijski faktor za veličinu $\Phi$
$\alpha_R$	[-]	koeficijent linearne kombinacije u Robinovom rubnom uvjetu
$\beta$	[1/K]	koeficijent izobarnog prostornog termičkog rastezanja
$\beta_R$	[-]	koeficijent linearne kombinacije u Robinovom rubnom uvjetu
$\varepsilon_{ijk}$	[1]	permutirajući tenzor
$\delta_{ij}$	[1]	Kroneckerov operator
$\phi$	[-]	fizikalna veličina
$\Phi$	[-]	masena gustoća fizikalne veličine
$\Gamma$	[kg/(m·s)]	opći koeficijent difuzije
$\eta_i$	[m]	pomoćni vektor, pripadan segmentu petlje
$\lambda$	[W/(m·K)]	koeficijent toplinske provodnosti
$\mu$	[Pa·s]	koeficijent dinamičke viskoznosti
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća
$\tau$	[s]	parametar pseudo-vremena u FLOP algoritmu

## POPIS SLIKA

Slika 3.1	Uz postupak određivanja geometrijskih značajki konačnih volumena i stranica .....	25
Slika 3.2	Detalj dvodimenzijske mreže konačnih volumena .....	28
Slika 3.3	Uz sheme diferencije .....	33
Slika 3.4	Uz postupak korekcije za neortogonalnost .....	36
Slika 3.5	Uz postupak ugradnje rubnih uvjeta .....	42
Slika 3.6	Ovisnost predznaka dodatka dijagonalnom koeficijentu o Pecletovom broju: a) za EDSI shemu b) za EDS shemu. ....	46
Slika 4.1	Dio kartezijske mreže (lijevo s pomaknutim, a desno nepomaknutim čvorovima).....	52
Slika 4.2	Veza između brzine u težištu i masenih protoka kroz stranice konačnog volumena .....	62
Slika 4.3	Uz numeričku formulaciju uvjeta nulte cirkulacije polja gradijenta tlaka..	64
Slika 4.4	Formiranje elementarnih petlji u globalnom kontrolnom volumenu.....	66
Slika 4.5	Konzervativna korekcija masenih protoka .....	68
Slika 4.6	Uz postupak formiranja koeficijenata matrice sustava za određivanje konzervativne korekcije protoka.....	75
Slika 4.7	Usporedni prikaz algoritama SIMPLE i FLOP.....	92
Slika 5.1	Primjer 1. a) diskretizacija područja proračuna, za mrežu M1-3600 konačnih volumena; b) rješenje: strujnice u polju apsolutne vrijednosti brzine .....	99
Slika 5.2	Primjer 1. Konvergencija rješenja SIMPLE algoritma prema rezidualima: a) jednačbe kontinuiteta, b) količine gibanja .....	100
Slika 5.3	Primjer 1. Konvergencija rješenja prema srednjoj relativnoj pogrešci brzine: a) SIMPLE; b) FLOP .....	107
Slika 5.4	Primjer 1. Usporedba polja relativne pogreške brzine u postotcima: a), b), c) –SIMPLE; d), e), f) –FLOP .....	110
Slika 5.5	Primjer 1. Polje tlaka: a) i usporedba relativne pogreške polja tlaka u postotcima: b)- SIMPLE; c), d)-FLOP .....	111
Slika 5.6	Primjer 2. Analitičko rješenje: a) strujnice u polju apsolutne vrijednosti brzine; b) strujnice u polju tlaka .....	113
Slika 5.7	Primjer 2. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP.....	114

Slika 5.8	Primjer 2. Konvergencija rješenja s obzirom na srednju relativnu pogrešku brzine: a) SIMPLE; b) FLOP .....	114
Slika 5.9	Primjer 2. Usporedba polja relativne pogreške brzine za FLOP algoritam u postotcima: a), b) nakon rješavanja jednadžbe kontinuiteta; c), d) nakon prve korekcije protoka .....	116
Slika 5.10	Primjer 2. Usporedba polja relativne pogreške brzine u postotcima: a), b), c) –SIMPLE; d), e), f) –FLOP .....	117
Slika 5.11	Primjer 3. Rješenje prema FLOP algoritmu: a) strujnice u polju apsolutne vrijednosti brzine; b) strujnice u polju tlaka .....	121
Slika 5.12	Primjer 3. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP .....	121
Slika 5.13	Primjer 3. Konvergencija rješenja prema vlastitoj srednjoj relativnoj razlici brzine i srednjoj relativnoj razlici brzine: a) SIMPLE; b) FLOP .....	123
Slika 5.14	Primjer 3. Polja relativne razlike brzine u postotcima za SIMPLE algoritam: a), b) -vlastita relativna razlika; d), e), f) -relativna razlika; c) strujnice u polju relativne razlike .....	125
Slika 5.15	Primjer 3. Razlika rješenja za SIMPLE algoritam na mreži M3, iskazana u postotcima: a) polje relativne razlike brzine; b) polje relativne razlike tlaka .....	127
Slika 5.16	Primjer 4. Rješenje prema FLOP algoritmu dano strujnicama i poljima apsolutne vrijednosti brzine i tlaka: a), b) i c) polje brzine na mrežama M1, M2 i M3; d) polje tlaka na mreži M3 .....	130
Slika 5.17	Primjer 4. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP .....	130
Slika 5.18	Primjer 4. Konvergencija rješenja prema vlastitoj srednjoj relativnoj razlici brzine i srednjoj relativnoj razlici brzine: a) SIMPLE; b) FLOP .....	132
Slika 5.19	Primjer 4. Relativna razlika polja brzine i tlaka za SIMPLE algoritam, u postotcima: a), b) na mreži M1; c), d) na mreži M3 .....	133
Slika 5.20	Primjer 5. Rješenje prema FLOP algoritmu dano strujnicama i poljima apsolutne vrijednosti brzine i tlaka: a), b) i c) polje brzine na mrežama M1, M2 i M3; d) polje tlaka na mreži M3 .....	135
Slika 5.21	Primjer 5. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP .....	136
Slika 5.22	Primjer 5. Konvergencija rješenja prema vlastitoj srednjoj relativnoj razlici brzine i srednjoj relativnoj razlici brzine: a) SIMPLE; b) FLOP .....	136
Slika 5.23	Primjer 5. Relativne razlike za SIMPLE algoritam, u postotcima: a) polja brzine na mreži M1; b), d) polja brzine na mreži M3; c) polja tlaka na mreži M3 .....	138

Slika 5.24	Primjer 5. Usporedbe profila brzine dobivenih FLOP i SIMPLE algoritmima uz primjenu EDS sheme na mreži M3 s rješenjem drugih autora [17] i relativna odstupanja u postotcima: a) u komponenta i njeno odstupanje duž linije $x=0.5$ c) v komponenta i njeno odstupanje duž linije $y=0.5$ ; b), d) uvećani prikazi odstupanja i razlike odstupanja .....	141
Slika 5.25	Primjer 5. Prikaz relativne razlike polja brzine za slučaj odabira referentnog polja proizašlog primjenom FLOP algoritma i EDSI sheme diferencije: a) Relativna razlika polja brzine za SIMPLE (EDS); b) Relativna razlika polja brzine za FLOP (EDS); c), d) Prikazi razlike $\Delta e$ .....	143
Slika 5.26	Primjer 5. Prikaz rješenja za slučaj primjene FLOP algoritma uz primjenu EDSI sheme diferencije: a), b) i c) polje brzine na mrežama M1, M2 i M3; d) polje tlaka na mreži M3 .....	146
Slika 5.27	Primjer 5. Usporedbe profila brzine dobivenih FLOP algoritmom uz primjenu EDSI sheme diferencije s rješenjem drugih autora [17] i relativna odstupanja u postotcima: a), b) u komponenta i odstupanje $e_u$ duž linije $x=0.5$ c), d) v komponenta i odstupanje $e_v$ duž linije $y=0.5$ .....	147
Slika 5.28	Primjer 5. Konvergencija rješenja FLOP algoritma uz EDSI shemu diferencije prema rezidualima i vlastitoj srednjoj relativnoj razlici brzine .....	148
Slika 5.29	Primjer 6 Područje proračuna i diskretizacija mrežom M1(4000 k.v.) ....	149
Slika 5.30	Primjer 6 Detalj rješenja dobivenog primjenom FLOP algoritma na mreži M2 (16000 k.v.): a) polje brzine; b) polje tlaka.....	150
Slika 5.31	Primjer 6 Detalj rješenja dobivenog primjenom SIMPLE algoritma na mreži M2 (16000 k.v.): a) polje brzine; b) polje tlaka.....	151
Slika 5.32	Primjer 6. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP .....	151
Slika 5.33	Primjer 6. Konvergencija rješenja prema $r_{\Delta v rel}$ i $r_{\Delta v rel 1}$ : a) SIMPLE; b) FLOP .....	152
Slika 5.34	Primjer 7. Područje proračuna i geometrijska mreža M1 (60x60 k.v.) ....	153
Slika 5.35	Primjer 7. Rješenje dobiveno primjenom FLOP algoritma na mreži M2 (120x120 k.v.): a) polje brzine; b) polje tlaka .....	154
Slika 5.36	Primjer 7. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP .....	155
Slika 5.37	Primjer 7. Konvergencija rješenja prema $r_{\Delta v rel}$ i $r_{\Delta v rel 1}$ : a) SIMPLE; b) FLOP .....	155
Slika 5.38	Primjer 8. Rješenje prema algoritmu FLOP i prikaz relativne razlike polja brzine u postotcima za algoritam SIMPLE: a) polje brzine; b) polje tlaka; c) polje temperature; d) relativna razlika polja brzine za algoritam SIMPLE .....	159
Slika 5.39	Primjer 8. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP .....	160



Slika 5.40	Primjer 8. Konvergencija rješenja prema srednjim relativnim razlikama brzine $r_{\Delta v \text{ rel } 1}$ i vlastitim $r_{\Delta v \text{ rel}}$ : a) SIMPLE; b) FLOP .....	161
Slika 5.41	Primjer 8. Diskretizacija područja proračuna u primjerima s višom vrijednosti Rayleighova broja: a) mreža M1 (60x60 k.v); b) mreža M2 (121x121 k.v).....	162
Slika 5.42	Primjer 8. Rješenje prema algoritmu FLOP za slučaj Rayleighova broja $10^6$ : a), b) polje brzine; c) polje tlaka; d) polje temperature .....	163
Slika 5.43	Primjer 8. Konvergencija rješenja prema rezidualima, za slučaj Rayleighova broja $10^6$ : a) SIMPLE, $\alpha_{uv} = 0.7$ , $\alpha_p = 0.3$ , $\alpha_T = 0.906$ ; b) FLOP, $\tau \leq 1$ , $\alpha_T = 0.99$ .....	165
Slika 5.44	Primjer 8. Rješenje prema algoritmu FLOP za slučaj Rayleighova broja $10^8$ : a), b) polje brzine; c) polje tlaka; d) polje temperature .....	166
Slika 5.45	Primjer 8. Konvergencija rješenja FLOP algoritma prema rezidualima, za slučaj Rayleighova broja $10^8$ (uz $\tau \leq 1$ ).....	166
Slika 5.46	Primjer 9. Prikaz područja proračuna i diskretizacije: a) ravnomjernom mrežom M1 (20x20x20 k.v.) sa 8000 heksaedarskih konačnih volumena b) neravnomjernom mrežom M2 (19477 k.v) konačnih volumena različitih oblika: heksaedri, tetraedri i piramide s četverostranom bazom .....	167
Slika 5.47	Primjer 9. Slučaj strujanja pri Reynoldsovom broju $Re = 100$ : a) rješenje prema FLOP algoritmu, na mreži M2 (nakon 8. iteracije); b) prikaz relativne razlike polja brzine u postotcima za rješenje dobiveno SIMPLE algoritmom, na mreži M2, (nakon 600. iteracije).....	169
Slika 5.48	Primjer 9. Prikaz povijesti konvergencije rješenja putem srednje relativne i vlastite srednje relativne razlike polja brzine za: a) SIMPLE i b) FLOP algoritam, pri $Re = 1$ ; c) SIMPLE i d) FLOP algoritam, pri $Re = 100$ ; e) SIMPLE i f) FLOP algoritam, pri $Re = 5000$ .....	170
Slika 5.49	Omjer potrebnog računalnog vremena SIMPLE i FLOP algoritma za postizanje rješenja propisane točnosti u odabranim primjerima.....	173

## POPIS TABLICA

Tablica 2.1	Sadržaji veličina konvekcijsko-difuzijskih jednadžbi matematičkih modela nestlačivog laminarnog strujanja i slobodne konvekcije .....	21
Tablica 3.1	Sadržaj izraza za konvekcijsko-difuzijski protok kroz rubnu stranicu .....	44
Tablica 5.1	Primjer 1. Konvergencija rješenja FLOP algoritma .....	102
Tablica 5.2	Primjer 1 Utrošak računalnog vremena u vlastitom programu za slučaj mreže M3 – 57600 konačnih volumena.....	103
Tablica 5.3	Primjer 3. Utrošak računalnog vremena $t_{rac}$ [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v rel} < 10^{-4}$ ) .....	128
Tablica 5.4	Primjer 4. Utrošak računalnog vremena $t_{rac}$ [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v rel} < 10^{-4}$ ) .....	133
Tablica 5.5	Primjer 5. Utrošak računalnog vremena $t_{rac}$ [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v rel} < 10^{-4}$ ) .....	138
Tablica 5.6	Primjer 6. Utrošak računalnog vremena $t_{rac}$ [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v rel} < 10^{-4}$ ) .....	152
Tablica 5.7	Primjer 7. Usporedba udaljenosti točke nalijeganja strujanja prema rezultatima SIMPLE i FLOP algoritma na mrežama M1 i M2 .....	154
Tablica 5.8	Primjer 7. Utrošak računalnog vremena $t_{rac}$ [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v rel} < 10^{-4}$ ) .....	156
Tablica 5.9	Pregled potrebnog broja iteracija – iter i utrošenog računalnog vremena – $t_{rac}$ pri proračunu pojedinih primjera, do postizanja rješenja propisane točnosti. S – SIMPLE; F –FLOP. ....	172

# 1 UVOD

Mehanika fluida ima svoju primjenu u proučavanju onih fizikalnih procesa u kojima se pojavljuje strujanje fluida. Teorijski pristup rješavanju problema strujanja temelji se na uspostavi matematičkog modela strujanja danog sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Osnovne jednadžbe sustava koje opisuju strujanje fluida su nelinearne, i njihova analitička rješenja u zatvorenom obliku su malobrojna i ograničena na jednostavne probleme. Zbog toga se u prošlosti primjena mehanike fluida u znanstvenoj i tehničkoj praksi uglavnom oslanjala na metode eksperimentalne mehanike fluida dok se proračunska dinamika fluida oslanjala na uspostavu pojednostavljenih, lakše rješivih matematičkih modela iz teorijske mehanike fluida uz oslonac na empirijska saznanja eksperimentalne mehanike fluida. Nagli razvoj računala u relativno bliskoj prošlosti omogućio je njenu primjenu kroz numeričko rješavanje cjelovitog sustava jednadžbi teorijske mehanike fluida, te se razvila nova grana mehanike fluida–Računalna dinamika fluida (RDF, eng.-Computational Fluid Dynamics: CFD).

Razvoj računalne dinamike fluida danas se očituje u komercijalnim (FLUENT, STAR-CD, FIRE, DLR – TAU itd.) i slobodno dostupnim (OpenFOAM, SSIM, SLFCFD itd.) računalnim programskim paketima koji su izvedeni na profesionalnoj razini. Veliki broj znanstvenih istraživanja u području računalne dinamike fluida i srodnim područjima znanosti, doveo je do velikog obujma proračunskih modela koji omogućuju numeričko rješavanje širokog raspona fizikalnih pojava. Većina današnjih programskih paketa modularne je strukture, što omogućuje jednostavnu primjenu u znanstvenim istraživanjima npr. uključivanjem novih shema diskretizacije, modela turbulencije ili modela izgaranja u postojeći programski paket, dok algoritam rješavanja polja brzine i tlaka, kao temeljni dio svakog proračunskog postupka ostaje praktično nedostupan. Obzirom da ovaj rad predlaže uvođenje potpuno novog algoritma za povezivanje polja brzine i tlaka pri rješavanju jednadžbi strujanja, što predstavlja veći iskorak, cjelokupni proračunski postupak realiziran je u sklopu vlastitog računalnog programa. Ovime je povećan obujam rada potrebnog za dovršenje istraživanja, zbog potrebe vlastite izrade dijelova proračunskog postupka, koji nisu predmet ovog rada, ali je time dobivena

potpuna sloboda pri implementaciji računalnog postupka. Obzirom da razvoj računalnog programa usporedivog po mogućnostima s komercijalnim nije predmet ovog rada, u realizaciji se odustalo od ugradnje modela turbulencije, a pažnja je posvećena samom novom algoritmu povezivanja polja brzine i tlaka pri rješavanju neviskoznog i laminarnog strujanja fluida, što predstavlja glavni predmet ovog rada.

## 1.1 Motivacija

Brzim razvojem računala, istraživanja u području RDF su u nedavnoj prošlosti bila uglavnom usmjerena na proširenje područja njene primjene na fizikalno i numerički zahtjevnije probleme, dok je razvoj algoritama za povezivanje brzine i tlaka kao temelja numeričke metode ostao zapostavljen. Današnje metode računalne dinamike fluida uglavnom se temelje na metodi konačnih volumena uz primjenu algoritma SIMPLE [37] ili njegovih podvarijanti i to na nepomaknutim mrežama (gdje se sve nepoznanice računaju u istim čvorovima mreže, eng. - collocated grid). Ovaj algoritam definiran je sedamdesetih godina i to izvorno na pomaknutim strukturiranim kartezijskim mrežama (gdje su čvorovi u kojima se računa brzina pomaknuti u odnosu na čvorove za tlak, eng. - staggered grid), na kojima je on konzistentan. S obzirom na potrebu korištenja nestrukturiranih mreža, koje pružaju fleksibilnost u diskretizaciji složenih prostornih područja proračuna, pojavila se potreba primjene algoritma na nepomaknutim mrežama. Rhie i Chow [41], predložili su interpolaciju brzine, koja je omogućila formulaciju algoritma SIMPLE i na nepomaknutim mrežama. Danas je poznato da ta interpolacija, koja se najčešće koristi u računalnoj dinamici fluida nije konzistentna i da unosi dodatnu netočnost u rješenje, dok spomenuti algoritmi zahtijevaju primjenu podrelaksacijskih faktora. Brzina konvergencije cjelokupnog postupka, odnosno trajanje proračuna znatno ovisi o izboru vrijednosti ovih faktora tj. iskustvu korisnika.

Motiv ovog rada je definirati novi algoritam za povezivanje polja brzine i tlaka s ciljem izbjegavanja nekonzistentnih interpolacija i smanjivanja broja podrelaksacijskih faktora, tako da se dobije učinkovitiji i za korisnika jednostavniji algoritam za rješavanje Navier Stokesovih jednadžbi.

## 1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja

Prvi objavljeni algoritam za povezivanje polja brzine i tlaka koji je koristio primitivne varijable (komponente brzine, tlak i temperatura), pojavio se 1965. godine. Objavili su ga autori Harlow i Welch [25] i nazvali „Marker and Cell Method“ (MAC). Kombinacijom jednadžbe količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta izvedena je Poissonova jednadžba za tlak koja zamjenjuje jednadžbu kontinuiteta. Metoda je primijenjena na pomaknutoj dvodimenzijskoj mreži, uz primjenu eksplicitne Eulerove metode vremenske integracije koja je prvog reda točnosti, no kasnije je primjenjivana u metodama višeg reda točnosti. Glavni nedostaci ove metode su potreba za točnim rješavanjem Poissonove jednadžbe za tlak (u kontekstu ondašnjih mogućnosti računala), njena primjena na pomaknutim mrežama, te problemi pri zadavanju rubnih uvjeta za tlak.

FSM (eng.- Fractional Step Method) [61], [33] i [53] metoda povezuje polje brzine i polje tlaka najčešće na slijedeći način: U prvom se koraku izračuna pomoćno polje brzine iz jednadžbe količine gibanja u kojoj se gradijent tlaka izostavlja ili se uzimaju vrijednosti gradijenta tlaka iz prethodne iteracije. U drugom se koraku računa polje tlaka pomoću kojeg se brzine korigiraju prema jednadžbi kontinuiteta. FSM je prvotno razvijena za primjenu na pomaknutim mrežama, no kasnije je proširena za primjenu i na nepomaknutim mrežama [14]. Prve primjene ove metode imale su poteškoća vezanih uz zadavanje rubnih uvjeta između spomenuta dva koraka što je riješeno generalizacijom metode [42] unutar koje se mogu primijeniti fizikalni rubni uvjeti. Osim ovog, učinkovitost algoritma temeljenog na ovoj metodi uvelike ovisi o rješavaču za Poissonovu jednadžbu.

Najočitiji je način povezivanja brzine i tlaka putem gustoće. Ona se eksplicitno pojavljuje u jednadžbi kontinuiteta dok se tlak može dobiti iz jednadžbe stanja plina. Međutim u slabo stlačivim i nestlačivim strujanjima potrebno je uvesti dodatni parametar pseudo-stlačivosti [6]. On se odabire iskustveno i jako utječe na brzinu

rješavanja i konvergenciju metode, a može uzrokovati i nefizikalna rješenja. U slučajevima gdje je vrijeme širenja tlačnih poremećaja bitno, poput interakcije graničnog sloja s promjenama tlaka, ovaj pristup može uzrokovati i izostanak konvergencije prema stacionarnom rješenju [30]. Proračuni nestacionarnih strujanja fluida u ovakvom pristupu zahtijevaju istitravanje pseudo-tlačnih poremećaja unutar svakog vremenskog koraka što čini proračun vrlo dugotrajnim i zahtjevnim sa stajališta računalnih resursa.

Zamisao da se algoritam ne opterećuje točnim izračunom tlaka u svakoj iteraciji kao što je to slučaj u MAC metodi vodila je k novom algoritmu koji bi rješavao pojednostavljenu jednadžbu za tlak. Najčešća metoda koja rješava pojednostavljenu jednadžbu za tlak jest SIMPLE (eng.: Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations).

SIMPLE algoritam (Patankar i Spalding 1972 [37]) koristi pojednostavljenu jednadžbu za korekciju tlaka koja je dobivena uvrštavanjem pojednostavljene veze između korekcije tlaka i korekcije brzine u jednadžbu kontinuiteta. U pojednostavljenoj vezi je zanemaren utjecaj korekcija brzina u okolnim čvorovima na korekciju brzine u centralnom čvoru. Ovo zanemarivanje ne utječe na konačno rješenje, ali utječe na brzinu konvergencije numeričkog postupka. Uz navedeno, ovakav postupak uzrokuje precjenjivanje potrebne korekcije tlaka te je u algoritam nužno uvesti dodatni podrelaksacijski faktor za tlak kojim se sprječava divergencija iterativnog postupka, ali se njime i utječe na brzinu konvergencije. Optimalne vrijednosti podrelaksacijskih faktora za tlak i brzinu ovise o prirodi promatranog problema i o geometrijskoj mreži te se zbog toga mijenjaju od slučaja do slučaja, pa njihovo određivanje iziskuje iskustvo korisnika algoritma.

Patankar [39], je predložio algoritam SIMPLER (eng.: SIMPLE Revised,) u kojem se tlak određuje rješavanjem jednadžbe za tlak koja je izvedena uvrštavanjem diskretiziranih jednadžbi količine gibanja u jednadžbu kontinuiteta. U ovom algoritmu se također računaju korekcije tlaka koje služe za korekciju polja brzine (u cilju zadovoljavanja jednadžbe kontinuiteta), dok se polje tlaka ne korigira. Samim time izostaje i potreba za faktorom podrelaksacije tlaka, te postupak u pravilu brže

konvergira. Algoritam je u pravilu primjenjiv na ortogonalnim mrežama, što je prepreka za njegovu primjenu na nestrukturiranim mrežama, koje su uglavnom neortogonalne. Ovaj je algoritam po prvi puta primijenjen na nestrukturiranoj lokalno ortogonalnoj mreži [16], koja je prethodno posebno razvijena za primjenu tog algoritma [15]. Pokazalo se da na takvim mrežama SIMPLER algoritam puno brže konvergira od SIMPLE algoritma.

U algoritmu SIMPLEC (SIMPLE Consistent), Doormaal 1984 [12], se modifikacijom koeficijenta u pojednostavljenoj vezi korekcije brzine i tlaka, djelomično kompenzira efekt zanemarivanja utjecaja korekcije brzine iz susjednih čvorova na korekciju brzine u centralnom čvoru. U nekim situacijama ovaj algoritam brže konvergira od algoritma SIMPLE, no njegova brzina konvergencije jednako kao i kod algoritma SIMPLE uvelike ovisi o zadanim vrijednostima podrelaksacijskih faktora. Postoji i kasnija inačica tog algoritma [45], a ovaj se algoritam nudi kao jedna od opcija i u računalnom paketu FLUENT.

U algoritmu SIMPLEX, Doormaal, Raithby 1985 [11] se, rješavanjem algebarskih jednadžbi za koeficijente u jednadžbi za korekciju tlaka također uzima u obzir efekt zanemarivanja utjecaja korekcije brzina u okolnim čvorovima do određenog stupnja. Algoritam nije naišao na širu primjenu, jer ima sve nedostatke kao i prethodna dva.

U PISO algoritmu Issa [27], korekcija tlaka se vrši uzastopno dva ili više puta unutar jedne ukupne iteracije, pri tome bez promjene koeficijenata jednadžbe količine gibanja. Ova metoda najbolja svojstva pokazuje u primjeni na nestacionarna strujanja s finom vremenskom diskretizacijom, gdje se i polje brzine unutar koraka vremenske diskretizacije manje mijenja.

Sve spomenute inačice SIMPLE algoritma pri izravnoj primjeni na nepomaknutim mrežama zahtijevaju diskretizaciju jednadžbi količine gibanja i kontinuiteta na istom konačnom volumenu. Tlak je u jednadžbama količine gibanja dan u obliku gradijenta, te diskretizacija polja tlaka na konačnom volumenu nepomaknute mreže dovodi do jednadžbe koja ne sadrži vrijednosti tlaka iz pripadnog volumena, već samo vrijednosti tlaka u njemu susjednim volumenima. Diskretizacija jednadžbe kontinuiteta, u kojoj se



polje brzine pojavljuje u obliku divergencije, dovodi do slične pojave za vrijednosti brzina. Takva diskretizacija dovodi do sustava jednadžbi koji se u stvari sastoji od dva međusobno nespregnuta sustava, što dovodi do nefizikalnih rješenja (tzv. cik-cak rješenje) za brzinu i tlak. Rješenje ovog problema izvorno su predložili Rhie i Chow 1983 [41], uvođenjem takve interpolacije brzine na stranice konačnih volumena u kojoj se koristi razlika tlaka iz dva stranici susjedna čvora, čime se sprječava pojava cik-cak rješenja. Zamisao je da se standardno interpoliranoj brzini dodaje razlika usmjerene derivacije tlaka dobivene interpolacijom iz gradijenata tlaka izračunatih u čvorovima mreže i derivacije izračunate iz razlike tlaka stranici susjednih čvorova. Ovu se razliku množi odgovarajućim dimenzijskim faktorom, kako bi se dobila dimenzija brzine. Pri linearnoj raspodjeli tlaka ova razlika bi bila jednaka nuli, što ne bi utjecalo na interpolaciju brzine, a pojava cik-cak rješenja bi bila spriječena. U realnim situacijama ona uvijek postoji, te na grubljim mrežama (odnosno pri značajnoj prostornoj promjeni gradijenta tlaka) može dovesti do netočnih protoka kroz stranice što narušava točnost svih računatih veličina u zahvaćenim volumenima [62], [63]. Nažalost, u okviru SIMPLE algoritama ne postoji drugo rješenje, te se danas rješenja ovog oblika primjenjuju u svim inačicama SIMPLE algoritama na nepomaknutim mrežama [9], [36], [34], [32], [31], [28], [5], [3], [52], [51], [10].

Nedavna istraživanja problema povezivanja polja brzine i tlaka vezana su uz poboljšanja i modifikacije postojećih algoritama. Primjerice, u jednom od posljednjih istraživanja, u radu [9] oslanjajući se na mogućnosti današnjih računala, posebno memorijske resurse te moderne višemrežne (eng.: Multigrid) rješavače razvijen je algoritam koji istodobno rješava i jednadžbu kontinuiteta i jednadžbe količine gibanja (eng.: coupled algorithm), dok ostale jednadžbe rješava sekvencijalno. U tom su radu korištene metode na kojima se temelji SIMPLE algoritam uz Rhie-Chow [41] interpolaciju, te jednostavne linearne interpolacije za brzine i tlakove na stranicama konačnih volumena. Time je dobivena dijagonalno dominantna matrica za jednadžbu kontinuiteta i količine gibanja. Svojstva algoritma uspoređena su sa sekvencijalnim algoritmom (SIMPLE) na odabranim slučajevima dvodimenzijskih laminarnih strujanja pri niskom Reynoldsovom broju. Prema autorima, u ovakvim uvjetima, algoritam završava proračun u znatno manjem broju iteracija u odnosu na sekvencijalni algoritam

i u slučajevima gdje nema povratnog strujanja na izlaznim granicama, broj iteracija gotovo ne ovisi o veličini mreže.

Može se zaključiti da sve inačice algoritma SIMPLE koriste tlak i brzinu kao varijable nad kojima se algoritam izvodi i na nepomaknutim mrežama koriste nekonzistentne interpolacijske veze. Također, svi algoritmi sekvencijalnog tipa, poput algoritma SIMPLE, nužno trebaju podrelaksacijske faktore. Potreba za podrelaksacijskim faktorima djelomično prestaje prelaskom na algoritam u kojem se istodobno rješavaju sve jednačbe (eng. Coupled algorithm), a koji iziskuje znatno veće računalne resurse. Dosadašnja istraživanja nisu dovela do potpunog izbjegavanja spomenutih dvaju problema.

S obzirom da se danas algoritam SIMPLE najčešće koristi u komercijalnim računalnim paketima, te je opisan u mnogim udžbenicima iz računalne dinamike fluida [1], [59], [7], [18], [38], [26], [19], [20], on će se u ovom radu koristiti kao referentni za usporedbu s novopredloženim algoritmom.

### **1.3 Hipoteza rada**

Poznata je činjenica da su pomaknute mreže prirodan odabir u algoritmima za rješavanje Navier Stokesovih jednadžbi, jer ne zahtijevaju uvođenje nekonzistentnih interpolacija za sprečavanje pojave cik-cak raspodjele tlaka. Ovaj rad temelji se na hipotezi da se i na nepomaknutim mrežama (računanje brzina i tlaka u istim čvorovima), može zadržati prirodnost algoritma za povezivanje polja brzine i tlaka, izborom protoka kroz stranice konačnih volumena (što je analogno brzinama u slučaju pomaknutih mreža) kao radne varijable u algoritmu. Očekuje se da će novi algoritam sačuvati dobre odlike algoritama na pomaknutim mrežama i biti bolji od postojećih algoritama na nepomaknutim mrežama, u smislu:

- da će biti učinkovitiji sa stajališta potrebnog broja iteracija za postizanje tražene točnosti, a bit će primjenjiv u rješavanju problema u kojima se danas koriste algoritmi SIMPLE tipa;
- neće zahtijevati podrelaksacijske faktore za rješavanje jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta, što će uvelike olakšati primjenu metode konačnih volumena.

## 1.4 Pregled rada

U drugom poglavlju definirane su osnovne jednačbe dinamike fluida i konstitutivne relacije za savršeni plin. Definirana su dva modela strujanja fluida koja se rješavaju u ovom radu: (1) model laminarnog nestlačivog strujanja fluida i (2) model slabostlačivog strujanja uz pretpostavku Boussinesqove aproksimacije, kojim se opisuje problem slobodne konvekcije pri malim temperaturnim razlikama. Na kraju je pokazano da sve jednačbe definiranih matematičkih modela zadovoljavaju oblik opće konvekcijско-difuzijske jednačbe.

U trećem poglavlju je definirana metoda konačnih volumena za rješavanje opće konvekcijско-difuzijske jednačbe, na općoj nestrukturiranoj mreži. Za diskretizaciju prostora (stvaranje geometrijske mreže) usvojen je program GAMBIT, pred-procesor za komercijalni paket FLUENT. Opisani su koraci u diskretizaciji opće konvekcijско-difuzijske jednačbe metodom konačnih volumena, definirana vremenska diskretizacija jednačbi, te definirane dvije sheme diferencije, koje se temelje na lokalnom analitičkom rješenju jednodimenzijske konvekcijско-difuzijske jednačbe s konstantnim koeficijentima i konstantnim izvorskim članom. Definirana je linearizacija diskretizirane jednačbe i ugradnja tipičnih rubnih uvjeta.

U četvrtom je poglavlju opisana primjena metode konačnih volumena definirane u trećem poglavlju na sustav jednačbi koje opisuju strujanje fluida. Daju se specifičnosti pri diskretizaciji komponenti jednačbi količine gibanja, te ukazuje na problem sprezanja polja brzine i tlaka pri numeričkom rješavanju toga sustava. Opisan je algoritam SIMPLE na pomaknutoj i nepomaknutoj mreži te ukazano na probleme koji se pojavljuju na nepomaknutim mrežama. Dana je ideja novog algoritma u smislu izbora nepoznanica i načina iterativnog rješavanja sustava jednačbe kontinuiteta i jednačbe količine gibanja putem konzervativnih korekcija (koje ne narušavaju jednačbu kontinuiteta) masenih protoka kroz stranice konačnih volumena. Definiran je izraz za računanje komponenti polja brzine u težištima konačnih volumena temeljem

masenih protoka kroz stranice konačnih volumena. Opisano je formiranje sustava linearnih algebarskih jednadžbi kojima su definirane korekcije protoka, te ukazano na probleme rješavanja toga sustava jednadžbi.

U petom poglavlju uspoređuje se novopredloženi algoritam temeljem kojeg je razvijen vlastiti računalni program s algoritmom SIMPLE koji je ugrađen u komercijalni program FLUENT. Algoritmi se uspoređuju u smislu učinkovitosti, tj. brzine konvergencije (broja iteracija potrebnog za postizanje određene točnosti rješenja), i potrebnog računalnog vremena za postizanje određene točnosti, a u primjerima potencijalnog strujanja s poznatim analitičkim rješenjem komentira se utjecaj algoritama za povezivanje polja brzine i tlaka na točnost rješenja. Kod viskoznih strujanja analizira se utjecaj Reynoldsova broja, sheme diferencije višeg reda točnosti (utjecaj „deferred correction“ procedure) na brzinu konvergencije novog algoritma. Pri rješavanju modela slobodne konvekcije analizira se utjecaj Rayleighova broja na brzinu konvergencije novog algoritma.

U šestom poglavlju iznose se glavni zaključci u vezi s novopredloženim algoritmom i naznačuju smjerovi budućih istraživanja.

## 2 MATEMATIČKI MODEL STRUJANJA FLUIDA

Teorijska mehanika fluida zamjenjuje diskretnu strukturu materije kontinuumom kao kontinuiranom materijom koja je neprekidno raspodijeljena u prostoru. U smislu hipoteze kontinuuma, definira se čestica fluida (materijalna točka ili točka kontinuuma) koja zauzima infinitezimalno mali volumen  $dV$  i posjeduje infinitezimalnu masu  $dm$ , pri čemu svakoj točki prostora odgovara samo jedna točka kontinuuma i obrnuto. Hipoteza kontinuuma omogućuje da se svojstva fluida i procesi koji se odvijaju pri strujanju fluida opišu neprekinutim funkcijama prostora i vremena te omogućuje primjenu integralnog i diferencijalnog računa. U ovom se radu položaj u prostoru određuje u pravokutnom, desnom kartezijском koordinatnom sustavu putem vektora položaja  $x_i$ , dok vremenska koordinata nosi oznaku  $t$ .

### 2.1 Osnovne jednadžbe dinamike fluida

Mehanika fluida definira strujanje fluida putem osnovnih zakona očuvanja: mase, količine gibanja, momenta količine gibanja i energije, te drugog zakona termodinamike. Za slučaj nepolarnog fluida zakon momenta količine gibanja svodi se na činjenicu simetričnosti tenzora naprezanja, pa ako se simetričnost tenzora naprezanja unaprijed pretpostavi, ovaj zakon nije više potrebno uključivati u osnovni skup diferencijalnih jednadžbi. Drugim zakonom termodinamike se definira entropiju, koja se ne pojavljuje u ostalim jednadžbama, pa ju se može rješavati neovisno od preostalih jednadžbi.

U skladu s navedenim, skup osnovnih jednačbi čine zakoni očuvanja: mase, količine gibanja i energije, a koje u diferencijalnom obliku glase:

- jednačba kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

- jednačba količine gibanja

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \Sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

- energijska jednačba

$$\frac{\partial \left[ \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[ \rho v_j \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \right]}{\partial x_j} = \rho f_i v_i - \frac{\partial (p v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\Sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

U gore navedenim jednačbama  $\rho$  označuje gustoću fluida,  $v_i$  polje brzine,  $f_i$  specifičnu masenu silu,  $p$  tlak,  $\Sigma_{ji}$  simetrični tenzor viskoznih naprežanja,  $u$  specifičnu unutarnju energiju i  $q_j$  vektor gustoće toplinskog toka. Navedeni sustav od pet skalarnih jednačbi sadrži 15 nepoznatih skalarnih polja, te je u matematičkom smislu otvoren, a usklađivanje broja jednačbi s brojem nepoznanica izvodi se uz pomoć konstitutivnih relacija koje opisuju toplinska i reološka svojstva fluida.

## 2.2 Konstitutivne jednačbe

Skup jednačbi koje opisuju strujanje fluida upotpunjuje se *toplinskom jednačbom stanja* oblika:

$$\rho = \rho(T, p) \quad (2.4)$$

i kaloričkom jednačbom stanja oblika:

$$u = u(T, p), \quad (2.5)$$

gdje je  $T$  termodinamička temperatura. Za savršene plinove toplinska jednačba stanja je  $p = \rho RT$ , a kalorička  $u = c_v T$ , gdje su:  $R$  plinska konstanta i  $c_v$  specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu, konstantne veličine. Za nestlačivo strujanje kapljevine toplinska jednačba stanja svodi se na  $\rho = \text{konst.}$ , a kalorička na  $u = cT$ , gdje je  $c$  specifični toplinski kapacitet.

**Newtonov zakon viskoznosti** uspostavlja linearnu vezu između simetričnog tenzora naprezanja i simetričnog dijela tenzora gradijenta brzine - tenzora brzine deformacije. Fluidi kod kojih se ovo reološko svojstvo može definirati ovakvom, linearnom vezom, nazivaju se newtonskim fluidima. Uz pretpostavku izotropnosti fluida, i uzimajući u obzir simetričnost tenzora naprezanja, linearna veza između tenzora viskoznih naprezanja i tenzora brzine deformacije je oblika:

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left( \mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji}. \quad (2.6)$$



U izrazu (2.6)  $\mu$  označuje koeficijent viskoznosti, a  $\mu_V$  koeficijent volumenske viskoznosti fluida. Ova svojstva ovise o lokalnom termodinamičkom stanju fluida pa se za svaki fluid mogu prikazati oblikom:

$$\mu = \mu(T, p) \text{ i } \mu_V = \mu_V(T, p). \quad (2.7)$$

U matematičkim modelima koji podrazumijevaju nestlačivo strujanje fluida ( $\partial v_k / \partial x_k = 0$ ), izraz za tenzor viskoznih naprezanja glasi:

$$\Sigma_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.8)$$

**Fourierov zakon toplinske provodnosti** uspostavlja linearnu vezu između vektora površinske gustoće toplinskog toka i gradijenta skalarnog polja temperature. Za izotropne fluide veza je dana jednačbom:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (2.9)$$

Veličina  $\lambda$  je koeficijent toplinske provodnosti, a označuje svojstvo fluida koje ovisi o njegovom lokalnom termodinamičkom stanju i za određeni fluid prikazuje se oblikom:

$$\lambda = \lambda(T, p). \quad (2.10)$$

Kad se sustavu jednačbi (2.1) do (2.3) doda toplinska jednačba stanja i u njih uvrste kalorička jednačba stanja, te Newtonov zakon viskoznosti i Fourierov zakon toplinske provodnosti, dobije se zatvoreni sustav jednačbi, koji se sastoji od šest skalarnih jednačbi u kojima se pojavljuje šest skalarnih nepoznatih polja: gustoće fluida  $\rho$ , tri komponente brzine  $v_i$ , tlaka  $p$  i temperature  $T$ .

Ovaj sustav jednačbi u potpunosti određuje strujanje fluida u zadanom prostoru i vremenu, i rješava se kao problem početno rubnih vrijednosti. Rješenjem se smatra poznavanje navedenih polja fizikalnih veličina u obliku funkcija vremena i prostora, koja zadovoljavaju ove jednačbe, te početne i rubne uvjete.

Preduvjet uspješnom ishodu postupka rješavanja problema jest njegovo dobro postavljanje. Problem je dobro postavljen kada rješenje postoji, jedinstveno je i kontinuirano ovisi o zadanim početnim i rubnim uvjetima u smislu da male promjene u njihovim vrijednostima također izazivaju male promjene u rješenju unutar zadanog područja prostora. U skladu s navedenim, dobro postavljanje problema uvjetuje zadavanje početnih i rubnih uvjeta načinom koji je u skladu s matematičkom prirodom (u smislu svojstava parabolčnosti, hiperboličnosti i eliptičnosti) sustava jednadžbi pripadnog matematičkog modela.

U ovom je radu naglasak postavljen na rješavanje problema nestlačivog strujanja fluida s i bez prisustva slobodne konvekcije, pa se u nastavku definiraju modeli takvih strujanja.

### 2.3 Jednadžbe nestlačivog strujanja newtonovskog fluida

Matematički model nestlačivog strujanja newtonovskog fluida izvodi se temeljem gore prikazanih osnovnih jednadžbi dinamike fluida uz pretpostavku konstantnog polja gustoće. Uz uvedenu pretpostavku, jednadžba kontinuiteta (2.1) za ovaj model glasi:

$$\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.11)$$

odnosno:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.12)$$

Primjenom jednadžbe kontinuiteta dane izrazom (2.12) na viskozni član jednadžbe količine gibanja (2.2) ona prelazi u oblik:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right]. \quad (2.13)$$

Energijska jednadžba može se zapisati u obliku jednadžbe unutarnje energije, koja slijedi oduzimanjem jednadžbe mehaničke energije (skalarni umnožak jednadžbe količine gibanja (2.2) vektorom brzine) od energijske jednadžbe, a koja za slučaj nestlačivog strujanja glasi:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j u)}{\partial x_j} = \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (2.14)$$

Uz pretpostavku konstantne vrijednosti specifičnog toplinskog kapaciteta u intervalu očekivanog raspona temperatura, jednadžba unutarnje energije fluida može se zapisati u obliku temperaturne jednadžbe:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j T)}{\partial x_j} = \frac{1}{c} \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\lambda}{c} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (2.15)$$

Usvajanjem pretpostavke o nestlačivom strujanju fluida, sustav osnovnih jednadžbi dinamike fluida sveo se na sustav jednadžbi nestlačivog strujanja koji se sastoji od tri jednadžbe ((2.11), (2.13) i (2.15)), i u kojemu se pojavljuju samo tri nepoznata polja: vektorsko polje brzine  $v_i$ , te skalarna polja tlaka  $p$  i temperature  $T$ . Temperaturna jednadžba (2.15) označuje linearnu diferencijalnu jednadžbu za polje temperature koja je pasivna jednadžba (temperaturno polje ne pojavljuje se u preostalim jednadžbama) i može se rješavati odvojeno, nakon određivanja polja brzine.

U upravo prikazanom modelu nestlačivog strujanja, polje tlaka pojavljuje se isključivo u jednadžbi količine gibanja i to u obliku gradijenta, što znači da je polje tlaka neodređeno do na konstantu, dakle potrebno ga je definirati samo u jednoj točki. Početni uvjeti zadaju se poljem brzine i temperature. Stacionarni dio jednadžbi (2.13) i (2.15) je eliptičan, pa se rubni uvjeti za polje brzine i temperature zadaju po svim rubovima prostornog područja, kao funkcija vremena.

## 2.4 Matematički model slobodne konvekcije

Slobodna konvekcija predstavlja fizikalnu pojavu pri kojoj dolazi do strujanja fluida uslijed temperaturnih razlika između čestica jednokomponentnog fluida odnosno razlike u njihovim gustoćama i posljedično razlika u masenim silama. Brzine, koje se u slučaju takvih strujanja pojavljuju, mnogo su manjeg iznosa od brzine zvuka pripadnog fluida, pa se s obzirom na promjene u apsolutnoj vrijednosti polja tlaka, i strujanje plinova može smatrati nestlačivim strujanjem koje se odvija u uvjetima srednjeg, referentnog tlaka  $p_0$ .

U tom se slučaju, u toplinskoj jednadžbi stanja (2.4), promjena gustoće fluida povezuje prvenstveno s promjenom temperature putem koeficijenta izobarnog prostornog termičkog rastezanja  $\beta$ :

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{p=p_0}. \quad (2.16)$$

Za većinu kapljevinu ovaj se koeficijent može predstaviti kao linearna funkcija temperature, dok se u slučaju savršenih plinova on određuje jednostavno, kao  $\beta = 1/T$ . U svakom slučaju, ukoliko se strujanje odvija u uvjetima manjih temperaturnih razlika, ovaj se koeficijent u okolišu referentnog termodinamičkog stanja može izraziti u lineariziranom obliku, putem referentne termodinamičke temperature  $T_0$  i gustoće  $\rho_0$ :

$$\beta = - \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\rho - \rho_0}{T - T_0} \right|_{p=p_0}. \quad (2.17)$$

Strujanja u kojima se pojavljuju male relativne razlike gustoće:  $|\beta(T-T_0)| \ll 1$ , dopuštaju primjenu Boussinesqove aproksimacije prema kojoj se u svim jednadžbama nestlačivog strujanja (izrazi (2.11), (2.13) te (2.15)), gustoća fluida  $\rho$  zamjenjuje referentnom

gustoćom  $\rho_0$ , osim u članu koji predstavlja masenu silu, a koji se pomoću izraza (2.17) zapisuje u obliku:

$$\rho f_i = \rho_0 f_i - \rho_0 f_i \beta (T - T_0). \quad (2.18)$$

S obzirom da su u uvjetima strujanja pri slobodnoj konvekciji razvijene brzine male, doprinos promjeni unutarnje energije ostvaren toplinskim tokom može se smatrati mnogo većim od onog koji je uzrokovan disipacijom kinetičke energije strujanja, te se ovaj član u temperaturnoj jednadžbi (2.15) zanemaruje:

$$\sum_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \approx 0. \quad (2.19)$$

Uvrštavanjem referentne gustoće  $\rho_0$ , te izraza (2.18) i (2.19) u sustav jednadžbi nestlačivog strujanja (izrazi (2.11), (2.13) te (2.15)), dobiva se sustav jednadžbi matematičkog modela slobodne konvekcije (Boussinesqov model slobodne konvekcije).

Jednadžbe koje čine ovaj sustav jesu:

- jednadžba kontinuiteta:

$$\frac{\partial(\rho_0 v_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (2.20)$$

- jednadžba količine gibanja:

$$\frac{\partial(\rho_0 v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho_0 f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - \beta \rho_0 (T - T_0) f_i, \quad (2.21)$$

Često se zbroj  $\rho_0 f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$  zamjenjuje s  $-\frac{\partial p'}{\partial x_i}$ , gdje je  $p' = p - \rho_0 f_i x_i$  zbroj stvarnog i

hidrostatskog tlaka.

- temperaturna jednačba:

$$\frac{\partial(\rho_0 T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 v_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\lambda}{c} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (2.22)$$

Može se primijetiti da se u Boussinesqovom modelu, temperatura pojavljuje i u jednačbi količine gibanja, te se jednačbe (2.20) do (2.22) rješavaju simultano.

## 2.5 Opća konvekcijsko-difuzijska jednačba

Jednačbe ovih matematičkih modela mogu se prikazati u jedinstvenom obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j \Phi) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = Q_\phi. \quad (2.23)$$

Izraz (2.23) označuje opću konvekcijsko-difuzijsku jednačbu, a naziva se još i općom transportnom jednačbom i općom jednačbom prijenosa. U ovoj jednačbi veličina  $\Phi$  predstavlja masenu gustoću fizikalne veličine  $\phi$  ( $d\phi = \rho \Phi dV$ ),  $\Gamma$  pripadni koeficijent difuzije, dok  $Q_\phi$  predstavlja pripadni izvorski član. Članovi s lijeve strane jednakosti redom predstavljaju: nestacionarni član, konvekcijski član i difuzijski član. Ova jednačba predstavlja opći oblik zapisa zakona očuvanja polja fizikalnog svojstva, na kojeg se svode sve jednačbe matematičkih modela, i stoga predstavlja temelj na kojem se zasnivaju numeričke metode namijenjene proračunu strujanja fluida. U metodi konačnih volumena ova se jednačba primjenjuje u integralnom obliku, za kontrolni volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \Phi dV + \int_S \left( \rho v_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \int_V Q_\phi dV. \quad (2.24)$$

U ovom će radu biti prikazani primjeri proračuna nestlačivih strujanja fluida konstantnih reoloških i termodinamičkih svojstava kojih su vrijednosti određene iznosom srednjih, referentnih vrijednosti tlaka i temperature:

$$\mu = \text{konst.}; \quad \lambda = \text{konst.}; \quad c = \text{konst.}; \quad \beta = \text{konst.}$$

Također, u svrhu sažimanja zapisa jednažbi matematičkih modela nestlačivog strujanja i modela slobodne konvekcije, oznaka referentne gustoće  $\rho_0$  u jednažbama (2.20) - (2.22) zamjenjuje se oznakom  $\rho$ , bez narušavanja valjanosti modela.

U skladu s navedenim, jednažbe modela općeg strujanja nestlačivog fluida i modela slobodne konvekcije, prikazuju se oblikom opće konvekcijsko difuzijske jednažbe (2.23). Sadržaji veličina jednažbi matematičkih modela, prikazani su u tablici 2.1.

Tablica 2.1 Sadržaji veličina konvekcijsko-difuzijskih jednažbi matematičkih modela nestlačivog laminarnog strujanja i slobodne konvekcije

	$\Phi$	$\Gamma$	$Q_\Phi$	dodatak za model slobodne konvekcije	izrazi u tekstu:
Jednažba kontinuiteta	1	0	0		(2.11), (2.20)
Jednažba količine gibanja	$v_i$	$\mu$	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i$	$-\rho f_i \beta (T - T_0)$	(2.13), (2.21)
Temperaturna jednažba	$T$	$\lambda/c$	0		(2.15), (2.22)

### 3 METODA KONAČNIH VOLUMENA

Sustavi jednažbi gore prikazanih matematičkih modela zbog složenosti i nelinearnosti jednažbi, nemaju poznata opća analitička rješenja. Stoga se za njihovo rješavanje primjenjuju numeričke metode, koje se temelje na postupku diskretizacije jednažbi matematičkog modela, a rješenje se dobiva u obliku diskretnih vrijednosti polja fizikalnih veličina, u diskretnim prostorno-vremenskim točkama.

Danas se za proračun strujanja fluida uglavnom primjenjuje metoda konačnih volumena, pa je tako i u ovom radu novi algoritam za povezivanje polja brzine i tlaka razvijen u sklopu metode konačnih volumena na nestrukturiranim, nepomaknutim mrežama. U ovoj se metodi problem strujanja rješava u globalnom kontrolnom volumenu (konačnom području prostora) obuhvaćenom zatvorenom kontrolnom površinom. S obzirom da se na dijelovima kontrolne površine zadaju različiti rubni uvjeti, ona se obično dijeli na stanoviti broj manjih ploha - granica globalnog kontrolnog volumena. Prostor globalnog kontrolnog volumena diskretizira se konačnim brojem manjih kontrolnih (ili konačnih) volumena. Konačni volumeni međusobno su odijeljeni unutarnjim stranicama, dok vanjske stranice rubnih konačnih volumena ujedno sačinjavaju granice globalnog kontrolnog volumena. Ishod postupka diskretizacije prostora naziva se geometrijskom mrežom. Ona treba biti topološki i geometrijski valjana, a naknadni postupak formiranja konačnih volumena treba osigurati da oni u potpunosti ispunjavaju prostor globalnog kontrolnog volumena i da se pri tome međusobno ne preklapaju.

S obzirom da se sve jednažbe matematičkog modela mogu prikazati oblikom opće konveksijsko-difuzijske jednažbe, u nastavku slijedi prikaz metode konačnih volumena za rješavanje te jednažbe, a zatim se ona primjenjuje na sustav jednažbi koje opisuju strujanje fluida. U metodi konačnih volumena, u prvom koraku diskretizacije, na svaki konačni volumen geometrijske mreže primjenjuje se integralni oblik opće konveksijsko-difuzijske jednažbe (2.24). U drugom koraku, konveksijsko-difuzijski protoci fizikalne veličine kroz stranice konačnih volumena modeliraju se



primjenom neke od shema diferencije. Ovim postupkom, sustav diferencijalnih jednažbi matematičkih modela postaje sustav algebarskih jednažbi. Pri tome se pojedine nelinearne jednažbe sustava lineariziraju, te se rješenje dobiva u iterativnom postupku, rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednažbi.

U metodi konačnih volumena na nepomaknutim mrežama, rješenje je sadržano u obliku raspodjele diskretnih, srednjih vrijednosti polja fizikalnih veličina u čvorovima konačnih volumena u odabranim vremenskim trenucima.

### 3.1 Diskretizacija prostora

U svrhu usporedbe novog algoritma sa algoritmom SIMPLE, sadržanim u računalnom paketu FLUENT, u ovom se radu pri diskretizaciji prostora primjenjuje generator mreže GAMBIT, koji je sastavni dio tog računalnog paketa. Time je osigurana usporedba proračunskih postupaka na jednakim mrežama, i usporedba u geometrijski složenijim slučajevima.

Geometrijska mreža određena je topološkim elementima u koje spadaju: vrhovi, stranice te volumeni. Diskretizacijom prostora primjenom proizvoljne, nestrukturirane mreže, ovi se elementi u svrhu identifikacije u nastavku proračunskog postupka, označuju pripadnim indeksima.

Diskretizacijom prostora globalnog kontrolnog volumena nastaje:

- $nc$  vrhova mreže, označenih indeksima:  $ic = 1, 2, \dots, nc$ ;
- $nf$  stranica, označenih indeksima:  $if = 1, 2, \dots, nf$ ;
- $nv$  konačnih volumena, označenih indeksima:  $iv = 1, 2, \dots, nv$ .

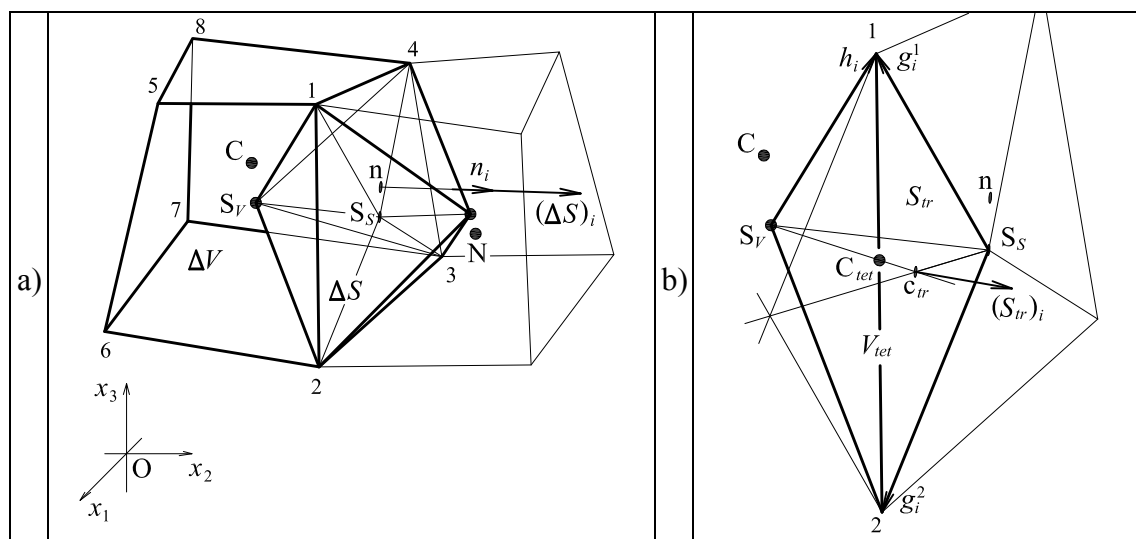
Nakon provedbe postupka diskretizacije prostora pomoću generatora mreže GAMBIT, u nastavku proračunskog postupka, geometrijska mreža preuzima se u obliku popisa topoloških elemenata. U ovom je radu korišten oblik popisa namijenjen procesorskom

dijelu računalnog paketa FLUENT. Sastavni dijelovi i značajke ovakvog oblika zapisa geometrijske mreže jesu:

- Popis vrhova, u kojem su navedene njihove koordinate. Vrhovi razapinju bridove, stranice i konačne volumene, a pomoću koordinata se kasnije, u proračunskom postupku određuju geometrijske značajke ovih elemenata;
- Popis stranica, u kojem je svaka stranica određena svojom rubnom konturom. Kontura stranice određena je navođenjem slijeda indeksa pripadnih vrhova koji čine stranici pripadnu, zatvorenu petlju. Uz vrhove, ovdje su navedeni i indeksi dvaju konačnih volumena kojima stranica pripada (koje dijeli);
- Konačni volumen određen je svojom kontrolnom površinom. Umjesto navođenja indeksa stranica koji sačinjavaju njegovu kontrolnu površinu, u ovom su obliku zapisa konačni volumeni jednoznačno određeni u popisu stranica. Pri tome se primjenjuje konvencija koja slijed navođenja vrhova povezuje s licem i naličjem stranice, a slijed navođenja indeksa pripadnih volumena određuje njihov smještaj obzirom na lice i naličje. Zahvaljujući sustavu označivanja volumena putem stranica, prilikom formiranja konačnih volumena dva susjedna volumena uvijek se pozivaju na jedinstvenu definiciju stranice koja ih dijeli. Pri tome je uobičajeno orijentaciju normale stranice postaviti tako da u volumenu s nižim indeksom ona predstavlja vanjsku normalu. Kako je riječ o proizvoljnoj nestrukturiranoj mreži, ukoliko se u njoj pojavljuju konačni volumeni kojih kontrolne površine sadrže različiti broj stranica, tada se umjesto jednog podatka o broju stranica pojavljuje dodatni popis, koji navodi broj stranica kontrolne površine svakog pojedinog volumena.
- Granice sačinjavaju kontrolnu površinu globalnog kontrolnog volumena, a u ovom obliku popisa one su određene tako što je popis stranica razdvojen u više odvojenih cjelina. Jedan dio popisa stranica određuje unutarnje stranice globalnog kontrolnog volumena, dok je ostatak – popis rubnih

stranica, zadan u obliku izdvojenih popisa stranica po granicama U popisima stranica po granicama, rubne stranice određene su jednakim oblikom zapisa kojim se određuju i unutarnje stranice, pri čemu se u zapisima pojavljuje indeks fiktivnog volumena koji u naravi predstavlja prostor izvan globalnog kontrolnog volumena. Uz samu definiciju kontrolne površine globalnog kontrolnog volumena, ovaj popis omogućuje identifikaciju stranica na kojima se kasnije, u proračunskom postupku primjenjuje željeni rubni uvjet.

Nakon preuzimanja popisa i rekonstrukcije topologije mreže, u nastavku se proračunskog postupka pristupa određivanju geometrijskih značajki volumena i stranica. Pri tome se geometrijske značajke dvaju susjednih volumena određuju temeljem jedinstvenih značajki stranice koja ih dijeli (Slika 3.1, dio a)), čime je osigurano da se volumeni međusobno ne preklapaju a globalni je kontrolni volumen određen zbrojem konačnih volumena. Postupak određivanja geometrijskih značajki jednog konačnog volumena i jedne njegove stranice prikazan je na b) dijelu slike 3.1, uz prateće izraze (3.1) - (3.5).



Slika 3.1 Uz postupak određivanja geometrijskih značajki konačnih volumena i stranica

Kod stranica oblika višekutnika (koje su određene putem više od tri vrha), vektor površine stranice  $(\Delta S)_i$  određuje se kao suma vektora površina pojedinih trokuta  $(S_{tr})_i$ ,

razapetih bridovima stranice i točkom  $S_S$  koje je položaj  $x_i^{Ss}$  određen aritmetičkom sredinom položaja vrhova stranice:

$$\begin{aligned} x_i^{Ss} &= \frac{1}{4} \sum_{l=1}^4 x_i^l ; \quad g_i^l = x_i^l - x_i^{Ss}; \quad l=1, 2 \\ (S_{tr})_i^m &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} g_j^1 g_k^2)^m ; \quad m=1, 2, 3, 4 \\ (\Delta S)_i &= \sum_{m=1}^4 (S_{tr})_i^m \end{aligned} \quad (3.1)$$

Normala višekutnih stranica  $n_i$  određuje se kao jedinični vektor u smjeru vektora površine stranice, dok se ploština stranice  $\Delta S$  određuje kao apsolutna vrijednost vektora površine stranice:

$$\Delta S = \sqrt{(\Delta S)_i (\Delta S)_i} ; \quad n_i = \frac{(\Delta S)_i}{\Delta S}. \quad (3.2)$$

Ovakvim postupkom određivanja geometrijskih značajki stranica, vektorska suma vektora površina stranica svakog od konačnih volumena proizlazi kao nulta vrijednost, do računalne točnosti. Uz ispunjen uvjet topološke zatvorenosti, ovime je osigurana i geometrijska zatvorenost konačnih volumena, čime je spriječeno unošenje pogreške lažne, numeričke izvornosti.

Položaj težišta stranice  $n$ :  $x_i^n$ , određuje se putem vektorske sume statičkih momenata njenih trokuta podijeljene ukupnom ploštinom stranice:

$$\begin{aligned} (x_i^{cr})^m &= x_i^{Ss} + \frac{1}{3} (g_i^1 + g_i^2)^m = \frac{1}{3} ((x_i^1 + x_i^2)^m + x_i^{Ss}); \quad m=1, 2, 3, 4 \\ (S_{tr})_i^m &= \left( \sqrt{(S_{tr})_i (S_{tr})_i} \right)^m ; \quad m=1, 2, 3, 4 \\ x_i^n &= \frac{1}{\Delta S} \sum_{m=1}^4 (x_i^{cr} S_{tr})_i^m \end{aligned} \quad (3.3)$$

Postupak određivanja geometrijskih značajki konačnih volumena, analogan je postupku provedenom nad stranicama: obujam konačnog volumena  $\Delta V$  određuje se kao suma obujama pojedinih tetradara  $V_{tet}$  koji su razapeti putem upravo opisanih trokuta i

jedinstvene točke  $S_V$ , koje je položaj  $x_i^{S_V}$  određen aritmetičkom sredinom položaja vrhova poliedra konačnog volumena:

$$\begin{aligned} x_i^{S_V} &= \frac{1}{8} \sum_{l=1}^8 x_i^l; \quad (h_i)^m = (x_i^1)^m - x_i^{S_V}; \quad m=1, 2, \dots, 24 \\ (V_{tet})^m &= \frac{1}{3} \left| (h_i (S_{tr})_i)^m \right|; \quad m=1, 2, \dots, 24 \\ \Delta V &= \sum_{m=1}^{24} (V_{tet})^m \end{aligned} \quad , \quad (3.4)$$

dok je položaj njegovog težišta C:  $x_i^C$  određen putem vektorske sume statičkih momenata njegovih tetraedara podijeljene obujmom konačnog volumena:

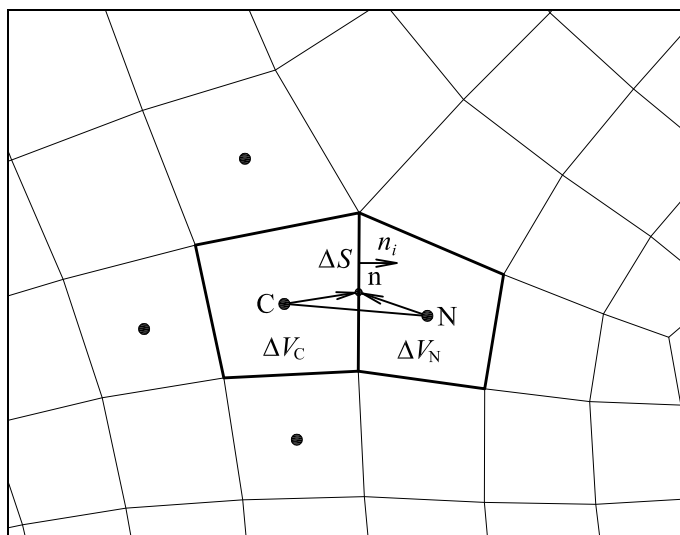
$$\begin{aligned} (x_i^{C_{tet}})^m &= x_i^{S_V} + \frac{3}{4} \left( (x_i^{C_{tr}})^m - x_i^{S_V} \right) = \frac{1}{4} \left( x_i^{S_V} + (x_i^1 + x_i^2 + x_i^{S_S})^m \right); \quad m=1, 2, \dots, 24 \\ x_i^C &= \frac{1}{\Delta V} \sum_{m=1}^{24} (x_i^{C_{tet}} V_{tet})^m \end{aligned} \quad (3.5)$$

U današnjim računalnim paketima se u slučaju proračuna dvodimenzijских problema, pojavljuju dva pristupa. U prvom se dvodimenzijски problemi rješavaju u trodimenzijском prostoru oblika prizme, gdje se prostor u smjeru koordinate duž koje nema promjene polja fizikalnih veličina diskretizira jednim slojem konačnih volumena (SWIFT, FOAM), dok se u drugom pristupu problem rješava u dvodimenzijском području. U okviru drugog pristupa, računalni paketi sadrže posebno razvijenu inačicu proračunskog postupka namijenjenu proračunu dvodimenzijских problema (FLUENT), čime se ostvaruju stanovite uštede na strani potrebnih računalnih resursa, budući su u tom slučaju, sve vektorske i tenzorske veličine te operacije nad poljima ovih veličina, definirane u dvodimenzijском prostoru.

U ovom je radu primijenjen drugi pristup, gdje obje inačice postupka diskretizaciju prostora preuzimaju iz generatora mreže GAMBIT. U slučaju dvodimenzijских područja, zapis dvodimenzijске mreže analogan je opisanom obliku zapisa trodimenzijских mreža uz odgovarajuće razlike u popisima, koje nastaju zbog sažimanja reda topoloških elemenata: popis vrhova navodi samo dvije koordinate položaja, dok je u popisima stranica, pojedina stranica određena dužinom povučenom između dva

pripadna vrha. Ostatak zapisa mreže isti je kao i u slučaju trodimenzijske mreže. Također, prilikom rekonstrukcije se u dvodimenzijском slučaju pojavljuju razlike samo utoliko što ulogu bridova konačnih volumena preuzimaju vrhovi, konačni volumeni predstavljeni su dvodimenzijским, ravnim poligonalnim površinama, a stranice dužinama.

Slika 3.2 prikazuje detalj jedne dvodimenzijске mreže konačnih volumena s istaknutim težištem C u jednom konačnom volumenu i težištem N u jednom od njegovih susjeda. U nastavku je na temelju ovog detalja opisana diskretizacija jednadžbi matematičkih modela.



Slika 3.2 Detalj dvodimenzijске mreže konačnih volumena

### 3.2 Diskretizacija opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe

Opća konvekcijsko-difuzijska jednadžba zapisana za jedan konačni volumen (poput volumena s težištem u točki C, prikazanog na slici 3.2), glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho \Phi \, dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j \, dS + \int_{\Delta V} Q_\phi \, dV \quad (3.6)$$

U gornjoj jednadžbi, ploha  $\Sigma \Delta S$  predstavlja skup svih stranica koje tvore kontrolnu površinu konačnog volumena, a vektor  $n_j$  predstavlja njenu vanjsku normalu (vanjski smjer normale stranica, obzirom na promatrani konačni volumen). Jednadžba (3.6) pokazuje da brzina promjene sadržaja fizikalne veličine unutar konačnog volumena ovisi o konvekcijsko-difuzijskom protoku kroz stranice konačnog volumena, te mogućem prisustvu volumnih izvora pripadne veličine unutar konačnog volumena.

Konvekcijsko-difuzijski protoci kroz stranice konačnih volumena računaju se za svaku stranicu jedanput i pridružuju volumenima koji dijele promatranu stranicu, jednom s predznakom plus a drugom s predznakom minus. Simbolički se to može zapisati uz pomoć operatora, određenog prema sljedećem pravilu:

$$sfv_{iv}^{if} = \begin{cases} +1 & \text{ako je volumenu } iv \text{ normala stranice } if \text{ - vanjska normala} \\ -1 & \text{ako je volumenu } iv \text{ normala stranice } if \text{ - unutarnja normala} \\ 0 & \text{ako stranica } if \text{ nije dio kontrolne površine volumena } iv \end{cases} \quad (3.7)$$

Izraz (3.6) za konačni volumen C, iskazan pomoću ovog operatora, glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V_C} \rho \Phi \, dV = - \sum_{if=1}^{nf} sfv_C^{if} \left( \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j \, dS \right)^{if} + \int_{\Delta V_C} Q_\phi \, dV. \quad (3.8)$$

U nastavku teksta, suma iz gornjeg izraza pisati će se skraćeno, obliku:

$$\sum_{if=1}^{nf} sfV_C^{if} \left( \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j \, dS \right)^{if} = \sum_{k=1}^{nb_C} \left( \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j \, dS \right)^k, \quad (3.9)$$

tj. osnovni oblik izraza (3.8), uz pravilo (3.9) glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V_C} \rho \Phi \, dV = - \sum_{k=1}^{nb_C} \left( \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j \, dS \right)^k + \int_{\Delta V_C} Q_\phi \, dV. \quad (3.10)$$

U skladu s integralnim teoremom o srednjoj vrijednosti, volumni i površinski integrali u izrazu (3.10), zamjenjuju se umnošcima srednjih vrijednosti podintegralnih funkcija i pripadnih područja integracija:

$$\begin{aligned} (\rho \Phi)_C &= \frac{1}{\Delta V_C} \int_{\Delta V_C} \rho \Phi \, dV \\ (Q_\phi)_C &= \frac{1}{\Delta V_C} \int_{\Delta V_C} Q_\phi \, dV \end{aligned} \quad (3.11)$$

Konvekcijsko-difuzijski protok  $J$  definira se putem srednjih vrijednosti:

$$J = \int_{\Delta S} \left( \rho v_j n_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} n_j \right) dS = F \Phi_n - D \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_n \overline{CN}, \quad (3.12)$$

gdje je  $F$  maseni protok fluida kroz stranicu (jačina konvekcije) definirana izrazom

$$F = \left( \rho v_j n_j \right)_n \Delta S = \left( \rho v_n \right)_n \Delta S, \quad (3.13)$$

$\Phi_n$  srednja vrijednost fizikalne veličine na stranici,  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_n$  srednja vrijednost normalne derivacije na stranici, a  $D$  jačina difuzije, definirana izrazom:

$$D = \frac{\Gamma_n \Delta S}{CN}, \quad (3.14)$$



gdje je  $\overline{CN}$  udaljenost među težištima susjednih volumena. Uvrštavanjem izraza (3.11) i (3.12) u izraz (3.10), on prelazi u oblik:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)_C}{\partial t} \Delta V_C = - \sum_{k=1}^{nb_C} \left( F\Phi_n - D \left( \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_n \overline{CN} \right)^k + (Q_\phi)_C \Delta V_C. \quad (3.15)$$

Jednadžba (3.15) se u nastavku postupka diskretizacije promatra kao obična diferencijalna jednadžba prvog reda po vremenu. Srednje vrijednosti proizašle iz volumenskih integrala aproksimiraju se vrijednostima u težištima volumena (koje su nepoznanice u diskretiziranim oblicima jednadžbi), a zadatak sheme diferencije je uspostaviti vezu između srednjih vrijednosti fizikalne veličine i njene normalne derivacije na stranici konačnog volumena s vrijednostima polja u težištima konačnih volumena (čvornim vrijednostima).

### Sheme diferencije

Shemom diferencije definira se konvekcijsko-difuzijski protok kroz stranicu konačnog volumena. Kod nestrukturiranih mreža, ova je veza ograničena na upotrebu čvornih vrijednosti iz volumena koji dijele promatranu stranicu, dok se viši red točnosti ostvaruje dodatnim uključivanjem vrijednosti gradijenta fizikalne veličine u čvorovima. Ta se vrijednost u ovom radu računa uz primjenu Gaussove formule koja za veličinu općenito označenu sa  $\varphi$ , glasi:

$$\left( \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right)_C = \frac{1}{\Delta V_C} \sum_{k=1}^{nb_C} \left( \int_{\Delta S} \varphi n_i dS \right)^k \approx \frac{1}{\Delta V_C} \sum_{k=1}^{nb_C} (\varphi|_n n_i \Delta S)^k, \quad (3.16)$$

pri čemu se raspodjela vrijednosti fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici, aproksimira umnoškom  $\varphi|_n$  (vrijednost polja u težištu stranice) i ploštine stranice.

Vrijednost polja u težištu stranice -  $\varphi_n$ , u izrazu (3.16), najčešće se određuje linearnom interpolacijom između vrijednosti polja  $\varphi$  u težištima susjednih volumena:

$$\varphi_n = (1-f)\varphi_C + f\varphi_N, \quad (3.17)$$

gdje se interpolacijski faktori određuju kao na slici 3.3.

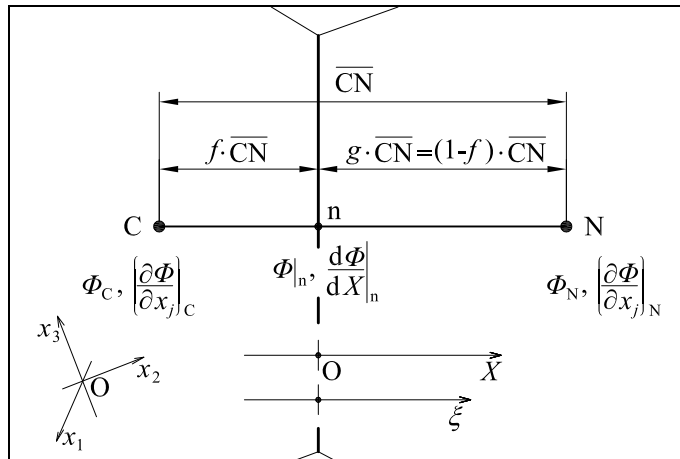
U slučajevima kada vrijednost koeficijenta difuzije  $\Gamma$  nije konstantna, odnosno kada nije poznata njena vrijednost u težištu stranice, ona se određuje kao odgovarajuća vrijednost  $\Gamma_n$  dobivena temeljem ukupnog difuzijskog otpora koji se pojavljuje između težišta susjednih konačnih volumena:

$$\frac{1}{\Gamma_n} \approx \frac{f}{\Gamma_C} + \frac{1-f}{\Gamma_N}, \quad (3.18)$$

gdje su  $\Gamma_C$  i  $\Gamma_N$  srednje vrijednosti koeficijenta difuzije u težištima volumena. Lokalni uvjeti strujanja, u kojima se primjenjuje shema diferencije, opisuju se pomoću vrijednosti lokalnog Pecletova broja  $P$ , koji označuje omjer jačina konvekcije i difuzije na promatranoj stranici:

$$P = \frac{F}{D}. \quad (3.19)$$

U vlastitom proračunskom postupku, razvijenom u sklopu ovog rada, primjenjuju se dvije sheme diferencije, koje se temelje se na lokalnom, analitičkom rješenju opće konvekcijsko-difuzijske jednadžbe, u slučaju jednodimenzijskog stacionarnog strujanja fluida konstantnih svojstava s konstantnim izvorskim članom. Za potrebe izvoda shema, uvodi se lokalni koordinatni sustav vezan uz stranicu, u kojem je pravac koordinate  $X$  određen spojnicom  $\overline{CN}$  između težišta susjednih konačnih volumena, u skladu sa slikom 3.3. Za početak se pretpostavlja da je ta spojnica paralelna s normalom stranice.



Slika 3.3 Uz sheme diferencije

Uvođenjem bezdimenzijske koordinate  $\xi = \frac{X}{CN}$ , pretpostavke da je izvorski član konstantan unutar pojedinog konačnog volumena, te dopuštanjem njegove skokovite promjene prelaskom iz jednog volumena u drugi, dobiju se dvije jednadžbe, posebno za lijevi i desni volumen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_L}{d\xi^2} - P \frac{d\Phi_L}{d\xi} &= -PC_C \quad \text{za } \xi \leq 0 \\ \frac{d^2 \Phi_D}{d\xi^2} - P \frac{d\Phi_D}{d\xi} &= -PC_N \quad \text{za } \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Opće rješenje ovih jednadžbi je:

$$\begin{aligned} \Phi_L(\xi) &= C_1 + C_2 e^{P\xi} + C_C \xi \\ \Phi_D(\xi) &= C_3 + C_4 e^{P\xi} + C_N \xi \end{aligned} \quad (3.21)$$

Konstante  $C_1$  do  $C_4$  te  $C_C$  i  $C_N$ , mogu se odrediti temeljem sljedećih šest rubnih uvjeta:

$$\begin{aligned} \text{za } \xi = -f: \Phi_L(-f) &= \Phi_C & \Rightarrow & C_1 + C_2 e^{-Pf} - C_C f = \Phi_C \\ \text{za } \xi = g: \Phi_D(g) &= \Phi_N & \Rightarrow & C_3 + C_4 e^{Pg} + C_D g = \Phi_N \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{za } \xi = 0: \quad \Phi_L(0) = \Phi_D(0) = \Phi|_n &\Rightarrow C_1 + C_2 = C_3 + C_4 = \Phi|_n \\ \frac{d\Phi_L}{d\xi}(0) = \frac{d\Phi_D}{d\xi}(0) = \frac{d\Phi}{d\xi}|_n &\Rightarrow PC_2 + C_L = PC_4 + C_D = \frac{d\Phi}{d\xi}|_n, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\text{za } \xi = -f: \quad \frac{d\Phi_L}{d\xi}(-f) = \overline{\text{CN}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)_C \xi_j = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C \Rightarrow PC_2 e^{-Pf} + C_L = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C. \quad (3.24)$$

$$\text{za } \xi = g: \quad \frac{d\Phi_D}{d\xi}(g) = \overline{\text{CN}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)_N \xi_j = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_N \Rightarrow PC_4 e^{Pg} + C_D = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_N$$

Gradijenti veličine  $\Phi$  ograničuju se tako da vrijednosti  $\Phi_n$  budu u intervalu  $[\Phi_C, \Phi_N]$ . Postupak ograničavanja izvodi se u uzstrujnom volumenu, a temelji se na uvjetu koji slijedi izravno iz izraza (3.25). Određivanjem spomenutih konstanti i njihovim uvrštavanjem u izraze (3.23), slijede i tražene veze između čvornih vrijednosti veličina s onima na stranici:

$$\Phi|_n = B_0 \left[ B_C \Phi_C + B_N \Phi_N + B_C (f - B_N) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C - B_N (g - B_C) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_N \right]; \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_n \overline{\text{CN}} = \frac{d\Phi}{d\xi}|_n = B_0 \left[ \Phi_N - \Phi_C - (f - B_N) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C - (g - B_C) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_N \right]. \quad (3.26)$$

Parametri koji se pojavljuju u izrazima (3.25) i (3.26), funkcije su Pecletovog broja i položaja točke n:

$$B_C = g \frac{Pg + e^{-Pg} - 1}{Pg(1 - e^{-Pg})}; \quad B_N = f \left( 1 - \frac{Pf + e^{-Pf} - 1}{Pf(1 - e^{-Pf})} \right); \quad B_0 = \frac{1}{B_C + B_N}; \quad (3.27)$$

a u svrhu uštede računalnog vremena, mogu se odrediti primjenom istih aproksimacija koje se pojavljuju i u slučaju primjena EDSI sheme na drukčijim mrežama ([56], [15], [16]).

Primjerice, parametar  $B_C$  može se odrediti kao:

$$B_C = g \cdot \gamma(Pg) = g \frac{Pg + e^{-Pg} - 1}{Pg(1 - e^{-Pg})} \approx g \cdot \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{Pg}{11.1} - \frac{Pg|Pg|}{175.8}; & \text{za } |Pg| \leq 6.38 \\ \frac{\max[Pg, 0] - 1}{Pg}; & \text{za } |Pg| > 6.38 \end{cases}. \quad (3.28)$$

Rješenja (3.25) i (3.26) određuju EDSI shemu diferencije, koja je drugog reda točnosti [56], a usvajanjem nultih vrijednosti konstanti  $C_C$  i  $C_N$  opisani postupak ishoduje EDS shemu [48], koja je za visoke vrijednosti Pecletova broja prvog reda točnosti.

Za slučaj EDS sheme diferencije, veza između čvornih vrijednosti polja fizikalne veličine s veličinama na stranici, dana je izrazima:

$$\Phi|_n = \Phi_C \left( 1 - \frac{e^{Pf} - 1}{e^P - 1} \right) + \Phi_N \left( \frac{e^{Pf} - 1}{e^P - 1} \right); \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_n \overline{CN} = \frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_n = \frac{Pe^{Pf}}{e^P - 1} (\Phi_N - \Phi_C). \quad (3.30)$$

Uvrštavanjem izraza (3.25) i (3.26) u izraz za konveksijsko-difuzijski protok, slijedi da uz EDSI shemu vrijedi:

$$J = F\Phi_C + DB_0 \left[ \begin{aligned} & (1 - PB_N)(\Phi_C - \Phi_N) + (1 + PB_C)(f - B_N) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C \\ & + (1 - PB_N)(g - B_C) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_N \end{aligned} \right] =, \quad (3.31),$$

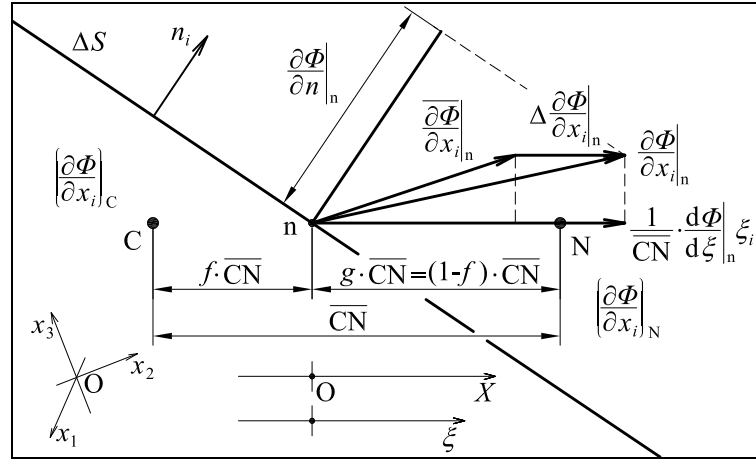
$$= F\Phi_C + a_N(\Phi_C - \Phi_N) + \Delta J_C + \Delta J_N$$

a za EDS shemu vrijedi:

$$J = F\Phi_C + D \frac{P}{e^P - 1} (\Phi_C - \Phi_N) = F\Phi_C + a_N(\Phi_C - \Phi_N). \quad (3.32)$$

U izrazima (3.31) i (3.32),  $a_N$  predstavlja koeficijent sheme, dok  $\Delta J_C$  i  $\Delta J_N$  predstavljaju korekcijske protoke. Za slučaj EDS sheme ove su korekcije jednake nuli.

U općem slučaju, sheme diferencije primjenjuju se na proizvoljnim, nestrukturiranim mrežama, gdje postupak stvaranja mreže ne može jamčiti da će spojnica između susjednih konačnih volumena biti paralelna s pravcem normale stranice. Stoga se u izraze za protok  $J$  uvodi korekcija difuzijskog dijela protoka zbog neortogonalnosti mreže. Ova korekcija se uvodi u skladu s oznakama na slici 3.4.



Slika 3.4 Uz postupak korekcije za neortogonalnost

Vrijednost gradijenta fizikalne veličine dobivena interpolacijom iz susjednih volumena, korigira se takvim načinom da projekcija korigiranog gradijenta na spojnicu  $\overline{CN}$  odgovara vrijednosti određenoj shemom diferencije:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{\overline{CN}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{\overline{CN}} + \left( \frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_{\xi_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \Big|_{\overline{CN}} \cdot \xi_j \xi_i \right). \quad (3.33)$$

Veličina  $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{\overline{CN}}$ , koja se pojavljuje u izrazu (3.33) i na slici 3.4, označuje interpoliranu

vrijednost gradijenta na stranici, a određuje se linearnom interpolacijom, u skladu sa oznakama uvedenim u ovom poglavlju (slikama 3.4 i 3.3):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{\overline{CN}} = g \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_C + f \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_N. \quad (3.34)$$

Množenjem izraza (3.33), vektorom normale, slijedi traženi izraz za normalnu komponentu gradijenta fizikalne veličine na stranici:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{CN}} = c_s \frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_{\text{CN}} + (1 - c_s) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{CN}}, \quad (3.35)$$

gdje oznaka  $c_s$  predstavlja kosinus kuta kojeg zatvaraju spojnica težišta konačnih volumena i normala stranice ( $c_s = \xi_i n_i$ ), dok je derivacija veličine  $\Phi$  u smjeru  $\xi$  definirana je izrazima (3.26), za EDSI shemu, odnosno izrazom (3.30) za EDS shemu.

### Vremenska diskretizacija

Za slučaj nestacionarnog strujanja diskretizirana opća konveksijsko difuzijska jednadžba (3.15) može se za svaki konačni volumen shvatiti kao obična diferencijalna jednadžba prvog reda, koja se može integrirati nekom od prikladnih metoda. U ovom se radu koristi jednokoračna metoda u kojoj je vremenska derivacija diskretizirana izrazom:

$$\frac{\partial (\rho\Phi)_c}{\partial t} \approx \frac{(\rho\Phi)_c^{(t)} - (\rho\Phi)_c^{(t-\Delta t)}}{\Delta t}. \quad (3.36)$$

Pri ovakvoj diskretizaciji točnost vremenske integracije ovisit će o vremenskom trenutku u kojem se računa desna strana izraza (3.15), koji se općenito može definirati izrazom  $t - (1 - f_t)\Delta t$ , gdje je faktor  $f_t$  u intervalu ( $1 \geq f_t \geq 0$ ). Pri  $f_t = 0$ , opća jednokoračna metoda svodi se na eksplicitnu Eulerovu metodu, dok sve ostale vrijednosti  $f_t$  dovode do implicitne formulacije. Tako ova opća shema, pri iznosu  $f_t = 1$ , označuje čisto implicitnu Eulerovu metodu, dok za slučaj  $f_t = 0.5$  označuje Cranck-Nicholsonovu metodu, koja je drugog reda točnosti za razliku od prethodne dvije koje su prvog reda.

Općenito, članovi desne strane se za vremenske trenutke unutar vremenskog koraka integracije određuju linearnom interpolacijom:

$$\begin{aligned}\hat{J} &\approx f_t \cdot J^{(t)} + (1 - f_t) \cdot J^{(t-\Delta t)}; \\ (\hat{Q}_\phi)_C &\approx f_t \cdot (Q_\phi)_C^{(t)} + (1 - f_t) \cdot (Q_\phi)_C^{(t-\Delta t)}\end{aligned}\quad (3.37)$$

Općenito vrijedi da su sve eksplisitne metode uvjetno stabilne, pri čemu se kod većine metoda kao granica stabilnosti uglavnom pojavljuje mala vrijednost Courantova broja (često  $Co < 1$ ), dok su implicitne metode, u većini slučajeva - bezuvjetno stabilne. Courantov broj je ovdje definiran izrazom:

$$Co = \frac{v_n \Delta t}{CN}.$$

Implicitne metode, u svojoj formulaciji uz poznate, sadrže i nepoznate vrijednosti fizikalnih veličina, te zahtijevaju istodobno rješavanje jednadžbi za sve konačne volumene i time zahtijevaju veće računalne resurse u pogledu pohrane podataka i utroška računalnog vremena po koraku integracije. Međutim, glavna odlika implicitnih metoda jest njihova bezuvjetna stabilnost, što omogućuje njihovu primjenu pri znatno grubljoj diskretizaciji vremena.

Proračunski postupak razvijen u sklopu ovog rada namijenjen je prvenstveno proračunu problema koji imaju stacionarno rješenje i uspoređuje se sa srodnim postupkom iste namjene. Tako je novi algoritam razvijen u ovom radu, izveden za opći slučaj jednokoračne implicitne metode.



### 3.3 Sustav lineariziranih algebarskih jednadžbi

Primjenom sheme diferencije (3.31), odnosno (3.32), uvažavajući vremensku interpolaciju u računski vremenski trenutak prema izrazu (3.37), te postupka vremenske diskretizacije prema izrazu (3.36), diskretizirani oblik konvekcijsko-difuzijske jednadžbe (3.15) za svaki konačni volumen, može se zapisati u općem obliku:

$$(a_C)_{iv} \Phi_{iv} - \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (a_N)^k \Phi^k = b_{iv} ; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (3.38)$$

U gornjoj jednadžbi, značenje pojedinih članova je sljedeće:

- $a_N$  je koeficijent, koji proizlazi iz sheme diferencije. U matričnom prikazu sustava jednadžbi (3.38) on je izvan-dijagonalni koeficijent.
- $a_C$  je dijagonalni koeficijent određen izrazom:

$$(a_C)_{iv} = \frac{\rho_{iv} \Delta V_{iv}}{f_i \Delta t} + \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (a_N)^k ; \quad (3.39)$$

- Član vektora desne strane sustava, određen je izrazom:

$$b_{iv} = \Delta V_{iv} (Q_\phi)_{iv} - \sum_{k=1}^{nb_{iv}} \left[ (\Delta J_{iv})^k + (\Delta J_N)^k + (\Delta a_N)^k \left( (\Phi_{iv})^o - (\Phi_N^k)^o \right) \right] + \Delta V_{iv} (Q_t)_{iv} . \quad (3.40)$$

Ukoliko fizikalni izvorski član  $\Delta V_{iv} (Q_\phi)_{iv}$  u izrazu (3.40), ovisi o vrijednosti polja fizikalne veličine, on se linearizira u obliku:

$$(Q_\phi)_{iv} = \frac{\partial Q_\phi}{\partial \Phi} \Big|_{iv} \Phi_{iv} + (C_\phi)_{iv} . \quad (3.41)$$

Članovi suma koje se pojavljuju u izrazu (3.40), proizlaze temeljem primijenjene sheme diferencije, prema izrazu (3.31), odnosno zbog korekcije za neortogonalnost, koje proizlaze temeljem izraza (3.35), ovdje obračunato kroz umnožak koeficijenta  $\Delta a_N$  i razlike čvornih vrijednosti veličine  $\Phi$  iz prethodnog iterativnog koraka (označenih nadineksom  $o$ ). Član  $(Q_t)_{iv}$ , također označuje numerički izvorski član, koji proizlazi iz metode vremenske integracije, i također sadrži poznate prostorne srednje vrijednosti, u ovom slučaju polja fizikalne veličine iz prošlog vremenskog trenutka.

Rješavanjem sustava jednadžbi (3.38), određuju se čvorne vrijednosti  $\Phi_{iv}$  polja fizikalne veličine u računskom vremenskom trenutku, dok se rješenje  $(\Phi_{iv})^{(t)}$  u vremenskom trenutku  $t$  određuje ekstrapolacijom:

$$(\Phi_{iv})^{(t)} = \Phi_{iv} - (1 - f_t)(\Phi_{iv})^{(t-\Delta t)} \quad (3.42)$$

Problemi kod kojih je jedini interes određivanje stacionarnog rješenja, uobičajeno se rješavaju s  $\Delta t \rightarrow \infty$  i  $f_t=1$ .

Sustav jednadžbi (3.38) je u općem slučaju lineariziran (izvorski član i/ili koeficijenti sustava mogu biti funkcije traženog rješenja), te će postupak rješavanja biti nužno iterativan. Zbog nelinearnosti jednadžbi iterativni postupak može i divergirati, a u cilju povećavanja izgleda za postizanje konvergencije, uvodi se postupak podrelaksacije jednadžbi. Postupak podrelaksacije sastoji se u usporavanju promjene rješenja u dva uzastopna iterativna koraka (novom  $n$  i starom  $o$ ), prema jednadžbi  $\Phi_{iv} = \alpha_\phi (\Phi_{iv})^n + (1 - \alpha_\phi)(\Phi_{iv})^o$ , gdje je faktor podrelaksacije  $\alpha_\phi$  u intervalu ( $0 < \alpha_\phi < 1$ ).

Podrelaksirani sustav jednadžbi je oblika:

$$\frac{1}{\alpha_\phi} (a_C)_{iv} \Phi_{iv} - \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (a_N)^k \Phi^k = b_{iv} + \frac{(1 - \alpha_\phi)}{\alpha_\phi} (a_C)_{iv} (\Phi_{iv})^o; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (3.43)$$

Ukoliko iterativni postupak konvergira, njegovim će završetkom razlika između novih i starih vrijednosti nepoznanica biti mala te će rješenje podrelaksiranog sustava (prema izrazu (3.43)), odgovarati rješenju izvornog sustava.

### 3.4 Rubni uvjeti za opću konvekcijsko-difuzijsku jednadžbu

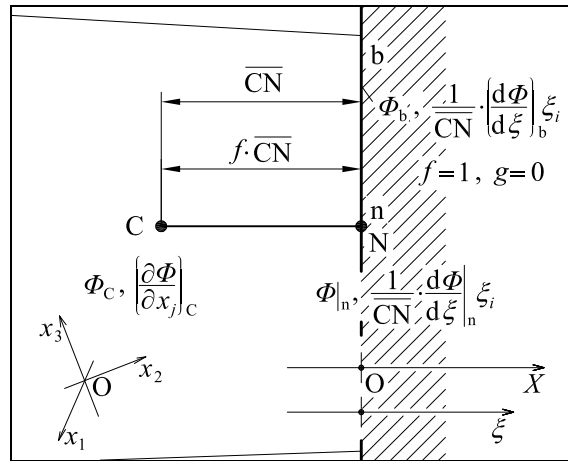
U sustavu jednadžbi (3.38), protoci promatrane fizikalne veličine kroz unutarnje stranice konačnih volumena definirani su shemom diferencije dok se protoci na stranicama koje čine površinu globalnog kontrolnog volumena definiraju rubnim uvjetima. Tri su osnovna matematička rubna uvjeta: Neumannov (zadaje se vrijednost normalne komponente gradijenta fizikalne veličine), Dirichletov (zadaje se vrijednost fizikalne veličine) i mješoviti ili Robinov rubni uvjet koji je zadan nekom funkcijom u kojoj se pojavljuju i vrijednost i normalna derivacija promatrane fizikalne veličine. Prva dva rubna uvjeta se mogu shvatiti kao posebni slučajevi Robinova rubnog uvjeta, koji se može zapisati u obliku:

$$\alpha_R \Phi|_n + \beta_R \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_n = f_R(x_i, t), \quad (3.44)$$

gdje su  $\alpha_R$  i  $\beta_R$  faktori linearne kombinacije, a  $f_R$  označuje funkciju prostornih i vremenske koordinate. Iz izraza (3.44) za slučaj  $\alpha_R = 1$  i  $\beta_R = 0$  slijedi Dirichletov rubni uvjet, a za  $\alpha_R = 0$  i  $\beta_R = 1$  Neumannov. U nastavku slijedi izraz za protok kroz rubnu stranicu, izveden za ovaj opći slučaj Robinova rubnog uvjeta.

Slika 3.5 prikazuje rub globalnog kontrolnog volumena, na kojem se nalazi čvor N, te čvor C, koji se nalazi u globalnom kontrolnom volumenu, neposredno uz rub. Ako se zamisli da je čvor N u središtu beskonačno tankog konačnog volumena koji se nalazi na samom rubu, tada se točka n poklapa s točkom N, a bezdimenzijske udaljenosti između čvorova C i N, prema prije definiranom pravilu iznose:  $f = 1$ ;  $g = 0$ .

Za sheme diferencije koje se primjenjuju u ovom radu, izraz za protok kroz rubnu stranicu, proizlazi iz sustava kojeg čine jednadžba (3.44) i temeljni izrazi za vrijednost fizikalne veličine i vrijednost projekcije njena gradijenta na stranici, za granični slučaj  $f = 1$ , prema slici 3.5. Za slučaj EDS sheme, riječ je o izrazima (3.30) i (3.29), a za EDSI shemu (3.26) i (3.25).



Slika 3.5 Uz postupak ugradnje rubnih uvjeta

Parametri (3.27) za ovaj granični slučaj ( $f = 1$ ;  $g = 0$ ), kod obiju shema nose jedinstvenu oznaku  $B_b$ :

- za EDS shemu:

$$B_b = \frac{Pe^P}{e^P - 1} = 1 + P \cdot \gamma(P); \quad (3.45)$$

- za EDSI shemu (uz  $\lim_{g \rightarrow 0} B_C = 0$ ):

$$B_b = \frac{1}{B_N} = \frac{P(1 - e^P)}{P + (1 - e^P)} = \frac{1}{1 - \gamma(P)}, \quad (3.46)$$

gdje je funkcija  $\gamma$  dana izrazom (3.28).

Također, za slučaj Robinovog rubnog uvjeta, konvekcijsko-difuzijski protok kroz rubnu stranicu za obje sheme diferencije može se zapisati u jedinstvenom obliku:

$$\frac{J - F\Phi_C}{D} = \left(\frac{a_N}{D}\right)_b \Phi_C - \Delta b_b - \Delta J_b, \quad (3.47)$$

gdje, u sklopu sustava (3.38), u pripadnoj jednadžbi za konačni volumen C, pojedini članovi izraza (3.47) svoj doprinos ostvaruju sljedećim načinom:

- član  $D \cdot \left(\frac{a_N}{D}\right)_b$  predstavlja dodatak dijagonalnom koeficijentu;
- član  $D \cdot \Delta b_b$  predstavlja doprinos rubnog uvjeta, i uzima se kao dodatak desnoj strani sustava;
- član  $D \cdot \Delta J_b$  predstavlja doprinos koji proizlazi temeljem uključivanja vrijednosti gradijenta u volumenu C, također kao dodatak desnoj strani sustava.

Sadržaj ovih članova pri različitim uvjetima strujanja, za obje sheme diferencije, prikazan je u tablici 3.1.

Tablica 3.1 Sadržaj izraza za konveksijsko-difuzijski protok kroz rubnu stranicu

	EDS		EDSI		
	$B_b$ - prema izrazu (3.45)		$B_b$ - prema izrazu (3.46)		
	$\left(\frac{a_N}{D}\right)_b$	$\Delta b_b$	$\left(\frac{a_N}{D}\right)_b$	$\Delta b_b$	$\Delta J_b$
$-\infty < P < \infty$	$\frac{\alpha_R (B_b - P)}{\alpha_R + \beta_R B_b}$	$\frac{f_R (B_b - P)}{\alpha_R + \beta_R B_b}$	$\frac{\alpha_R (B_b - P)}{\alpha_R + \beta_R B_b}$	$\frac{f_R (B_b - P)}{\alpha_R + \beta_R B_b}$	$(1 - B_b) \frac{\alpha_R + \beta_R P}{\alpha_R + \beta_R B_b} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_C$
$\lim_{P \rightarrow -\infty}$	$-P$	$\frac{-P}{\alpha_R} f_R$	$\frac{\alpha_R (1 - P)}{\alpha_R + \beta_R}$	$\frac{f_R (1 - P)}{\alpha_R + \beta_R}$	$\frac{\beta_R}{\alpha_R + \beta_R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_C$
$\lim_{P \rightarrow \infty}$	0	0	0	0	$(1 - P) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_C$
$\lim_{P \rightarrow 0}$	$\frac{\alpha_R}{\alpha_R + \beta_R}$	$\frac{f_R}{\alpha_R + \beta_R}$	$\frac{2\alpha_R}{\alpha_R + 2\beta_R}$	$\frac{2f_R}{\alpha_R + 2\beta_R}$	$-\frac{\alpha_R}{\alpha_R + 2\beta_R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_C$

Tablica 3.1 prikazuje sadržaj članova izraza (3.47) za slučaj ugradnje rubnih uvjeta primjenom shema diferencije u njihovom izvornom obliku. Izvorni oblik EDS sheme diferencije za slučaj  $P \rightarrow 0$  (uz  $f \rightarrow 1$ ), predstavlja postupak diskretizacije difuzijskog protoka fizikalne veličine putem jednostrane ekstrapolacije koja je prvog reda točnosti. Kako primjena postupka korekcije za neortogonalnost zahtijeva prisustvo polja gradijenta fizikalne veličine u proračunskom postupku, ono se prilikom ugradnje rubnih uvjeta za slučaj  $P \rightarrow 0$  koristi i kod EDS sheme, čime se postiže diskretizacija difuzijskog protoka aproksimacijom drugog reda točnosti. Za taj je slučaj, sadržaj članova kod EDS sheme istovjetan sadržaju članova za slučaj primjene EDSI sheme diferencije, pri  $P \rightarrow 0$ .

Nakon završetka proračuna, u svrhu provedbe analize rezultata, vrijednosti fizikalne veličine i projekcije njena gradijenta na rubnim stranicama određuju se izrazima oblika:

$$\Phi|_n = \frac{\beta_R B_b}{\alpha_R + \beta_R B_b} \Phi_C + \frac{1}{\alpha_R + \beta_R B_b} f_R + \Delta \Phi_b; \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n = -\frac{\alpha_R B_b}{\alpha_R + \beta_R B_b} \Phi_C + \frac{B_b}{\alpha_R + \beta_R B_b} f_R + \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_b; \quad (3.49)$$

gdje su dodaci koji predstavljaju doprinos uslijed primjene projekcije gradijenta u svrhu ostvarivanja višeg reda točnosti:

- za EDSI shemu diferencije:

$$\Delta \Phi_b = \frac{\beta_R (B_b - 1)}{\alpha_R + \beta_R B_b} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C; \quad \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_b = -\frac{\alpha_R (B_b - 1)}{\alpha_R + \beta_R B_b} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C$$

- za EDS shemu diferencije, u primjeni u ovom radu:

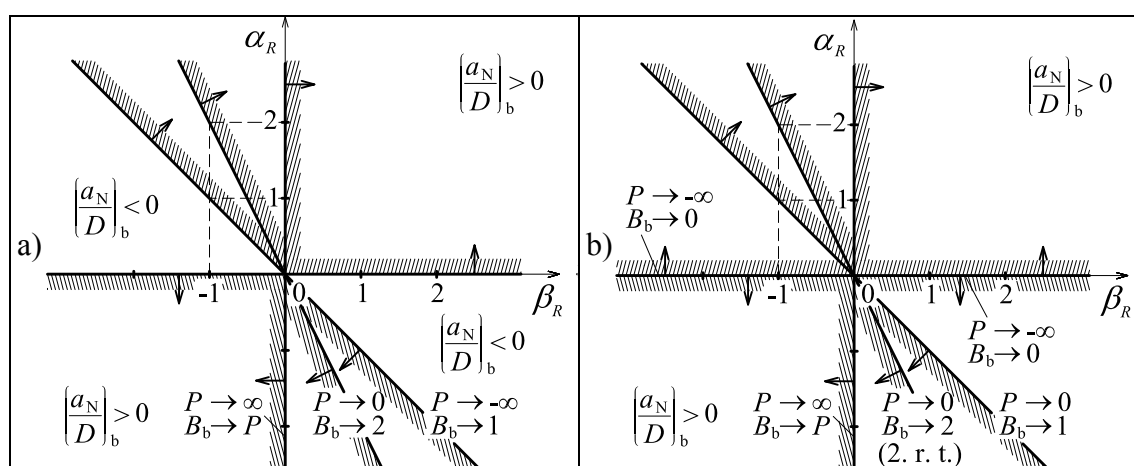
$$\text{za } P = 0: \quad \Delta \Phi_b = \frac{\beta_R}{\alpha_R + 2\beta_R} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C; \quad \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_b = -\frac{\alpha_R}{\alpha_R + 2\beta_R} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_C$$

$$\text{za } P \neq 0: \quad \Delta \Phi_b = 0; \quad \Delta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_b = 0$$

Fizikalni rubni uvjeti koji se najčešće susreću, a pojavljuju se i u ovom radu jesu: ulazna i izlazna granica (obzirom na smjer strujanja), zid (nepropustan za maseni protok), te ravnina simetrije. U nastavku slijedi osvrt spram primjene EDS i EDSI shema diferencije prilikom njihova zadavanja.

### Doprinos dijagonalnom koeficijentu sustava jednadžbi

U slučaju primjene EDS i EDSI shema diferencije, predznak dodatka dijagonalnom koeficijentu ovisi o vrijednosti Pecletova broja i odabiru vrijednosti faktora linearne kombinacije  $\alpha_R$  i  $\beta_R$  u Robinovom rubnom uvjetu (3.44). Veličine  $B_b$  i  $(B_b - P)$ , koje se pojavljuju u gornjim izrazima i u tablici 3.1, ostaju pozitivne pri svim vrijednostima Pecletova broja. U skladu s time su na slici 3.6 prikazana područja vrijednosti faktora linearne kombinacije. Područja vrijednosti faktora  $\alpha_R$  i  $\beta_R$ , pri kojima EDS i EDSI shema diferencije ostvaruju pozitivnu vrijednost dodatka dijagonalnom koeficijentu matrice sustava, na slici su prikazana kao osjenčana područja.



Slika 3.6 Ovisnost predznaka dodatka dijagonalnom koeficijentu o Pecletovom broju:

- a) za EDSI shemu  
b) za EDS shemu.



### Ulazna granica

Na ulaznoj granici prostornog područja globalnog kontrolnog volumena obično je poznata samo vrijednost fizikalne veličine, što odgovara Dirichletovom rubnom uvjetu, a primjenom Robinova rubnog uvjeta (3.44) i u skladu sa slikom 3.5, uvjet se može zapisati vrijednostima:

$$-\infty \leq P < 0; \quad \alpha_R = 1; \quad \beta_R = 0; \quad f_R = \Phi_b(x_i, t). \quad (3.50)$$

Prema slici 3.6, za ovaj je slučaj doprinos dijagonalnom koeficijentu sustava uvijek pozitivan. Tako se zaključuje da primjena EDS i EDSI shema diferencije prilikom formiranja koeficijenata sustava, u ovom slučaju ne iziskuje posebnu pažnju, a utjecaj mogućeg difuzijskog dijela protoka ostvaruje se izravno, samom primjenom shema. Kako slučaj zadavanja ovog fizikalnog rubnog uvjeta najčešće podrazumijeva paralelno strujanje (lokalno-jednodimenzijnsko), odlika transportivnosti primijenjenih shema uvelike doprinosi točnosti proračunskog postupka.

### Izlazna granica

Očekivani uvjeti strujanja na izlaznoj granici, mogu se opisati područjem vrijednosti Pecletova broja (u skladu sa slikom 3.5):  $0 < P \leq \infty$ . Eliptički karakter konveksijsko-difuzijske jednadžbe za slučaj vrijednosti koeficijenta difuzije  $\Gamma \neq 0$  ( $P \neq \infty$ , na granici), uvjetuje postavljanje rubnog uvjeta i na izlaznoj granici. Za slučaj primjene postupka ugradnje rubnog uvjeta putem shema diferencije višeg reda točnosti, koje se ne odlikuju svojstvom transportivnosti, udovoljavanje ovom matematičkom zahtjevu putem Dirichletovog rubnog uvjeta dovodi do pojave negativnog dodatka dijagonalnom koeficijentu matrice sustava. Kako u glavnini slučajeva, vrijednost fizikalne veličine na izlaznoj granici ionako nije poznata, pribjegava se postavljanju granice na mjesto gdje se očekuju parabolni uvjeti strujanja.

Ovaj se slučaj može zapisati kao Neumannov rubni uvjet s nultom vrijednošću projekcije gradijenta fizikalne veličine:

$$0 < P \leq \infty; \quad \alpha_R = 0; \beta_R = 1; \quad f_R = 0, \quad (3.51)$$

što prilikom ugradnje ishoduje nulti doprinos na objema stranama pripadne jednadžbe sustava.

U skladu sa prikazima na slici 3.6, EDS i EDSI sheme dopuštaju zadavanje Dirichletovog rubnog uvjeta bez ograničavanja implicitnosti postupka ugradnje. Ovo svojstvo shema predstavlja odraz njihove transportivnosti, i u određenim slučajevima može biti korisno. U slučajevima općenitog mješovitog rubnog uvjeta, faktore linearne kombinacije može se izabrati iz područja pozitivnog doprinosa, prikazanim na slici 3.6 ili se, ukoliko je to potrebno, rubni uvjet može ugraditi djelomice eksplicitno, dodavanjem negativnog dodatka u desnu stranu jednadžbe, koristeći vrijednosti fizikalne veličine iz prethodnog iterativnog koraka (eng.- Deferred correction).

### Zid

Kako je zid nepropustan, ovaj je fizikalni rubni uvjet određen nultom vrijednošću Pecletova broja:  $P = 0$ .

Ukoliko je riječ o modelu strujanja fluida nulte vrijednosti koeficijena difuzije, tada se kao jedini mogući fizikalni rubni uvjet pojavljuje nulta vrijednost konveksijsko-difuzijskog protoka:

$$P = 0; \quad \alpha_R = 0; \beta_R = 1; \quad f_R = 0; \quad (3.52)$$

što se u pripadnoj jednadžbi sustava zapisuje nultim dodacima dijagonalnom koeficijentu i desnoj strani.

Preostali slučajevi strujanja ( $T > 0$ ), dopuštaju širi izbor rubnih uvjeta. Slučaj izravnog zadavanja propisane vrijednosti konveksijsko-difuzijskog protoka  $J_b$  za slučaj zida, u

naravi predstavlja Neumannov rubni uvjet, koji se putem općeg oblika Robinovog rubnog uvjeta može zapisati odgovarajućom kombinacijom vrijednosti faktora  $\beta_R$  i zadanog protoka  $J_b$ , poput:

$$P = 0; \quad \alpha_R = 0; \beta_R = -D; \quad f_R = J_b. \quad (3.53)$$

U slučaju čistog Neumannovog rubnog uvjeta, uvjet se zadaje poznatom vrijednošću projekcije gradijenta:

$$P = 0; \quad \alpha_R = 0; \beta_R = 1; \quad f_R = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_b. \quad (3.54)$$

Ova dva fizikalna rubna uvjeta zapisuju se nultim dodatkom dijagonalnom koeficijentu i odgovarajućim dodatkom na desnoj strani sustava, u skladu sa tablicom 3.1, i gornjim izrazima (3.53), odnosno (3.54).

Dirichletov rubni uvjet propisuje se putem zadane vrijednosti polja fizikalne veličine na granici u obliku:

$$P = 0; \quad \alpha_R = 1; \beta_R = 0; \quad f_R = \Phi_b. \quad (3.55)$$

U slučaju temperaturne jednadžbe, fizikalni rubni uvjet zadane konvekcije s vanjske strane granice zadaje se primjenom Robinovog rubnog uvjeta u punom obliku, gdje faktor  $\alpha_R$  sadrži zadani koeficijent prijelaza topline:  $\alpha_b$  ( $\alpha_b > 0$ ), dok se uvjet zapisuje u obliku zakona očuvanja toplinskog toka na kontrolnoj površini:

$$P = 0; \quad \alpha_R = \alpha_b \Delta S; \beta_R = D; \quad f_R = \alpha_b \Delta S \Phi_\infty. \quad (3.56)$$

Prema slici 3.6, primjena Dirichletovog (3.55) i prikazanog oblika Robinovog (3.56) rubnog uvjeta uvijek ishoduje pozitivnu vrijednost dodatka dijagonalnom koeficijentu.

### Simetrija

Ovim se fizikalnim rubnim uvjetom polja svih fizikalnih veličina predmetnog modela strujanja, uvjetuju raspodjelom koja će predstavljati zrcalnu sliku spram odabrane ravnine. Uz samo uvjetovanje rješenja, njegovom se primjenom smanjuje i prostor globalnog kontrolnog volumena čime se ostvaruju uštede na strani računalnih resursa potrebnih za proračun. Prema uvjetu, polje brzine će u točkama ravnine simetrije imati nultu vrijednost normalne komponente, pa se lokalni uvjeti strujanja spram rubne stranice mogu iskazati vrijednošću Pecletova broja  $P = 0$ . U slučaju polja fizikalne veličine koja predstavlja skalarnu veličinu, uvjet njene simetrične raspodjele duž normale na ravninu simetrije, predstavlja uvjet nulte vrijednosti normalne projekcije njena gradijenta u točkama ravnine. Ovaj se slučaj putem Robinova uvjeta iskazuje izrazom oblika (3.52), i također predstavlja nultu vrijednost konvekcijsko-difuzijskog protoka, te ishoduje nulte vrijednosti dodataka na objema stranama pripadne jednadžbe.

## 4 PRIMJENA METODE KONAČNIH VOLUMENA ZA RJEŠAVANJE JEDNADŽBI STRUJANJA FLUIDA

### 4.1 Diskretizacija jednadžbi strujanja fluida

Strujanje fluida, opisano je sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, u kojemu su sve jednadžbe oblika opće konvekcijsko difuzijske jednadžbe, pa je upravo opisani postupak diskretizacije primjenjiv na svaku od njih. Za model nestlačivog strujanja (Tablica 2.1), jednadžbe: kontinuiteta, količine gibanja i energijska jednadžba, u diskretiziranom obliku, u skladu s jednadžbama (3.15) i (3.38) glase:

$$\sum_{k=1}^{nb_{iv}} F^k = 0; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (4.1)$$

$$\left(a_C^{v_i}\right)_{iv} (v_i)_{iv} - \sum_{k=1}^{nb_{iv}} \left(a_N^{v_i}\right)^k (v_i)^k = \left(b^{v_i}\right)_{iv} - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)_{iv} \Delta V_{iv}; \quad iv = 1, 2, \dots, nv; \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

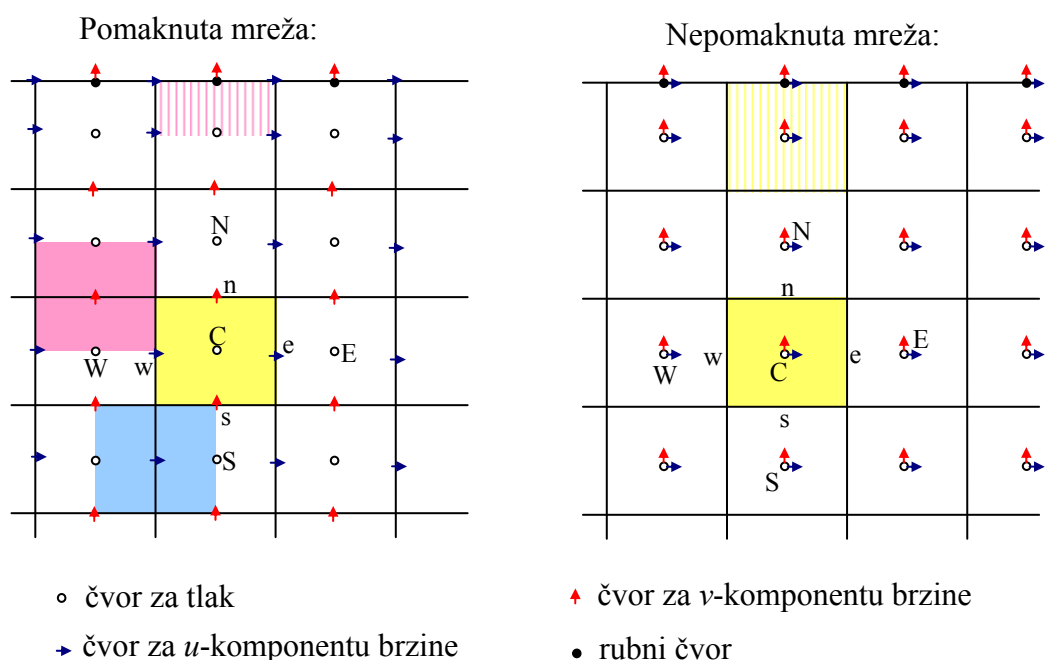
$$\left(a_C^T\right)_{iv} (T)_{iv} - \sum_{k=1}^{nb_{iv}} \left(a_N^T\right)^k (T)^k = \left(b^T\right)_{iv}; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (4.3)$$

Jednadžba (4.2) je nelinearna, jer su koeficijenti funkcija nepoznatog polja brzine, te će numerički postupak nužno biti iterativan. Jednadžba se obično linearizira načinom da se koeficijenti diskretizirane jednadžbe računaju temeljem polja brzine određenog u prethodnoj iteraciji. U jednadžbi (4.2), član s gradijentom tlaka namjerno je izdvojen iz izvorskog člana, kako bi se naglasilo da se tlak pojavljuje samo u jednadžbi količine gibanja i to u obliku gradijenta. Ovime je polje tlaka neodređeno do na konstantu, tj. vrijednost tlaka potrebno je zadati samo u jednoj točki globalnog kontrolnog volumena. Prilikom rješavanja jednadžbi strujanja, polje temperature proizlazi rješavanjem sustava jednadžbi (4.3), polje brzine iz sustava (4.2), dok za određivanje polja tlaka preostaje

sustav diskretiziranih jednadžbi kontinuiteta (4.1), u kojima se tlak uopće ne pojavljuje. Ovo označuje osnovni problem u rješavanju sustava jednadžbi (4.1) do (4.3). Kao što je to već spomenuto u uvodnom dijelu ovog rada, za rješavanje ovog sustava postoji više algoritama, a danas se najčešće koristi algoritam SIMPLE, koji je izvorno definiran na pomaknutim mrežama. Stoga je u nastavku ukratko opisan ovaj algoritam, najprije na pomaknutoj mreži, a zatim na nepomaknutoj. Zbog jednostavnosti, energijska jednadžba (4.3) promatra se kao pasivna jednadžba, a opis postupka odnosi se samo na sustave jednadžbi (4.1) i (4.2).

## 4.2 Algoritam SIMPLE na pomaknutoj mreži

Slika 4.1 prikazuje dio kartezijske geometrijske mreže u dvodimenzijskoj situaciji s rasporedom čvorova u kojima se računaju komponente polja brzine i polje tlaka.



Slika 4.1 Dio kartezijske mreže (lijevo s pomaknutim, a desno nepomaknutim čvorovima)

U slučaju nepomaknute mreže i polje brzine i polje tlaka računaju se u istim čvorovima (težištima konačnih volumena), dok se u slučaju pomaknute mreže, polje tlaka računa u težištima volumena, a komponente brzine računaju se u čvorovima koji su pomaknuti na stranice tih konačnih volumena. U slučaju pomaknute mreže se oko svakog čvora u kojem se računa komponenta brzine formiraju konačni volumeni (pri čemu čvorovi za brzinu nisu nužno u težištu tako formiranih volumena). Komponente jednadžbe količine gibanja diskretiziraju se oko pomaknutih volumena, s čvorovima na stranicama volumena u kojima se računa tlak, odnosno diskretizira jednadžba kontinuiteta. Nedostatak pomaknute mreže sastoji se u tome da postupak zahtijeva tri mreže (u dvodimenzijskoj situaciji, a četiri u trodimenzijskoj), što u slučaju kartezijskih mreža ne predstavlja problem, ali postaje problem prilikom primjene nestrukturiranih mreža. Dobra strana pomaknutih mreža jest ta što se derivacija tlaka u komponentama jednadžbe količine gibanja diskretizira razlikom tlaka u dva susjedna čvora, npr. za čvor  $e$  na slici 4.1 lijevo, jednadžba količine gibanja za horizontalni smjer, glasi:

$$a_C^{v_1} (v_1)_e - \sum_{k=1}^{nb_e} (a_N^{v_1})^k (v_1)^k = (b^{v_1})_e - (p_E - p_C) \Delta S_e, \quad (4.4)$$

gdje je  $\Delta S_e$  površina istočne stranice (u skladu s kompasnim označavanjem strana) konačnog volumena s težištem  $C$ . Analogno vrijedi i za sjevernu stranicu:

$$a_C^{v_2} (v_2)_n - \sum_{k=1}^{nb_n} (a_N^{v_2})^k (v_2)^k = (b^{v_2})_n - (p_N - p_C) \Delta S_n. \quad (4.5)$$

Za slučaj pomaknute mreže, broj volumena za diskretizaciju jednadžbe količine gibanja odgovara broju unutarnjih stranica globalnog kontrolnog volumena (na stranicama koje čine granice, brzine su zadane rubnim uvjetima). Također, za određivanje brzina na unutarnjim stranicama nije potrebno poznavati tlak na granicama a taj se tlak može odrediti iz diskretiziranih jednadžbi količine gibanja za polovične volumene uz rub. Dakle, pomaknuta je mreža prirodna sa stajališta rješavanja modela strujanja, jer broj nepoznatih vrijednosti brzine i tlaka odgovara broju raspoloživih jednadžbi za njihovo određivanje.

Diskretizirani oblik jednadžbe kontinuiteta se u ovom slučaju, primjerice za volumen s težištem C na slici 4.1 može zapisati kao:

$$\sum_{k=1}^{nb_{iv}} F^k \equiv (\rho v_1 \Delta S)_e - (\rho v_1 \Delta S)_w + (\rho v_2 \Delta S)_n - (\rho v_2 \Delta S)_s = 0. \quad (4.6)$$

Postupak SIMPLE za rješavanje modela strujanja fluida započinje pretpostavkom polja brzine i tlaka  $p^*$ .

Korak 1) Temeljem trenutnih vrijednosti polja brzine i tlaka  $p^*$ , računaju se koeficijenti u jednadžbama oblika (4.4) i (4.5), a njihovim rješavanjem slijede vrijednosti komponenti brzine:  $v_1^*$  i  $v_2^*$ . Tako određene komponente zadovoljavaju jednadžbu količine gibanja, ali neće zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta (kada tlak nije točan).

Korak 2) Brzine i tlak korigiraju se po shemi:  $v_1 = v_1^* + v_1'$ ,  $v_2 = v_2^* + v_2'$  i  $p = p^* + p'$ , gdje crtice označuju korekcije. Traži se da korigirane veličine istodobno zadovoljavaju i jednadžbu kontinuiteta i jednadžbu količine gibanja. S obzirom da  $v_1^*$ ,  $v_2^*$  i  $p^*$  zadovoljavaju jednadžbu količine gibanja, očito je da korekcije brzine i tlaka također trebaju zadovoljavati jednadžbe količine gibanja oblika (4.4) i (4.5). S obzirom da s konvergencijom postupka korekcije trebaju težiti k nuli, član koji sadrži sumu korekcija brzina u okolnim čvorovima se zanemaruje. Opisani postupak dovodi do pojednostavljene veze između korekcija brzina i tlaka, koje glase:

$$(v_1')_e = -\frac{\Delta S_e}{a_C^{v_1}} (p'_E - p'_C) \quad \text{i} \quad (v_2')_n = -\frac{\Delta S_n}{a_C^{v_2}} (p'_N - p'_C). \quad (4.7)$$

Uvrštavanjem jednadžbi oblika (4.7) u jednadžbu kontinuiteta (4.6) slijedi jednadžba za korekciju tlaka oblika:

$$a_C^p (p')_C - \sum_{k=1}^{nb_C} (a_N^p)^k (p')^k = (b^p)_C, \quad (4.8)$$



gdje je  $(b^p)_c = -(\rho v_1^* \Delta S)_e + (\rho v_1^* \Delta S)_w - (\rho v_2^* \Delta S)_n + (\rho v_2^* \Delta S)_s$  - odstupanje jednadžbe kontinuiteta za polje brzine određeno u prvom koraku. Kada je jednadžba kontinuiteta zadovoljena u svim konačnim volumenima, korekcija tlaka jednaka je nuli. Nakon rješavanja jednadžbe za korekciju tlaka (4.8), izvodi se korekcija brzine prema izrazima (4.7), a korekcija tlaka se podrelaksira prema izrazu  $p = p^* + \alpha_p p'$ , gdje je  $\alpha_p$  podrelaksacijski faktor ( $0 < \alpha_p < 1$ ). Nakon korekcije brzina, one više neće zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta, te se postupak vraća na prvi korak i ponavlja do istodobnog zadovoljavanja svih jednadžbi matematičkog modela.

### 4.3 Algoritam SIMPLE na nepomaknutoj mreži

Osnovni nedostatak primjene algoritma SIMPLE na pomaknutim mrežama, sastoji se u tome što je teško primjenjiv na nestrukturiranim mrežama. Zbog toga se nastoji definirati algoritam za rješavanje modela strujanja fluida na nepomaknutoj mreži kod koje se sve nepoznanice računaju u istim čvorovima, odnosno sve jednadžbe diskretiziraju na istim konačnim volumenima, iako takav pristup ima određenih nedostataka. Diskretizacija jednadžbe kontinuiteta za slučaj nepomaknute mreže ostaje ista kao i za slučaj pomaknute mreže, s razlikom da brzine na stranicama konačnih volumena trebaju biti interpolirane iz vrijednosti brzine u centralnim čvorovima, pa vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{nb_{ij}} F^k \equiv (\rho \bar{v}_1 \Delta S)_e - (\rho \bar{v}_1 \Delta S)_w + (\rho \bar{v}_2 \Delta S)_n - (\rho \bar{v}_2 \Delta S)_s = 0, \quad (4.9)$$

gdje potez označuje interpoliranu veličinu. Ovo predstavlja prvi nedostatak nepomaknute mreže, jer je jednadžba kontinuiteta zadovoljena interpoliranim brzinama, za razliku od pomaknute mreže, gdje jednadžbu kontinuiteta zadovoljavaju brzine, koje su izračunate izravno iz jednadžbe količine gibanja. Ako se primijeni linearna interpolacija, za slučaj ravnomjerne mreže uz oznake sa slike 4.1, vrijedi:

$(\bar{v}_1)_e = [(\bar{v}_1)_E + (\bar{v}_1)_C] / 2$ ,  $(\bar{v}_2)_n = [(\bar{v}_2)_N + (\bar{v}_2)_C] / 2$ , i tako redom, čime jednačina kontinuiteta za konačni volumen s centralnim čvorom C, izražena čvornim vrijednostima brzine glasi:

$$[\rho(v_1)_E \Delta S_e] + [\rho(v_2)_N \Delta S_n] - [\rho(v_1)_W \Delta S_w] - [\rho(v_2)_S \Delta S_s] = 0 \quad (4.10)$$

Temeljem gornjeg izraza, za slučaj ravnomjerne mreže i linearne interpolacije, brzine  $(v_1)_C$  i  $(v_2)_C$  ne pojavljuju se u jednačini kontinuiteta za konačni volumen oko čvora C. Diskretizirani oblici komponenti jednačine količine gibanja, uz primjenu sheme centralnih razlika za derivacije tlaka, za slučaj ravnomjerne mreže, prema slici 4.1, glase:

$$a_C^{v_1} (v_1)_C - \sum_{k=1}^{nb_C} (a_N^{v_1})^k (v_1)^k = (b^{v_1})_C - (p_E - p_W)(\Delta S_1)_C, \quad (4.11)$$

$$a_C^{v_2} (v_2)_C - \sum_{k=1}^{nb_C} (a_N^{v_2})^k (v_2)^k = (b^{v_2})_C - (p_N - p_S)(\Delta S_2)_C, \quad (4.12)$$

gdje površine  $(\Delta S_1)_C$  i  $(\Delta S_2)_C$  prolaze čvorom C i imaju normale u smjeru pripadajućih komponenti brzine. Dobra strana diskretizacije na nepomaknutoj mreži jest ta što su koeficijenti isti u obje jednačine, za razliku od koeficijenata u jednačinama diskretiziranim na pomaknutoj mreži. Međutim, na nepomaknutim mrežama nastaje problem pojave tzv. "cik-cak" raspodjele tlaka, koja se može objasniti jednačinama (4.11) i (4.12). Očito je da za određivanje vrijednosti brzina  $(v_1)_C$  i  $(v_2)_C$  u čvoru C, uopće nije važna vrijednost tlaka u čvoru C, već samo vrijednosti tlaka u okolnim čvorovima. To znači da se pri cik-cak raspodjeli tlaka (raspored poput onog na šahovskoj ploči; na bijelim poljima jedna vrijednost, a na crnima druga) ona u jednačinama (4.11) i (4.12) očituje jednako kao i konstantno polje tlaka. Da bi se izbjegla pojava cik-cak raspodjele tlaka, očito je potrebno derivaciju tlaka diskretizirati vrijednostima u susjednim čvorovima, kako je to učinjeno u slučaju pomaknute mreže. Temeljem te činjenice Rhie i Chow [41] su predložili interpolaciju brzine na stranicu konačnog volumena u kojoj se koristi derivacija tlaka diskretizirana razlikom tlaka u

dva susjedna čvora. Jednadžbu (4.11) se nakon dijeljenja s koeficijentom  $a_C^{v_1}$  može zapisati u obliku:

$$(v_1)_C = \frac{\sum_{k=1}^{nb_C} (a_N^{v_1})^k (v_1)^k + (b^{v_1})_C}{a_C^{v_1}} - \frac{(\Delta S_1)_C}{a_C^{v_1}} (p_E - p_W) = (\hat{v}_1)_C - \frac{(\Delta S_1)_C}{a_C^{v_1}} (p_E - p_W), \quad (4.13)$$

gdje je  $(\hat{v}_1)_C = \frac{\sum_{k=1}^{nb_C} (a_N^{v_1})^k (v_1)^k + (b^{v_1})_C}{a_C^{v_1}}$  dio brzine  $(v_1)_C$  koji ne ovisi o tlaku. Istim se

načinom može prikazati i brzina u čvoru E. Linearna interpolacija ovako prikazanih brzina iz čvorova C i E u čvor e na stranici konačnog volumena, podrazumijeva i interpolaciju brzina  $(\hat{v}_1)_C$  i  $(\hat{v}_1)_E$ , i interpolaciju članova s derivacijom tlaka, dok se zamisao Rhie-Chow interpolacije sastoji u tome da se interpolirane derivacije tlaka zamijene stvarno diskretiziranom derivacijom tlaka (razlikom iz dva susjedna čvora), tako da vrijedi:

$$(v_1)_e = \overline{(\hat{v}_1)_e} - \overline{\left(\frac{\Delta S_1}{a^{v_1}}\right)_e} (p_E - p_C), \quad (4.14)$$

gdje se  $\overline{(\hat{v}_1)_e}$  i  $\overline{\left(\frac{\Delta S_1}{a^{v_1}}\right)_e}$  određuju linearnom interpolacijom iz vrijednosti definiranih u čvorovima C i E, prema slici 4.1. Temeljem izraza (4.14) definira se i veza između korekcije brzine i korekcije tlaka, analogno izrazima (4.7):

$$(v'_1)_e = -\overline{\left(\frac{\Delta S_1}{a^{v_1}}\right)_e} (p'_E - p'_C) \quad \text{i} \quad (v'_2)_n = -\overline{\left(\frac{\Delta S_2}{a^{v_2}}\right)_n} (p'_N - p'_C), \quad (4.15)$$

nakon čega jednadžba za korekciju tlaka slijedi provedbom istog postupka, kao i u slučaju pomaknute mreže. Jednom kad je definirana jednadžba za korekciju tlaka definira se algoritam SIMPLE, jednako kao i na pomaknutoj mreži, što znači da se najprije rješavaju jednadžbe količine gibanja, a zatim jednadžba za korekciju tlaka, na

temelju koje se korigiraju brzine na stranicama konačnog volumena i u glavnim čvorovima, a korekcija tlaka se podrelaksira u obliku  $p = p^* + \alpha_p p'$ .

Iako se danas Rhie-Chow interpolacija široko koristi u komercijalnim računalnim paketima, jer omogućuje primjenu nepomaknutih mreža, što je značajno pri primjeni nestrukturiranih ili strukturiranih neortogonalnih mreža, ona ima i određene nedostatke:

Uz zadane brzine po granicama, u slučaju nepomaknute mreže, broj nepoznatih vrijednosti brzine jednak je broju konačnih volumena pomnoženih s brojem komponenti polja brzine, što odgovara broju raspoloživih diskretiziranih jednadžbi količine gibanja. Vrijednosti tlaka u čvorovima unutar globalnog kontrolnog volumena računaju se iz jednadžbe kontinuiteta diskretizirane po tim konačnim volumenima, dok za vrijednosti tlaka na granicama ne postoje fizikalne dopunske jednadžbe, što znači da postoji više nepoznanica nego raspoloživih jednadžbi za njihovo određivanje. Problem je što se vrijednosti tlaka na granicama za slučaj nepomaknute mreže pojavljuju u diskretiziranim oblicima jednadžbe količine gibanja (dakle utječu na polje brzine), pa ih je potrebno na neki način definirati. Obično se primjenjuje neka ekstrapolacija tlaka (prvog ili drugog reda točnosti) korištenjem vrijednosti iz čvorova unutar globalnog kontrolnog volumena. Jasno je da primjena ekstrapolacije unosi određenu proizvoljnost u numerički postupak, odnosno u rješenje za polje brzine. S fizikalnog gledišta, za neke se rubne uvjete mogu definirati fizikalni principi za ekstrapolaciju tlaka na rub područja proračuna. Primjerice, poznato je da na ravnini simetrije vrijedi  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$  (gdje je  $n$  smjer okomito na rub), pa ekstrapolacija koja uvažava ovaj uvjet neće unijeti značajnu pogrešku u polje brzine. Slično je i s dobro odabranom izlaznom granicom (parabolično strujanje), na kojoj će biti  $\frac{\partial p}{\partial n} = \text{konst.}$ , pa će ekstrapolacija prvog reda točnosti biti prihvatljiva. Također, u graničnom sloju uz blago zakrivljenu stjenku vrijedi da je  $\frac{\partial p}{\partial n} \approx 0$ , pa ni uz tu granicu neće biti problema. Problemi mogu nastupiti u slučaju jako zakrivljene, valovite granice, odnosno na mjestima gdje se polje tlaka više mijenja u blizini ruba, ili na ulaznoj granici, kada je zadani profil brzine jednolik po presjeku, a neposredno uz granicu dolazi do razvoja profila brzine odnosno do značajnih promjena

tlaka. U tim slučajevima metode na nepomaknutim mrežama, ovisno o primijenjenoj ekstrapolaciji tlaka, mogu dovesti do nefizikalnog polja brzine.

U izrazu (4.14) veličine  $\overline{(\hat{v}_1)_e}$  i  $\overline{\left(\frac{\Delta S_1}{a^{v_1}}\right)_e}$  određuju se linearnom interpolacijom iz vrijednosti u centralnim čvorovima (centralnim konačnim volumenima na kojima se diskretiziraju komponente jednadžbe količine gibanja). U izrazu (4.14) brzina  $(v_1)_e$  i tlakovi  $p_E$  i  $p_C$  su intenzivne veličine, što znači da ne ovise o veličini i obliku konačnog volumena, dok veličine  $\overline{(\hat{v}_1)_e}$  i  $\overline{\left(\frac{\Delta S_1}{a^{v_1}}\right)_e}$  to nisu. Interpolacija ekstenzivnih veličina (koje su definirane oblikom i veličinom centralnog volumena) u čvor na stranici konačnog volumena (oko kojeg nije jednoznačno definiran volumen) je donekle upitna. Interpolirane vrijednosti će se razlikovati od vrijednosti koje bi se dobile postupkom diskretizacije na točno definiranom volumenu oko točke  $e$  kao u slučaju pomaknute mreže.

Rhie-Chow interpolacija može dati interpoliranu brzinu  $(v_1)_e$  koja se nalazi izvan intervala  $[(v_1)_C, (v_1)_E]$ , što znači da takva interpolacija može stvarati nove ekstreme brzine. Drugim riječima, problem cik-cak raspodjele tlaka može se premjestiti na cik-cak polje brzine. Naravno, ovaj problem nije izravno uočljiv jer kad se jednom odrede brzine u glavnim čvorovima, interpolirano polje brzine, kojime je zadovoljena jednadžba kontinuiteta više se ne razmatra.

## 4.4 Novi algoritam

Pomaknuta mreža označuje prirodan odabir za razvoj numeričke metode, jer ne zahtijeva zadavanje nefizikalnih rubnih uvjeta za tlak i nikakve mehanizme za sprječavanje *cik-cak* raspodjele tlaka. Prema tome se sam po sebi nameće izbor razmještaja varijabli po uzoru na SIMPLE algoritam u formulaciji na pomaknutoj mreži, gdje se tlak i brzine odnosno protoci računaju na različitim mjestima. U kontekstu formulacije na nepomaknutim mrežama, protoci kroz stranice konačnih volumena predstavljaju ekvivalent brzinama iz formulacije na pomaknutoj mreži. Na tragu zamisli o povratku na izvornu formulaciju SIMPLE algoritma na pomaknutim mrežama, umjesto brzina u težištima konačnih volumena, pri formiranju novog algoritma za nepoznanice u numeričkom postupku odabrane su normalne komponente brzine (ili maseni protoci) kroz stranice konačnih volumena. U skladu s poželjnom formulacijom na nepomaknutim mrežama, čvorovi u kojima se računaju vrijednosti polja tlaka, gradijenta tlaka i svih drugih veličina ostaju u težištima konačnih volumena.

U skladu s navedenim, mogu se formulirati dva problema:

1. Protoci kroz stranice konačnih volumena prirodne su varijable pri rješavanju jednadžbe kontinuiteta. Budući da se u jednadžbi količine gibanja pojavljuju brzine u centrima konačnih volumena, potrebno je osigurati jednoznačnu vezu između njih i protoka kroz stranice konačnih volumena.
2. Obzirom da polje tlaka nema svoju jednadžbu, za tlak je potrebno ili izvesti odgovarajuću jednadžbu ili ga eliminirati iz sustava jednadžbi.

Uz navedeno, za dobivanje jednoznačnog rješenja problema, numerička procedura nužno treba rezultirati sustavom linearnih algebarskih jednadžbi s usklađenim brojem jednadžbi i nepoznanica. U nastavku se opisuje način rješavanja ovih problema u novom algoritmu.

### Veza između masenih protoka na stranicama konačnog volumena i brzine u njegovom centru

U jednadžbi količine gibanja, konvekcijski član je nelinearan. Kod nepomaknutih mreža, primjena diskretizacijske sheme na konvekcijskom članu dovodi do diskretizacije polja brzine na različitim mjestima. Jedno mjesto pojave diskretnog polja brzine jesu protoci kroz stranice, dok se kao drugo mjesto pojavljuju vrijednosti brzine u centrima konačnih volumena. Zbog toga će biti potrebno interpolirati vrijednosti polja brzine ili iz centara konačnih volumena na stranice ili obrnuto, ovisno o tome što predstavlja varijablu u algoritmu. Tako se u algoritmu SIMPLE na nepomaknutim mrežama (gdje su nepoznanice brzine u centrima konačnih volumena) interpoliraju brzine na stranice konačnih volumena (za potrebe računanja protoka), dok se u istom algoritmu na pomaknutim mrežama (gdje su nepoznanice brzine na stranicama konačnih volumena) izvodi interpolacija u centre i vrhove konačnih volumena. Valja naglasiti da je u prvom slučaju interpolacija čisto matematička, dok je u slučaju pomaknutih mreža ona takva da osigurava zadovoljavanje jednadžbe kontinuiteta i po dijelovima konačnih volumena. Kako je riječ o jedinstvenom polju brzine, veza između diskretiziranih vrijednosti brzine u centrima i na stranicama konačnih volumena treba biti jednoznačna, što podrazumijeva primjenu interpolacije samo u jednom smjeru. U novom algoritmu varijable su maseni protoci kroz stranice konačnih volumena, pa se kao i u slučaju algoritma SIMPLE na pomaknutim mrežama, interpolacija izvodi sa stranica konačnih volumena (iz masenih protoka koji zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta) u njihove centre. Interpolacijski izraz temelji se na identitetu:

$$\int_V \frac{\partial(\rho v_j x_i)}{\partial x_j} dV = \int_V x_i \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} dV + \int_V \rho v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dV, \quad (4.16)$$

koji se uz primjenu zakona očuvanja mase (2.1) preuređuje u oblik:

$$\int_V \frac{\partial(\rho v_j x_i)}{\partial x_j} dV = - \int_V x_i \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho v_i dV. \quad (4.17)$$

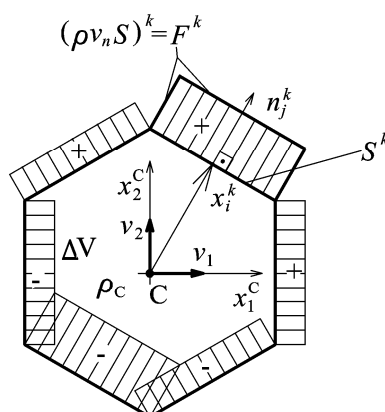
Ako se vremenska promjena gustoće aproksimira konstantnom vrijednošću unutar konačnog volumena, a za ishodište koordinatnog sustava odabere težište konačnog volumena, tada prvi član desne strane iščezava. Drugi se član aproksimira pomoću integralnog teorema o srednjoj vrijednosti kao:

$$\int_{\Delta V} \rho v_i dV \approx (\rho v_i)_C \Delta V.$$

Primjenom formule Gauss-Ostrogradskog na lijevu stranu izraza (4.17), te nakon integracije po konačnom volumenu sa slike 4.2 i sređivanja slijedi:

$$(\rho v_i)_C = \frac{1}{\Delta V} \sum_{k=1}^{nb_C} x_i^k F^k, \quad (4.18)$$

gdje  $x_i^k$  predstavlja vektor povučen od težišta C konačnog volumena do težišta  $k$  – te stranice, a  $F^k$  je maseni protok kroz  $k$  – tu stranicu. Za slučaj konstantne raspodjele normalne komponente masenog toka po  $k$  – toj stranici, gornja aproksimacija postaje identitet.



Slika 4.2 Veza između brzine u težištu i masenih protoka kroz stranice konačnog volumena



Izraz (4.18) omogućuje određivanje komponenti diskretnog polja brzine u centrima konačnih volumena na temelju masenih protoka po njegovim stranicama. Ova veza je fizikalna jer je izvedena temeljem zakona očuvanja mase.

### Eliminacija polja tlaka iz uvjeta nulte cirkulacije gradijenta tlaka

Kada je riječ o algoritmima koji koriste primitivne varijable (brzine i tlak), postupak rješavanja problema strujanja nestlačivog fluida može se predstaviti procesom korekcije polja brzine i tlaka do istodobnog zadovoljavanja i jednadžbe kontinuiteta i jednadžbe količine gibanja. U algoritmu SIMPLE korigira se polje tlaka sve dok polje brzine koje proizlazi iz jednadžbe količine gibanja (za dano polje tlaka) ne zadovolji jednadžbu kontinuiteta. Ideja novog algoritma je korigirati polje brzine sve dok parcijalne derivacije tlaka izračunate iz jednadžbe količine gibanja (za zadano polje brzine) ne budu označavale komponente gradijenta tlaka, tj. dok ne bude zadovoljen uvjet:

$$\varepsilon_{kji} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \equiv 0, \quad (4.19)$$

gdje  $\varepsilon_{kji}$  označuje permutirajući tenzor. Pri tome se polazi od polja brzine koje zadovoljava jednadžbu kontinuiteta, a postupak korekcije brzine je takav da ona uvijek ostaje zadovoljena. Druga odlika novog algoritma jest ta da u slučaju nestlačivog strujanja, polje tlaka nije potrebno računati tijekom iterativnog postupka. Nakon što se odredi polje gradijenta tlaka, ono se može rekonstruirati iz poznatog tlaka u jednoj točki. Ovakav pristup određivanju polja tlaka isključuje potrebu za njegovom eksplicitnom diskretizacijom pa time isključuje i sve probleme koji se pojavljuju pri diskretizaciji na nepomaknutim mrežama. Parcijalne derivacije tlaka, računaju se izravno iz diskretiziranih jednadžbi količine gibanja (4.2):

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_C \cdot \Delta V = - \sum_{k=1}^{nb_C} (J_i)^k - \frac{\rho \left( (v_i)_C - (v_i)_C^{(t-\Delta t)} \right)}{f_i \Delta t} \Delta V + (\tilde{b}_i)_C \Delta V; \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.20)$$

Integriranjem uvjeta (4.19) po površini  $S$  obrubljenoj krivuljom  $c$  uz primjenu Stokesova teorema, slijedi izraz:

$$\int_S \varepsilon_{kji} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) n_k dS = \oint_c \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i = \oint_c dp = 0, \quad (4.21)$$

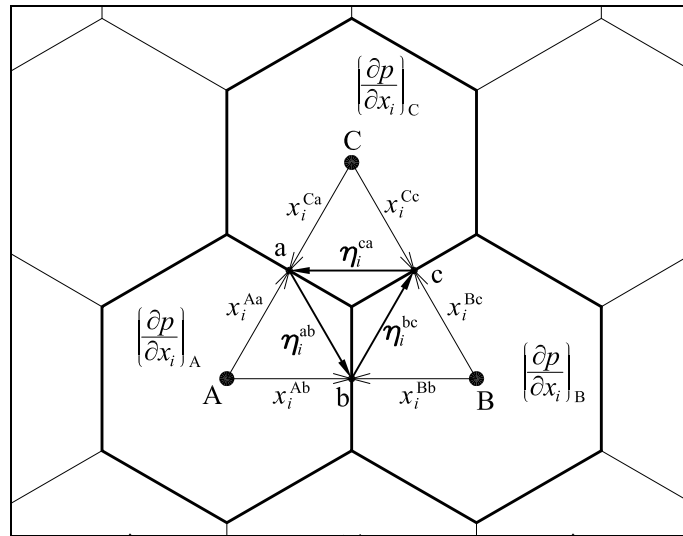
koji govori da je integral polja tlaka po zatvorenoj krivulji jednak nuli. Primjenom gornjeg izraza na trokutastu površinu definiranu čvorovima ABC, prema slici 4.3 slijedi:

$$\Delta p = \left( -x_i^{Aa} + x_i^{Ab} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_A + \left( -x_i^{Bb} + x_i^{Bc} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_B + \left( -x_i^{Cc} + x_i^{Ca} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_C = 0. \quad (4.22)$$

Uvođenjem pomoćnog vektora  $\eta_i$  koji zamjenjuje vektorske sume u gornjem izrazu, numerička formulacija uvjeta nulte vrtložnosti gradijenta tlaka (4.19) konačno glasi:

$$\Delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_A \cdot \eta_i^{ab} + \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_B \cdot \eta_i^{bc} + \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_C \cdot \eta_i^{ca} = 0. \quad (4.23)$$

Gornjim uvjetom nulte cirkulacije polja gradijenta tlaka definirana je osnova novog algoritma.



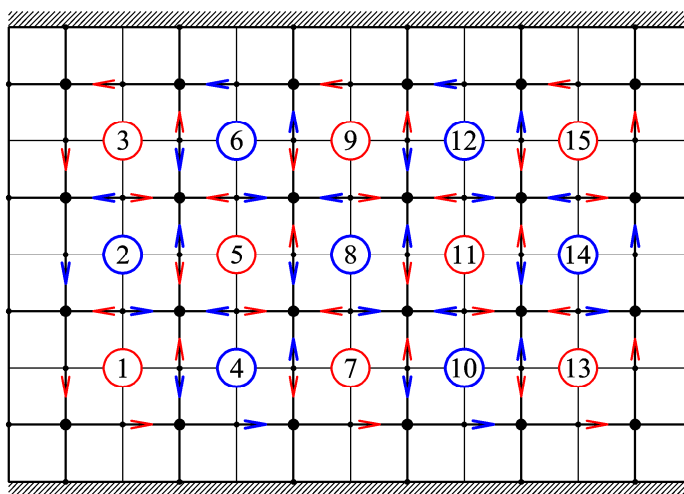
Slika 4.3 Uz numeričku formulaciju uvjeta nulte cirkulacije polja gradijenta tlaka.

U metodi konačnih volumena već postoje topološki elementi poput *konačnog volumena* i *stranice*, a radi lakšeg obrazlaganja predlaže se uvođenje dodatnog, s nazivom: **petlja**. Volumeni i stranice koje *petlja* sadrži nazivaju se **članovima** petlje, a pojedini dijelovi njene usmjerene krivulje nazivaju se **segmentima** petlje. Veličina označena s  $\Delta p$  u izrazima (4.22) i (4.23), naziva se **pad tlaka u petlji**.

Za proizvoljnu zatvorenu *elementarnu petlju* *il* koja sadrži *ns* *segmenata*, volumena i stranica, uvjet nulte cirkulacije gradijenta tlaka odn. nultog *pada tlaka u petlji* (4.23), glasi:

$$\Delta p^{il} = \sum_{j=1}^{ns_{il}} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \eta_i \right)^j = 0 \quad (4.24)$$

Uvjet (4.24) osigurava jedinstvenost polja tlaka u svim volumenima-članovima petlje koja ih sadrži, dok se jedinstvenost polja tlaka u ostatku globalnog kontrolnog volumena ostvaruje formiranjem dodatnih petlji za koje će također biti propisan uvjet (4.24). Gore opisani postupak određivanja tlaka, (u diskretiziranom obliku, izraz (4.24)), nalazi analogiju u metodi Hardy Crossa za proračun strujanja u složenim cjevovodnim mrežama [8], koja se može pronaći po udžbenicima iz mehanike fluida [21], [54]. U toj analogiji čvor cjevovodne mreže odgovara težištu konačnog volumena, a maseni protok kroz element cijevi između dva čvora odgovara protoku kroz stranicu. Darcy-Weissbachov izraz za pad tlaka u elementu cijevi, ovdje se pojavljuje u obliku izraza za promjenu tlaka između dva čvora koji proizlaze iz jednadžbe količine gibanja. Poznato je da ako u mreži postoji  $n$  elemenata i  $m$  čvorova, tada u sustavu postoji  $p=n-m+1$  petlji. Ovdje je broj petlji određen brojem spojnica težišta susjednih konačnih volumena i samim brojem volumena. Poznato je da će metoda Hardy Crossa najbrže konvergirati ako se koriste elementarne petlje (koje sadrže minimalno mogući broj elemenata u petlji).



Slika 4.4 Formiranje elementarnih petlji u globalnom kontrolnom volumenu

Slika 4.4 prikazuje primjer formiranja petlji u dvodimenzijskoj pravokutnoj mreži. Centri konačnih volumena označeni su velikim, a centri stranica malim crnim krugovima. U svakom vrhu konačnog volumena formira se po jedna petlja, koja se sastoji od spojnica u konačnim volumenima koji sadrže taj vrh. Smjer integracije gradijenta tlaka u uvjetu (4.24) naziva se **orijentacija petlje**. Radi bolje preglednosti, oznake petlji i njima pripadajuće orijentacije označene su istom bojom. Slika pokazuje kako je takvim načinom formiranja petlji, svaki konačni volumen povezan sa svakim od preostalih, pa je time osigurana i jedinstvenost polja tlaka na razini globalnog kontrolnog volumena. Kada se uvjet (4.24) raspiše za svaku od  $nl$  elementarnih petlji koje se mogu formirati u globalnom kontrolnom volumenu, dobiva se sustav od  $nl$  nelinearnih algebarski jednadžbi oblika:

$$\Delta p^{il} = \sum_{j=1}^{ns_{il}} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \eta_i \right)^j = 0; \quad il = 1, 2, \dots, nl. \quad (4.25)$$

### Konzervativna korekcija masenih protoka

Novi algoritam za nepoznanice ima protoke kroz stranice konačnih volumena. Oni su prirodne varijable pri rješavanju jednadžbe kontinuiteta, a brzine u težištu konačnog volumena koje se u jednadžbama količine gibanja (4.20) koriste za izračun parcijalnih derivacija tlaka određuju se interpolacijom (4.18). Tako se svaka od  $nl$  jednadžbi sustava (4.25) može iskazati kao funkcija nepoznatih masenih protoka kroz  $nf$  stranica diskretiziranog globalnog kontrolnog volumena, tj. u obliku:

$$\Delta p^{il} = f^{il}(F^1, F^2, \dots, F^{nf}) = 0; \quad il = 1, 2, \dots, nl. \quad (4.26)$$

U sustavu nelinearnih jednadžbi (4.26) više je nepoznanica nego jednadžbi, a broj jednadžbi se usklađuje s brojem nepoznanica korištenjem jednadžbe kontinuiteta (4.1) za svaki konačni volumen. Ideja ove metode je uvesti korekcije masenih protoka  $\Delta F_L$  koje su konstantne za petlju, a kojima se korigiraju maseni protoci kroz stranice-članice pripadne petlje. Korekcije masenih protoka dodjeljuju se masenim protocima kroz stranice-članice petlje s predznakom plus ako se orijentacija stranice poklapa sa orijentacijom petlje ili s predznakom minus u suprotnom slučaju, kako je to prikazano slikom 4.5. Očito je da ovakva korekcija masenih protoka neće narušiti jednadžbu kontinuiteta za konačni volumen, jer će se uvijek u petlji nalaziti dvije stranice konačnog volumena, a na njima će se primjenjivati korekcije masenog protoka na jednoj s predznakom plus, a na drugoj predznakom minus. Ako početno pretpostavljeno polje brzine zadovoljava jednadžbu kontinuiteta, ona će ostati zadovoljena nakon svake korekcije masenih protoka, koju se stoga naziva *konzervativnom* korekcijom masenih protoka.

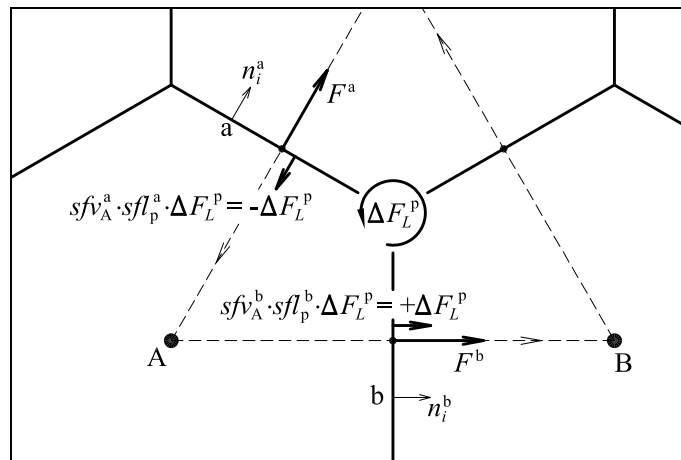
Formalno se može uvesti operator veze  $sfl_{il}^{if}$ , koji povezuje pozitivni smjer protoka kroz  $if$ -tu stranicu diskretiziranog globalnog kontrolnog volumena  $F^{if}$ , s orijentacijom petlje  $il$ :

$$sfl_{il}^{if} = \begin{cases} +1 & \text{ako stranica } if \text{ u petlji } il \text{ ima istu orijentaciju} \\ -1 & \text{ako stranica } if \text{ u petlji } il \text{ ima suprotnu orijentaciju} \\ 0 & \text{ako stranica } if \text{ nije članica petlje } il \end{cases} \quad (4.27)$$

Prema tome, korekcija masenog protoka kroz  $if$ -tu stranicu koja se nalazi u  $il$ -toj petlji se može formalno zapisati u obliku:

$$(F^{if})^n = (F^{if})^o + sfl_{il}^{if} \Delta F_L^{il} \quad (4.28)$$

U izrazu (4.28) trenutne su vrijednosti označene indeksom  $o$ , a korigirane vrijednosti indeksom  $n$ .



Slika 4.5 Konzervativna korekcija masenih protoka

Ako se sustav jednađbi (4.26) prikaže putem konzervativnih korekcija protoka, on postaje:

$$\Delta p^{il} = g^{il}(\Delta F_L^1, \Delta F_L^2, \dots, \Delta F_L^{nl}) = 0; \quad il = 1, 2, \dots, nl. \quad (4.29)$$

U gornjem sustavu traže se korekcije protoka kod kojih će padovi tlaka u svim petljama biti jednaki nuli, a broj jednađbi jednak je broju nepoznanica.

U nastavku se za novi algoritam koristi kratica FLOP (eng.: Flux LOoping for Pressure drop algorithm).

S obzirom na to da je sustav jednađbi (4.29) nelinearan nužno će se rješavati iterativnom metodom. Kao prvi zbor, nameće se jednostavna i pouzdana Newtonova metoda. U ovakvom obliku, funkcije pada tlaka potrebno je prikazati u obliku Taylorova reda za funkcije više varijabli, do članova uključivo 1 reda. Postupak dovodi do sustava (4.30), od  $nl$  linearnih algebarskih jednađbi sa  $nl$  nepoznanica, u kojemu su koeficijenti jednađbi izračunati s trenutnim vrijednostima varijabli, a desnu stranu sustava predstavlja iznos negativnih suma padova tlaka u petljama. Iterativni postupak završava kada u svim petljama suma padova tlaka bude jednaka nuli (postane dovoljno mala).

$$(\Delta p^{il})^n \approx (\Delta p^{il})^o + \sum_{j=1}^{nl} \left[ \left( \frac{\partial \Delta p^{il}}{\partial \Delta F_L^j} \right)^o \cdot \Delta F_L^j \right] = 0; \quad il = 1, 2, \dots, nl. \quad (4.30)$$

### Određivanje koeficijenata u sustavu jednadžbi za korekciju protoka

Novi algoritam rješava jednadžbu količine gibanja kroz uvjet nulte cirkulacije gradijenta tlaka po zatvorenim elementarnim petljama. Jednadžbe (4.25), koje iskazuju ovaj uvjet linearizirane su primjenom Newtonove metode, gdje kao rezultat nastaje sustav linearnih algebarskih jednadžbi (4.30), koji povezuje korekcije protoka definirane po elementarnim petljama s padom tlaka u elementarnim petljama.

Članove matrice i vektor desne strane ovog sustava izvest će se za općeniti slučaj diskretizacije jednadžbe količine gibanja metodom konačnih volumena na nestrukturiranoj nepomaknutoj mreži, za slučaj nestlačivog strujanja. Za općenite prostornu i vremensku shemu diskretizacije, diskretizirana jednadžba količine gibanja (4.20) za konačni volumen  $C$  može se zapisati na sljedeći način:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_C \Delta V = - \sum_{k=1}^{nb_C} (J_i)_C^k - \rho (G_i)_C \Delta V + (\tilde{b}_i)_C \Delta V. \quad (4.31)$$

Novi algoritam ne zahtijeva eksplicitnu diskretizaciju polja tlaka, već samo formalnu diskretizaciju polja gradijenta tlaka, koja se računa izravno iz jednadžbe količine gibanja (4.31). Članovi sume na desnoj strani izraza (4.31) predstavljaju vanjske konveksijsko-difuzijske protoke količine gibanja kroz stranice konačnog volumena,  $G_i$  označuje vremenski član, a  $\tilde{b}_i$  sadrži fizikalne i numeričke izvorske članove. Svaka dva susjedna konačna volumena dijele istu stranicu. Predznak protoka fizikalne veličine ovisi o promatranom volumenu (vektora vanjske normale na stranicu), tako da se članovi sume u izrazu (4.31) mogu zapisati kao funkcije oblika:

$$(J_i)_C^k = sfv_C^k \cdot (J_i)_C^k \left( F^k, (v_i)_C, (v_i)_N, \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_C, \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_N, \mu, \text{geometrija}, \dots \right). \quad (4.32)$$



Konvekcijsko-difuzijski protok količine gibanja  $(J_i)^k$  kroz  $k$ -tu stranicu tako ovisi o aktualnom masenom protoku kroz  $k$ -tu stranicu, lokalnoj viskoznosti fluida, geometriji stranice i susjednih konačnih volumena te brzinama i gradijentima brzine u susjednim konačnim volumenima. Kod nestrukturiranih mreža viši red točnosti sheme diferencije osigurava se uglavnom eksplicitno (primjenom „deferred correction“ pristupa), putem aktualnih vrijednosti gradijenta polja brzine u susjednim volumenima, čime se pojednostavljuje numerički postupak i smanjuje broj članova matrice sustava jednadžbi. Stoga su u izrazu (4.32) vrijednosti brzina u volumenima koji su susjedni ovom paru volumena zamijenjeni oznakama gradijenta brzine u volumenima vezanim neposredno uz  $k$ -tu stranicu.

Nestacionarni član  $G_i$  može se u općem slučaju izraziti funkcijom vrijednosti brzine u konačnom volumenu  $C$ , u aktualnom i prošlim vremenskim trenutcima i veličine vremenskih koraka integracije.

$$(G_i)_C = (G_i)_C \left( (v_i)^C, \left( (v_i)^C \right)^{t-\Delta t}, \left( (v_i)^C \right)^{t-2\Delta t}, \Delta t, \dots \right) \quad (4.33)$$

Za slučaj općenite vremenske diskretizacije dane izrazom (4.33), ovdje će se razmatrati samo implicitne sheme vremenske diskretizacije.

Vektor desne strane sustava (4.30) sadrži iznose padova tlaka po petljama izračunatih temeljem veličina određenih u prethodnoj iteraciji (aktualnih, označenih s  $o$ ). Sve dok je desna strana tog sustava različita od nule postojat će korekcije protoka po petljama. Vektor desne strane se računa u dva koraka: u prvom koraku se iz diskretiziranih oblika jednadžbe količine gibanja računaju gradijenti:

$$\left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{iv}^{(o)} \right] = \left[ -\frac{1}{\Delta V_{iv}} \left( \sum_{k=1}^{nb_{iv}} \left( (J_i)^k \right)^{(o)} \right) - \rho \cdot \left( (G_i)_{iv} \right)^{(o)} + \left( (\tilde{b}_i)_{iv} \right)^{(o)} \right]; \quad iv = 1, 2, \dots, nv. \quad (4.34)$$

U drugom koraku slijedi integracija gradijenta tlaka (4.34) po pripadnim petljama.

Ova operacija predstavlja obični skalarni umnožak iznosa aktualnih vrijednosti gradijenta tlaka u volumenima-članovima s pripadnim segmentima petlje pri kojem se

može poslužiti i pomoćnim veličinama poput vektora  $\eta_i$  kako je to učinjeno u izrazu (4.23):

$$\left[ \Delta p^{(o)} \right]_{il} = \left[ \sum_{j=1}^{ns_{il}} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{(o)} \cdot \eta_i \right)^j \right]_{il}; \quad il = 1, 2, \dots, nl. \quad (4.35)$$

Analogno ovome postupku formiranja desne strane sustava (4.30), definiraju se i derivacije ovih funkcija, koje predstavljaju koeficijente sustava. Za koeficijent  $A_{qp}$  matrice sustava, vrijedi:

$$\frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^p} = \left\{ \sum_{j=1}^{ns_q} \left[ \left( -\frac{1}{\Delta V} \left( \sum_{k=1}^{nb_j} \frac{\partial (J_i)^k}{\partial \Delta F_L^p} \right) - \rho \cdot \frac{\partial (G_i)}{\partial \Delta F_L^p} + \frac{\partial (\tilde{b}_i)}{\partial \Delta F_L^p} \right) \cdot (\eta_i) \right]^j \right\}^q; \quad q, p = 1, 2, \dots, nl \quad (4.36)$$

Novi algoritam FLOP, za nepoznanice ima protoke po stranicama diskretiziranog globalnog kontrolnog volumena koji se unutar svakog vremenskog koraka korigiraju iterativnim postupkom do postizanja željene male vrijednosti svih članova vektora desne strane. Tako se u cilju određivanja koeficijenata (4.36) sustava linearnih algebarskih jednadžbi (4.30), varijabla smatraju sve veličine koje će se mijenjati tijekom iterativnog postupka. Uz same protoke  $F$  po stranicama diskretiziranog globalnog kontrolnog volumena tu spadaju sve fizikalne veličine iz preostalih jednadžbi koje su uključene u članovima  $(J_i)^k$ ,  $\tilde{b}_i$  i  $G_i$ , u izrazu (4.31). Uz nepromjenjivu geometriju mreže, konstantama se smatraju sve geometrijske veličine i vrijednosti svih fizikalnih veličina iz prošlih vremenskih trenutaka. Tako se funkcije dane izrazima (4.32), (4.33), te izvorski član u jednadžbi (4.31) mogu smatrati složenim funkcijama više varijabli, pri čemu postoji zavisnost svih varijabli o protocima  $F^k$  kroz stranice konačnih volumena, a protok i korekcija protoka su vezani izrazom (4.28). Zbog toga će se koeficijenti sustava jednadžbi (4.30) dobiti po pravilima lančanog deriviranja.

Derivacija općenitog konveksijsko-difuzijskog protoka količine gibanja  $(J_i)^k$  sa  $k$ -te stranice iz izraza (4.32) po masenom protoku, u smjeru konzervativne korekcije masenih protoka petlje  $p$  može se raspisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (J_i)^k}{\partial \Delta F_L^p} &= \frac{\partial (J_i)^k}{\partial F^k} \frac{\partial F^k}{\partial \Delta F_L^p} + \frac{\partial (J_i)^k}{\partial (v_i)_C} \frac{\partial (v_i)_C}{\partial \Delta F_L^p} + \frac{\partial (J_i)^k}{\partial (v_i)_N} \frac{\partial (v_i)_N}{\partial \Delta F_L^p} + \\ &+ \frac{\partial (J_i)^k}{\partial \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_C} \frac{\partial \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_C}{\partial \Delta F_L^p} + \frac{\partial (J_i)^k}{\partial \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_N} \frac{\partial \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_N}{\partial \Delta F_L^p} + \frac{\partial (J_i)^k}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Delta F_L^p} \end{aligned} \quad (4.37).$$

Na isti se način raspisuje i nestacionarni član prikazan izrazom (4.33):

$$\frac{\partial (G_i)_C}{\partial F_L^p} = \frac{\partial (G_i)_C}{\partial (v_i)_C} \frac{\partial (v_i)_C}{\partial \Delta F_L^p}, \quad (4.38)$$

dok derivacija izvorskog člana u izrazu (4.31) za slučaj da je on funkcija protoka i drugih varijabli, općenito označenih s  $\varphi$ , vrijedilo bi:

$$\frac{\partial (\tilde{b}_i)_C}{\partial \Delta F_L^p} = \frac{\partial (\tilde{b}_i)_C}{\partial F^k} \frac{\partial F^k}{\partial \Delta F_L^p} + \frac{\partial (\tilde{b}_i)_C}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta F_L^p}. \quad (4.39)$$

Primjerice u prije definiranom modelu slobodne konvekcije član  $\tilde{b}_i$  bi bio funkcija temperature ( $\varphi = T$ ), koja je definirana vlastitom jednadžbom u kojoj se ponovo pojavljuju maseni protoci kroz stranice konačnih volumena. Derivacije  $\partial \varphi / \partial \Delta F_L^p$ , se tada računaju izravno iz diskretiziranih oblika temperature jednadžbe.

Derivacije funkcija prikazanih izrazima (4.37) do (4.39) iskazane su sumom članova pri čemu je svaki član predstavljen umnoškom dvaju faktora po pravilu lančanog deriviranja. U nastavku će se pretpostaviti da se gradijenti brzine, koji bi se pojavili u izrazu (4.37), kao posljedica primjene sheme diferencije višeg reda točnosti, uzimaju iz prethodnog iterativnog koraka. U tom slučaju, će predzadnja dva člana na desnoj strani jednakosti (4.37) iščeznuti. Slično za slučaj konstantne viskoznosti iščezava i posljednji

član desne strane tog izraza. Jasno je da će eksplicitna korekcija za viši red točnosti pojednostaviti izraz, ali će negativno utjecati na brzinu konvergencije postupka.

U svim se članovima gore raspisanih izraza ponavljaju dva faktora prirasta varijabli uslijed korekcije protoka s općenito označene petlje  $p$ :

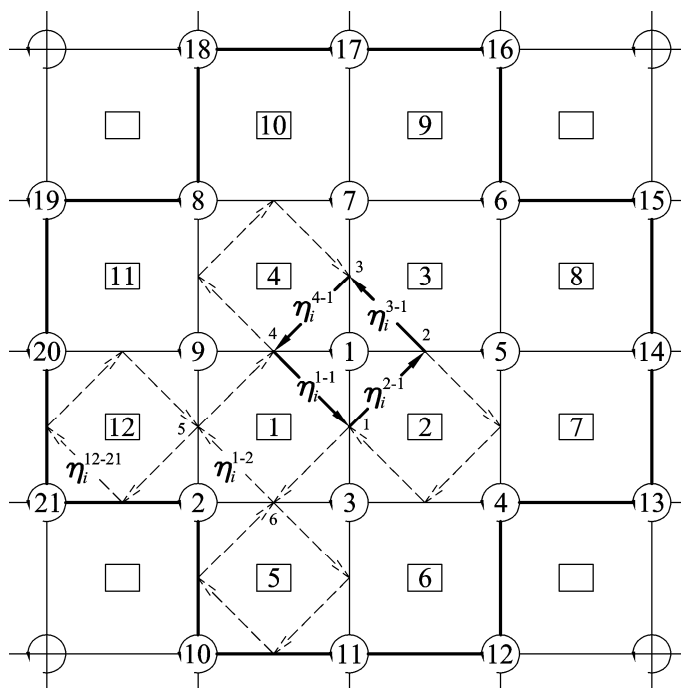
- Prirast masenog protoka kroz stranicu  $k$  uslijed korekcije masenog protoka po petlji  $p$  definirana je izrazom (4.28), čijim deriviranje slijedi:

$$\frac{\partial F^k}{\partial \Delta F_L^p} = sf_l^k \quad (4.40).$$

- Brzine u centrima konačnih volumena izračunavaju se iz interpolacijskog izraza (4.18), čijim deriviranjem, uz primjenu izraza (4.40), slijedi:

$$\frac{\partial (v_i)_C}{\partial \Delta F_L^p} = \frac{\partial}{\partial \Delta F_L^p} \left( \frac{1}{\rho_C \Delta V_C} \sum_{k=1}^{nb_C} x_i^k sfv_C^k F^k \right) = \frac{1}{\rho_C \Delta V_C} \sum_{k=1}^{nb_C} x_i^k sfv_C^k sf_l^k \quad (4.41).$$

Prema dosad pokazanom raspisu derivacija funkcija i pojedinih faktora u njihovim članovima, popunjavanje matrice koeficijenata sustava za korekciju masenih protoka (4.30) najlakše je provesti po stupcu matrice. Radi jednostavnosti, formiranje stupca će biti pokazano za dvodimenzijski primjer, prateći sliku 4.6.



Slika 4.6 Uz postupak formiranja koeficijenata matrice sustava za određivanje konzervativne korekcije protoka

Na slici su volumeni označeni brojevima u kvadratiću, a petlje brojevima u vrhovima konačnih volumena, uz koje stoji oznaka za orijentaciju petlje. Istaknuta je centralna petlja broj 1, njeni volumeni–članovi 1-4 i njene stranice–članovi, označene brojevima 1-4 (uz težišta stranica). Na slici je izostao prikaz segmenata petlje, jer će njihovu ulogu preuzeti zamjenski pomoćni vektori  $\eta_i$ , kako je već pokazano pri izvodu nulte cirkulacije gradijenta tlaka prijelazom s izraza (4.22) na (4.23) i slikom 4.3. U opisu ovih vektora na slici 4.6, nadindeks  $iv-il$  u oznaci  $\eta_i^{iv-il}$  označuje pojedini pomoćni vektor pri čemu  $iv$  označuje pripadnost volumenu, a  $il$  petlji.

U nastavku se razmatra formiranje 1. stupca matrice sustava za određivanje konzervativne korekcije protoka (4.30), koji nastaje temeljem situacije prikazane na slici. Pritom će se pojedini koeficijenti stupca formirati načinom da se započinje od

njihove nulte vrijednosti, nakon čega se njihova vrijednost nadopunjava pribrajanjem pojedinih doprinosa.

Korekcija masenog protoka po petlji 1 -  $\Delta F_L^1$  izaziva prirast protoka  $F^k$  kroz sve četiri stranice-članice petlje 1 načinom koji je definiran izrazom (4.40). Zbog toga će nastati prirasti brzine u čvorovima svih volumena-članova kako je to definirano izrazom (4.41). Tako se i utjecaj ovog prirasta protoka ( $\Delta F_L^1$ ) na pad tlaka u petlji 1 i okolnim petljama može sagledati kroz dva doprinosa:

- Doprinos uzrokovan prirastom protoka  $F^k$  utječe samo na konvekcijsko-difuzijski protok brzine kroz  $k$ -tu stranicu i to kroz prvi član sa desne strane izraza (4.37). Za prikazanu stranicu broj 1 on iznosi:

$$\frac{\partial J_i^1}{\partial F^1} \frac{\partial F^1}{\partial \Delta F_L^1} = \frac{\partial J_i^1}{\partial F^1} sfl_1^1$$

Ovaj doprinos mijenja gradijent tlaka u oba susjedna volumena koji dijele ovu stranicu (volumeni 1 i 2), što za sobom povlači i utjecaj u svim petljama kojih su ova dva volumena članovi. Udio  $B_i$  u derivaciji gradijenta tlaka u volumenu 1, kojeg ovaj doprinos ima, slijedi iz sume konvekcijsko-difuzijskih protoka količine gibanja, odnosno prvog člana izraza za gradijent tlaka (4.31):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x_i} \right|_1 = -\frac{1}{\Delta V_1} \left[ \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{nb1} (J_i)^k \right) + sfv_1^1 (J_i)^1 \right] + \dots$$

Svaki od članova sume u gornjem izrazu funkcija je isključivo masenog protoka po istoimenoj stranici (kao što je prikazano izrazom (4.32)), pa se tako doprinos  $B_i$  odnosi samo na izdvojeni član, za stranicu 1:

$$B_i = \frac{\partial}{\partial F^1} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_1 \right) \cdot \frac{\partial F^1}{\partial \Delta F_L^1} = -\frac{1}{\Delta V_1} \left[ 0 + sfv_1^1 \frac{\partial J_i^1}{\partial F^1} \frac{\partial F^1}{\partial \Delta F_L^1} \right] = -\frac{1}{\Delta V_1} \left[ sfv_1^1 sfl_1^1 \frac{\partial J_i^1}{\partial F^1} \right].$$

Volumen 1 član je petlji 1, 2, 3, i 9, pa se koeficijenti 1. stupca sustava (4.30) nadopunjavaju skalarnim umnoškom ovog doprinosa s pripadnim pomoćnim vektorima petlji (prateći sliku 4.6):

$$\frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^1} + B_i \cdot \eta_i^{1-q} \rightarrow \frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^1}; \quad q = 1, 2, 3, 9$$

Ovaj se postupak analogno ponavlja i za volumen 2. te opisanim postupkom nadopunjavanju oni koeficijenti 1. stupca sustava (4.30) u redcima onih petlji u kojima se volumen 2 pojavljuje kao član (ovdje petlje 1, 3, 4 i 5).

Pribrajanje doprinosa uzrokovanih prirastom protoka  $F^k$  članovima 1. stupca sustava, završava provedbom opisanog postupka za preostale stranice-članove petlje 1: stranice 2, 3 i 4.

- Doprinos uzrokovan prirastom brzine (4.41) utječe i na konvekcijsko difuzijski transport količine gibanja (4.37), gdje se očituje u drugom i trećem članu s desne izraza i na vremenski član, kako je prikazano izrazom (4.38). Za prikazani volumen broj 1 ovaj prirast brzine iznosi:

$$\frac{\partial (v_i)^1}{\partial \Delta F_L^1} = \frac{1}{\rho_1 \Delta V_1} \sum_{k=1}^{nb1} x_i^k s f v_1^k s f l_1^k = \frac{1}{\rho_1 \Delta V_1} \left[ \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1, 4}}^{nb1} x_i^k s f v_1^k s f l_1^k \right) + (x_i^1 s f v_1^1 s f l_1^1 + x_i^4 s f v_1^4 s f l_1^4) \right]$$

U gornjem izrazu, vektorska suma u prvoj zagradi uvijek rezultira nultom vrijednošću jer podrazumijeva sumaciju po stranicama koje nisu članovi petlje 1: stranicama 5 i 6, što se očituje kroz nultu vrijednost operatora veze  $sfl$  ( $sfl_1^5 = 0$ ;  $sfl_1^6 = 0$ ). Suma u drugoj zagradi uvijek rezultira pripadnim pomoćnim vektorom  $\eta_i$ . Razlog leži u tome što za odabrani smjer petlje, pripadna pozitivna korekcija protoka uvijek na jednoj stranici unosi protok u volumen, a na drugoj istu korekciju protoka iznosi.

Tako se gornji izraz uvijek svodi na jednostavni oblik, koji za volumen 1 glasi:

$$\frac{\partial(v_i)^1}{\partial\Delta F_L^1} = \frac{\eta_i^{1-1}}{\rho_1\Delta V_1}.$$

Ovaj faktor prirasta brzine u volumenu 1 utječe na derivaciju konvekcijsko-difuzijskog protoka količine gibanja (4.37) bilo u drugom ili trećem članu s desne strane izraza, što ovisi o globalnoj orijentaciji stranice. Kako brzinu u volumenu 1 koriste funkcije konvekcijsko-difuzijskog protoka (4.32) svih stranica konačnog volumena 1, tako će i ovaj faktor prirasta utjecati na derivaciju gradijenta tlaka u samom volumenu 1 te u svim njegovim susjedima. Ovo se, dakako odražava i na derivaciju pada tlaka u svim petljama koje za članove imaju volumen 1 i sve njegove susjede. Postupak pribrajanja ovih doprinosa uzrokovanih prirastom brzine, najlakše je provesti po stranicama konačnih volumena. Prikazani prirast brzine u volumenu 1, ima udio u derivaciji konvekcijsko-difuzijskog protoka količine gibanja kroz stranicu 1, a iznosi:

$$\frac{\partial(J_i)^1}{\partial(v_i)^1} \frac{\partial(v_i)^1}{\partial\Delta F_L^1} = \frac{\partial(J_i)^1}{\partial(v_i)^1} \frac{\eta_i^{1-1}}{\rho_1\Delta V_1}.$$

Udio u derivaciji gradijenta tlaka u susjednim volumenima 1 i 2 kojeg ovaj doprinos ima, slijedi iz prvog člana izraza za gradijent tlaka (4.31) koji za ova dva volumena glase:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)_1 = -\frac{1}{\Delta V_1} \left[ \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nb1} (J_i)_1^k \right] + sfv_1^1 (J_i)^1 \right] + \dots \text{ za volumen 1, te}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)_2 = -\frac{1}{\Delta V_2} \left[ \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{nb2} (J_i)_1^k \right] + sfv_2^1 (J_i)^1 \right] + \dots \text{ za volumen 2.}$$

Svaki od članova sume u izrazu za volumen 1 funkcija je brzine u volumenu 1, dok je u izrazu za volumen 2 to samo izdvojeni član 1. Ovaj je doprinos



jedinstven za ova dva volumena, pa će se tako doprinos po pojedinoj stranici računati samo jedanput, uz pribrajanje susjednim volumenima. Ovaj će se postupak provesti po svim stranicama volumena 1 čime je osigurano uključivanje doprinosa svih članova sume iz izraza za gradijent tlaka volumena 1.

Postupak pribrajanja doprinosa padovima tlaka uzrokovanog prirastom brzine za volumen 1 odvija se na sljedeći način:

najprije se provede izračun doprinosa  $B_i^k$  uzrokovanog prirastom brzine u derivaciji konvekcijsko-difuzijskog protoka količine gibanja kroz  $k$ -tu stranicu volumena 1

$$B_i^k = -\frac{\partial (J_i)^k}{\partial (v_i)^1} \frac{\eta_i^{1-1}}{\rho_1 \Delta V_1},$$

nakon čega se ovaj doprinos pribraja svim koeficijentima čiji redak odgovara broju petlje u kojima se volumen 1 pojavljuje kao član.

$$\frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^1} + \frac{1}{\Delta V_1} sfv_1^1 \cdot B_i^k \cdot \eta_i^{1-q} \rightarrow \frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^1}; \quad q = 1, 2, 3, 9,$$

te pribrajanje doprinosa u sve petlje u kojima je član njegov susjed. Primjerice, za stranicu  $k = 1$  riječ je o volumenu 2:

$$\frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^1} + \frac{1}{\Delta V_2} sfv_2^1 \cdot B_i^k \cdot \eta_i^{2-q} \rightarrow \frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^1}; \quad q = 1, 3, 4, 5.$$

U ovom dijelu postupka, svojstvo konzervativnosti iskorišteno je time što se doprinos  $B_i^k$  računa samo jednom, a pribraja dva puta, uz pomoć operatora veze koji u susjednim volumenima imaju suprotan predznak  $sfv_1^1 = -sfv_2^1$ .

Opisani se postupak u nastavku provodi za sve preostale stranice volumena 1:  $k = 4, 5, 6$ .

Pribrajanje doprinosa koeficijentima 1. stupca sustava uzrokovanog prirastom brzine kroz konvekcijsko-difuzijske protoke količine gibanja, završava provedbom opisanog postupka za preostale volumene-članove petlje 1: volumene 2, 3 i 4.

Doprinos uzrokovan prirastom brzine kroz vremenski član (4.38), utječe samo na gradijent tlaka u istoimenom volumenu i tako doprinosi samo u petljama kojih je taj volumen član. Za volumen 1 sa slike 4.6, prirast u gradijentu tlaka iznosi:

$$B_i = \frac{\partial(G_i)_1}{\partial(v_i)^1} \frac{\eta_i^{1-1}}{\rho_1 \Delta V_1},$$

a koeficijenti 1. stupca sustava nadopunjuju se kao i ranije:

$$\frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^1} + B_i \cdot \eta_i^{1-q} \rightarrow \frac{\partial \Delta p^q}{\partial \Delta F_L^1}; \quad q = 1, 2, 3, 9.$$

Postupak pribrajanja doprinosa kroz vremenski član, završava ponavljanjem ovog postupka za sve preostale volumene-članove petlje 1: volumene 2, 3 i 4.

Ovaj postupak pokazuje da je unatoč složenosti općeg izraza za koeficijent matrice (4.36) sustava za određivanje korekcije protoka po petljama (4.30), formiranje same matrice relativno jednostavno. Postupak izračuna koeficijenata iziskuje znatno više operacija nego što je to slučaj kod SIMPLE algoritma. Međutim, kako će biti pokazano u poglavlju 5, povećani broj računskih operacija potrebnih za izračun koeficijenata sustava će se u FLOP algoritmu nadoknaditi smanjenim brojem iteracija.

Prikazani postupak formiranja matrice koeficijenata sustava za korekciju protoka temelji se na analitičkom deriviranju sheme diferencije. Kod formulacija koje viši red točnosti ostvaruju eksplicitno, gradijent brzine ulazi u postupak kao konstanta, pa vrijednost konvekcijsko-difuzijskog protoka brzine kroz stranicu konačnog volumena ovisi isključivo o masenom protoku kroz stranicu i vrijednostima brzine u dva susjedna volumena. Broj članova stupca matrice određen je brojem petlji u kojima sudjeluju svi

volumeni-članovi centralne petlje te svi njihovi prvi susjedi. U ovom je radu primijenjen postupak formiranja po stupcima, isključivo iz razloga što je njegov tok lakše pratiti. Jednaki bi se rezultat dobio i u postupku koji bi bio proveden po recima matrice. Kod novog algoritma FLOP, struktura matrice sustava za određivanje korekcije protoka nije toliko očita kao u slučaju diskretizirane konveksijsko difuzijske jednadžbe, a jedino što se može reći jest da je rijetka i simetrično strukturirana. U ovom je primjeru pokazano da za pravilnu dvodimenzijску mrežu četverostranih konačnih volumena broj članova retka iznosi 21. U početnim fazama istraživanja provedenim u sklopu ovog rada, algoritam se u računalnom programu izvršavao takvim načinom, da se matrica koeficijenata sustava (4.30) dobivala numeričkim deriviranjem pojedinih funkcija pada tlaka. Na temelju malih konzervativnih korekcija protoka u petljama, dobivale su se nove vrijednosti funkcija pada tlaka te su se koeficijenti matrice sustava dobivali dijeljenjem dobivenog prirasta pada tlaka u petljama sa unesenim malim konzervativnim korekcijama protoka u petljama. Jasno je da je ovakav postupak neprihvatljiv sa stajališta praktične upotrebe, jer dovodi do pune ( $nl \times nl$  koeficijenata) matrice sustava (4.30), već je on poslužio u svrhu usporedbe svojstava konvergencije (u pogledu povijesti konvergencije iterativnog postupka) algoritma sa upravo prikazanim načinom koji je važeći za ovaj algoritam, u kojemu se do koeficijenata dolazi analitičkim putem, deriviranjem jednadžbe količine gibanja (same sheme diferencije i svih ostalih članova). Cilj je bio utvrditi ovisnost brzine konvergencije o količini informacija koju pruža matrica sustava. Pokazalo se da ne postoji primjetna razlika u povijesti konvergencije za matrice dobivene na ova dva načina, što govori da je opisani analitički postupak - prikladan sa stajališta ovog algoritma, obzirom da dobro opisuje derivacije funkcija u Newtonovoj metodi. U pokušaju smanjivanja broja članova retka u cilju ostvarivanja dodatne uštede na memorijskom prostoru i vremenu potrebnom za rješavanje sustava, testirani su sustavi u kojima se zanemarivale derivacije pada tlaka u pojedinim petljama. Pokušano je zanemarivanje utjecaja svih petlji osim centralne u stupcu (dijagonalni sustav), svih osim onih koje su povezane stranicama-članovima sa centralnom petljom (5 članova stupca: za petlje 1, 3, 5, 7, i 9 iz primjera sa slike 4.6) i svih osim onih povezanih istim volumenom (9 članova stupca s koeficijentima za petlje 1-9). U usporedbi sa prikazanom, punom varijantom, sve su se varijante pokazale

neprihvatljivima u pogledu svojstava konvergencije. Stoga su u ovom radu aktualizacija algoritma u vlastitom računalnom programu i izračun primjera provedeni sa punom, gore opisanom varijantom.

## 4.5 Rekapitulacija algoritama

Oba se algoritma odnose na isti sustav jednadžbi (4.1) do (4.3), pri čemu se energijska jednadžba (4.3) rješava sekvencijalno, nakon rješavanja prve dvije. Ako polje temperature ne utječe na polje brzine, ono se rješava nakon što je postignuto konačno rješenje za polje brzine (slučaj pasivne jednadžbe), a ako temperatura utječe na polje brzine i tlaka, ta se jednadžba rješava simultano s jednadžbom kontinuiteta i jednadžbom količine gibanja. S obzirom da je sustav jednadžbi (4.1) do (4.3) nelinearan, rješava se iterativnim postupkom, pri čemu je diskretizirani oblik jednadžbi moguće u svakoj iteraciji rješavati simulatano (kao jedan sustav) ili sekvencijalno (jednu po jednu diskretiziranu jednadžbu), kao što je to slučaj u algoritmu SIMPLE. Sekvencijalni način rješavanja zahtijeva manje memorije računala (u svakom trenutku treba pamtit i koeficijente matrice sustava samo jedne diskretizirane jednadžbe), ali se to odražava povećanim brojem iteracija numeričkog postupka. U novom algoritmu je postavljen naglasak na povezivanje polja brzine i tlaka (jednadžbi količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta), pa će se temperaturna jednadžbu rješavati sekvencijalno, kao i u SIMPLE algoritmu, iako će to imati za posljedicu povećani broj iteracija u problemima u kojima polje temperature ima značajan utjecaj na polje brzine (tipično, problemi slobodne konvekcije). U nastavku se daje matrično zapisana rekapitulacija dvaju algoritama sa stajališta povezivanja polja brzine i tlaka, tj. traženja simultanog rješenja jednadžbi (4.1) i (4.2).

### Algoritam SIMPLE

U ovom su algoritmu varijable komponente brzine i tlakovi u centrima konačnih volumena, te je za njihovo određivanje iz diskretiziranih jednadžbi potrebno definirati izraze koji povezuju masene protoke kroz stranice konačnih volumena i izraz za računanje gradijenta tlaka. Prve se definira temeljem Rhie-Chow interpolacije (4.14), koja bi se u matričnom obliku mogla zapisati kao:

$$[F^{if}] = [C^F][v_i^{iv}] + [D^F][p^{iv}], \quad (4.42)$$

gdje su  $[F^{if}]$  vektor masenih protoka kroz stranice konačnih volumena,  $[v_i^{iv}]$  vektor komponenti brzine u centrima konačnih volumena (npr. uređenog tako da se najprije pojavljuju komponente  $v_1$ , od prvog do zadnjeg volumena, zatim redom komponente  $v_2$  i  $v_3$ ),  $[p^{iv}]$  je vektor vrijednosti polja tlaka u centralnim čvorovima, a koeficijenti matrica  $C^F$  i  $D^F$ , slijede iz izraza (4.14). Broj redaka matrica  $[C^F]$  i  $[D^F]$  jednak je broju stranica (protoka), a broj stupaca jednak broju komponenti brzine ( $3 \cdot nv$ ), odnosno broju tlakova ( $nv$ ). Uvrštavanjem izraza (4.42) u jednadžbu kontinuiteta (4.1), ona se može zapisati u obliku:

$$[C][v_i^{iv}] + [D][p^{iv}] = [b_{JK}^{iv}], \quad (4.43)$$

gdje je broj redaka matrica  $[C]$  i  $[D]$  jednak broju konačnih volumena, a broj stupaca tih matrica jednak broju stupaca matrica:  $3 \cdot nv$ , odnosno  $nv$ . Vektor desne strane  $[b_{JK}^{iv}]$  duljine  $nv$ , sadrži informacije o rubnim uvjetima.

Izraz za gradijent tlaka u jednadžbi količine gibanja (koja se npr. može definirati pomoću Gaussove formule ili temeljem metode najmanjih kvadrata), može se zapisati matrično:

$$\left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{iv} \right] = [B^p] [p^{iv}], \quad (4.44)$$

gdje je matrica  $[B^p]$  dimenzije  $3 \cdot nv \cdot nv$ , a koeficijenti te matrice proizlaze iz formule za gradijent tlaka. Temeljem izraza (4.44) diskretizirani oblik jednadžbe količine gibanja (4.2) se može zapisati matrično:

$$[A] [v_i^{iv}] + [B] [p^{iv}] = [b_{i,JKG}^{iv}], \quad (4.45)$$

gdje je dimenzija matrice  $[A]$  za trodimenzijskih problem  $3nv \cdot 3nv$ , matrice  $[B]$   $3nv \cdot nv$ , a dimenzija vektora  $[b_{i,JKG}^{iv}]$ , koji sadrži izvorski član i informacije o rubnim uvjetima za jednadžbu količine gibanja je  $3nv$ .

Sustav jednadžbi (4.43) i (4.45) s  $4nv$  nepoznanica se može zapisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^{iv} \\ p^{iv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i,JKG}^{iv} \\ b_{JK}^{iv} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Treba uočiti da u sustavu (4.46) matrica  $[D]$  proizlazi temeljem Rhie-Chow interpolacije, te da bi u slučaju uobičajene linearne interpolacije brzina, ona bila jednaka nuli, te se zaključuje da taj sustav nije pogodan za rješavanje pomoću standardnih iterativnih rješavača.

Ideja SIMPLE algoritma je iz jednadžbe (4.45) izraziti brzinu pomoću tlaka:

$$[v_i^{iv}] = -[A]^{-1} [B] [p^{iv}] + [A]^{-1} [b_{i,JKG}^{iv}], \quad (4.47)$$

te inverznu matricu  $[A]^{-1}$  (koje je izračun previše zahtjevan) aproksimirati inverznom matricom  $[D_A]^{-1}$  (pri čemu je matrica  $[D_A]$  jednaka dijagonalnoj matrici koja srži glavnu dijagonalu matrice  $[A]$ ). S obzirom da u tom slučaju izraz (4.47) prestaje biti egzaktan, jednadžbe će se riješiti iterativno, pri čemu se uvode korekcije tlaka  $[p^{iv}]$  i brzine  $[v_i^{iv}]$  za koje, prema (4.47) vrijedi:

$$[v_i^{iv}] = -[D_A]^{-1}[B][p^{iv}]. \quad (4.48)$$

Temeljem veze (4.48) se iz jednadžbe kontinuiteta izvodi jednadžba za korekciju tlaka, oblika:

$$\underbrace{[E]}_{[C][D_A]^{-1}[B]} [p^{iv}] = [b_p^{iv}]. \quad (4.49)$$

Nadalje, uvodi se sekvencijalno rješavanje jednadžbi, gdje se prilikom rješavanja jednadžbe količine gibanja za komponente brzine  $v_1$ , komponente  $v_2$  i  $v_3$  smatraju poznatima, kod rješavanja jednadžbi za  $v_2$ , komponente  $v_1$  i  $v_3$  se smatraju poznatima, itd. U tom slučaju se matrica  $[A]$ , dimenzije  $3nv \cdot 3nv$  može aproksimirati trima matricama  $[A_1]$ ,  $[A_2]$  i  $[A_3]$  dimenzija  $nv \cdot nv$ , u obliku:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Matrice  $[A_1]$ ,  $[A_2]$  i  $[A_3]$  međusobno se razlikuju samo u korekcijama onih koeficijenata kroz koje su ugrađeni rubni uvjeti, dakle praktično su jednake, što znači da se može značajno uštedjeti na računanju koeficijenata. Pri tome se često primjenjuje postupak potpunog izjednačavanja koeficijenata u sve tri matrice, dok se razlika za rubne uvjete obračunava na desnim stranama sustava jednadžbi, u okviru "deferred-

correction" pristupa ([16], [18]). Prema tome, sustav jednadžbi koji se rješava u SIMPLE algoritmu može se zapisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{iv} \\ v_2^{iv} \\ v_3^{iv} \\ p'^{iv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,JKG}^{iv} \\ b_{2,JKG}^{iv} \\ b_{3,JKG}^{iv} \\ b_{p'}^{iv} \end{bmatrix}; \text{ tj. } \begin{bmatrix} A_{JKG} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{JKG} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{JKG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{iv} \\ v_2^{iv} \\ v_3^{iv} \\ p'^{iv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,JKG}^{iv} \\ b_{2,JKG}^{iv} \\ b_{3,JKG}^{iv} \\ b_{p'}^{iv} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Sustav (4.51) rješava se sekvencijalno, rješavanjem četiri sustava jednadžbi, svaki s  $nv$  nepoznanica, a nakon određivanja korekcija tlaka  $p'$ , vrše se korekcije polja brzine, prema (4.48), dok se korekcija polja tlaka podrelaksira kao što je ranije rečeno.

### Algoritam FLOP

U novom algoritmu se kao varijable izabiru maseni protoci kroz stranice konačnih volumena, koji se pojavljuju u jednadžbi kontinuiteta (4.1), te tlakovi u centrima konačnih volumena. Ovo znači da će se umjesto izraza za interpolaciju masenih protoka iz brzina u centralnim čvorovima, trebati definirati interpolacija brzina u centralne čvorove (jer se one pojavljuju u jednadžbi količine gibanja (4.2)) iz poznatih masenih protoka kroz stranice konačnih volumena. Kao što je pokazano, ova je interpolacija fizikalna i formalno se izraz (4.18) može prikazati matricno:

$$\begin{bmatrix} v_i^{iv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{v_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{if} \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

gdje je matrica  $C^{v_i}$ , u trodimenzijskoj situaciji dimenzije  $3nv \cdot nf$ . U ovoj metodi jednadžba količine gibanja (4.2) služi za određivanje gradijenta tlaka, te se formalno može zapisati u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^{iv} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^{iv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_{i,JKG}^{iv} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{v_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{if} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_{i,JKG}^{iv} \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$



U jednadžbi (4.53), matrica  $[\bar{A}]$  i vektor  $[\bar{b}_{i,\text{JKG}}^{iv}]$  su odgovarajući matrici  $[A]$  i vektoru  $[b_{i,\text{JKG}}^{iv}]$  u jednadžbi (4.45), s jedinom razlikom da su ovdje koeficijenti podijeljeni obujmom pripadajućeg konačnog volumena. Umnožak  $[\bar{A}][C^{v_i}]$  je matrica dimenzije  $3nv \cdot nf$ . Ideja novog algoritma je odrediti masene protoke koji zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta i pri tome daju bezcirkulacijsko polje gradijenta tlaka (što znači da će biti zadovoljena i jednadžba količine gibanja). Uvjet bezcirkulacijskog polja tlaka omogućuje da se iz gradijenata tlaka izračunatih iz jednadžbe količine gibanja (4.53) može, počevši od jednog čvora s poznatim tlakom, jednoznačno definirati polje tlaka u svim ostalim čvorovima. Ako u mreži ima  $nv$  čvorova s  $nf$  unutarnjih stranica, onda se uvjet bezvrtložnosti može izraziti uvjetom da suma promjena tlaka unutar  $nl = nf + 1 - nv$  petlji koje povezuju čvorove mreže, mora biti jednaka nuli, kako je dano izrazom (4.25), koji se može formalno zapisati uz pomoć jednadžbe (4.53) u obliku:

$$\sum_{k=1}^{ns_{il}} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot \eta_i \right)^k = \sum_{k=1}^{ns_{il}} \left( \left( -[\bar{A}][C^{v_i}][F^{if}] + [\bar{b}_{i,\text{JKG}}^{iv}] \right) \cdot \eta_i \right)^k = 0, \quad il=1, 2, \dots, nl \quad (4.54)$$

ili matrično:

$$[G][F^{if}] + [h] = 0, \quad (4.55)$$

gdje je dimenzija matrice  $[G]$   $nl \cdot nf$ , a dimenzija vektora  $[h]$   $nl$ . S obzirom da matrica  $[G]$  nije kvadratna, sustav (4.55) ne definira jednoznačno rješenje za masene protoke kroz stranice konačnih volumena. Zbog toga se u ovoj metodi uvode korekcije masenih protoka  $[\Delta F_L^{il}]$  pripadne petljama, kojima se korigiraju maseni protoci kroz sve stranice koje su članice pripadne petlje (koje presijecaju spojnice čvorova u promatranoj petlji). Takva korekcija protoka ne narušava jednadžbu kontinuiteta, pa je važno prije početka iterativnog postupka pretpostaviti masene protoke kroz stranice konačnih volumena koji zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta.

Matrično bi se ove korekcije (4.28) mogle prikazati u obliku:

$$[F^{if}]^n = [F^{if}]^o + [sfl]^T [\Delta F_L^{il}], \quad (4.56)$$

gdje je dimenzija matrice  $[sfl]^T$  jednaka  $nf \cdot nl$ , a koeficijenti su joj +1, -1 ili nula, prema izrazu (4.27). Uvrštavanjem izraza (4.56) u (4.55) formalno se dobije sustav jednadžbi:

$$\underbrace{[G][sfl]^T}_{[K']} [\Delta F_L^{il}] + \underbrace{[G][F^{if}]^o + [h]}_{[k]} = 0, \quad (4.57)$$

u kojem je matrica  $[K']$  kvadratna, dimenzije  $nl \cdot nl$ , a vektori  $[\Delta F_L^{il}]$  i  $[k]$  su dimenzije  $nl$ . Sustav jednadžbi (4.57) je nelinearan i rješava se Newtonovom metodom, kako je pokazano u poglavlju 4.4 (izrazi (4.30)-(4.39)), tako da matrica  $[K']$  i vektor  $[h]$  sadrže i derivacije koeficijenata i ostalih članova po masenim protocima kroz stranice konačnih volumena. Konačni oblik sustava (4.30), kojeg se rješava, matrično se može zapisati kao:

$$[K][\Delta F_L^{il}] = -[\Delta p^o]. \quad (4.58)$$

Dakle, novi algoritam se svodi na rješavanje jednog sustava od  $nl$  jednadžbi u svakoj iteraciji, za razliku od SIMPLE algoritma u kojem se rješava četiri sustava od  $nv$  jednadžbi. Naravno, matrica  $[K]$  je gušće popunjena od matrica  $[A_1]$ ,  $[A_2]$ ,  $[A_3]$  i  $[E]$  koje se pojavljuju u SIMPLE algoritmu. Primjerice, za ravninsku mrežu  $100 \times 100$  konačnih volumena u svakoj iteraciji SIMPLE algoritma potrebno je riješiti 3 sustava od 10000 jednadžbi u kojima je maksimalni broj ne-nultih koeficijenata u retku matrice sustava jednak 5. Za isti problem se u FLOP algoritmu rješava samo jedan sustav s 9801 nepoznatih korekcija protoka, ali je u matrici sustava maksimalni broj ne-nultih koeficijenata jednak 21.

Nadalje, uz primjenu uobičajenih shema diferencije, matrice u SIMPLE algoritmu su M-matrice (dijagonalno dominantne pri čemu su koeficijenti na glavnoj dijagonali pozitivni, a izvan glavne dijagonale negativni, a matrica je pozitivno definitna), za koje

je razvijeno niz učinkovitih iterativnih rješavača. Matrica  $[K]$  ima na glavnoj dijagonali apsolutno najveće koeficijente, ali predznak izvan-dijagonalnih koeficijenta u retku alternira, i nema dokaza o njenoj pozitivnoj definitnosti.

Kao što je navedeno, FLOP algoritam započinje iterativni postupak s masenim protocima kroz stranice konačnih volumena koji zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta. Maseni protoci kroz unutarnje stranice, koji proizlaze temeljem početne pretpostavke o polju brzine  $(F^{if})^o$  (dobiveni uz primjenu neke interpolacije), u općem slučaju neće zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta. Točne vrijednosti  $(F^{if})^n$  (odnosno potrebne korekcije masenih protoka po stranicama:  $\Delta F^{if}$ ) mogu se odrediti načinom:

$$(F^{if})^n = (F^{if})^o + \Delta F^{if}; \quad \Delta F^{if} = \left[ \frac{\Delta S}{CN} (\varphi_N - \varphi_C) \right]^{if}. \quad (4.59)$$

U naravi, ovakvim se postupkom na početno polje pridodaje umnožak polja gustoće i brzine koje je potencijalno, tj. za koje vrijedi:

$$\Delta(\rho v_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (4.60)$$

gdje  $\varphi$  označuje potencijal dopunskog polja. Primjenom izraza (4.60) u jednadžbi kontinuiteta (4.1) (ili izravnim uvrštavanjem izraza (4.59)) dobije se Laplaceova jednadžba (analogno jednadžbi za korekciju tlaka u SIMPLE algoritmu (4.8), (4.49)):

$$\sum_{k=1}^{nb_{iv}} (F^k)^n = 0 = \sum_{k=1}^{nb_{iv}} \left[ (F^k)^o + \left( \frac{\Delta S}{CN} \right) (\varphi_N - \varphi_{iv}) \right]^k; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (4.61)$$

Rješavanjem jednadžbe (4.61) dobije se potencijal  $\varphi$ , a zatim se maseni protoci korigiraju uz pomoć izraza (4.59).

Ovim se postupkom početna pretpostavka o polju  $\rho v_i$  nadopunjuje do zadovoljavanja jednadžbe kontinuiteta, dok se u slučaju pretpostavke nultog polja, dobije rješenje oblika potencijalnog strujanja. Ovaj je postupak potrebno izvesti samo jedanput, prije

početka iterativnog postupka, jer konzervativne korekcije protoka  $[\Delta F_L^{it}]$  (izraz (4.28), tj. (4.56) i slika 4.5) čuvaju rješenje jednadžbe kontinuiteta. U sklopu ovog postupka, sustav (4.61) potrebno je riješiti do računalne točnosti (Stupanj točnosti rješenja jednadžbe kontinuiteta uvjetuje ostvarivi stupanj točnosti konačnog rješenja).

Također treba primijetiti da se u FLOP algoritmu polje tlaka ne računa unutar svake iteracije, jer je ono neizravno određeno poljem brzine. Na kraju postupka, kad je postignuto bezcirkulacijsko polje gradijenta tlaka, tlak se jednostavno određuje temeljem poznatih vrijednosti gradijenta tlaka u centrima konačnih volumena. Postupak se temelji na minimiziranju kvadrata razlike između prirasta tlaka koji proizlazi oduzimanjem vrijednosti polja tlaka u centrima susjednih konačnih volumena i onog koji proizlazi integriranjem polja gradijenta tlaka iz jednadžbe količine gibanja (prema slikama 3.2, 4.3):

$$\sum_{iv=1}^{nv} \left[ \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (p_N - p_{iv} - \Delta p_{iv-N})^k \right]^2 \rightarrow \min; \Delta p_{C-N} = \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_C (x_i)^{Cn} - \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_N (x_i)^{Nn}. \quad (4.62)$$

Ako bi se radilo o stlačivom strujanju u kojemu tlak ima utjecaja na gustoću, polje tlaka bi se trebalo računati u svakoj iteraciji, bez obzira što gradijenti tlaka izračunati iz jednadžbe količine gibanja ne zadovoljavaju uvjet bezvrtložnosti. Jednako kao i u slučaju nestlačivog strujanja, tlak bi se određivao iz uvjeta da suma kvadrata odstupanja gradijenata izračunatih iz čvornih vrijednosti tlaka i jednadžbe količine gibanja, bude minimalna, što se ponovo svodi na rješavanje Laplaceove jednadžbe, kao i ranije-slično jednadžbi za korekciju tlaka u SIMPLE algoritmu.

Oba gore spomenuta postupka mogu se provesti primjenom iste matrice koeficijenata i to one koja proizlazi iz postupka minimiziranja (4.62) (pojavljuje se u izrazu (4.65)). Jedina posljedica ovoga jest da se na nepravilnim mrežama i za slučaj početne pretpostavke nultog polja  $\rho v_i$ , rješavanjem jednadžbe (4.63) ne ostvaruje rješenje oblika potencijalnog strujanja, dok samom provedbom postupka jednadžba kontinuiteta i dalje biva zadovoljena.

Prema navedenom, u ovom se radu primjenjuju sljedeći postupci:

- za korekciju masenih protoka do zadovoljavanja jednadžbe kontinuiteta (rješavanje jednadžbe kontinuiteta, prije početka iterativnog postupka):

1. rješavanje sustava:

$$nb \cdot \varphi'_{iv} - \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (\varphi'_N)^k = \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (F^k)^o; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (4.63)$$

$$\text{matrično: } [E'] [\varphi'^{iv}] = [b'_{IK}]$$

2. korekcija masenih protoka (temeljem (4.59)):

$$(F^{if})^n = (F^{if})^o + (\varphi'_N - \varphi'_c)^{if}; \quad if = 1, 2, \dots, nf \quad (4.64)$$

$$\text{matrično: } [F^{if}] - [sfv]^T [\varphi'^{iv}] \rightarrow [F^{if}]$$

- za rekonstrukciju polja tlaka temeljem polja gradijenta tlaka (nakon završetka iterativnog postupka, na osnovu (4.62)):

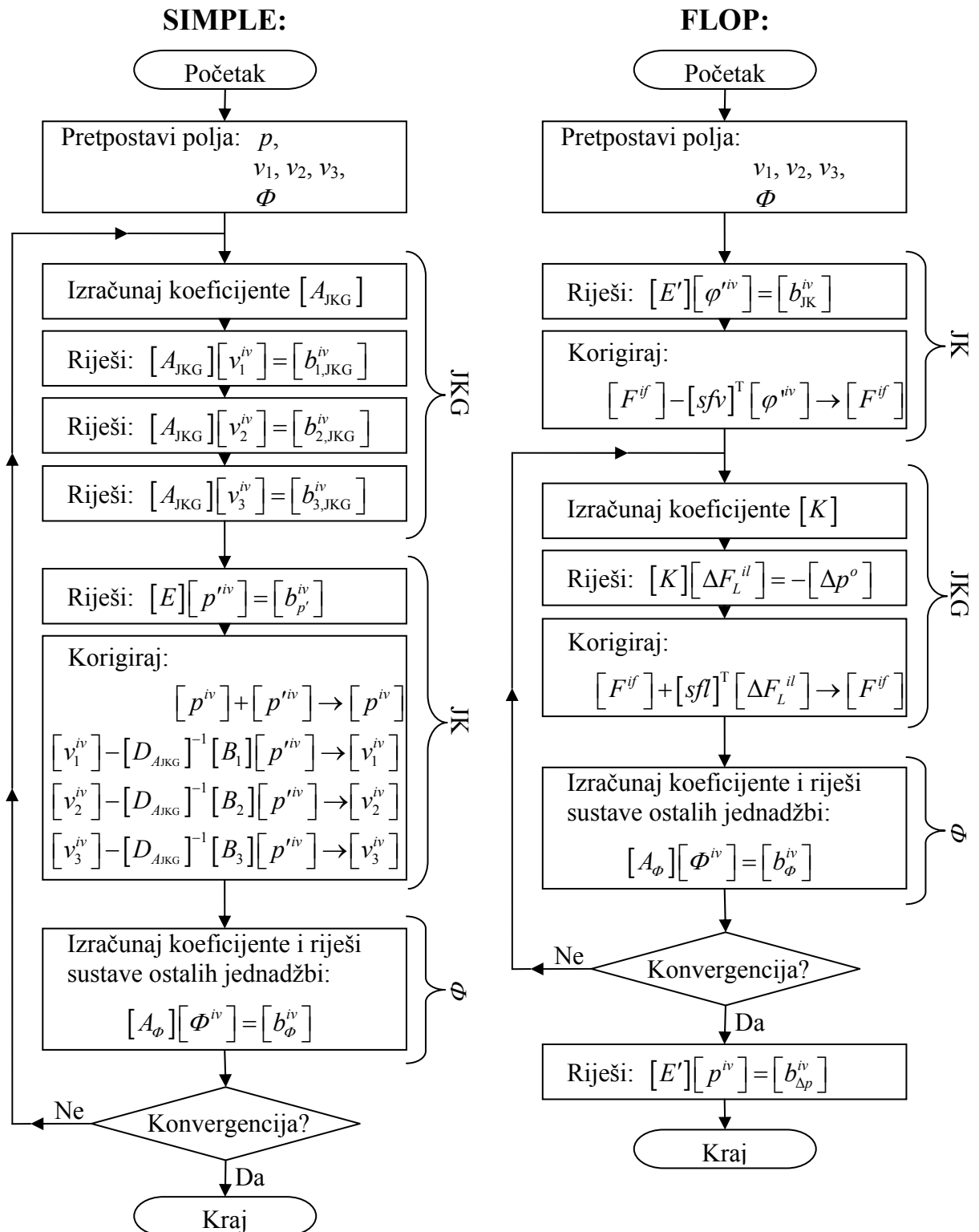
rješavanje sustava:

$$nb \cdot p_{iv} - \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (p_N)^k = \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (\Delta p_{iv-N})^k; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (4.65)$$

$$\text{matrično: } [E'] [p'^{iv}] = [b'_{\Delta p}]$$

Tako se oba postupka koriste istim memorijskim prostorom za polje potencijala  $\varphi'$  i tlaka  $p$  i koriste istu matricu  $[E']$ , dok se jedina razlika nalazi u vektorima desne strane.

## Usporedni prikaz postupaka u algoritmima SIMPLE i FLOP



Slika 4.7 Usporedni prikaz algoritama SIMPLE i FLOP

## 4.6 Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

U FLOP algoritmu se pojavljuju sustavi linearnih algebarskih jednadžbi s dva tipa matrice sustava, jedan koji odgovara rješavanju Laplaceove jednadžbe (s  $M$ -matricom sustava) i drugi kojim se određuju korekcije protoka po petljama, koji ima gušće popunjenu matricu ( $[K]$  matrica u sustavu jednadžbi (4.57)). Za rješavanje ovih sustava testirano je više rješavača:

1. Vlastito razvijena višemrežna metoda, koja se temelji na redukciji sustava jednadžbi zbrajanjem po dvije jednadžbe, pri čemu se sustavi jednadžbi rješavaju SGS2 metodom [55], te više rješavača koja se nude u biblioteci uz Fortran prevoditelj;
2. Iterativni rješavač PTFQMR, unaprijeđena varijanta QMR (Quasi-Minimal Residual) [22],
3. Iterativni rješavač PGMRES (Generalized Minimal Residual), [22], [64]
4. PCG, PLSCG, PBCG, PCGS, [47]
5. Direktni rješavač za rijetke matrice [13].
6. Višemrežni rješavač proizvođača VINAS [<http://www.vinas.com/jp/en/>], sa svim ponuđenim iterativnim rješavačima RC [50] i CG.

Rješavači su uspoređeni sa stajališta utrošenog računalnog vremena, odnosno učinkovitosti ukupnog FLOP postupka. Za početno rješavanje jednadžbe kontinuiteta u svrhu određivanja početnih masenih protoka kroz stranice konačnih volumena, za rješavanje jednadžbe za rekonstrukciju tlaka, te za rješavanje temperaturne jednadžbe, u izboru navedenih iterativnih rješavača, najboljim se pokazao vlastito razvijeni višemrežni rješavač. U slučaju sustava s  $[K]$  matricom, ovaj se rješavač, također

pokazao kao najbolji među navedenim iterativnim rješavačima. Međutim, u nekim slučajevima strujanja nakon brzog početnog smanjenja pogreške za dva do tri reda veličine, njegova konvergencija se značajno usporava. S obzirom da testovi pokazuju da je za učinkovitost FLOP algoritma, potrebno početnu pogrešku smanjiti barem za 4 reda veličina, u konačnici se direktni rješavač pokazao za tu svrhu boljim. Izborom direktnog rješavača ujedno je uvedeno i ograničenje na veličinu problema koji se FLOP algoritmom može riješiti.



## 5 PRIMJERI I DISKUSIJA

U ovom su poglavlju iznesene usporedbe algoritma SIMPLE na nepomaknutoj mreži implementiranog u računalnom paketu FLUENT s novim algoritmom FLOP koji je realiziran u programskom jeziku FORTRAN, u vlastitom računalnom programu.

Algoritam izveden u ovom radu uspoređuje se s algoritmom SIMPLE na proizvoljnoj, nestrukturiranoj mreži i to u njegovoj implementaciji u računalnom paketu FLUENT, verzija 6.2.16. Usporedbe će se uvijek provoditi na identičnim mrežama, a uspoređuju se broj iteracija i potrebno vrijeme izračuna. SIMPLE algoritam nužno primjenjuje podrelaksaciju što u većini slučajeva rezultira monotonim približavanjem rješenju, te je potrebno na neki način odrediti razinu točnosti rješenja. Kriterij usporedbe donosi se kroz prva tri primjera. Također, budući da optimalne vrijednosti podrelaksacijskih faktora za tlak i jednadžbe količine gibanja ovise o problemu i nisu unaprijed poznate, proračuni svih primjera provedeni su sa standardno ponuđenim vrijednostima  $\alpha_p=0.3$ , i  $\alpha_{uv}=0.7$ , ukoliko nije drukčije naglašeno. U svim primjerima i u oba algoritma je korištena dvostruka preciznost za prikaz realnih brojeva.

Proračuni svih primjera provedeni su na računalu Dell Optiplex 330 koje sadrži Intel Core2 dvojezgreni procesor frekvencije 2.4 GHz, sabirnicu frekvencije 1066 MHz te 4 GB radne memorije, frekvencije 800 MHz. Usporedni proračuni (primjenom dvaju algoritama) su uvijek provedeni u istim uvjetima. Primarni cilj ovog rada je zasnivanje novog algoritma. Njegova realizacija na profesionalnoj razini prelazi okvire ovog rada, pa je tako ona obavljena u skladu sa dobrom praksom i dostupnim vremenom autora. Tako se u provedenim usporedbama brzine konvergencije algoritama naglasak stavlja na broj iteracija, dok se iskazano računalno vrijeme smatra samo okvirnim pokazateljem.

Kod algoritma FLOP se u općoj primjeni, prilikom ocjene konvergencije primjenjuju dvije veličine. Rezidual jednadžbe kontinuiteta  $r_m$ , određuje se načinom:

$$r_m = \frac{1}{m_{uk} \cdot nv} \sum_{iv=1}^{nv} \left| \sum_{k=1}^{nb_{iv}} F^k \right|, \quad (5.1)$$

gdje u slučaju strujanja u područjima sa ulaznim granicama, veličina  $m_{uk}$  označuje ukupni maseni tok koji protječe područjem proračuna i određuje se kao suma masenih protoka po svim stranicama ulaznih granica, dok u slučaju zatvorenih područja, njena vrijednost iznosi  $m_{uk} = 1$ .

Za ocjenu postignutog rješenja jednadžbe količine gibanja, najboljim se pokazao jedinstveni relativni kriterij, temeljen na vrijednosti veličine koju se naziva rezidual pada tlaka:  $r_{\Delta p}$ . Ona se određuje načinom:

$$r_{\Delta p} = \frac{1}{nl} \sum_{il=1}^{nl} \left( \frac{\Delta p}{\max \left[ \left| \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_k \right|; k = 1, 2, \dots, ns_{il} \right] + \varepsilon} \right)_{il}^2, \quad (5.2)$$

gdje  $\varepsilon$  označuje malu veličinu:  $\varepsilon = 10^{-100}$ .

U primjenama FLOP algoritma koji su provedeni tijekom istraživanja u sklopu ovog rada, zamijećeno je da kriterij završetka  $r_{\Delta p} \leq 10^{-8}$ , uvijek osigurava zadovoljavajuću točnost, neovisno o problemu kojeg se rješava. Tako primjena ovog kriterija pruža dobru osnovu za ocjenu postignute točnosti, bez potrebe za dodatnim normiranjem. Kao što primjeri, izneseni u ovome poglavlju to i pokazuju, jedino se u ponekim slučajevima strujanja s prevladavajućim, velikim utjecajem viskoznih sila u cijelome području proračuna (primjer iz poglavlja 5.6), sa stajališta točnosti polja brzine, ovaj kriterij pokazao previše strogim.

Prilikom zamjene iterativnog rješavača linearnih algebarskih jednadžbi direktnim, primijećeno je da u slučajevima viskoznih, stacionarnih strujanja, s velikim omjerom

između konvekcijskog i difuzijskog transporta količine gibanja, ponekad dolazi do ne-monotone i time duže konvergencije algoritma FLOP. Stoga je u postupak uveden parametar pseudo-vremena:  $\tau$  ([s]), koji se određuje načinom:

$$\tau = \frac{\sum_{il=1}^{nl} \left| \sum_{k=1}^{ns_{il}} \left( sf_{il}^k F^k \frac{|\eta_i|^k}{\Delta S^k} \right) \right|}{\sum_{il=1}^{nl} |\Delta p^{il}|}. \quad (5.3)$$

Ovaj se parametar određuje na temelju vrijednosti pada tlaka  $\Delta p$  u petljama i masenih protoka kroz stranice  $F$  izračunatih iz prethodnog iterativnog koraka i ulazi u postupak isključivo u matrici sustava (4.30), primjenom postupka jednakog onome koji se primjenjuje i u slučaju nestacionarnog člana (4.38). Prema tome, kada je parametar  $\tau$  aktivan, tada jedna iteracija postupka, u naravi predstavlja jedan korak implicitne Eulerove metode s vremenskim korakom  $\tau$ , gdje vrijednosti veličina na početku vremenskog koraka odgovaraju onima iz prošlog iterativnog koraka. Kako se može vidjeti iz izraza (5.3), ovaj se parametar uvijek određuje automatski, bez potrebe za intervencijom korisnika algoritma. Prilikom brojnih proračuna, primijećeno je da u većini slučajeva algoritam konvergira monotono i bez primjene parametra  $\tau$ , dok je njegov utjecaj na smanjenje brzine konvergencije algoritma uvijek zanemariv. S približavanjem k rješenju, njegova vrijednost brzo raste, pa se on prolaskom kriterija  $r_{\Delta p} \leq 10^{-4}$  automatski i isključuje iz postupka. Dosljedno ciljevima ovog rada, svi primjeri koji su pokazani u ovom poglavlju, proračunati su uz automatski odabir ovog parametra, a iznimka se pojavljuje isključivo u svrhu usporedbe s algoritmom SIMPLE, u problemima s slobodnom konvekcijom (u poglavlju 5.8) gdje je to i naglašeno.

## 5.1 Potencijalno strujanje u pravom kutu

Kako je izneseno u poglavlju 4.3, algoritam SIMPLE na nepomaknutim mrežama temelji se na nekonzistentnoj interpolaciji brzina iz čvorova konačnih volumena na stranice konačnih volumena, u kojoj se koristi razlika između stvarne i interpolirane vrijednosti gradijenta tlaka na stranici konačnog volumena. Time se u proračun unosi pogreška koja je izraženija u područjima s većim promjenama tlaka i većom zakrivljenošću strujanja. Također, diskretizacija jednadžbi količine gibanja na nepomaknutim mrežama zahtijeva poznate vrijednosti tlaka po rubovima područja što se u nedostatku dopunskih fizikalnih jednadžbi nadomješta proizvoljnom ekstrapolacijom, što ima za posljedicu unošenje određene pogreške u rješenje.

Odabrani primjer potencijalnog strujanja u pravom kutu predstavlja primjer strujanja kakvo nastaje u okolišu svake zaustavne točke, odnosno susreće se u velikom broju problema kojima se bavi računalna dinamika fluida, dok istodobno za ovaj slučaj postoji analitičko rješenje. Radi univerzalnosti, problem se razmatra u bezdimenzijskom obliku. Polje brzine i gradijenta tlaka u ovom primjeru su linearne funkcije prostora pri čemu zakrivljenost strujanja raste približavanjem zaustavnoj točki, dok je sam tlak određen Bernoullijevom jednadžbom i tako rezultira kvadratnom funkcijom. Navedeno vrijedi za cijelo područje proračuna, uključivo rubove područja. Prilikom razmatranja točnosti numeričkog postupka, ona se uglavnom vezuje uz diskretizacijsku shemu za ukupni konvekcijsko-difuzijski protok fizikalne veličine kroz stranice konačnih volumena, dok se pogreška uvjetovana spomenutim aspektima SIMPLE algoritma na nepomaknutim mrežama obično ne spominje. Svrha ovog primjera je pokazati utjecaj algoritma SIMPLE na pogrešku rješenja u odnosu na analitičko, što će ujedno poslužiti u svrhu donošenja kriterija usporedbe sa novim algoritmom FLOP.

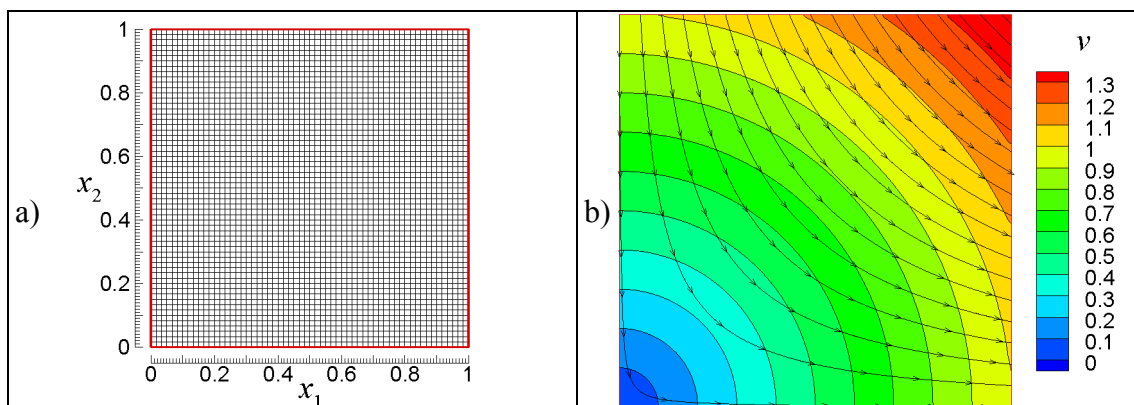
Zadano je ravninsko potencijalno strujanje fluida gustoće  $\rho=1$  u kvadratnom području veličine  $1 \times 1$ , koje je smješteno u prvom kvadrantu ravnine  $x_3 = 0$ . Donja lijeva rubna točka ovog područja smještena je u ishodištu.

Analitičko rješenje ovog problema glasi:

$$v_1 = x_1; \quad v_2 = -x_2; \quad p = p|_{T_p} + \frac{\rho}{2} \left( (v^2)|_{T_p} - v^2 \right); \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = -\rho x_1; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho x_2 \quad (5.4)$$

gdje je  $T_p$  točka sa zadanim tlakom, koja je u svakoj mreži smještena u težištu volumena koji je najbliži ishodištu (slika 5.1 a)), a referentni tlak ima vrijednost  $p|_{T_p} = 1$ .

Diskretizacija zadanog područja i rješavanje, provedeni su za tri slučaja različitih gustoća diskretizacije. Mreža M1 diskretizira područje u 3600 konačnih volumena, prema slici 5.1 a). Podjela područja je ravnomjerna, 60 segmenata po  $x_1$  i  $x_2$  koordinati. Tako je dobivena ravnomjerna mreža što isključuje mogućnost pojave greške uslijed neortogonalnosti i neravnomjerne raspodjele konačnih volumena. Ostale dvije diskretizacije su veličine M2 - 120x120 i M3 - 240x240 konačnih volumena, također s jednolikom diskretizacijom.



Slika 5.1 Primjer 1. a) diskretizacija područja proračuna, za mrežu M1-3600 konačnih volumena;  
b) rješenje: strujnice u polju apsolutne vrijednosti brzine

U skladu sa eliptičnom prirodom problema, na svim je rubovima područja zadan rubni uvjet poznate brzine. Točnije, sve stranice na rubu područja u svojim težištima imaju zadanu brzinu koja proizlazi iz analitičkog rješenja. Kako je zadan polje brzine linearno, a izo-linije vrijednosti pojedinih komponenti brzine se poklapaju sa stranicama

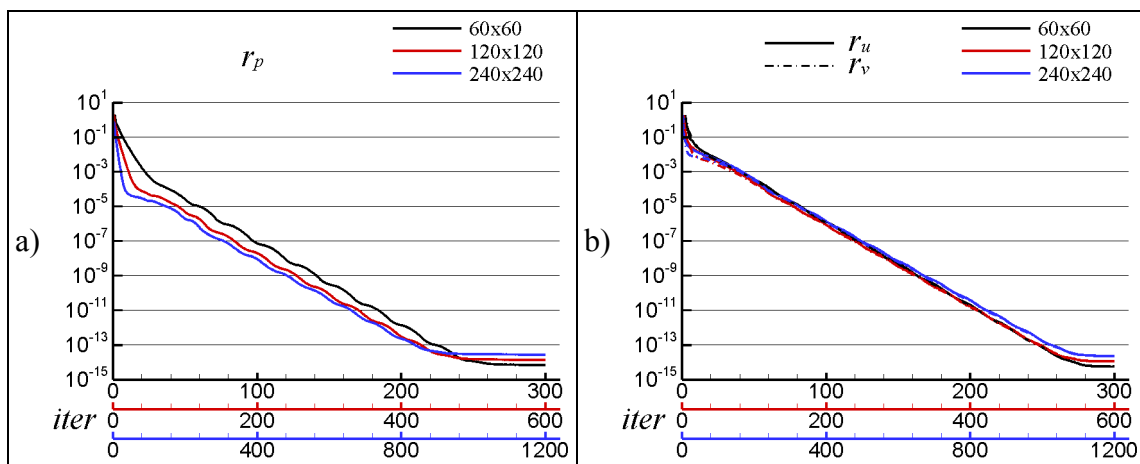
konačnih volumena, rezultirajući maseni protoci na gornjoj-ulaznoj i desnoj-izlaznoj strani područja su konstantni i time egzaktno zadani.

Slika 5.2 prikazuje konvergenciju SIMPLE algoritma iskazanu rezidualima jednadžbe kontinuiteta:  $r_p$ , te rezidualima  $x$  i  $y$  komponente količine gibanja:  $r_u$  i  $r_v$ . Oni su u implementaciji SIMPLE algoritma u računalnom paketu FLUENT i na slici 5.2 iskazani kao (uz  $u = v_1$  i  $v = v_2$ ):

$$r_p = \sum_{iv=1}^{nv} \left| \sum_{k=1}^{nb_{iv}} F^k \right|; \quad (5.5)$$

$$r_u = \sum_{iv=1}^{nv} \left| \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (a_N u_N)^k - a_C u + b_u \right|^{iv}; \quad r_v = \sum_{iv=1}^{nv} \left| \sum_{k=1}^{nb_{iv}} (a_N v_N)^k - a_C v + b_v \right|^{iv};$$

Rezidual jednadžbe kontinuiteta predstavlja sumu apsolutnih vrijednosti odstupanja jednadžbe kontinuiteta po svim konačnim volumenima. Reziduali jednadžbe količine gibanja za pojedinu komponentu su iskazani kao suma odstupanja odgovarajuće jednadžbe po svim konačnim volumenima, gdje su vrijednosti koeficijenata  $a_N$  i  $a_C$  te izvorskih članova  $b_u$  i  $b_v$  računati na temelju vrijednosti brzina, protoka i tlaka iz aktualne iteracije dok su vrijednosti komponenti brzina  $u$  i  $v$  uzete iz prethodne iteracije.



Slika 5.2 Primjer 1. Konvergencija rješenja SIMPLE algoritma prema rezidualima: a) jednadžbe kontinuiteta, b) količine gibanja

Slika 5.2 pokazuje sličnost u povijesti konvergencije za razmatrana tri slučaja diskretizacije te se može zaključiti da potreban broj iteracija za postizanje iste razine rješenja raste približno sa korijenom broja volumena  $\sim (nv)^{1/2}$ . Povijest konvergencije prikazana spomenutim rezidualima pokazuje da je za postizanje rješenja na razini računalne točnosti u slučaju SIMPLE algoritma i mreže M1 potrebno približno 280 iteracija, u slučaju mreže M2, 540, a u slučaju mreže M3, 1120 iteracija.

Cilj testiranja jest usporedba svojstava SIMPLE i FLOP algoritma prvenstveno kroz broj iteracija koje su potrebne za postizanje iste razine točnosti te ocjenu utrošenog računalnog vremena. U FLOP algoritmu, kriterij završetka proračuna vezan je sumom padova tlaka u petljama (5.2), dok se u SIMPLE algoritmu on vezuje uz sume prikazane jednadžbama (5.5). Ovako definirane, sve navedene veličine su dimenzijski različite. U FLOP algoritmu se može formirati dimenzijski odgovarajuća i po naravi ekvivalentna veličina za usporedbu s rezidualima količine gibanja prema SIMPLE algoritmu, međutim, pokazalo se da je ocjena postignute razine točnosti rješenja putem usporedbe tih dviju veličina neprecizna. Naime, gradijent tlaka u FLOP algoritmu računa se na temelju polja brzine koje uvijek zadovoljava jednadžbu kontinuiteta, dok kod SIMPLE algoritma na nepomaknutim mrežama polje brzine koje zadovoljava jednadžbu kontinuiteta sadrži i pogrešku uzrokovanu Rhie-Chow interpolacijom. Ta se pogreška kroz protoke na stranicama konačnih volumena unosi i u izračun reziduala jednadžbi količine gibanja ( $r_u$  i  $r_v$  u jednadžbama (5.5)).

Za ocjenu postignute razine točnosti rješenja formiran je novi, jedinstveni kriterij. Relativna pogreška polja brzine kao prostorna veličina, definirana je u centrima konačnih volumena izrazom:

$$(\Delta v_{rel})^{iv} = \left( \frac{|v_i - (v_{teor})_i|}{|(v_{teor})_i|} \right)^{iv}; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (5.6)$$

Kao kriterij se koristi srednja relativna pogreška brzine koja se definira kao:

$$r_{\Delta v_{rel}} = \frac{1}{nv} \sum_{iv=1}^{nv} (\Delta v_{rel})^{iv}. \quad (5.7)$$

U izrazu (5.6) oznaka *teor* označuje analitičko rješenje dano jednadžbama (5.4).

U svrhu određivanja ovih pogrešaka i vremena rješavanja problema, temeljem propisane točnosti, postupak izračuna na svakoj od tri mreže se provodio u dva koraka. U prvom koraku, u slučaju SIMPLE algoritma, proračuni su se provodili tako da se cjelokupna polja brzine ispisuju u svakih 5, 10 ili 20 koraka, ovisno o tome da li je riječ o proračunu na mreži M1, M2 ili M3. Kod proračuna FLOP algoritmom, ispis je obavljen odmah nakon rješavanja jednadžbe kontinuiteta i dodatno nakon još jedne iteracije korekcije protoka, iako je rezidual pada tlaka  $r_{\Delta p}$  (5.2) već nakon rješavanja jednadžbe kontinuiteta indicirao zadovoljavajuću točnost (Tablica 5.1).

Tablica 5.1 Primjer 1. Konvergenција rješenja FLOP algoritma

iter	$r_m$			$r_{\Delta p}$		
	60x60	120x120	240x240	60x60	120x120	240x240
0	$1.6 \cdot 10^{-17}$	$1.5 \cdot 10^{-17}$	$6.3 \cdot 10^{-17}$	$1.2 \cdot 10^{-15}$	$1.9 \cdot 10^{-14}$	$3.0 \cdot 10^{-13}$
1	-	-	-	$3.4 \cdot 10^{-28}$	$1.3 \cdot 10^{-27}$	$5.5 \cdot 10^{-27}$

Na temelju ispisanih polja i egzaktnih rješenja, izračunate su veličine  $\Delta v_{rel}$  i  $r_{\Delta v_{rel}}$ , za oba algoritma i sve mreže. Pritom se koristio pomoćni program posebno napravljen za tu svrhu. U drugom koraku, proračun je ponovljen za sve slučajeve, ovoga puta bez opterećivanja računalnih resursa ispisom polja ali uz istodobno bilježenje računalnog vremena. Realizacija FLOP algoritma u vlastitom računalnom programu, omogućila je točno određivanje utrošenog računalnog vremena u pojedinoj fazi njegova izvršavanja. Vrijeme u pojedinim fazama izvršavanja dobiveno je ugrađenim funkcijskim pozivom čiji je rezultat smještan u posebno polje, koje je nakon završetka proračuna ispisano u datoteku.



Tablica 5.2 Primjer 1 Utrošak računalnog vremena u vlastitom programu za slučaj mreže M3 – 57600 konačnih volumena

Korak postupka	Operacije:	vrijeme za izvršenje operacije:	Ukupno vrijeme proračuna:	Ukupno vrijeme po koracima:
<b>Preprocesiranje</b>	Učitavanja mreže i određivanje geometrijskih veličina: izračun volumena, površina, težišta te vektora normala i spojnice. Određivanje topologije: numeriranje stranica volumena i petlji te utvrđivanje njihovih međusobnih veza. Izračun i stvaranje potrebnog memorijskog prostora.	3.532 s	0 s	
<b>Inicijalizacija polja</b>	Učitavanje i zadavanje rubnih uvjeta. Učitavanje i inicijalizacija/zadavanje početnih uvjeta. Izračun početnih protoka na stranicama.	0.156s	3.532 s	
<b>Inicijalizacija rješavača</b>	Inicijalizacija algebarskog višemrežnog rješavača. Inicijalizacija direktnog rješavača. Izračun i stvaranje potrebnog memorijskog prostora za rješavače.	0.797 s	3.688 s	
<b>Rješavanje jednadžbi kontinuiteta</b>	Popunjavanje matrice sustava za rješavanje jednadžbi kontinuiteta i za izračun tlaka.	0.000 s	4.485 s	9.078 s
	Izračun desne strane jednadžbe kontinuiteta i reziduala jednadžbi kontinuiteta	0.000 s		
	Algebarski višemrežni rješavač Formiranje hijerarhije u algebarskom višemrežnom rješavaču. (Formiranje operatora restrikcije, formiranje strukture i koeficijenata grubljih matrica)	0.078 s		
	Rješavanje V ciklusima. Primjena SGS2 iterativnog rješavača po razinama.	9.000 s		
	Korekcija protoka kroz stranice konačnih volumena. Izračun reziduala jednadžbi kontinuiteta	0.000 s		

Tablica 5.2 Nastavak

Izračun pada tlaka u petljama	Izračun brzina u težištima konačnih volumena. Izračun konvekcijско - difuzijskih protoka kroz stranice konačnih volumena prema EDS shemi Izračun gradijenata tlaka i pada tlaka u petljama. Izračun reziduala pada tlaka $r_{\Delta p}$		0.031 s	13.563 s	0.031 s
Izračun tlaka	Popunjavanje matrice sustava za rješavanje jednadžbi kontinuiteta i za izračun tlaka.		0.000 s	13.594 s	
	Izračun desne strane jednadžbi za integraciju tlaka		0.000 s		
	Algebarski višemrežni rješavač	Formiranje hijerarhije u algebarskom višemrežnom rješavaču. (Formiranje operatora restrikcije, formiranje strukture i koeficijenata grubljih matrica)	0.078 s		
		Rješavanje V ciklusima. Primjena SGS2 iterativnog rješavača po razinama.	6.406 s		
Ispis	Ispis rezultata. Ispis polja brzine i tlaka. Ispis sila i protoka na granicama. Ispis reziduala		2.45s s	20.078 s	
Iterativni korak algoritma	Popunjavanje matrice sustava za određivanje korekcije protoka		0.172 s	22.532 s	3.875 s
	Rješavanje sustava direktnim rješavačem		3.656 s		
	Korekcija protoka u petljama		0.015 s		
	Izračun novog pada tlaka u petljama (kao što je već navedeno u tablici)		0.032 s		
	Izračun tlaka (kao što je već navedeno u tablici)		7.328 s		
	Ispis (kao što je već navedeno u tablici)		1.094 s		
	Izračun pseudo-vremena		0.015 s	34.844 s	0.015 s

Detaljan prikaz utroška računalnog vremena pri proračunu vlastitim programom, za ukupni postupak provedenu na mreži M3 (57600 konačnih volumena), izložen je u tablici 5.2. U tablici se može vidjeti da je izvedba algebarskog višemrežnog rješavača lošija od direktnog. Jednadžba kontinuiteta i izračun tlaka u ovom su primjeru rješavani do računalne točnosti, što znači relativno smanjenje reziduala na  $10^{-14}$  obzirom na početne vrijednosti, što iziskuje veći broj iteracija. Ako se traži rješenje jednadžbe kontinuiteta koje rezultira točnošću polja brzine u granici do 0.1% srednje relativne pogreške brzine, broj iteracija se znatno smanjuje, a pritom rezultirajući utrošak vremena rješavača pada na vrijednosti ispod 1 sekunde.

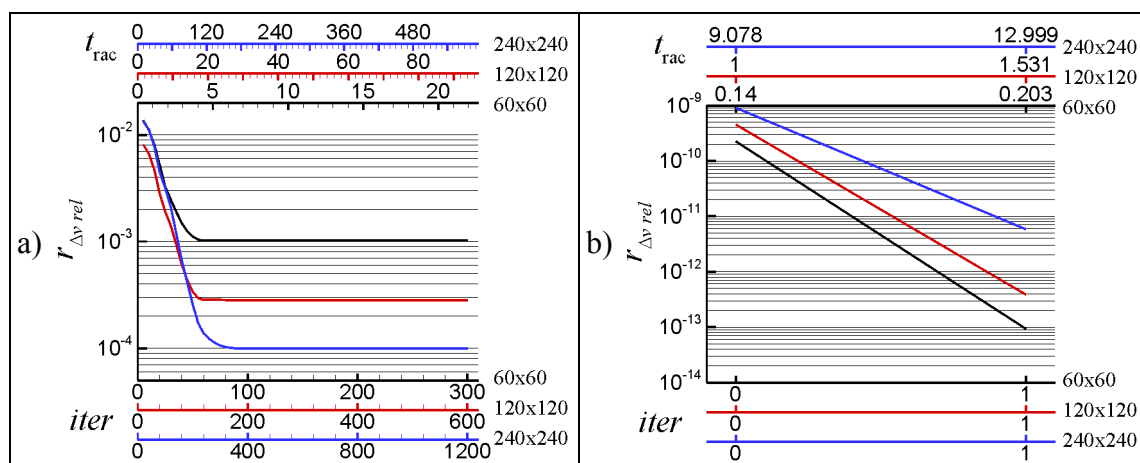
Također, iz tablice se može vidjeti da unatoč tome što se pri rješavanju jednadžbi kontinuiteta i izračunu tlaka koristi ista matrica, ona se iznova popunjava i za nju se iznova stvaraju razine grubljih sustava. Algebarski višemrežni rješavač za svoj rad potrebuje memorijski prostor koji je približno dvostrukog iznosa samog sustava kojeg se rješava i prilikom rješavanja pred-uvjetuje polazni sustav i tako mijenja polaznu matricu. U vlastitom programu, njegova je upotreba predviđena za rješavanje svih sustava jednadžbi osim sustava za određivanje korekcije protoka po petljama. Iz tablice je vidljivo da izračun koeficijenata matrice i stvaranje razina imaju mali udio u računalnom vremenu, dok su svi spomenuti sustavi jednadžbi jednake strukture. Stoga je usvojena varijanta upotrebe jednog memorijskog prostora rješavača za sve sustave, čime je ostvarena značajna ušteda memorijskog prostora uz zanemarivo povećanje računalnog vremena.

Točno vrijeme trajanja pojedinih faza u SIMPLE algoritmu se ne može utvrditi bez izravnog zahvata u programski kod računalnog paketa FLUENT, što prelazi okvire ovog rada. Tako je na strani SIMPLE algoritma, ukupni utrošak računalnog vremena po iteraciji određen pomoću zapornog sata. U svrhu dobivanja veće točnosti, mjereno je ukupno trajanje iterativnog izvršavanja algoritma i zatim podijeljeno s brojem iteracija. U pripremnim fazama izrade ovih primjera, provedena su mjerenja za različiti ukupni broj iteracija i pokazalo se da se utrošak vremena po iteraciji tijekom proračuna vrlo malo mijenja.

Kod vlastitog programa, vremena iz tablice 5.2 koja otpadaju na izvršavanje samog FLOP algoritma označena su bojama. U FLOP algoritmu, rješavanje jednadžbe kontinuiteta potrebno je obaviti samo jedanput, prije početka iterativnog postupka. Kako varijabla tlaka nije potrebna za izvršavanje algoritma, istu se određuje prema potrebi, za izračun sila ili netom prije ispisivanja rezultata. Jedini dio algoritma koji je iterativnog karaktera jest postupak sukcesivne korekcije protoka u funkciji pada tlaka po petljama. U tom smislu, rješavanje jednadžbe kontinuiteta i izračun tlaka mogu se smatrati dijelom pre-procesiranja odnosno post-procesiranja. Ipak, zbog toga što stupanj u kojem početno polje brzine zadovoljava jednadžbu kontinuiteta uvjetuje ostvarivi stupanj konvergencije iterativnog postupka korekcije protoka, prilikom usporedbe računalnih vremena, na strani FLOP algoritma je dodatno uračunato i vrijeme potrebno za rješavanje jednadžbe kontinuiteta. Spomenuti utrošci računalnog vremena su u tablici 5.2 označeni žutom odnosno zelenom bojom. Ta su vremena usporediva sa vremenima dobivenim mjerenjem na strani SIMPLE algoritma i zajedno sa potonjim unesena na slici 5.3 u obliku dodatnih osi. Vremenska skala na slici 5.3 b) koja prikazuje konvergenciju FLOP algoritma unesena je izravno, dok je skala na a) dijelu slike, koja prikazuje konvergenciju SIMPLE algoritma formirana jednostavnim skaliranjem broja iteracije.

Kao što je već spomenuto u uvodu ovog poglavlja, svrha ovog rada je zasnivanje novog algoritma, dok je realizacija algoritma u računalni program provedena u skladu sa dobrom praksom i dostupnim vremenom autora. Realizacija samog programskog koda na profesionalnoj razini prelazi zadane okvire ovog rada, pa samim time iskazano računalno vrijeme treba smatrati samo okvirnim pokazateljem svojstava algoritma, dok kao mjerodavni pokazatelj ostaje broj iteracija.

Povijest konvergencije svih proračuna objedinjena je na slici 5.3, prikazom iznosa srednje relativne pogreške brzine  $r_{\Delta v \text{ rel}}$  spram broja iteracija  $iter$  i utrošenog računalnog vremena  $t_{rac}$  u sekundama.



Slika 5.3 Primjer 1. Konvergencija rješenja prema srednjoj relativnoj pogrešci brzine: a) SIMPLE; b) FLOP

Slika 5.3 a) ponovno pokazuje sličnost u povijesti konvergencije SIMPLE algoritma obzirom na korištene 3 različite veličine mreže. Usporedba sa slikom 5.2 pokazuje da unatoč tome što reziduali jednadžbe kontinuiteta  $r_p$  i količine gibanja  $r_u$  i  $r_v$  indiciraju napredak iterativnog postupka ka računalnoj točnosti, pogreška polja brzine pokazuje da se točnost rješenja pritom ne povećava. S obzirom na to da je upravo polje brzine preduvjet za rješavanje svakog problema koji u svojoj naravi sadrži strujanje fluida, zaključuje se da je najbolji kriterij usporedbe upravo onaj temeljen na postignutoj točnosti polja brzine. Uz navedeno, iz povijesti konvergencije veličina iskazanih na slikama 5.2 i 5.3 vidi se da prilikom usporedbe brzine konvergencije s novim algoritmom, usvajanje srednje relativne pogreške brzine  $r_{\Delta v, rel}$  kao kriterija usporedbe, umjesto veličine temeljene na rezidualima količine gibanja  $r_u$  i  $r_v$ , dovodi SIMPLE algoritam u povoljniji tj. ispravan položaj.

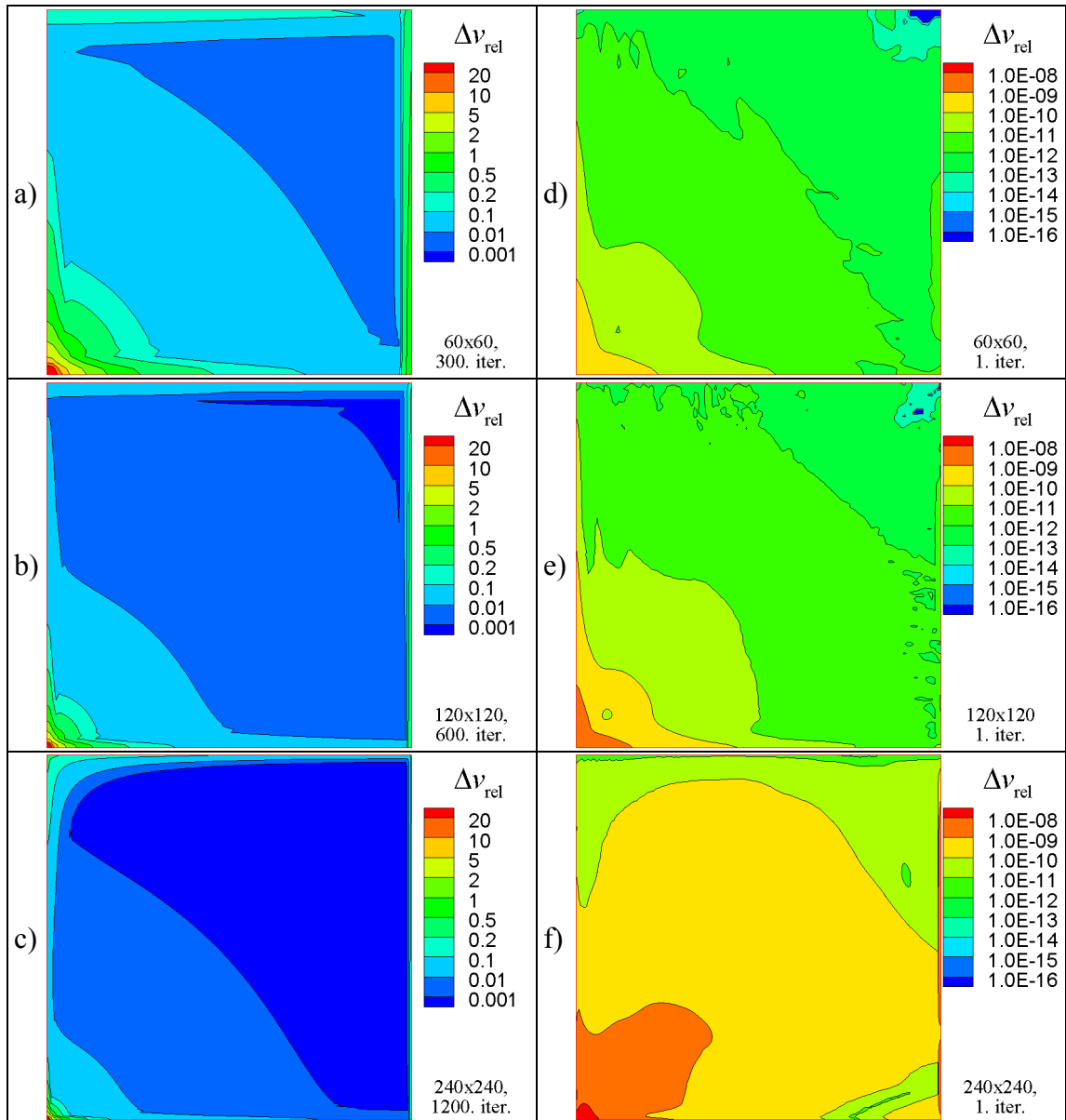
Na temelju navedenog i usporedbom povijesti konvergencije relativne pogreške brzine prikazanih na slici 5.3 a) i b) zaključuje se da SIMPLE algoritam za rješavanje ovog problema zahtijeva 60 iteracija na mreži M1 (3600 konačnih volumena), 120 iteracija na mreži M2 (14400 k.v.) i 320 iteracija na mreži M3 (57600 k.v.). Također se zaključuje da kod SIMPLE algoritma broj iteracija potrebnih za rješavanje ovisi o gustoći diskretizacije, pri čemu broj iteracija raste sa drugim korijenom povećanja broja konačnih volumena. Novi, FLOP algoritam rješava problem samim rješavanjem jednadžbe kontinuiteta, dakle bez iteracija, neovisno o gustoći diskretizacije.

Slika 5.3 pokazuje zamjetnu razliku u točnosti koju postižu SIMPLE i FLOP algoritam. Razlog tome može se naći u prostornom prikazu raspodjele relativne pogreške brzine. Slika 5.4 prikazuje prostornu raspodjelu relativne pogreške polja brzine u postotcima koja ostaje prisutna na kraju svih izvršenih proračuna. Dijelovi a), b) i c) slike prikazuju pogrešku SIMPLE algoritma a d), e) i f) pogrešku FLOP algoritma. Vidljivo je kako FLOP algoritam ovaj primjer rješava do računalne točnosti (Pogreška je na slici iskazana u postotcima, za oba algoritma.). Ovaj primjer osim usporedbe svojstava algoritma, predstavlja i test ispravne realizacije numeričke procedure u vlastitom programu. Problem je tako odabran da komponente polja brzine, i gradijenta tlaka imaju izo-linije koje su paralelne stranicama konačnih volumena (jednadžbe (5.4) i slika 5.1 b)). U FLOP algoritmu, brzina se određuje prema izrazu (4.18), koji za ovakav pravilan oblik konačnih volumena i za slučaj konstantne brzine po stranicama daje egzaktnu vrijednost brzine u težištu konačnog volumena. Procedura izračuna gradijenta tlaka u FLOP algoritmu se oslanja na EDS shemu diferencije jednako kao i u SIMPLE algoritmu. Razlika kod FLOP algoritma jest ta što se jednadžbe količine gibanja rješavaju kroz uvjet nulte cirkulacije gradijenta tlaka po zatvorenim petljama. Kako lažna difuzija uzrokuje jednaku pogrešku u izračunu gradijenta tlaka duž pravaca kojima se pružaju nasuprotni segmenti petlje, ona u postupku integracije tlaka biva poništena, pa je tako izračun pada tlaka po petljama oslobođen pogreške lažne difuzije. U naknadno obavljenom koraku korekcije protoka, korigirana je samo mala pogreška na razini blizu računalne točnosti, koja je preostala zbog toga što se jednadžba kontinuiteta rješava pomoću iterativnog rješavača.

Raspodjela pogreške za FLOP algoritam pokazuje veće vrijednosti u područjima bliže zaustavnoj točki, gdje je brzina manja (prikaz rješenja nalazi se na slici 5.1). Uzrok ovakvog trenda u slučaju FLOP algoritma, leži u iskazu pogreške koji je relativan, pa time pokazuje veće iznose na mjestima manje brzine. U odsustvu drugih uzroka, jedina pogreška koja se pojavljuje u rješenju FLOP algoritma je ona zbog konačne točnosti računala. Trend porasta pogreške s povećanjem gustoće diskretizacije, koji je primjetan i na slici 5.3 b) može se tako pripisati neizbježnom gubitku preciznosti koji se događa prilikom operacija oduzimanja. S porastom finoće diskretizacije, geometrijske veličine

koje se određuju operacijom oduzimanja dobivaju se na temelju razlike sve bliskijih veličina, što uzrokuje gubitak značajnih znamenki.

Pogreška u polju brzine određenom SIMPLE algoritmom (Slika 5.4 a), b) i c)) nastaje zbog više razloga. Pregledom polja relativne pogreške brzine, može se primijetiti da se pogreška povećava približavanjem rubovima područja i to posebno ulaznoj i izlaznoj granici te približavanjem zaustavnoj točki. Kod SIMPLE algoritma, komponente brzine u težištima konačnih volumena računaju se iz pripadnih jednadžbi količina gibanja. One se time određuju na temelju masenih protoka odgovarajuće komponente brzine kroz stranice konačnih volumena i vrijednosti tlaka. Vrijednost pojedine komponente brzine na stranici konačnog volumena određuje se nekom od uzvodnih shema diferencije (ovdje EDS shema) pa se nužno pojavljuje i pogreška lažne difuzije. Lažna difuzija je tako prvi izvor pogreške koja se pojavljuje svugdje u nutrini područja odnosno tamo gdje brzinu na stranici treba izračunati. Lažna difuzija prisutna je i u FLOP algoritmu, samo što se u ovom specifičnom primjeru nije pokazala iz ranije navedenih razloga. Na rubovima područja, brzine na stranicama konačnih volumena koje čine rub ne određuju se shemom diferencije, već su zadane rubnim uvjetom. Međutim, na tim stranicama nedostaje vrijednost tlaka koja također ulazi u diskretizirane jednadžbe količine gibanja za rubne volumene. U nedostatku fizikalnih jednadžbi pomoću kojih bi se ta vrijednost odredila, primjenjuje se neka proizvoljna interpolacija. Ovo je drugi izvor pogreške koja se ispoljava bliže rubovima područja. Ovakva vrsta pogreške se u novom, FLOP algoritmu ne pojavljuje. Jednadžba kontinuiteta se u SIMPLE algoritmu zadovoljava kroz izvedenu jednadžbu za korekciju tlaka. U cilju sprečavanja pojave nefizikalnih oscilacija tlaka (opisano u poglavlju 4.3) u jednadžbu je Rhie-Chow interpolacijom, unesena i razlika između gradijenta tlaka koji proizlazi izravno iz jednadžbe količine gibanja i onog dobivenog iz čvornih vrijednosti tlaka. U uvjetima veće zakrivljenosti strujanja i većih promjena tlaka, ova razlika ostaje trajno prisutna, pa i u konačnom rješenju, kada reziduali  $r_p$ , te  $r_u$  i  $r_v$  indiciraju računalnu točnost. Ovo je treći izvor pogreške koji je u ovom primjeru izražen najviše u području bliže zaustavnoj točki. Ovakva vrsta pogreške, se također ne pojavljuje u FLOP algoritmu.



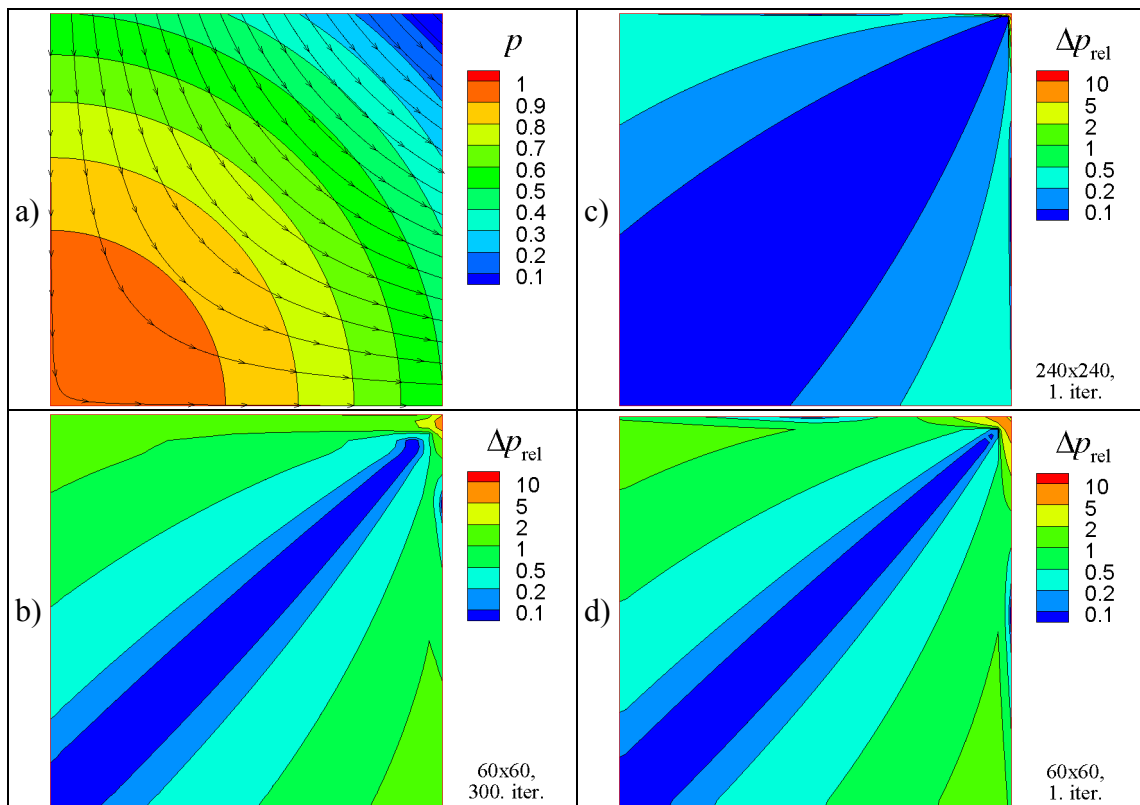
Slika 5.4 Primjer 1. Usporedba polja relativne pogreške brzine u postotcima: a), b), c) –SIMPLE; d), e), f) –FLOP

Polje tlaka je prikazano na slici 5.5 a). Na istoj slici, pogreška polja tlaka iskazana je relativnom pogreškom:

$$(\Delta p_{rel})^{iv} = \left( \frac{|p - p_{teor}|}{|p_{teor}|} \right)^{iv}; \quad iv = 1, 2, \dots, nv \quad (5.8)$$



Ova je pogreška za mrežu M1 prikazana na slici 5.5: proračun SIMPLE algoritmom dio b), a FLOP algoritmom dio d) slike. Zaključuje se da su pogreške istog reda veličine jer oba algoritma u ovom primjeru koriste istu EDS shemu diferencije, koja u oba slučaja stvara jednaku pogrešku lažne difuzije. Njen se utjecaj povećanjem gustoće diskretizacije smanjuje, kako se može vidjeti usporedbom c) i d) dijela slike. Utjecaj lažne difuzije na polje tlaka je u oba algoritma jednak, dok je njen utjecaj na polje brzine različit. Razlika nastaje zbog različitih oblika upotrebe polja tlaka u dvama algoritmima.



Slika 5.5 Primjer 1. Polje tlaka: a) i usporedba relativne pogreške polja tlaka u postotcima: b)- SIMPLE; c), d)-FLOP

## 5.2 Potencijalno strujanje izvora uz nepropusnu stjenku

Prethodni je primjer pokazao ponašanje SIMPLE i FLOP algoritama u uvjetima linearne promjene komponenti polja brzine i gradijenta tlaka. Diskretizacija je bila tako provedena da se pogreške uzrokovane numeričkim postupcima u FLOP algoritmu ne odražavaju na polje brzine. Ovaj primjer također ima svoje analitičko rješenje, a donosi usporedbu algoritama u uvjetima u kojima promjene komponenti polja brzine i gradijenta tlaka odstupaju od linearne. I ovdje je riječ o strujanju sličnom onom u okolišu zaustavne točke s time da su u ovom primjeru korišteni izvori, što rezultira nelinearnim funkcijama za komponente brzine i gradijenta tlaka.

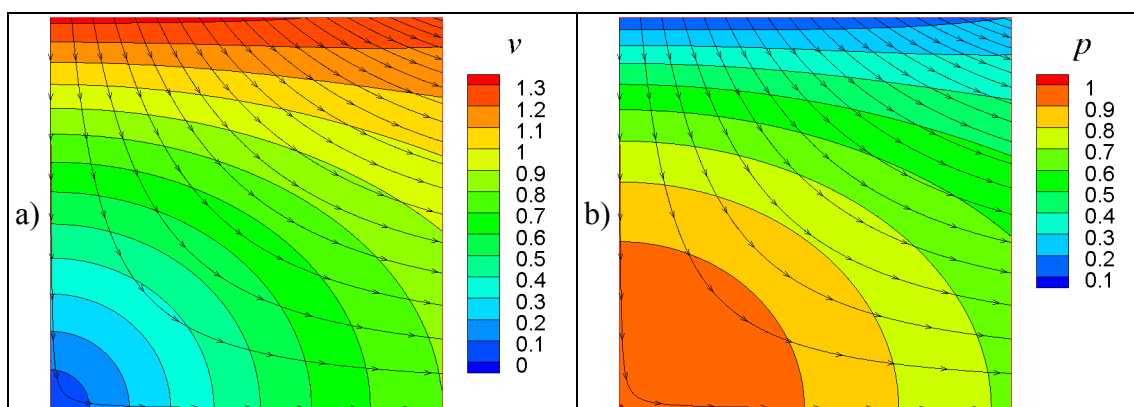
Strujanje je inducirano od strane dva izvora kapaciteta  $4\pi$  koji su smješteni simetrično obzirom na os  $x_1$ , u točkama  $(0, 2)$  i  $(0, -2)$ . I u ovom je primjeru riječ o ravninskom potencijalnom strujanju fluida gustoće  $\rho=1$  u kvadratnom području veličine  $1 \times 1$ , za kojeg se rješenje traži u prvom kvadrantu ravnine  $x_3=0$ . Analitičko rješenje ovog problema glasi:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2 \cdot x_1 \cdot \left( \frac{1}{x_1^2 + (x_2 - 2)^2} + \frac{1}{x_1^2 + (x_2 + 2)^2} \right); \\ v_2 &= 2 \cdot \left( \frac{(x_2 - 2)}{x_1^2 + (x_2 - 2)^2} + \frac{(x_2 + 2)}{x_1^2 + (x_2 + 2)^2} \right); \\ p &= p|_{r_p} + \frac{\rho}{2} \left( (v^2)|_{r_p} - v^2 \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Primjer je riješen na mrežama jednakim onima koje su korištene u prethodnom primjeru: M1 (60x60 k.v.), M2 (120x120 k.v.) i M3(240x240 k.v.). U ovom se primjeru izo-linije pojedinih komponenti polja brzine ne poklapaju sa stranicama konačnih volumena. Nametanje rubnog uvjeta brzine kroz teorijske (koje slijede iz analitičkog rješenja (5.9)) vrijednosti u polovištima stranica konačnih volumena koje čine ulaznu i izlaznu granicu, uzrokuje pogrešku u ukupnom toku kroz područje proračuna. Ova je pogreška izbjegnuta tako, da je na ulaznom (gornjem) rubu umjesto analitičke

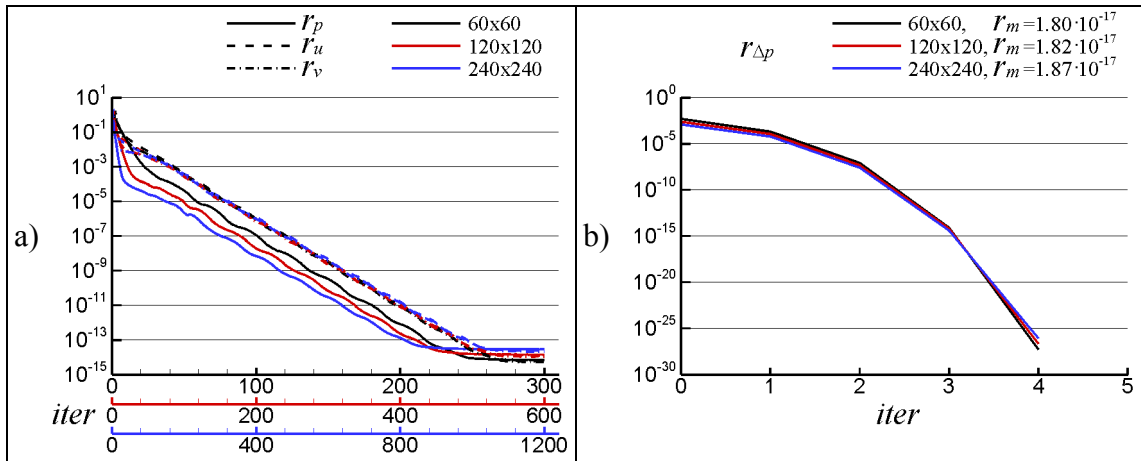
vrijednosti u polovištu pojedine stranice, zadana analitička integralna srednja vrijednost komponente brzine  $v_2$ . Isti je postupak proveden i na izlaznom (desnom) rubu, za komponentu brzine  $v_1$ . Tim je postupkom globalna pogreška jednadžbe kontinuiteta vraćena u granice računalne točnosti.

Prikaz diskretizacije za mrežu M1 može se vidjeti na slici 5.1 a), dok je analitičko rješenje za ovaj primjer prikazano kroz polja brzine i tlaka, na slici 5.6. Točka referentnog tlaka  $T_p$  je u svim slučajevima smještena u težištu konačnog volumena najbližeg ishodištu, a referentni tlak ima vrijednost  $p|_{T_p} = 1$ . Postupak proračuna i određivanja utroška vremena provedeni su na isti način kao i u prethodnom primjeru s tim da je u ovom primjeru pri primjeni FLOP algoritma bilo potrebno provesti više iterativnih korekcija protoka.



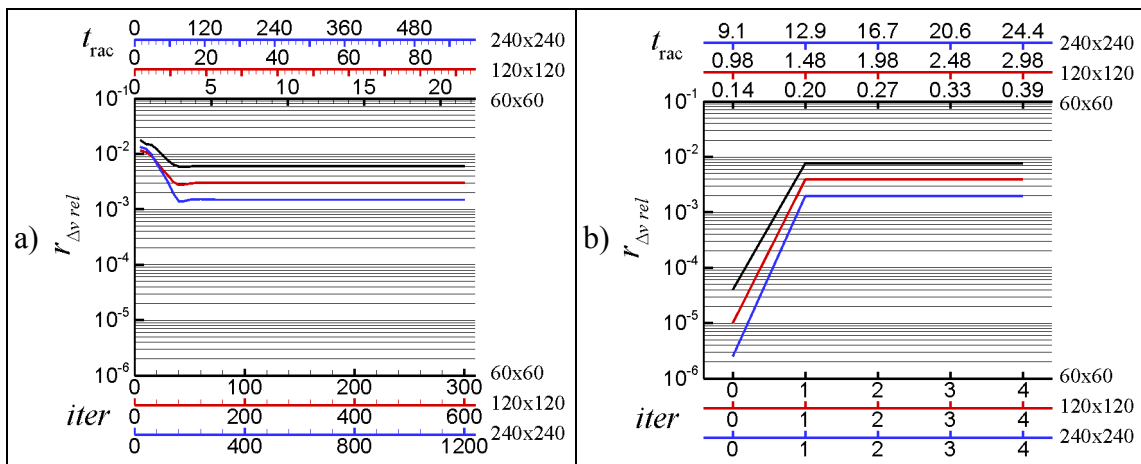
Slika 5.6 Primjer 2. Analitičko rješenje: a) strujnice u polju apsolutne vrijednosti brzine; b) strujnice u polju tlaka

Slika 5.7 prikazuje povijest konvergencije iskazanu rezidualima za oba algoritma. Definicije veličina koje se pojavljuju na slici dane su jednadžbama (5.5), te jednadžbama (5.1) i (5.2). I u ovom je primjeru uočljiva sličnost u povijesti konvergencije SIMPLE algoritma za slučaj različitih gustoća mreže (Slika 5.7 a)). Slika 5.7 b) pokazuje povijest konvergencije FLOP algoritma iskazanu rezidualom pada tlaka  $r_{\Delta p}$ , a također su naznačeni i postignuti reziduali jednadžbe kontinuiteta  $r_m$  za pojedine mreže.



Slika 5.7 Primjer 2. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP.

Vidljivo je da je upotreba srednjih integralnih vrijednosti pojedinih komponenti brzina na ulaznim i izlaznim granicama, nakon rješavanja jednadžbe kontinuiteta rezultirala pogreškom masenih protoka na stranicama konačnih volumena na razini računalne točnosti, jednako kao i u primjeru 5.1 (usporedba veličine  $r_m$  sa slike 5.7 i iz tablice 5.1).



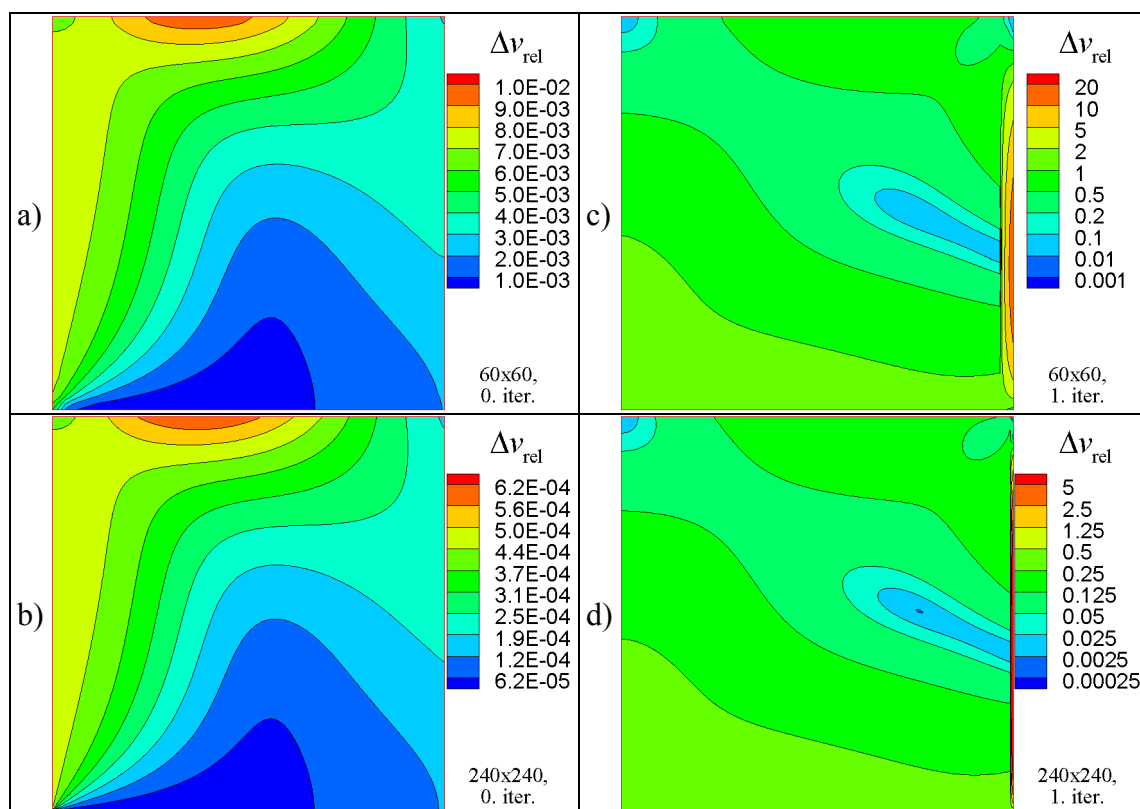
Slika 5.8 Primjer 2. Konvergencija rješenja s obzirom na srednju relativnu pogrešku brzine: a) SIMPLE; b) FLOP

Slika 5.8 prikazuje povijest konvergencije s obzirom na srednju relativnu pogrešku brzine  $r_{\Delta v, rel}$  koja je definirana jednadžbama (5.6) i (5.7). Usporedba slika 5.7 i 5.8 pokazuje kako i u ovom primjeru, povijest konvergencije iskazana rezidualima indicira napredak ka rješenju dok se srednja relativna pogreška brzine ne smanjuje. Ovog puta se

to može reći i za FLOP algoritam što potvrđuje ispravnost odluke o odabiru srednje relativne pogreške brzine kao kriterija usporedbe postignutih razina rješenja. Ovdje ne dolazi do poništavanja pogreške uzrokovane lažnom difuzijom u FLOP algoritmu, kao što je to bio slučaj u prethodnom primjeru.

Nakon početnog rješavanja jednadžbe kontinuiteta u FLOP algoritmu, ona je zadovoljena do računalne točnosti. Iznosi srednje relativne pogreške brzine koji su prikazani na slici 5.8 b) za nultu iteraciju, predstavljaju pogrešku u određivanju vrijednosti brzina u težištima konačnih volumena temeljem protoka po stranicama konačnih volumena (izraz (4.18)) koja nastaje na ovakvom polju brzine. Njenom usporedbom sa iznosima pogreške u daljnjim iteracijama na dijelu b) slike, a i s iznosom na strani SIMPLE algoritma (dio a) slike) zaključuje se da je u ovom primjeru ova pogreška dva reda veličine manja od pogreške uzrokovane lažnom difuzijom. S porastom gustoće diskretizacije, raspodjela masenog toka po stranicama konačnih volumena teži konstantnoj vrijednosti čime se i pogreška u brzini u težištima konačnih volumena smanjuje. Pogreška uzrokovana lažnom difuzijom na strani FLOP algoritma očituje se tek u naknadnim iteracijama. Izračun gradijenta tlaka kontaminiran je lažnom difuzijom te se u naknadnim iteracijama polje brzine prilagođava tako da u uvjetima prisustva ove pogreške rezultira nultom vrijednošću cirkulacije gradijenta tlaka po petljama što dovodi do degradacije točnosti polja brzine.

Prostorna raspodjela relativne pogreške polja brzine  $\Delta v_{rel}$  (jedn. (5.6)) prikazana na slici 5.9, uspoređuje iznose pogreške nakon rješavanja jednadžbe kontinuiteta (dijelovi slike a) i b)), sa pogreškom nakon jednog koraka korekcije protoka (dijelovi slike c) i d)), gdje se pojavljuje i lažna difuzija. Slika 5.9 pokazuje kako se pogreška u određivanju vrijednosti brzine u težištima konačnih volumena (dijelovi slike a) i b)) povećava sa približavanjem lijevom i gornjem rubu. Ovo je i očekivano jer se ta područja nalaze bliže izvoru, što znači i veću prostornu promjenu komponenti brzine (izrazi (5.9)). Vidljivo je da je, pogreška koja nastaje pri određivanju vrijednosti brzina u težištima (4.18) uvijek za nekoliko redova veličine manja od one koju uzrokuje lažna difuzija.

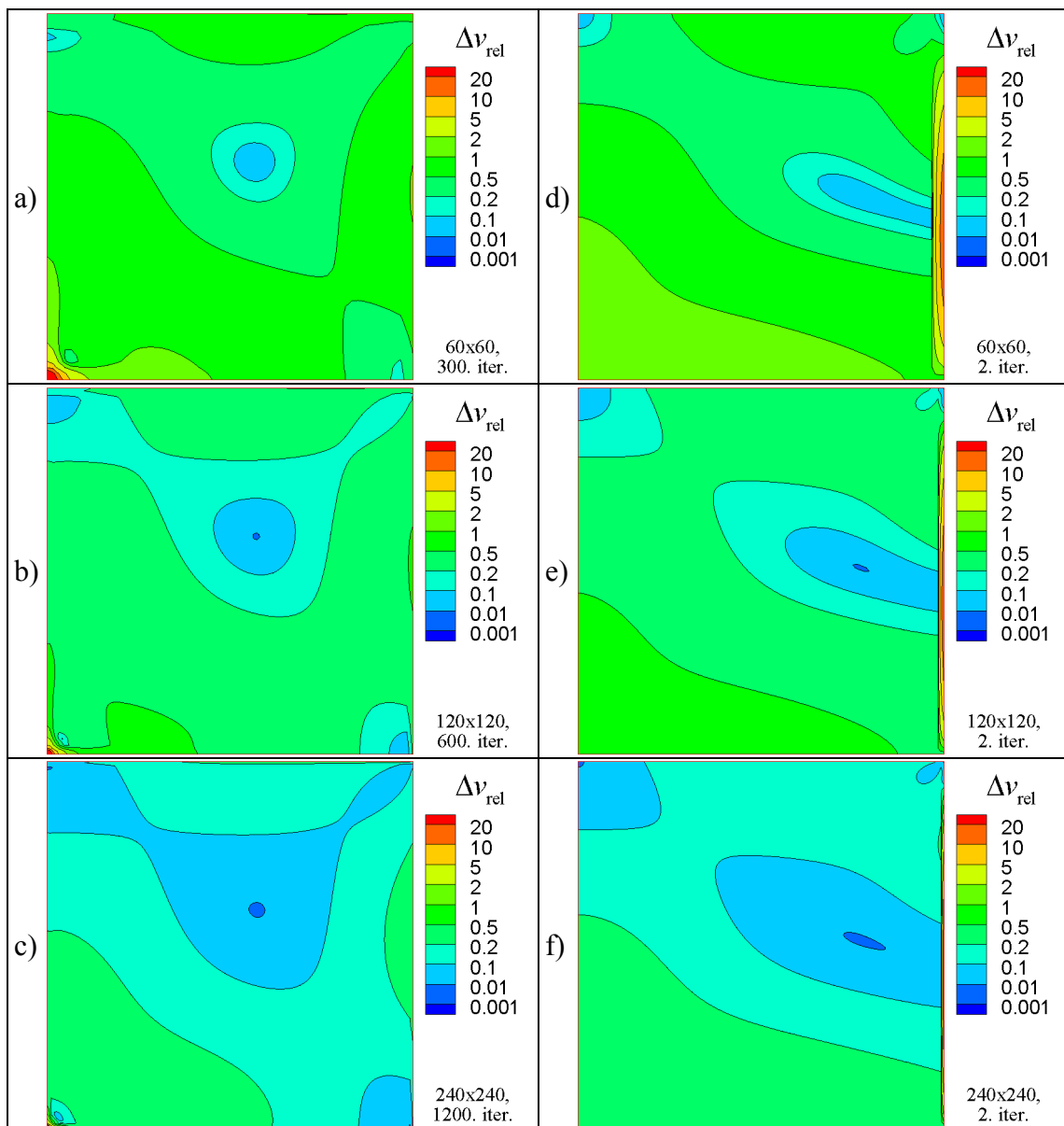


Slika 5.9 Primjer 2. Usporedba polja relativne pogreške brzine za FLOP algoritam u postocima: a), b) nakon rješavanja jednadžbe kontinuiteta; c), d) nakon prve korekcije protoka

Također, usporedbom skala koje prikazuju raspon pogrešaka na slici 5.9 a) i b), zaključuje se da u ovom primjeru, pogreška u određivanju brzine opada se povećanjem gustoće diskretizacije proporcionalno broju volumena  $\sim nv$  odnosno kvadratu koraka prostorne diskretizacije  $\sim (1/\Delta x)^2$ . S druge strane, usporedba skala sa slike 5.9 c) i d), pokazuje da pogreška uzrokovana lažnom difuzijom opada proporcionalno korijenu broja volumena  $\sim nv^{1/2}$ , odnosno proporcionalno koraku diskretizacije  $\sim (1/\Delta x)$ . Tako se zaključuje da će pogreška lažne difuzije, kod primjene EDS sheme u FLOP algoritmu uvijek biti dominantna.

Pogreška uzrokovana Rhie-Chow interpolacijom u SIMPLE algoritmu, se ne može na sličan način jasno razlučiti od pogreške uzrokovane lažnom difuzijom. Zbog naravi SIMPLE algoritma, ova je pogreška zajedno s pogreškom uzrokovanom lažnom difuzijom istodobno prisutna tijekom cijelog iterativnog postupka, pa se točnost polja

brzine nigdje ne približava onoj koja je postignuta nakon rješavanja jednadžbe kontinuiteta u FLOP algoritmu. Usporedbom slika 5.8 a) i b), zaključuje se da lažna difuzija uzrokuje sličnu razinu pogreške polja brzine u oba algoritma, kako po iznosu, tako i po trendu njene promjene s promjenom gustoće diskretizacije. Ovo je jasno prikazano i na slici 5.10 koja donosi usporedbu prostorne raspodjele relativne pogreške brzine za SIMPLE i FLOP algoritam.



Slika 5.10 Primjer 2. Usporedba polja relativne pogreške brzine u postotcima: a), b), c) –SIMPLE; d), e), f) –FLOP

U SIMPLE algoritmu, na ulaznim i izlaznim granicama postoji pogreška uzrokovana nefizikalnim rubnim uvjetima za tlak u jednadžbi količine gibanja za rubne volumene s time da se na izlaznom rubu dodatno pojavljuje i akumulirana pogreška uzrokovana lažnom difuzijom. Ova pojava predstavlja poznatu manifestaciju utjecaja lažne difuzije na pogrešku u vrijednostima polja transportirane fizikalne veličine (ovdje same brzine), koja rezultira propagacijom i povećanjem pogreške u smjeru konvekcije. Ova je pogreška na strani SIMPLE algoritma dodatno prisutna uz postojeću, uzrokovanu nefizikalnim rubnim uvjetima tlaka u jednadžbi količine gibanja. Ovo se može uočiti sa slika 5.4 a) i 5.10 a). Na slici 5.10 a) ova se pogreška SIMPLE algoritma zbog većeg utjecaja lažne difuzije u ovom primjeru, slabije ističe.

Pri primjeni FLOP algoritma, pri izlaznom rubu je pogreška nešto veća zato što se brzina u težištima konačnih volumena dobiva na temelju isključivo protoka po stranicama konačnih volumena, dakle korištenjem zadane brzine  $v_1$  na tom rubu. Kod SIMPLE algoritma, brzine u težištima konačnih volumena određuju se iz jednadžbi količine gibanja. Na izlaznom je rubu zadan rubni uvjet poznate brzine, pa se prilikom određivanja iznosa brzine u težištima rubnih konačnih volumena uz egzaktni protok odnosno brzinu  $v_1$  koristi i egzaktna brzina  $v_2$ , što rezultira nešto manjom pogreškom na tom mjestu. U realnim situacijama, analitičko rješenje neće biti poznato, pa će se problem uvijek rješavati tako da izlaz bude smješten u područje s ustaljenim poljem brzine, a pritom će se koristiti rubni uvjet izlazne granice. Tada će pogreške dvaju algoritama na tim mjestima biti bliže.

Na temelju ovog primjera zaključuje se da lažna difuzija ima u oba algoritma sličan doprinos u pogrešci polja brzine. Na strani FLOP algoritma, određivanje brzine u težištima konačnih volumena temeljem masenih protoka po njegovim stranicama (4.18) rezultira pogreškom koja je nekoliko redova veličine manja od pogreške uzrokovane lažnom difuzijom i brže opada sa povećanjem gustoće diskretizacije. Time se očekuje da će i u idućim primjerima njen doprinos u ukupnoj pogrešci biti zanemariv. Na strani SIMPLE algoritma, potvrdio se veći doprinos pogreške uzrokovane Rhie-Chow interpolacijom na mjestima s većim promjenama tlaka i većom zakrivljenošću strujanja. Iznos ove pogreške je toliki da ukupna pogreška polja brzine na tim mjestima dosiže



svoj maksimum, te se ovakvo ponašanje očekuje i u idućim primjerima. Na temelju navedenog te usporedbom povijesti konvergencije iskazane rezidualima i srednjom relativnom pogreškom polja brzine, potvrđuje se ispravnost odabira pogreške polja brzine kao kriterija usporedbe postignutih razina rješenja primjenom dvaju algoritama.

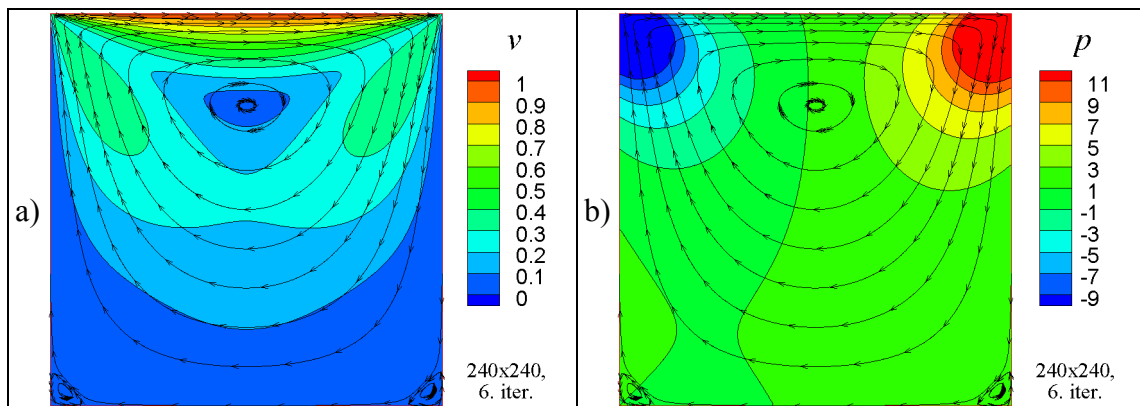
Zaključuje se da SIMPLE algoritam ovaj primjer potencijalnog strujanja rješava na mreži M1 (60x60 konačnih volumena) u 60 iteracija, na mreži M2 (120x120 k.v.) u 120 iteracija i na mreži M3 (240x240 k.v.) u 240 iteracija. Također se zaključuje da kod SIMPLE algoritma broj iteracija potrebnih za rješavanje ovisi o gustoći diskretizacije, pri čemu broj iteracija raste razmjerno s drugim korijenom povećanja broja konačnih volumena. S obzirom na to da se ovaj primjer odnosi na potencijalno strujanje, novi, FLOP algoritam rješava problem samim početnim rješavanjem jednadžbe kontinuiteta, i to neovisno o gustoći mreže. Do naknadne korekcije brzina dolazi zbog netočnosti diskretizacije jednadžbe količine gibanja, koja je potrebna da se dobije bezcirkulacijsko polje gradijenta tlaka. Broj iteracija potrebnih da se postigne konačno rješenje, ponovo ne zavisi o u gustoći mreže.

### 5.3 Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja $Re=1$

Ovaj je primjer prvi u nizu primjera koji uspoređuju SIMPLE i FLOP algoritam u uvjetima laminarnog strujanja u zatvorenim područjima. Cilj je testiranje novog algoritma u uvjetima različitih udjela konvekcijskog i difuzijskog transporta brzine, i rubnih uvjeta nepropusnog zida. U spomenutom nizu primjera, granice područja su nepropusne stjenke, a strujanje je inducirano isključivo mehanizmom difuzijskog transporta brzine s granica na unutrašnjost područja.

U ovom primjeru traži se rješenje za laminarno strujanje u pravokutnoj, kvadratnoj šupljini duljine stranica  $L=1$ , inducirano gibanjem gornje stranice u pozitivnom smjeru osi  $x_1$ , brzinom  $U = 1$ . Rješenje se traži za strujanje pri Reynoldsovom broju  $Re = \rho UL/\mu = 1$ . Ova se vrijednost Reynoldsovog broja postiže odabirom gustoće fluida  $\rho=1$  te viskoznosti  $\mu = 1$ .

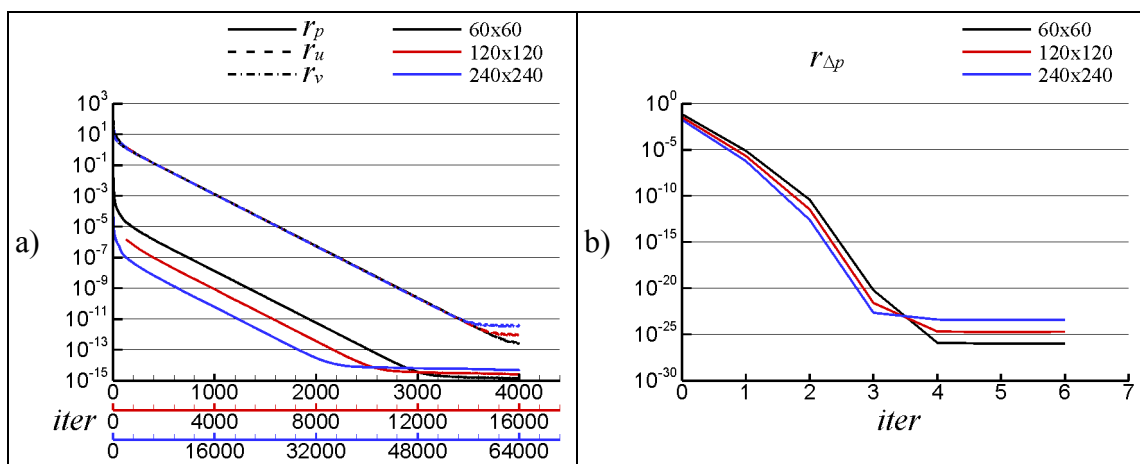
Kao i u prethodnim primjerima (Poglavlja 5.1 i 5.2) problem je riješen u tri varijante diskretizacije. Diskretizacija je ravnomjerna, kako je opisano u poglavlju 5.1, a primjer diskretizacije za slučaj mreže M1 (60x60 k.v.) prikazan je na slici 5.1 a). U ovom primjeru, na svim je rubovima primijenjen rubni uvjet zida. Na donjoj, lijevoj i desnoj granici zadana je nulta vrijednost obiju komponenti brzine, a na gornjoj nulta vrijednost komponente  $v_2$  te vrijednost komponente  $v_1 = U$ . Rješenje je prikazano na slici 5.11, kroz polja brzine i tlaka dobivenih FLOP algoritmom na mreži M3 (240x240 k.v.). Točka referentnog tlaka  $T_p$  je u svim slučajevima diskretizacije smještena u težištu konačnog volumena najbližeg ishodištu, a referentni tlak ima vrijednost  $p|_{T_p} = 1$ .



Slika 5.11 Primjer 3. Rješenje prema FLOP algoritmu:

- a) strujnice u polju apsolutne vrijednosti brzine;  
b) strujnice u polju tlaka

Na strani oba algoritma, u svim varijantama diskretizacije, proračun započinje s konstantnim, nultim vrijednostima polja brzine i tlaka. Postupak proračuna i određivanja utroška računalnog vremena provedeni su na isti način kao i u prethodnim primjerima (poglavlje 5.1).



Slika 5.12 Primjer 3. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP.

Povijest konvergencije iskazana rezidualima, za oba je algoritma prikazana na slici 5.12. Veličine koje se pojavljuju na slici, dane su jednadžbama (5.5), te (5.1) i (5.2). Za FLOP algoritam nisu iskazani reziduali jednadžbe kontinuiteta  $r_m$  jer su oni jednaki nuli. Kao i u prethodnim primjerima, proračunski postupak započinje nultim poljem brzine. Kako granice područja predstavljaju nepropusne stjenke, nulto početno polje brzine

predstavlja točno rješenje jednadžbe kontinuiteta. Tako u ovom primjeru u primjeni FLOP algoritma nema potrebe za rješavanjem jednadžbe kontinuiteta prije početka iterativnog dijela algoritma. Kako možemo vidjeti na b) dijelu slike 5.12, proračun FLOP algoritmom je nastavljan i nakon što je vrijednost reziduala pada tlaka  $r_{\Delta p}$  u 2. iteraciji pala ispod iznosa  $10^{-8}$ . Ovo je učinjeno zato da se prikaže ponašanje algoritma do računalne točnosti. Iz prikaza se može vidjeti kako i u ovom slučaju brzina konvergencije novog FLOP algoritma ne ovisi o veličini mreže. FLOP algoritam postiže rješenje na razini računalne točnosti u 4. iteraciji neovisno o veličini mreže. Kod primjene SIMPLE algoritma, slika 5.12 a), uočava se sličnost u povijesti konvergencije s obzirom na veličinu mreže. Rješenje na razini računalne točnosti SIMPLE algoritam postiže u 4000 iteracija na mreži M1 (60x60 k.v.), 16000 iteracija na mreži M2 (120x120 k.v.) i 64000 iteracija na mreži M3 (240x240 k.v.). Ovakav rezultat ukazuje da broj iteracija potrebnih za rješavanje na strani SIMPLE algoritma, za razliku od prethodnih primjera raste razmjerno broju konačnih volumena  $\sim nv$ .

U ovom i idućim primjerima ne postoji analitičko rješenje razmatranog problema, pa se veličine  $\Delta v_{rel}$  i  $r_{\Delta v_{rel}}$  trebaju redefinirati. Relativna pogreška polja brzine postaje relativna razlika polja brzine:

$$(\Delta v_{rel})^{iv} = \left( \frac{|v_i - (v_{ref})_i|}{|(v_{ref})_i|} \right)^{iv}; \quad iv = 1, 2, \dots, nv. \quad (5.10)$$

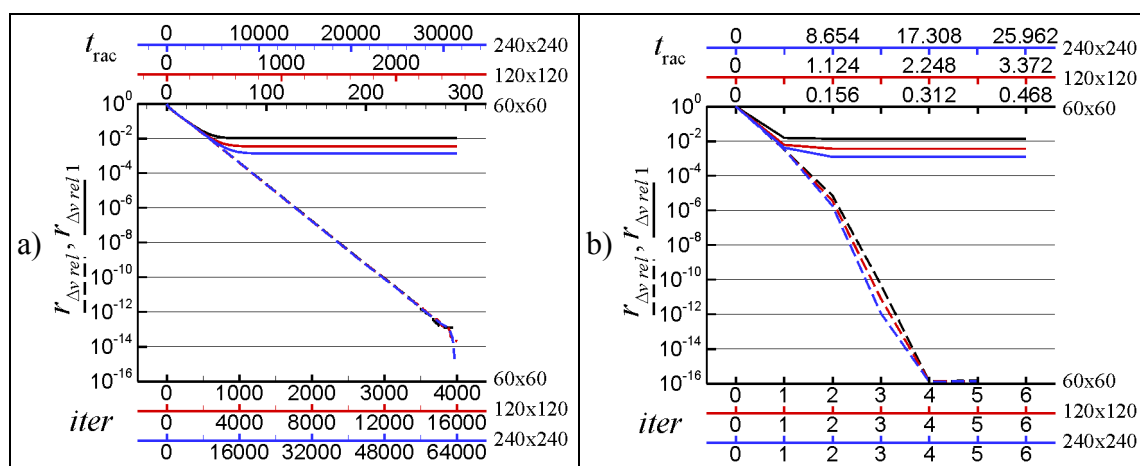
Na temelju relativne razlike polja brzine koja je prostorna veličina, definira se srednja relativna razlika brzine putem sume po svim konačnim volumenima:

$$r_{\Delta v_{rel}} = \frac{1}{nv} \sum_{iv=1}^{nv} (\Delta v_{rel})^{iv} \quad (5.11)$$

Relativna razlika polja brzine i srednja relativna razlika brzine su određene obzirom na usvojeno referentno polje brzine  $v_{ref}$ . One će služiti za prikaz povijesti i ocjenu brzine konvergencije algoritama na promatranom problemu.

Uvijek se uspoređuju dva algoritma, pa se u tom cilju, definiraju dvije grupe veličina  $\Delta v_{rel}$  i  $r_{\Delta v_{rel}}$ :

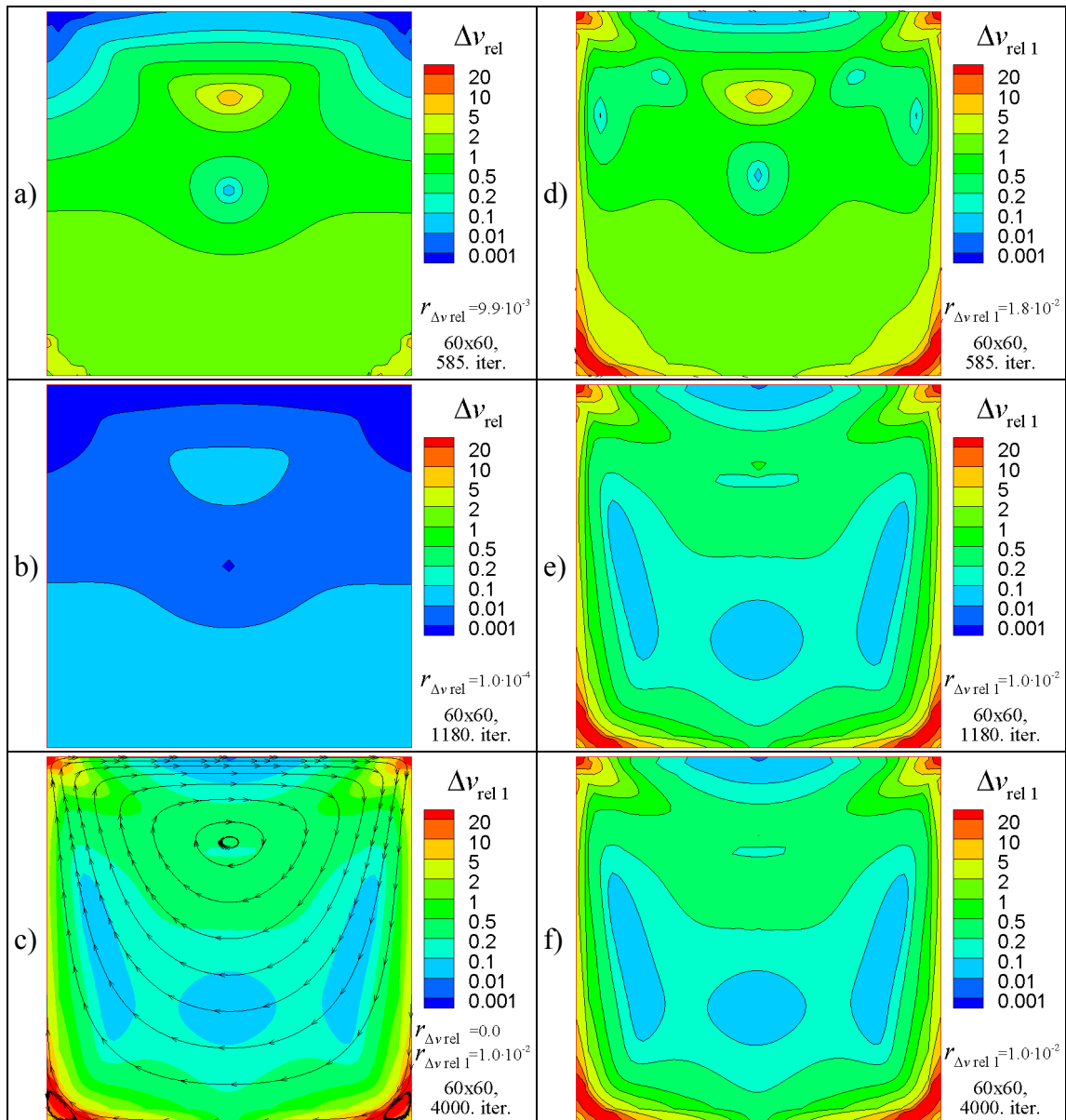
- Veličina  $\Delta v_{rel}$  predstavlja polje vlastite relativne razlike polja brzine. Pri njenoj definiciji, polja  $v$  i  $v_{ref}$  predstavljaju polja brzine koja proizlaze iz istog algoritma. Polje  $v$  je polje brzine nakon određene iteracije, a  $v_{ref}$  polje brzine nakon posljednje iteracije pripadnog algoritma. U većini slučajeva će  $v_{ref}$  predstavljati polje brzine na razini računalne točnosti u pripadnom algoritmu. Na mjestima pojave iznimki, polje brzine  $v_{ref}$  će biti posebno definirano. Putem ove veličine definirana je i veličina vlastite srednje relativne razlike brzine  $r_{\Delta v_{rel}}$ .
- U svrhu međusobne usporedbe svojstava algoritama uvodi se i veličina relativne razlike polja brzine  $\Delta v_{rel 1}$ . Pri njenoj definiciji, polje  $v$  predstavlja polje brzine nakon određene iteracije jednog algoritma, a referentno polje  $v_{ref}$  je polje brzine nakon posljednje iteracije drugog algoritma. Tako ova veličina odražava razliku u poljima brzina između dva algoritma. Veličina  $r_{\Delta v_{rel 1}}$  je definirana na temelju sume veličine  $\Delta v_{rel 1}$  po svim konačnim volumenima. U prikazima ovih veličina ( $\Delta v_{rel 1}$  i  $r_{\Delta v_{rel 1}}$ ), polje  $v$  se uvijek odnosi na pripadni, a polje  $v_{ref}$  na drugi algoritam



Slika 5.13 Primjer 3. Konvergencija rješenja prema vlastitoj srednjoj relativnoj razlici brzine i srednjoj relativnoj razlici brzine: a) SIMPLE; b) FLOP

Povijest konvergencije rješenja iskazana vlastitom srednjom relativnom razlikom brzine i srednjom relativnom razlikom brzine je za oba algoritma prikazana na slici 5.13. Pri formiranju veličina srednje relativne razlike brzine  $r_{\Delta v, rel}$ , za SIMPLE algoritam, slika 5.13 a), referentno polje brzine je polje proizašlo iz proračuna FLOP algoritmom, uzeto nakon 6. iteracije (na razini računalne točnosti). Jednako tako, pri formiranju ove veličine za FLOP algoritam, referentno polje je uzeto iz proračuna SIMPLE algoritmom sa razine računalne točnosti, na pripadnoj mreži (M1-4000. iter., M2-16000., M3-64000.). Ova su polja referentna i pri formiranju vlastite srednje relativne pogreške brzine  $r_{\Delta v, rel}$ . Vidljivo je da i ovako iskazana povijest konvergencije potvrđuje ranije iznesena zapažanja o svojstvima algoritama. U prikazu vlastite srednje relativne pogreške brzine ( $r_{\Delta v, rel}$  na slici 5.13 a)) i reziduala količina gibanja  $r_u$  i  $r_v$  na slici 5.12 a) za SIMPLE algoritam, vidljivo je da krivulje koje prikazuju vrijednosti za različite mreže (s različitim brojem iteracija na apscisi) padaju praktično na jednu krivulju. Konvergencija FLOP algoritma je višestruko brža, pa se u ovakvom prikazu zamjećuje neznatna razlika u krivuljama vlastite srednje relativne pogreške brzine. Ovo pokazuje ispravnost odluke o odabiru vlastite srednje relativne pogreške brzine kao kriterija ocjene svojstava algoritma u ovom i idućim primjerima.

Kako je već ranije spomenuto, kod FLOP algoritma je kriterij završetka proračuna definiran relacijom  $r_{\Delta p} < 10^{-8}$ . Pri ovoj vrijednosti reziduala, razlika između rješenja pada tlaka i rješenjima u idućim iteracijama u slučaju prikaza polja strujnicama i izolinijama poput onog na slici 5.11 se ne može zamijetiti. Usporedbom reziduala pada tlaka sa slike 5.12 b) i vlastite srednje relativne razlike polja brzine za slučaj FLOP algoritma sa slike 5.13 b), vidi se da pri rezidualu  $r_{\Delta p}$  u iznosu  $10^{-8}$ , vrijednost vlastite srednje relativne razlike brzine  $r_{\Delta v, rel}$  iznosi  $10^{-4}$ . Pri toj vrijednosti vlastite srednje relativne razlike brzine postignuta su rješenja za oba algoritma praktično najbolja moguća rješenja za polje brzine (postignut je minimum razlike u rješenjima – iskazano krivuljama  $r_{\Delta v, rel}$ ). Na temelju iznesenog, definira se kriterij za ocjenu postignute razine rješenja u svrhu usporedbe brzina konvergencije algoritama. Proračun se smatra završenim u onoj iteraciji u kojoj je vlastita srednja relativna razlika brzine  $r_{\Delta v, rel}$  ispod  $10^{-4}$ .



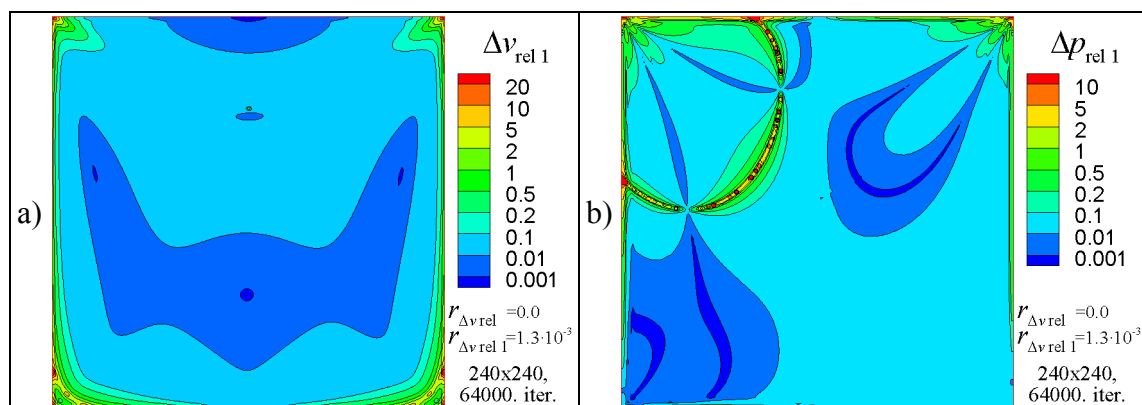
Slika 5.14 Primjer 3. Polja relativne razlike brzine u postotcima za SIMPLE algoritam: a), b) -vlastita relativna razlika; d), e), f) -relativna razlika; c) strujnice u polju relativne razlike

Na slici 5.14 dan je prostorni prikaz vlastite relativne razlike polja brzine  $\Delta v_{rel}$  i relativne razlike polja brzine  $\Delta v_{rel 1}$  za SIMPLE algoritam za tri tipične vrijednosti vlastite srednje relativne razlike brzine  $r_{\Delta v_{rel}}$  na mreži M1. Polja su iskazana u postotcima, a oznake srednjih vrijednosti decimalno. Slike 5.14 a) i b) prikazuju raspodjele vlastite relativne razlike polja brzine. Vidljivo je kako se u većem dijelu

područja vlastita relativna razlika nalazi blizu srednje vrijednosti (npr. 5.14 a) od 0.5 % do 2 % dok vlastita srednja relativna razlika iznosi  $9.9 \cdot 10^{-3}$ ). Također, usporedbom slika 5.14 a) i 5.14 b) vidi se da rješenje napreduje od gornjeg ruba, koji je izazvao gibanje fluida. Na slikama 5.14 d), e) i f), prikazane su raspodjele relativne razlike polja brzine, gdje je referentno polje ono koje proizlazi nakon 6. iteracije FLOP algoritma. Slijed tih slika oslikava zasićenje, kako je pokazano i krivuljama  $r_{\Delta v, rel, 1}$  na slici 5.13 a). Usporedbom slika 5.14 e) i f) vidimo da je relativna razlika u polju brzine između SIMPLE i FLOP algoritma praktički konstantna od 1180 iteracije pa do 4000. iteracije, odnosno rješenja na razini računalne točnosti SIMPLE algoritma.

Na slijedu slika 5.14 d)-e)-f) zamjetno je smanjivanje pogreške polja brzine u nutrini područja, dok razlike u polju brzina u kutovima područja ostaju iste kroz cijeli proračun SIMPLE algoritmom. Ova se razlika pripisuje pogrešci uzrokovanoj Rhie-Chow interpolacijom u SIMPLE algoritmu. Kao što je već pokazano u primjerima 5.1 i 5.2, u kojima je analitičko rješenje bilo poznato, ova je pogreška izraženija na mjestima sa većom promjenom brzine i većom zakrivljenošću strujanja. Na slici 5.14 c) na prikaz polja relativne razlike brzine, nadodan je i prikaz strujnica, sve za rješenje SIMPLE algoritma na razini računalne točnosti, nakon 4000. iteracije. Vidljivo je da je riječ upravo o takvim područjima. U gornjem lijevom i desnom kutu komponente brzine relativno naglo mijenjaju svoju vrijednost, odnosno strujanje naglo mijenja smjer. U donjem lijevom i desnom kutu strujanje se odvija u vrtlozima koji su relativno mali obzirom na veličinu diskretizacije na ovoj mreži (M1). Osim veće razlike u cijelom području ovih vrtloga (najbolje vidljivo usporedbom slika 5.14 c) i f)), posebno je uočljivo područje najveće razlike koje se pruža u dijagonalnim smjerovima. Spomenuti su vrtlozi izduženi upravo u tom smjeru, pa se tako područje maksimalne pogreške poklapa sa mjestima najvećih zakrivljenosti strujanja zahvaćenog u vrtlozima. Ova se područja pružaju dijagonalno do rubova gdje se stapaju sa područjima zaustavnih točaka koje vrtlozi dijele sa glavnim tokom (centralnim, glavnim vrtlogom). Ova je pogreška primjetna i u iskazu vlastite relativne razlike polja brzine na slici 5.14 a). Očito je da je zbog ove pogreške, konvergencija SIMPLE algoritma na tim mjestima sporija. Kao što je pokazano i u prošlim primjerima, ova se pogreška smanjuje s povećanjem gustoće mreže, kao i razlika u rješenjima SIMPLE i FLOP algoritma.





Slika 5.15 Primjer 3. Razlika rješenja za SIMPLE algoritam na mreži M3, iskazana u postocima: a) polje relativne razlike brzine; b) polje relativne razlike tlaka

Na slici 5.15 a) prikazana je raspodjela relativne razlike brzine za slučaj diskretizacije M3 (240x240 k.v). Vidljivo je kako se na mreži s finijom diskretizacijom pogreška u području strujanja zahvaćenog vrtlozima smanjila. Preostala su još samo područja s naglim skretanjem toka u kutovima i područja zaustavnih točaka, što je i bilo očekivano s obzirom na rezultate iz prošlih primjera (Poglavlja 5.1 i 5.2). Kako se u ovom primjeru relativna razlika polja brzine ponaša slično kao i relativna pogreška polja brzine na strani SIMPLE algoritma iz prošlih primjera, zaključuje se da uzrok iskazane razlike leži u pogrešci uzrokovanoj Rhie-Chow interpolacijom u SIMPLE algoritmu. Ovo se može dodatno potkrijepiti osvrtom na prošle primjere gdje se pokazalo da FLOP algoritam ne sadrži izvor pogreške koji je po svom doprinosu usporediv sa Rhie&Chow interpolacijom u SIMPLE algoritmu, dok je utjecaj lažne difuzije sličan za oba algoritma.

Na slici 5.15 b) prikazana je relativna razlika polja tlaka iz SIMPLE algoritma za rješenje na razini računalne točnosti, nakon 64000. iteracije. Ona je određena na isti način kao i relativna razlika polja brzine. Ova veličina oslikava prvenstveno razliku u utjecaju lažne difuzije u algoritmima. Kao i u primjeru 5.1 (slika 5.5), vidi se da je lažna difuzija jednako prisutna u SIMPLE i FLOP algoritmu, jer je relativna razlika polja tlaka mala. U prikazu na slici 5.15 b), relativna razlika je u većem dijelu područja manja od relativne pogreške polja tlaka iz primjera 5.1 (slika 5.5 c)). Na prikazu na slici 5.15

b), razlika se u većem dijelu područja nalazi između vrijednosti 0.001 – 0.1 %, dok se na prikazu na slici 5.5 c) na području slične veličine, pogreška nalazi između vrijednosti 0.2 – 2 %. Također, u njenom prikazu ne ističu se područja zaustavnih točaka, već se samo zamjećuje neznatan porast razlike u područjima uz rubove, što se pripisuje pogrešci uzrokovanoj nefizikalnim rubnim uvjetima tlaka u jednadžbama količine gibanja u SIMPLE algoritmu. Izboj veće razlike, oblika luka uzrokovan je relativnim prikazom pogreške jer prolazi upravo kroz područje vrijednosti tlaka koje su bliske nuli, slika 5.15 b) i 5.11 b).

Na temelju rezultata iz ovog primjera i zapažanja iz prošlih primjera, u svrhu usporedbe brzine konvergencije algoritama, usvaja se kriterij vlastite srednje relativne razlike polja brzine  $r_{\Delta v \text{ rel}}$ . Proračun se smatra završenim nakon iteracije u kojoj njena vrijednost padne ispod iznosa  $10^{-4}$ . Ovaj će kriterij vrijediti u svim preostalim primjerima.

Prema tom kriteriju SIMPLE algoritam ovaj primjer rješava u 1181 iteracija na mreži M1 (60x60 k.v), 4708 iteracija na mreži M2 (120x120 k.v) i 18826 iteracija na mreži M3 (240x240 k.v.). Brzina konvergencije SIMPLE algoritma ovisna je o gustoći diskretizacije te u ovom primjeru raste proporcionalno broju konačnih volumena.

FLOP algoritam ovaj problem rješava u dvije iteracije neovisno o gustoći diskretizacije. Gledano kroz utrošak računalnog vremena, FLOP algoritam je učinkovitiji jer treba manje računalnog vremena za postizanje zadane točnosti rješenja, kao što prikazuje tablica 5.3.

Tablica 5.3 Primjer 3. Utrošak računalnog vremena  $t_{rac}$  [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v \text{ rel}} < 10^{-4}$ )

Mreža	Algoritam	
	SIMPLE	FLOP
M1 (60x60)	85.98	0.156
M2 (120x120)	744.38	1.124
M3 (240x240)	9256.14	8.654

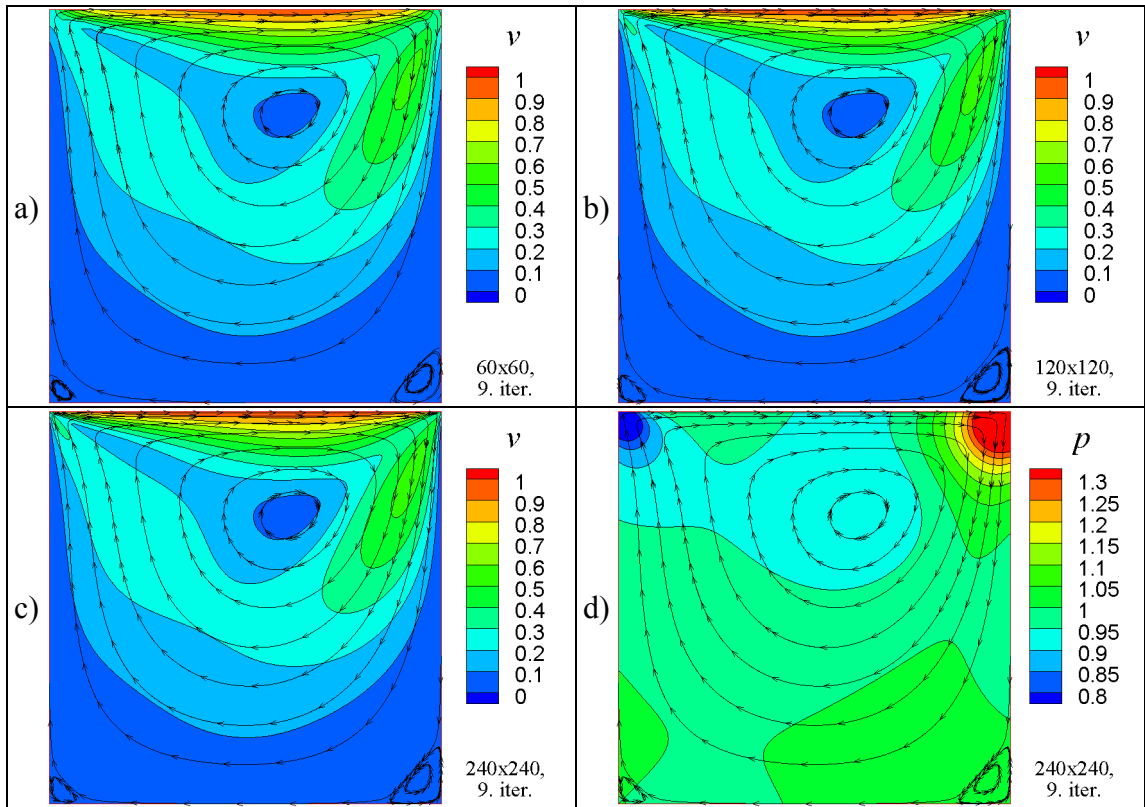
## 5.4 Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja $Re=100$

U ovom se primjeru rješava problem jednak onom iz prethodnog primjera, s razlikom da je u ovom primjeru zadan Reynoldsov broj strujanja  $Re = \rho UL/\mu = 100$ . Problem je rješavan za tri varijante diskretizacije, u kojima su mreže jednake onima iz prošlih primjera (M1, M2 i M3). Rubni uvjeti su zadani jednako kao i u prošlom primjeru, dok je traženi Reynoldsov broj ostvaren zadavanjem vrijednosti viskoznosti fluida  $\mu = 0.01$ . U svim slučajevima, proračun započinje nultim vrijednostima polja brzine i tlaka. Postupak proračuna i određivanja utroška računalnog vremena provedeni su na isti način kao i u prethodnim primjerima.

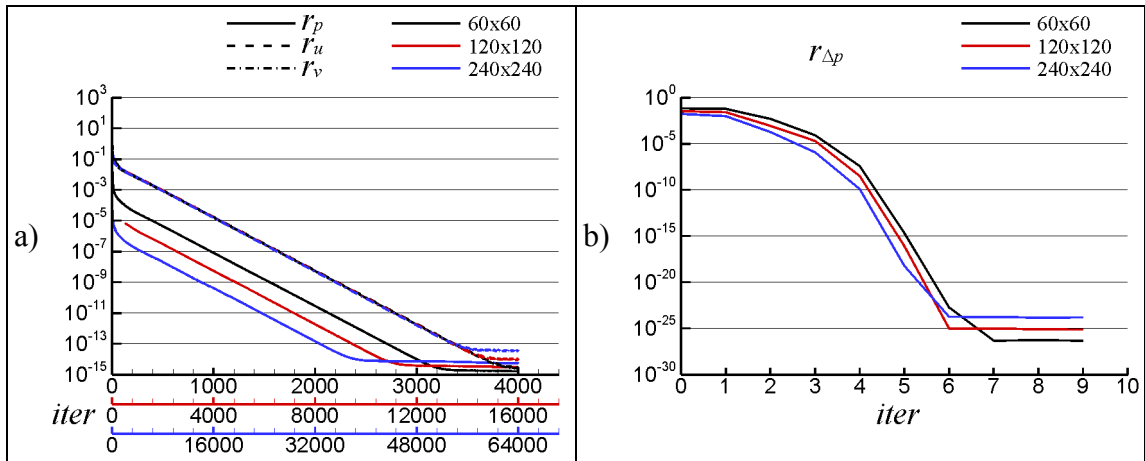
Rješenje problema prikazano je na slici 5.16, kroz polja brzine i tlaka, dobivenih FLOP algoritmom. Točka referentnog tlaka  $T_p$  je u svim slučajevima diskretizacije smještena u težištu konačnog volumena najbližeg ishodištu, a referentni tlak ima vrijednost  $p|_{T_p} = 1$ .

U ovom se strujanju zbog manje viskoznosti ostvaruje i manji pad tlaka u području proračuna, pa je shodno tome prilagođen i raspon prikaza izobara.

Pregledom polja apsolutne vrijednosti brzine sa slijeda slika 5.16 a)-b)-c), uočljivo je da je razlika između rješenja na korištenim mrežama zanemariva. Tako se zaključuje da je pri ovom Reynoldsovom broju i korištenim mrežama, mrežna neovisnost rješenja još uvijek sačuvana.



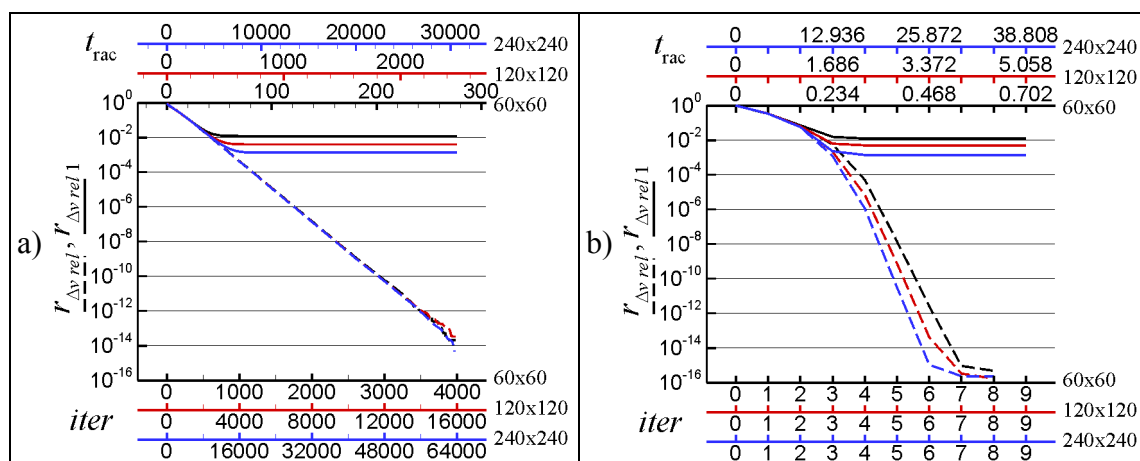
Slika 5.16 Primjer 4. Rješenje prema FLOP algoritmu dano strujnicama i poljima apsolutne vrijednosti brzine i tlaka: a), b) i c) polje brzine na mrežama M1, M2 i M3; d) polje tlaka na mreži M3



Slika 5.17 Primjer 4. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP

Slika 5.17 prikazuje povijesti konvergencije za dva algoritma na tri gustoće geometrijske mreže. Vidljivo je da se u ovom primjeru SIMPLE algoritam ponaša slično kao i u prošlom. Ako se na osi apscisa koriste brojevi iteracija razmjerni veličini mreže reziduali  $r_u$  i  $r_v$  za jednadžbu količine gibanja padaju praktički na jednu krivulju, na temelju čega se donose zaključci isti kao u prošlom primjeru. Vidljivo je da SIMPLE algoritam postiže rješenje na razini računalne točnosti u 4000 iteracija na mreži M1, 16000 iteracija na mreži M2 i 64000 iteracija na mreži M3. Također, broj iteracija potrebnih za postizanje rješenja na razini računalne točnosti kod SIMPLE algoritma, linearno raste sa povećanjem broja konačnih volumena  $\sim nv$ . FLOP algoritam za postizanje rješenja na razini računalne točnosti u ovom primjeru potrebuje 6 iteracija na mrežama M2 i M3, te 7 iteracija na mreži M1. Prema trendu kojeg pokazuju krivulje na slici 5.17 b), zaključuje se da i u ovom primjeru broj iteracija potrebnih za dosizanje rješenja na razini računalne točnosti kod FLOP algoritma ne ovisi o veličini mreže.

Povijest konvergencije rješenja iskazana vlastitom srednjom relativnom razlikom brzine -  $r_{\Delta v_{rel}}$  i srednjom relativnom razlikom brzine -  $r_{\Delta v_{rel 1}}$  za oba algoritma objedinjena je na slici 5.18. Prikazane veličine formirane su na isti način kao i u prethodnom primjeru (izrazi (5.10) i (5.11)) s jedinom razlikom da je pri formiranju vlastitih razlika za FLOP algoritma ( $\Delta v_{rel}$  i  $r_{\Delta v_{rel}}$ ) i razlika u SIMPLE algoritmu ( $\Delta v_{rel 1}$  i  $r_{\Delta v_{rel 1}}$ ) kao referentno polje  $v_{ref}$ , poslužilo polje brzine nakon 9. iteracije FLOP algoritma jer u ovom slučaju ono predstavlja završetak proračuna.



Slika 5.18 Primjer 4. Konvergencija rješenja prema vlastitoj srednjoj relativnoj razlici brzine i srednjoj relativnoj razlici brzine: a) SIMPLE; b) FLOP

Prikazi na slici 5.18 potvrđuju ispravnost odabira vlastite srednje razlike polja brzine ( $r_{\Delta v, rel}$ ) kao kriterija za ocjenu postignutih razina rješenja dvaju algoritama. Pregledom slika 5.18 a) i b), vidi se da kod oba algoritma krivulje srednje relativne razlike polja brzine ( $r_{\Delta v, rel}$ ) postižu zasićenje nakon iteracije u kojoj srednja relativna razlika polja brzine pada ispod vrijednosti  $10^{-4}$ .

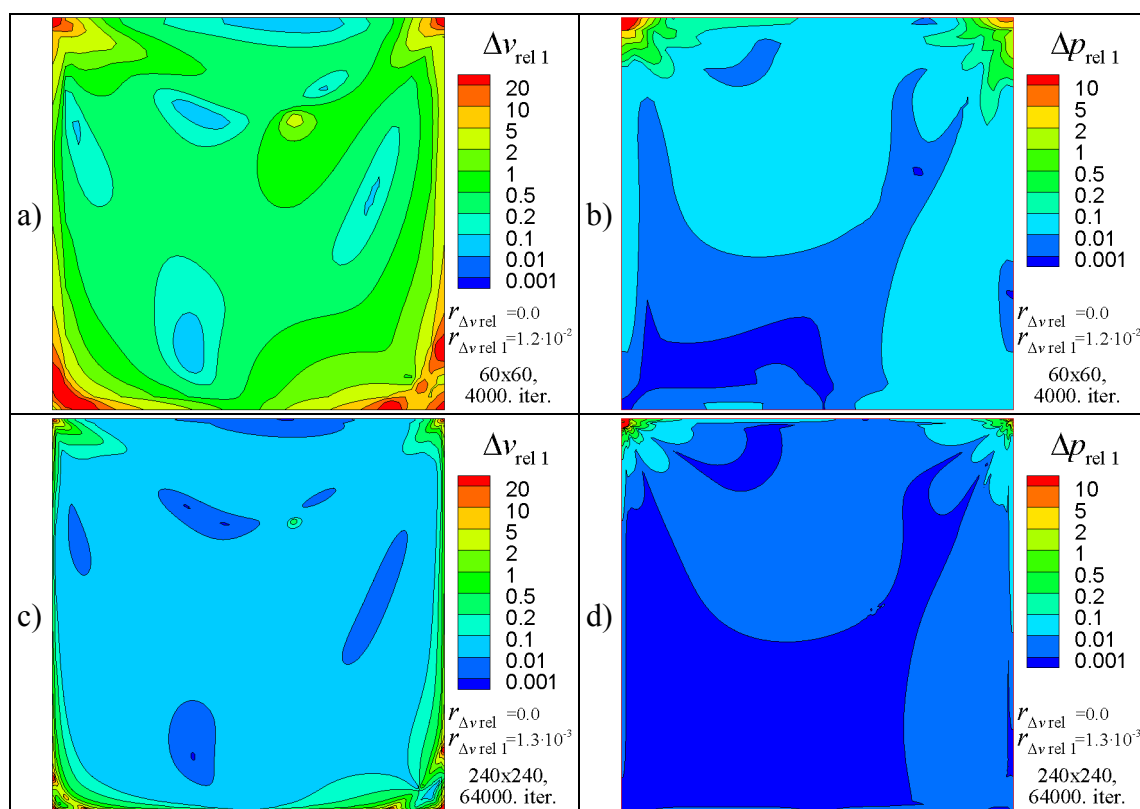
Sličnost sa prethodnim primjerom (Slika 5.13) zamjećuje se i na ovom prikazu povijesti konvergencije. Svi trendovi krivulja su slični, dok se razlika nalazi u broju iteracija za slučaj FLOP algoritma. Prema usvojenom kriteriju, FLOP algoritam ovaj problem rješava u 4 iteracije, neovisno o veličini mreže, dok je u slučaju SIMPLE algoritma preciznijim očitavanjem utvrđeno da algoritam rješava ovaj problem u 1183 iteracije na mreži M1, 4718 iteracija na mreži M2 te 18842 iteracije na mreži M3. Također, na strani SIMPLE algoritma potvrđuje se linearna veza između potrebnog broja iteracija i veličine diskretizacije.

Tablica 5.4 prikazuje utrošeno računsko vrijeme, iz koje se potvrđuje veća učinkovitost FLOP algoritma.

Tablica 5.4 Primjer 4. Utrošak računalnog vremena  $t_{rac}$  [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v_{rel}} < 10^{-4}$ )

Mreža	Algoritam	
	SIMPLE	FLOP
M1 (60x60)	81.86	0.312
M2 (120x120)	732.61	2.248
M3 (240x240)	9193.58	17.248

Razlike u rješenjima dobivenim SIMPLE i FLOP algoritmom prikazane su na slici 5.19. Njihovo je ponašanje slično kao i u prethodnom primjeru (slike 5.14 i 5.15), gdje su obrazloženi i uzroci nastanka tih razlika.



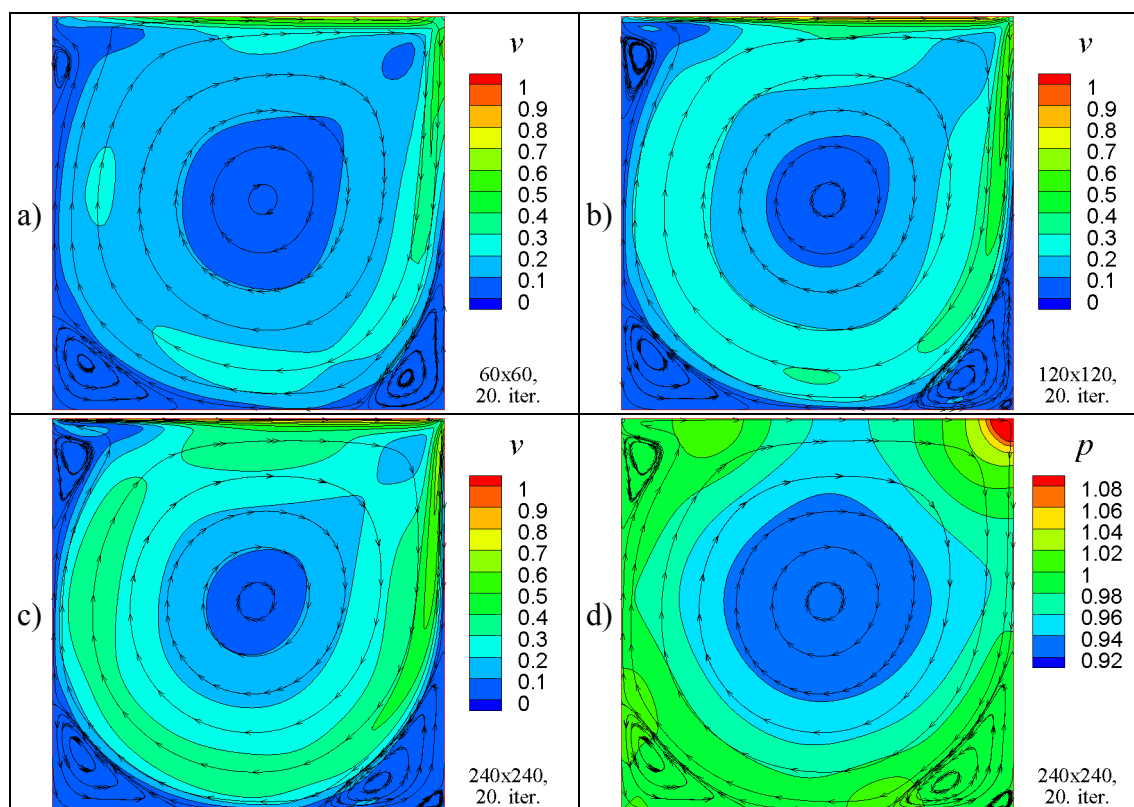
Slika 5.19 Primjer 4. Relativna razlika polja brzine i tlaka za SIMPLE algoritam, u postotcima: a), b) na mreži M1; c), d) na mreži M3

## 5.5 Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja $Re=5000$

U jednadžbi količine gibanja, konvekcijski je član nelinearan. Porastom njegovog udjela, smanjuje se stabilnost stacionarnog rješenja, te za Reynoldsove brojeve veće od kritičnog, rješenje postaje nestacionarno. Točna vrijednost kritičnog Reynoldsovog broja za ovaj slučaj dvodimenzijskog strujanja i danas je predmet rasprave. Kako je problem dvodimenzijski, njegova je vrijednost uglavnom od teorijskog značaja, s namjerom da posluži u svrhu usporedbe numeričkih metoda. Tako se na temelju dostupnih izvora može zaključiti da njegova vrijednost ovisi o redu točnosti numeričke sheme i gustoći diskretizacije. U radu [17] autori su utvrdili kritičnu vrijednost Reynoldsovog broja  $Re = 21000$ , dok ostali izvori [2], [40] i [4] daju raspon vrijednosti  $Re = 7000-8050$ . Autori rada [4], proveli su analizu stabilnosti postignutih stacionarnih rješenja za niz rastućih Reynoldsovih brojeva, na mrežama različitih gustoća od  $256 \times 256$  k.v. do uključivo  $2048 \times 2048$  k.v. primjenom numeričke sheme trećeg reda točnosti. Dobili su vrlo uzak raspon kritične vrijednosti:  $Re = 8000-8050$ . Za slučajeve Reynoldsovih brojeva nižih od kritičnog, tj. stacionarnih rješenja, svi se izvori podudaraju u rješenjima danim u obliku profila i polja fizikalnih veličina i naglašava se potreba za finijom diskretizacijom u cilju postizanja stabilnog rješenja kod viših vrijednosti Reynoldsova broja.

U skladu s navedenim, za ovaj je primjer odabrana vrijednost Reynoldsovog broja  $Re = 5000$ . Ova vrijednost omogućuje usporedbu svojstava novog i SIMPLE algoritama za slučaj većeg omjera između konvekcijskog i difuzijskog transporta brzine, dok istodobno osigurava stacionarno rješenje na mrežama M1, M2 i M3, definiranih u prethodnim primjerima. U ovom je primjeru zadavanje rubnih uvjeta, diskretizacija, postupak proračuna i određivanje utroška računalnog vremena provedeno na isti način kao i u prethodnim, dok je traženi Reynoldsov broj ostvaren zadavanjem vrijednosti viskoznosti fluida  $\mu = 0.0002$ .

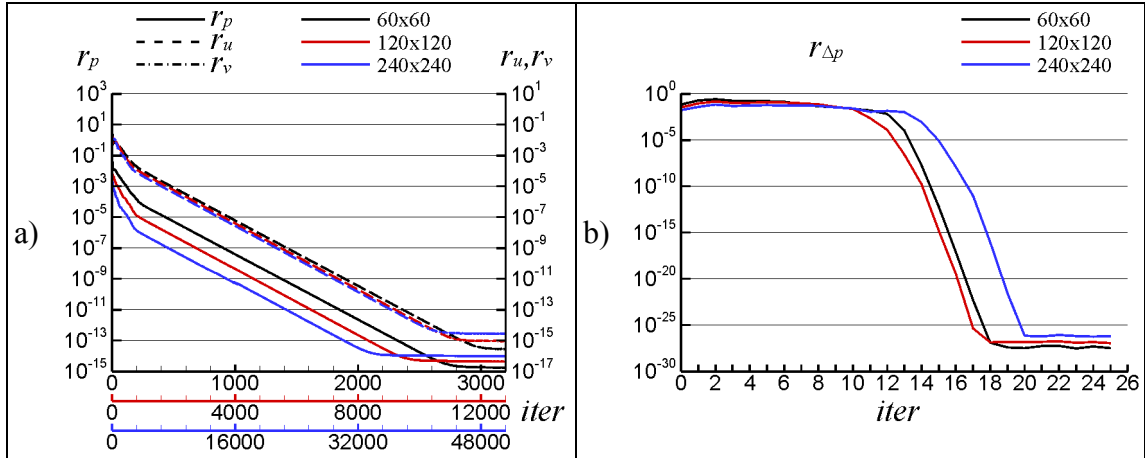




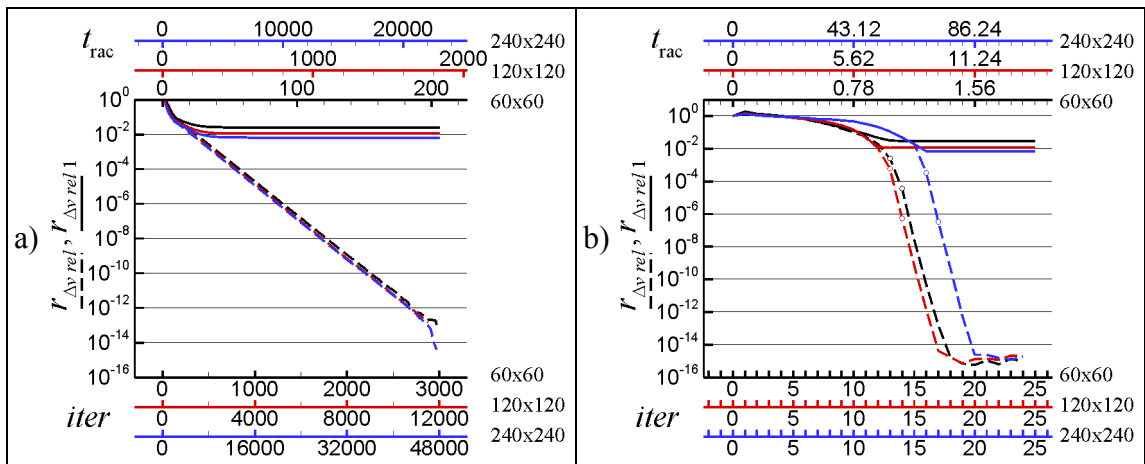
Slika 5.20 Primjer 5. Rješenje prema FLOP algoritmu dano strujnicama i poljima apsolutne vrijednosti brzine i tlaka: a), b) i c) polje brzine na mrežama M1, M2 i M3; d) polje tlaka na mreži M3

Slika 5.20 prikazuje rješenje na razini računalne točnosti dobiveno novim algoritmom, kroz prikaz strujnica i polja apsolutne vrijednosti brzine na mrežama M1, M2 i M3, te strujnica i polja tlaka na mreži M3. Pri ovom Reynoldsovom broju, ostvarena razlika tlaka uzrokovana je prvenstveno konvekcijским transportom odnosno posljedica je inercijalnih sila koje su razvijene u glavnom vrtlogu. Ovo je na slici 5.20 d) jasno izraženo kako plavo područje u centru glavnog vrtloga. Za razliku od prethodnog slučaja (slijed slika 5.16 a)-b)-c)), u ovom je primjeru uočljiva razlika među rješenjima dobivenih na mrežama različite gustoće (slijed slika: 5.20 a)-b)-c)). Zbog visoke vrijednosti Reynoldsovog broja, omjer između konvekcijskog i difuzijskog transporta brzine znatno je veći pa time i pogreška lažne difuzije postaje izraženija. Ova pogreška opada s povećanjem gustoće mreže (kao što je pokazano u primjerima 5.1 i 5.2). Sa slike 5.20 je vidljivo da za vrijednost Reynoldsovog broja  $Re = 5000$ , upotreba EDS sheme diferencije i odabranih mreža ne osigurava mrežno neovisno rješenje problema.

Tako sa stajališta numeričkog pristupa, rješavanje ovog problema na mrežama M1, M2 i M3, zbog mrežne ovisnosti rješenja, zapravo predstavlja rješavanje tri međusobno različita problema. To se odražava i u povijesti konvergencije rješenja, kako je prikazano na slikama 5.21 i 5.22.



Slika 5.21 Primjer 5. Konvergencija rješenja prema rezidualima: a) SIMPLE; b) FLOP



Slika 5.22 Primjer 5. Konvergencija rješenja prema vlastitoj srednjoj relativnoj razlici brzine i srednjoj relativnoj razlici brzine: a) SIMPLE; b) FLOP

Prethodna su dva primjera pokazala (slike 5.12 a) i 5.13 a), te slike 5.17 a) i 5.18 a)) da je brzina konvergencije SIMPLE algoritma pri rješavanju određenog problema na mrežama koje se po gustoći diskretizacije mogu smjestiti u područje mreže

neovisnosti, obrnuto proporcionalna broju konačnih volumena. Ovaj primjer pokazuje da je brzina konvergencije SIMPLE algoritma ovisna i o razlučivosti korištene mreže što se u okviru razlika u rješenjima koje nastaju zbog mrežne ovisnosti u ovom primjeru, odražava neznatnom promjenom faktora razmjernosti. (U ovom je primjeru omjer broja iteracija na apscisi jednak onom iz prethodnih, a krivulje reziduala količine gibanja  $r_u$  i  $r_v$  sa slike 5.21 a) i vlastite srednje relativne razlike brzine  $r_{\Delta v rel}$  sa slike 5.22 a) se ne poklapaju).

Za postizanje rješenja na razini računalne točnosti SIMPLE algoritam zahtijeva približno 3200 iteracija na mreži M1, 11900 iteracija na mreži M2 te 47000 iteracija na mreži M3, dok novi algoritam zahtijeva 19 iteracija na mreži M1, 18 iteracija na mreži M2, te 20 iteracija na mreži M3. Iz navedenog se može i za ovaj primjer zaključiti da usvajanje spomenutog kriterija završetka proračuna ( $r_{\Delta v rel} < 10^{-4}$ ) stavlja SIMPLE algoritam u povoljniji položaj. Povijest konvergencije rješenja prikazana srednjom relativnom razlikom brzine za SIMPLE algoritam (Slika 5.22 a)) pokazuje logaritamski karakter te veliku razliku između broja iteracija potrebnih za zadovoljavanje kriterija  $r_{\Delta v rel} < 10^{-4}$  i broja iteracija potrebnih za postizanja rješenja na razini računalne točnosti. Kod FLOP algoritma (Slika 5.22 b)), slučaj je upravo obrnut. Glavnina iteracija je utrošena do zadovoljavanja kriterija, nakon čega je za poboljšavanje rješenja do razine računalne točnosti potrebno još svega nekoliko dodatnih iteracija.

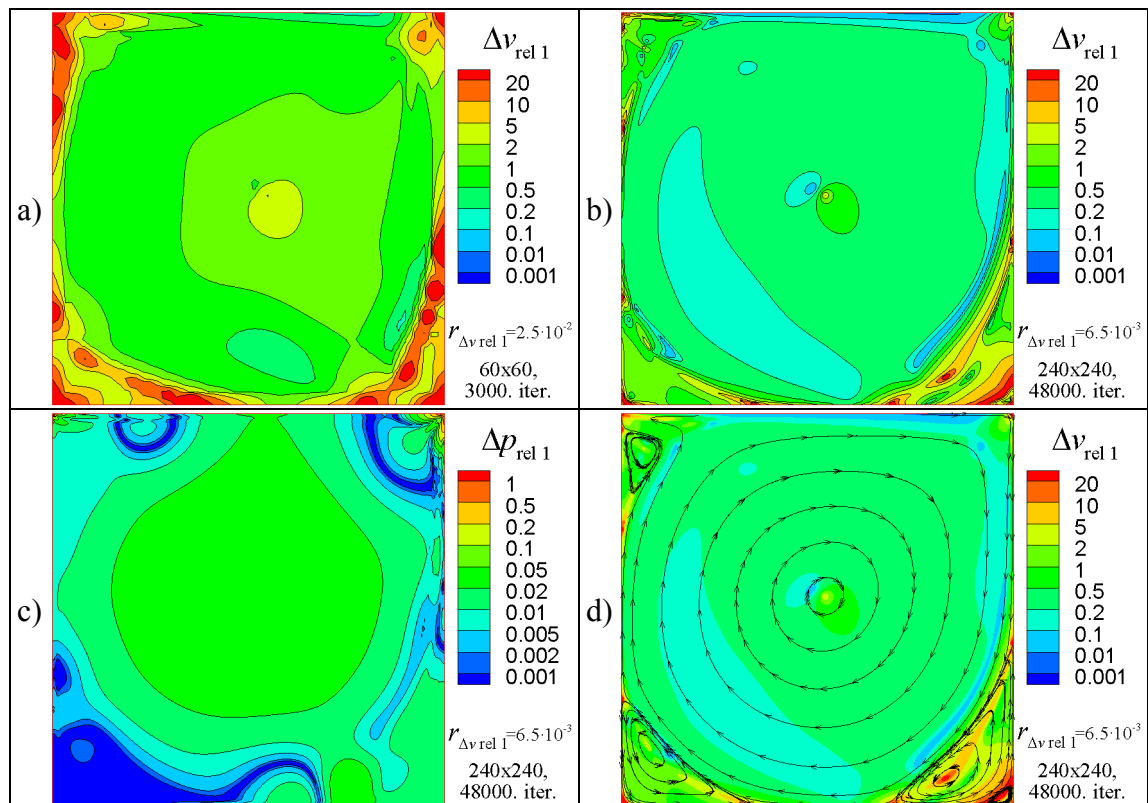
U slučaju FLOP algoritma, u svim se dosadašnjim primjerima pokazalo da brzina konvergencije ne ovisi o broju konačnih volumena, dok ovaj primjer pokazuje ovisnost brzine konvergencije o razlučivosti mreže. Sam oblik te ovisnosti teško je utvrditi zbog velike brzine konvergencije algoritma u ovom primjeru. Uz sam izgled krivulja vlastite srednje relativne razlike brzine na slici 5.22 b), ovo je dodatno naglašeno i kružićima u okolišu kriterija završetka proračuna:  $r_{\Delta v rel} < 10^{-4}$ .

Točnijim očitavanjem vlastite srednje relativne razlike brzine u slučaju SIMPLE algoritma (Slika 5.22 a)) i u skladu sa donesenim kriterijem završetka proračuna, zaključuje se da SIMPLE algoritam rješava ovaj problem u 836. iteraciji na mreži M1, 3601. iteraciji na mreži M2 i 12471. iteraciji na mreži M3. Novi algoritam FLOP

problem rješava u 14. iteraciji na mrežama M1 i M2, te 17. iteraciji na mreži M3. Tablica 5.5 prikazuje utrošeno računalno vrijeme za dva algoritma u ovome primjeru, te se uz osvrt na rezultate iz prethodnih primjera, dane tablicama 5.3 i 5.4 zaključuje o superiornosti novog algoritma.

Tablica 5.5 Primjer 5. Utrošak računalnog vremena  $t_{rac}$  [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v_{rel}} < 10^{-4}$ )

Mreža	Algoritam	
	SIMPLE	FLOP
M1 (60x60)	57.85	1.092
M2 (120x120)	497.05	7.868
M3 (240x240)	6084.98	73.304



Slika 5.23 Primjer 5. Relativne razlike za SIMPLE algoritam, u postotcima: a) polja brzine na mreži M1; b), d) polja brzine na mreži M3; c) polja tlaka na mreži M3.

U svim primjerima oba algoritma koriste istu (EDS) shemu diferencije i iste mreže. Time je i mrežna ovisnost konačnog rješenju u oba algoritma izražena na isti način. Razlike u rješenjima prikazane su na slici 5.23 kroz polja relativnih razlika brzina i tlaka. Njihovo ponašanje u ovom primjeru slijedi obrazac iz primjera pokazanih u prethodnim poglavljima (poglavlja 5.3 i 5.2). Razlika obzirom na prethodni primjer sastoji se u tome da je u ovom primjeru rješenje kompleksnije jer sadrži veći broj vrtloga i zaustavnih točaka pa samim time i veći broj mjesta na kojima pogreška uzrokovana Rhie-Chow interpolacijom iz SIMPLE algoritma dolazi do izražaja. Slijed slika 5.23 a)-b) pokazuje smanjivanje ove pogreške sa povećanjem gustoće mreže, dok slika 5.23 d) iznova pokazuje njenu veću izraženost na mjestima s naglom promjenom smjera strujanja: područja najvećih zakrivljenosti strujnica u vrtlozima i područja zaustavnih točaka.

Dosadašnji su primjeri poslužili prvenstveno u svrhu opisa svojstava novog algoritma i njegove usporedbe sa SIMPLE algoritmom u pogledu brzine konvergencije. Stoga se u primjerima 5.3 do 5.5 nije ponovo razmatrao utjecaj algoritama na točnost rješenja. Također, razmatranje algoritama u kontekstu točnosti nije uobičajeno, jer se očekuje da ona ovisi prvenstveno o primijenjenoj shemi diferencije i gustoći mreže. Ipak kroz sve je primjere prikazom razlika u konačnom rješenju pokazano u kojoj mjeri ostali elementi numeričke procedure algoritama mogu utjecati na konačno rješenje. Već je pokazano, da je jedan uzrok razlike pogreška u SIMPLE algoritmu uzrokovana upotrebom Rhie-Chow interpolacije i upotrebom nefizikalnih rubnih uvjeta za tlak. Doprinos ova dva uzroka u smislu njihovog utjecaja na konačno rješenje već je opisan u primjerima potencijalnog strujanja 5.1 i 5.2, a izostala je rasprava o tome koji način upotrebe polja tlaka u ova dva algoritma donosi manju pogrešku u konačnom rješenju. Bez obzira na izraženo lokalno ispoljavanje pojedinih uzroka, i kakav god bio parcijalni doprinos pojedinog uzroka te bez obzira na njihova međusobni utjecaj, konačno rješenje sadrži ukupni učinak svih aspekata algoritma. Ono će u nastavku ovog posljednjeg poglavlja o laminarnom strujanju u pravokutnoj šupljini biti uspoređeno sa rješenjem iz nezavisnog izvora i rješenjem dobivenim uz pomoć novog algoritma FLOP uz primjenu EDSI sheme diferencije, kao sheme višeg reda točnosti.

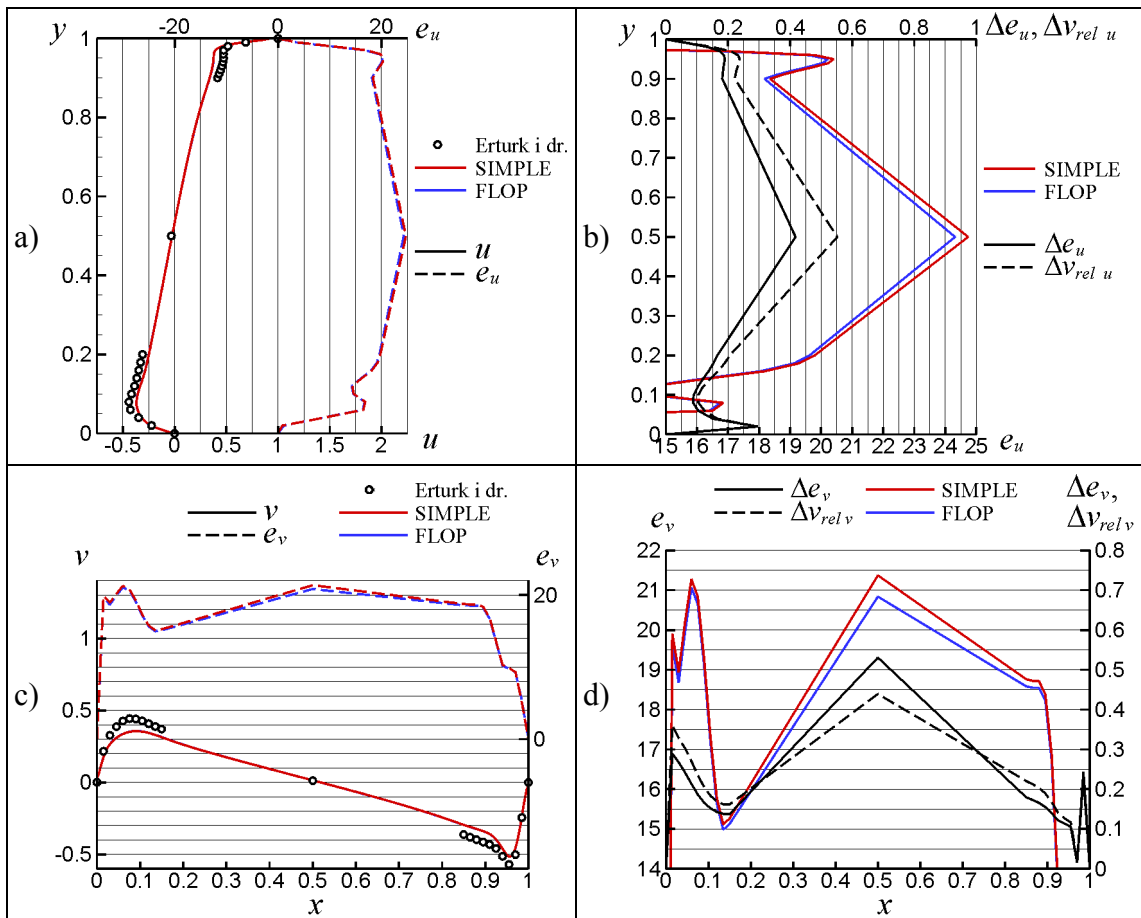
Problem dvodimenzijskog laminarnog strujanja u pravokutnoj šupljini s pomičnim rubom je zbog jednostavne geometrije područja proračuna podesean za primjenu složenijih i točnijih shema diferencije koje su često teže primjenjive na složenim geometrijama. Tako je taj problem postao jednim od osnovnih test-slučajeva za usporedbu numeričkih metoda i njihovih elemenata i široko je zastupljen u literaturi. U širokom rasponu znanstvenih članaka, odabran je rad [17]. Ovaj se rad prema rezultatima u stacionarnom području strujanja dobro slaže sa ostalim radovima [23] i [60], a donosi pregledan i bogat tablični prikaz profila brzine za različite slučajeve, pa tako i za slučaj  $Re = 5000$ . Proračun primjera za kojeg se ovdje iznose rezultati, proveden je algoritmom koji se temelji na varijablama strujne funkcije i vrtložnosti putem metode konačnih diferencija na mreži  $601 \times 601$  točaka uz primjenu sheme diferencije drugog reda točnosti. Dakle riječ je o rješenju dobivenom uz pomoć drugog algoritma, na gušćoj mreži i uz pomoć sheme veće razlučivosti. Osim samih profila  $u$  komponente brzine duž linije  $x = 0.5$  i profila  $v$  komponente duž linije  $y = 0.5$  ovdje su prikazana i relativna odstupanja komponenti brzine  $e_u$  i  $e_v$  proizašlih iz SIMPLE i novog algoritma spram rezultata iz ovog izvora [17], te razlika relativnih odstupanja  $\Delta e_u$  i  $\Delta e_v$  između FLOP i SIMPLE algoritma. Radi ilustracije, ovdje su preneseni i profili relativne razlike pojedinih komponenti brzina  $\Delta v_{rel\ u}$  i  $\Delta v_{rel\ v}$ . Sve ove veličine prikazane su na slici 5.24, a definirane su u skladu sa sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 e_u &= \left. \frac{|u - u_{ref}|}{|u_{ref}|} \right|_{x=0.5} ; & e_v &= \left. \frac{|v - v_{ref}|}{|v_{ref}|} \right|_{y=0.5} ; \\
 \Delta e_u &= e_{u\ SIMPLE} - e_{u\ FLOP} ; & \Delta e_v &= e_{v\ SIMPLE} - e_{v\ FLOP} ; \\
 \Delta v_{rel\ u} &= \left. \frac{|u_{SIMPLE} - u_{FLOP}|}{|u_{FLOP}|} \right|_{x=0.5} ; & \Delta v_{rel\ v} &= \left. \frac{|v_{SIMPLE} - v_{FLOP}|}{|v_{FLOP}|} \right|_{y=0.5}
 \end{aligned} \quad (5.12)$$

U gornjim izrazima  $u$  i  $v$  su komponente brzine iz rješenja dobivenog od strane pripadajućeg algoritma, a oznaka *ref* označuje referentne profile brzine, prema izvoru [17].

Na prikazu profila brzine, na slikama 5.24 a) i c) uočljivo je preklapanje rješenja dobivenih SIMPLE i FLOP algoritmima, a oba podosta odstupaju od rješenja iz izvora

[17]. Ovo je i očekivano zbog velike razlike u razlučivosti između EDS sheme na mreži M3 (SIMPLE i FLOP algoritmi) u odnosu na ukupnu razlučivost postupka primijenjenog u radu [17]. Iz prikaza relativnih odstupanja  $e_u$  i  $e_v$  vidljivo je da ona prelaze 20%, međutim usporedba rezultata dobivenih metodama s tolikom razlikom u točnosti i nije bila cilj, već je cilj usporedba SIMPLE i FLOP algoritma uz pomoć puno točnijeg rješenja.



Slika 5.24 Primjer 5. Usporedbe profila brzine dobivenih FLOP i SIMPLE algoritmima uz primjenu EDS sheme na mreži M3 s rješenjem drugih autora [17] i relativna odstupanja u postotcima:  
 a) u komponenta i njeno odstupanje duž linije  $x=0.5$   
 c) v komponenta i njeno odstupanje duž linije  $y=0.5$ ;  
 b), d) uvećani prikazi odstupanja i razlike odstupanja

Unatoč velikim odstupanjima dobivenih rješenja, uočljivo je manje odstupanje  $e_u$  i  $e_v$  u rješenjima dobivenim FLOP algoritmom (iako je mreža i shema diferencije ista). Radi bolje argumentacije, na slikama 5.24 b) i d) su unesene i razlike između odstupanja SIMPLE i FLOP algoritma po komponentama:  $\Delta e_u$  i  $\Delta e_v$ . Kako se može vidjeti, ove su razlike za slučaj oba profila pozitivne i to u cijelom području, što prema njihovoj definiciji (5.12), znači veće odstupanje rješenja iz SIMPLE algoritma, odnosno veću točnost FLOP algoritma. Nadalje, u prikaz su uneseni i profili srednje relativne razlike pojedinih komponenti brzina  $\Delta v_{rel u}$  i  $\Delta v_{rel v}$ . Profil za  $u$  komponentu brzine izvučen je sa linije  $x = 0.5$ , a profil za  $v$  komponentu brzine sa linije  $y = 0.5$ , a osvrtno na sliku 5.23 d) uočljivo je da su na mjestu prolaska pojedine linije, strujnice okomite na istu. Tako se za slučaj ovih profila može smatrati da veličine  $\Delta v_{rel u}$  i  $\Delta v_{rel v}$  zapravo predstavljaju relativnu razliku polja brzine  $\Delta v_{rel}$  SIMPLE algoritma kojima je opisana razlika u odnosu na rješenje dobiveno FLOP algoritmom. Iz prikaza profila veličina  $\Delta e_u$  i  $\Delta v_{rel u}$  sa slike 5.24 b) i veličina  $\Delta e_v$  i  $\Delta v_{rel v}$  sa slike 5.24 d) vidljivo je poklapanje u trendu između relativnih odstupanja  $e$  i relativnih razlika  $\Delta v_{rel}$  za pojedinu komponentu brzine, dok se one same razlikuju približno 20-25 %, što je usporedivo s iznosom glavnog odstupanja rješenja  $e$  SIMPLE i FLOP algoritma od rješenja iz [17].

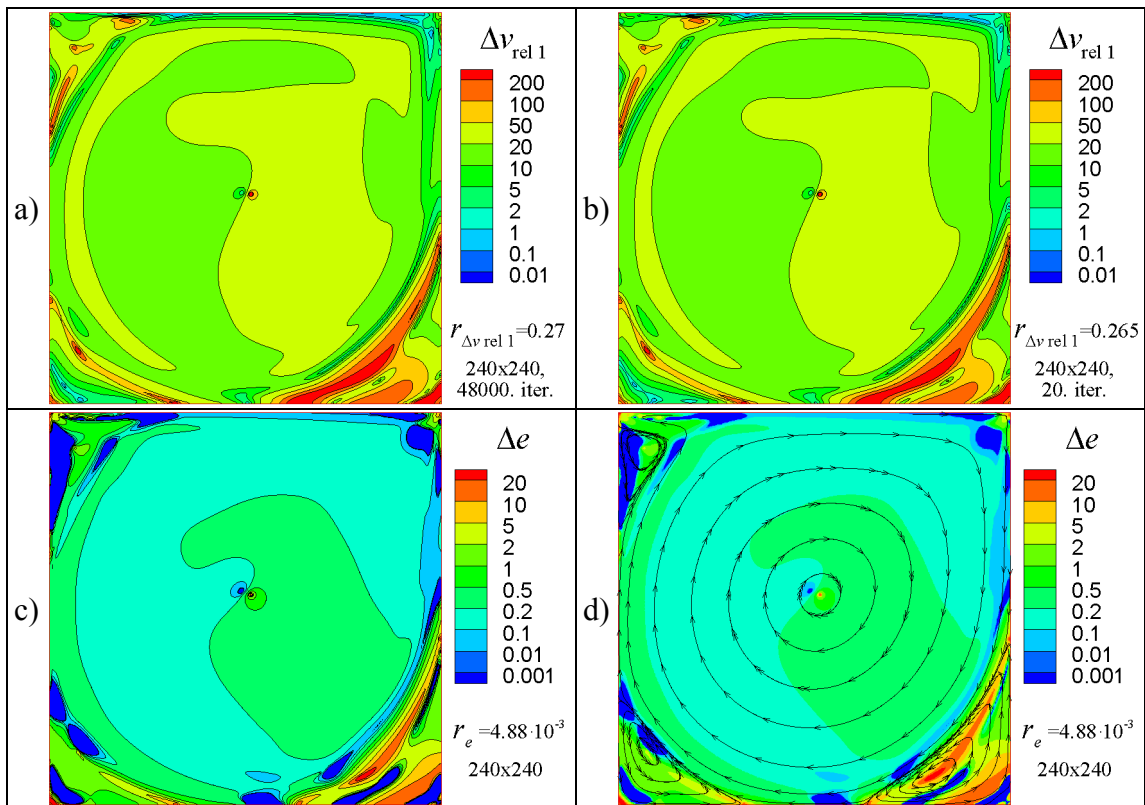
Glavnina pogreške u rješenju, kod primjene oba algoritma, je uzrokovana pojavom lažne difuzije i približno je ista zbog primjene iste - EDS sheme diferencije. Ostatak pogreške predstavlja manji dio, i može se pripisati ostalim dijelovima algoritama (numeričke procedure). Ova posljednja usporedba sa znatno točnijim rješenjem, pokazuje da je kumulativni doprinos ostatka numeričke procedure u konačnoj pogrešci kod novog FLOP algoritma manji nego što je to kod SIMPLE algoritma. Prema tome, prilikom upotrebe EDS sheme diferencije, može se očekivati da će FLOP algoritam dati točnije rješenje od SIMPLE algoritma. U prisustvu rezultata iz nezavisnog izvora, ovaj se zaključak dodatno može potkrijepiti usporedbom polja relativnih razlika polja brzine spram polja brzine dobivenog uz pomoć sheme diferencije višeg reda točnosti, prema slici 5.25.

Proračun ovog slučaja, dodatno je proveden i pomoću novog FLOP algoritma uz primjenu EDSI sheme diferencije (opisane u poglavlju 3.2), a usporedba rezultata ovog



proračuna s rezultatima iz izvora [17] dana je na slici 5.27, gdje je uočljivo njihovo vrlo dobro poklapanje, posebno za slučaj mreže M3. Slika 5.25 prikazuje polja relativne razlike polja brzine  $\Delta v_{rel 1}$  za oba algoritma uz primjenu EDS sheme diferencije i njihovu međusobnu razliku  $\Delta e$ . Prilikom formiranja ovih polja (pomoću izraza (5.10)), kod oba je algoritma referentno polje - polje brzine prema rješenju dobivenom FLOP algoritmom uz primjenu EDSI sheme diferencije, dok su ostale veličine koje se pojavljuju na slici određene načinom:

$$\begin{aligned} \Delta e &= (\Delta v_{rel 1})_{SIMPLE} - (\Delta v_{rel 1})_{FLOP}; \\ r_e &= (r_{\Delta v_{rel 1}})_{SIMPLE} - (r_{\Delta v_{rel 1}})_{FLOP}. \end{aligned} \quad (5.13)$$



Slika 5.25 Primjer 5. Prikaz relativne razlike polja brzine za slučaj odabira referentnog polja proizašlog primjenom FLOP algoritma i EDSI sheme diferencije:  
 a) Relativna razlika polja brzine za SIMPLE (EDS);  
 b) Relativna razlika polja brzine za FLOP (EDS);  
 c), d) Prikazi razlike  $\Delta e$ .

Prikazi relativne razlike polja brzine, slika 5.25 a) za SIMPLE i slika 5.25 b) za FLOP algoritam, spram rješenja dobivenog FLOP algoritmom uz primjenu EDSI sheme diferencije, u velikom dijelu pokazuju razliku od približno 20%, koja je usporediva s onom koja se pokazala prilikom usporedbe sa rezultatima iz izvora [17] (prikazanom veličinama  $e_u$  i  $e_v$ , na slici 5.24.). Prikaz relativnih razlika polja brzine, slike 5.25 a) i b), otkriva da se na dijelovima područja, u blizini dodira glavnog vrtloga s manjim vrtlozima, relativna razlika penje i do iznosa 200 %. Na ovim mjestima dolazi do velike promjene u polju brzine (uočljivo, na slikama 5.20 c) i 5.26 c)) čime se na tim mjestima i razlika u razlučivosti između EDS i točnije, EDSI sheme (odnosno pogreška lažne difuzije na strani EDS sheme) i najviše ističe.

Razlike relativnih odstupanja  $\Delta e_u$  i  $\Delta e_v$  između FLOP i SIMPLE algoritma (definirane u izrazima (5.12)), prikazane na slici 5.24 pokazuju da je, lokalno, na mjestima uzorkovanja prikazanih profila brzine, rješenje dobiveno FLOP algoritmom točnije, dok prikazi na slikama 5.25 c) i d) pokazuju da se jednako može zaključiti i za gotovo cijelo područje proračuna. Veličina  $\Delta e$  definirana u izrazima (5.13) je u najvećem dijelu područja proračuna pozitivna, što je jasno iskazano i veličinom  $r_e$ . Također, usporedbom prikaza veličine  $\Delta e$  na dijelovima c) i d) slike 5.25 sa veličinom  $\Delta v_{rel 1}$  prikazanom za SIMPLE algoritam na slikama 5.23 b) i d), zamjećuje se sličnost u njihovoj raspodjeli, dok je prema rasponu prikaza vrijednosti (koji je na obje slike isti) vidljivo da je veličina  $\Delta e$  približno 20 % manja od veličine  $\Delta v_{rel 1}$ . Ovaj se trend potvrđuje i usporedbom vrijednosti veličina  $r_{\Delta v_{rel 1}}$  i  $r_e$  sa tih slika (5.23 i 5.25). Ova analiza dodatno potkrjepljuje ranije izneseni zaključak da se dosada prikazane relativne razlike polja brzine  $\Delta v_{rel 1}$  mogu smatrati većim pogreškama SIMPLE algoritma i to približno u prikazanom iznosu (umanjenom za 20-30 %).

Na kraju ovog dijela poglavlja zaključuje se da i u uvjetima većeg udjela konvekcijskog transporta količine gibanja, u područjima gdje je strujanje više ustaljeno novi algoritam i SIMPLE algoritam imaju bliske rezultate s malom razlikom koja je jednakog značaja kao i u slučajevima većeg udjela difuzijskog transporta. Nedostatak razlučivosti mreže i sheme diferencije kod novog se algoritma jednako odražava na rješenje kao kod SIMPLE algoritma. Pojava razlika u konačnim rješenjima između SIMPLE i novog

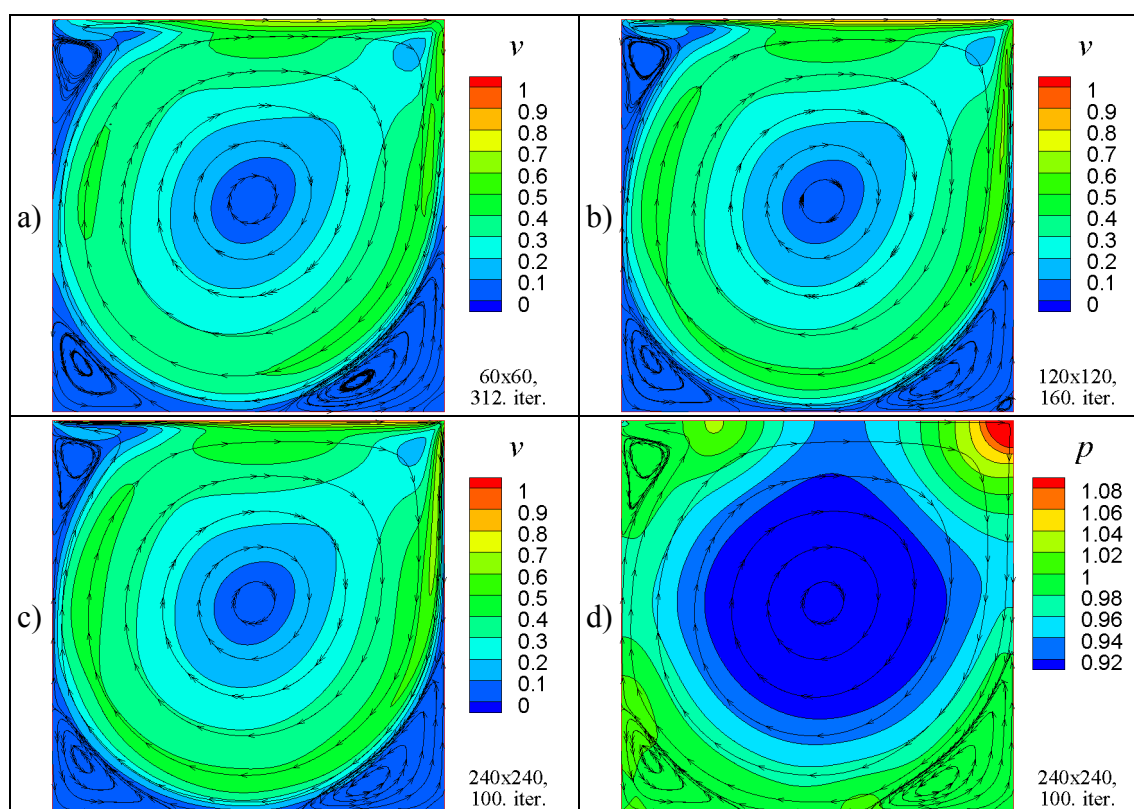
algoritma slijedi obrazac iz prethodnih primjera gdje se najveće razlike iskazuju u područjima nagle promjene komponenti brzina što se pripisuje pogrešci uzrokovanoj Rhie-Chow interpolacijom u SIMPLE algoritmu.

Usporedba s točnijim rezultatima iz nezavisnog izvora i rezultatima proračuna uz primjenu točnije sheme diferencije pokazala je da je pogreška u rezultatima dobivenih dvama algoritmima u velikom dijelu slična, kako je bilo i očekivano jer oba algoritma koriste istu shemu diferencije. Razlika među pogreškama na strani SIMPLE i FLOP algoritma pokazala je da kod SIMPLE algoritma ostatak numeričkog postupka uzrokuje veću pogrešku nego u slučaju FLOP algoritma. Tako se utvrđuje da su rezultati koji proizlaze iz FLOP algoritma točniji. Između profila razlike u odstupanjima pojedinog algoritama od točnijih rezultata i profila relativne razlike brzine  $\Delta v_{rel 1}$  utvrđen je isti trend dok razlika između ove dvije veličine odgovara glavnom odstupanju. Time je zaključeno da relativna razlika polja brzine  $\Delta v_{rel 1}$  koja je korištena u svrhu međusobne usporedbe rezultata SIMPLE i FLOP algoritma dobro opisuje veću relativnu pogrešku polja brzine na strani SIMPLE algoritma.

I u ovom se primjeru pokazuje prevladavajuća ovisnost brzine konvergencije SIMPLE algoritma o broju konačnih volumena gdje kao i u prethodnim slučajevima broj iteracija raste proporcionalno broju volumena, dok je za FLOP algoritam razlika u broju iteracija na pojedinim mrežama mala. U relativnoj usporedbi spram ukupnog broja iteracija pojedinog algoritma, čini se da brzina konvergencije na strani FLOP algoritma zadržava neovisnost o broju konačnih volumena a više ovisi o složenosti rješenja. Kod SIMPLE algoritma broj iteracija potrebnih za postizanje rješenja na razini računalne točnosti višestruko je veći od broja iteracija potrebnog za zadovoljavanje usvojenog kriterija završetka proračuna ( $r_{\Delta v_{rel 1}} < 10^{-4}$ ), dok je kod FLOP algoritma slučaj obrnut. Time i usvojeni kriterij završetka proračuna stavlja SIMPLE algoritam u povoljniji položaj. Prema tom kriteriju SIMPLE algoritam rješava ovaj problem u 836. iteraciji na mreži M1, 3201. iteraciji na mreži M2 i 12471. iteraciji na mreži M3. Novi algoritam problem rješava u 14. iteraciji na mreži M1, 14. iteraciji na mreži M2, i 17. iteraciji na mreži M3.

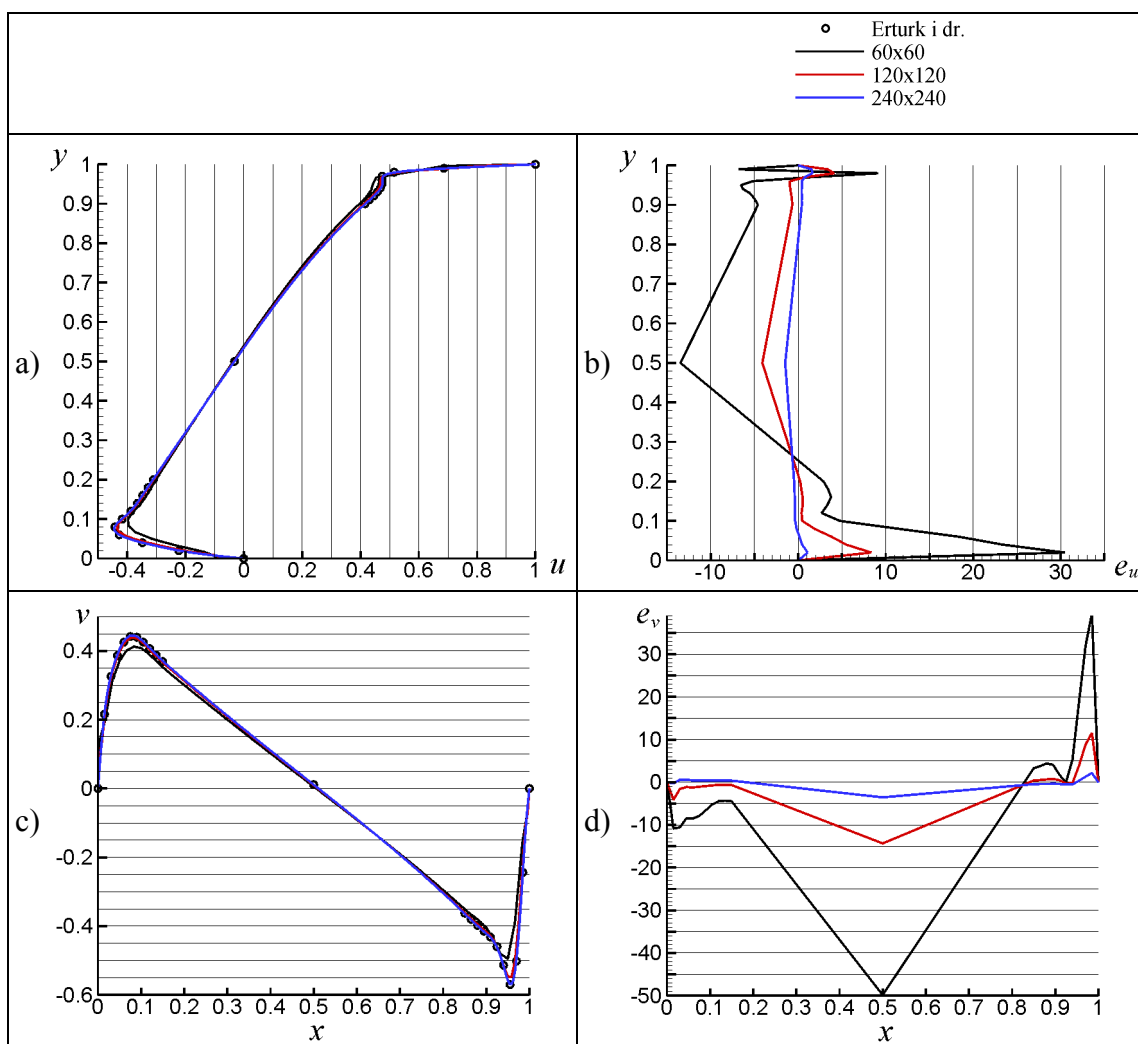
### Primjena EDSI sheme diferencije

U nastavku je prikazano rješenje ovog problema dobiveno FLOP algoritmom uz primjenu EDSI sheme diferencije. U pokušaju rješavanja ovog problema SIMPLE algoritmom (programskim paketom FLUENT) utvrđeno je da se isti ne može riješiti primjenom nijedne od ponuđenih shema diferencije višeg reda točnosti. Pokušano je rješenje odrediti sljedećim shemama: SOU (Second Order Upwind), QUICK i MUSCLE, koristeći pri tome različite kombinacije faktora podrelaksacije  $\alpha_p$  i  $\alpha_{uv}$ , i varirajući početne pretpostavke polja brzine (korišteno je čak i stacionarno rješenje dobiveno primjenom EDS sheme), ali se nije uspjelo postići konvergenciju postupka. Zbog toga, ovdje, rezultati za SIMPLE algoritam nisu prikazani.



Slika 5.26 Primjer 5. Prikaz rješenja za slučaj primjene FLOP algoritma uz primjenu EDSI sheme diferencije: a), b) i c) polje brzine na mrežama M1, M2 i M3; d) polje tlaka na mreži M3

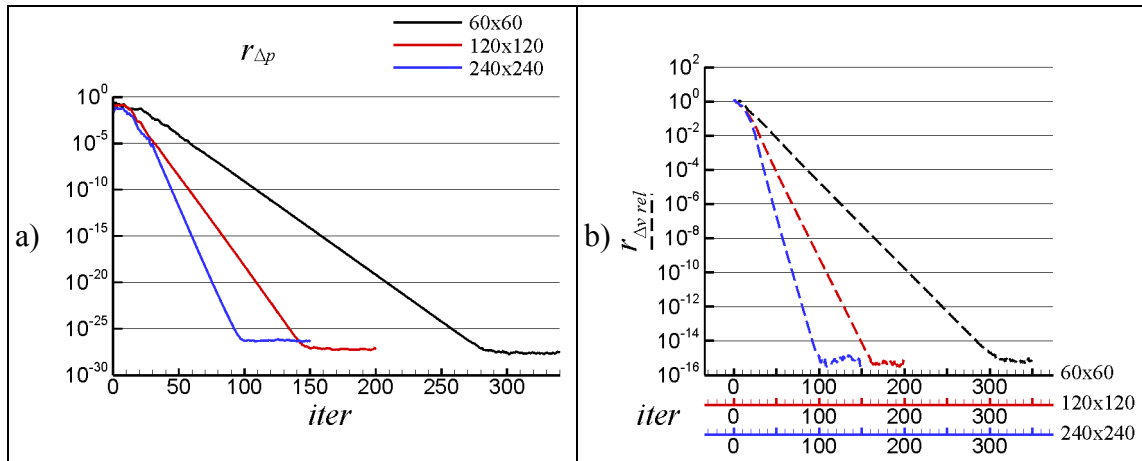
Iz slike 5.26 se vidi da su rješenja prikazana poljima brzine na mrežama M2 i M3 praktično jednaka, što kod primjene EDS sheme (slika 5.20) nije bio slučaj. Slika 5.27 prikazuje usporedbu profila  $u$  i  $v$  komponente brzina s rezultatima iz [17] iz koje se vidi veća točnost ovih rezultata, u usporedbi s rezultatima EDS sheme (slika 5.24), što se i očekivalo. Rješenja dobivena na mreži 240x240 se praktično poklapaju s rješenjima iz [17] dobivenim na mreži 601x601.



Slika 5.27 Primjer 5. Usporedbe profila brzine dobivenih FLOP algoritmom uz primjenu EDSI sheme diferencije s rješenjem drugih autora [17] i relativna odstupanja u postotcima:  
 a), b)  $u$  komponenta i odstupanje  $e_u$  duž linije  $x=0.5$   
 c), d)  $v$  komponenta i odstupanje  $e_v$  duž linije  $y=0.5$ .

Na gornjoj slici značenje relativnih pogrešaka je sljedeće:

$$e_u = \frac{u - u_{ref}}{|u_{ref}|} \Big|_{x=0.5} ; e_v = \frac{v - v_{ref}}{|v_{ref}|} \Big|_{y=0.5}$$



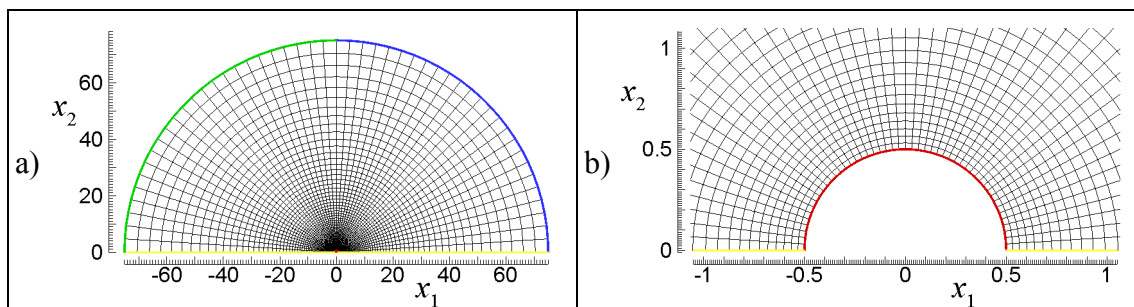
Slika 5.28 Primjer 5. Konvergencija rješenja FLOP algoritma uz EDSI shemu diferencije prema rezidualima i vlastitoj srednjoj relativnoj razlici brzine

Slika 5.28 prikazuje konvergenciju FLOP algoritma na tri korištene mreže. Zanimljivo je primijetiti da FLOP algoritam za slučaj primjene točnije sheme diferencije konvergira do zadane točnosti u manje iteracija na finijoj mreži, što je poželjno svojstvo. Ovo se može obrazložiti činjenicom da je na finijoj mreži lokalni Pecletov broj manji i relativni utjecaj eksplicitnog obračunavanja dijela članova koji proizlaze iz EDSI sheme diferencije (eng - „deferred correction“) manji.

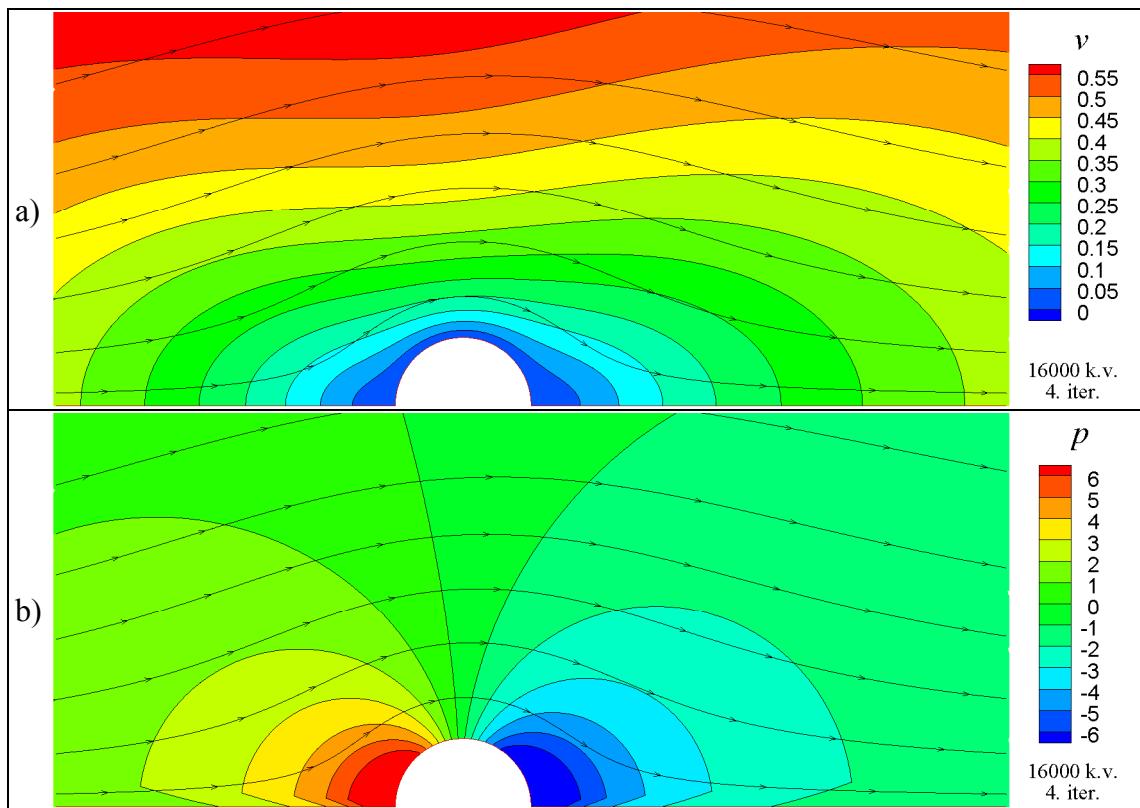
U skladu s usvojenim kriterijem završetka proračuna, FLOP algoritam rješava ovaj problem u 86. iteraciji na mreži 60x60 k.v., u 49. iteraciji na mreži 120x120 k.v. i u 36. iteraciji na mreži 240x240 k.v. Kod SIMPLE algoritma se uz primjenu bilo koje od ponuđenih shema diferencije višeg reda točnosti, nije uspjelo dobiti konvergentan postupak.

## 5.6 Laminarno strujanje oko cilindra pri iznosu Reynoldsova broja $Re=0.1$

U ovom se primjeru uspoređuju dva algoritma u primjeni na vanjsku zadaću, a izabrana je niska vrijednost Reynoldsova broja za koju se inercijske sile mogu zanemariti, pa se zato očekuje sporija konvergencija algoritma SIMPLE. Problem je rješavan u dvije varijante diskretizacije: na mreži M1 (4000 k.v.) i M2 (16000 k.v.) Slika 5.29 prikazuje područje proračuna i mrežu M1. Na lijevoj strani vanjskog ruba (dio vanjskog polucilindra, na slici 5.29 označenog zelenom bojom) propisana je ulazna brzina, dok desna (plava) strana označuje izlaznu granicu. Poznato je da se kod ovih problema utjecaj cilindra osjeća na velikoj udaljenosti [44], a ovdje se ne ulazi u razmatranje dovoljne udaljenosti vanjske granice, već je cilj usporediti brzine konvergencije dvaju algoritama. Slike 5.30 i 5.31 prikazuju detalje rješenja dobivenih algoritmima FLOP i SIMPLE, a slika 5.32 konvergenciju dvaju postupaka.

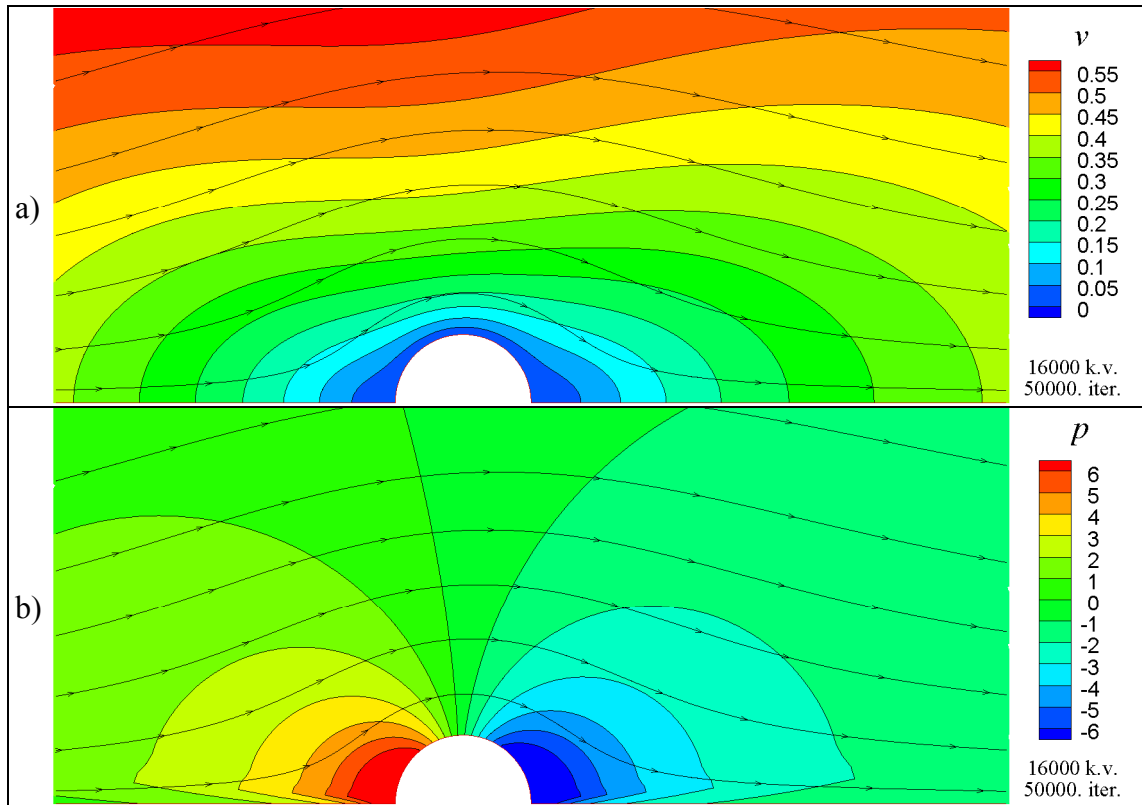


Slika 5.29 Primjer 6 Područje proračuna i diskretizacija mrežom M1(4000 k.v.)

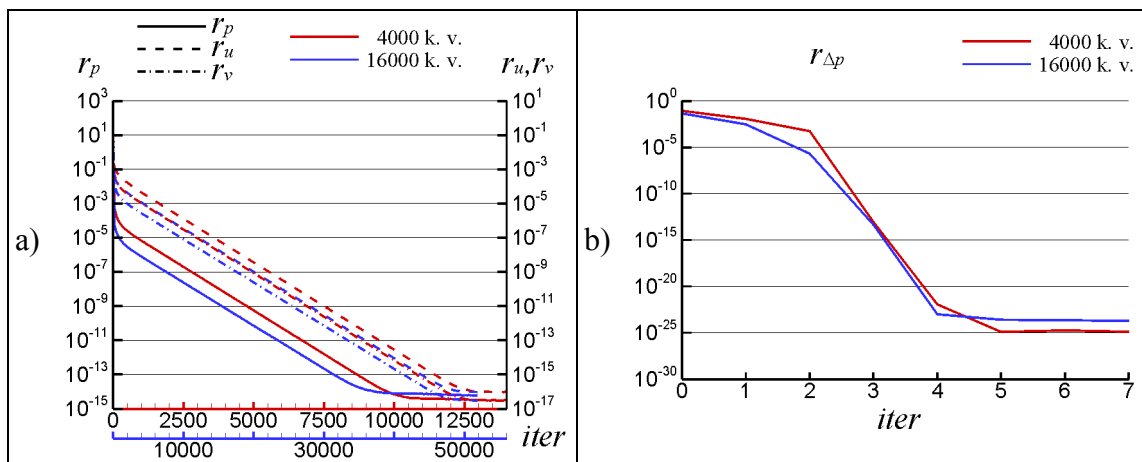


Slika 5.30 Primjer 6 Detalj rješenja dobivenog primjenom FLOP algoritma na mreži M2 (16000 k.v.):  
a) polje brzine; b) polje tlaka

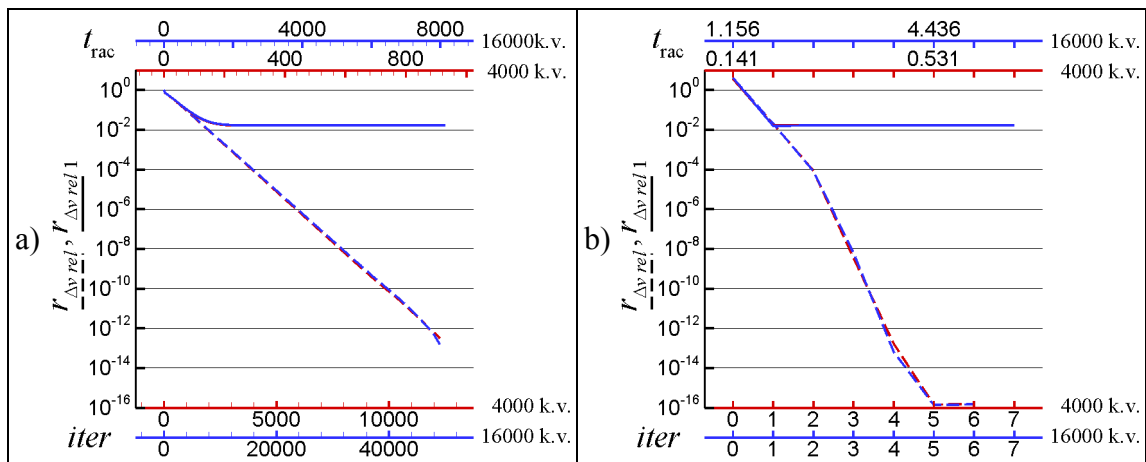




Slika 5.31 Primjer 6 Detalj rješenja dobivenog primjenom SIMPLE algoritma na mreži M2 (16000 k.v.):  
a) polje brzine; b) polje tlaka



Slika 5.32 Primjer 6. Konvergencija rješenja prema rezidualima:  
a) SIMPLE; b) FLOP



Slika 5.33 Primjer 6. Konvergencija rješenja prema  $r_{\Delta v, rel}$  i  $r_{\Delta v, rel, 1}$ :  
a) SIMPLE; b) FLOP

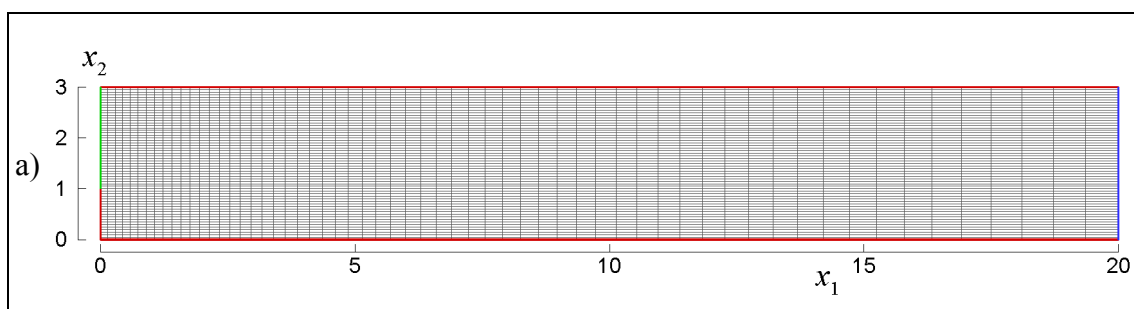
Slika 5.33 prikazuje povijest konvergencije dvaju algoritama u odnosu na prije uspostavljeni kriterij vlastite relativne razlike polja brzine. Prema tom kriteriju, SIMPLE algoritam postiže  $r_{\Delta v, rel} < 10^{-4}$  u 3913. iteraciji na mreži M1 i 15820. iteraciji na mreži M2. Kod SIMPLE algoritma se i u ovome primjeru pokazuje porast broja iteracija približno razmjernom porastu broja konačnih volumena u mreži. Algoritam FLOP isti kriterij zadovoljava u drugoj iteraciji, neovisno o gustoći mreže.

Tablica 5.6 Primjer 6. Utrošak računalnog vremena  $t_{rac}$  [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v, rel} < 10^{-4}$ )

Mreža	Algoritam	
	SIMPLE	FLOP
M1 (4000 k.v.)	291.13	0.297
M2 (16000 k.v.)	2575.18	2.468

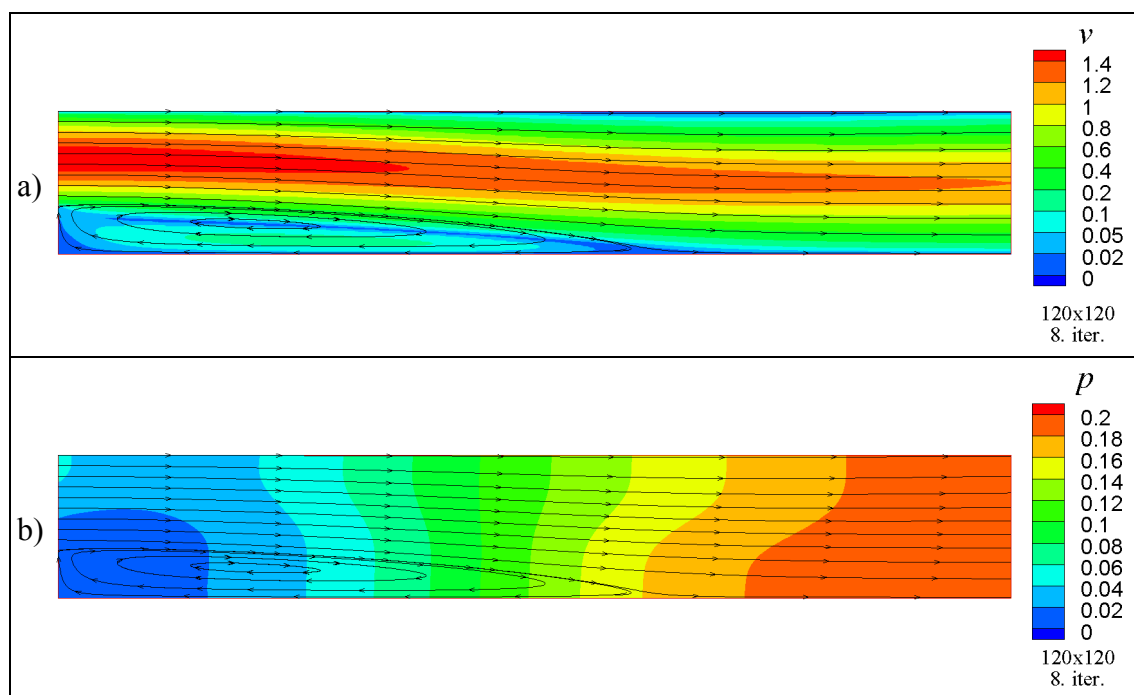
## 5.7 Strujanje u kanalu s naglim proširenjem pri iznosu Reynoldsova broja $Re=229$

Ovo je tipičan test primjer [24] u kojem se pojavljuje odvajanje strujanja. Za razliku od strujanja u šupljini (poglavlje 5.4), ovdje se strujanje fluida odvija u području sa ulaznom i izlaznom granicom. Slika 5.34 prikazuje područje proračuna i mrežu M1 (60x60 k.v.). Dio lijevog ruba područja je zadan kao ulazna a desni rub kao izlazna granica (na slici prikazano zelenom odnosno plavom bojom), dok su svi ostali rubovi zidovi. S obzirom da fizika problema i točnost sheme diferencije nisu primarni, na ulazu je zadan razvijeni parabolični profil brzine, prema analitičkom rješenju za slučaj ravninskog laminarnog strujanja između dvije paralelne ploče. U ovom je primjeru uz mrežu M1, korištena i mreža M2 (120x120 k.v.).



Slika 5.34 Primjer 7. Područje proračuna i geometrijska mreža M1 (60x60 k.v.)

Slika 5.35 prikazuje rješenje za polje brzine i tlaka dobiveno na mreži M2 (120x120 k.v.), dok tablica 5.7 prikazuje usporedbu udaljenosti točke ponovnog nalijeganja strujanja izračunate na dvije mreže primjenom ovih dvaju algoritama.



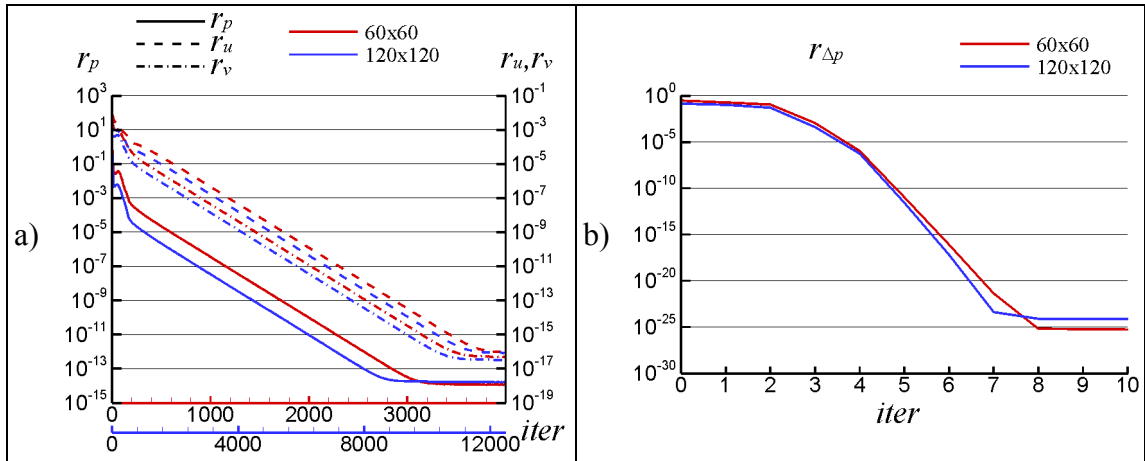
Slika 5.35 Primjer 7. Rješenje dobiveno primjenom FLOP algoritma na mreži M2 ( $120 \times 120$  k.v.):  
a) polje brzine; b) polje tlaka

Gledajući kroz ovaj integralni parametar, očito je da se rješenja dvaju algoritama prilično dobro slažu.

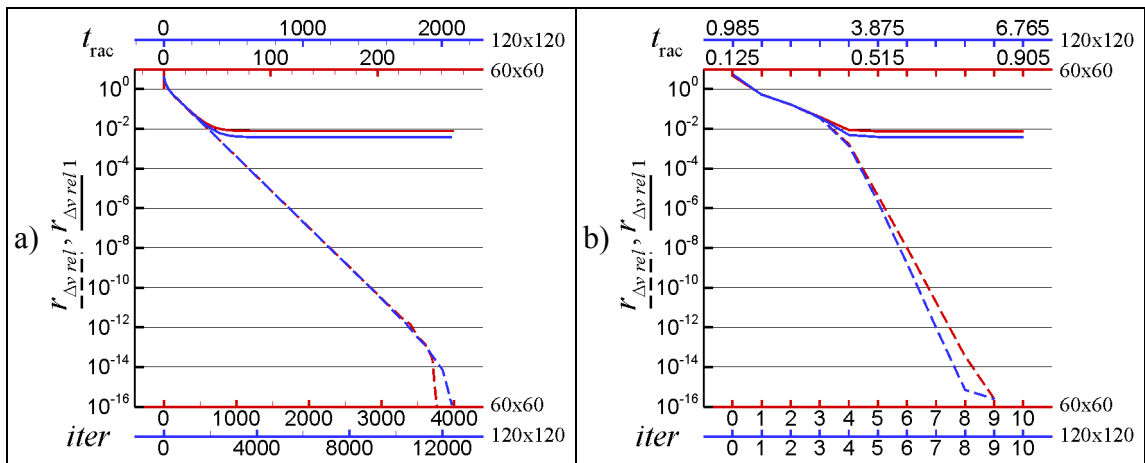
Tablica 5.7 Primjer 7. Usporedba udaljenosti točke nalijeganja strujanja prema rezultatima SIMPLE i FLOP algoritma na mrežama M1 i M2

	$L/h$	
	60x60	120x120
SIMPLE	12.317	12.698
FLOP	12.363	12.712

Slike 5.36 i 5.37 pokazuju promjenu reziduala za dva algoritma u funkciji broja iteracija. Očito je da broj iteracija za postizanje željene točnosti rješenja kod primjene algoritma SIMPLE raste približno proporcionalno s porastom broja konačnih volumena u mreži. U ovom se primjeru zamjećuje tek neznatno smanjenje faktora proporcionalnosti u odnosu na jedinicu.



Slika 5.36 Primjer 7. Konvergencija rješenja prema rezidualima:  
a) SIMPLE; b) FLOP



Slika 5.37 Primjer 7. Konvergencija rješenja prema  $r_{\Delta rel}$  i  $r_{\Delta rel 1}$ :  
a) SIMPLE; b) FLOP

Ovdje se može zamijetiti jednaki obrazac koji se pokazuje i usporedbom brzina konvergencije od nižih ka višim vrijednostima Reynoldsova broja, prema slijedu primjera sa strujanjem u zatvorenom području prikazanih redom u poglavljima 5.3, 5.4 i 5.5. Usporedbom brzina konvergencije u prethodnom primjeru (poglavljje 5.6) sa ovim primjerom, pokazuje se da i u slučaju područja sa ulaznim i izlaznim granicama, brzina konvergencije novog FLOP algoritma ne ovisi o veličini mreže (broju konačnih volumena), već o složenosti strujanja. U ovom primjeru broj iteracija FLOP algoritma

veći je nego u prethodnom jer je slika strujanja složenija, zbog pojave odvajanja strujanja.

Broj iteracija potrebnih za postizanje relativne razlike polja brzine  $r_{\Delta v, rel}$  u iznosu manjem od  $10^{-4}$  pri primjeni algoritma FLOP na obje mreže, M1 i M2, u ovom primjeru iznosi 5. Kod SIMPLE algoritma, ova se vrijednost relativne razlike postiže u 1169. iteraciji na mreži M1 i 3647. iteraciji na mreži M2.

Tablica 5.8 Primjer 7. Utrošak računalnog vremena  $t_{rac}$  [s] do postizanja zadane točnosti rješenja ( $r_{\Delta v, rel} < 10^{-4}$ )

Mreža	Algoritam	
	SIMPLE	FLOP
M1 (60x60)	79.36	0.515
M2 (120x120)	609.63	3.875

## 5.8 Slobodna konvekcija u pravokutnoj šupljini

Sljedeći niz primjera donosi usporedbu svojstava dvaju algoritama u primjeni za rješavanje problema slobodne konvekcije (za rješavanje Boussinesqova modela, prikazanog u poglavlju 2.4). Za razliku od osnovnih jednadžbi nestlačivog strujanja, gdje se temperaturna jednadžba pojavljuje kao pasivna jednadžba, ona je u ovom modelu snažno spregnuta s jednadžbom količine gibanja putem uzgonskih sila (izvorskog člana u jednadžbi količine gibanja). Uzgonske sile su odgovorne za uspostavu i održavanje strujanja, a u ravnoteži su s inercijskim i viskozim silama. Niti u jednom algoritmu prisutnost uzgonskih sila nije u potpunosti implicitno uvažena, jer se u oba algoritma temperaturna jednadžba rješava sekvencijalno, a polje temperature je osnovni uzrok strujanju fluida. Općenito, za algoritme sa segregatnim pristupom, problem slobodne konvekcije je vrlo zahtjevan slučaj, osobito pri visokim vrijednostima Rayleighova broja. U slučaju SIMPLE algoritma član s uzgonskim silama je uvažen potpuno eksplicitno, dok je u slučaju FLOP algoritma on uvažen djelomice implicitno. U FLOP algoritmu se u desnoj strani sustava za izračun korekcija protoka po petljama,

koja se računa prema izrazu (4.35), koriste vrijednosti temperature iz prethodnog iterativnog koraka, dok se pri računanju koeficijenata matrice tog sustava (izraz (4.36)), uzimaju u obzir promjene vrijednosti temperature u volumenima-članovima promatrane petlje, koje će nastati uslijed korekcije protoka iz pripadne petlje (npr. na slici 4.6, promjene temperature u volumenima 1, 2, 3 i 4 (brojevi u kvadratićima), koje nastaju uslijed korekcije protoka po petlji 1). Promjene temperature u volumenima-članovima petlje određuju se izravno iz diskretiziranih temperaturnih jednadžbi za promatrane volumene, pritom zanemarujući promjene protoka kroz stranice koje nisu članice pripadne petlje (na slici 4.6 - preostale, neoznačene stranice volumena 1 do 4). Time se unaprijed uzima u obzir samo dio promjene temperature (prije rješavanja same temperaturne jednadžbe), a bolje sprezanje jednadžbi bi se postiglo obuhvaćanje ukupne promjene (tj. uključivanjem utjecaja korekcija protoka po svim petljama), ali bi to poskupilo računanje koeficijenata. Druga je mogućnost simultano rješavanje jednadžbi za korekciju protoka po petljama i korekcija temperature, ali bi to povećalo matricu sustava.

Uvjeti strujanja pri slobodnoj konvekciji uobičajeno se iskazuju putem bezdimenzijskih značajki: Prandtlova broja -  $Pr$  i Rayleighova broja -  $Ra$ . Oni su u svim primjerima koji slijede određeni kao:

$$Pr = \frac{\mu c}{\lambda}; \quad Ra = \frac{\rho^2 g \beta c H^3 \Delta T}{\lambda \mu}. \quad (5.14)$$

Uz već ranije definirane veličine, u gornjim se izrazima pojavljuju dodatno: gravitacija  $g$ , (u izrazu za specifičnu masenu silu  $f_i = -g\delta_{i2}$ ) i visina  $H$ . Ovi se primjeri također razmatraju u bezdimenzijskom obliku, pri duljinskim dimenzijama područja proračuna prikazanim na slikama 5.1 a) te 5.41 a) i b). Tako su pri formiranju ovih značajki, u svim primjerima odabrane konstantne veličine:

$$\rho = c = H = 1; \quad g = 10; \quad \beta = 10^{-2}.$$

Također, u svim se primjerima primjenjuju jednaki rubni uvjeti. Svi rubovi područja su nepropusni zidovi, pri čemu je na gornjoj i donjoj granici zadan adijabatski rubni uvjet,

a na lijevoj i desnoj granici rubni uvjet konstantne temperature. Pri tome je temperatura lijeve stijenke zadana kao  $T_L = 10$ , a desne  $T_D = 0$ . Razlika ovih dviju temperatura određuje razliku temperature:  $\Delta T = T_L - T_D$ .

Kod svih je primjera vrijednost Prandtlova broja jednaka jedan, te se uz ovako odabrane veličine, vrijednost Rayleighova broja u primjerima mijenjala promjenom vrijednosti umnoška dinamičke viskoznosti i toplinske provodnosti:

$$\mu = \lambda; Pr = 1; Ra = \frac{1}{\lambda\mu}.$$

### Strujanje pri nižim vrijednostima Rayleighova broja

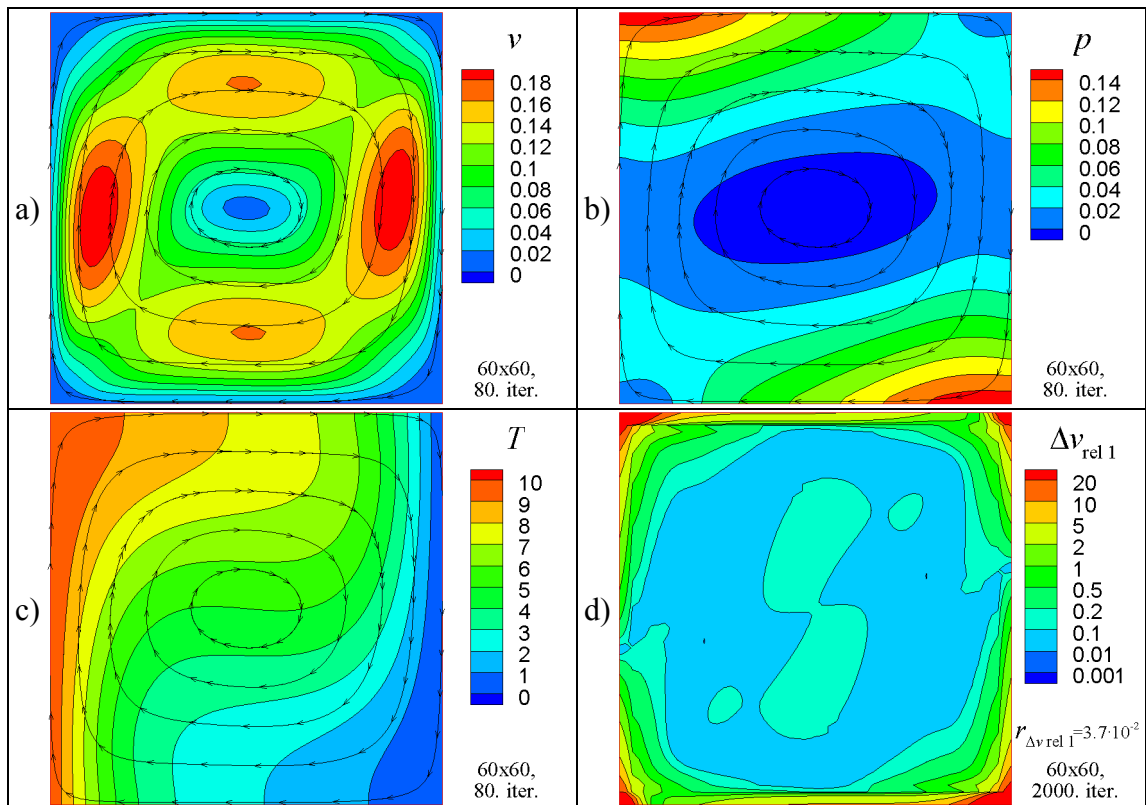
Pri nižim vrijednostima Rayleighova broja, strujanje se održava uglavnom kroz ravnotežu između uzgonskih i viskoznih sila. Kao primjer, ovdje je odabrano strujanje pri vrijednosti Rayleighova broja  $Ra = 10^4$ . Pri ovim vrijednostima značajki Prandtlova i Rayleighova broja, proračunski postupak ne zahtijeva primjenu mreže s mjestimice posebno profinjenom prostornom diskretizacijom. Tako se često proračuni izvode na mrežama s ravnomjernijom prostornom diskretizacijom, kako je to učinjeno i u ovom primjeru, gdje se koristi mreža iz prethodnih primjera, prikazana na slici 5.1 a). Uz ranije odabrane konstantne vrijednosti preostalih veličina, vrijednost Rayleighova broja ostvarena je odabirom vrijednosti viskoznosti i temperaturne provodnosti fluida:  $\mu = \lambda = 10^{-2}$ . Rješenje problema, prikazano je na slici 5.38.

Iz slike je vidljivo da se pri ovim uvjetima slobodne konvekcije, strujanje odvija u graničnim slojevima uz zidove koji su razmjerno većih karakterističnih dimenzija (debljine). Zbog ovakvog je odnosa sila (masenih, viskoznih i inercijskih), svojstvo prigušivanja poremećaja snažno izraženo, pa se u ovom slučaju, svojstva algoritama iskazuju slično kao u prethodnim primjerima strujanja pri nižim vrijednostima Reynoldsova broja. U rješenju ovog primjera (slika 5.38 a)) maksimalna vrijednost brzine nalazi se u graničnom sloju uz lijevi zid, i prema rješenju dobivenom primjenom FLOP algoritma iznosi  $|v|_{\max} = 0.1984$  (odn. 0.1982, prema SIMPLE algoritmu).



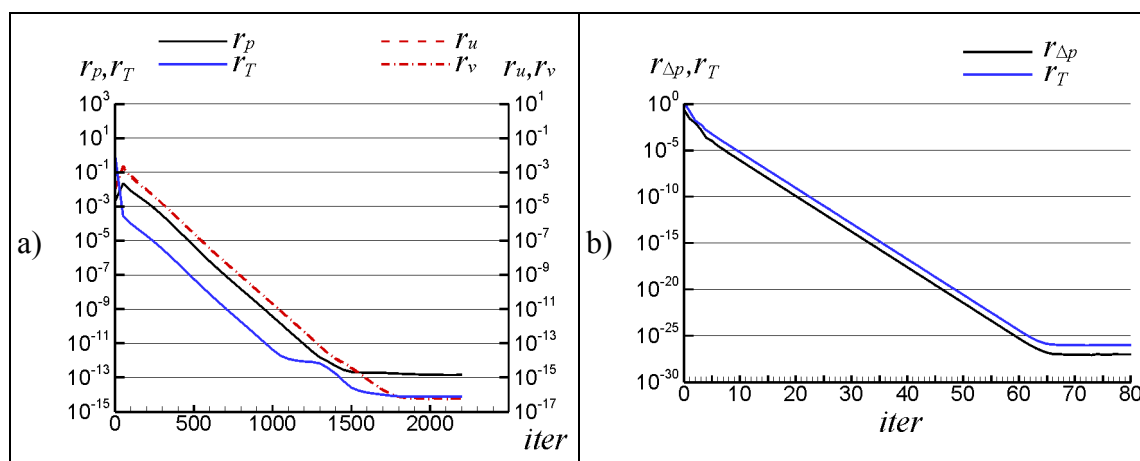
Ukoliko se u skladu s vrijednostima veličina koje se pojavljuju u ovom primjeru formira Reynoldsov broj, on iznosi:

$$Re = \frac{\rho |v|_{\max} H}{\mu} = 19.84.$$



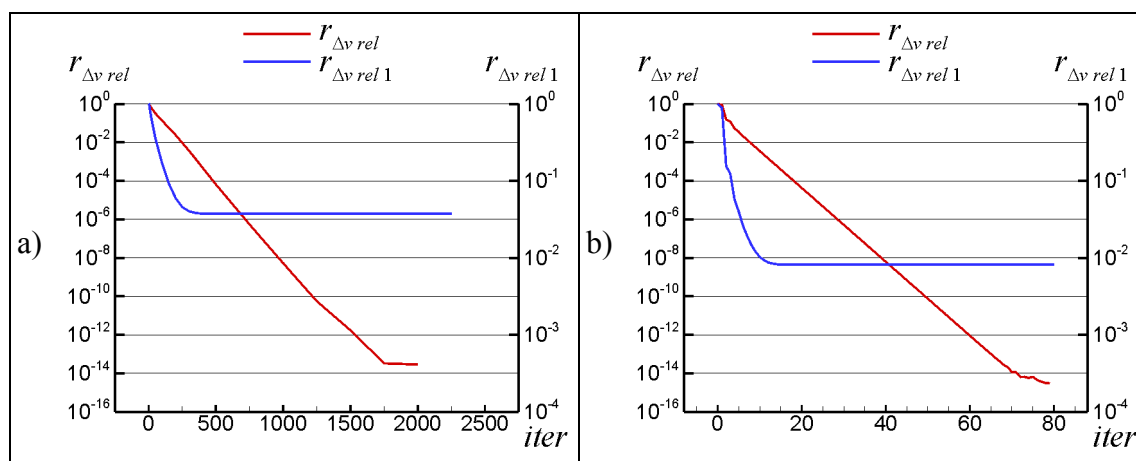
Slika 5.38 Primjer 8. Rješenje prema algoritmu FLOP i prikaz relativne razlike polja brzine u postocima za algoritam SIMPLE: a) polje brzine; b) polje tlaka; c) polje temperature; d) relativna razlika polja brzine za algoritam SIMPLE

U skladu s ovom vrijednosti se, sa stajališta slike strujanja, ovaj problem može smjestiti između primjera, ranije prikazanih u poglavljima 5.3 i 5.4, te iz toga proizlaze i slična ponašanja algoritama u ovome primjeru. Uz navedeno, razlika u rješenju između FLOP i SIMPLE algoritma, kako je to prikazano na slici 5.38 d), slijedi isti obrazac koji je uočen u prethodnim primjerima.



Slika 5.39 Primjer 8. Konvergencija rješenja prema rezidualima:  
a) SIMPLE; b) FLOP

Tako se i povijesti konvergencije algoritama pokazuju sličnima onima iz prethodnih primjera, kao što to prikazuju slike 5.39 i 5.40. U ovom se primjeru za slučaj FLOP algoritma uočava povećani broj iteracija potrebnih za dovršenje proračuna, u odnosu na prethodne primjere, što se može objasniti eksplicitnim uvažavanjem uzgonskih sila u jednadžbi količine gibanja. Kod SIMPLE algoritma nije došlo do značajnijeg povećanja broja iteracija u odnosu na slučaj strujanja pri niskom Reynoldsovu broju. Unatoč tome, i u ovom je primjeru brzina konvergencije FLOP algoritma znatno veća od brzine konvergencije SIMPLE algoritma. Kao što je prikazano na slici 5.40, i prema ustanovljenom kriteriju ( $r_{\Delta v, rel} < 10^{-4}$ ), SIMPLE algoritam ovaj slučaj rješava u 479. iteraciji, a FLOP algoritam u 18. iteraciji. Za postizanje rješenja na razini računalne točnosti, SIMPLE algoritam zahtijeva približno 1750 iteracija, a FLOP algoritam 75.



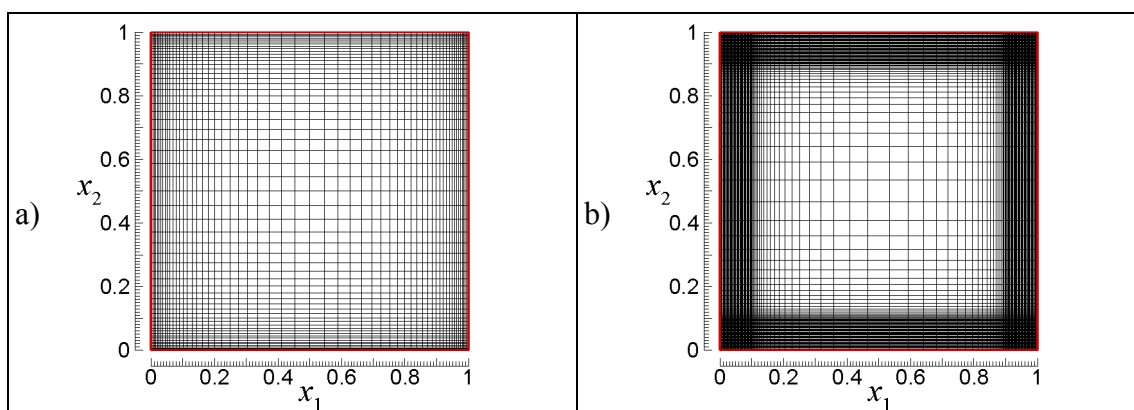
Slika 5.40 Primjer 8. Konvergencija rješenja prema srednjim relativnim razlikama brzine  $r_{\Delta v \text{ rel}}$  i vlastitim  $r_{\Delta v \text{ rel } 1}$ :  
a) SIMPLE; b) FLOP

### Strujanje pri višim vrijednostima Rayleighova broja

Pri višim vrijednostima Rayleighova broja, slika strujanja postaje znatno složenija. U takvim se slučajevima, strujanje odvija u ravnoteži među uzgonskim silama sadržanim u izvorskom članu i inercijskim silama sadržanim u nelinearnom, konvekcijском članu jednadžbe količine gibanja. Ovakvi slučajevi strujanja posjeduju veliku vremensku konstantu, odnosno izrazito dugotrajan proces uspostave stacionarnog režima strujanja, jer je količina gibanja masa u strujanju velika spram uzroka gibanja, a pri tome su viskozne sile male. Sa stajališta primjene segregatnog iterativnog postupka, ova prirodna svojstva strujanja se odražavaju kroz veliku osjetljivost postupka na male poremećaje (svojstvo prigušivanja poremećaja je slabo zbog malog utjecaja viskoznih sila), što dovodi do spore konvergencije k stacionarnom rješenju, a u nekim slučajevima postupak može i divergirati. Navedeno se i pokazalo u niže prikazanim primjerima, gdje su se proračuni proveli uz izmijenjene postavke algoritama u smislu promjena podrazumijevanih vrijednosti podrelaksacijskih faktora u SIMPLE algoritmu, te uvođenju podrelaksacije u FLOP algoritmu. Zadržavanje objektivnosti usporedbe, u ovome bi primjeru zahtijevalo i dosljedno iznalaženje optimalnih vrijednosti više parametara (vrijednosti svih podrelaksacijskih faktora i postavki algebarskog višemrežnog rješavača, na strani oba algoritma), što prelazi okvire ovog rada. Tako su u

ovim primjerima dane usporedbe povijesti konvergencije dvaju postupaka temeljem reziduala, dok ocjene o završetku proračuna temeljem ustanovljenog kriterija, izostaju.

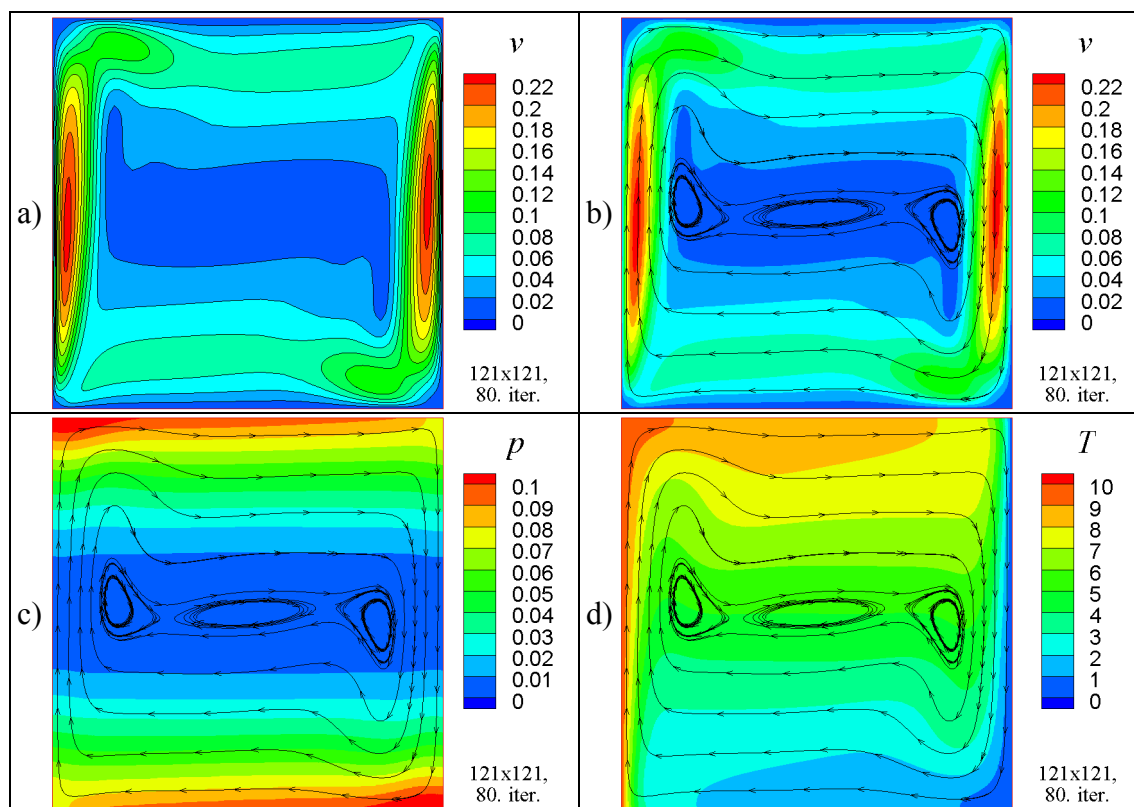
U cilju očuvanja točnosti u okviru dostupnih računalnih resursa, uobičajeno se prilikom proračuna ovakvih problema primjenjuju mreže sa mjestimice povećanom gustoćom prostorne diskretizacije, pa se u skladu s time, u primjerima viših vrijednosti Rayleighova broja pokazanih u nastavku, primjenjuju neravnomjerne mreže prilagođene konačnom rješenju problema. U idućim je primjerima prostorna diskretizacija provedena uz primjenu dvije diskretizacije: neravnomjernom mrežom M1 (60x60 k.v.) i M2 (121x121 k.v.), prikazanim na slikama 5.41 a) i b)



Slika 5.41 Primjer 8. Diskretizacija područja proračuna u primjerima s višom vrijednosti Rayleighova broja:  
a) mreža M1 (60x60 k.v); b) mreža M2 (121x121 k.v)

Slika 5.42 prikazuje rezultate proračuna za slučaj Rayleighova broja  $Ra = 10^6$ . U usporedbi sa slučajem  $Ra = 10^4$ , vidljiv je slabiji utjecaj viskoznosti. On se u svim prikazanim primjerima očituje u manjim debljinama graničnih slojeva, dok (u svim primjerima), vrijednost maksimalne brzine ostaje približno ista zbog specifičnog odabira veličina primijenjenog pri formiranju bezdimenzijskih značajki problema.

Kao što je to bilo učinjeno i u prethodnom primjeru, vrijednost Reynoldsova broja, temeljenog na maksimalnoj brzini (ovdje,  $|v|_{\max} = 0.22903$ ) i vrijednosti viskoznosti  $\mu = 10^{-3}$ , u ovome primjeru iznosi  $Re = 229$ , što ovaj primjer smješta u područje između primjera pokazanih u poglavljima 5.4 i 5.5, odnosno uz primjer strujanja iz poglavlja 5.7.

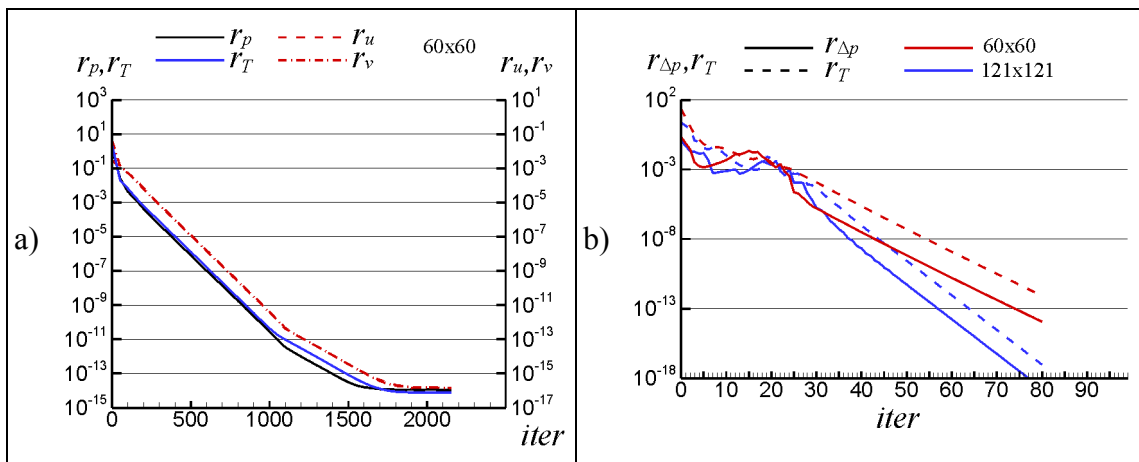


Slika 5.42 Primjer 8. Rješenje prema algoritmu FLOP za slučaj Rayleighova broja  $10^6$ : a), b) polje brzine; c) polje tlaka; d) polje temperature

Povijesti konvergencije rješenja u ovome su primjeru prikazane na slici 5.43. Prema obrascu koji se pokazao i u spomenutim, prethodnim primjerima, svojstva konvergencije SIMPLE algoritma ostaju prvenstveno vezana uz gustoću diskretizacije, dok je brzina konvergencije FLOP algoritma više uvjetovana složenošću slike strujanja i implicitnošću postupka. Pri kompleksnijem rješenju, broj iteracija FLOP algoritma se povećava. Pri tome se prilikom proračuna istog problema, ukoliko se s porastom gustoće diskretizacije slika strujanja malo mijenja (područje mrežne neovisnosti), s povećanjem gustoće mreže opada i pogreška diskretizacije primijenjenih shema diferencije i interpolacija, što zbog implicitnosti postupaka primijenjenih u novome algoritmu, posljedično dovodi i do brže konvergencije proračuna. U ovome primjeru je proračun SIMPLE algoritmom izveden uz podrazumijevane vrijednosti faktora podrelaksacije brzine i tlaka, dok je vrijednost podrelaksacijskog faktora za temperaturu postavljena na vrijednost  $\alpha_T = 0.906$ . Osim ovog pristupa, proračuni ovako zahtjevnih

strujanja mogu se provesti i drugačijim načinom. Primjerice, uobičajeno se ovaj problem može uz pomoć SIMPLE algoritma riješiti (u okviru postupka proračuna strujanja kao stacionarnog) i postupnim razvijanjem rješenja uz pomoć postupnog povećavanja vrijednosti gravitacije  $g$ , gdje se mogu postići rezultati u pogledu brzine konvergencije bliski ovima prikazanim na slici 5.43 a). Također, umjesto zahvata u vrijednost podrelaksacijskog faktora za temperaturu, postupak se može provesti i uz njegovu podrazumijevanu, jediničnu vrijednost, pri čemu se slični rezultati u brzini konvergencije postižu uz vrijednosti ostalih faktora:  $\alpha_{uv} = 0.03$  i  $\alpha_p = 0.97$ . Uz navedeno, za ovaj je primjer ustanovljeno da za slučaj SIMPLE algoritma podrazumijevane vrijednosti faktora podrelaksacije dovode do sigurne divergencije postupka, čak i za slučaj rješenja na razini računalne točnosti (ukoliko se upravo ono pretpostavi kao početno polje, a postavke proračunskog postupka ostanu na podrazumijevanim vrijednostima - postupak će divergirati). U ovome se primjeru ova vrijednost podrelaksacijskog faktora za temperaturu ( $\alpha_T = 0.906$ ), kroz niz pokušaja pokazala najboljom (uz zadržavanje preostalih na podrazumijevanim vrijednostima), dok snižavanjem njene vrijednosti brzina konvergencije brzo opada. U slučaju FLOP algoritma, zadržavanje automatski određenih vrijednosti parametra  $\tau$  i vrijednosti  $\alpha_T = 1$ , u ovome primjeru ne dovodi do divergencije postupka, već samo uzrokuje ne-monotonu konvergenciju manjih oscilacija, sa krajnjim ishodom rješavanja problema u približno 1500 iteracija (približno isto kao i u slučaju proračuna uz pomoć povoljnijih vrijednosti postavki na strani SIMPLE algoritma). Na strani algoritma FLOP, najbolji se rezultati postižu uz ograničavanje parametra  $\tau$  na vrijednost  $\tau \leq 1$ , uz vrijednost podrelaksacijskog faktora za temperaturu približno 0.99.

Temeljem povijesti konvergencije prikazanih na slikama 5.43 a) i b), vidi se da je i u ovakvim načinima korištenja, novi algoritam efikasniji u pogledu potrebnog broja iteracija.

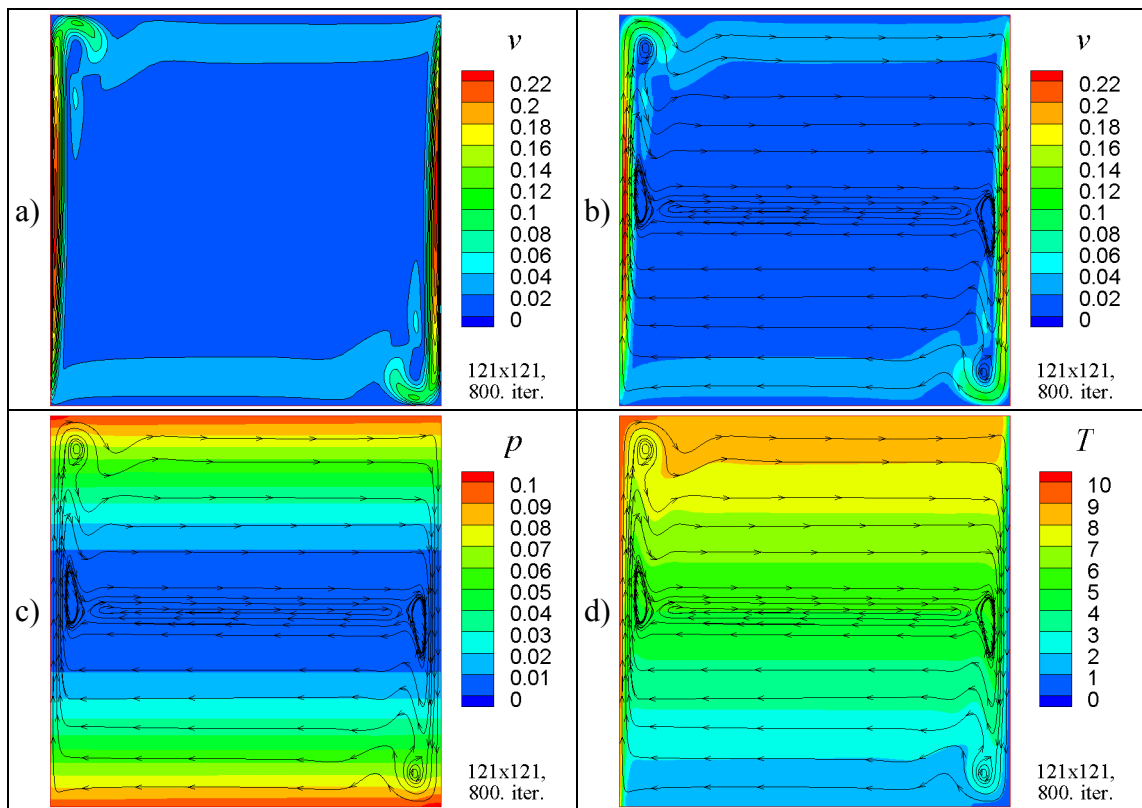


Slika 5.43 Primjer 8. Konvergencija rješenja prema rezidualima, za slučaj Rayleighova broja  $10^6$ :

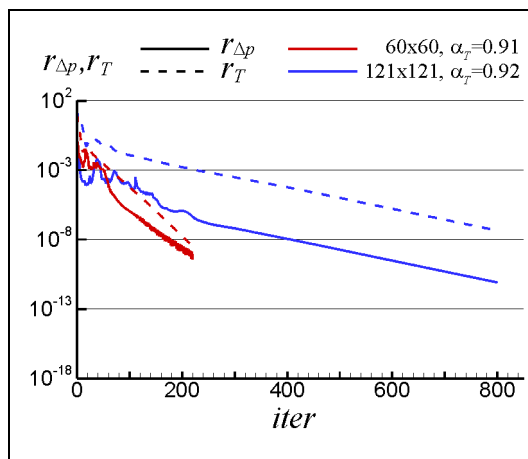
a) SIMPLE,  $\alpha_{uv} = 0.7$ ,  $\alpha_p = 0.3$ ,  $\alpha_T = 0.906$  ;

b) FLOP,  $\tau \leq 1$ ,  $\alpha_T = 0.99$

Slika 5.44 prikazuje rješenje za slučaj vrlo visoke vrijednosti Rayleighova broja  $Ra=10^8$ , gdje po uzoru na ranije provedene analize, odgovarajući Reynoldsov broj iznosi 2308, što ovaj problem smješta u blizinu primjera prikazanog u poglavlju 5.5. Kako je u tom primjeru pokazano, u odsustvu ovog izvorskog člana, primjena podrazumijevanih postavki proračunskog postupka dovodi do sigurne konvergencije i trenda smanjivanja potrebnog broja iteracija sa povećavanjem gustoće diskretizacije (povećanje razlučivosti rješenja - shemom i većom gustoćom mreže, u području mrežne neovisnosti). Na strani SIMPLE algoritma u ovome primjeru nisu pronađene vrijednosti podrelaksacijskih faktora koje bi dovele do konvergentnog postupka, dok je na strani FLOP algoritma on uspješno izvršen, uz postavke prikazane na slici 5.45. U ovome slučaju one nisu nužno i optimalne, već ovaj primjer samo dokazuje mogućnost proračuna i ovako zahtjevnih problema pomoću novog FLOP algoritma, u obliku proračuna stacionarnog strujanja.



Slika 5.44 Primjer 8. Rješenje prema algoritmu FLOP za slučaj Rayleighova broja  $10^8$ : a), b) polje brzine; c) polje tlaka; d) polje temperature



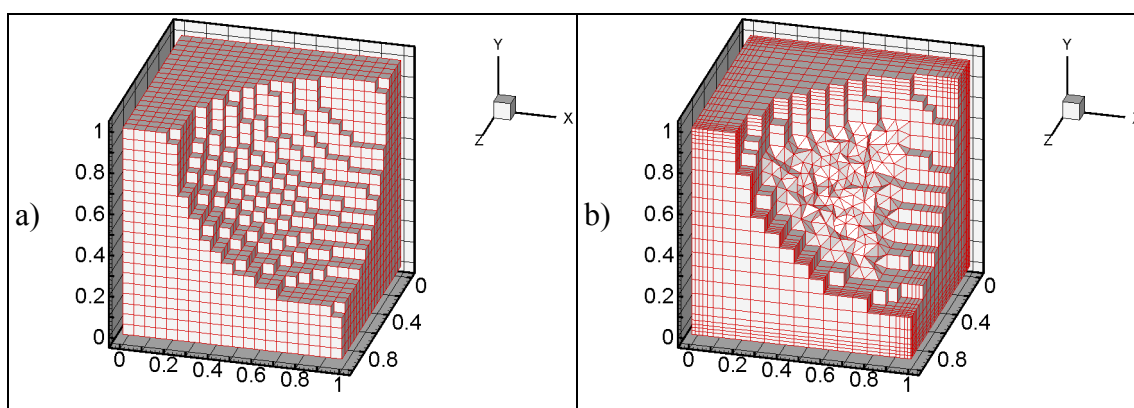
Slika 5.45 Primjer 8. Konvergencija rješenja FLOP algoritma prema rezidualima, za slučaj Rayleighova broja  $10^8$  (uz  $\tau \leq 1$ )



## 5.9 Primjeri trodimenzijskog strujanja

U ovome su poglavlju prikazani primjeri proračuna trodimenzijskih strujanja u šupljini oblika kocke, analogno prethodnom slijedu primjera prikazanih redom, u poglavljima 5.3 - 5.5. U niže prikazanim primjerima, strujanje se odvija u području prikazanom na slici 5.46 ( $1 \times 1 \times 1$ ), gdje su svi rubovi područja zadani kao mirujuć, nepropusni zidovi, dok se gornji rub (ravnina  $x_2 = 1$ , odn.  $y=1$ , na slici) giba konstantnom brzinom  $U = 1$ , u pozitivnom smjeru osi  $x_1$  (odn.  $x$ , na slici). Ovdje je, jednako kao i u prethodnim primjerima (5.3 - 5.5), ova brzina uvijek konstantna, dok se vrijednost Reynoldsova broja mijenjala promjenom vrijednosti viskoznosti.

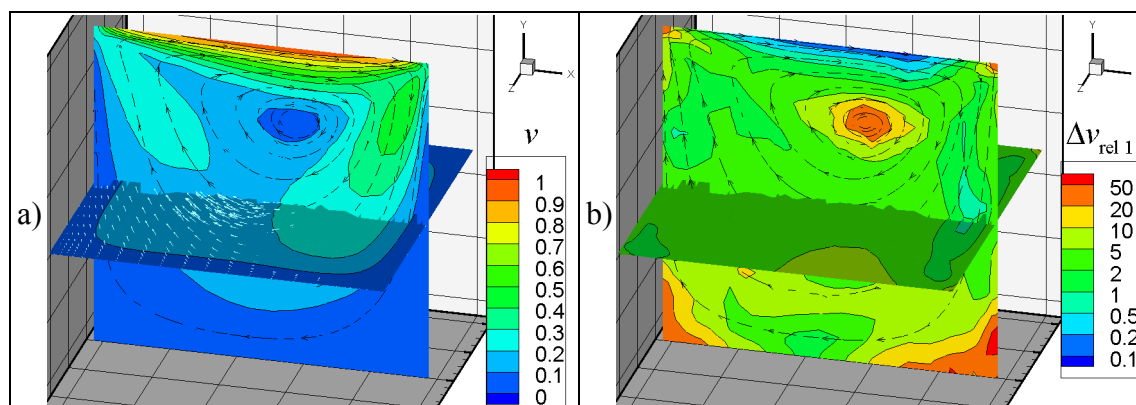
Kako bi se pokazala primjenjivost novog algoritma FLOP i u proračunima trodimenzijskih strujanja, za slučaj primjene proizvoljne nestrukturirane mreže, te istodobno razmatrala svojstva konvergencije na različitim mrežama, odabrane su dvije diskretizacije područja, prema slici 5.46.



Slika 5.46 Primjer 9. Prikaz područja proračuna i diskretizacije:  
 a) ravnomjernom mrežom M1 (20x20x20 k.v.) sa 8000 heksaedarskih konačnih volumena  
 b) neravnomjernom mrežom M2 (19477 k.v) konačnih volumena različitih oblika: heksaedri, tetraedri i piramide s četverostranom bazom

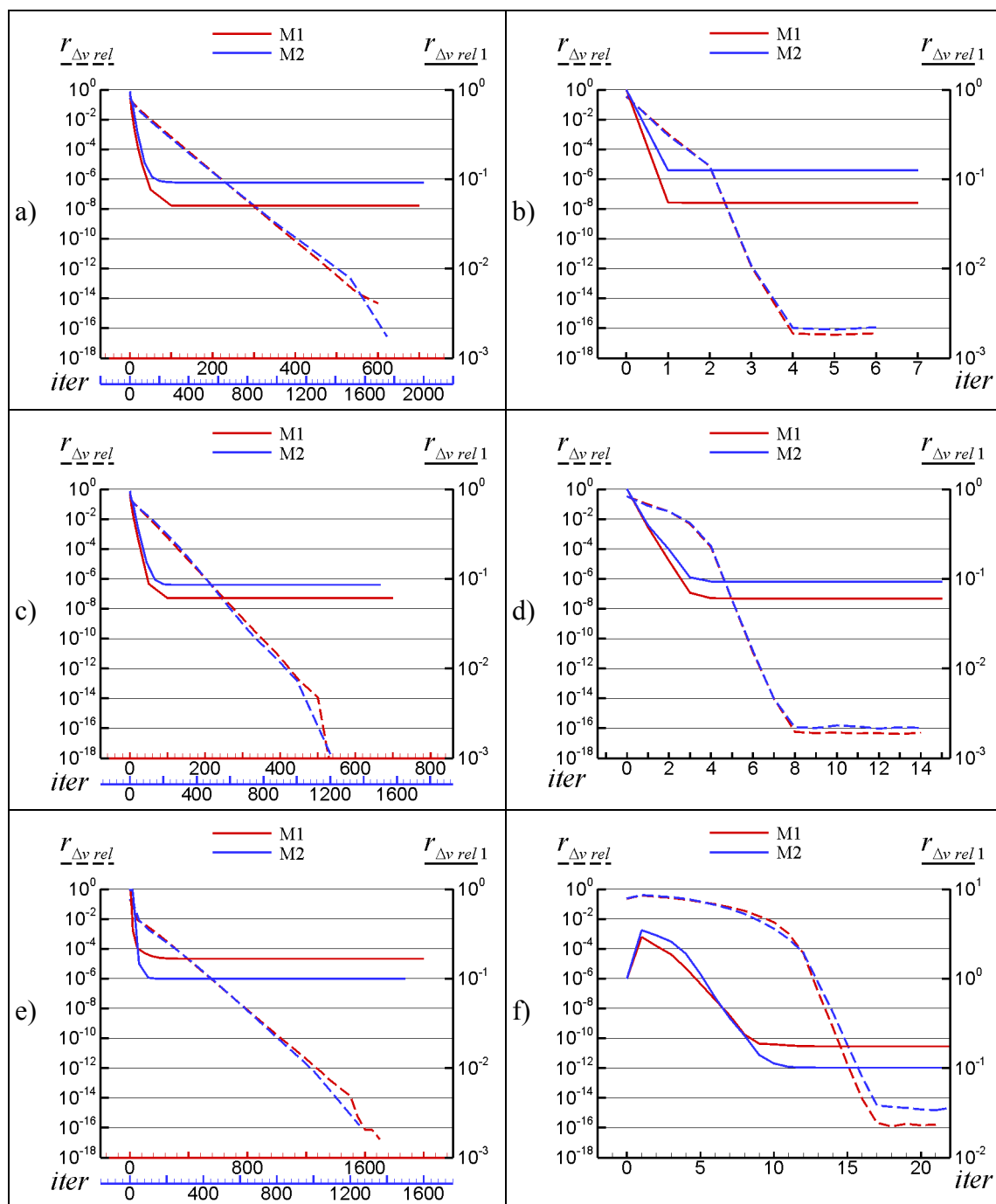
Pravilna mreža M1 (8000 k.v.) sadrži isključivo heksaedre, dok je neravnomjerna mreža M2 približno dvostruko veća (19477 k.v.), sadrži volumene različitih oblika, a ujedno je i prilagođena strujanjima pri višoj vrijednosti Reynoldsova broja. U slučaju mreže M1, sustav jednadžbi za korekciju protoka (4.30) sadrži 14801 petlju (jednadžbi i nepoznatih korekcija protoka) pri čemu je najveći broj članova stupca matrice iznosio 83, a najmanji 24. U slučaju mreže M2, broj petlji je iznosio 29572, uz najveći broj članova stupca 110, i najmanji – 20. Vidljivo je da je broj nepoznanica u novome algoritmu manji no što je to slučaj kod SIMPLE algoritma, gdje je broj nepoznanica u ovim, trodimenzijskim slučajevima  $4nv$  (vrijednosti tlaka i komponenti brzina u svim konačnim volumenima, odnosno u okviru segregatnog pristupa, 4 sustava sa po  $nv$  nepoznanica, pri čemu se za slučaj nepomaknute mreže, za sve komponente brzine primjenjuje ista matrica). Ukoliko se rečeno izrazi postotcima, u slučaju mreže M1, algoritam FLOP u sustavu sadrži svega 46 % ukupnog broja nepoznanica koje se pojavljuju kod algoritma SIMPLE, odnosno u slučaju mreže M2 38 %. Općenito se pri prelasku na diskretizaciju pomoću tetraedara ovaj broj smanjuje. Tako se primjerice, pri diskretizaciji prikazanog područja jednolikom mrežom tetraedarskih konačnih volumena, može postići i omjer od 23% ukupnog broja nepoznanica SIMPLE algoritma, uz najveći broj članova stupca 59. Međutim, kako se nije uspjelo iznaći odgovarajući postupak iterativnog rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi, ovaj se sustav trenutno rješava direktnim rješavačima. Sa porastom broja članova stupca (odn. retka), prilikom operacija faktorizacije brzo dolazi do popunjavanja ne-nultih mjesta te se uz pomoć stolnog računala ne mogu riješiti problemi znatnije veći od ovih koji su ovdje prikazani. Buduća će istraživanja biti usmjerena na rješavanje ovog problema.

Slika 5.47 a) prikazuje rješenje za odabrani slučaj strujanja pri  $Re=100$ , dobiveno primjenom algoritma FLOP na mreži M2. Vidljivo je da je priroda strujanja u ovome primjeru slična onome prikazanom u poglavlju 5.4. Na jednaki se način iskazuje i razlika u rješenju dobivenom primjenom SIMPLE i FLOP algoritma. Slika 5.47 b) pokazuje da je i u slučaju trodimenzijskog strujanja ona najveća na mjestima naglih promjena komponenti brzina, odnosno u područjima s naglim skretanjem toka: blizini zaustavnih točaka i u vrtlozima.



Slika 5.47 Primjer 9. Slučaj strujanja pri Reynoldsovom broju  $Re = 100$ :  
 a) rješenje prema FLOP algoritmu, na mreži M2 (nakon 8. iteracije);  
 b) prikaz relativne razlike polja brzine u postotcima za rješenje dobiveno SIMPLE algoritmom, na mreži M2, (nakon 600. iteracije)

Prema povijesti konvergencije, koja je za sve slučajeve Reynoldsova broja, prikazana na slici 5.48, novi algoritam FLOP i u trodimenzijskim strujanjima zadržava neovisnost broja iteracija o veličini diskretizacije. Ona se i u ovim slučajevima iskazuje jednakim obrascem kakav je uočen i ranije – porastom broja iteracije sa porastom složenosti slike strujanja. Prema ustanovljenom kriteriju ( $r_{\Delta v_{rel}} < 10^{-4}$ ), FLOP algoritam proračun slučaja strujanja pri Reynoldsovu broju  $Re = 1$  dovršava u 2. iteraciji, slučaja  $Re = 100$  u 4. iteraciji, te slučaja  $Re = 5000$  u 12. iteraciji, uvijek neovisno o broju konačnih volumena. Kod algoritma SIMPLE se i ovdje pokazuje mrežna ovisnost brzine konvergencije, s trendom opadanja faktora proporcionalnosti, s povećanjem Reynoldsova broja. U slučaju  $Re = 1$ , ovaj je odnos blizak jedinci (omjer broja iteracija i broja volumena u mrežama, iako su mreže različite), dok s porastom Reynoldsova broja, on opada. Kod SIMPLE algoritma je u slučaju  $Re = 5000$  došlo do inverzije, gdje je algoritam, na mreži s većim brojem volumena, brže konvergirao. Algoritam SIMPLE, prema ustanovljenom kriteriju, za slučaj  $Re = 1$ , rješenje dovodi do zadane točnosti u 137. iteraciji na mreži M1 (8000 k.v) i 370. iteraciji na mreži M2 (19477 k.v), slučaj  $Re = 100$  u 129. iteraciji na mreži M1 i 304. iteraciji na mreži M2, te u slučaju  $Re = 5000$ , u ovome slučaju suprotno trendu: 313. iteraciji na mreži M1 i 248. iteraciji na mreži M2.



Slika 5.48 Primjer 9. Prikaz povijesti konvergencije rješenja putem srednje relativne i vlastite srednje relativne razlike polja brzine za:  
 a) SIMPLE i b) FLOP algoritam, pri  $Re = 1$ ;  
 c) SIMPLE i d) FLOP algoritam, pri  $Re = 100$ ;  
 e) SIMPLE i f) FLOP algoritam, pri  $Re = 5000$

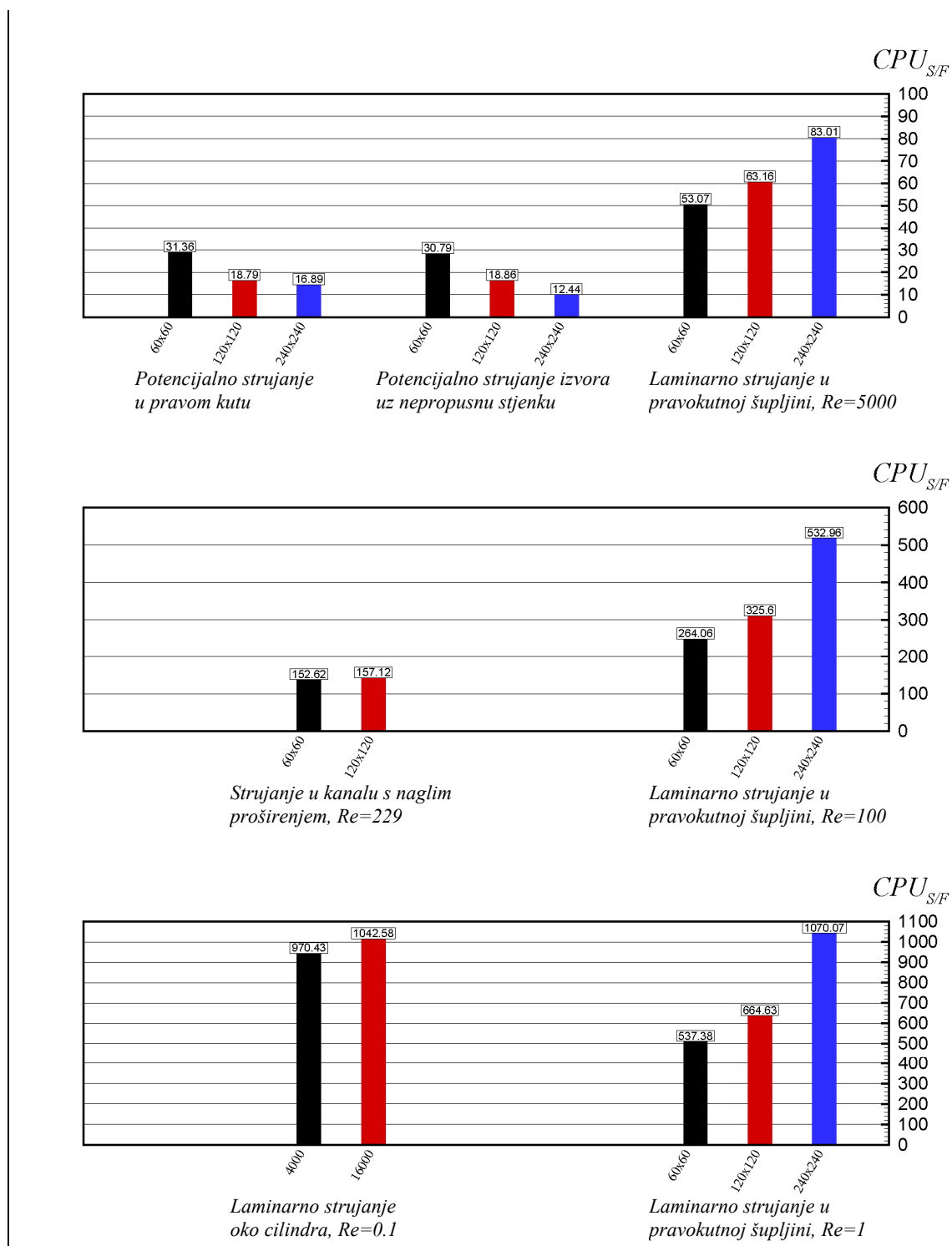
Uz navedeno, i u ovim se primjerima trodimenzijskih strujanja pokazuje isti trend spram postizanja računalne točnosti, gdje algoritam FLOP, nakon prolaska kriterija, strmo konvergira, dok algoritam SIMPLE rješenje na razini računalne točnosti uvijek dostiže monotonom, logaritamskom konvergencijom.

## 5.10 Usporedba učinkovitosti algoritama SIMPLE i FLOP

Brzine konvergencije SIMPLE i FLOP algoritama su, u primjerima pokazanim u poglavljima 5.1 - 5.7, dosljedno uspoređene u pogledu potrebnog broja iteracija. U tim su primjerima, proračuni provedeni uz podrazumijevane postavke na strani oba algoritma, kroz niz rastućih gustoća diskretizacije (broja konačnih volumena), gdje su mreže konačnih volumena međusobno slične. Usporedba učinkovitosti algoritama na temelju proračuna ovih primjera sažeto je izložena u tablici 5.9, dok su omjeri utrošenog računalnog vremena koji se pojavljuju u tablici, dodatno prikazani i na slici 5.49. Temeljem ovih prikaza, vidljiva je višestruko veća učinkovitost novog FLOP algoritma, kako u pogledu potrebnog broja iteracija tako i u potrebnom računalnom vremenu, unatoč izgledno manje optimalnoj realizaciji novog algoritma na računalu i primjeni direktnog rješavača za rješavanje sustava jednadžbi za korekciju protoka po petljama ((4.30), (4.58)). U pogledu potrebnog broja iteracija za postizanje rješenja iste razine točnosti, učinkovitost FLOP algoritma spram SIMPLE algoritma raste s porastom gustoće diskretizacije što je posljedica mrežne neovisnosti brzine konvergencije FLOP algoritma i mrežne ovisnosti SIMPLE algoritma, kod kojeg broj iteracija raste razmjerno broju konačnih volumena u mreži. Prema broju iteracija, u prikazanim primjerima laminarnih strujanja, učinkovitost FLOP algoritma premašuje učinkovitost SIMPLE algoritma u iznosu od 9413 puta pri proračunima na većim mrežama i strujanjima pri nižim Reynoldsovim brojevima, do 59.7 puta u proračunima strujanja koja se odvijaju pri visokim vrijednostima Reynoldsova broja (na granici prelaska u nestacionarni režim strujanja) i malim mrežama, koje za ovakva strujanja ne osiguravaju dovoljnu razlučivost (nisu u području mrežne neovisnosti rješenja).

Tablica 5.9 Pregled potrebnog broja iteracija – iter i utrošenog računalnog vremena –  $t_{rac}$  pri proračunu pojedinih primjera, do postizanja rješenja propisane točnosti. S – SIMPLE; F – FLOP.

Mreža:	broj iteracija iter :			računalno vrijeme $t_{rac}$ /[s]:		
	S	F	S/F	S	F	S/F
<i>Potencijalno strujanje u pravom kutu</i>						
3600	60	0	-	4.39	0.14	31.36
14400	120	0	-	18.79	1.00	18.79
57600	320	0	-	153.34	9.08	16.89
<i>Potencijalno strujanje izvora uz nepropusnu stjenku</i>						
3600	60	0	-	4.31	0.14	30.79
14400	120	0	-	18.48	0.98	18.86
57600	240	0	-	113.10	9.09	12.44
<i>Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja <math>Re=1</math></i>						
3600	1181	2	590.5	85.98	0.16	537.38
14400	4708	2	2354.0	744.38	1.12	664.63
57600	18826	2	9413.0	9256.14	8.65	1070.07
<i>Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja <math>Re=100</math></i>						
3600	1183	4	295.8	81.86	0.31	264.06
14400	4718	4	1179.5	732.61	2.25	325.60
57600	18842	4	4710.5	9193.58	17.25	532.96
<i>Laminarno strujanje u pravokutnoj šupljini pri iznosu Reynoldsova broja <math>Re=5000</math></i>						
3600	836	14	59.7	57.85	1.09	53.07
14400	3201	14	228.6	497.05	7.87	63.16
57600	12471	17	733.6	6084.98	73.30	83.01
<i>Laminarno strujanje oko cilindra pri iznosu Reynoldsova broja <math>Re=0.1</math></i>						
4000	3913	2	1956.2	291.13	0.30	970.43
16000	15820	2	7901.0	2575.18	2.47	1042.58
<i>Strujanje u kanalu s naglim proširenjem pri iznosu Reynoldsova broja <math>Re=229</math></i>						
3600	1169	5	233.8	79.36	0.52	152.62
14400	3647	5	729.4	609.63	3.88	157.12



Slika 5.49 Omjer potrebnog računalnog vremena SIMPLE i FLOP algoritma za postizanje rješenja propisane točnosti u odabranim primjerima.

U pogledu učinkovitosti spram utroška računalnog vremena, u navedenim je primjerima algoritam FLOP spram algoritma SIMPLE pokazao 53.07 do 1070.07 puta veću učinkovitost. Trend porasta učinkovitosti po utrošenom računalnom vremenu FLOP algoritma spram SIMPLE algoritma s povećanjem broja konačnih volumena nije razmjern porastu učinkovitosti iskazane brojem iteracija. Uzrok leži u primjeni direktnog rješavača za rješavanje sustava jednačbi za korekciju protoka po petljama u FLOP algoritmu, koji s porastom broja koeficijenata u sustavu jednačbi brže gubi na učinkovitosti, što nije slučaj s iterativnim algebarskim višemrežnim rješavačem koji se primjenjuje u SIMPLE algoritmu. Unatoč tome, u ovim se primjerima i sa stajališta utroška računalnog vremena, pokazuje porast učinkovitosti FLOP algoritma spram SIMPLE algoritma s povećanjem broja konačnih volumena.

Usporedba učinkovitosti koja je ovdje iznesena, provedena je na temelju broja iteracija i računalnog vremena koji su potrebni za postizanja rješenja iste razine točnosti tj. do postizanja minimuma relativne razlike u poljima brzine dobivenim od strane dvaju algoritama. Praktično, tako dobiveno rješenje kod oba algoritma sadrži jednaku relativnu pogrešku polja brzine spram vlastitog rješenja na razini računalne točnosti (iznosa  $r_{\Delta v \text{ rel}} = 10^{-4}$ ). SIMPLE algoritam u svim primjerima pokazuje monotonu, logaritamsku konvergenciju sve do postizanja rješenja na razini računalne točnosti, dok iterativni postupak FLOP algoritma nakon prolaska rješenja ove točnosti uvijek strmo konvergira. Pri usporedbi za slučaj postizanja rješenja na razini računalne točnosti FLOP algoritam bi pokazao još veću učinkovitost spram SIMPLE algoritma.

U primjerima sa slobodnom konvekcijom (poglavlje 5.8), član s uzgonskim silama je u algoritmu SIMPLE uvažen potpuno eksplicitno, dok je u slučaju FLOP algoritma on uvažen djelomično implicitno. Proračuni su se provodili na manjem broju mreža koje međusobno nisu slične, uz izmijenjene postavke algoritama pri višim vrijednostima Rayleighova broja (promjena podrazumijevanih vrijednosti podrelaksacijskih faktora u SIMPLE algoritmu, te uvođenju podrelaksacije u FLOP algoritmu), dok u primjeru strujanja pri vrijednosti Rayleighova broja  $Ra = 10^8$  proračun SIMPLE algoritmom nije uspješno izvršen. Stoga, radi zadržavanja objektivnosti usporedbe, u slučaju slobodne konvekcije izostaje kvantitativna usporedba učinkovitosti. Nadalje, primjeri



trodimenzijskih strujanja prikazani u poglavlju 5.9 imaju prvenstvenu svrhu pokazati primjenjivost novog FLOP algoritma u proračunima trodimenzijskih strujanja na proizvoljnim mrežama. Zbog ograničenja direktnog rješavača na strani FLOP algoritma, proračuni su provedeni na samo dvije mreže, uz relativno grubu prostornu diskretizaciju, pa radi zadržavanja objektivnosti kvantitativna usporedba učinkovitosti izostaje i u ovom slučaju.

Unatoč navedenom, osvrt na primjere sa slobodnom konvekcijom (slike 5.40, 5.43, 5.45) upućuje na veću učinkovitost FLOP algoritma i u slučaju ovakvog načina primjene algoritama (uz promjenu podrazumijevanih postavki algoritama). Isto vrijedi i za primjere trodimenzijskih strujanja prikazanih u poglavlju 5.9 (slika 5.48). U ovim je primjerima uočen i trend porasta učinkovitosti u pogledu broja iteracija FLOP algoritma spram SIMPLE algoritma s povećanjem broja konačnih volumena - sličan onome iz dvodimenzijskih primjera. Za objektivnu kvantitativnu usporedbu učinkovitosti prema utrošku računalnog vremena, potrebno je proračune primjera sa slobodnom konvekcijom provesti uz optimalne postavke oba algoritma, a u slučaju trodimenzijskih strujanja je na strani FLOP algoritma potrebno pronaći iterativni rješavač linearnih algebarskih jednadžbi koji će biti učinkovitiji u primjeni na rješavanje sustava jednadžbi za korekciju protoka po petljama.

## 6 ZAKLJUČCI

U radu je predložen i realiziran novi algoritam za povezivanje polja brzine i tlaka pri numeričkom rješavanju Navier-Stokesovih jednadžbi za nestlačivo strujanje. Osnovna razlika novog algoritma u odnosu na danas najčešće korišteni SIMPLE algoritam nalazi se u izboru varijabli koje se u iterativnom postupku korigiraju i u načinu određivanja gradijenta tlaka. U SIMPLE algoritmu varijable su vrijednosti komponenti polja brzine i polja tlaka u centrima konačnih volumena, dok su u novom algoritmu varijable maseni protoci kroz stranice konačnih volumena. U SIMPLE algoritmu se u svakoj iteraciji korigiraju i brzine i tlakovi, dok jednadžba kontinuiteta i jednadžba količine gibanja ne budu simultano zadovoljene. U novom algoritmu korigiraju se samo maseni protoci kroz stranice konačnih volumena, pri čemu u svakoj iteraciji jednadžba kontinuiteta ostaje zadovoljena, a korekcija protoka se izvodi sve dok polje gradijenta tlaka ne postane bezcirkulacijsko. Brzina konvergencije novog algoritma uspoređena je s brzinom konvergencije algoritma SIMPLE u nekoliko tipičnih test situacija, a također je analizirana pogreška koju algoritmi unose u numeričko rješenje, te je zaključeno sljedeće:

- 1) Broj iteracija potreban za postizanje rješenja zadane točnosti je značajno manji kod primjene novog algoritma, pri čemu korisnik ne treba zadavati podrelaksacijske faktore za rješavanje jednadžbi strujanja.
- 2) Broj potrebnih iteracija u novom algoritmu na promatranom problemu praktično ne ovisi o gustoći mreže (broju konačnih volumena), a blago raste s porastom složenosti slike strujanja u konačnom rješenju (s pojavom vrtloga, tj. odvajanja strujanja) i primjenom sheme diferencije višeg reda točnosti (primjenom „deferred correction“ postupka), ali kod primjene sheme višeg reda, s porastom gustoće mreže broj iteracija opada. Značajniji porast potrebnog broja iteracija dogodio se u primjeru problema slobodne konvekcije, gdje postoji značajan međutjecaj polja brzine i temperature, a jednadžbe za ta polja se rješavaju sekvencijalno, umjesto istodobno.

3) Učinkovitost dvaju postupaka u smislu utroška računalnog vremena nije točno istražena jer se ne može objektivno uračunati razina profesionalnosti implementacije novog algoritma u usporedbi s komercijalnim paketom FLUENT. Međutim, u prikazanim primjerima je pokazano da je novi algoritam efikasniji, unatoč manje optimalnoj realizaciji na računalu.

4) U analiziranim primjerima se pokazalo da na istoj mreži s istom shemom diferencije, novi algoritam daje nešto točnije rezultate, što se može pripisati takvom izboru varijabli u novom algoritmu, koji omogućuje primjenu fizikalnih interpolacija.

5) Novi algoritam rezultira sustavom linearnih algebarskih jednadžbi s manje nepoznanica, ali s matricom koja je gušće popunjena, te zahtijeva više memorije nego SIMPLE algoritam. Nedostatak je taj da nastala matrica nema svojstva poznate M-matrice, pa je za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi korišten direktni rješavač, što u ovom trenutku daje ograničenje na veličinu problema koji se novim algoritmom može riješiti. U nastavku bi valjalo istražiti mogućnosti efikasnog iterativnog rješavanja nastalog sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

5) U nastavku istraživanja će se novi algoritam implementirati za rješavanje problema stlačivog strujanja. Taj je korak izravan, s time da bi se u svakoj iteraciji trebalo iz izračunatih gradijenata tlaka rekonstruirati polje tlaka, npr. iz uvjeta minimalne sume kvadrata odstupanja.

## LITERATURA

- [1] Anderson JD.: Computational Fluid Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1995.
- [2] Auteri F., Parolini N., Quartapelle L.: Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow. *J Comput Phys* 2002;183(1).
- [3] Barton I. E.: Comparison of SIMPLE- and PISO-Type Algorithms for transient Flows, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, 459-483, 1998.
- [4] Bruneau CH., Saad M.: The 2D lid-driven cavity problem revisited. *Computers & Fluids*, 35 (2006) 326–348.
- [5] Choi H., Lee D., Maeng J.: A Node-Centered Pressure-Based Method for All Speed Flows on Unstructured Grids, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 44, 165-185, 2003.
- [6] Chorin AJ.: A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J Comput Phys* 1967;2:12–26.
- [7] Chung TJ.: Computational Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [8] Cross H. Analysis of flow in networks of conduits or conductors, Bulletin 108. Engineering Experimental Stations. University of Illinois, 1936.
- [9] Darwish M., Sraj I., Moukalled F.: A coupled finite volume solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids, *Journal of Computational Physics* 228 (2009) 180–201.
- [10] Deng Q. H., Tang G. F.: Special Treatment of Pressure Correction Based on Continuity Conservation in a Pressure-Based Algorithm, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 42, 73-92, 2002.
- [11] Doormaal J. P., Raithby G. D.: An Evaluation of the Segregated Approach for Predicted Incompressible Fluid Flows, ASME Paper 85.HT.9, 1985
- [12] Doormaal J. P., Raithby G. D.: Enhancement of SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, 147-163, 1984.
- [13] Duff IS., Erisman AM., and Reid JK.: Direct Methods for Sparse Matrices. Oxford University Press, New York, 1986.
- [14] Dwyer HS, Soliman M, Hafez M.: Time accurate solutions of the Navier–Stokes equations for reacting flows. In: Proc of the 10th Int Conf on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Beijing, China. Springer-Verlag; 1986., 247–251.

- [15] Džijan I.: Razvoj metode kontrolnih volumena na nestrukturiranoj mreži, Magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2000.
- [16] Džijan I.: Numerička metoda za analizu strujanja fluida na nestrukturiranoj mreži. Doktorski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2004.
- [17] Erturk E., Corke TC., Gökçöl C.: Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven, cavity flow at high Reynolds numbers. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2005; 48:747–774.
- [18] Ferziger J. H., Perić M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [19] Fletcher C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [20] Fletcher C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics 2*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [21] Fox J.A.: *Hydraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe Networks*, The Macmillan Press Ltd., London, 1979.
- [22] Freund, R.W., “A Transpose-free Quasi-Minimal Residual Algorithm for Non-Hermitian Linear Systems”, *SIAM Journal on Scientific Computing* 14, 1993, pp 470-482.
- [23] Ghia U., Ghia KN., Shin CT.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics* 1982; 48:387– 411.
- [24] Hackman L. P., Raithby G. D., Strong A. B.: Numerical Predictions of Flows Over Backward-Facing Steps, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 4, 711-724, 1984.
- [25] Harlow FH., Welch JE.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface. *Phys Fluids* 1965;8(12):2182–2189.
- [26] Hirsch C.: *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Vol. 1, John Wiley and Sons Ltd., London, 2007.
- [27] Issa R. I.: Solution of Implicitly Discretized Fluid Flow Equation by Operator-Splitting, *J. Comput. Phys.*, Vol. 62, 40-65, 1985.
- [28] Jang D. S., Jetli R., Acharya S.: Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC Algorithms for the Treatment of the Pressure-Velocity Coupling in Steady Flow Problems, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 10, 209-228, 1986.
- [29] Korbar R.: Metoda rješavanja  $k$ - $\varepsilon$  modela turbulencije u općim koordinatama, Magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 1992.

- [30] Kwak D., Kiris C., Kim SC.: Computational challenges of viscous incompressible flows, *Computers & Fluids* 34 (2005) 283–299.
- [31] Latimer B. R., Pollard A.: Comparison of Pressure-Velocity Coupling Solution Algorithms, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, 635-652, 1985.
- [32] Lien F. S.: A Pressure Based Unstructured Grid Method for All-Speed Flows, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 33, 355-374, 2000.
- [33] Marchuk GM.: *Methods of numerical mathematics*. Springer-Verlag; 1975.
- [34] Miller T. F., Schmidt F. W.: Use of a Pressure-Weighted Interpolation Method for the Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid System, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 14, 213-233, 1988.
- [35] Moukalled F., Darwish M.: Pressure-Based Algorithms for Multifluid Flow at All Speeds – Part I: Geometric Conservation Formulation, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 45, 523-540, 2004.
- [36] Moukalled F., Darwish M.: Pressure-Based Algorithms for Multifluid Flow at All Speeds – Part I: Mass Conservation Formulation, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 45, 495-522, 2004.
- [37] Patankar S. V., Spalding D. B.: A Calculation Procedure for Heat Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, 1787-1806, 1972.
- [38] Patankar S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington-New York-London, 1980.
- [39] Patankar S. V.: A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, 409-425, 1981.
- [40] Peng YF., Shiau YH., Hwang RR.: Transition in a 2-D lid-driven cavity flow. *Comput Fluids* 2002;32.
- [41] Rhie C. M., Chow W. L.: A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. *AIAA J.*, Vol. 21, 1525-1532, 1983.
- [42] Rosenfeld M, Kwak D, Vinokur M.: A fractional-step method for unsteady incompressible Navier–Stokes equations in generalized coordinate systems. *J Comput Phys* 1991; 94(1):102–137.
- [43] Saad, Y. and M. Schultz, “GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems”, *SIAM Journal for Sci. and Stat. Computing* 7, 1986, pp 856-869.
- [44] Schlichting H.: *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1960.

- [45] Shen W. Z., Michelsen J. A., Sorensen N. N., Sorensen J. N.: An Improved SIMPLEC Method on Collocated Grids for Steady and Unsteady Flow Computations, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 43, 221-239, 2003.
- [46] Simoncini V.: A New Variant of Restarted GMRES, *Numerical Linear Algebra with Applications*, Vol. 6, 61-77, 1999.
- [47] Sonneveld P.: CGS, A fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 10, pp. 36–52, 1989.
- [48] Spalding D. B.: A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 4, 551-559, 1972.
- [49] Šavar M.: Smanjenje numeričke difuzije pri proračunu nestacionarnog jednodimenzijskog strujanja fluida, *Doktorska disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu*, 1996.
- [50] Tamura A., Kikuchi K., Takahashi T.: Residual Cutting Method for Elliptic Boundary Value Problems *Journal of Computational Physics* Volume 137, Issue 2, 1 November 1997, Pages 247-264.
- [51] Tao W. Q., Qu Z. G., He Y. L.: A Novel Segregated Algorithm for Incompressible Fluid Flow and Heat Transfer Problems – CLEAR (Coupled and Linked Equations Algorithm Revised) Part I: Mathematical Formulation and Solution Procedure, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 45, 1-18, 2004.
- [52] Tao W. Q., Qu Z. G., He Y. L.: A Novel Segregated Algorithm for Incompressible Fluid Flow and Heat Transfer Problems – CLEAR (Coupled and Linked Equations Algorithm Revised) Part II: Application Examples, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 45, 1-18, 2004.
- [53] Temam R.: *Navier Stokes equations*. Revised ed. North Holland; 1979.
- [54] V.L. Streeter, E.B. Wylie: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [55] Virag Z., Džijan I., Krizmanić S.: Improved Symmetric Gauss-Seidel Method for Solving Sparse Linear Systems Appear in CFD, 5th International Congress of Croatian Society of Mechanics, September, 21-23, 2006, Trogir/Split, Croatia.
- [56] Virag Z., Trincas G.: An Improvement of the Exponential Differencing Scheme for Solving the Convection-Diffusion Equation, *Advances in Engineering Software*, Vol. 19, 1-19, 1994.
- [57] Virag Z.: Automatizacija postupka numeričkog rješavanja ravninskog turbulentnog strujanja, *Magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu*, 1985.

- [58] Virag Z.: Proračun strujanja fluida u složenim geometrijama metodom konačnih volumena, Doktorska disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 1991.
- [59] Wesseling P.: Principles of Computational Fluid Dynamics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [60] Wright NG., Gaskell PH.: An efficient multigrid approach to solving highly recirculating flows. Computers and Fluids 1995; 24:63 –79.
- [61] Yanenko NN.: The method of fractional steps. Berlin, Springer-Verlag; 1971.
- [62] Yu B., Kawaguchi Y., Tao W. Q., Ozoe H.: Checkerboard Pressure Predictions Due to the Underrelaxation Factor and Time Step Size for a Nonstaggered Grid with Momentum Interpolation Method, Numerical Heat Transfer, Vol. 41, 85-94, 2002.
- [63] Yu B., Tao W. Q., Wei J. J., Kawaguchi Y., Tagawa T., Ozoe H.: Discussion on Momentum Interpolation Method for Collocated Grids of Incompressible Flow, Numerical Heat Transfer, Vol. 42, 141-166, 2002.
- [64] Zitko J.: Generalization of Convergence Conditions for a Restarted GMRES, Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 7, 117-131, 2000.



## ŽIVOTOPIS

Ime i prezime:	Severino Krizmanić
E-mail:	severino.krizmanic@fsb.hr
Datum rođenja:	24. studeni 1973.
Mjesto rođenja:	Pula, Hrvatska
Bračno stanje:	Oženjen
Osnovna škola:	1980. - 1988. "Veruda", Pula
Srednja škola:	1988. – 1992. "Gimnazija Pula", Pula <i>Prirodoslovno-matematički tehničar</i>
Vojni rok:	2000. – 2001.
Studij:	1992. – 2002. Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje (FSB), Studij strojarstva, Smjer: Strojarske konstrukcije, Grupa: Zrakoplov i motor <i>Diplomirani inženjer strojarstva</i>
Poslijediplomski studij:	2002. – Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Studij strojarstva, Smjer: procesno-energetski
Namještenje:	srpanj, 2002. – <i>znanstveni novak</i> na Sveučilištu u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, <i>asistent</i> na Katedri za mehaniku fluida
Znanje jezika:	Engleski Talijanski Slovenski
Članstva:	Hrvatsko društvo za mehaniku (HDM)

## BIOGRAPHY

Name and surname:		Severino Krizmanić
E-mail:		severino.krizmanic@fsb.hr
Date of birth:		24 <sup>th</sup> November 1973.
Place of birth:		Pula, Croatia
Marital Status:		Married
Primary school:	1980. - 1988.	"Veruda", Pula
Secondary school:	1988. – 1992.	"Gimnazija Pula", Pula <i>Technician in natural sciences and mathematics</i>
Military service:	2000. – 2001.	
Study:	1992. – 2002.	University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering And Naval Architecture (FMENA), Study of Mechanical Engineering, Machine Design, Airframe and Propulsion, <i>B. Sc. in Mechanical Engineering</i>
Postgraduate study:	2002. –	University of Zagreb, FMENA, Process and Power Engineering
Employment:	July 2002. –	<i>Scientific novice</i> at the University of Zagreb, FMENA, Department of Energy, Power Engineering and Environment (DEPEE), <i>Research Assistant</i> at the Chair of Fluid Mechanics
Foreign languages:		English Italian Slovenian
Memberships:		Croatian Society of Mechanics (CSM)