

# Višekriterijsko adaptivno oblikovanje planova pokusa

---

Cajner, Hrvoje

Doctoral thesis / Disertacija

2011

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:012737>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

VIŠEKRITERIJSKO ADAPTIVNO  
OBLIKOVANJE PLANOVA POKUSA

**DOKTORSKI RAD**

HRVOJE CAJNER

Zagreb, 2011.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

VIŠEKRITERIJSKO ADAPTIVNO  
OBLIKOVANJE PLANOVA POKUSA

**DOKTORSKI RAD**

Mentor:

Prof. dr. sc. Nikola Šakić

Hrvoje Cajner, dipl. inž. zrak.

Zagreb, 2011.

## Podaci za bibliografsku karticu

*UDK:* 519.242

*Ključne riječi:* planovi pokusa, troškovi, vrijeme eksperimentiranja, optimalnost planova pokusa

*Znanstveno područje:* tehničke znanosti

*Znanstveno polje:* strojarstvo

*Znanstvena grana:* proizvodno strojarstvo

*Institucija u kojoj je rad izrađen:* Fakultet strojarstva i brodogradnje  
Zagreb

*Mentor:* prof. dr. sc. Nikola Šakić

*Broj stranica:* xviii, 144

*Broj slika:* 68

*Broj tablica:* 7

*Broj korištenih bibliografskih jedinica:* 40

*Datum obrane:* 05.05.2011.

*Povjerenstvo:* dr. sc. Tomislav Filetin, red. prof.  
dr. sc. Nikola Šakić, red. prof.  
dr. sc. Vedran Mudronja, red. prof.  
dr. sc. Nedeljko Štefanić, red. prof.  
dr. sc. Miljenko Košiček, znan. surad.

*Institucija u kojoj je rad pohranjen:* Fakultet strojarstva i brodogradnje  
Zagreb

# Zahvala

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Nikoli Šakiću na velikoj pomoći pri otkrivanju područja inženjerske statistike, te posebice područja istraživanja planiranja i analize pokusa. Također, zahvaljujem na razumijevanju i nesebičnoj pomoći pri oblikovanju doktorske hipoteze te potvrdi iste kroz realizaciju ovog doktorskog rada.

Zahvaljujem članovima povjerenstva: prof. dr. sc. Tomislavu Filetinu, prof. dr. sc. Vedranu Mudronji, prof. dr. sc. Nedeljku Štefaniću i dr. sc. Miljenku Košičeku na korisnim savjetima i sugestijama pri konačnom oblikovanju rada.

Također, zahvaljujem se svim svojim prijateljima i kolegama sa Zavoda za industrijsko inženjerstvo i sa Fakulteta strojarstva i brodogradnje, koji su mi bili podrška i pomoć u svakom trenutku izrade ovoga rada. Posebice zahvaljujem g. Vladi Zeleniću na pomoći pri grafičkom uređenju i prijelomu.

Iskrenu zahvalu bih uputio i svojoj obitelji na razumijevanju i prijeko potrebnoj podršci.

Na kraju, zahvaljujem se na strpljenju svojoj djeci Vidi i Franu koja su postavljala mnoga pitanja o tome „zašto tata mora dugo raditi“, te na potpori supruge Nikoline koja je na sva ta pitanja morala dati odgovore.

Hrvoje Cajner

Zagreb, travanj 2011.



# Sadržaj

Predgovor	vii
Sažeta	viii
Summary	ix
Popis slika	xi
Popis tablica	xiv
Popis oznaka	xv
Popis kratic	xviii
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Definicija problema i pregled dosadašnjih saznanja	1
1.2 Hipoteza rada	5
1.3 Metodologija i plan istraživanja	5
1.4 Očekivani znanstveni doprinos	7
<b>2. Osnove oblikovanja planova pokusa</b>	<b>9</b>
2.1 Osnovni koncepti u istraživanju pojava i procesa	9
2.2 Pokusi za prilagođavanje odzivne površine (metodologija odzivne površine)	11
2.2.1 Koncept metodologije odzivne površine	11
2.2.2 Metoda pozicioniranja pokusa u područje optimuma – metoda strmog uspona	14
2.2.3 Modeli pokusa za prilagođavanje odzivne površine	16
2.3 Ograničenost eksperimentalnog prostora	22
2.4 Kriteriji oblikovanja i odabira adekvatnog plana pokusa	23
2.4.1 Kriteriji optimalnosti	25
2.4.2 Svojstvo ortogonalnosti	32
2.4.3 Svojstvo rotabilnosti	34
2.4.4 Računalom generirani optimalni planovi pokusa	36
2.4.5 Grafičke metode evaluacije i usporedbe planova pokusa	37
<b>3. Struktura algoritma višekriterijskog adaptivnog oblikovanja planova pokusa</b>	<b>43</b>
3.1 Diskretizacija eksperimentalnog prostora	44
3.2 Faza 1 – početno oblikovanje plana pokusa	47
3.2.1 Uvođenje novih kriterija oblikovanja pokusa	48
3.2.2 Definicija funkcije troška eksperimentiranja	49
3.2.3 Definicija funkcije utroška vremena eksperimentiranja	53

3.2.4	Formulacija funkcije poželjnosti	55
3.2.5	Generiranje niza planova pokusa	58
3.2.6	Odabir optimalnog plana pokusa	63
3.3	Faza 2 – poboljšanje postojećeg plana pokusa	64
3.3.1	Struktura algoritma faze 2	65
3.3.2	Kriteriji utroška resursa	67
3.3.3	Definicija preciznosti modela	67
3.3.4	Oblikovanje funkcije poželjnosti	77
<b>4.</b>	<b>Provjera i testiranje predložene metodologije, te pogodnost uporabe razvijenog algoritma</b>	<b>83</b>
4.1	Načelo uporabe algoritma faze 1 (početno oblikovanje) na simuliranom primjeru	83
4.1.1	Pronalaženje funkcija kriterija troška i utroška vremena	86
4.1.2	Formulacija funkcije poželjnosti	89
4.1.3	Generiranje niza	91
4.1.4	Kretanje vrijednosti kriterija oblikovanja pokusa	92
4.1.5	Karakteristike optimalnog modela	96
4.1.6	Utjecaj promjene granične vrijednosti poželjnosti	98
4.2	Načelo uporabe algoritma faze 2 (poboljšanje modela) na simuliranom primjeru	104
4.2.1	Definicija prirasta preciznosti modela i funkcije poželjnosti	105
4.2.2	Rezultati i odabir optimalnog plana pokusa	109
4.3	Uporaba algoritma VAOPP-a na primjeru istraživanja problema kolapsa strukture kod PE plinovodnih cijevi	113
4.3.1	Odabir pretpostavljenog modela plana pokusa i indikacija mogućih problema	114
4.3.2	Definicija funkcija utroška resursa i funkcije poželjnosti	115
4.3.3	Rezultati i izbor optimalnog plana pokusa	116
<b>5.</b>	<b>Zaključak</b>	<b>121</b>
<b>6.</b>	<b>Literatura</b>	<b>125</b>
<b>7.</b>	<b>Prilog</b>	<b>129</b>
7.1	MATLAB programski kod algoritma VAOPP-a faza 1 za problem s 2 faktora	129
7.2	MATLAB programski kod algoritma VAOPP-a faza 2 za problem s 2 faktora	135
	<b>Životopis</b>	<b>143</b>
	<b>Biography</b>	<b>144</b>



# Predgovor

Planiranje pokusa je metodologija koja se koristi u području analize utjecaja različitih faktora na svojstva proizvoda i procesa. Adekvatnim planiranjem pokusa i analizom rezultata istih olakšava se sam proces donošenja zaključka o promatranim problemima. Također, sam rezultat je oblikovan u formi koja je općeprihvaćena u istraživačkim krugovima. Generalno govoreći, uporaba planova pokusa je zastupljena u područjima ne samo tehnike, već istraživačkim područjima kemije, poljoprivrede, biologije i sl. Točnije, u situacijama gdje je moguće podvrgnuti određenu pojavu kontroliranim variranjem vrijednosti utjecajnih faktora, moguće je definirati i samu veličinu utjecaja. Trendovi unaprjeđenja proizvodnih sustava koriste različite suvremene paradigme kao što su npr.  $6\sigma$  i DMAIC metodologiju, gdje se u dijelu analize i poboljšanja intenzivno koriste statistički modeli, odnosno modeli pokusa.

Provodeći spomenutu metodologiju na problemima iz prakse nerijetko se nailazilo na ograničenja uvjetovana raspoloživim resursima. Novonastale ekonomske i gospodarstvene prilike inducirale su još veću potrebu optimiranja samih modela pokusa uz osvrt na spomenute resurse. Ovaj rad bi trebao pomoći razumijevanju odnosa utroška resursa i kvalitete dobivenih rezultata, omogućavajući istraživaču točan uvid u sve parametre oblikovanja planova pokusa te pronalaženje optimalnog modela. Predloženom metodologijom i razvijenim programskim rješenjem definiran je drugačiji pristup oblikovanju planova pokusa.

---

# Sažetak

Prilikom odabira modela planova pokusa, što je važna faza u većini znanstvenih istraživanja, potrebno je voditi računa o adekvatnosti modela, obliku rezultata koji se žele dobiti, te preciznosti modela odnosno pogrešci koja se nužno pojavljuje. Budući da se područje planova pokusa počelo razvijati, pa tako i uporabljati, u vrijeme kada je njihovom uporabom ostvarena velika ušteda u resursima, nije se dovoljno istražila mogućnost minimiziranja ostalih parametara eksperimentiranja kao što su cijena, utrošeno vrijeme i sl. Općenito se može reći da se vrlo malo istraživanja u literaturi odnosi na spomenuti problem.

Istraživanje će se, u ovom radu, odnositi na razvoj metodologije i modela koji će biti potpora pri izboru i konačnom oblikovanju planova pokusa. Cilj je istražiti odnos pogreške pokusa odabranog modela (preciznost), troškova realizacije pokusa, te vremena potrebnog za eksperimentiranje. Novorazvijeni model, koji predstavlja rezultat ovih istraživanja, trebao bi omogućiti pronalaženje optimalnih planova pokusa sa stajališta novouvedenih kriterija optimalnosti.

**Ključne riječi:** Planiranje pokusa, oblikovanje pokusa, greška pokusa, funkcija poželjnosti, trošak eksperimentiranja, metoda odzivne funkcije, centralno-kompozitni pokusi

---

# Summary

The process of choosing the experimental design is a significant phase in scientific researches. It is important to take into consideration the adequacy, the shape of results and the imprecision of the model as the side effect of error of estimation. In general, the result of using the design of experiments provides the significance benefits and cost saving. Due to limited resources like time, costs and complexity of design points realization we must take these facts in account when designing experiments. The scope of this research is to maximize the precision of model using multi-criteria approach. The study refers to research and development of the new model which will be a support in the design of experiments. The objective of study is to examine and understand the relation between prediction of variance (model precision), experiment costs, time expenditure. The new-developed model will provide a possibility of designing optimal experiments with respect to new added criteria.

**Key words:** Design of experiments, experimental design, error of design, desirability function, experimental costs, response surface methodology, central composite design

---



---

# Popis slika

<b>Slika 1-1.</b> Osnovni koraci u procesu znanstvenog eksperimentiranja	2
<b>Slika 2-1.</b> Opći model procesa	10
<b>Slika 2-2.</b> Primjer odzivne površine (slučaj s dva faktora)	13
<b>Slika 2-3.</b> Konturni dijagram odzivne površine	13
<b>Slika 2-4.</b> Odzivna površina prvog reda i linija najvećeg prirasta	16
<b>Slika 2-5.</b> CCD za 2 faktora ( $\alpha=1,414$ )	18
<b>Slika 2-6.</b> Funkcija procijenjene varijance modela za CCD s 2 faktora i 3 ponavljanja točke	19
<b>Slika 2-7.</b> Plošno centriran CCD plan pokusa i distribucija procijenjene varijance modela	20
<b>Slika 2-8.</b> Box-Behnken plan pokusa i distribucija procijenjene varijance modela	21
<b>Slika 2-9.</b> Područje operabilnosti i eksperimentalni prostor	22
<b>Slika 2-10.</b> a) Različiti modeli CCD plana pokusa obzirom na ograničenje prostora, b) primjer mogućeg ograničavajućeg faktora	23
<b>Slika 2-11.</b> Dijagram tijeka odabira plana pokusa	24
<b>Slika 2-12.</b> Interval povjerenja odzivnih vrijednosti	29
<b>Slika 2-13.</b> Prikaz kontura istih vrijednosti SPV a) nerotabilnog i b) rotabilnog plana pokusa	35
<b>Slika 2-14.</b> VDG grafički prikaz a) rotabilnih modela pokusa CCD ( $n_c=1$ i $n_c=3$ ), b) nerotabilnog modificiranog modela pokusa CCD ( $n_c=3$ )	38
<b>Slika 2-15.</b> FDS grafički prikaz za usporedbu modela pokusa CCD s jednom i tri centralne točke	39
<b>Slika 2-16.</b> 3D prikaz funkcije procijenjene varijance za slučaj 3 faktora	40
<b>Slika 3-1.</b> Indeksna notacija matrice stanja pokusa za slučaj s dva faktora	45
<b>Slika 3-2.</b> Diskretizirani eksperimentalni prostor u slučaju s tri faktora	46
<b>Slika 3-3.</b> Prikaz matrice u slojevima funkcije s tri faktora	47
<b>Slika 3-4.</b> Blok struktura algoritma faze 1	48
<b>Slika 3-5.</b> Dijagram tijeka definicije funkcije troška	50

---

---

<b>Slika 3-6.</b> Polje točkaka (stanja pokusa) i pripadajuće vrijednosti troška	51
<b>Slika 3-7.</b> Funkcija troška i prikaz ostataka u papiru vjerojatnosti normalne razdiobe	52
<b>Slika 3-8.</b> Dijagram tijeka definicije funkcije utroška vremena	54
<b>Slika 3-9.</b> Dijagram tijeka formulacije kriterija funkcije poželjnosti	56
<b>Slika 3-10.</b> Skica polja poželjnih stanja pokusa i pripadajuće matrice poželjnosti $F_p^r$	57
<b>Slika 3-11.</b> Skica bloka algoritma za generiranje niza pokusa	59
<b>Slika 3-12.</b> Usporedba vrijednosti $v(x)$ pretpostavljenog i optimiranog početnog plana pokusa	64
<b>Slika 3-14.</b> Definicija kriterija preciznosti	68
<b>Slika 3-15.</b> Funkcija $v(x)$ CCD plana pokusa s dva ponavljanja u centru i dva faktora	73
<b>Slika 3-16.</b> Funkcija $v'(x)$ CCD plana pokusa s dva ponavljanja u centru i dva faktora, te dodanom eksperimentalnom točkom $x_1, x_2 = -1,2$	73
<b>Slika 3-17.</b> Funkcija prirasta preciznosti $\Delta v(x)$ za slučaj CCD plana pokusa s 3 centralne točke i dva faktora	74
<b>Slika 3-18.</b> Funkcija prirasta preciznosti modela za slučajeve: a) CCD plan pokusa s $n_c=1$ , b) CCD plan pokusa s $n_c=5$ , c) CCD (upisani) s $n_c=3$ , d) CCF s $n_c=3$	77
<b>Slika 3-19.</b> Dijagram tijeka modificiranja plana pokusa dodavanjem eksperimentalnih točkaka po kriteriju funkcije poželjnosti	79
<b>Slika 4-1.</b> Pretpostavljeni oblik plana pokusa iz literaturnog primjera	85
<b>Slika 4-2.</b> Funkcija troška u eksperimentalnom prostoru	87
<b>Slika 4-3.</b> Funkcija utroška vremena u eksperimentalnom prostoru	87
<b>Slika 4-4.</b> Papir vjerojatnosti ostataka za funkciju troška	88
<b>Slika 4-5.</b> Papir vjerojatnosti ostataka za funkciju utroška vremena	88
<b>Slika 4-6.</b> Funkcija poželjnosti uz $k_t = 5$ i $k_v = 3$ , te uz $k_p = 0,3$	89
<b>Slika 4-7.</b> Područje poželjnih stanja pokusa uz $k_p = 0,3$	90
<b>Slika 4-8.</b> Promjena ukupnih troškova eksperimenta po iteraciji za CCF i CCD oblik uz $k_p = 0,3$	93
<b>Slika 4-9.</b> Promjena ukupno utrošenog vremena za eksperimentiranje po iteracijama za CCD i CCF oblik uz $k_p = 0,3$	94
<b>Slika 4-10.</b> Ukupna procijenjena varijanca po iteracijama za CCF i CCD oblik plana pokusa uz $k_p = 0,3$	95
<b>Slika 4-11.</b> Funkcija procijenjene varijance za optimalni plan pokusa CCF oblika uz $k_p = 0,3$	97
<b>Slika 4-12.</b> Funkcija procijenjene varijance za optimalni plan pokusa CCD oblika uz $k_p = 0,3$	97

---

---

<b>Slika 4-13.</b> Raspored točaka u eksperimentalnom području za pretpostavljeni i potencijalno optimalni plan pokusa CCD i CCF oblika uz $k_p=0,3$	98
<b>Slika 4-14.</b> Funkcija poželjnosti i formiranje polja poželjnih stanja pokusa za slučaj $k_p=0,6$	99
<b>Slika 4-15.</b> Kretanje troška i utroška eksperimentiranja po iteraciji u algoritmu za CCF i CCD oblik plana pokusa uz $k_p=0,6$	100
<b>Slika 4-16.</b> Usporedba troška eksperimentiranja pretpostavljenog modela i generiranih modela oblika CCF i CCD uz $k_p=0,6$	102
<b>Slika 4-17.</b> Usporedba utroška vremena eksperimentiranja pretpostavljenog modela i generiranih modela oblika CCF i CCD uz $k_p=0,6$	102
<b>Slika 4-18.</b> Usporedba ukupne procijenjene varijance pretpostavljenog modela i generiranih modela oblika CCF i CCD uz $k_p=0,6$	102
<b>Slika 4-19.</b> Usporedba prema D-kriteriju pretpostavljenog modela i generiranih modela oblika CCF i CCD uz $k_p=0,6$	103
<b>Slika 4-20.</b> Raspored točaka u eksperimentalnom području za pretpostavljeni i potencijalno optimalni plan pokusa CCD i CCF oblika uz $k_p=0,6$	103
<b>Slika 4-21.</b> Funkcija procijenjene varijance za potencijalno optimalni plan pokusa CCD i CCF oblika uz $k_p=0,6$	104
<b>Slika 4-22.</b> Funkcija prirasta preciznosti modela za pretpostavljeni model	105
<b>Slika 4-23.</b> Funkcija poželjnosti pretpostavljenog modela, prijedlog dodavanja eksperimentalne točke u prvoj iteraciji poboljšanja modela	106
<b>Slika 4-24.</b> Promjena funkcije poželjnosti po iteracijama	107
<b>Slika 4-25.</b> Prirast vrijednosti kriterija nakon procesa iteracija	109
<b>Slika 4-26.</b> Promjena vrijednosti D-kriterija i G-efikasnosti po iteracijama	110
<b>Slika 4-27.</b> Raspodjela procijenjene varijance pretpostavljenog i poboljšanog modela	111
<b>Slika 4-28.</b> Kretanje vrijednosti gubitka ortogonalnosti (sume produkata linearnih članova u matrici) po iteracijama	112
<b>Slika 4-29.</b> Prirast vrijednosti kriterija nakon procesa iteracija	117
<b>Slika 4-30.</b> Kretanje gubitka ortogonalnosti po iteracijama u algoritmu	118
<b>Slika 4-31.</b> Promjena vrijednosti G-efikasnosti po iteracijama	119
<b>Slika 4-32.</b> Promjena vrijednosti D-kriterija po iteracijama	119

---

---

# Popis tablica

<b>Tablica 2-1.</b> Usporedba modela kroz vrijednosti kriterija za klasične modela pokusa	32
<b>Tablica 3-1.</b> Forma unosa podataka o troškovima eksperimenta	51
<b>Tablica 4-1.</b> Stanja pretpostavljenog pokusa s procjenama troškova realizacije eksperimenta i utroška vremena	84
<b>Tablica 4.2.</b> Vrijednosti različitih kriterija po iteracijama algoritma uz $k_p=0,3$	96
<b>Tablica 4-3.</b> Kretanje vrijednosti ostalih kriterija za slučaj granične poželjnosti $k_p =0,6$	101
<b>Tablica 4-4.</b> Plan pokusa u kodiranim vrijednostima faktora za slučaj istraživanja problema kolapsa strukture PE cijevi	114
<b>Tablica 4-5.</b> Dodane eksperimentalne točke nakon procesa poboljšavanja modela, u realnim vrijednostima faktora	120

---



---

# Popis oznaka

<b>OZNAKA</b>	<b>ZNAČENJE OZNAKE</b>
$C_{T0}$	slobodni član u regresijskoj funkciji troška
$C_{Ti}$	koeficijent uz $i$ -ti član u funkciji troška
$C_{V0}$	slobodni član u regresijskoj funkciji utroška vremena
$C_{Vi}$	koeficijent uz $i$ -ti član u funkciji utroška vremena
$D(\zeta_0)$	matrica oblika inicijalnog plana pokusa
$D(\zeta_d)$	matrica oblika generiranog plana pokusa
$D'(\zeta_d)$	matrica nelineranih članova i interakcija
$E(\mathbf{y})$	očekivanje varijable $y$
$E[y(x)]$	očekivana vrijednost odziva
$f_{kriterija}$	funkcija kriterija
$F_p$	matrica funkcije poželjnosti
$F_p'$	standardizirana matrica poželjnosti
$F_{prec}(\zeta_p)$	matrica preciznosti inicijalnog plana pokusa
$F'_{prec}(\zeta_p)$	matrica preciznosti inicijalnog plana pokusa s dodanom fiktivnom točkom
$F_t$	matrica troška
$f_t$	funkcija troška eksperimenta
$F_t^r$	matrica relativnog troška
$F_v$	matrica utroška vremena
$f_v$	funkcija utroška vremena
$F_v^r$	matrica relativnog utroška vremena
$G_{eff}$	G-efikasnost modela pokusa
$I$	jedinična matrica

---

---

$\mathbf{J}$	jedinični vektor stupac
$K$	broj točaka u eksperimentalnom prostoru
$k$	broj faktora u modelu
$k_{pr}$	težinski faktor preciznosti modela
$k_t$	težinski faktor kriterija troška eksperimentiranja
$k_v$	težinski faktor kriterija utroška vremena
$\mathbf{M}$	matrica momenta
$m$	broj diskretnih vrijednosti po jednom faktoru
$N$	ukupan broj točaka pokusa
$\mathcal{N}$	mreža eksperimentalnog prostora
$\mathcal{N}_p$	skup poželjnih stanja pokusa
$n_{sp}$	broj stanja pokusa
$O$	suma produkata linearnih članova matrice plana pokusa
$p$	broj parametara prilagođenog modela
$p_{spv}$	prosječna vrijednost $v_{spv}(x)$
$Q(\zeta_d)$	preciznost modela generiranog plana pokusa
$Q_{eff}$	Q-efikasnost modela pokusa
$Q(\zeta_p)$	preciznost inicijalnog modela
$Q'(\zeta_p)$	preciznost inicijalnog modela u slučaju dodane fiktivne točke
$R$	eksperimentalni prostor
$r$	broj izvođenja pokusa
$s_{\hat{y}(x)}$	standardna pogreška modela u točki $x$
$s^2$	nepriprana procjena varijance odziva
$t_{\alpha/2}$	parametar Studentove t-razdiobe
$v(x)$	funkcija procijenjene varijance
$v_{spv}(x)$	funkcija skalirane procijenjene varijance
$V^r$	ukupna varijanca modela u odnosu na udaljenost od centra pokusa
$v'(x)$	funkcija procijenjene varijance za plan pokusa s dodanom fiktivnom točkom
$\mathbf{X}$	matrica plana pokusa

---

---

$x$	točka eksperimentalnog prostora
$\mathbf{X}(\zeta_d)$	matrica generiranog plana pokusa
$\mathbf{X}(\zeta_{opt})$	matrica optimalnog plana pokusa faze 2
$\mathbf{X}(\zeta_p)$	matrica inicijalnog plana pokusa
$\mathbf{X}'(\zeta_p)$	konačna matrica plana pokusa nakon procesa iteracija faze 2
$\mathbf{x}^{T(m)}$	vektor-redak koordinate točke
$\mathbf{x}'^{T(m)}$	vektor-redak koordinate dodane fiktivne točke
$y$	stvarna vrijednost odziva
$\hat{y}$	vrijednost regresijske funkcije (procijenjena)
$\alpha$	udaljenosti aksijalnih točaka od centra pokusa
$\beta_0$	slobodni član u regresijskoj funkciji
$\beta_i$	koeficijent uz $i$ -ti član modela u regresijskoj funkciji
$\Delta a$	korak promjene faktorskih točaka
$\Delta \alpha$	korak promjene aksijalnih točaka
$\Delta G$	razlika preciznosti između dvaju susjednih modela
$\Delta Q$	matrica prirasta preciznosti modela
$\Delta q$	element matrice $\Delta Q$
$\Delta Q^r$	standardizirana matrica preciznosti modela
$\Delta v(x)$	funkcija prirasta preciznosti modela
$\varepsilon$	čista greška
$\zeta$	oznaka promatranog modela pokusa
$\zeta_0$	inicijalni model pokusa
$\sigma^2$	varijanca odziva (odzivne funkcije)

---

# Popis kratica

<b>KRATICA</b>	<b>OBJAŠNENJE</b>
ASPV	<i>Average scaled prediction variance</i> (prosječna vrijednost skalirane procijenjene varijance)
BBD	<i>Box-Behnken design</i> (Box-Behnkenov plan pokusa)
CCD	<i>Central composite design</i> (centralno kompozitni plan pokusa)
CCF	<i>Face centered CCD</i> (plošno centriran centralno kompozitni plan pokusa)
DOE	<i>Design of experiments</i> (planiranje pokusa)
FDS	<i>Fraction of design space</i> (graf raspodjele varijance po dijelu eksperimentalnog prostora)
RGPP	Računalom generirani planovi pokusa
RSM	<i>Response surface methodology</i> (metodologija odzivne površine)
SPV	<i>Scaled prediction variance</i> (skalirana procijenjena varijanca)
VAOPP	Višekriterijsko adaptivno oblikovanje planova pokusa
VDG	<i>Variance dispersion graph</i> (graf raspodjele varijance)

---

# 1. Uvod

## 1.1 Definicija problema i pregled dosadašnjih saznanja

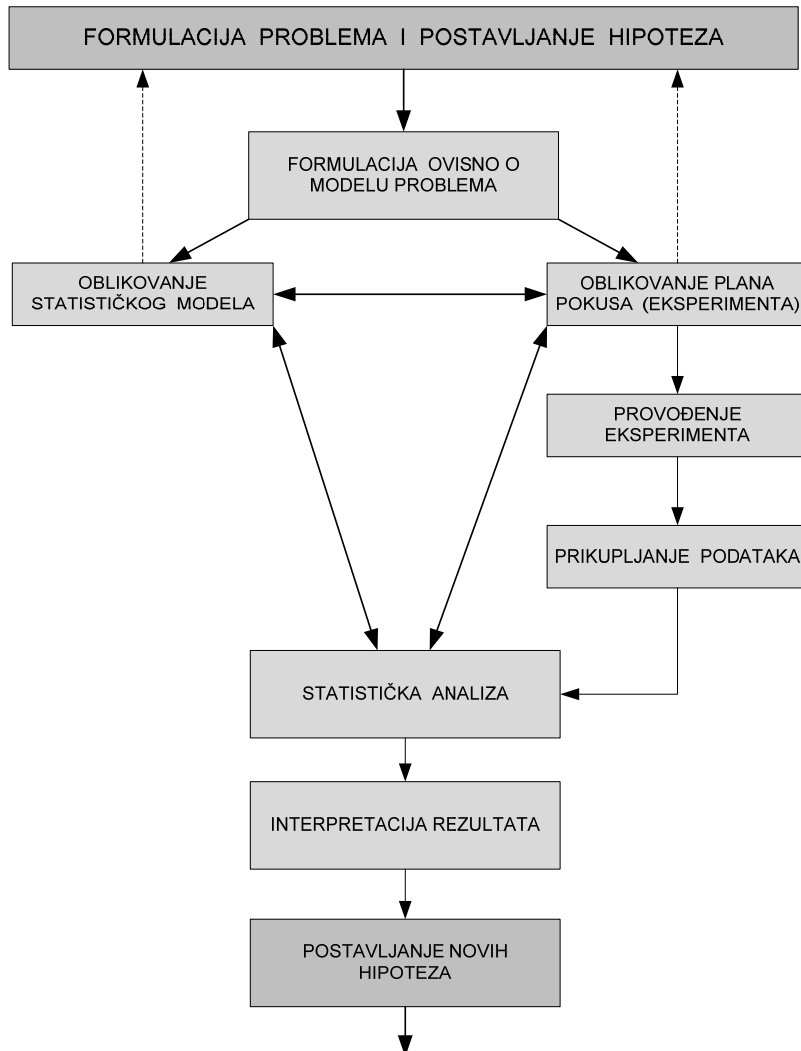
Analizom učinaka, istraživajući parametre koji značajno utječu na vrijednosti izlaznih varijabli tehnoloških i proizvodnih procesa, moguće je dobiti njihovu međusobnu ovisnost, te formulirati zakonitost pojave preko matematičkog modela. Opisana pojava se izražava u matematičkom obliku (funkcija) koji je pogodan za različite metode optimizacije. Postoje dva osnovna tipa pristupa mjerenju i analizi pojava: nekontrolirani (praćenjem procesa) što rezultira izradom regresijskog modela, te kontrolirani poznat po terminu planiranje pokusa (Douglas C. Montgomery [1]).

Jedan određeni broj istraživačkih i industrijskih modela eksperimenata biva izložen različitim problemima što u fazi ispitivanja i provedbe što u fazi obrade i analize. Nerijetko, to rezultira nepotpunim i neadekvatnim rezultatima koji onda dovode cijeli eksperiment u pitanje. Najvećim djelom je problem to što se istraživanje, pa tako i sam pokus, ne planira odgovarajuće. Također, iz dostupne prakse može se vidjeti nedostatak uporabe planiranja pokusa. Shematski prikaz osnovnih koraka u procesu definiranja eksperimenta je dan na slici **1-1**. Ti koraci se mogu podijeliti u dvije cjeline. Jedna od njih, a vezana za područje ovog istraživačkog rada, jest i razrada statističkog modela eksperimenta, prevođenje u statistički model te analiza primjenom poznatih statističkih metoda. Jednostavnije, to područje statistike se naziva planiranje pokusa (engl. *Design of experiment*).

Posljednje desetljeće primijećen je porast uporabe planiranja pokusa u svim područjima istraživanja [3]. Planiranje pokusa je jedna od nezaobilaznih metoda koja predstavlja izvrsnu podlogu za optimizaciju tehnoloških i proizvodnih procesa. Kod uporabe planova pokusa potrebno je odabrati ili oblikovati model pokusa koji će dovoljno dobro opisati promatranu pojavu, po mogućnosti uz minimalni utrošak

---

resursa. Utrošak resursa je najčešće definiran kroz materijalne troškove eksperimentiranja i potrebno vrijeme vezano za eksperimentiranje (utrošak vremena). U znanstvenom istraživanju se često događa da se istraživač nađe u situaciji da mora odabrati model pokusa uz nametnute zahtjeve izražene kroz tehnološka, financijska ili pak vremenska ograničenja (kriterije).



**Slika 1-1.** Osnovni koraci u procesu znanstvenog eksperimentiranja [20]

U istraživanjima u području strojarstva najčešće su prisutni linearni modeli višeg reda uz jedan manji dio onih jednostavnijih, modela prvog reda. Myers [4] je postavio tezu da je metoda odzivnih površina postala okvir u izradi eksperimenata u

---

industrijskim, razvojnim, proizvodnim i općenito istraživanjima pojava kontinuiranog karaktera. Iz tog razloga će se istraživanje fokusirati na nelinearne modele oblika polinoma drugog stupnja s pridodanim interakcijama koji su sastavni dio grupe pokusa iz područja metodologije odzivnih površina.

Oblikovati adekvatan plan pokusa, obzirom na više kriterija optimalnosti, postaje primarni zadatak u procesu eksperimentiranja. Kako bi se formirao što primjereniji plan pokusa potrebno je istražiti odnos utrošenih resursa u eksperimentiranju i ostvarene preciznosti modela.

Odabir modela planova pokusa jest osnovni problem eksperimentiranja. U literaturi postoje već razrađeni algoritmi koji rješavaju problem okvirnog odabira modela planova pokusa, a obzirom na prirodu pojave koja se promatra i želi opisati. U modelima planova pokusa koji se koriste za prilagođavanje odzivne površine koriste se varijable, uglavnom, kontinuiranog obilježja čime se i promatrane pojave opisuju kontinuiranom, neprekinutom funkcijom. Kontinuirano obilježje i jest karakteristično za probleme koji se promatraju u području tehnike i strojarstva [4].

Osnovni pojam koji se koristi u području eksperimentiranja kao mjera adekvatnosti dobivenog modela jest preciznost. Preciznost procjene usko je vezana za pogrešku koja se pojavljuje provedbom eksperimentalnih točaka, tj. stanja pokusa. Izražena je kroz standardnu pogrešku koja se temelji na procijenjenoj varijanci i broju ponavljanja. Standardnu pogrešku je moguće iskoristiti za definiranje intervala povjerenja koji daje konkretnu sliku o mogućoj varijaciji promatrane, mjerene pojave. Nekoliko osnovnih izraza koji služe za određivanje standardne pogreške dani su u literaturi [7].

Dosadašnja istraživanja za pronalaženje optimalnih planova pokusa bazirana su na definiciji količine informacija što proizlazi uporabom konkretnog modela. Temelje statističke analize u tom području je postavio Fisher [5] koji definira pojam informacijske matrice. Informacijska matrica jest inverzna vrijednost matrice varijanci i kovarijanci, te se naziva još i Fisher-ova informacijska matrica. Smanjenjem varijance zbog reciprociteta povećava se i vrijednost informacijske matrice. Prvi koje je razradio teoriju optimalnih planova pokusa uzevši u obzir informacijsku matricu jest J.C. Kiefer [6]. Autor je svoju motivaciju imao u radovima znanstvenika Wald-a (1943) [9] i Elfvinga (1952) [8] koji su prvi uveli pojam D-optimalnosti te ga pokušali primijeniti na probleme regresijske analize.

---

---

Prednosti uporabe optimalnih planova pokusa se očituju kroz tri osnovne stavke a to su:

- 1) Modeli se mogu optimirati kada je prostor pokusa ograničen.
- 2) Moguća je uporaba različitih tipova faktora.
- 3) Ušteda na troškovima eksperimentiranja može se ostvariti uporabom manjeg broja provedenih pokusa.

W.J. Welch je u svojem istraživanju [10] razvio algoritam koji D-optimalne pokuse ne klasificira samo po primarnom kriteriju D-optimalnosti, već uzima još jedan proizvoljan, sekundarni kriterij. Rezultat je dan u obliku kataloga mogućih D-optimalnih pokusa za svaku pojedinu vrstu odziva (linearnu, kvadratnu...). U istraživanju se ne navodi korištenje drugih, sekundarnih kriterija kao npr. trošak eksperimenta po stanju pokusa, utroška vremena i sl.

Nakon definicije D-optimalnosti uvedeni su i drugi važniji pojmovi: A-optimalnost, E-optimalnost, G-optimalnost, I-optimalnost te V-optimalnost. To su kriteriji po kojima je moguće pronaći optimalni plan pokusa obzirom na neki od zahtjeva kao što su: maksimiziranje determinante matrice plana pokusa, smanjenje varijance i sl. Na temelju kriterija G-optimalnosti koji se bazira na određivanju procijenjene varijance Giovannitti-Jensen i Myers [11] su razvili prvu grafičku metodu za određivanje svojstava procijenjene varijance na cijelom eksperimentalnom prostoru. Grafičke metode kao način prikazivanja preciznosti modela su se počele intenzivno razvijati od 1989. godine što se spominje u sažetom radu Andre I. Khuri-ja [12]. Autori su svoja istraživanja prezentirali u radovima [11] i [13] u kojima su se bazirali na dvije osnovne metode VDG ("*Variance dispersion graph*") i FDS ("*Fraction of design space*"). Grafičke metode ne daju kompletnu sliku u slučajevima nesimetričnosti eksperimentalnog prostora koji se može pojaviti kada postoje određeni ograničavajući kriteriji. Uporabom QDG ("*Quantile dispersion graph*") objavljenom u radovima [14], [15] i [16] moguće je za svaku proizvoljnu točku odrediti nepreciznost modela. Teorijska podloga grafičkih metoda bit će jedno od polazišta ovog istraživačkog rada.

Kao jedan od drugačijih kriterija spominje se kriterij troškova eksperimenta pod nazivom "*Quasi-economic*" analiza [7]. Bit analize je okvirno određivanje broja stanja pokusa koji će se izvoditi, a obzirom na trošak (cijenu). Trošak je izražen kao linearna funkcija broja izvedenih stanja pokusa bez varijacija koje se mogu dogoditi u

---



slučaju analize većeg broja uzoraka. Nedostatak je taj da se funkcija odziva postavlja preko općenitog oblika i ne povezuje se s drugim kriterijima optimalnosti kao npr. kriterijem preciznosti modela. Kao i u dosadašnjim istraživanjima ovog znanstvenog područja, tako i nakon prije spomenutog istraživanja, mogućnost uporabe sekundarnih kriterija optimalnosti i dalje ostaje nedovoljno istražena.

Sve šira uporaba planova pokusa u istraživačkom radu implicira potrebu proširenja pojma optimalnosti kroz višekriterijski i adaptivni pristup, a sve kako bi se planiranje i oblikovanje planova pokusa upotpunilo i nekim do sada zanemarenim aspektima.

## 1.2 Hipoteza rada

Iz prethodnog uvoda može se definirati i cilj ovoga istraživanja, a to je razvoj novih modela (postupaka) oblikovanja planova pokusa pri čemu se u obzir uzima više različitih kriterija vezanih za realizaciju pokusa. Model će biti razrađen metodološki, realiziran u formi algoritma, koji za početne ulazne parametre plana pokusa i zadane kriterije utroška resursa daje prijedlog optimalnog plana pokusa.

Hipoteza rada se može sažeti u sljedećem obliku: uporabom novorazvijenog modela oblikovanja planova pokusa bit će moguće definirati optimalni model pokusa obzirom na postavljena ograničenja utroška resursa, kako u početnoj fazi oblikovanja tako i u naknadnom procesu modifikacije i adaptiranja polaznog modela pokusa.

## 1.3 Metodologija i plan istraživanja

Istraživanje je koncipirano na način da se poznatim metodama statističke analize te uporabom računalnih simulacija istraži i razvije model višekriterijskog adaptivnog oblikovanja planova pokusa (u nastavku VAOPP). Nakon razvijenog modela isti će se testirati na različitim problemima realnih i djelomično simuliranih problema oblikovanja pokusa kako u početnoj fazi tako i u fazi modifikacije i poboljšanja.

Istraživanje će se provoditi u nekoliko koraka:

**Pregledom literature** iz područja problema pronalaženja optimalnih modela planova pokusa sažet će se neke standardne metode oblikovanja planova pokusa. Analizom već postojećih tipova planova pokusa definirat će se najčešće formulacije

---

---

preciznosti modela navedene u relevantnim literaturnim izvorima. Forma preciznosti modela će se primijeniti nad cijelim eksperimentalnim prostorom prethodno definiranim u općem obliku (u kodiranim razinama faktorima). Tako definirana preciznost modela će postati jedan od kriterija koji će se uzeti prilikom oblikovanja plana pokusa.

Preko numerički modeliranog algoritma će se definirati kriterij preciznosti modela koristeći usvojene činjenice postojećih kriterija optimalnosti. Korištena teorijska podloga se u jednom dijelu odnosi na funkciju koja izražava procijenjenu varijancu modela u eksperimentalnom prostoru. Procijenjena varijanca jest funkcija koja za varijablu uzima kombinaciju faktora modela (stanja pokusa) te na temelju odnosa i broja točaka daje vrijednost procijenjene varijance u svakoj točki pokusa. Preciznost modela će biti izražena kroz funkciju preciznosti koja je upravo rezultat prirasta preciznosti odzivnog modela (smanjenje funkcije procijenjene varijance) kada se pojedinačno uključuju točke u model pokusa. Preciznije, to je razlika sume varijanci cijelog područja početnog i modificiranog modela proširenim pojedinim točkama pokusa. Takav izraz treba definirati koliko uključivanje konkretne točke u model pokusa povećava preciznost konačnog odzivnog modela. Kako su faktori kontinuiranog tipa tako je i procjena varijance kontinuirana te se prema tome odnosi kao kontinuirana neprekinuta funkcija.

Zbog jednostavnijeg proračuna eksperimentalni prostor će se diskretizirati na način da se upotrijebi optimalna veličina diferencijalnog elementa koji će dovoljno dobro aproksimirati kontinuiranost. Rezultat funkcije preciznosti biti će zapisan u formi matrice ili  $n$ -dimenzionalnog polja, što pak ovisi o broju faktora uključenih u model.

Kriteriji utroška resursa kao što su trošak i vrijeme također će biti izraženi u obliku funkcije. Ulazni podaci za pojedini kriterij bit će izraženi kao pretpostavka ili stvarna vrijednost konkretnog kriterija. Prilagodбом funkcije (regresijskim pristupom) će se aproksimirati vrijednosti na cijelom eksperimentalnom području. Obzirom da će se kriteriji utroška resursa (funkcija troška i utroška vremena) stavljati u odnos s funkcijom preciznosti potrebno je diskretizirati eksperimentalni prostor s istim brojem elemenata kao i za prethodni kriterij. Priprema za daljnju obradu će biti formiranje matrice troška i matrice utroška vremena.

---

Prethodno definirani kriteriji će se staviti u međusobni odnos preko unaprijed definiranih težinskih faktora svakog kriterija formirajući novu funkciju, funkciju poželjnosti. Matričnim zapisom će se aproksimirati oblik funkcije poželjnosti. Funkcija poželjnosti u takvom obliku će se moći koristiti kao podloga pri odabiru ili modifikaciji (adaptiranju) modela pokusa.

**Faza razvoja algoritma** će biti usmjerena ka generiranju kataloga modificiranih planova pokusa dogradnjom i modifikacijom točaka pokusa po načelu maksimalne vrijednosti kriterija funkcije poželjnosti. Svaki od generiranih modela pokusa će biti potkrijepljen informacijama o trenutnoj vrijednosti glavnih kriterija i vrijednostima poznatih i za ovaj problem interesantnih kriterija kao što su D, G i V kriteriji. Nakon usporedbe generiranih modela pokusa optimalni model pokusa će biti onaj čije su vrijednosti kriterija najbliže optimumu. Promatranjem vrijednosti kriterija za određeni model pokusa bit će moguće donijeti kvalitetniju odluku o tome koji je oblik pokusa najbolji.

Izrada algoritma i realizacija samog modela će biti izvršena uporabom programskog paketa Matlab 6.5 koji je dostupan za korištenje akademskoj zajednici u nekomercijalne svrhe.

**Razvijeni model** bit će testiran na tipičnim, realnim primjerima iz literaturnih izvora ali i dostupne prakse. Uporabom računalnih eksperimenata simulirat će se razne varijante konkretnih problema koji se mogu pojaviti u procesu eksperimentiranja. Dobivena rješenja će se uspoređivati s rezultatima metoda oblikovanja pokusa gdje se koriste klasični kriteriji. Rezultat procjene pogodnosti novorazvijenog modela će biti potkrijepljen standardnim parametrima evaluacije optimalnosti uz eksplicitno iskazane vrijednosti novouvedenih kriterija oblikovanja eksperimenta.

## 1.4 Očekivani znanstveni doprinos

Očekuje se da će rad definirati postupak oblikovanja i modifikacije modela planova pokusa, iz područja metoda odzivnih površina, obzirom na novouvedene kriterije optimiranja, a što se do sada u literaturnim izvorima ne navodi kao predmet istraživanja.

---

Uporaba novorazvijenog modela olakšat će fazu planiranja, konačnog izbora i modifikacije plana pokusa, na način da će dati potpunu sliku o varijanti odabranog modela i ostvarenim vrijednostima postavljenih kriterija. Takav model postaje potpora u odlučivanju pri izboru oblika plana pokusa. Točnost rezultata te kratko vrijeme kojim istraživač dolazi do prijedloga modela pokusa bi trebalo biti jedno od mogućih i poželjnih pristupa oblikovanju planova pokusa.

---

## 2. Osnove oblikovanja planova pokusa

U ovom poglavlju dat će se presjek osnovnih pojmova vezanih za oblikovanje planova pokusa. Obrazložiti će se postojeći kriteriji oblikovanja planova pokusa te njihove prednosti i mane. Za svaki pojedini kriterij ili svojstvo, koji će poslužiti u razvoju algoritma višekriterijskog adaptivnog oblikovanja plana pokusa, dat će se kratki kritički osvrt. Izložena teorijska podloga u ovom poglavlju olakšat će praćenje sljedećih poglavlja u kojima će biti obrazložen postupak razvoja algoritma kako na metodološkoj razini tako i na razini formiranja programskog koda.

### 2.1 Osnovni koncepti u istraživanju pojava i procesa

Kako bi se optimizacija mogla provesti potrebno je definirati vezu između promatrane pojave ili procesa i utjecajnih faktora. Dva osnovna načina pristupa istraživanju procesa i pojava su: pristup upotrebom planiranih pokusa i pristup upotrebom 'historijskih' podataka.

1. Pristup upotrebom 'historijskih' podataka:

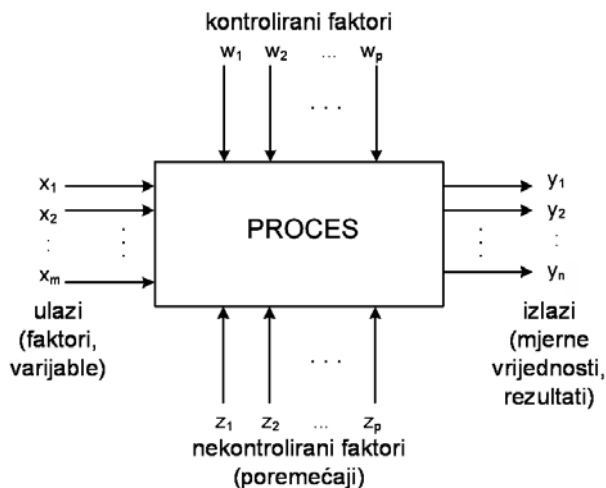
Prvi pristup pronalaženja odzivne funkcije u istraživanju zakonitosti pojava ili procesa jest uporaba empirijskih (historijskih) podataka. Ovaj pristup je pogodan kada ne postoji mogućnost kontrole faktora u procesu zbog raznih ograničenja vezanih za kontinuiranost procesa (proizvodnju) ili visok trošak klasičnog ispitivanja. Tipična situacija jest nemogućnost zaustavljanja proizvodnje i izvođenje pokusa po planu jer to povlači za sobom ne samo dodatne troškove već zahtijeva drugačije postavke promatranih kontroliranih faktora. Takav pristup ograničava količinu informacija koju je moguće dobiti nakon analize te se preporuča izbjegavati kada je to moguće. Osnovni model

---

provođenja istraživanja po ovom načelu jest uporaba regresijske analize. Ovisno o broju nezavisnih varijabli regresijska analiza može se podijeliti na jednostruku ili višestruku, te ovisno o obliku utjecaja pojedinih nezavisnih faktora na linearnu i krivolinijsku. Regresijsku analizu je potrebno shvatiti i kao dio analize bilo kojeg planiranog pokusa jer kao rezultat na kraju daje oblik odzivne funkcije sa svim utjecajnim parametrima i koeficijentima.

## 2. Pristup upotrebom planiranih pokusa:

Koncept planiranja pokusa je baziran na mogućnosti kontrole utjecajnih faktora u istraživanom procesu, te oblikovanje modela po stohastičkom načelu, a radi eliminacije utjecaja nekontroliranih faktora u procesu što je prikazano i na slici **2-1**. Planiranje pokusa se svodi na odabir adekvatnog modela pokusa iz već postojećeg kataloga pokusa, ili oblikovanjem, a uzimajući u obzir ograničavajuće faktore u problemu, ili pak neke od kriterija optimalnosti.



Slika 2-1. Opći model procesa [1]

U ovisnosti o odzivu koji se želi dobiti može se odabrati tip pokusa koji se dodatno oblikuje odabirom ili modifikacijom željenih stanja pokusa (točaka), a vezano za različite promjene zahtjeva (rješenja) ili oblika rezultata.

---

## 2.2 Pokusi za prilagođavanje odzivne površine (metodologija odzivne površine)

Metodologija odzivne površine (engl. *Response Surface Methodology, RSM*) je sažetak matematičkih i statističkih metoda kojima se modeliraju i analiziraju utjecaji nekoliko faktora (nezavisne varijable) na promatrani odziv. Kada se jednom ustanovi zakonitost ili odnos nezavisnih varijabli preko matematičkog oblika, odzivne funkcije, takav oblik opisa pojave može poslužiti za donošenje konkretnih zaključaka o prirodi pojave i biti dobrom podlogom optimiranju poznatim metodama optimizacije. U prošlom stoljeću RSM se razvijao na području pokusa vezanih za istraživanje procesa u kemijskoj industriji, nakon čega se uporaba proširila i na ostala područja industrijskih i znanstveno istraživačkih područja, posebice u područjima razvoja novih materijala i postupaka [1]. Stoga se može zaključiti da je metoda odzivne površine postala jednim od osnovnih alata u planiranju i analizi pokusa.

Danas je nezamislivo planirano eksperimentiranje bez uporabe suvremenih programskih paketa koji se bave područjem planiranja i analize pokusa, a sadržavaju tehnike planiranja i optimizacije koje su bazirane na metodologiji odzivne površine. Kao jedan od poznatijih u području planiranja i analize pokusa jest i programski paket Design Expert [17], koji će biti jedan od pomoćnih alata u analizi rezultata ovog istraživanja.

### 2.2.1 Koncept metodologije odzivne površine

Osnovna ideja metodologije odzivne površine jest dobiti odnos utjecajnih (nezavisnih) faktora na zavisnu varijablu (odziv) kroz odzivnu funkciju. Također je moguće razlučiti efekte pojedinih članova modela, kao glavne efekte ili interakcije. Kao uvjet za uporabu RSM-a trebaju postojati barem dvije nezavisne varijable ( $x_1$  i  $x_2$ ) i jedna zavisna varijabla ( $y$ ). Rezultat procesa (zavisne varijable) je moguće formulirati preko izraza:

$$y = f(x_1, x_2) + \varepsilon, \tag{1}$$

gdje je  $\varepsilon$  pogreška ili šum koji se javlja u odzivu  $y$ . Nadalje, očekivana vrijednost odziva može se formulirati preko sljedećeg izraza:

---

---


$$E(y) = f(x_1, x_2) \quad (2)$$

To je ujedno i oblik odzivne površine. Odzivna površina može se i prikazuje se grafički u cijelom eksperimentalnom području, području mogućih kombinacija faktora.

Na slici **2-2** je prikazan primjer odzivne površine samo s dva faktora zbog jednostavnosti prikaza. Kako bi se lakše vizualizirala odzivna površina dvodimenzionalnim prikazom, upotrebljava se i konturni dijagram. U suštini konturni dijagram daje konture odzivne površine kao što je i prikazano na slici **2-3**.

Linije konstantnog odziva (konture) su nacrtane u ravnini  $x_1x_2$ . Svaka kontura odgovara određenoj vrijednosti (visini) odzivne površine. Prikaz kontura je koristan u proučavanju promjena razina  $x_1$  i  $x_2$  koje rezultiraju promjenom oblika ili visine odzivne površine, a koristit će se u daljnjem radu i pri prikazivanju ostalih parametara poput standardne pogreške.

U većini RSM problema, oblik veze između odziva i nezavisnih varijabli je nepoznat. Prema tome, prvi korak u RSM metodi je traženje odgovarajuće aproksimacijske veze  $y$  i nezavisnih varijabli. Obično se koristi polinom nižeg reda u odgovarajućim područjima nezavisnih varijabli  $x_i$ . Ako je odziv moguće dobro modelirati linearnom funkcijom nezavisnih varijabli, tada je aproksimacijska funkcija model prvog reda:

$$y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \dots + \beta_kx_k + \varepsilon \quad (3)$$

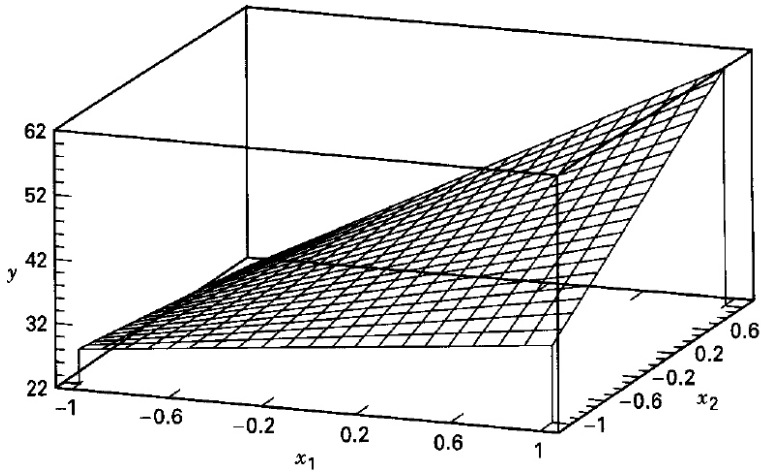
U slučaju da postoji nelinearnost i da linearna funkcija nije odgovarajuća aproksimacija odziva potrebno je koristiti polinom višeg stupnja. Budući da je to tipičan slučaj u problemima koji će se razrađivati u ovome radu, najčešće će se upotrebljavati model odziva drugog reda:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \sum_{j=2} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (4)$$

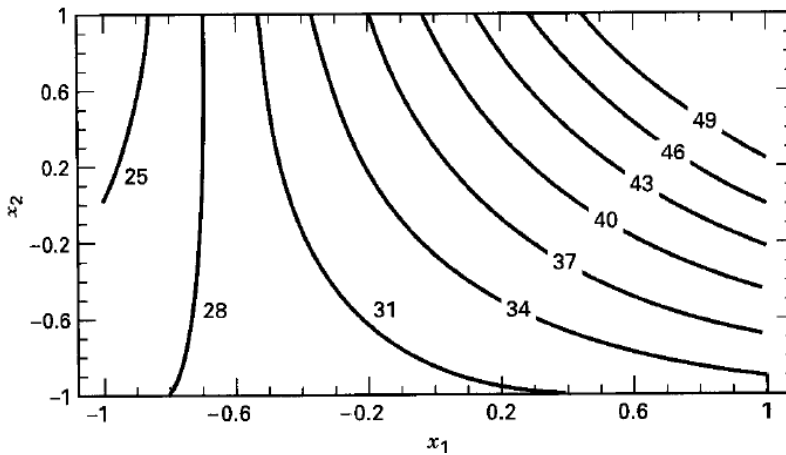
Naravno, malo je vjerojatno da će model polinoma biti prihvatljiva aproksimacija odziva za cijelo područje nezavisnih varijabli, a izvan područja eksperimentalnog prostora. Stoga je funkcija odziva određena granicama granicama eksperimentalnog prostora.

---





Slika 2-2. Primjer odzivne površine (slučaj s dva faktora)



Slika 2-3. Konturni dijagram odzivne površine

U većini literature, a posebice [1],[3] i [4], navodi se kako se funkcija odziva može koristiti na području eksperimentalnog prostora te jedan određeni dio izvan njega (ekstrapolacija), i to 10-15%. Tu činjenicu je moguće potkrijepiti i razvojem standardne pogreške modela preko eksperimentalnog prostora čiji oblik pokazuje trend iznimnog povećanja nepreciznosti izlaskom iz definiranog prostora eksperimentiranja. Područje eksperimentalnog prostora je poželjno što detaljnije opisati, upotrebom dovoljno guste mreže. U praksi postaje neizvedivo imati gustu mrežu (kombinacija faktora i vrijednost odziva) koja generira preveliki broj eksperimentalnih točaka. Iz tog razloga će polazište biti u minimalnom potrebnom

---

broju eksperimentalnih točaka, što za posljedicu ima i smanjenje utroška resursa, a što je ujedno i predmet ovoga istraživanja.

Bit metode određivanja koeficijenata jest metoda minimiziranja sume kvadrata odstupanja. Procjene koeficijenata  $\beta$  su vrijednosti parametara koje minimiziraju sumu kvadrata modela. Nakon određivanja koeficijenata funkcije odziva radi se analiza i test adekvatnosti odzivne funkcije (odzivne površine). Ako je prikladna površina dobra aproksimacija stvarne odzivne funkcije, tada će analiza prikladne površine biti jednaka analizi cijeloga sustava (procesa).

Konačni cilj RSM-a je određivanje optimalnih uvjeta procesa i sustava, ili utvrđivanje područja faktora u kojem su radne specifikacije ili ograničenja zadovoljena.

Također je bitno naglasiti da se riječ "optimum" u RSM-u koristi u određenom, lokalnom smislu. Proces optimizacije RSM-a, nekom od poznatih metoda pronalaženja optimuma ([4], [8], [18]) daje kao rezultat lokalni optimum. U slučaju da je početni pokus, definiran eksperimentalnim područjem, u području globalnog optimuma, tada će rezultat optimizacije biti ujedno i globalni optimum. Metoda strmog uspona je jedna od najčešće korištenih metoda približavanju područja eksperimenta globalnom optimumu [19].

## **2.2.2 Metoda pozicioniranja pokusa u područje optimuma – metoda strmog uspona**

Često je prvotna procjena optimalnih radnih uvjeta sustava i procesa, ili ekstrema pojave, dalje od stvarnog optimuma. Pozicioniranjem pokusa u područje koje se istraživaču čini kao moguće interesno područje (ispitivanje ekstremnih vrijednosti – optimuma), može eksperiment pretvoriti u skup i dugotrajan proces. U takvim okolnostima, cilj izvođača pokusa je brzo i učinkovito pozicioniranje što bliže optimumu. Težnja je da se koristi jednostavnost, učinkovitost i ekonomičnost postupka.

Jedna od najčešćih metoda pronalaženja područja optimuma jest metoda strmog uspona (engl. *Method of steepest ascent*). Pretpostavka od koje polazi metoda jest aproksimacija odziva modelom prvog reda (izraz 5), koji je pak adekvatan zbog jednostavnosti izračuna i dovoljne količine informacija koju generira. Budući da je

---

---

odziv aproksimiran modelom prvog reda potrebno je voditi računa i o području koji se obuhvaća (manji dio eksperimentalnog prostora).

Metoda strmog uspona se svodi na postupak kretanja u pravcu maksimalnog povećanja odziva (linija najveće promjene vrijednosti). U slučaju potrebe pronalazaženja minimuma, ako bi to bila namjera istraživanja, tada bi se ovaj postupak mogao nazvati i "metoda strmog silaska".

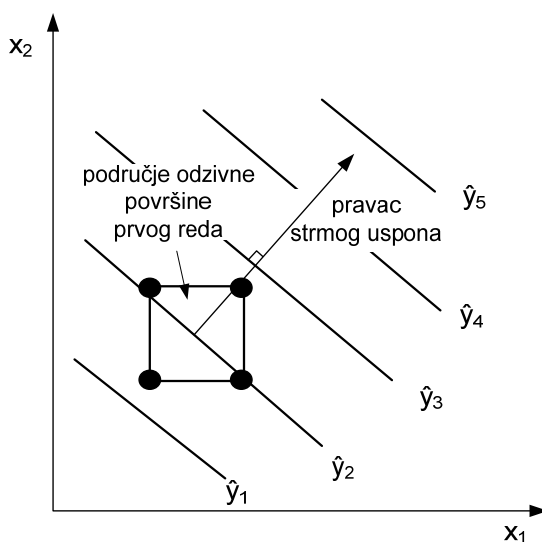
$$\hat{y} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \quad (5)$$

Prikladan model prvog reda te odzivna površina prvog reda prikazani su na slici **2-4**. Konture odzivnih vrijednosti prikazane su nizom paralelnih pravaca. Linija najveće promjene vrijednosti  $\hat{y}$  je pravac koji je okomit na konture prilagođene odzivne površine. Prema formiranoj liniji najveće promjene, koraci u tome smjeru su proporcionalni regresijskom koeficijentu  $\beta_i$ . Izvođač pokusa utvrđuje stvarni iznos kretanja duž linije na temelju informacija o promatranom procesu ili pojavi, te na temelju iskustva tj. izbjegavajući moguća ograničenja.

Generirani pokusi, s minimalnim brojem stanja pokusa, se provode duž linije strmog uspona dok više nema daljnje promjene odziva u željenom smjeru ili dok ne postigne interesno područje odziva. Ako je potrebno može se formirati novi model prvog reda koji rezultira novom linijom najveće promjene sve dok se ne zadovolji uvjet blizine optimumu.

Prednost uporabe ove metode jest korištenje malih, jednostavnih modela pokusa te određena fleksibilnost u odabiru smjera daljnjeg pozicioniranja pokusa. Jednostavnost modela se očituje u minimalnom broju stanja pokusa koja se moraju izvesti kako bi rezultat sadržavao dovoljno informacija za formiranje linije najveće promjene. Tipično se koristi jednostavni faktorski plan pokusa na dvije razine,  $2^k \cdot r$ . Broj ponavljanja stanja pokusa nije nužan u ovoj fazi istraživanja stoga je uobičajeno da je  $r=1$  [4].

---



**Slika 2-4.** Odzivna površina prvog reda i linija najvećeg prirasta

Nakon pronalazaženja optimalnog područja, tj. područja interesa, potrebno je pozicionirati, odabrati i oblikovati plan pokusa koji će dovoljno dobro opisati proces, pojavu obzirom na mogući oblik i karakteristiku. Kao što je već u uvodnom poglavlju naglašeno, najčešće se koriste modeli pokusa koji daju odzivnu površinu drugoga reda zbog obuhvaćanja nelinearnosti. Prikladan model odziva površine drugoga reda je dan izrazom (4).

Metoda pronalazaženja i pozicioniranja u područje interesa istraživača bit će preduvjet za apliciranje novorazvijenog modela višekriterijskog adaptivnog oblikovanja planova pokusa. Obzirom da se tek pozicioniranjem u područje interesa istraživanja oblikuje ili odabire plan pokusa, uporaba novorazvijenog modela bit će moguća u završnoj fazi oblikovanja.

### 2.2.3 Modeli pokusa za prilagođavanje odzivne površine

Većina slučajeva koji se susreću u području strojarstva i tehnike, su slučajevi gdje je prisutna prilagodba modela drugoga reda. Shvaćajući potrebu prilagođavanja modela drugoga reda, potrebno se držati osnovnih načela (ograničenja) oblikovanja pokusa. Prvi od njih je ograničenje minimalnog broja razina svakog faktora, koji

iznosi 3. Drugo ograničenje je da mora postojati minimalni broj različitih stanja pokusa koji se može izraziti:

$$\min(n_{\text{sp}}) = 1 + 2k + \frac{k(k-1)}{2} \quad (6)$$

gdje je  $k$  broj faktora.

Uvažavajući već spomenute činjenice oko metodologije odzivne površine, moguće je navesti nekoliko najčešćih oblika planova pokusa:

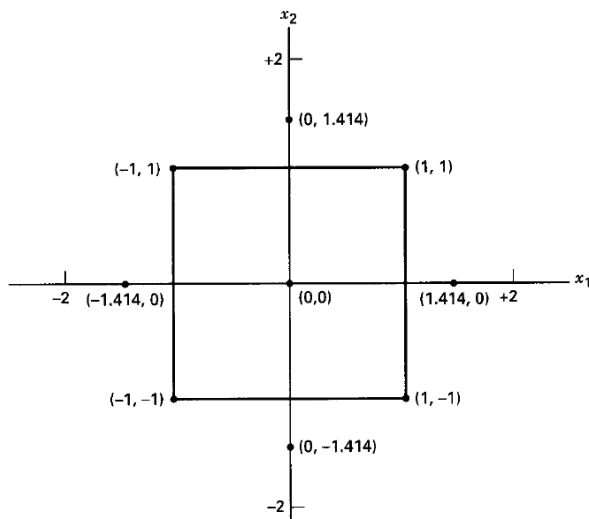
- Centralno kompozitni plan (engl. *Central composite design, CCD*)
- Plošno centriran kompozitni plan –  $\alpha=1$  (engl. *Face centred composite design, CCF*)
- Box-Behnken (*BBD*)
- Faktorski plan pokusa na tri razine,  $3^k \cdot r$

Svaki standardni plan pokusa vezan ili uporabljen u izradi algoritma višekriterijskog adaptivnog oblikovanja plana pokusa će se kratko opisati na način da će se istaknuti neke od bitnih značajki. Kao jednu od posebnih kategorija, ali sve prisutniju u istraživačkom eksperimentiranju navode se računalom generirani planovi pokusa, koji će poslužiti u izradi programskog koda VAOPP.

### 2.2.3.1 Centralno kompozitni planovi pokusa

Centralno kompozitni planovi pokusa spadaju u klasu planova pokusa koja je najčešća u metodologiji odzivne površine. Ideja formiranja centralno kompozitnog plana pokusa je većim djelom bila potaknuta potrebom sekvencijalnog eksperimentiranja, tj. dogradnje postojećih faktorskih planova pokusa tipa  $2^k \cdot r$  [21]. Razvojem, tj. dodavanjem centralnog stanja pokusa te stanja pokusa jednako udaljenih od centralne točke (aksijalnih točaka) na postojeći faktorski plan pokusa na dvije razine (rezolucije V) formira se CCD. Centralno kompozitni plan pokusa je ujedno i alternativa  $3^k \cdot r$  jer je broj izvođenja smanjen u usporedbi s potpunim faktorskim modelom pokusa pogotovo u slučaju više od tri faktora.

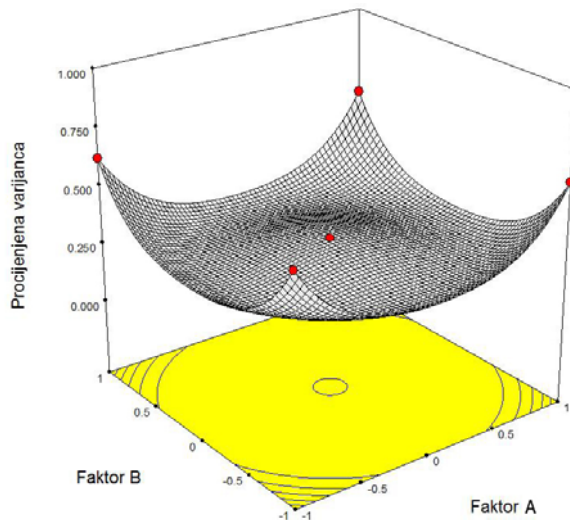
Rezultat je plan pokusa koji je optimalan, u pogledu minimalne varijance, za modele jednostavnog prvog reda i modele prvog reda s interakcijama prvog reda



**Slika 2-5.** CCD za 2 faktora ( $\alpha=1,414$ )

(interakcija dvaju faktora). Centralna točka daje informaciju o nelinearnosti u odzivu, dok aksijalne točke daju mogućnost efikasne procjene parametara drugog reda. Ukupno gledajući, svaki faktor varira se na 5 razina, tako da na tu činjenicu treba obratiti pažnju, a zbog kompleksnosti izvedbe pokusa. Na slici 2-5 je prikazan model centralno kompozitnog plana pokusa za dva faktora. U prvom slučaju je udaljenost aksijalnih točaka  $\alpha=1,414$  (općenito  $\sqrt{k}$ ) što omogućava dodatno svojstvo rotabilnosti što će se detaljnije obrazložiti u narednim poglavljima. Svojstvo distribucije varijance nad eksperimentalnim prostorom je prikazano na slici 2-6. Iz slike je vidljivo da CCD s tri točke u centru ima bitno smanjenu varijancu (procjenu varijance) uz važnu karakteristiku dobre procjene čiste pogreške. Stoga se može zaključiti da broj centralnih točaka  $n_c$  često bitno utječe na distribuciju procijenjene varijance u eksperimentalnom području. Gledajući samo pozicioniranje odabranog CCD plana pokusa u eksperimentalni prostor (prostor interesa) on može biti u dva osnovna oblika: upisani CCD (engl. *Inscribed CCD*) i opisani CCD (engl. *Circumscribed CCD*). Stoga će se ta činjenica koristiti prilikom razrade problema početnog oblikovanja plana pokusa. CCD plan pokusa je jedan od planova pokusa koji će služiti kao generički plan u strukturi algoritma za višekriterijsko adaptivno

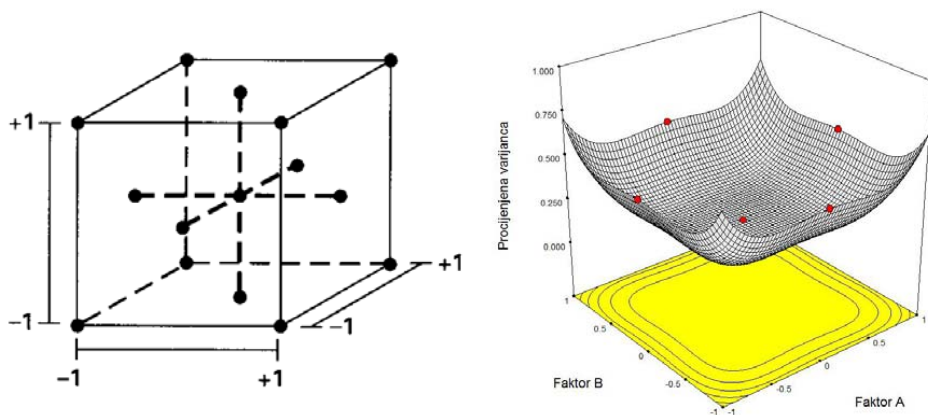
oblikovanje pokusa, točnije u njegovoj prvoj fazi. Promjenom parametra udaljenosti aksijalnih točaka od centra, pa tako i dimenzije (razmaka) glavnih razina, generirat će se različite veličine CCD pokusa. U drugoj fazi algoritma će se takav model moći dodatno poboljšati i razraditi na način koji će biti naveden u kasnijoj razradi problema, tj. opisu pojedinih logičkih cjelina algoritma.



**Slika 2-6.** Funkcija procijenjene varijance modela za CCD s 2 faktora i 3 ponavljanja točke

### 2.2.3.2 Plošno centriran kompozitni plan pokusa

Plošno centriran centralno kompozitni plan pokusa (CCF) je varijanta centralno kompozitnog plana pokusa uz uvjet  $\alpha=1$ . CCF plan pokusa ne koristi aksijalne točke koje su jednake udaljenosti od centra kao što su udaljene vršne točke od centra, već padaju na sredinu stranice (u slučaju 2 faktora), odnosno na ploh (u slučaju 3 i više faktora). Karakteristično za taj plan pokusa jest da nije rotabilan, tj. raspodjela procijenjene varijance nije ujednačena u svim točkama jednako udaljenim od centra (Slika 2-7). Uporaba ovog plana pokusa je u slučaju kada prave aksijalne točke na udaljenostima  $\pm\sqrt{k}$  nisu izvodljive zbog nekih od mogućih ograničenja (primjer: tehnoloških ograničenja). Tada se te aksijalne točke pomiču prema centralnoj točki na udaljenost od  $\pm 1$ . Na slici 2-7 je prikazana distribucija procijenjene varijance za primjer CCF plana pokusa s 2 faktora.



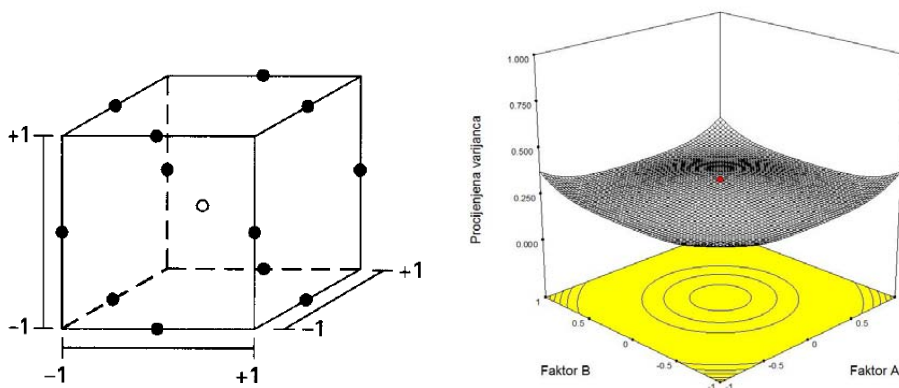
**Slika 2-7.** Plošno centriran CCD plan pokusa i distribucija procijenjene varijance modela

Isto kao i za prethodni CCD oblik plana pokusa, za CCF oblik plana pokusa može se reći da će biti iskorišten u fazi početnog oblikovanja algoritma VAOPP. Njegova karakteristika detaljnog opisivanja kvadratnih (kubnih) prostora bit će iskorištena u pronalaženju optimalnog plana pokusa za konkretan oblik prostora koji treba definirati.

### 2.2.3.3 Box-Behnken plan pokusa

Plan pokusa koji spada u skupinu nezavisnih kvadratnih planova pokusa koji nije baziran na punom ili djelomičnom faktorskom planu pokusa, tj. ne sadrži točke na vrhovima pokusa. U ovom planu pokusa kombinacije razina faktora sačinjavaju glavna stanja pokusa, koja su na polovicama stranica eksperimentalnog prostora, uz centralnu točku. Ovakav plan pokusa može se smatrati rotabilnim (ili vrlo blizu tome) s naglaskom da se koriste 3 razine svakog faktora. Prednost uporabe ovakvog plana pokusa jest u slučaju ograničenja eksperimentalnog prostora nemogućnošću izvođenja stanja pokusa na vrhovima eksperimentalnog prostora (primjerice stanje pokusa  $+1,+1$ ), te smanjeni broj razina svakog faktora, a time i smanjeni broj stanja pokusa. Smanjeni broj stanja pokusa je prednost kod modela do 4 uključena faktora jer tada ta prednost više nije izražena, stoga se preporuča uporaba klasičnog CCD plana pokusa [24]. Na slici 2-8 je prikazana struktura Box-Behnken plana pokusa (BBD) te distribuciju procijenjene varijance modela za primjer s 3 faktora.





Slika 2-8. Box-Behnken plan pokusa i distribucija procijenjene varijance modela

Istražujući vrijednosti procijenjene varijance modela u prostoru omeđenom glavnim razinama faktora, može se zaključiti da su vrijednosti u prosjeku manje nego u slučaju CCD plana pokusa. Ako se pak izađe iz prostora omeđenog glavnim razinama i promotri vrijednosti procijenjene varijance u tom pojasu, moguće je zaključiti da BBD oblik plana pokusa imaju značajno veće vrijednosti nego CCD plan pokusa. Ta činjenica će biti uzeta u obzir kada će se odabirati početni model u prvoj fazi algoritma VAOPP.

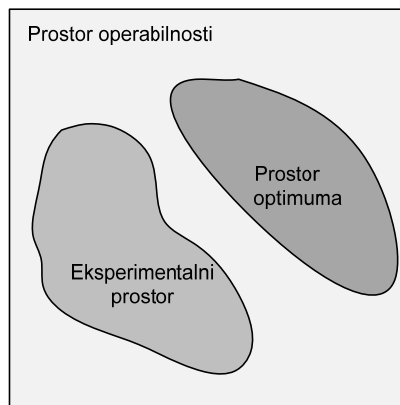
#### 2.2.3.4 Faktorski plan pokusa na tri razine, $3^k \cdot r$

Faktorski planovi pokusa tipa  $3^k \cdot r$  su adekvatni ako se radi o pravilnom kubičnom eksperimentalnom prostoru te nema ograničenja obzirom na broj stanja pokusa koji se trebaju izvesti. Takav plan pokusa ima vrlo slične karakteristike kao i puni faktorski plan pokusa  $2^k \cdot r$  ali uzimajući u model i članove drugog reda. U slučaju 2 faktora praktički se može prihvatiti da je to plošno centriran CCD plan pokusa, tj. CCD plan pokusa s  $\alpha=1$ . Ako se pak radi o problemu s 3 i više faktora tada ovaj plan pokusa postaje vrlo velik sa stajališta broja stanja pokusa, a time i neadekvatan zbog minimalnog potrebnog broja izvođenja (bez ponavljanja pokusa). Za primjer uzmimo 3 faktora gdje je minimalni broj stanja pokusa po planu pokusa jednak 27, a nasuprot tome minimalni broj stanja po CCD planu pokusa iznosi 15. Budući da se u ovom istraživačkom radu naglasak daje na samu uštedu resursa koja

---

proizlazi i iz broja izvedenih stanja pokusa, ovaj plan pokusa neće biti uporabljen u razradi i samoj realizaciji algoritma.

### 2.3 Ograničenost eksperimentalnog prostora

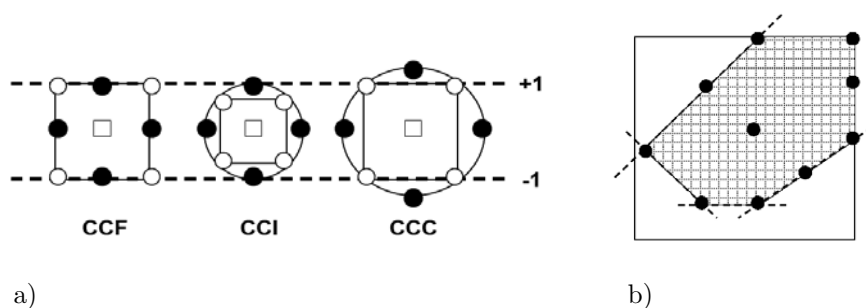


**Slika 2-9.** Područje operabilnosti i eksperimentalni prostor

Odabirom raspona u kojem će se varirati faktori definiran je eksperimentalni prostor. Eksperimentalni prostor je ujedno i prostor interesa, prostor u kojem je potrebno pronaći funkciju koja definira odnos zavisne varijable  $y$  i nezavisnih varijabli (faktora u planu pokusa). Međutim, samo područje interesa, eksperimentalnog prostora, je dio područja operabilnosti. Područje operabilnosti je skup svih mogućih stanja pokusa koja se mogu izvesti (slika 2-9). Pojednostavnjeno bi se moglo reći da je to područje u kojem je moguće varirati faktore, tj. ono područje gdje je teoretski, a i praktično moguće izvesti pokuse i evaluirati odzivne vrijednosti. U početku eksperimentalni prostor ne mora biti pozicioniran u područje optimuma, no kako se pristupa u tom slučaju objašnjeno je u poglavlju 2.2.2.

Dakle, jedan od bitnih ograničavajućih čimbenika prilikom odabira i općenito postavljanja plana pokusa jest područje operabilnosti. Ako je područje operabilnosti ograničeno tada treba voditi računa o pažljivom pozicioniranju plana pokusa te o vrijednosti parametra  $\alpha$  ukoliko se rabi CCD plan pokusa. U praksi se često mogu susresti eksperimentalni prostori koji su ograničeni mogućnošću variranja parametara zbog karakteristika eksperimentalne opreme, iako bi se teoretski mogli varirati. U literaturi [1], [4] spominju se osnovni oblici operabilnih prostora : sferični, kubični i pripadajući modeli pokusa, te različite vrste i oblici ograničavajućih faktora (Slika 2-10).

---



**Slika 2-10.** a) Različiti modeli CCD plana pokusa obzirom na ograničenje prostora, b) primjer mogućeg ograničavajućeg faktora [23]

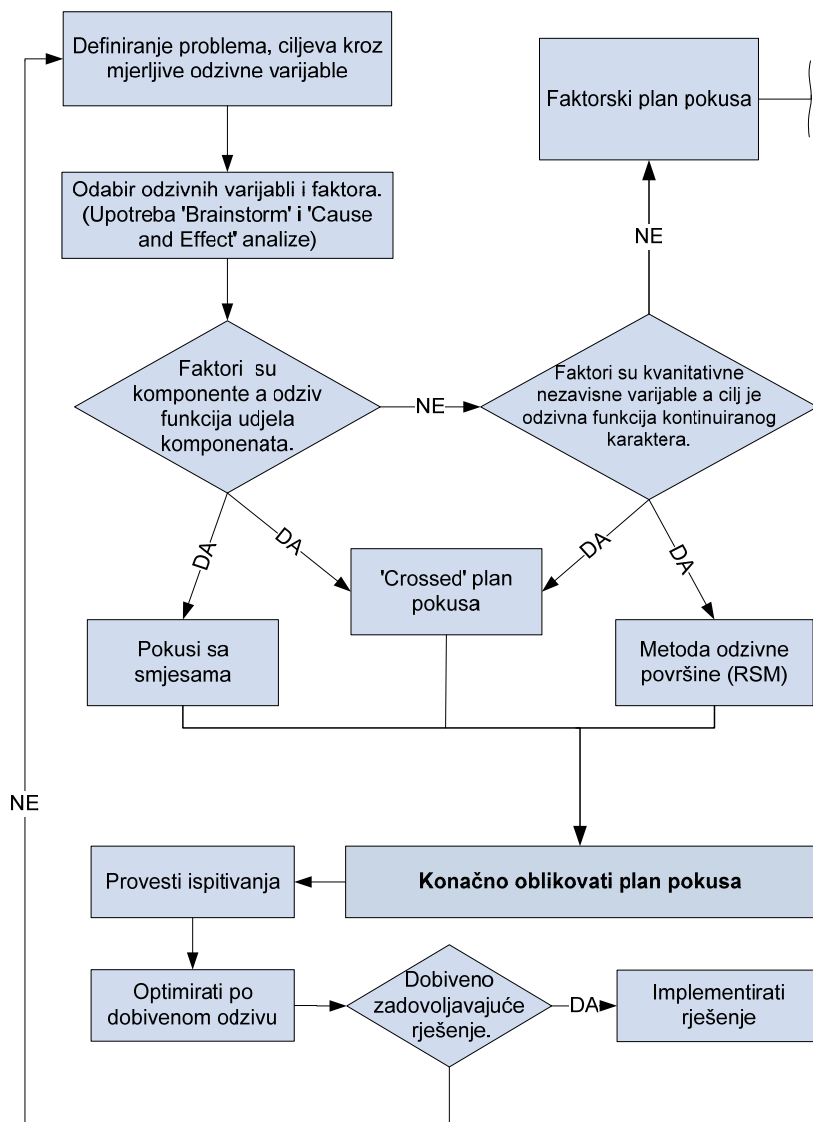
Generalno govoreći, u slučaju ograničenosti prostora potrebno je odabrati ili oblikovati plan pokusa koji će obuhvatiti što veće područje pazeći na vrijednosti kriterija koja se ostvaruje uporabom odabranog.

Novouvedeni kriteriji koji će se uporabiti u razvoju VAOPP algoritma se mogu shvatiti kao jedno od ograničenja eksperimentalnog prostora. U fazi početnog oblikovanja plana pokusa metodologija je razrađena tako da kriterij funkcije poželjnosti postaje kriterij za dodatno ograničenje eksperimentalnog prostora, što će biti objašnjeno u poglavlju 3.

## 2.4 Kriteriji oblikovanja i odabira adekvatnog plana pokusa

U procesu istraživanja pojava, uporabom planiranih pokusa, generalno je moguće pristupiti odabiru već postojećih planova pokusa, odnosno definirati područje iz kojega će se oblikovati (formirati) adekvatan model pokusa. Općenito moguće je sažeti sam odabir pokusa kroz pojednostavnjen dijagram tijeka prikazan na slici 2-11. Iz dijagrama tijeka vidljivo je da se nakon definicije problema pristupa određivanju osnovnih značajki nezavisnih varijabli. Obzirom na prirodu uključenih varijabli, upotrebljavaju se adekvatni modeli pokusa. Točnije, ako se barata s varijablama kontinuiranog karaktera tada će izbor biti sveden na područje ili metodologije odzivne površine, ili područje pokusa sa smjesama, koje bi također mogli smjestiti u područje metodologije odzivne površine. Koristeći se ovim prikazanim dijagramom tijeka može se dovoljno dobro odabrati i oblikovati plan pokusa na bazi osnovnih zahtjeva, uz zadovoljavanje osnovnih kriterija vezanih za planiranje i analizu pokusa (engl. *Design and analysis of experiments*, u nastavku DOE), a to su balansiranost i ortogonalnost pokusa.

Potreba istraživača, koji se bave planiranjem pokusa, za zadovoljavanjem nekih novih kriterija danas je sve veća. Potrebno je proširiti postojeće kriterije po kojima se oblikuje pokuse te uvesti neke nove koji su ključni za uspješan znanstveno-istraživački rad. Uvođenjem novih kriterija oblikovanja pokusa postavljaju se dodatna ograničenja te se preliminarni odabrani ili oblikovani pokus mijenja preraspodjelom, ponavljanjem ili uključivanjem dodatnih točaka. Rezultat je maksimizacija vrijednosti kriterija oblikovanja. Važno je istaknuti da razumijevanje i provedba teorije vezane za pronalaženje optimalnih planova pokusa ima svrhu [7], [25]:



Slika 2-11. Dijagram tijeka odabira plana pokusa

- 
- a) razjasniti značajke utvrđenog modela pokusa na način da se na jednostavan način prikažu prednosti,
  - b) dati dobru podlogu za proces odluke kada se radi o nestandardnim situacijama (uvjetima).

Pojavom računalom generiranih planova pokusa područje uporabe planova pokusa se naglo počelo razvijati. Računalom generirani planovi pokusa su planovi pokusa generirani računalnim algoritmom koji su oblikovani uzimajući u obzir poznate kriterije, kao npr. "abecedni" kriteriji optimalnosti (engl. *alphabetic optimality criteria*). U literaturi [25], [26], [27] uporaba računalom generiranih planova pokusa (dalje u tekstu RGPP) se navodi kao osnova oblikovanja optimalnih planova pokusa. Zbog kompleksnosti izračuna putem iteracija, ili točnije algoritma promjena (engl. *exchange algorithm*) dobivena rješenja su vrlo precizna i podložna izmjenama obzirom na promjenu početnih uvjeta, zahtjeva. Dobro poznati kriteriji optimalnosti će biti dio algoritma VAOPP kao dopuna rezultatu koji će se prvenstveno bazirati na zadovoljavanju novouvedenih kriterija.

### 2.4.1 Kriteriji optimalnosti

Kada se govori o kriterijima po kojima se oblikuje ili odabire plan pokusa najčešće se misli na "aplhabetic" kriterije optimalnosti. Najčešće korišteni kriteriji optimalnosti su oni koji su bazirani na vrijednosti produkta matrice  $X^T X$ , a to su D-kriterij i A-kriterij. U drugu skupinu kriterija optimalnosti moguće je svrstati one kriterije koji su bazirani na vrijednosti funkcije procijenjene varijance. Najčešće upotrebljavani kriteriji druge skupine su G-kriterij i Q-kriterij.

#### 2.4.1.1 Kriteriji bazirani na vrijednosti informacijske matrice

##### 2.4.1.1.1 D-kriterij (D-optimalnost)

D-kriterij je najčešći kriterij po kojemu se pronalazi optimalni plan pokusa te je zastupljen u većini analiza različitih modela pokusa. D-kriterij u osnovi daje prijedlog plana pokusa tako da njegova matrica momenata  $\mathbf{M}$  ima određenu značajku (u nastavku obrazloženo):

---

---


$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{X}^T \mathbf{X}}{N} \quad (7)$$

gdje je  $N$  broj točaka, a  $\mathbf{X}$  matrica pokusa. Jedna od važnijih karakteristika koja se dobiva kroz matricu momenta jest vrijednost determinante matrice momenta (8).

$$|\mathbf{M}| = \frac{|\mathbf{X}^T \mathbf{X}|}{N^p} \quad (8)$$

gdje je  $p$  broj parametara modela koja se estimira.

Ako se pretpostavi da je pogreška modela normalno distribuirana po cijelom eksperimentalnom prostoru s konstantnom varijancom, determinanta od  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  je obrnuto proporcionalna kvadratu volumena (širini) pojasa intervala povjerenja koeficijenata u regresijskoj funkciji ( $\beta$ ). Interval povjerenja regresijskih koeficijenata daje ocjenu kvalitete procjene istih. Karakteristiku vrijednosti determinante je moguće uporabiti kao kriterij D-optimalnosti. Konkretno, to bi značilo da je mala vrijednost determinante matrice  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  indikator lošije procjene parametara  $\beta$ . Izraz koji govori da je D-optimalni plan pokusa onaj koji ima maksimalnu vrijednost determinante  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  dan je u izrazu (9).

$$\max \left( \frac{|\mathbf{X}^T \mathbf{X}|}{N^p} \right) \rightarrow \max_{\zeta} |\mathbf{M}(\zeta)| \quad (9)$$

gdje je  $M(\zeta)$  vrijednost determinante matrice momenta aktualnog plana pokusa. Iz gore navedenog je moguće izvesti i kriterij D-efikasnosti koji uzima maksimalnu vrijednost determinante matrice momenta svih modela pokusa te uspoređuje s aktualnim izražavajući u obliku udjela (10).

$$D_{eff} = \left( |\mathbf{M}(\zeta)| / \max_{\zeta} |\mathbf{M}(\zeta)| \right)^{1/p} \quad (10)$$

Preko gore navedenog izraza moguće je uspoređivati različite modele pokusa bez obzira na veličinu uzorka, s napomenom da se radi o prilagođavanju odzivnog modela s istim brojem parametara.

---

---

U literaturi [3], [10], [28], [29], [30] istraživale su se različite značajke modela pokusa kroz njihove vrijednosti kriterija D-optimalnosti. Usporedbom različitih tipova modela pokusa dan je presjek karakteristika modela iz kataloga poznatih modela pokusa. Za svaki eksperimentalni problem je moguće pronaći D-optimalni plan pokusa koji se, naravno, ne mora nužno uzimati kao odlučujući kriterij. Današnji programski paketi najbolje ocrtavaju uporabu ovoga kriterija. Svaki kompleksniji programski paket u svojoj strukturi ima integrirani algoritam za pronalaženje ili oblikovanje D-optimalnog plana pokusa. Ova metoda usporedbe i pronalaženja optimalnog pokusa u okruženju koji je ograničen istraživačkim resursima postaje ipak samo dopuna ili jedan od mogućih kriterija.

#### 2.4.1.1.2 A-kriterij (A-optimalnost)

A-kriterij je kriterij koji se u osnovi razlikuje od prethodno objašnjenog kriterija po tome što u obzir uzima varijance regresijskih koeficijenata. U izračun vrijednosti kriterija se ne uzima kovarijanca, što znači da se uzimaju članovi na dijagonali matrice  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ . A-optimalnost je definirana preko izraza (11).

$$\text{Min}_{\zeta} \text{tr}(\mathbf{M}(\zeta))^{-1} \quad (11)$$

Plan pokusa će biti A-optimalan ukoliko mu je suma elemenata glavne dijagonale matrice  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  minimalna. Drugim riječima, minimalna vrijednost sume traga matrice  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  znači i minimalnu varijancu regresijskih koeficijenta  $\beta$ , a time i bolju procjenu istih. Uporaba ovoga kriterija je puno manja nego D-kriterija, što se može zaključiti pregledom literature kao i sadržajem programskih paketa u kojima je vrlo malo zastupljena spomenuta materija.

#### 2.4.1.2 Kriteriji bazirani na funkciji procijenjene varijance $v(x)$

Zbog potrebe procjene odzivnih vrijednosti uvedeni su i kriteriji bazirani na procjeni varijance (engl. *prediction variance criteria*). Spomenuti kriterij je značajan onda kada se želi procijeniti s kolikom preciznošću će se interpretirati dobiveni odzivi, koji dolaze kao zadnja faza provedbe eksperimenta. Kao teoretska osnova ovih kriterija je funkcija procijenjene varijance  $v(x)$  iskazana kroz sljedeći izraz:

---

$$v(x) = V[\hat{y}(x)] = \sigma^2 \cdot \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \quad (12)$$

gdje je  $\sigma^2$  pretpostavljena konstantna varijanca (varijanca dobivena ponavljanjem mjerenja),  $\mathbf{X}$  matrica pokusa, a  $\mathbf{x}^{(m)}$  vektor redak koji definira lokaciju određene točke u eksperimentalnom prostoru. Drugi korijen iz funkcije procijenjene varijance definira se kao standardnu pogrešku odzivne vrijednosti  $\hat{y}(x)$ . Standardnom pogreškom (13), uz povjerenje  $P$  na temelju broja stupnjeva slobode  $N-1$  definira se interval povjerenja aritmetičke sredine odzivnih vrijednosti. U izrazu (14) je dan interval povjerenja aritmetičke sredine odzivnih vrijednosti.

$$s_{\hat{y}(x)} = s \sqrt{\mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)}} \quad (13)$$

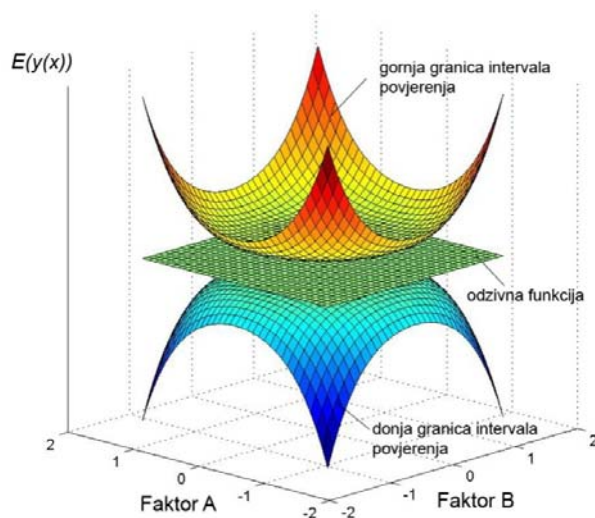
$$\hat{y}(x) - t_{\alpha/2, N-p} \cdot s_{\hat{y}(x)} \leq E[y(x)] < \hat{y}(x) + t_{\alpha/2, N-p} \cdot s_{\hat{y}(x)} \quad (14)$$

Gore navedeni izraz se može tumačiti kao procjena vrijednosti odziva u konkretnoj točki  $x$  eksperimentalnog prostora uz mogućnost pogreške  $\alpha'$ . Uporabom ove formulacije u početnoj fazi oblikovanja i odabira modela pokusa moguće je dobiti uvid o kvaliteti procjene odzivnih vrijednosti. Kvaliteta procjene je relativna vrijednost i rezultat je usporedbe gledajući sve točke eksperimentalnog prostora. Utjecaj vrijednosti  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  na veličinu standardne pogreške je značajan jer u sebi sadrži oblik pokusa, tj. daje informaciju o rasporedu točaka i broju ponavljanja. Pa tako se vrlo jednostavno može ispitati da kod klasičnih centralno kompozitnih pokusa (primjer s  $k=2$ ) zbog njegovog specifičnog oblika, vrijednosti standardne pogreške rastu udaljavanjem od centra, uz uvjet da je centralna točka ponovljena barem dva puta (slika 2-6). Pretpostavka, vezana za fazu početnog oblikovanja plana pokusa je da je procijenjena standardna devijacija odziva jednaka 1. Smisao intervala povjerenja aritmetičke sredine odzivnih vrijednosti se može prikazati na primjeru odzivne funkcije za CCD model pokusa s 2 faktora (slika 2-12).

---

<sup>1</sup> Ovdje se koristi simbol  $\alpha$  za pogrešku prve vrste.





**Slika 2-12.** Interval povjerenja odzivnih vrijednosti

U ovom primjeru radi lakše konstrukcije intervala povjerenja aritmetičke sredine odzivnih vrijednosti te kako bi se lakše uočila simetričnost, odzivna funkcija je pojednostavljena tj. ima karakterističnu konstantnu<sup>2</sup> vrijednost.

U daljnjem tekstu, opisu istraživanja, koristit će se pojam volumena intervala što bi na konkretnom primjeru bio prostor omeđen gornjom i donjom granicom intervala povjerenja. Teorija vezana za funkciju procijenjene varijance, a time i standardnu pogrešku modela, se koristi u većini grafičkih prikaza koji služe i kao podloga u odlučivanju o adekvatnosti modela pokusa.

#### 2.4.1.2.1 G-kriterij (G-optimalnost)

Uporaba ovog kriterija nije toliko raširena u problemima eksperimentiranja iz razloga kompleksnosti formulacije. U literaturi [4] se navodi da bi taj kriterij morao biti zastupljeniji obzirom da daje bitnu informaciju o karakteristici modela pokusa. Kriterij je baziran na pojmu koju se malo razlikuje od spomenute funkcije procijenjene varijance. Pojam skalirane funkcije procijenjene varijance (engl. *Scaled prediction variance*) (15) je funkcija procijenjene varijance uz uzeti faktor  $N/\sigma^2$  gdje je  $N$  broj točaka pokusa a  $\sigma^2$  varijanca. Prilikom definiranja funkcije procijenjene

<sup>2</sup> U realnom slučaju očekivana odzivna funkcija će biti višeg reda.

---

varijance umjesto  $\sigma^2$  se standardno uzima procjena varijance odziva s vrijednošću  $s^2=1$ .

$$v_{spv}(x) = \frac{N}{\sigma^2} v(x) = N \cdot \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \quad (15)$$

Kao nedostatak i nekorisćenje pojma skalirane procijenjene varijance (u nastavku SPV), navodi se da oblik rezultata nije iskazan kroz jedan podatak, već ovisi o lokaciji točke u kojoj se traži procjena odziva. Međutim, iz navedenog nedostatka nameće se i zaključak o prednostima uporabe SPV, jer daje kompletnu sliku karakteristike svake pojedine točke u modelu pokusa. Kako bi vrijednost funkcije SPV bila što manja i sama funkcija SPV stabilna nužno je da se ponovi centralna točka pokusa [1], što će biti obrazloženo u narednim poglavljima.

G-kriterij ili G-optimalnost je kriterij pronalaženja optimalnog plana pokusa uzimajući funkciju SPV. Definicija G-optimalnog plana pokusa se u relevantnoj literaturi navodi kao onaj model pokusa kod kojega nije maksimalna vrijednost funkcije SPV eksperimentalnog prostora prevelika. Drugim riječima, naglasak je na kontroli onog područja (skupa točaka) s ekstremnim vrijednostima funkcije SPV. Izraz koji matematički definira prethodnu tvrdnju:

$$\underset{\zeta}{\text{Min}} \left[ \underset{x \in R}{\text{Max}} \left\{ \mathbf{x}^{T(m)} [\mathbf{M}(\zeta)]^{-1} \mathbf{x}^{(m)} \right\} \right] \quad (16)$$

gdje je  $\mathbf{M}(\zeta)^{-1}$  inverz matrice momenta pokusa  $\zeta$ , dok je  $\mathbf{x}$  vektor koordinate točke eksperimentalnog prostora  $R$ .

Drugi pojam koji se veže za G-kriterij jest G-efikasnost. G-efikasnost je definirana kao omjer prosječne i maksimalne vrijednosti funkcije SPV u eksperimentalnom prostoru (17).

$$G_{eff} = \frac{P_{spv}}{\text{Max} [v_{spv}(x)]} \quad (17)$$

G-kriterij je uporabljen u dijelu algoritma VAOPP kao jedan od kontrolnih parametara oblikovanog modela. Uloga G-kriterija nije primarna iz razloga što je

---

---

jedan od prvih kriterija oblikovanja funkcija preciznosti koja je izvedena iz teorije funkcije procijenjene varijance.

#### 2.4.1.2.2 Q-kriterij (Q-optimalnost)

Q-kriterij je važno spomenuti jer je ideja formulacije uz određene modifikacije iskorištena za definiranje kriterija preciznosti u algoritmu VAOPP. Kriterij je izveden iz teorije G-kriterija te se u literaturi navodi još kao I i IV-kriterij. Kriterij je generiran u formi jednog podatka (broja) koji je lakši za uporabu i tumačenje pogotovo istraživačima koji nisu detaljno upućeni u teoriju statističkih metoda i planiranja pokusa. Q-kriterij je prosječna vrijednost funkcije SPV (engl. *average scaled prediction variance*, u nastavku ASPV) nad eksperimentalnim prostorom. Budući da je eksperimentalni prostor kombinacija razina faktora koji su u RSM-u kontinuiranog karaktera, proces pronalaženja prosječne vrijednosti funkcije SPV se rješava matematičkom operacijom integriranja. Integrirana vrijednost se tada dijeli s volumenom eksperimentalnog prostora, tj. njegovim konačnim brojem točaka  $K$ , što je pokazano u izrazu (18).

$$ASPV = \frac{1}{K} \int_R v_{spv}(x) dx = \frac{1}{K} \left[ \int_R \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} dx \right] \quad (18)$$

gdje je  $K$  definiran kao:

$$K = \int_R dx \quad (19)$$

Q-optimalan plan pokusa je tada moguće definirati kao onaj model pokusa koji ima najmanju vrijednost ASPV. Ako se želi zadovoljiti Q-kriterij, u procesu odabira i oblikovanja modela pokusa, potrebno je tražiti onaj koji ima minimalnu vrijednost ASPV, odnosno matematički zapisano:

$$\underset{\zeta}{Min}(ASPV) = \underset{\zeta}{Min}Q(\zeta) \quad (20)$$

U literaturnim izvorima, a pogotovo u izvorima [4] i [5] dosta često se spominje činjenica da se ovdje radi o specijalnom slučaju kriterija koji je definiran kroz

---

ponderiranu funkciju SPV tkz. težinskom funkcijom. Težinska funkcija je funkcija koja klasificira točke (ili područje) eksperimentalnog prostora po važnosti ('težini'). Najčešće je vrijednost težinske funkcije, iz praktičnih razloga, jednaka konstanti. Analogno prethodno obrazloženim kriterijima optimalnosti tako i ovaj kriterij ima svrhu usporedbe različitih modela pokusa. Ako se uzme formulacija Q-kriterija iz izraza (21) može se definirati Q-efikasnost:

$$Q_{eff} = \underset{\zeta}{Min} \left[ \frac{Q(\zeta)}{Q(\xi)} \right] \quad (21)$$

gdje je  $\xi$  onaj plan pokusa koji ima minimalnu vrijednost ASPV.

**Tablica 2-1.** Usporedba modela kroz vrijednosti kriterija za klasične modela pokusa

Broj faktora	Veličina uzorka	Plan pokusa	Geff (%)	Deff (%)
2	9	CCD ( $n_c=1$ )	98,62	66,67
2	10	CCD ( $n_c=2$ )	99,64	96,00
2	11	CCD ( $n_c=3$ )	96,91	87,27
3	15	CCD ( $n_c=1$ )	99,14	66,67
3	16	CCD ( $n_c=2$ )	99,61	94,59
3	17	CCD ( $n_c=3$ )	97,63	89,03
3	13	BBD ( $n_c=1$ )	97,00	76,92
3	16	BBD ( $n_c=2$ )	96,53	71,43
3	15	BBD ( $n_c=3$ )	93,82	66,67

#### 2.4.2 Svojtvo ortogonalnosti

Ortogonalnost (engl. *orthogonality*) je važna značajka modela pokusa. Prilikom oblikovanja pokusa bitno je voditi računa da se ortogonalnost drži u prihvatljivim granicama, tj. da je plan pokusa ortogonalan ili "blizu ortogonalan" (engl. *near orthogonal*). Ortogonalni plan pokusa je onaj plan pokusa kod kojeg su glavni efekti

nezavisni, tj. nisu korelirani. Nadalje, ortogonalan model pokusa prvog reda jest onaj kojem je  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  matrica dijagonalna. Ako je matrica  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  dijagonalna tada proizlazi da su kolone u matrici nezavisne i ortogonalne. Ako se uzme matrica pokusa u kojoj su sadržani glavni faktori (strukturirani u kolonama) gdje je  $x_i$  i-ta kolona (vektor stupac), tada ako je  $\sum x_i x_j = 0$  (uz  $i \neq j$ ). Provjera ortogonalnosti na primjeru klasičnog CCD modelu pokusa s 2 faktora:

$$X = \begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow X^T X = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_{11} & b_{22} & b_{12} \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ \dots & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 8 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 12 & 4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 12 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

gdje se preko matrice plana pokusa  $\mathbf{X}$  dobiva matrica  $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$  varijanci i kovarijanci. Iz gore navedenog izraza kolone koje predstavljaju linearne komponente su ortogonalne. Isto tako se može reći i za član koji predstavlja interakciju faktora.

U literaturi [4] se navodi zaključak koji govori da u slučaju ako su dvije kolone u matrici ortogonalne, da se može smatrati da su razine pripadajućih faktora linearno nezavisne. U tom slučaju koeficijenti u modelu nisu međusobno korelirani. Općenito, ako se promatra slučaj odziva drugog reda, može se zaključiti da je ortogonalan plan pokusa onaj u kojem ne postoji korelacija između članova modela. Za ilustraciju ortogonalnosti može se uzeti istraživanje [31] gdje je autor razmatrao vrijednost udaljenosti aksijalnih točaka CCD plana pokusa ( $\alpha$ ) u slučaju 4 centralne točke. Rezultat je izraz koji definira ortogonalan CCD plan pokusa obzirom na veličinu uzorka  $n$ , broj aksijalnih točaka  $n_f$ :

$$\alpha = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( n \cdot n_f \right)^{\frac{1}{2}} - n_f \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

---

U slučaju da se dogodi da su neki članovi modela, primjer interakcija, korelirani s linearnim članovima to treba imati u vidu prilikom tumačenja rezultata. U problemima RSM-a kada je potrebno pronaći odzivnu funkciju, izraziti interval povjerenja odzivnih vrijednosti, problem neortogonalnosti u manjoj mjeri se može zanemariti.

Nadalje, važno je objasniti svrhu dodavanja centralnih točaka u model pokusa. Dodavanjem centralnih točaka u model pokusa, ili jednostavnije, ponavljanjem stanja pokusa u centru, dobivaju se dvije bitne karakteristike: omogućavaju procjenu greške eksperimenta<sup>3</sup>, povećavaju preciznost dobivenog odziva u centru i području oko njega no i smanjuju se vrijednosti D i G efikasnosti [33]. Centralne točke imaju svrhu estimacije modela drugog reda<sup>4</sup> te ako se dodaju u postojeći ortogonalni plan pokusa ne utječu na ortogonalnost (slučaj klasičnog CCD plana pokusa). Autori [24], [32], [33] u svojim radovima su se bavili problemom odabira broja centralnih točaka i njihovog utjecaja na karakteristiku modela pokusa, te se navodi činjenica da je potrebno uzeti manje centralnih točaka nego što preporuča kriterij ortogonalnosti.

Iz spomenutih činjenica, istraživanja i navedenih naputaka relevantnih autora može se izvesti zaključak koji će utvrditi pristup problemu oblikovanja i sa stajališta ortogonalnosti. Ortogonalnost će biti uzeta u obzir prilikom formiranja optimalnog plana pokusa metodom VAOPP. U slučaju da se u odabiru plana pokusa, iz generiranog niza<sup>5</sup> planova pokusa, dogodi da više njih zadovoljavaju zadane primarne kriterije, prednost će imati onaj koji je bliže ortogonalnom.

### 2.4.3 Svojstvo rotatabilnosti

Svojstvo rotatabilnosti neće biti uzimano kao kriterij oblikovanja VAOPP, no zbog uloge u klasičnim RSM modelima pokusa potrebno ga je spomenuti. Točnije, svojstvo rotatabilnosti će biti u slučaju VAOPP potpuno zanemareno u fazi poboljšanja postojećeg modela.

Definicija rotatabilnosti je od autora Box i Huntera 1957. godine iz potrebe dobivanja stabilnosti varijance kako bi se u eksperimentalnom prostoru dobila

---

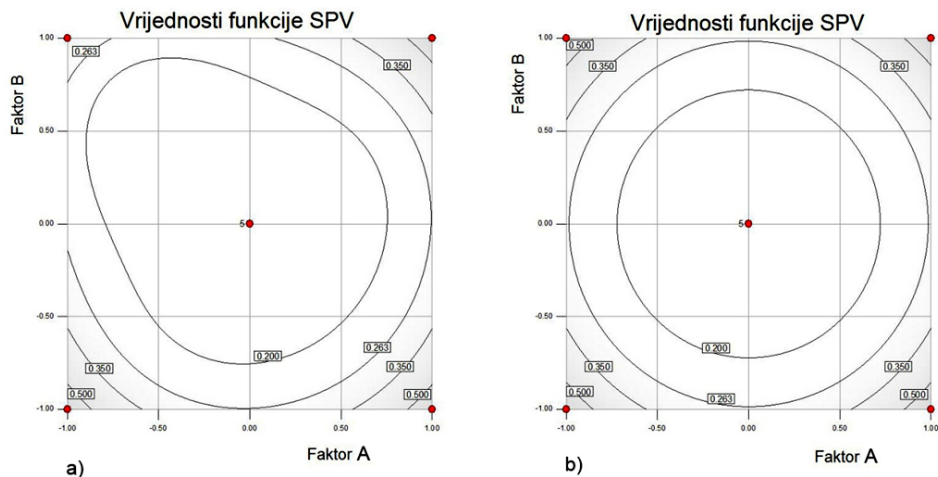
<sup>3</sup> Čista pogreška je nužna za testiranje značajnosti članova modela, engl. *pure error*.

<sup>4</sup> Odzivna površina drugog reda.

<sup>5</sup> Pod generiranim nizom se misli na generirane planove pokusa u bloku algoritma VAOPP koji metodom iteracija generira kandidate za optimalni plan pokusa.

---

ujednačena kvaliteta predikcije odzivnih vrijednosti  $y(x)$ . Plan pokusa koji je rotabilan jest onaj kod kojega je vrijednost funkcije SPV, koja je definirana u (15), jednaka u svim točkama  $x$  koje su jednako udaljene od centra pokusa. Na slici 2-13 je grafički prikaz kontura jednakih vrijednosti funkcije SPV rotabilnog plana pokusa i za usporedbu konturni dijagram nerotabilnog plana pokusa.



**Slika 2-13.** Prikaz kontura istih vrijednosti SPV a) nerotabilnog i b) rotabilnog plana pokusa

Trebalo bi naglasiti da je rotabilnost pokusa ili barem "bliža rotabilnost"<sup>6</sup> pokusa je vrlo jednostavno postići bez narušavanja ostalih važnih karakteristika pokusa. Međutim, svojstvo rotabilnosti u slučaju nepravilnosti eksperimentalnog prostora neće biti moguće zadržati jer bi u protivnom ostalo neobuhvaćenog područja eksperimentalnim točkama što dovodi do bitnog narušavanja kvalitete procjene odzivnih vrijednosti. Ako koristimo pristup s kriterijem preciznosti definiranim preko funkcije  $v(x)$ , tada ne predstavlja problem narušena rotabilnost, jer je u svakom trenutku dana jasna slika o vrijednostima  $v(x)$  u promatranom području. U slučaju proširenog pokusa (engl. *augmented design*), točke mogu bitno narušiti rotabilnost početnog rotabilnog pokusa, ali u svrhu poboljšanja ostalih poželjnih karakteristika. Stoga kao što je već napomenuto, rotabilnost kao karakteristika pokusa će biti uključena samo u slučaju faze početnog oblikovanja VAOPP kada će se koristiti inicijalni rotabilni CCD plan pokusa.

<sup>6</sup> Engl. *near rotatability*, vrlo blizu potpune rotabilnosti.

---

#### 2.4.4 Računalom generirani optimalni planovi pokusa

Uzimajući u obzir navedenu teoriju spomenutu u prethodnim poglavljima danas je područje planiranja i oblikovanja pokusa usmjereno ka pronalaženju optimalnih planova pokusa uporabom računalnih algoritama. Kao što je već spomenuto u prethodnom tekstu, algoritmi računalom generiranih optimalnih planova pokusa (u nastavku RGOPP) koriste jedan primarni kriterij oblikovanja. Taj kriterij se odnosi na spomenute, poznate kriterije optimalnosti. Pa tako se u može susresti algoritam koji traži D-optimalan plan pokusa ili pak A-optimalan plan pokusa. Do sada se u literaturi ne navodi uporaba više kriterija istodobno, a posebice se ne navodi utrošak resursa kao primarni kriterij.

Zbog nepraktičnosti koncepta kontinuirane promjene modela pokusa, ideja je da se odrede diskretni modeli pokusa koji dovoljno dobro opisuju optimalni plan pokusa. Razlog tomu je da se prilikom definicije uvjeta oblikovanja računa omjer glavnih ulaznih parametra kao što su veličina uzorka i broj stanja pokusa, što je podatak koji nije diskretan<sup>7</sup>. Bit algoritama pronalaženja optimalnog plana pokusa se svodi na usporedbu niza generiranih planova pokusa koji na kraju procedure predlaže onoga koji ima najvišu vrijednost odabranog kriterija. Struktura algoritama za pronalaženje optimalnog plana pokusa je u osnovi vrlo slična te se na primjeru algoritma D-kriterija može objasniti. Početak algoritma uzima inicijalni plan pokusa  $\zeta_0$ , koji se pretpostavi kao mogući optimalni plan pokusa. Eksperimentalni se prostor pokrije adekvatnom mrežom  $\mathcal{N}$  točaka te se računa funkcija  $d(x, \zeta_0)^8$  za svaki  $x \in \mathcal{N}$ . Mreža mora biti dovoljno gusta da se detaljno pokrije cijeli eksperimentalni prostor  $R$  te kako bi se pronašle optimalne točke modela pokusa. Nadalje, metodom iteracija pretražuje se prostor, te se neadekvatne točke, evaluirane po zadanom kriteriju, izbacuju iz prostora mogućih rješenja. Kada se pokrije cijeli prostor tada ostaju točke koje zadovoljavaju maksimalnu vrijednost odabranog kriterija. Problem koji se mora prihvatiti jest trajanje izvođenja algoritma koji je usko vezan uz broj iteracija, odnosno vezan uz broj elemenata mreže  $\mathcal{N}$ .

---

<sup>7</sup> Kontinuiranost numeričkih rezultata kao i činjenica kontinuiranosti varijabli u pokusu bit će uzeta kod razvoja novog algoritma VAOPP, pri čemu će se koristiti diskretizacija prostora.

<sup>8</sup> Funkcija D-kriterija.

---



Nedostatak uporabe algoritma za traženje D-optimalnog plana pokusa, kao primjer uporabe samo jednog kriterija, očituje se u tome da se ponekad dobiva teško uporabljiv plan pokusa sa stajališta drugih kriterija [34] i [35]. Može se dodati da računalno generirani D-optimalni plan pokusa ne uzima u obzir vrijednosti funkcije SPV koja često ima nepoželjnu raspodjelu po eksperimentalnom prostoru.

Zaključak vezan za nedostatke postojećih algoritama RGOPP također bi se mogao svesti na nepostojanje dodatnih kriterija, a koji se odnose na direktne troškove i trajanje eksperimentiranja. Treba napomenuti da će se uzeti u obzir kriteriji koji su dio većine algoritma RGOPP, ali samo kao prateći kriteriji, iz razloga što će osnovni kriterij biti razvijen iz funkcije procijenjene varijance.

#### 2.4.5 Grafičke metode evaluacije i usporedbe planova pokusa

Pristup problemu oblikovanja grafičkim metodama je u osnovi svedeno na opisivanje karakteristika procjene odzivne varijable<sup>9</sup> u području ispitivanja. Vizualizacija je riješena na način da daje sliku kretanja standardne pogreške aritmetičke sredine kroz eksperimentalni prostor. Smjer istraživanja i razvoja različitih grafičkih prikaza je eksplicitno pokazan u literaturi [4], [11], [14] i [15] gdje se može primijetiti značajan doprinos u području ove problematike. Stoga je potrebno pokazati nekoliko razvijenih grafičkih metoda, od kojih će se neke od njih koristiti u prikazu rezultata koji će se dobiti uporabom algoritma VAOPP.

**VDG** grafički prikaz (engl. *variance dispersion graph*) prvi puta predstavljen u literaturi [11]. Grafički prikaz je sastavljen od tri komponente:

- I. Prikaz ukupne varijance modela u odnosu na radijus  $r$ , koji predstavlja udaljenost točke od centra pokusa. Matematički zapisano [36]:

$$V^r = \frac{N\psi}{\sigma^2} \int_{U_r} \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}^{(m)} dx \quad (24)$$

gdje je  $U_r$  integracija po plohi sfere radijusa  $r$ , a  $\psi$  recipročna vrijednost volumena eksperimentalnog prostora.

---

<sup>9</sup> Odnosi se na nelinearne modele.

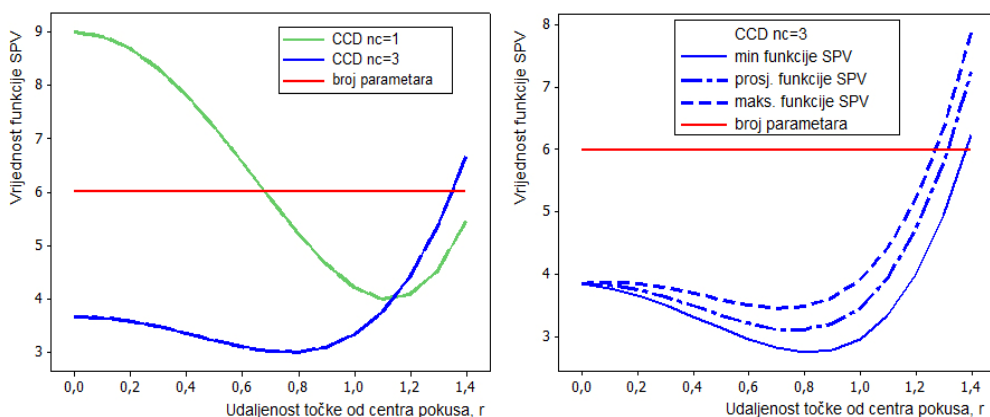
II. Prikaz maksimalne vrijednosti  $v_{spv}(x)$  u odnosu na radijus  $r$ :

$$\max_{x \in U_r} [v_{spv}(x)] = \max_{x \in U_r} [N\mathbf{x}^{T(m)}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}^{(m)}] \quad (25)$$

III. Prikaz minimalne vrijednosti  $v_{spv}(x)$  u odnosu na radijus  $r$ :

$$\min_{x \in U_r} [v_{spv}(x)] \quad (26)$$

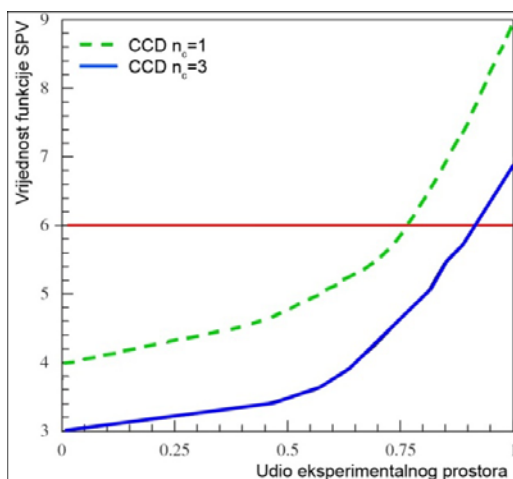
Primjer VDG prikaza je dan na slici 2-14:



**Slika 2-14.** VDG grafički prikaz a) rotabilnih modela pokusa CCD ( $n_c=1$  i  $n_c=3$ ), b) nerotabilnog modificiranog modela pokusa CCD ( $n_c=3$ )

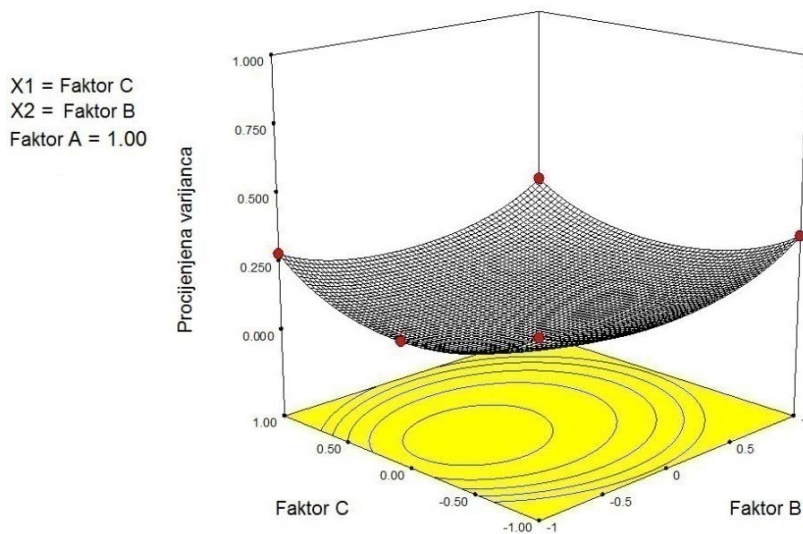
Kao što se može primijetiti, VDG grafički prikaz daje sliku o kretanju funkcije SPV i za više različitih modela pokusa. Na taj način u nizu različitih modela planova pokusa može se odbrati onaj čija karakteristika funkcije SPV najbolje odgovara zahtjevima istraživanja pojave. Eksplicitno ukazuje na kvalitetu procjene odzivnih varijabli u domeni (eksperimentalnom prostoru). Nedostatak ove grafičke metode jest u tome da je u slučaju nerotabilnih modela pokusa potrebno prikazivati i dodatne vrijednosti funkcije SPV iz izraza (25) i (26). Linija prosječne vrijednosti funkcije SPV je dobivena iz izraza (24) te je treća linija u prikazu (Slika 2-14.a). Iako se s linijama minimalne, maksimalne i prosječne vrijednosti funkcije SPV većim dijelom definira karakteristika te funkcije, ne postoji informacija o stvarnoj minimalnoj vrijednosti gledajući u stvarnom  $n$ -dimenzionalnom prostoru.

**FDS** grafički prikaz (engl. *fraction of design space*) se prvi puta spominje u literaturi [13]. U ovom slučaju funkcija SPV je prikazana kroz udjele eksperimentalnog prostora. Osnovna značajka prikaza je ta što se uzima proporcija volumena eksperimentalnog prostora za neki zadani radijus  $r$ . Prednost pred VDG prikazom je u tome što se kroz eksperimentalni prostor vrlo jednostavno konstruira graf, koji se sastoji od jedne linije. To je, dakako, puno praktičnije kada se uspoređuju različiti modeli. Na slici **2-15** je prikazan FDS graf koji uspoređuje iste modele kao i u slučaju prikazanom na slici **2-14a**).



**Slika 2-15.** FDS grafički prikaz za usporedbu modela pokusa CCD s jednom i tri centralne točke

Informaciju o tome koji dio prostora ima kakvu karakteristiku funkcije SPV moguće je dobiti tek prikazivanjem u stvarnom prostoru. Parcijalno rješenje jest prikazivanje raspodjele procijenjene varijance u 3D prostoru što ima potpunu opravdanost za probleme s dva faktora (Slika **2-16**). Međutim, problemi s tri i više faktora zahtijevaju utvrđivanje više faktora na konstantnu vrijednosti, dok se kontinuirana promjena prikazuje samo za preostala dva. Potpuna opravdanost uporabe 3D prikaza dolazi u slučaju velike nesimetričnosti funkcije procijenjene varijance što je posljedica vrlo nesimetričnog rasporeda stanja pokusa (slučaj prikazan na slici **2-16**). U takvom slučaju potrebno je pažljivo ispitati i ustanoviti u kojem području se može očekivati dobra procjena odzivnih vrijednosti, a u kojem to ipak neće biti moguće. Obzirom da je prednost ovog prikaza više vezana za adekvatnu vizualizaciju isti će se koristiti u algoritmu VAOPP pri grafičkoj interpretaciji preciznosti modela.



**Slika 2-16.** 3D prikaz funkcije procijenjene varijance za slučaj 3 faktora

Zaključak koji se nameće kao posljedica ispitivanja grafičkih metoda oblikovanja planova pokusa je moguće sažeti kroz sljedeće točke:

- Kombinacijom VDG i FDS grafičkih prikaza moguće je dovoljno precizno odrediti koja područja eksperimentalnog prostora će imati dobra a koja loša svojstva predikcije odzivnih vrijednosti.
- Rješava problem koji je prisutan uporabom kriterija formuliranih kroz jedan podatak (kriterija opisanih u poglavlju 2.4.1).
- Vrlo jednostavna konstrukcija prikaza koji je većim dijelom integriran u programske pakete vezane za područje planova pokusa.

Literaturni izvor [3], u kojem su dani rezultati istraživanja evaluacije grafičkih metoda, skreće pažnju na jednu bitnu činjenicu. Naime, preporuča da se u evaluaciju preciznosti modela grafičkim metodama pridruži i informacija o troškovima eksperimenta. U slučajevima koji su do tada razmatrani, trošak eksperimenta po stanju pokusa je formuliran kao konstanta, te je ukupni trošak samo funkcija broja izvedenih stanja pokusa<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Engl. *number of observations collected*, odnosi se na konačni broj prikupljenih podataka.

Budući da je literaturni izvor koji navodi ovaj prijedlog objavljen 2009. godine, te ne postoji niti jedan drugi relevantni navod o spomenutoj problematici, ovaj doktorski rad bi trebao dati prijedlog rješenja uključivanja funkcije troška u evaluaciju modela. Sama funkcija troška u stvarnosti nije konstanta pa će se u takvom obliku i koristiti.

---



### 3. Struktura algoritma višekriterijskog adaptivnog oblikovanja planova pokusa

U ovom poglavlju obrazlaže se višekriterijski pristup problemu oblikovanja i analize planova pokusa i to kako u početnoj fazi izbora plana pokusa tako i u fazi izvođenja pokusa (istraživanja) pojave, – što je od osobitog značaja u slučajevima kada se utvrdi da su neka, prethodno predviđena stanja pokusa, ili teško izvediva uz prihvatljiv utrošak resursa i u razumnom roku, ili ih je nemoguće izvesti, najčešće zbog tehnoloških ograničenja. Stoga će se koristiti višekriterijski pristup u optimizaciji planova pokusa i to adaptivno, u fazi prethodnog oblikovanja plana pokusa, ali i u fazi realizacije istraživanja razmatrane pojave, tj. fazi naknadnog poboljšanja modela pokusa. Za funkciju cilja pri optimiranju planova pokusa predlaže se objedinjavanje više elemenata: prirast preciznosti modela izraženo kroz smanjenje varijance procijenjenih vrijednosti regresijskog modela, očekivani utrošak resursa (materijal, vrijeme), pri čemu će se za svaku razmatranu varijantu plana pokusa pratiti vrijednosti kretanja postojećih kriterija (D-optimalnost, G-optimalnost), kao i eventualno odstupanje od ortogonalnosti. Razvoj novog pristupa adaptivnim modeliranjem planova pokusa i definiranjem novog, do sada u literaturi nepoznatog, višekriterijskog optimiranja planova pokusa, bit će realiziran u formi algoritma i programskog rješenja.

Algoritam višekriterijskog adaptivnog oblikovanja planova pokusa je podijeljen u dvije cjeline, odnosno faze:

- Faza 1 – faza početnog oblikovanja plana pokusa
  - Faza 2 – faza naknadnog poboljšavanja plana pokusa
-

---

Faza 1 ima svrhu definirati optimalni, t.j. optimirani početni plan pokusa. Ta faza se provodi prije definiranja konačnog plana pokusa. Prvi korak koji je potreban odnosi se na postavljanje početnog modela pokusa te formulacije utroška resursa (troška i utroška vremena). Realizacijom algoritma dobiva se niz generiranih planova pokusa od kojih se po zadanim kriterijima odabire optimalan. Faza 2 se izvodi kada je već strukturiran optimirani početni plan pokusa a postoji potreba poboljšanja u smislu prirasta preciznosti odzivne funkcije. Rezultat ove faze je dogradnja optimiranog početnog modela (iz faze 1) novim točkama prateći zadane primarne kriterije te postojeće karakteristike objašnjene u poglavlju 2.4 ili korekcija preciznosti postojećeg modela prethodno oblikovanog klasičnim pristupom. Sama struktura algoritma bit će prikazana kroz dijagram tijekom posebno za svaku fazu. Dijagram tijekom će sadržavati osnovne blokove koji će naknadno biti detaljnije obrazloženi.

### 3.1 Diskretizacija eksperimentalnog prostora

Kako bi se lakše shvatilo načelo funkcioniranja algoritma, posebno treba obratiti pažnju na koncept diskretizacije eksperimentalnog prostora. Zbog numeričkih operacija i općenito realizacije algoritma u nekom od programskih jezika potrebno je simbolički oblik prevesti u diskretnu formu. Točnije, kontinuiranost funkcija i promjene faktora u planu pokusa moraju se preoblikovati u diskretni oblik (vektore, matrice, odnosno polja).

Zbog velikog broja članova koji se pojavljuju u algoritmu bitno je definirati kretanje indeksa u matricnom zapisu. Indeksi  $i$ ,  $j$ ,  $l$  su indeksi koji određuju razine faktora u planu pokusa. Također, zbog standardnih prikaza modela plana pokusa uz faktor  $x_1$  veže se indeks stupca a uz faktor  $x_2$  indeks retka, te analogno za svaki sljedeći uključeni faktor. U slučaju s dva faktora gdje je indeks  $i$ ,  $j=1$ , definira se kombinacija minimalne vrijednosti razine faktora  $x_1$  i minimalne vrijednosti razine faktora  $x_2$ <sup>11</sup>. Na slici **3-1** je grafički objašnjen uvedeni sustav indeksa koji se pojavljuju u matricama (slučaj s dva faktora)<sup>12</sup>.

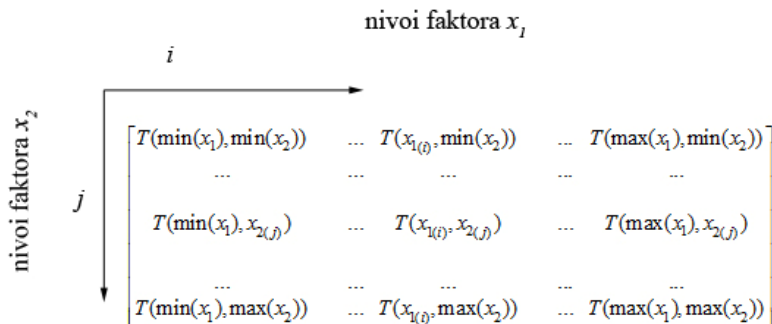
---

<sup>11</sup> Misli se na stanje pokusa s minimalnim vrijednostima faktora.

<sup>12</sup> Oznaka faktora A i B će se u matematičkom zapisu preformulirati u oznake  $x_1$  i  $x_2$ .

---





**Slika 3-1.** Indeksna notacija matrice stanja pokusa za slučaj s dva faktora

Prvi korak je odabir gustoće mreže kojom će se diskretizirati eksperimentalni prostor. Gustoća mreže definira broj diskretnih elemenata koji predstavljaju moguća stanja pokusa. Odabir gustoće se izvodi preko parametra  $m$  čiji iznos govori koliko će se elemenata po jednom faktoru generirati. Zbog zahtjeva preciznosti samog izračuna u algoritmu uzet će se jednaki broj diskretnih elemenata po svakom faktoru. Iz toga proizlazi da će eksperimentalni prostor biti definiran s  $m^k$  točaka<sup>13</sup> (stanja pokusa). Mreža  $\mathcal{N}$  bit će prikazana matricom (ili poljem)  $\mathbf{N}$  koja je sačinjena od elemenata  $z$  koji predstavljaju kombinaciju razina faktora (stanje pokusa). U slučaju s dva<sup>14</sup> faktora može se matematički zapisati:

$$\mathbf{N}_{(m \times m)} = [z_{ji}] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{1i} & \dots & z_{1m} \\ z_{j1} & z_{ji} & \dots & z_{jm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{m1} & z_{mi} & \dots & z_{mm} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

gdje je:

$$z_{ji} \equiv T(x_{1(i)}, x_{2(j)}), \quad (28)$$

za  $i, j=1, 2, \dots, m$ .

<sup>13</sup>  $k$  definira broj faktora u pokusu.

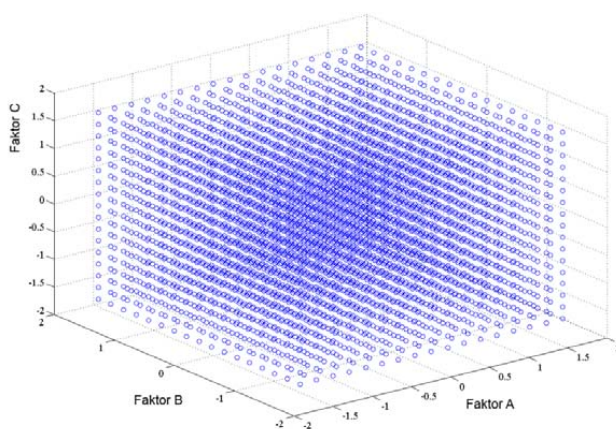
<sup>14</sup> Slučaj s dva faktora se uzima zbog jednostavnosti matematičkog zapisa

Za slučaj s više od dva faktora matrica  $\mathbf{N}$  postaje  $k$ -dimenzionalno polje (matrica u slojevima). U tom slučaju su vrijednosti u matrici  $\mathbf{N}$  jednake kombinaciji razina faktora  $x_1, x_2, \dots, x_k$ :

$$z_{j,i,l} \equiv T(x_{1(i)}, x_{2(j)}, \dots, x_{k(l)}), \quad (29)$$

za  $i, j, l=1, 2, \dots, m$ .

Na slici **3-2** prikazan je skup diskretnih vrijednosti koje čine eksperimentalni prostor u slučaju pokusa s tri faktora.



**Slika 3-2.** Diskretizirani eksperimentalni prostor u slučaju s tri faktora

Skup prikazanih točaka je ujedno i polje mogućih rješenja, skup stanja pokusa čiji elementi mogu činiti optimalni plan pokusa. Treba primijetiti da se radi o simetričnom prostoru, pravilnog oblika, koji je omeđen rasponom varijacije triju faktora. U ovome radu promatrat će se standardni raspon kodiranih faktora od vrijednosti  $-1,5$  do  $+1,5$ . U slučaju dodatnih ograničenja, koja mogu biti i rezultat uvođenja kriterija, diskretizirani poželjni eksperimentalni prostor dobiva nepravilni oblik. Postavlja se pitanje da li je  $m^k$  elementa dovoljno za opis preciznosti pojedinog modela pokusa? Odgovor bi glasio da je poželjno koristiti veći broj elemenata (gušću mrežu  $\mathcal{N}$ ) kako bi preciznost samog algoritma bila veća ali uz neizostavno povećanje vremena izvođenja u nekom programskom paketu, koje je rezultat limitiranosti dostupne računalne tehnologije. Stoga je nužno odabrati optimalni broj elemenata kako bi se zadržala adekvatna preciznost uz prihvatljivo vrijeme izvođenja. U narednim poglavljima bit će objašnjeno kako se pristupilo rješavanju tog problema.

Uporabom generirane mreže stanja pokusa, potrebno je transformirati sve funkcije koje se pojavljuju u algoritmu u oblik matrice (višeslojne za slučaj  $k=3$ ). Za slučaj s dva faktora, matrica se može zapisati:

$$\mathbf{F}_{(m \times m)} = f(\mathbf{N}) = [f(z_{ji})] = \begin{bmatrix} f(z_{11}) & f(z_{1i}) & \dots & f(z_{1m}) \\ f(z_{j1}) & f(z_{ji}) & \dots & f(z_{jm}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(z_{m1}) & f(z_{mi}) & \dots & f(z_{mm}) \end{bmatrix} \quad (30)$$

za  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ,

gdje je  $f$  funkcija kojom se generiraju vrijednosti za točke iz matrice mreže  $\mathbf{N}$ . Rezultati su pohranjeni u matrici  $\mathbf{F}$ . Analogno dosadašnjem postupku, problem s više od dva faktora se prevodi u oblik s  $k$  faktora. Matrica proizašla iz funkcije u tom slučaju postaje slojevita matrica, tj. oblika višedimenzionalnog polja. Slika **3-3** prikazuje matricu za problem s tri faktora.

$$\begin{bmatrix} f(z_{111}) & f(z_{1i1}) & \dots & f(z_{1m1}) \\ f(z_{11l}) & f(z_{1il}) & \dots & f(z_{1ml}) \\ f(z_{11i}) & f(z_{1ii}) & \dots & f(z_{1mi}) \\ f(z_{11m}) & f(z_{1im}) & \dots & f(z_{1mm}) \\ f(z_{j1m}) & f(z_{jim}) & \dots & f(z_{jmm}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(z_{m1m}) & f(z_{mim}) & \dots & f(z_{mmm}) \end{bmatrix}$$

**Slika 3-3.** Prikaz matrice u slojevima funkcije s tri faktora

Kako raste broj faktora u modelu tako kompleksnost matrica raste, što za sobom povlači i nemogućnost jednostavnog prikazivanja rezultata grafičkim prikazima. Obzirom i na gore navedeni problem, kao i na problem brzine izvođenja, algoritam će biti razvijen za najviše 3 faktora.

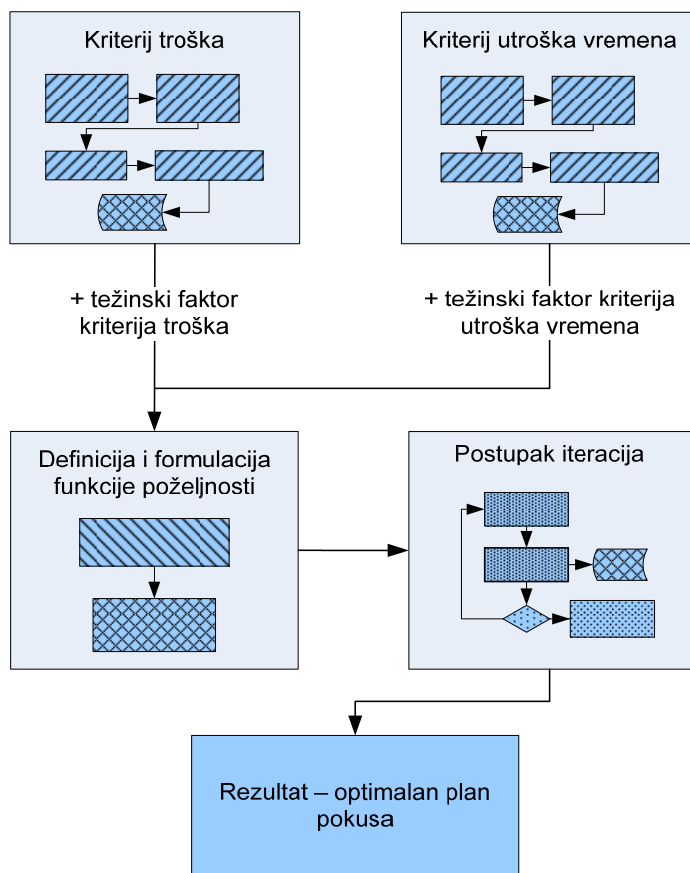
### 3.2 Faza 1 – početno oblikovanje plana pokusa

Na slici **3-4** je prikazan dijagram tijeka algoritma faze 1 iz kojeg se vidi da je struktura riješena u četiri glavna bloka. To su:

- formulacija kriterija troška,
- formulacija kriterija utroška vremena,

- definicija i formulacija funkcije poželjnosti
- iterativni postupak pronalaska optimalnog modela pokusa

Kao što se vidi iz priloženog dijagrama tijeka, blokovi su strukturirani tako da svaki od njih čini jednu zasebnu cjelinu. Redoslijed izvođenja blokova je ujedno i redoslijed kojim se algoritam izvršava te se pronalazi optimalan plan pokusa. Budući da je svaki od navedenih blokova složen i ima relativno kompleksnu strukturu, bit će posebno razmatrani u sljedećim poglavljima.



Slika 3-4. Blok struktura algoritma faze 1

### 3.2.1 Uvođenje novih kriterija oblikovanja pokusa

Kao što je već spomenuto u uvodu ovoga poglavlja, polazi se od višekriterijskog pristupa problemu oblikovanja pokusa. Novouvedeni kriteriji bit će kriterij troška eksperimentiranja kao i kriterij utroška vremena pri eksperimentiranju. Svaki od

navedenih kriterija primjenjuje se u obliku funkcije koja je definirana u eksperimentalnom prostoru, omeđena granicama varijacije razina faktora pokusa. Obzirom da se radi o problemu oblikovanja planova pokusa u području metodologije odzivne površine, faktori u pokusu su nezavisni, te su kvantitativnog i kontinuiranog obilježja. Kako su faktori kontinuiranog obilježja i varijacije njihovih vrijednosti su također kontinuirane tako će i funkcije prethodno navedenih kriterija biti kontinuirane. Iz te bitne karakteristike kontinuiranosti može se prihvatiti činjenica da se raspodjela troškova i utroška vremena<sup>15</sup> može aproksimirati jednim od adekvatnih oblika regresijske funkcije prikazanom u izrazu (31)<sup>16</sup>.

$$f_{\text{kriterija}}(x_1, x_2, \dots, x_k) = C_0 + \sum_{i=1}^k C_i x_i + \sum_{i=1}^k C_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} C_{ij} x_i x_j \quad (31)$$

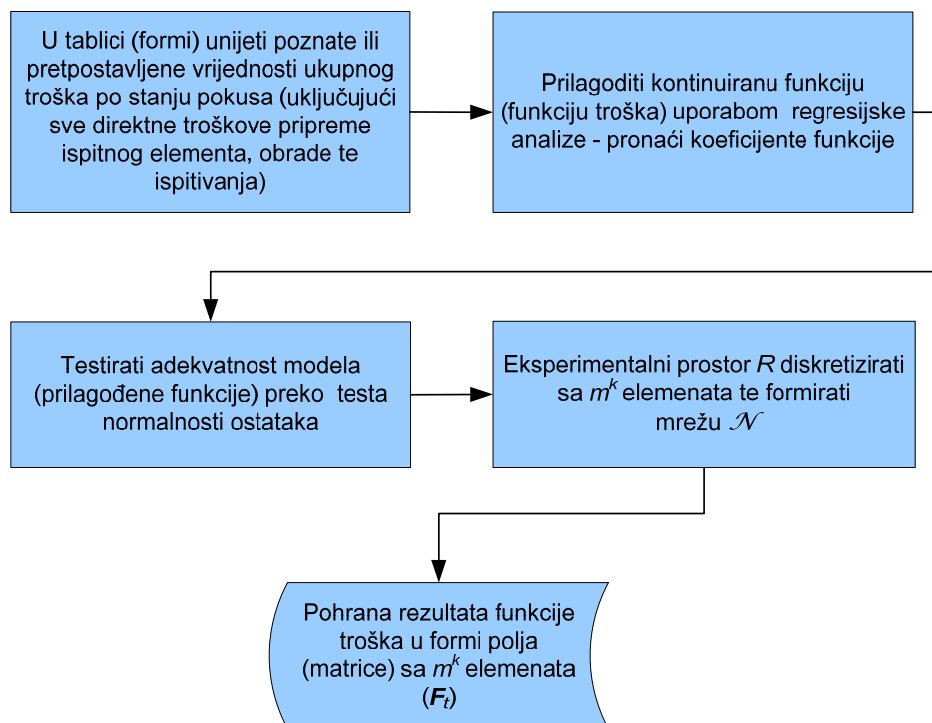
Pretpostavka je da je oblik regresijske funkcije linearni model višeg reda, što se u dosadašnjim istraživanjima nije razmatralo. U poglavlju 1.1 navedeno je kako je dosadašnji kriterij direktnih troškova, razmatran u istraživanjima navedenim u literaturnim izvorima, uzet u obliku konstantne vrijednosti duž eksperimentalnog prostora.

### 3.2.2 Definicija funkcije troška eksperimentiranja

Ukupni trošak eksperimentiranja sastoji se od konstantnog i varijabilnog dijela. Za konstantni dio definicije troška eksperimentiranja uzimaju se troškovi vezani općenito za pripremu pokusa, a nevezano za broj eksperimentalnih uzoraka i broja ispitivanja. Pretpostavka je da je konstantni dio troškova neovisan o veličini i obujmu plana pokusa. Drugim riječima, razlika od modela do modela pokusa neće utjecati na konstantni dio. Varijabilni dio troškova je vezan za direktne troškove izrade i pripreme ispitnog uzorka i troškove po provedenom ispitivanju. To bi značilo da se dodavanjem točaka pokusa (stanja pokusa) mijenja i ukupni trošak. Dijagram tijeka bloka algoritma za definiranje funkcije troška eksperimenta je dan na slici 3-5.

<sup>15</sup> Pod utroškom vremena se misli na vremensko trajanje eksperimenta.

<sup>16</sup> Indeks  $i$  u izrazu u ovom slučaju određuje  $i$ -ti faktor, dok je  $j$  pomoćni indeks.



Slika 3-5. Dijagram tijeka definicije funkcije troška

Sama funkcija troška može biti različitog oblika, a istraživač je onaj koji može imati informaciju o eksplisnom obliku funkcije (što je malo vjerojatno) ili aproksimirati nekom od postojećih metoda estimacije (regresijska analiza, nelinearna estimacija...). Ako se ukupni trošak eksperimentiranja aproksimira funkcijom<sup>17</sup>:

$$f_t(x_1, x_2, \dots, x_k) = C_{T_0} + \sum_{i=1}^k C_{T_i} x_i + \sum_{i=1}^k C_{T_{ii}} x_i^2 + \sum_{i < j} C_{T_{ij}} x_i x_j \quad (32)$$

tada  $C_{T_0}$  predstavlja slobodni član,  $C_{T_i}$  i  $C_{T_{ii}}$  prirast troškova u ovisnosti o promjeni faktora  $x_i$  te  $C_{T_{ij}}$  prirast troškova zbog eventualne varijacije troška u slučaju interakcije faktora. Sama interakcija bi značila da postoji određena varijacija u trošku zbog kompleksnosti izvedbe pri istovremenoj promjeni razina faktora, a nevezana za pojedinačne priraste troškova (glavne efekte<sup>18</sup>). Funkcija troška se aproksimira na način da se metodom regresijske analize, preko definiranih točaka u

<sup>17</sup> Indeks  $i$  u izrazu u ovom slučaju određuje  $i$ -ti faktor, dok je  $j$  pomoćni indeks.

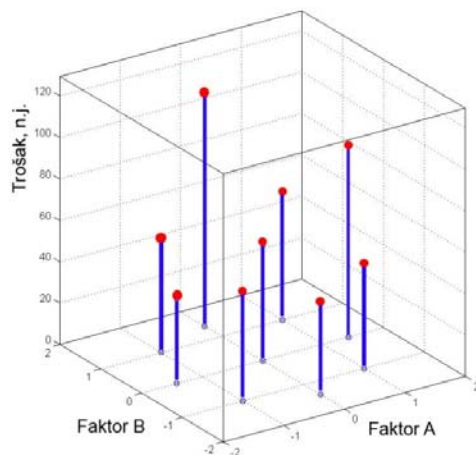
<sup>18</sup> Engl. *main effects*, je djelovanje nezavisne varijable na zavisnu uzimajući prosječno djelovanje preko svih razina ostalih nezavisnih varijabli.

eksperimentalnom prostoru, prilagodi krivulja po metodi minimalne sume kvadrata odstupanja. Konkretno, diskretne vrijednosti koje su baza za provedbu regresijske analize su ili proizvoljno odabrane ili su uzete po modelu početnog<sup>19</sup> plana pokusa. Za unos (definiciju) troškova početnog plana pokusa odabire se slična forma kao i forma unosa bilo koje odzivne varijable. U tablici **3-1** je prikazana općenita forma unosa podataka o troškovima eksperimenta ( $t$ ).

**Tablica 3-1.** Forma unosa podataka o troškovima eksperimenta

Br. točke	Faktor A	Faktor B	...	Trošak ( $t$ )
1.	-1	-1	...	$t_1$
2.	1	1	...	$t_2$
3.	-1	1	...	$t_3$
4.	1	-1	...	$t_4$
i.	...	...	...	$t_i$

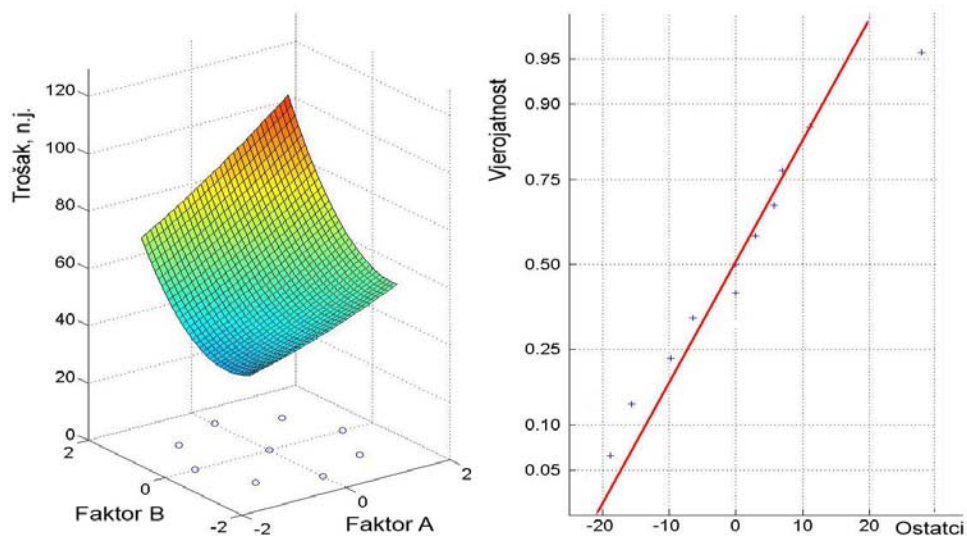
Trošak stanja pokusa je stvarna (iskustvena) vrijednost ako se radi na poboljšavanju odabranog modela i uporabi 2. faze algoritma VAOPP. U tom slučaju je trošak stvarni te su i podaci realni. U slučaju početnog oblikovanja plana pokusa, uporabom 1. faze algoritma VAOPP, troškovi pojedinih stanja bit će procijenjene vrijednosti. Nakon unosa troškova u zadanu formu dobiva se polje točaka.



**Slika 3-6.** Polje točaka (stanja pokusa) i pripadajuće vrijednosti troška

<sup>19</sup> Pod početnim planom pokusa se misli na pokus koji je na početku istraživanja pretpostavljen kao optimalni.

Polje točaka procijenjenih vrijednosti troška po stanju pokusa u slučaju klasičnog CCD plana pokusa s dva faktora prikazan je na slici **3-6**. Kada je moguće procijeniti (ili imati stvarne podatke) po stanjima pokusa između standardnih točaka početnog plana pokusa, može se dobiti detaljniji uvid u raspored troška po eksperimentalnom prostoru, a time i točniju aproksimaciju funkcije troška. Obzirom da je funkcija troška aproksimacija vrijednosti troškova u eksperimentalnom prostoru, važno je naglasiti da je isto tako moguća pogreška tj. odstupanje od stvarnih vrijednosti. Zbog kompleksnosti samog računa aproksimacijske funkcije ta pogreška će se zanemariti. Međutim, treba imati na umu da ona u stvarnosti postoji. Značajnost aproksimirane funkcije testirat će se uporabom testa normalnosti ostataka. Test normalnosti ostataka testira odstupanja od procijenjenih vrijednosti (vrijednosti dobivenih uporabom aproksimacijske funkcije) i stvarnih vrijednosti. U algoritmu VAOPP bit će korišten standardni test normalnosti, papir vjerojatnosti normalne razdiobe (engl. *normal probability plot*). Na slici **3-7** je grafički prikaz aproksimacijske (regresijske) funkcije troškova problema s 2 faktora za primjer početnog CCD plana pokusa uz prikaz papira vjerojatnosti ostataka.



**Slika 3-7.** Funkcija troška i prikaz ostataka u papiru vjerojatnosti normalne razdiobe

Dobivena funkcija troška definirana je u eksperimentalnom prostoru te vrijedi za navedeno područje. Unosom bilo koje kombinacije razina faktora (točke eksperimentalnog prostora) moguće je dobiti vrijednost pripadajućeg troška. Funkcija



će se diskretizacijom eksperimentalnog prostora, preoblikovati u matricu (ili polje) koja će sadržavati diskretne vrijednosti troška. Broj diskretnih vrijednosti ovisit će o gustoći mreže  $\mathcal{N}$ . Izrazom (33) može se zapisati transformacija funkcije troška u matricnom obliku za dva faktora. Razvijeni oblik za dva faktora je dan u izrazu (34).

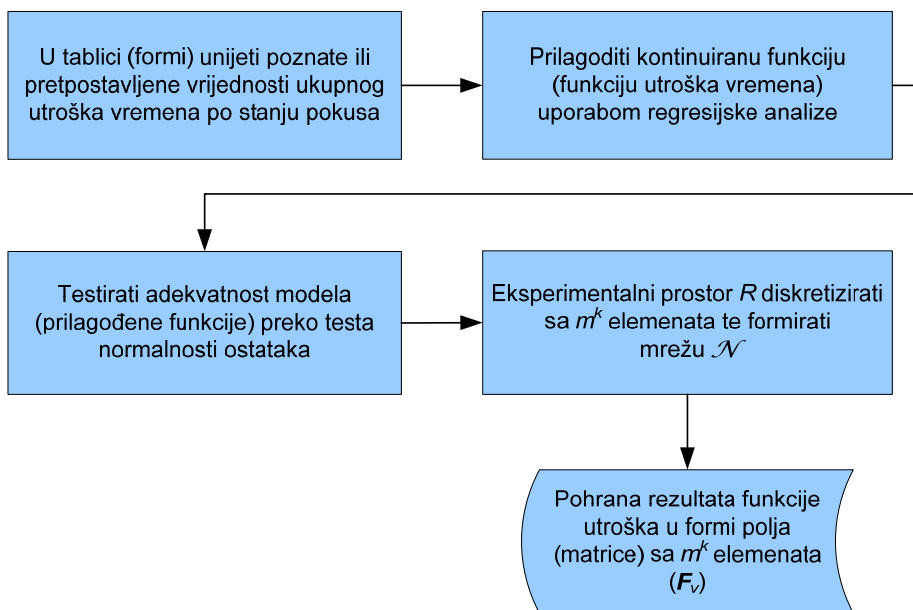
$$\mathbf{F}_t = \left[ f_t(z_{ji}) \right] \quad (33)$$

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} C_{T0} + C_{T1}x_{1(1)} + C_{T2}x_{2(1)} + C_{T11}x_{1(1)}^2 + C_{T22}x_{2(1)}^2 + C_{T12}x_{1(1)}x_{2(1)} \cdots \\ C_{T0} + C_{T1}x_{1(j)} + C_{T2}x_{2(j)} + C_{T11}x_{1(j)}^2 + C_{T22}x_{2(j)}^2 + C_{T12}x_{1(j)}x_{2(j)} \cdots \\ \cdots \\ C_{T0} + C_{T1}x_{1(m)} + C_{T2}x_{2(m)} + C_{T11}x_{1(m)}^2 + C_{T22}x_{2(m)}^2 + C_{T12}x_{1(m)}x_{2(m)} \cdots \\ \left[ \begin{array}{c} C_{T0} + C_{T1}x_{1(i)} + C_{T2}x_{2(i)} + C_{T11}x_{1(i)}^2 + C_{T22}x_{2(i)}^2 + C_{T12}x_{1(i)}x_{2(i)} \cdots \\ C_{T0} + C_{T1}x_{1(j)} + C_{T2}x_{2(j)} + C_{T11}x_{1(j)}^2 + C_{T22}x_{2(j)}^2 + C_{T12}x_{1(j)}x_{2(j)} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} C_{T0} + C_{T1}x_{1(m)} + C_{T2}x_{2(m)} + C_{T11}x_{1(m)}^2 + C_{T22}x_{2(m)}^2 + C_{T12}x_{1(m)}x_{2(m)} \\ \cdots \\ \cdots \\ C_{T0} + C_{T1}x_{1(m)} + C_{T2}x_{2(m)} + C_{T11}x_{1(m)}^2 + C_{T22}x_{2(m)}^2 + C_{T12}x_{1(m)}x_{2(m)} \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (34)$$

### 3.2.3 Definicija funkcije utroška vremena eksperimentiranja

Funkcija utroška vremena definira se vrlo slično kao i funkcija troška. Ukupni utrošak vremena jest proteklo vrijeme od početka eksperimentiranja zaključno s provedbom ispitivanja. Bitno je razlučiti da je utrošak vremena, kao pojam koji će se koristiti u ovom radu, usko vezan za protok vremena, a ne za troškove koji proizlaze iz njega. Sve direktne troškove vezane za veličinu vremenskog perioda treba pridružiti prethodno objašnjenom pojmu troška. Utrošak vremena je strukturiran u dva dijela. Prvi dio je konstantni i odnosi se na utrošeno vrijeme za pripremu pokusa, a ne ovisi o veličini (obujmu) plana pokusa<sup>20</sup>. Drugi dio je varijabilni dio utroška vremena i odnosi se na direktni utrošak vremena izrade i pripreme uzoraka, te utrošeno vrijeme potrebno za provedbu ispitivanja. Dijagram tijeka bloka algoritma koji definira funkciju utroška vremena je identičan dijagramu tijeka za definiranje funkcije troška te je prikazan na slici 3-8.

<sup>20</sup> Pretpostavka koja je dana i u slučaju konstantnog dijela troška eksperimentiranja.



**Slika 3-8.** Dijagram tijeka definicije funkcije utroška vremena

Adekvatni oblik funkcije, kojom se može obuhvatiti pojava raspodjele utroška vremena, je isti kao i u slučaju funkcije troška i može se zapisati:

$$f_v(x_1, x_2, \dots, x_k) = C_{v0} + \sum_{i=1}^k C_{vi} x_i + \sum_{i=1}^k C_{vii} x_i^2 + \sum_{i < j} \sum C_{vij} x_i x_j \quad (35),$$

gdje je  $C_{v0}$  slobodni član,  $C_{vi}$  i  $C_{vii}$  prirast utroška vremena u ovisnosti o promjeni faktora  $x_i$  te  $C_{vij}$  prirast utroška vremena zbog mogućih interakcija. Vrlo često sama interakcija faktora je značajna u pogledu utrošenog vremena. Kod ekstremnih vrijednosti faktora, na granici eksperimentalnog prostora, obično je potrebno utrošiti više vremena kako na pripremu i tretiranje uzorka tako i na provedbu samog ispitivanja<sup>21</sup>.

Analogno postupku objašnjenom u poglavlju 3.2.2 podaci o utrošku vremena ( $v$ ) se unose u formu početnog plana pokusa, te nakon dobivenog polja točaka se provodi regresijska analiza. Podaci mogu biti procijenjene vrijednosti, bazirane na iskustvu i prirodni promatrane pojave, ili pak stvarne vrijednosti u slučaju da su već odrađena ispitivanja te je potrebno poboljšanje modela. Testiranje značajnosti modela (funkcije) provodit će se putem testa ostataka u papiru vjerojatnosti normalne

<sup>21</sup> Primjer je otpornost na propagaciju pukotina, puzanje materijala, ispitivanje tvrdoće po presjeku.

razdiobe. Nakon diskretizacije eksperimentalnog prostora funkcija utroška vremena će se transformirati u matricu (polje) utroška vremena s  $m^k$  elemenata:

$$\mathbf{F}_v = \left[ f_v(z_{ji}) \right]. \quad (36)$$

Pretpostavljeni oblik aproksimacijske funkcije raspodjele utroška vremena je isti kao i u slučaju kriterija troška, te je moguće izraz (36) prikazati u razvijenom obliku, također za slučaj s dva faktora:

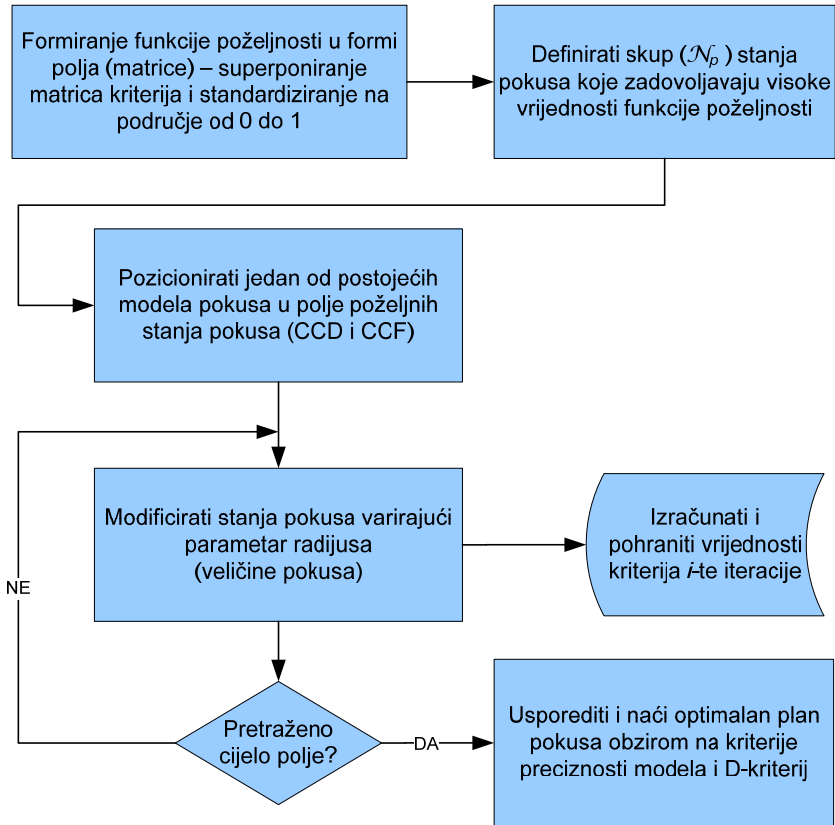
$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} C_{V0} + C_{V1}x_{1(i)} + C_{V2}x_{2(i)} + C_{V11}x_{1(i)}^2 + C_{V22}x_{2(i)}^2 + C_{V12}x_{1(i)}x_{2(i)} \cdots \\ C_{V0} + C_{V1}x_{1(j)} + C_{V2}x_{2(j)} + C_{V11}x_{1(j)}^2 + C_{V22}x_{2(j)}^2 + C_{V12}x_{1(j)}x_{2(j)} \cdots \\ \cdots \\ C_{V0} + C_{V1}x_{1(m)} + C_{V2}x_{2(m)} + C_{V11}x_{1(m)}^2 + C_{V22}x_{2(m)}^2 + C_{V12}x_{1(m)}x_{2(m)} \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{V0} + C_{V1}x_{1(i)} + C_{V2}x_{2(i)} + C_{V11}x_{1(i)}^2 + C_{V22}x_{2(i)}^2 + C_{V12}x_{1(i)}x_{2(i)} \cdots \\ C_{V0} + C_{V1}x_{1(j)} + C_{V2}x_{2(j)} + C_{V11}x_{1(j)}^2 + C_{V22}x_{2(j)}^2 + C_{V12}x_{1(j)}x_{2(j)} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \quad (37)$$

### 3.2.4 Formulacija funkcije poželjnosti

Kriterije troška i utroška vremena potrebno je izraziti preko jedinstvenog, objedinjavajućeg kriterija. Dijagram tijeka definicije i formulacije funkcije poželjnosti kao i proces iteracija dan je na slici **3-9**.

Funkcija poželjnosti je rezultat superponiranja funkcija kriterija troška i utroška vremena. Obzirom da su kontinuirane funkcije transformirane u matični oblik veličine  $m^k$ , funkcija poželjnosti će biti izražena isto tako kroz matricu  $\mathbf{F}_p$ . Matematički se zapisuje matrica funkcije poželjnosti preko:

$$\mathbf{F}_p = k_t \cdot \mathbf{F}_t^r + k_v \cdot \mathbf{F}_v^r, \quad (38)$$



**Slika 3-9.** Dijagram tijeka formulacije kriterija funkcije poželjnosti

gdje su  $k_t$  i  $k_v$  težinski faktori kriterija troška, odnosno kriterija utroška vremena, a  $F_v^r$  i  $F_t^r$  su matrice kriterija u relativnoj bezdimenzijskoj skali. Kako bi se uopće izrazila funkcija poželjnosti, koja je sastavljena od kriterija u različitim jedinicama, potrebno je relativizirati funkcije kriterija na način:

$$F_t^r = I - \frac{F_t}{\max(F_t)} \quad (39)$$

i

$$F_v^r = I - \frac{F_v}{\max(F_v)}. \quad (40)$$

Vrijednosti članova matrice relativnog troška i utroška vremena se kreću u rasponu od 0-1, a dobiveno iz odnosa s najvećom vrijednosti kriterija. Veća vrijednost članova

matrice označava ona stanja pokusa koja nose manji utrošak dotičnog resursa. Težinski faktori su konstante koje definiraju kakav je odnos kriterija, točnije, kriterij ima prednost prilikom odabira stanja pokusa. Težinski faktor je izražen kvantitativno i ostaje u domeni odlučivanja (engl. *decision making process*). Kretanje težinskog faktora je određeno skalom od 0-10, gdje male vrijednosti označavaju malu značajnost, a velike osobitu značajnost promatranog kriterija.

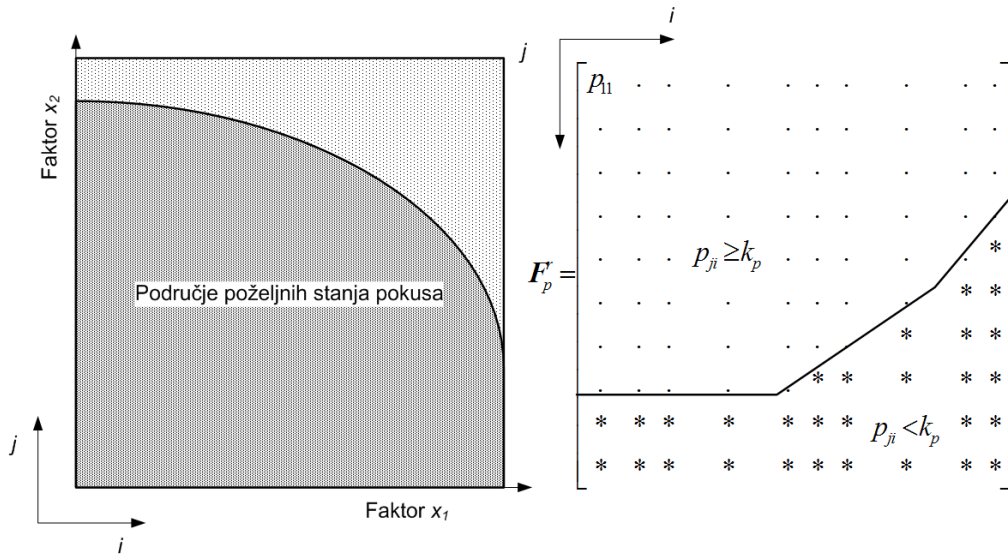
Uzimajući izraz (38), (39) i (40) može se napisati:

$$\mathbf{F}_p = k_t \cdot \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{F}_t}{\max(\mathbf{F}_t)} \right) + k_v \cdot \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{F}_v}{\max(\mathbf{F}_v)} \right). \quad (41)$$

Budući da se iz izraza (38), odnosno (41) može zaključiti kako su elementi matrice  $\mathbf{F}_p$  izvan područja 0-1, potrebno je transformirati članove matrice na spomenuto područje (izraz 42).

$$\mathbf{F}_p^r = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{F}_p}{\max(\mathbf{F}_p)} \quad (42)$$

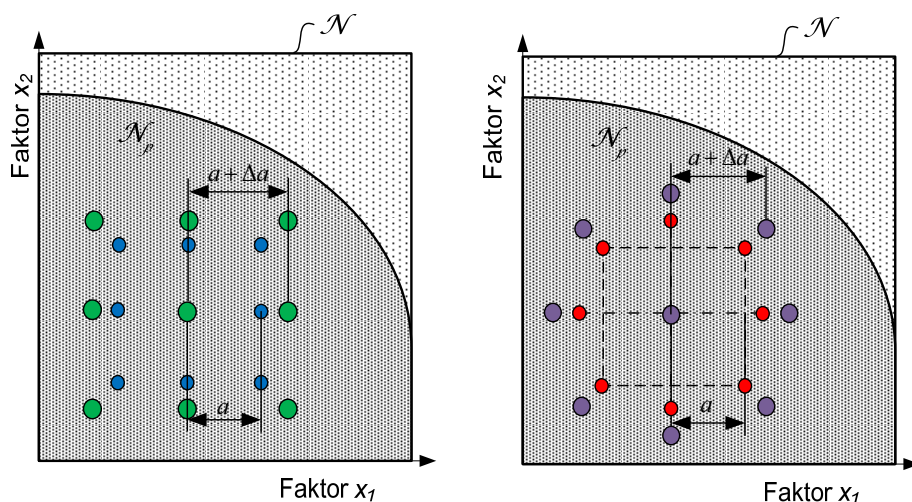
Nakon transformacije podataka iz matrice, moguće je jednostavno tumačenje vrijednosti matrice poželjnosti. Element s najvišom vrijednosti u matrici poželjnosti (to je vrijednost 1) određuje ono stanje pokusa koje je uputno integrirati u model pokusa, dok element s najmanjom vrijednosti u matrici (vrijednost 0) je apsolutno nepoželjna točka za uvođenje u model pokusa, naravno, s stajališta dva primarna kriterija. Stanje pokusa je određeno mjestom u matrici funkcije poželjnosti  $\mathbf{F}_p^r$ , tj. s indeksom  $i, j, \dots, k$ . Polje (skup) stanja pokusa poželjnih za izvođenje može se definirati graničnom vrijednosti  $k_p$ . Sve točke koje su ispod zadane vrijednosti se odbacuju dok se zadržavaju samo one čija je vrijednost iznad, odnosno one čija je poželjnost veća. Problem se može javiti prilikom određivanja granične vrijednosti koja mora biti u domeni odlučivanja. Tako je na istraživaču da odredi granicu poželjnosti. Predlaže se da granična vrijednosti poželjnosti nije manja od vrijednosti 0,3 ( $k_p=30\%$ ) što omogućuje odbacivanje sigurno ekstremnih, nepoželjnih stanja pokusa. Na slici **3-10** skicirano je polje poželjnih stanja pokusa, nakon određivanja granice, za slučaj s dva faktora.



Slika 3-10. Skica polja poželjnih stanja pokusa i pripadajuće matrice poželjnosti  $F_p^r$

### 3.2.5 Generiranje niza planova pokusa

Nakon definicije skupa poželjnih stanja pokusa  $\mathcal{N}_p \supset \mathcal{N}$  potrebno je u sredinu prostora pozicionirati centralnu točku pokusa (centralno stanje pokusa). Centralno stanje pokusa je polazišna točka za generiranje niza modela pokusa. Algoritam pozicionira inicijalni model pokusa s centrom u odabranoj centralnoj točki skupa  $\mathcal{N}_p$ . U bloku algoritma zaduženog za generiranje različitih oblika pokusa, uzimaju se oni modeli s poželjnim značajkama, a koji su objašnjeni u poglavlju 2.2.3. Nakon odabranog oblika varira se veličina samog modela pokusa na način da se definira parametar  $a$ , udaljenost centralne točke od vrhova pokusa. Definicijom promjene parametra  $a$  mijenja se i veličina pokusa te se generira niz modela pokusa. Proces se zaustavlja sve dok više nije moguća promjena zbog nailaženja na granicu skupa  $\mathcal{N}_p$ . Težnja je da se vršne i aksijalne točke pozicioniraju što bliže granici kako bi se ostvarila visoka vrijednost D-kriterija (objašnjeno u poglavlju 2.4.1.1.1). Na slici 3-11 grafički je prikazan dio algoritma koji generira niz modela pokusa za slučaj s dva faktora.



Slika 3-11. Skica bloka algoritma za generiranje niza pokusa

Obzirom na potrebu nužnog ponavljanja stanja pokusa centralna točka se generira tri puta. Iz centralnih točaka pokusa dobiva se čista pogreška, čija svrha je vezana za testiranje značajnosti efekata i pridonosi karakteristici raspodjele procijenjene varijance, što je također detaljnije objašnjeno u poglavlju 2.2.3.1.

Matematički se može zapisati matrica oblika inicijalnog plana pokusa:

$$\mathbf{D}(\zeta_0) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{1i} & \dots & d_{1k} \\ d_{j1} & d_{ji} & \dots & d_{jk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{N1} & d_{Ni} & \dots & d_{Nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1c} & x_{2c} & \dots & x_{kc} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1f} & x_{2f} & \dots & x_{kf} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1ax} & x_{2ax} & \dots & x_{kax} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (43)$$

gdje su  $x_{kc}$  koordinata centralne točke po faktoru  $k$ ,  $x_{kf}$  koordinata faktorskih<sup>22</sup> točaka po faktoru  $k$  te  $x_{kax}$  koordinata aksijalnih točaka po faktoru  $k$ . Sljedeći matematički zapisi vrijede za slučaj s dva faktora. Matematički zapis algoritma generiranja niza matrica oblika plana pokusa iz inicijalne matrice  $\mathbf{D}_{2 \text{ faktora}}(\zeta_0)$ :

<sup>22</sup> Vršne točke pokusa koje čine faktorski dio plana pokusa.

$$\mathbf{D}_{2 \text{ faktora}}(\zeta_0) = \begin{bmatrix} x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} + a & x_{2c} + a \\ x_{1c} - a & x_{2c} - a \\ x_{1c} + a & x_{2c} - a \\ x_{1c} - a & x_{2c} + a \\ x_{1c} + \alpha & x_{2c} \\ x_{1c} - \alpha & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} + \alpha \\ x_{1c} & x_{2c} - \alpha \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{D}_{2 \text{ faktora}}(\zeta_1) = \begin{bmatrix} x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} + a + \Delta a & x_{2c} + a + \Delta a \\ x_{1c} - a - \Delta a & x_{2c} - a - \Delta a \\ x_{1c} + a + \Delta a & x_{2c} - a - \Delta a \\ x_{1c} - a - \Delta a & x_{2c} + a + \Delta a \\ x_{1c} + \alpha + \Delta \alpha & x_{2c} \\ x_{1c} - \alpha - \Delta \alpha & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} + \alpha + \Delta \alpha \\ x_{1c} & x_{2c} - \alpha - \Delta \alpha \end{bmatrix}, \quad (44)$$

gdje je  $\Delta a$  definiran korakom promjene i gustoćom mreže  $\mathcal{N}$ , a  $\alpha$  i  $\Delta \alpha$  su definirani oblikom inicijalnog plana pokusa. Generiranje ostalih matrica oblika plana pokusa  $\mathbf{D}_{2 \text{ faktora}}(\zeta_d)$ :

$$\mathbf{D}_{2 \text{ faktora}}(\zeta_d) = \begin{bmatrix} x_{1c} & x_{2c} \\ \vdots & \vdots \\ \left(x_{1f_{1,2,4}}\right)_{(\zeta_{d-1})} \pm \Delta a & \left(x_{2f_{1,2,4}}\right)_{(\zeta_{d-1})} \pm \Delta a \\ \vdots & \vdots \\ \left(x_{1\alpha_{1,2,4}}\right)_{(\zeta_{d-1})} \pm \Delta \alpha & \left(x_{2\alpha_{1,2,4}}\right)_{(\zeta_{d-1})} \pm \Delta \alpha \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (45)$$

Gdje indeks  $\zeta_{d-1}$  označava plan pokusa iz prethodne iteracije.

Za CCD oblik plana pokusa s dva faktora:

$$\alpha = \sqrt{2}a, \quad (46)$$

dok za CCF oblik plana pokusa:

$$\alpha = a. \quad (47)$$

Za CCD oblik plana pokusa s dva faktora korak pomaka aksijalnih točaka mijenja se s promjenom veličine pokusa te je definiran:



$$\Delta a_{(\zeta_d)} = \sqrt{2}(a_{(\zeta_{d-1})} + \Delta a) - \sqrt{2}a_{(\zeta_{d-1})}, \quad (48)$$

gdje je  $a_{(\zeta_{d-1})}$  parametar veličine plana pokusa u prethodnoj iteraciji. Kod CCF oblika plana pokusa, parametra promjene aksijalnih točaka je konstantan i iznosi:

$$\Delta a = \Delta a. \quad (49)$$

Doprinos u povećanju parametra veličine pokusa ( $\Delta a$ ) usko je vezan za gustoću mreže  $\mathcal{N}$ . Minimalna vrijednost veličine  $\Delta a$  je određena razlikom  $\Delta z = z_{ji} - z_{j(i+1)}$ , razlikom između dvije točke diskretiziranog prostora<sup>23</sup>. Ako se promotre parametri  $a$  i  $\Delta a$  koji su ovisni o parametru  $a$  kroz izraze (46) i (48), može se utvrditi da zbog gustoće mreže neće biti moguće generirati aksijalne točke na egzaktnim vrijednostima već će se uzeti približna vrijednost. Generirane matrice planova pokusa spremaju se u posebno polje<sup>24</sup>. Polje će na prvom mjestu pohraniti matricu inicijalnog pokusa, a na zadnjem matricu onog pokusa čija je barem jedna točka element granice  $\mathcal{N}_p$ . Definicija polja koje sadrži niz generiranih planova pokusa je sljedeća:

$$[\mathbf{D}_d] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} [\mathbf{D}(\zeta_0)] & [\mathbf{D}(\zeta_d)] & \dots & [\mathbf{D}(\zeta_h)] \\ \hline (1 \times h) & (N \times k) & (N \times k) & (N \times k) \end{array} \right] \quad (50)$$

i vrijedi za  $k$  faktora. Svakoj matrici oblika pokusa se formira matrica pokusa  $X(\zeta_d)$  na sljedeći način:

$$X(\zeta_d) = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{J} & \mathbf{D}(\zeta_d) & \mathbf{D}'(\zeta_d) \\ \hline (N \times 1) & (N \times k) & \left( N \times \left( k + \binom{k}{2} \right) \right) \end{array} \right], \quad (51)$$

gdje je  $\mathbf{J}$  jedinični vektor stupac veličine  $N$ , a  $\mathbf{D}'(\zeta_d)$  matrica nelinearnih članova i interakcija:

<sup>23</sup> U smjeru jedne osi.

<sup>24</sup> Misli se na polje kao jednu od vrsta zapisa podataka u programskom kodu.

$$\mathbf{D}'(\zeta_d) = \begin{bmatrix} \overbrace{d_{11}^2 \quad d_{1i}^2 \quad \dots \quad d_{1k}^2}^{\text{kvadratni član } (x_i^2)} \quad \overbrace{d_{11}d_{1i} \quad d_{11}d_{1k} \quad \dots \quad d_{1i}d_{1k}}^{\text{interakcije } (x_i x_j)} \\ d_{j1} \quad d_{ji} \quad \dots \quad d_{jk} \quad \dots \quad d_{j1}d_{ji} \quad d_{j1}d_{jk} \quad \dots \quad d_{ji}d_{jk} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ d_{N1} \quad d_{Ni} \quad \dots \quad d_{Nk} \quad \dots \quad d_{N1}d_{Ni} \quad d_{N1}d_{Nk} \quad \dots \quad d_{Ni}d_{Nk} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Za kriterij preciznosti modela uzima se već postojeći oblik koji je dio  $Q$ -kriterija. Preciznost modela se definira prema izrazu (općenito):

$$Q(\zeta_d) = s^2 \cdot \int_{\mathcal{N}} \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}(\zeta_d)^T \mathbf{X}(\zeta_d))^{-1} \mathbf{x}^{(m)} dx, \quad (53)$$

što predstavlja ukupnu vrijednost funkcije procijenjene varijance dotičnog modela  $v(x)$  iz izraza (54) u području  $\mathcal{N}$  uz  $s^2=1$ . Može se primijetiti da je manja vrijednost veličine  $Q$  označava veću preciznost modela, i obrnuto.

$$v(x)_d = \mathbf{x}_i^{T(m)} (\mathbf{X}(\zeta_d)^T \mathbf{X}(\zeta_d))^{-1} \mathbf{x}_i^{(m)}. \quad (54)$$

Preciznost modela zapisana preko matričnog oblika:

$$Q(\zeta_d) = s^2 \cdot \sum_{i=1}^{m^k} \left\{ \mathbf{x}_i^{T(m)} (\mathbf{X}(\zeta_d)^T \mathbf{X}(\zeta_d))^{-1} \mathbf{x}_i^{(m)} \right\}, \quad (55)$$

gdje je  $\mathbf{x}_i^{T(m)}$  vektor koordinate  $i$ -te točke u skupu  $\mathcal{N}$ . Potrebno je razlučiti da preciznost modela nije definirana samo u području  $\mathcal{N}_p$ , već se proteže preko cijelog područja  $\mathcal{N}$  koje je ujedno i područje istraživanja. Budući da je područje  $(\mathcal{N} - \mathcal{N}_p)$  komplement skupa  $\mathcal{N}_p$  ono ne sadrži eksperimentalne točke (stanja pokusa) te je procjena odzivnih vrijednosti lošija. Kao što je već detaljnije objašnjeno (poglavlje 2.2.1), kvaliteta procjene, a povezano s time i interval procjene odzivnih vrijednosti, će biti izražena kroz samu vrijednost procijenjene varijance. Promatrajući ponašanje procijenjene varijance izvan eksperimentalnog prostora dolazi se do zaključka da se vrijednosti  $v(x)$  naglo povećava udaljenošću od granice  $\mathcal{N}_p$ . Stoga je jedno od poželjnih karakteristika to da se točke modela pokusa pozicioniraju što bliže granici  $\mathcal{N}_p$ .

---

### 3.2.6 Odabir optimalnog plana pokusa

Iz polja koje sadrži generirane planove pokusa  $D_d$  potrebno je odabrati optimalni plan pokusa. Obzirom da svi generirani modeli pokusa zadovoljavaju funkciju poželjnosti  $F_p$ , može se smatrati da su svi oni, u pogledu troška i utroška vremena, prihvatljivi. Naravno, moguće su manje varijacije u pogledu utroška tih resursa, što se u ovom koraku zanemaruje. Preostaje odrediti novi kriterij odabira po kojemu će se klasificirati modeli te u konačnici odrediti onaj optimalan.

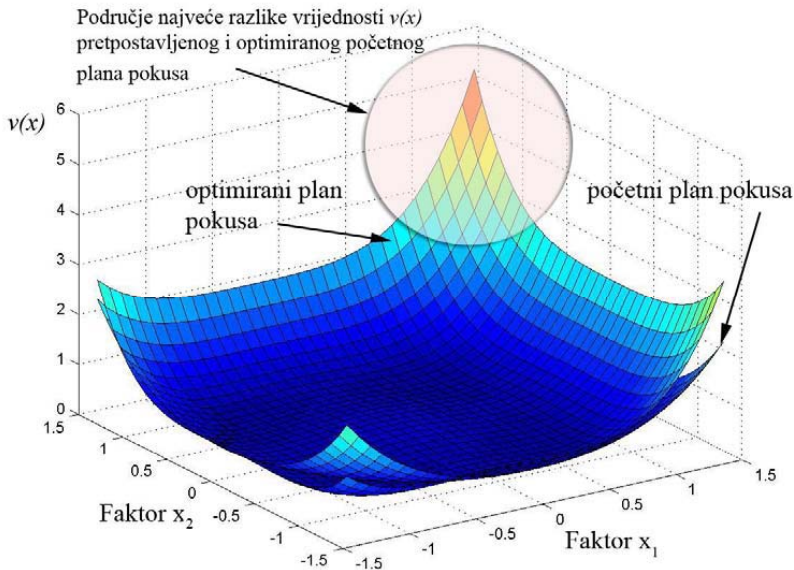
Odnos vrijednosti  $Q(\zeta_d)$  različitih modela pokusa  $\zeta_d$  i vrijednosti početnog (pretpostavljenog) modela  $Q(\zeta_p)$  postaje kriterij za selekciju pri odabiru optimalnog plana pokusa. Uzimajući izraze (53) i (55) dobiva se ukupna vrijednost funkcije procijenjene varijance preko cijelog eksperimentalnog područja  $\mathcal{N}$ , a time je obuhvaćen i dio koji nije obuhvaćen eksperimentalnim točkama. Zbog tog svojstva kontrolira se vrijednost funkcije procijenjene varijance i u najudaljenijim točkama gledajući područje  $\mathcal{N}_p$ . Drugim riječima, može se zaključiti da će točke plana pokusa na rubu područja  $\mathcal{N}_p$ , a time i veličina generiranog plana pokusa bitno utjecati na samu vrijednost te postati dobar pokazatelj kakva kvaliteta procjene se može očekivati u neobuhvaćenom dijelu. Iz karakteristike vrijednosti  $Q(\zeta_d)$  koja je direktno zavisna o veličini plana pokusa, zaključuje se da će maksimalnu vrijednost imati početni (pretpostavljeni) plan pokusa, pa je stoga njegova funkcija  $v(x)$  referentna veličina (slika 3-12).

Kako pozicioniranjem točaka blizu granice  $\mathcal{N}_p$  razlika vrijednosti  $Q(\zeta_d)$  postaje vrlo mala uzima se u obzir i postojeći kriterij D-optimalnosti. Obzirom da je ortogonalnost, kao mogući kriterij, definirana pozicioniranjem centralne točke i relativnim odnosom (rasporedom) ostalih točaka eksperimenta, ona se neće bitno mijenjati. Iz navedenog razloga, kriterij ortogonalnosti neće se uzimati u obzir kao jedan od mogućih kriterija selekcije.

Konačno, odabrani plan pokusa bit će izražen kroz matricu  $D$ . Matrica  $D$  dat će prijedlog oblika optimalnog plana pokusa sadržavajući koordinate svih stanja pokusa. Također bit će eksplicitno izražene vrijednosti svih promatranih kriterija.

---

Rješenje će sadržavati direktni trošak eksperimenta, utrošak vremena, preciznost modela izraženu preko (55), te vrijednost D-kriterija.



**Slika 3-12.** Usporedba vrijednosti  $v(x)$  pretpostavljenog i optimiranog početnog plana pokusa

Tako oblikovan optimalni plan pokusa moguće je dodatno korigirati uporabom algoritma faze 2 VAOPP-a, a obzirom na potrebu poboljšavanja preciznosti modela. Postupak proširenja modela može se provesti uz izvjesno povećanje vrijednosti utrošenih resursa, ali još uvijek zadovoljavajući ograničenje definirano funkcijom poželjnosti.

### 3.3 Faza 2 – poboljšanje postojećeg plana pokusa

Druga faza algoritma VAOPP-a sadrži metode poboljšanja postojećeg modela. Postojeći model pokusa, kao početni model pokusa, može biti rezultat faze 1 algoritma VAOPP-a ili pak pretpostavljeni model koji nije proveden po metodologiji prve faze. Modifikacija se vrši kada se pojavi potreba za povećanjem preciznosti modela ili pak zbog nemogućnosti izvođenja određenih stanja pokusa iz razloga vezanih za ograničenost resursa. Direktni trošak može postati ograničavajući faktor,

no nerijetko problem nastaje vezano uz vremenski rok do kojeg bi eksperiment trebao biti proveden. Kada je eksperiment u tijeku, vrlo je teško provesti modifikacije oblika predefiniranog modela pokusa te je nužno koristiti efikasne metode koje minimalnim intervencijama korigiraju model. Budući da je već navedeno da je utrošak resursa na prvom mjestu, fokus razrade faze 2 bit će usmjeren ka tom problemu.

Posljedice koje mogu nastati nedostatkom navedenih resursa mogu se manifestirati kroz:

1. prekoračenje zadanih rokova istraživanja,
2. prekoračenje raspoloživih financijskih sredstava i
3. nepotpunost modela.

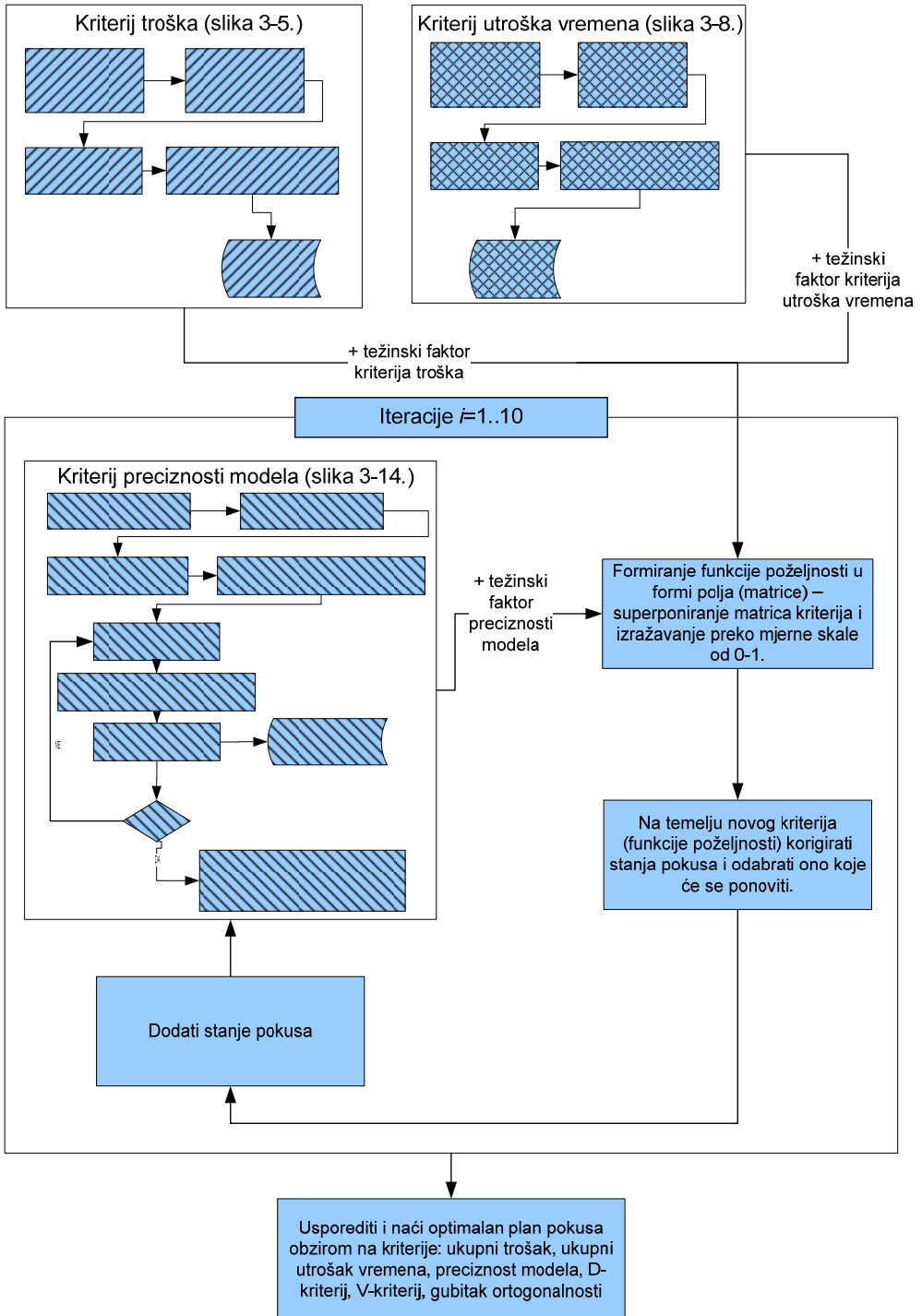
Prve dvije točke nije potrebno dodatno obrazlagati jer je većim dijelom provedena diskusija u prethodnim poglavljima. Međutim, treća točka navodi svakako nepoželjnu posljedicu koja se mora izbjeći kako bi metodologija planova pokusa uopće imala smisla. Nepotpunost modela se manifestira nedostatkom eksperimentalnih točaka, jedne ili više njih. Nedostatak eksperimentalnih točaka obično je vezan uz opsežna ispitivanja koja zahtijevaju određeni utrošak vremena. Ako je za ispitivanja potrebno potrošiti previše vremena, ona mogu izostati iz modela, a čime se narušava ne samo model plana pokusa već preciznost (kvaliteta) procjene odzivnih vrijednosti. U slučaju nepotpunosti modela može se pribjeći metodama razrađenim u literaturnim izvorima [31] i [37] gdje se opisuje slučaj s podacima koji nedostaju (engl. *missing observations*). U narednim poglavljima bit će opisan postupak poboljšanja postojećeg modela pokusa s stajališta preciznosti modela koji vrijedi i za slučajeve s nepotpunim podacima.

### **3.3.1 Struktura algoritma faze 2**

Kao što je shematski prikazano na slici **3-13** može se vidjeti kako je strukturirana druga faza algoritma VAOPP-a. Potrebno je primijetiti da su neki segmenti (blokovi) identični onima iz algoritma faze 1.

Iz razloga složenosti strukture navedenog algoritma svaki blok bit će posebno prikazan i analiziran. Također, većina matematičkih zapisa bit će razrađena za probleme s dva faktora u planu pokusa radi kompaktnosti i jednostavnosti samih izraza.

---



Slika 3-13. Struktura faze 2 algoritma VAOPP-a

### 3.3.2 Kriteriji utroška resursa

Funkcije kriterija troška i utroška vremena formiraju se na način opisan u 3.2.2 i 3.2.3 u slučaju da početni model nije definiran uporabom algoritma faze 1. U slučaju da je model pokusa rezultat faze 1, moguće je korigirati funkcije ako je prilikom provedbe samog eksperimenta došlo do nekih promjena ulaznih podataka troška ili utroška vremena. Time se dobiva bolja aproksimacija funkcija kriterija jer se upotrebljavaju realni podaci. Svaki od navedenih kriterija ponderira se s težinskim faktorima  $k_t$ , odnosno  $k_v$ , a ovisno o jačini kriterija<sup>25</sup> (objašnjeno u poglavlju 3.2.4). Raspon vrijednosti težinskih faktora se kreće od 0 do 10. Vrijednost 0 znači da kriterij nije relevantan i zanemaruje se, dok vrijednost 10 znači da je kriterij izrazito bitan. U slučaju da su vrijednosti kriterija podjednako "važni", težinski faktori moraju imati identične vrijednosti. Funkcija kriterija troška definira se u matricnom zapisu i glasi:

$$\mathbf{F}_t = [f_t(z_{ji})], \quad (56)$$

dok se funkcija kriterija utroška vremena izražava:

$$\mathbf{F}_v = [f_v(z_{ji})]. \quad (57)$$

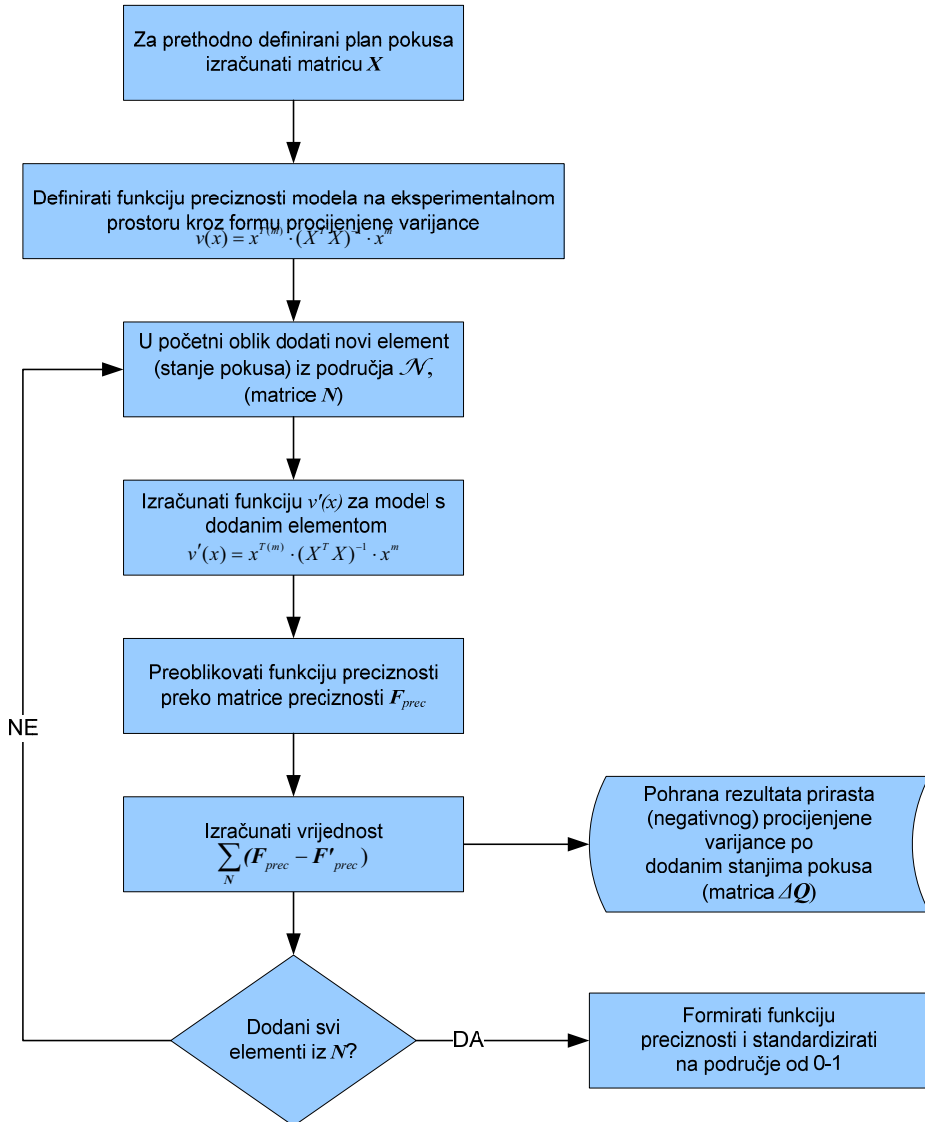
Članovi matrice  $\mathbf{N}$ ,  $z_{ji}$  predstavljaju kombinaciju razina faktora diskretiziranog eksperimentalnog prostora  $\mathcal{N}$ .

### 3.3.3 Definicija preciznosti modela

Kako bi se formirala funkcija poželjnosti uz kriterije troška i utroška vremena potrebno je uvesti i kriterij preciznosti. Kriterij preciznosti je dosada definiran kroz izraze (53) i (55). U ovoj fazi, kriterij preciznosti bit će definiran kroz pojam prirasta preciznosti modela, kao rezultat dodavanja nove, fiktivne eksperimentalne točke (stanja pokusa). Shema dijela algoritma dana je na slici **3-14**.

---

<sup>25</sup> Odnos važnosti kriterija.



Slika 3-14. Definicija kriterija preciznosti

Početak ove faze uzima pretpostavljeni (predefinirani) ili optimirani početni plan pokusa (rezultat faze 1), odnosno pripadajuće matrice oblika i matrice  $\mathbf{X}$  modela pokusa. Matrica inicijalnog plana pokusa  $\zeta_p$  definira se preko izraza (51), što ujedno i objašnjava strukturu samog modela, a prikazano u izrazu (58).



$$\mathbf{X}(\zeta_p) = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{J} & \mathbf{D}(\zeta_p) & \mathbf{D}'(\zeta_p) \\ \hline (N \times 1) & (N \times k) & \left( N \times \left( k + \binom{k}{2} \right) \right) \end{array} \right], \quad (58)$$

U razvijenom obliku, za problem s dva faktora, matrica oblika plana pokusa centralno kompozitnog plana pokusa (ili CCF) izraz je sljedeći:

$$\mathbf{X}(\zeta_p) = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & x_{1c} & x_{2c} & x_{1c}^2 & x_{2c}^2 & x_{1c} \cdot x_{2c} \\ 1 & x_{1c} & x_{2c} & x_{1c}^2 & x_{2c}^2 & x_{1c} \cdot x_{2c} \\ 1 & x_{1c} & x_{2c} & x_{1c}^2 & x_{2c}^2 & x_{1c} \cdot x_{2c} \\ 1 & x_{1f} & x_{2f} & x_{1f}^2 & x_{2f}^2 & x_{1f} \cdot x_{2f} \\ 1 & -x_{1f} & x_{2f} & (-x_{1f})^2 & x_{2f}^2 & (-x_{1f}) \cdot x_{2f} \\ 1 & x_{1f} & -x_{2f} & x_{1f}^2 & (-x_{2f})^2 & x_{1f} \cdot (-x_{2f}) \\ 1 & -x_{1f} & -x_{2f} & (-x_{1f})^2 & (-x_{2f})^2 & (-x_{1f}) \cdot (-x_{2f}) \\ 1 & x_{1ax} & x_{2c} & x_{1ax}^2 & x_{2c}^2 & x_{1ax} \cdot x_{2c} \\ 1 & -x_{1ax} & x_{2c} & (-x_{1ax})^2 & x_{2c}^2 & (-x_{1ax}) \cdot x_{2c} \\ 1 & x_{1c} & x_{2ax} & x_{1c}^2 & x_{2ax}^2 & x_{1c} \cdot x_{2ax} \\ 1 & x_{1c} & -x_{2ax} & x_{1c}^2 & (-x_{2ax})^2 & x_{1c} \cdot (-x_{2ax}) \end{array} \right], \quad (59)$$

Gdje su  $x_{1c}$  i  $x_{2c}$  razine faktora koji predstavljaju centar,  $x_{1f}$  i  $x_{2f}$  vrijednost razina faktora koji formiraju faktorske točku,  $x_{1ax}$  i  $x_{2ax}$  vrijednosti razina faktora koji definiraju aksijalne točke u planu pokusa. Za pravilni CCD vrijednosti  $x_{1c}, x_{2c}=0$ ,  $x_{1f}, x_{2f}=1$  i  $x_{1ax}, x_{2ax}=\sqrt{2}$ . Svaki redak u matrici predstavlja stanje pokusa. Postupak algoritma faze 2 VAOPP-a baziran je na dodavanju stanja pokusa, a realiziran je promjenom matrice  $\mathbf{X}$  dodavanjem posljednjeg retka:

$$\mathbf{X}'(\zeta_p) = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{X}(\zeta_p) \\ \hline \mathbf{x}'^{T(m)} \end{array} \right], \quad (60)$$

gdje je

$$\mathbf{x}'^{T(m)} = [1 \quad x_1' \quad x_2' \quad x_1'^2 \quad x_2'^2 \quad x_1' \cdot x_2']. \quad (61)$$

vektor redak, tj. koordinata dodane fiktivne točke iz prostora  $\mathcal{N}$  za slučaj s dva faktora.

Pripadajuće funkcije procijenjene varijance inicijalnog modela i inicijalnog modela s dodanom fiktivnom točkom definirane su na sljedeći način:

$$v(x) = \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}(\zeta_p)^T \mathbf{X}(\zeta_p))^{-1} \mathbf{x}^{(m)}, \quad (62)$$

odnosno:

$$v'(x) = \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}'(\zeta_p)^T \mathbf{X}'(\zeta_p))^{-1} \mathbf{x}^{(m)}, \quad (63)$$

gdje su  $\mathbf{x}^{T(m)}$  odnosno  $\mathbf{x}^{(m)}$  koordinate točaka iz polja  $\mathcal{N}$ , odnosno matrice  $\mathbf{N}$ . Također, potrebno je definirati funkcije preciznosti diskretiziranog modela preko matrica raspodjele preciznosti. Za inicijalni model matrica preciznosti glasi:

$$\mathbf{F}_{prec}(\zeta_p) = \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}(\zeta_p)^T \mathbf{X}(\zeta_p))^{-1} \mathbf{x}^{(m)}, \quad (64)$$

i analogno gornjem izrazu za inicijalni model s dodanom fiktivnom točkom:

$$\mathbf{F}'_{prec}(\zeta_p) = \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}'(\zeta_p)^T \mathbf{X}'(\zeta_p))^{-1} \mathbf{x}^{(m)}. \quad (65)$$

Matrice preciznosti inicijalnog i inicijalnog modela s dodanom fiktivnom točkom,  $\mathbf{F}_{prec}(\zeta_p)$  i  $\mathbf{F}'_{prec}(\zeta_p)$  istog su oblika i veličine kao i matrica  $\mathbf{N}$ . Za slučaj gdje su uključena dva faktora u plan pokusa uz standardni model drugog reda s interakcijom, može se općenito definirati vektor redak koordinate točke:

$$\mathbf{x}^{T(m)} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

gdje je

$$z_{ji} \equiv T(x_{1(i)}, x_{2(j)}), \quad (67)$$

za  $i, j=1, 2, \dots, m$ .

Prije formulacije prirasta preciznosti modela treba definirati i preciznost inicijalnog modela<sup>26</sup>. Ona je izražena preko jednadžbi (53) i (55) pa se može i zapisati:

---

<sup>26</sup> Veća vrijednost preciznosti modela, veličina  $Q$ , označava manju preciznost modela, odnosno manja vrijednost  $Q$  ukazuje na precizniji model.

---


$$Q(\zeta_p) = s^2 \cdot \int_{\mathcal{N}} \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}(\zeta_p)^T \mathbf{X}(\zeta_p))^{-1} \mathbf{x}^{(m)} dx, \quad (68)$$

odnosno:

$$Q(\zeta_p) = \sum_N \mathbf{F}_{prec}(\zeta_p), \quad (69)$$

za inicijalni model. Dok za inicijalni model s dodanom fiktivnom točkom preciznost je formulirana preko izraza:

$$Q'(\zeta_p) = s^2 \cdot \int_{\mathcal{N}} \mathbf{x}^{T(m)} (\mathbf{X}'(\zeta_p)^T \mathbf{X}'(\zeta_p))^{-1} \mathbf{x}^{(m)} dx, \quad (70)$$

te

$$Q'(\zeta_p) = \sum_N \mathbf{F}'_{prec}(\zeta_p). \quad (71)$$

Prirast preciznosti modela je zamišljen i realiziran na način da se dodavanjem fiktivnih točaka u model pokusa ustanovi kakav je prirast preciznosti modela. Uzimajući preciznost inicijalnog modela i inicijalnog modela s dodanom fiktivnom točkom, izraze (68) i (70), moguće je konačno definirati element matrice prirasta preciznosti  $\Delta q$  (izraz 72). Treba primijetiti da je  $\Delta q$  jedan element matrice  $\Delta \mathbf{Q}$  i vrijedi za jedan korak u postupku dodavanja fiktivne točke.

$$\Delta q = \sum_N [\mathbf{F}_{prec}(\zeta_p) - \mathbf{F}'_{prec}(\zeta_p)] = Q(\zeta_p) - Q'(\zeta_p). \quad (72)$$

U slučaju s dva faktora, matrica  $\Delta \mathbf{Q}$  je sačinjena od elemenata  $\Delta q_{ji}$ , čija vrijednost označava prirast preciznosti modela dodavanjem eksperimentalne točke s koordinatom  $T(x_{1(i)}, x_{2(j)})$ :

$$\Delta \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Delta q_{11} & \Delta q_{1i} & \dots & \Delta q_{1m} \\ \Delta q_{j1} & \Delta q_{ji} & \dots & \Delta q_{jm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta q_{m1} & \Delta q_{mi} & \dots & \Delta q_{mm} \end{bmatrix}. \quad (73)$$


---

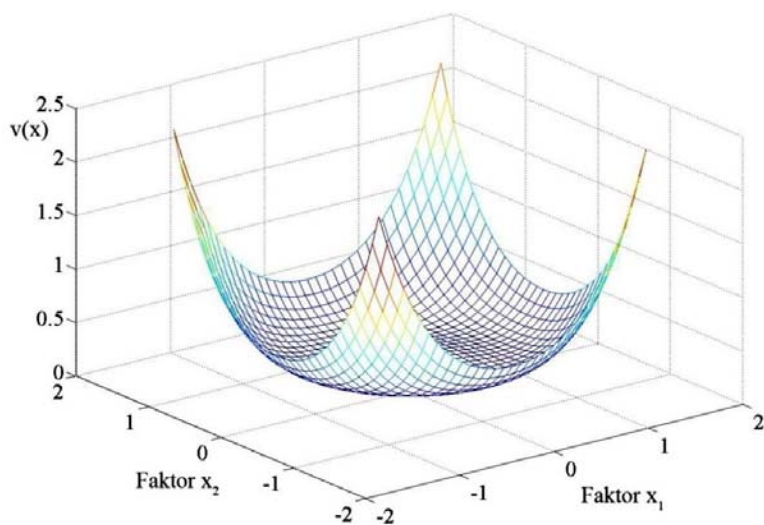
Oblik i veličina matrice  $\Delta Q$  je identična matrici diskretiziranog eksperimentalnog prostora  $N$ . Točnost izračuna  $\Delta Q$  ovisit će o gustoći mreže  $\mathcal{N}$ , odnosno bit će proporcionalna broju diskretnih elemenata. Nakon dodanih svih fiktivnih točaka u model, i izračunate prirasti preciznosti modela, matrica  $\Delta Q$  je potpuno formirana kao jedan od kriterija oblikovanja optimalnog plana pokusa. Onaj element matrice  $\Delta Q$  koji ima maksimalnu vrijednost označava točku koja je poželjna za integraciju u model. Ovisno o težinskom faktoru spomenutog kriterija i međusobnom odnosu svih ostalih kriterija, bit će određen i utjecaj kriterija preciznosti na oblik same funkcije poželjnosti.

### 3.3.3.1 Funkcija prirasta preciznosti modela

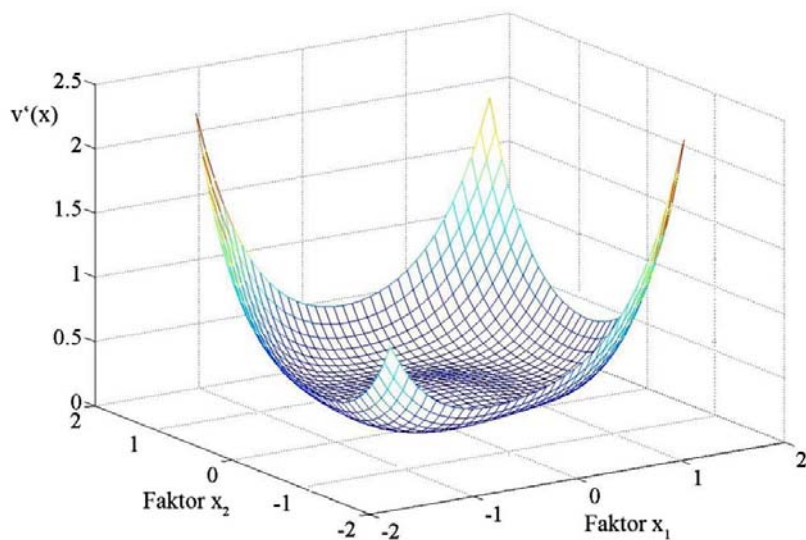
Prirast preciznosti kao kriterij preciznosti modela proizlazi iz modifikacije osnovnog (inicijalnog) plana pokusa dodavanjem mogućeg elementa iz cijelog eksperimentalnog prostora. Preciznost modela je već ranije definirana kao funkcija procijenjene varijance modela  $v(x)$  odnosno grafički prikazano ima oblik prikazan na slici **2-16**. Metodom integracije zasebno svakog elementa eksperimentalnog polja  $\mathcal{N}$  u model pokusa dobivena je nova funkcija prirasta preciznosti. Zbog karakteristike koja se dobije integriranjem elementa (točke) u plan pokusa moguće je zaključiti da će se različiti rezultati prirasta preciznosti dobiti kada se uvode različite točke eksperimentalnog prostora. Eksperimentalni prostor je ograničen te će za probleme koji su obrađivani u ovom istraživačkom radu biti promatran u rasponu varijacije vrijednosti kodiranih faktora od  $-1,5$  do  $+1,5$ . Iz izraza (68) je vidljivo da veličina  $Q(\zeta_p)$  ovisi samo o obliku inicijalnog plana pokusa te je ta vrijednost konstantna. Uzimajući izraz (70), vrijednost  $Q'(\zeta_p)$  je jedinstvena za svaku dodanu točku u modelu. Funkciju  $v(x)$  (aproksimiranu iz pripadajuće matrice  $\mathbf{F}_{prec}(\zeta_p)$ ) i funkciju  $v'(x)$ , jedne varijante<sup>27</sup> (također aproksimirane, ali iz matrice  $\mathbf{F}'_{prec}(\zeta_p)$ ), moguće je grafički prikazati kao na slici **3-15** i slici **3-16**.

---

<sup>27</sup> Jedna varijanta je vezana za određenu dodanu točku u modelu pokusa.



**Slika 3-15.** Funkcija  $v(x)$  CCD plana pokusa s dva ponavljanja u centru i dva faktora



**Slika 3-16.** Funkcija  $v'(x)$  CCD plana pokusa s dva ponavljanja u centru i dva faktora, te dodanom eksperimentalnom točkom  $x_1, x_2 = -1, 2$

Gledajući grafičke prikaze funkcija procijenjene varijance, ukupne vrijednosti  $Q(\zeta_p)$  i  $Q'(\zeta_p)$  mogu se predočiti volumenom, tj. ukupnim prostorom ispod navedenih funkcija. U konkretnom slučaju razlika  $Q(\zeta_p)$  i  $Q'(\zeta_p)$  za jedan korak iteracije (varijantu) s dodanom fiktivnom točkom  $x_1, x_2 = -1, 2$  dobiva se:

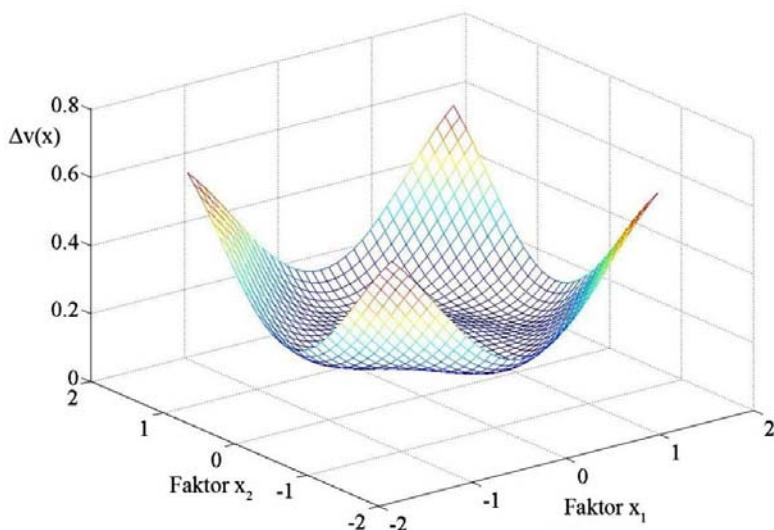
$$\Delta q_{(j,i)} = Q(\zeta_p) - Q'(\zeta_p)_{T(-1,2, -1,2)} \quad , \quad (74)$$

gdje su  $j, i$  indeksi koji odgovaraju mjestu koje označava eksperimentalnu točku  $(-1,2; -1,2)$  u matrici  $N$ . Postupak iteracija se završava kada su svi elementi iz  $N$  prošli proceduru dodavanja fiktivnog elementa.

Kao rezultat postupka definiranja prirasta preciznosti modela jest matrica  $\Delta Q$  čija struktura je prikazana u izrazu (73). Analogno već dosada uporabljenim metodama, prirast preciznosti može se definirati i kao kontinuirana funkcija prirasta preciznosti  $\Delta v(x)$  koja proizlazi iz izraza:

$$\Delta v(x) = v(x) - v'(x) \quad . \quad (75)$$

Funkcija prirasta preciznosti (prirasta<sup>28</sup> procijenjene varijance) može se grafički prikazati na način prikazan na slici **3-17**.



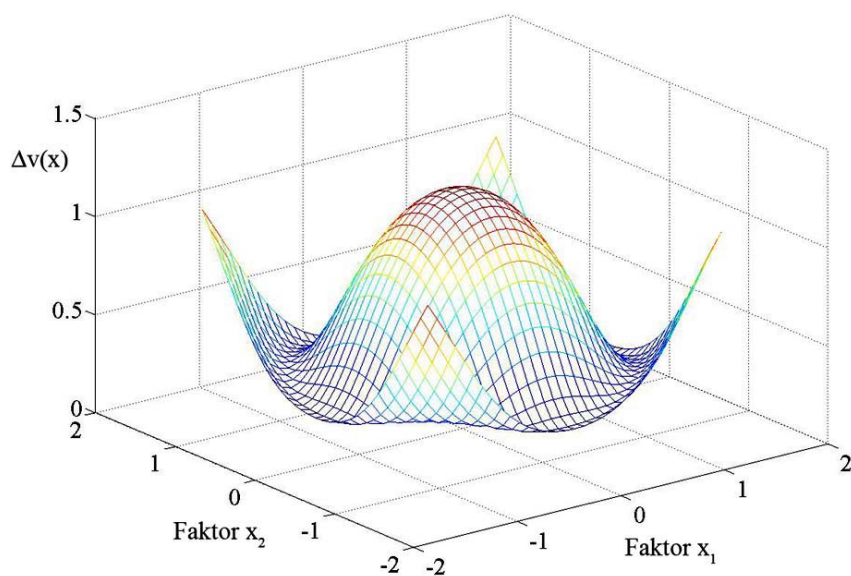
**Slika 3-17.** Funkcija prirasta preciznosti  $\Delta v(x)$  za slučaj CCD plana pokusa s 3 centralne točke i dva faktora

Iz slike je vidljivo da prirast preciznosti modela ostvaruje veće vrijednosti integrirajući eksperimentalne točke iz karakterističnog područja<sup>29</sup>, dok dodavanjem točaka iz ostalog prostora dolazi do značajno manjeg prirasta preciznosti modela.

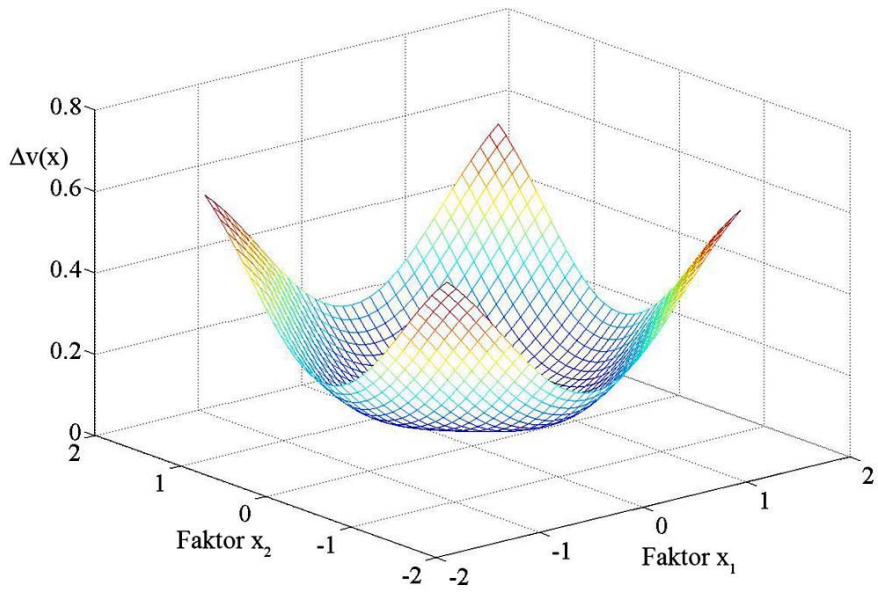
<sup>28</sup> Odnosi se na negativni prirast, smanjenje.

<sup>29</sup> U konkretnom slučaju, prirast preciznosti modela je veći integracijom točaka u model u rubnom području, tj. u području koje nije obuhvaćeno eksperimentalnim točkama inicijalnog plana pokusa.

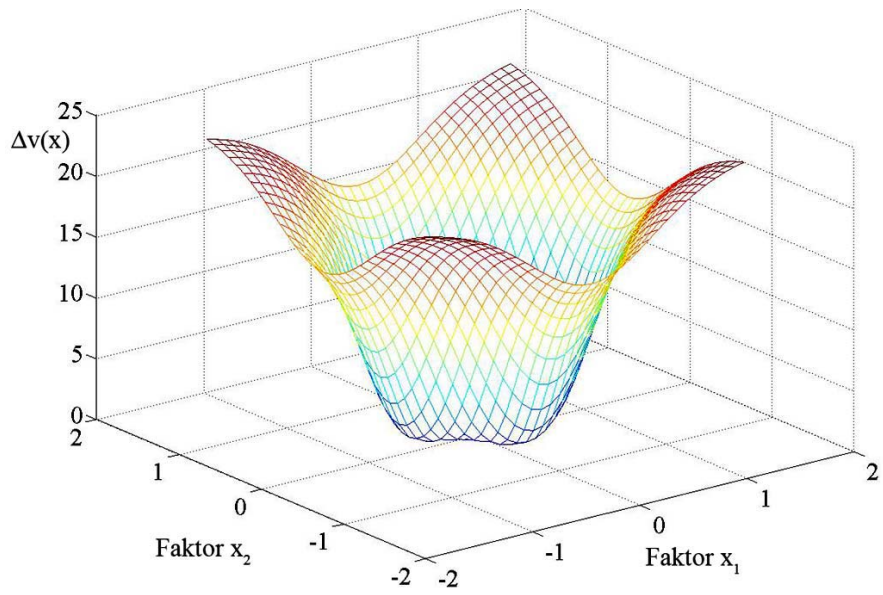
Po samoj definiciji funkcije procijenjene varijance, proširenje modela pokusa dodavanjem eksperimentalnih točaka generira razliku između modela pokusa promjenom matrice  $\mathbf{X}$ , odnosno  $\mathbf{X}'$ . Time je i vrijednost matrice  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  za svaku dodanu točku drugačija. Ako promotrimo konkretan slučaj prikazan na slici **3-17**, vidimo da se dodavanjem ekstremnih točaka na rubu plana pokusa dobiva najveći prirast preciznosti, dok uključivanjem točaka oko centra prirast preciznosti nije toliko značajan. Treba primijetiti da je u konkretnom slučaju inicijalni model pokusa simetričan (CCD s 3 centralne točke) tako da je i funkcija prirasta preciznosti simetričnog oblika, što ne mora biti slučaj za neke druge inicijalne modele pokusa. Na slici **3-18** prikazana je funkcija prirasta preciznosti modela za neke modele pokusa.



a)

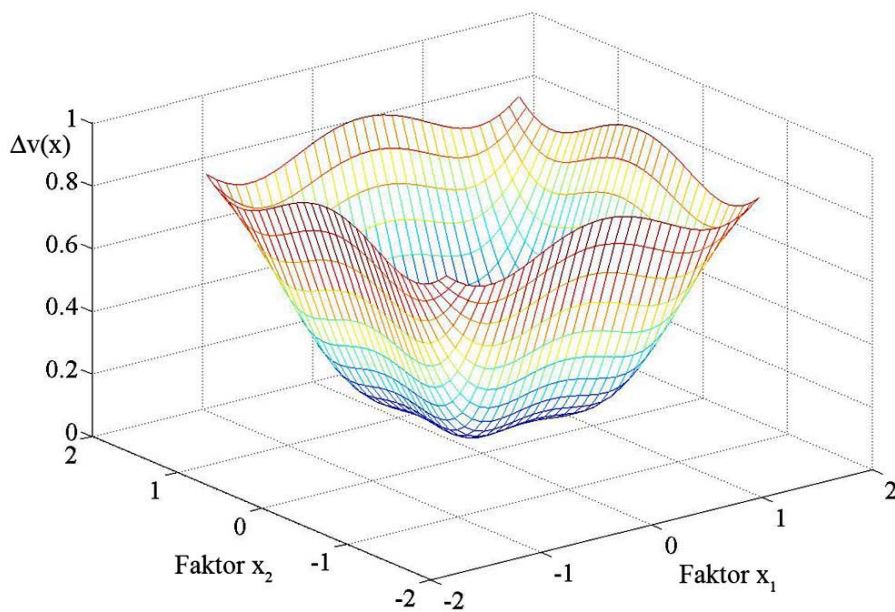


b)



c)





d)

**Slika 3-18.** Funkcija prirasta preciznosti modela za slučajeve: a) CCD plan pokusa s  $n_c=1$ , b) CCD plan pokusa s  $n_c=5$ , c) CCD (upisani) s  $n_c=3$ , d) CCF s  $n_c=3$

Iz grafičkih prikaza vidljivo je kako se dodavanjem različitih eksperimentalnih točaka dobivaju različiti prirasti preciznosti modela. Konkretno, promatrajući funkciju prirasta preciznosti CCD plana pokusa s  $n_c=1$  (slika **3-18a**) može se zaključiti kako se dobiva najveći doprinos uključivanjem točaka oko centra. Nasuprot tome, najveći doprinos preciznosti modela u slučaju CCD plana pokusa s  $n_c=5$ , nastupa uključivanjem eksperimentalnih točaka na rubovima, tj. onih točaka koje su najudaljenije od centra. Slika (**3-18c**) prikazuje CCD (upisani) plan pokusa koji zbog svog oblika daje prijedlog proširenja samog modela integrirajući točke na većim udaljenostima od samog centra.

### 3.3.4 Oblikovanje funkcije poželjnosti

Funkcija poželjnosti u fazi 2 algoritma VAOPP-a objedinjava tri prethodno definirana kriterija. Oblik funkcije poželjnosti ovisit će o obliku pojedinačnih funkcija kriterija utroška resursa i funkciji prirasta preciznosti te njihovim težinskim

faktorima. Kao i u slučaju faze 1, i u ovoj fazi koristi se metoda zbrajanja funkcija kriterija uz određene težinske faktore. Kako bi se dobila ujednačenost kriterija koji su izraženi u različitim jedinicama, potrebno je kriterije prevesti u relativne, bezdimenzijske veličine u skali od 0-1. Tako se preko izraza (39) i (40) standardiziraju kriteriji troška i utroška vremena. Analogno prethodnim kriterijima, matrica kriterija preciznosti  $\Delta Q$  standardizira se preko sljedećeg izraza:

$$\Delta Q^r = I - \frac{\Delta Q}{\max(\Delta Q)}. \quad (76)$$

Iz izraza (39), (40) i (76) moguće je oblikovati funkciju poželjnosti u diskretnom obliku (preko matrice poželjnosti):

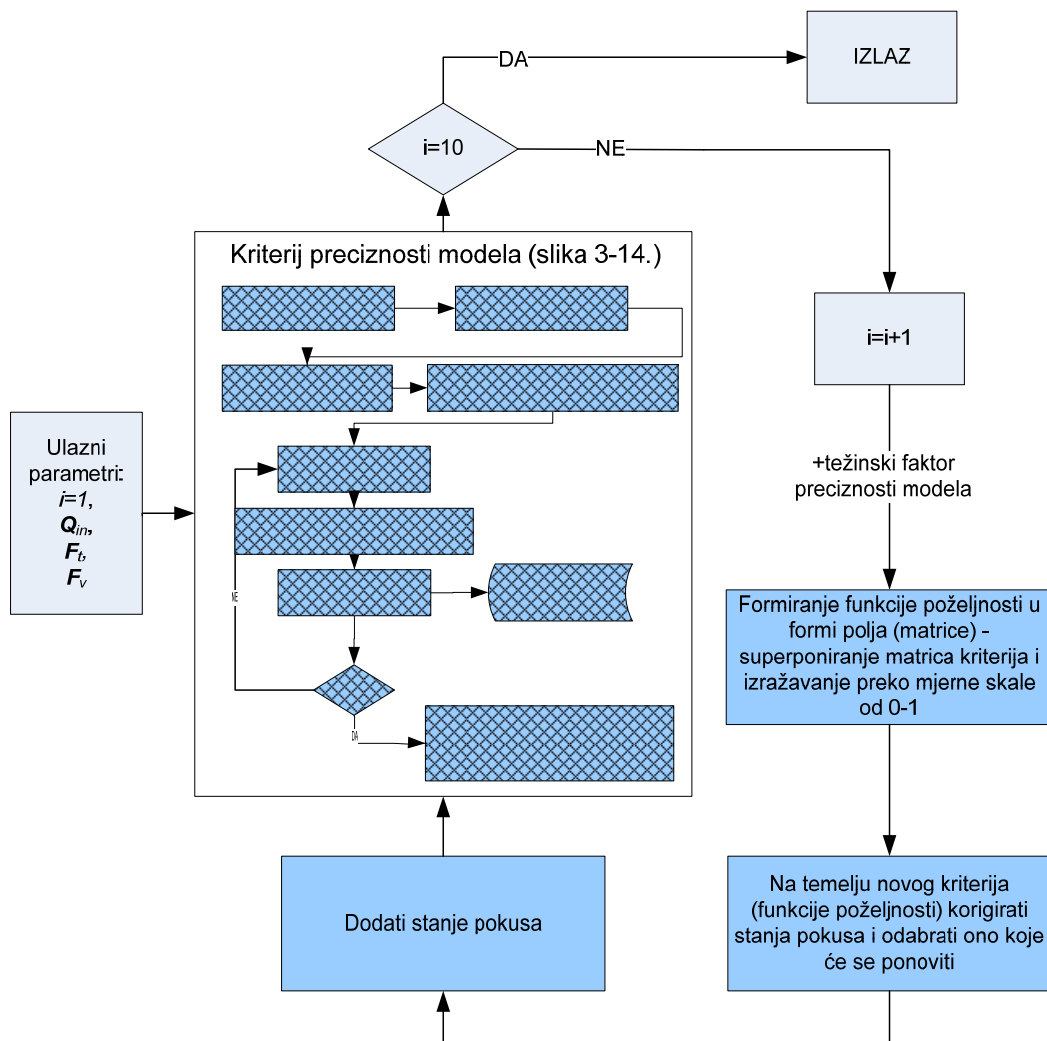
$$F_p = k_t \cdot \left( I - \frac{F_t}{\max(F_t)} \right) + k_v \cdot \left( I - \frac{F_v}{\max(F_v)} \right) + k_{pr} \cdot \left( I - \frac{\Delta Q}{\max(\Delta Q)} \right), \quad (77)$$

gdje je  $k_{pr}$  težinski faktor prirasta modela.

Tako oblikovanu matricu poželjnosti također je potrebno standardizirati na područje od 0-1. Time elementi matrice dobivaju vrijednosti koje ukazuju koju točku je poželjno uključiti u model, te koliko je to u odnosu na ostale točke.

$$F_p^r = I - \frac{F_p}{\max(F_p)} \quad (78)$$

Funkcija poželjnosti objedinjavajući sva tri navedena kriterija postaje jedinstveni kriterij dodavanja eksperimentalnih točaka u model pokusa. Na slici **3-19** prikazan je dijagram tijeka iterativnog postupka modificiranja inicijalnog plana pokusa.



**Slika 3-19.** Dijagram tijekom modificiranja plana pokusa dodavanjem eksperimentalnih točaka po kriteriju funkcije poželjnosti

Iz dijagrama tijekom razvidno je da je oblik funkcije poželjnosti konstantan samo za jednu iteraciju. U početnom koraku potrebno je formirati inicijalnu funkciju poželjnosti preko izvedenih izraza (76) i (77). Nakon postavljanja početne funkcije poželjnosti slijedi postupak iteracija, tj. dodavanje eksperimentalne točke s vrijednošću funkcije poželjnosti od 1. Tako modificirani model pokusa (s dodanom eksperimentalnom točkom) se poboljšava istim postupkom. Postupak sadrži formiranje kriterija preciznosti, definiranje nove funkcije poželjnosti te dodavanje

sljedeće eksperimentalne točke. Treba naglasiti da su konstante u izvođenju postupka iteracija, funkcije kriterija troška i utroška vremena, te prethodno odabrani težinski faktori.

Postupak iteracija u algoritmu VAOPP-a je ograničen na desetak koraka. Točnije, deset koraka bi značilo da je inicijalni plan pokusa modificiran dodavanjem deset eksperimentalnih točaka. Za probleme na kojima je testiran algoritam ustanovljeno je da je već nakon 4., 5., 6. dodane točke preciznost bitno poboljšana uz zadržavanje prihvatljivih vrijednosti ostalih pokazatelja dobrote modela. Niz modificiranih planova pokusa pohranjuje se u skup rješenja:

$$[\mathbf{D}_d] = \begin{bmatrix} [\mathbf{D}(\zeta_p)] & [\mathbf{D}(\zeta_d)] & \dots & [\mathbf{D}(\zeta_{10})] \end{bmatrix}, \quad (79)$$

$(1 \times 10)$        $(N \times k)$        $((N+1) \times k)$        $((N+10) \times k)$

gdje je matrica  $\mathbf{D}(\zeta_p)$  matrica oblika inicijalnog plana pokusa. Iz skupa rješenja potrebno je odabrati optimalno, tj. onaj oblik pokusa koji ima najveći doprinos preciznosti modela. Razlika u vrijednosti preciznosti modela ( $G$ ) između dvaju susjedna modela u polju rješenja:

$$\Delta G = |\mathcal{Q}(\zeta_{d-1}) - \mathcal{Q}(\zeta_d)|. \quad (80)$$

Kada je  $\Delta G$  maksimalan, plan pokusa  $\zeta_d$  je ujedno i optimalan s matricom oblika pokusa  $\mathbf{D}(\zeta_d)$ . Uzimajući kriterij najvećeg povećanja preciznosti, potrebno je uzeti u obzir i karakteristiku ortogonalnosti koja je jedna od važnijih kontrolnih kriterija za evaluaciju modificiranog modela. Uvjet da u potpunosti bude zadržana ortogonalnost nije moguće uvijek ispuniti. Dodavanjem točaka u model pokusa dolazi do promjene vrijednost  $O$ , koja ukazuje na gubitak, odnosno odstupanje od ortogonalnosti:

$$O = \sum_{i=1}^N x_{i_1} \cdot x_{i_2} \quad (81)$$

gdje indeks  $i$  označava  $i$ -ti redak u  $\mathbf{X}$  matrici plana pokusa, odnosno  $i$ -tu točku u planu pokusa, dok su  $x_1, x_2, \dots, x_k$  linearne komponente  $\mathbf{X}$  matrice plana pokusa. Vrijednost sume produkata linearnih komponenti u matrici  $\mathbf{X}$  je potrebno držati što

bliže vrijednosti 0. Vrijednost 0 označava potpunu ortogonalnost i nezavisnost faktora (varijabli). Manji gubitak ortogonalnosti se može prihvatiti, a pogotovo u usporedbi s mogućim neželjenom pojavom u vidu nepotpunosti podataka. Manji gubitak ortogonalnosti ukazuje na manju zavisnost faktorskih varijabli. Nadalje, manja zavisnost neće utjecati na konačni matematički model (odzivnu funkciju) već će imati utjecaj na tumačenje glavnih efekata, koje se tada moraju uzeti s opaskom da se radi o nepotpunoj ortogonalnosti pokusa.

Odabrani plan pokusa koji ima optimalni prirast i prihvatljiv gubitak ortogonalnosti potrebno je prezentirati i preko postojećih kriterija optimalnosti kao što su  $G$  i  $D$  te odrediti kretanje primarnih kriterija ukupnog troška realizacije pokusa i ukupnog utrošenog vremena.

---



## 4. Provjera i testiranje predložene metodologije, te pogodnost uporabe razvijenog algoritma

Testiranje algoritma faze 1 i faze 2 provest će se na literaturnim primjerima, s simuliranim potrebnim informacijama, te preko dostupnih primjera iz prakse. Kao što je već nekoliko puta ranije spomenuto, algoritam je realiziran u programskom paketu MATLAB 6.5 koji daje mogućnost programiranja i računanja matričnim zapisom. Treba naglasiti da će primjeri biti realizirani kao problemi s dva ili tri faktora, zbog jednostavnijih prikazivanja parcijalnih i konačnih rješenja, te limitiranosti dostupne računalne opreme. Problem kompleksnosti algoritma i brzine izvođenja bit će detaljnije objašnjen u narednim poglavljima. Kroz literaturne primjere objasniti će se tijekom provedbe algoritma te oblik dobivenih rješenja. Obzirom da su primjeri iz prakse provedeni u cijelosti, testiranje na tim problemima provest će se na načelu usporedbe konvencionalnog načina (provedenog) i višekriterijskog adaptivnog pristupa (novorazvijenog) problemu oblikovanja planova pokusa. Kako je ovaj znanstvenoistraživački rad koncipiran na način da predlaže metodologiju koja nije do sada razmatrana, testiranje bi trebalo pokazati koje prednosti pruža ovaj pristup u odnosu na klasični.

### 4.1 Načelo uporabe algoritma faze 1 (početno oblikovanje) na simuliranom primjeru

Kroz simulirani primjer dijelom preuzet iz literaturnog izvora [1] i [38], pokazat će se tijekom izvođenja algoritma s rješenjima tijekom i nakon izvršenja algoritma. Budući da se radi o literaturnom primjeru u kojem nije dana informacija o utrošku resursa, taj dio podataka bit će simuliran.

---

Klasični eksperimentalni tip problema koji se navodi u literaturnim izvorima jest problem određivanja iskoristivosti kemijskog procesa ( $u$  %) u odnosu na dva promjenjiva faktora, temperaturu i pritisak. Postavljanje područja interesa (područja istraživanja) će odrediti granice pokusa. U ovom slučaju prvo će se postaviti inicijalni (pretpostavljeni) plan pokusa koji je rezultat klasičnog pristupa oblikovanju planova pokusa. Pretpostavljeni plan pokusa je oblika prikazanog u tablici 4-1.

**Tablica 4-1.** Stanja pretpostavljenog pokusa s procjenama troškova realizacije eksperimenta i utroška vremena

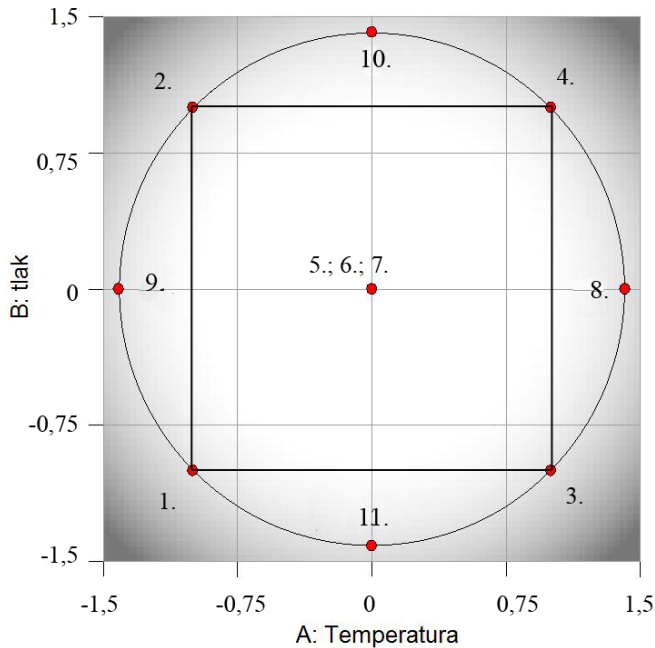
Red. br. točke	Stvarne vrijednosti varijabli		Kodirane vrijednosti varijabli		Procjena troškova realizacije pokusa	Procjena utroška vremena
	$v$ [°C]	$p$ [bar]	$x_1$	$x_2$	$t$ [n.j.]	$v$ [v.j.]
1.	80	11,72	-1	-1	100	10
2.	80	12,41	-1	1	120	10
3.	90	11,72	1	-1	140	15
4.	90	12,41	1	1	200	15
5.	85	12,06	0	0	130	13
6.	85	12,06	0	0	130	13
7.	85	12,06	0	0	130	13
8.	92,07	12,06	1,414	0	210	17
9.	77,93	12,06	-1,414	0	90	8
10.	85	12,56	0	1,414	180	12
11.	85	11,58	0	-1,414	125	12

Iz priložene tablice vidi se da je riječ o klasičnom centralno kompozitnom planu pokusa s koordinatom aksijalne točke  $\alpha = \pm 1,414$ . Izgled plana pokusa dan je na slici 4-1. Također, prema tablici 4-1 moguće je definirati i matricu oblika pretpostavljenog plana pokusa odnosno matricu  $X(\zeta_p)$ :



$$\mathbf{X}(\zeta_p) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1,414 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1,414 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1,414 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1,414 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Uporabom faze 1 algoritma VAOPP-a potrebno je oblikovati plan pokusa koji koristi ulazne podatke iz tablice 4-1. S postojećim procjenama troškova provedbe eksperimenta i procjene utroška vremena formiraju se regresijske funkcije koje aproksimiraju vrijednosti koje nisu direktno obuhvaćene točkama pokusa.



**Slika 4-1.** Pretpostavljeni oblik plana pokusa iz literarnog primjera

Prostor u kojem se traži optimalni oblik je omeđeno područjem istraživanja, u konkretnom slučaju u rasponu od  $-1,5$  do  $1,5$  u kodiranim vrijednostima po svakom

---

faktoru. Taj prostor se diskretizira s  $m^k=32^2$  elemenata kao optimalan broj obzirom na preciznost izračuna i trajanje izvođenja algoritma.

#### 4.1.1 Pronalaženje funkcija kriterija troška i utroška vremena

Provođenjem prva dva bloka algoritma, pronalaženje funkcija kriterija troška i utroška vremena,  $f_t$  i  $f_v$ , dolazi se do formulacije funkcija kriterija kao rezultat preko izračuna koeficijenata regresijskih funkcija. Oblik funkcije troška eksperimenta je dan u izrazu (32) te se uz prethodno izračunate koeficijente (objašnjeno u poglavlju 3.2.2 ) može zapisati:

$$f_t = 69 + 22,4x_1 + 38x_1^2 + 3,8x_2 + 12,2x_2^2 + 38,8x_1x_2 \quad (83)$$

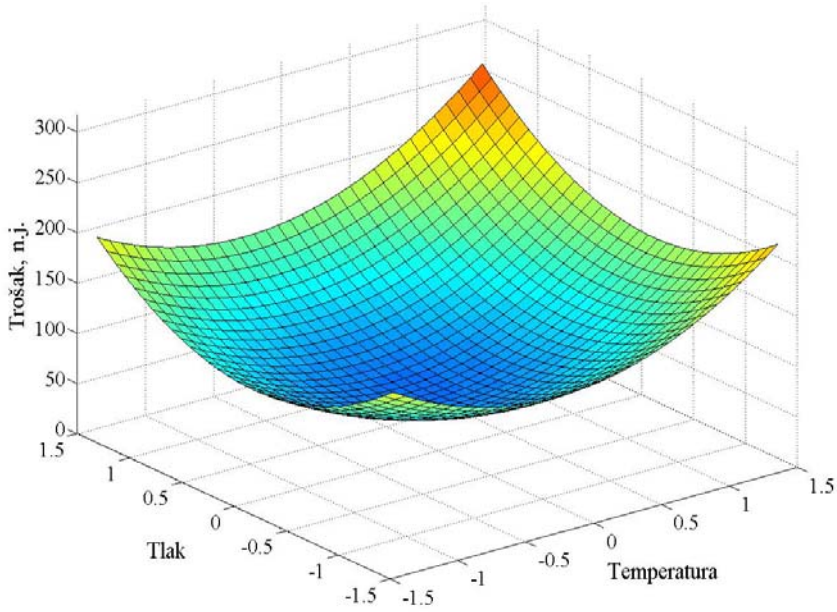
Analogno prethodnom izrazu, funkcija utroška vremena je definirana:

$$f_v = 13 + 3x_1 - 0,5x_1x_2, \quad (84)$$

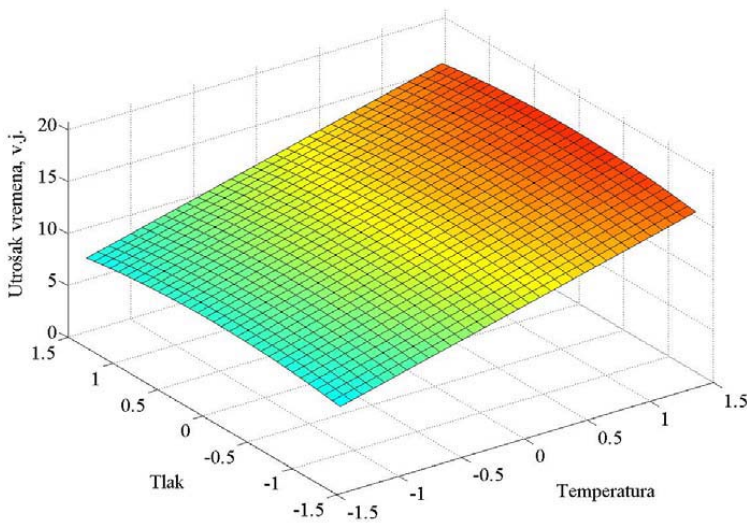
gdje varijabla  $x_1$  označava promjenu temperature, dok varijabla  $x_2$  definira promjenu tlaka.

Korištenjem transformacije (34) i (37) iz kontinuiranog u diskretizirani oblik, dobivaju se matrica troška i matrica utroška vremena  $\mathbf{F}_t$  i  $\mathbf{F}_v$ . Matrice pokazuju očekivane vrijednosti određenog kriterija u bilo kojoj eksperimentalnoj točki iz područja  $\mathcal{N}$ . Nadalje, kriteriji izraženi preko matrica je potrebno standardizirati na područje od 0-1 kako bi se različite veličine transformirale u bezdimenzionalni oblik. Takav oblik je pohranjen u matrice  $\mathbf{F}_t^r$  i  $\mathbf{F}_v^r$ . Vrijednosti matrica predstavljaju relativne odnose stvarnih vrijednosti i maksimalne. Stoga se može smatrati da navedene matrice predstavljaju relativni utrošak resursa. Grafički prikazi funkcija utroška resursa dani su na slikama **4-2** i **4-3**.

---



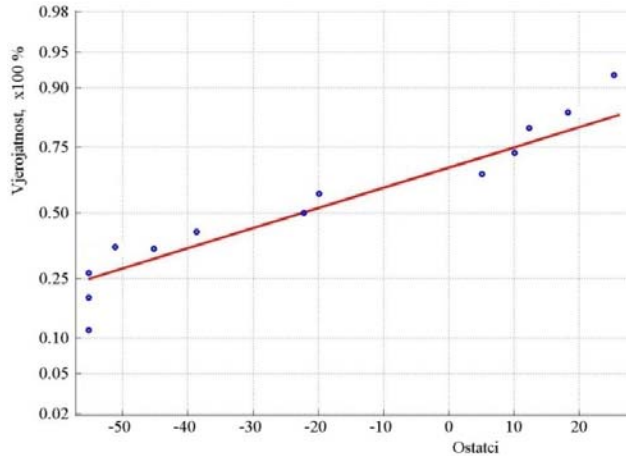
**Slika 4-2.** Funkcija troška u eksperimentalnom prostoru



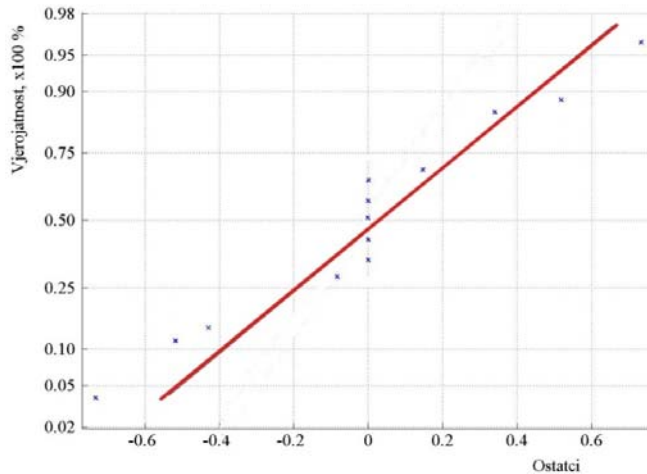
**Slika 4-3.** Funkcija utroška vremena u eksperimentalnom prostoru

Testiranje regresijskih funkcija (troška i utroška vremena) je moguće provesti preko nekoliko testova normalnosti. U algoritmu VAOPP-a korišten je test

ostatka papirom vjerojatnosti normalne razdiobe. Test u papiru vjerojatnosti normalne razdiobe pokazuje da se može prihvatiti činjenica da su ostaci normalno distribuirani, te da se može smatrati da su funkcije dobra aproksimacija raspodjele troškova i utroška vremena po eksperimentalnom prostoru. Na slikama 4-4 i 4-5 su prikazani ostaci u papiru vjerojatnosti normalne razdiobe za regresijske funkcije  $f_t$  i  $f_v$ .



Slika 4-4. Papir vjerojatnosti ostataka za funkciju troška



Slika 4-5. Papir vjerojatnosti ostataka za funkciju utroška vremena

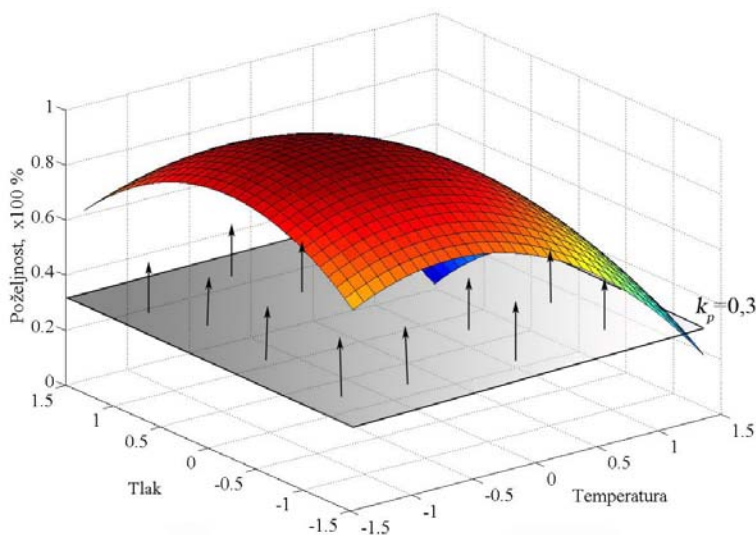
Pomnijom analizom grafičkog prikaza (slika 4-5) može se uočiti lagano odstupanje ostataka od normalnosti u rubnim područjima razdiobe. Kada bi se pojavilo veće

odstupanje<sup>30</sup> moglo bi se zaključiti kako funkcija u ovakvom obliku nije adekvatna aproksimacija utroška vremena. Postupak korekcije regresijske funkcije bi sadržavao promjenu oblika funkcije te ponovo provođenje regresijske analize dok se ne dobije adekvatna aproksimacijska funkcija. Korigirana regresijska funkcija mora biti adekvatna kako bi procijenjene vrijednosti kriterija u točkama, koje nisu dio pretpostavljenog plana, bile točnije.

Prihvaćene funkcije kriterija, u diskretiziranom obliku preko matrica  $F_t^r$  i  $F_v^r$ , je potrebno objediniti u jedinstveni kriterij.

#### 4.1.2 Formulacija funkcije poželjnosti

Funkcije  $f_t$  i  $f_v$ , preko standardiziranih matrica  $F_t^r$  i  $F_v^r$ , superponiranjem (zbrajanjem) uz određene težinske faktore  $k_t$  i  $k_v$  daju funkciju poželjnosti u diskretiziranom obliku preko matrice  $F_p^r$ . Za konkretne vrijednosti  $k_t = 5$  i  $k_v = 3$  dan je odnos važnosti jednog kriterija naspram drugom. U ovom slučaju naglasak je stavljen na kriterij troška eksperimentiranja. Nakon uporabe izraza (38) i (42) oblikuje se matrica poželjnosti u standardiziranom obliku  $F_p^r$ . Grafički prikaz konkretne funkcije poželjnosti dan je na slici 4-6.

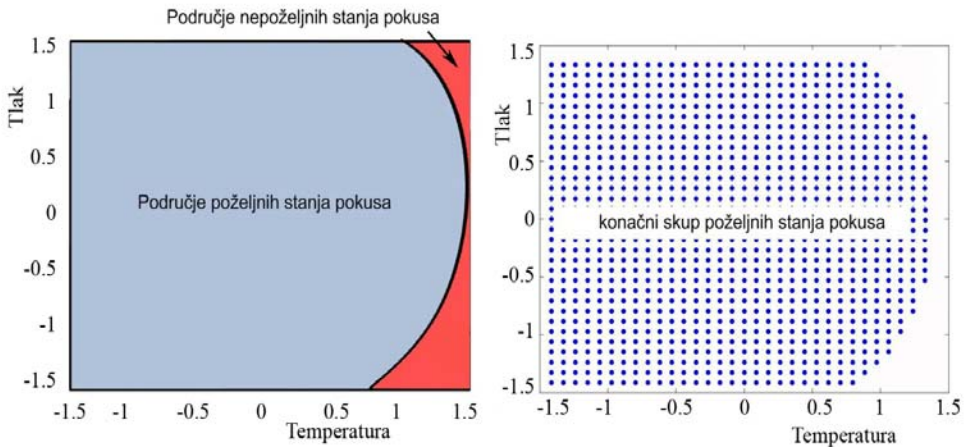


Slika 4-6. Funkcija poželjnosti uz  $k_t = 5$  i  $k_v = 3$ , te uz  $k_p = 0,3$

<sup>30</sup> Tipično 'S' rasipanje ostataka oko pravca normalnosti.

Funkcija poželjnosti može se protumačiti na sljedeći način. Vrijednosti funkcije poželjnosti koje su bliže vrijednosti 1 označavaju stanja pokusa koje je poželjno integrirati u plan pokusa, a to su stanja pokusa na nižim vrijednostima razine faktora temperature i središnjim vrijednostima razine faktora tlaka. Nasuprot tome vrijednosti ispod granice  $k_p$  nisu poželjne za integraciju u model.

Funkciju poželjnosti treba uporabiti na način da ona predstavlja ograničenja. Točnije, potrebno je odrediti graničnu vrijednost funkcije poželjnosti koja će definirati skup poželjnih stanja pokusa  $\mathcal{N}_p$ . Granična vrijednost koja je uzeta jest  $k_p=0,3$ . Ta granična vrijednost osigurava da se odbace neželjene eksperimentalne točke (ekstremnih vrijednosti troška i utroška vremena). Granična vrijednost može se povećati te tako osigurati oštrije kriterije zadržavanja skupa poželjnih točaka, smanjujući skup  $\mathcal{N}_p$ . Na slici 4-7 skiciran je skup poželjnih stanja pokusa.



**Slika 4-7.** Područje poželjnih stanja pokusa uz  $k_p=0,3$

Budući da je većim dijelom prostor pravilnog oblika pretpostavlja se da će optimalni plan pokusa biti CCF oblika. Kasnijom usporedbom s CCD planom pokusa doći će se do optimalnog oblika.

### 4.1.3 Generiranje niza

Unutar područja pozicionira se centralna točka pokusa te se generira niz planova pokusa sa standardnim CCF i CCD<sup>31</sup> oblikom. Generirani planovi pokusa pohranjuju se u polje  $\mathbf{D}_d$ <sup>32</sup> do posljednjeg kojemu je barem jedna točka na graničnoj vrijednosti  $k_p$ . Centralna točka je pozicionirana na vrijednosti kodirane razine faktora tlaka i temperature od  $-0,088$ .

Algoritmom promjene generiraju se oblici planova pokusa te pohranjuju u polja. Matrica  $\mathbf{D}(\zeta_0)$  oblika plana pokusa se mijenja promjenom koraka  $\Delta\alpha$  i  $\Delta a$  što se u konkretnom slučaju može formulirati:

$$\mathbf{D}(\zeta_0) = \begin{bmatrix} x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} \\ x_{1c} + a & x_{2c} + a \\ x_{1c} - a & x_{2c} - a \\ x_{1c} + a & x_{2c} - a \\ x_{1c} - a & x_{2c} + a \\ x_{1c} + \alpha & x_{2c} \\ x_{1c} - \alpha & x_{2c} \\ x_{1c} & x_{2c} + \alpha \\ x_{1c} & x_{2c} - \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,088 & -0,088 \\ -0,088 & -0,088 \\ -0,088 & -0,088 \\ -0,088 + a & -0,088 + a \\ -0,088 - a & -0,088 - a \\ -0,088 + a & -0,088 - a \\ -0,088 - a & -0,088 + a \\ -0,088 + \alpha & -0,088 \\ -0,088 - \alpha & -0,088 \\ -0,088 & -0,088 + \alpha \\ -0,088 & -0,088 - \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{D}(\zeta_1) = \begin{bmatrix} -0,088 & -0,088 \\ -0,088 & -0,088 \\ -0,088 & -0,088 \\ 1,242 & 1,242 \\ -1,418 & -1,418 \\ 1,242 & -1,418 \\ -1,418 & 1,242 \\ 1,792 & -0,088 \\ -1,968 & -0,088 \\ -0,088 & 1,792 \\ -0,088 & -1,968 \end{bmatrix} .(85)$$

Uz konkretni  $a=1,33$  za svaki sljedeći generirani oblik općenito vrijedi:

<sup>31</sup> CCD oblik podrazumijeva  $\alpha = \sqrt{2a}$ , dok CCF oblik uzima  $\alpha = a$ .

<sup>32</sup> U algoritmu polje je naziva "Pokus".

---


$$\mathbf{D}(\zeta_d) = \begin{bmatrix}
 -0,088 & -0,088 \\
 -0,088 & -0,088 \\
 -0,088 & -0,088 \\
 (x_{1f_1})_{(\zeta_{d-1})} + \Delta a & (x_{2f_1})_{(\zeta_{d-1})} + \Delta a \\
 (x_{1f_2})_{(\zeta_{d-1})} - \Delta a & (x_{2f_2})_{(\zeta_{d-1})} - \Delta a \\
 (x_{1f_3})_{(\zeta_{d-1})} + \Delta a & (x_{2f_3})_{(\zeta_{d-1})} - \Delta a \\
 (x_{1f_4})_{(\zeta_{d-1})} - \Delta a & (x_{2f_4})_{(\zeta_{d-1})} + \Delta a \\
 (x_{1ax_1})_{(\zeta_{d-1})} + \Delta \alpha & -0,088 \\
 (x_{1ax_2})_{(\zeta_{d-1})} - \Delta \alpha & -0,088 \\
 -0,088 & (x_{2ax_3})_{(\zeta_{d-1})} + \Delta \alpha \\
 -0,088 & (x_{2ax_4})_{(\zeta_{d-1})} - \Delta \alpha
 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

gdje je za CCF oblik  $\Delta a = \Delta \alpha = 1,33$ , a za CCD oblik  $\Delta a = 1,3$ , dok se  $\Delta \alpha$  računa iz izraza (48). Nakon zaustavljanja algoritma promjene postoje dva niza generiranih planova pokusa (pohranjenih u polja) a ovisno o obliku. Prvi niz su planovi pokusa oblika CCF a drugi predstavlja one planove pokusa oblika CCD (s  $\alpha = 1,414$ ). Svi oblici planova pokusa su strukture 11 točaka kao i pretpostavljeni.

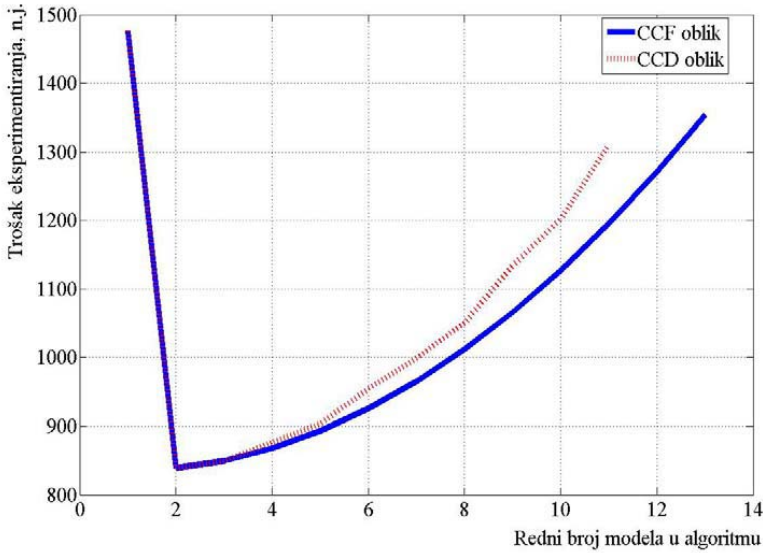
#### 4.1.4 Kretanje vrijednosti kriterija oblikovanja pokusa

Svaki generirani model se izuzima iz polja te se računaju relevantne vrijednosti ukupnog troška i ukupnog utroška vremena. Pa tako za konkretni slučaj moguće je grafički prikazati kretanje vrijednosti kriterija troška eksperimentiranja (slika 4-8) i utroška vremena (slika 4-9).

Pretpostavljeni model, koji je rezultat klasičnog pristupa oblikovanju, dostiže veće vrijednosti kriterija troška i utroška vremena. Budući da su sve ostale vrijednosti kriterija generiranih planova pokusa približne onima u pretpostavljenom planu pokusa, ostaje samo odluka o tome koji oblik odabrati.

---

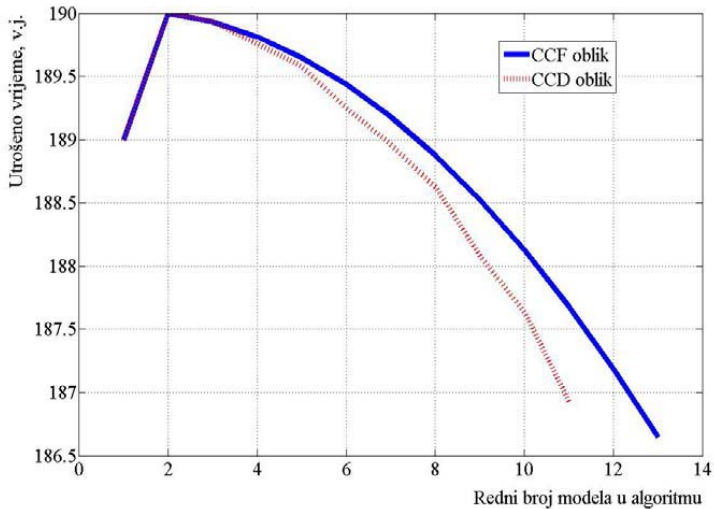




**Slika 4-8.** Promjena ukupnih troškova eksperimenta po iteraciji za CCF i CCD oblik uz  $k_p=0,3$

Iz priloženog grafičkog prikaza vidljivo je kako postoji određena razlika između generiranih nizova za CCF i CCD oblik plana pokusa. Budući da je skupom  $\mathcal{N}_p$  praktički ograničeno i definirano eksperimentalno područje (oblika prikazanog na slici 4-7) CCF model pokusa će se bolje uklopiti u granice područja koje je bliže kubičnom nego sferičnom obliku.

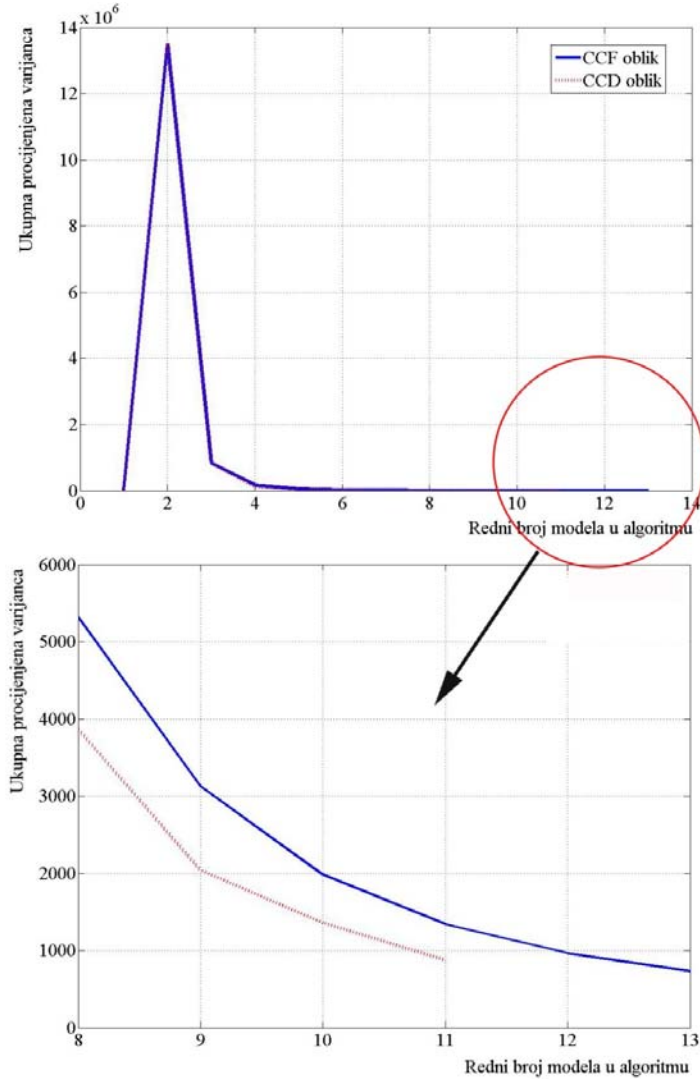
Nadalje, treba primijetiti kako je manje generiranih planova pokusa CCD oblika u odnosu na CCF oblik što ukazuje da je aksijalna točka pokusa u zadnjoj iteraciji postala dio granice poželjnosti. Uspoređujući kretanje troškova eksperimentiranja, primjećuje se da je CCD plan pokusa za određeni iznos dostiže veće vrijednosti. U konačnici potrebno je evaluirati i ostale kriterije, posebice kretanje utroška vremena (slika 4-9).



**Slika 4-9.** Promjena ukupno utrošenog vremena za eksperimentiranje po iteracijama za CCD i CCF oblik uz  $k_p=0,3$

Kretanje utrošenog vremena za eksperimentiranje kod CCD oblika za određeni iznos manje od CCF oblika. Ipak posljednje iteracije pokazuju kako CCF oblik dostiže nižu vrijednost utrošenog vremena od CCD oblika. Stoga će optimalan model biti rezultat izbora modela 11-te iteracije CCD oblika i 13-te iteracije CCF oblika koje će se dodatno evaluirati vrijednostima klasičnih parametara optimalnosti. Dodatna prednost ovakvih prikaza generiranih nizova jest u tome da daje presjek kretanja vrijednosti kriterija, te daje istraživaču kompletnu sliku. U svakom trenutku postavljanjem granica kriterija istraživač može doći do prijedloga optimalnog plana pokusa.

Dodatni kriterij koji utječe na odabir jest kriterij ukupne procijenjene varijance (Q-kriterij), što je detaljno objašnjeno u poglavlju 3.2.5. Kao rezultat izraza (55) grafički se može prikazati kretanje Q kriterija. Vidljivo je da su u posljednjim iteracijama vrijednosti ukupne procijenjene varijance CCD oblik za određeni iznos manje nego kod CCF oblika. Stoga se, generalno, može tvrditi kako se u konkretnom slučaju optimalni plan pokusa može pronaći i u posljednjim iteracijama CCF i CCD oblika generiranih planova pokusa.



**Slika 4-10.** Ukupna procijenjena varijanca po iteracijama za CCF i CCD oblik plana pokusa uz  $k_p=0,3$

Kroz tablicu vrijednosti svih kriterija prikazane su sve prednosti i nedostatci određenog, algoritmom generiranog plana pokusa. Stoga tablica 4-2 prikazuje kretanje vrijednosti svih kriterija po iteraciji u algoritmu. Nakon sumarnog prikaza svih relevantnih kriterija odabira plana pokusa može se zaključiti kako se uz određeni gubitak svojstava (ukupne procijenjene varijance i vrijednosti D-kriterija) ostvaruje ušteda u resursima, pogotovo u samim troškovima eksperimentiranja gdje se ona kreće (za CCD oblik) i do 12%. Naravno, potrebno je imati na umu da je granica

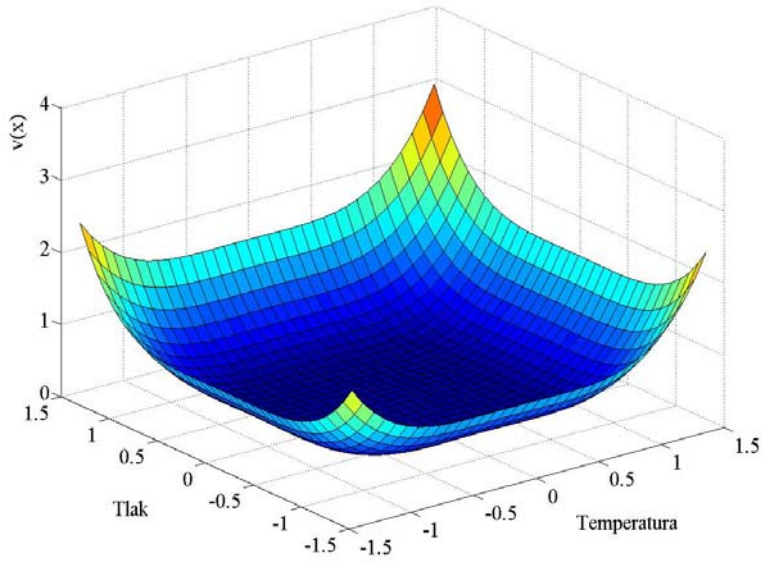
$k_p=0,3$ , a čijim povećanjem bi se još više smanjio iznos kriterija uz posljedicu smanjenja polja poželjnih stanja. Međutim, time bi došlo do povećanja klasičnih kriterija optimalnosti, povećanja varijance zbog smanjenja udjela obuhvaćenog eksperimentalnim točkama.

**Tablica 4-2.** Vrijednosti različitih kriterija po iteracijama algoritma uz  $k_p=0,3$

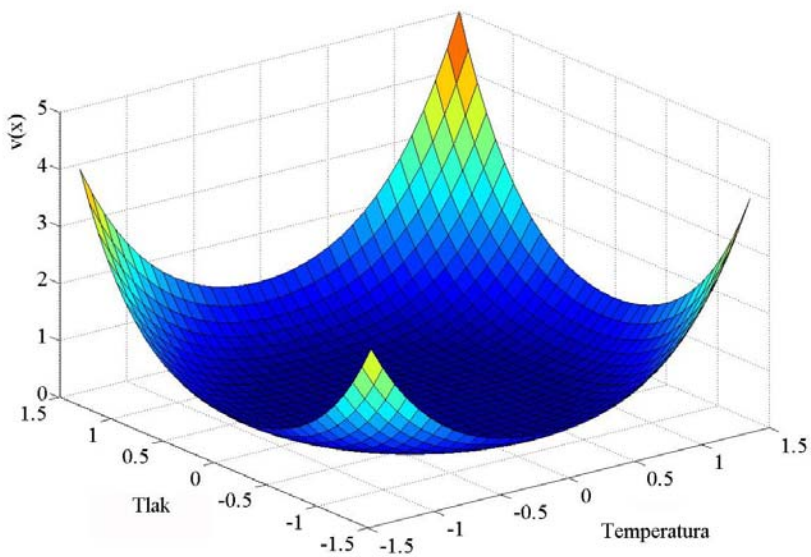
Red. br. modela	Trošak [n.j.]		Utrošak vremena [v.j.]		Ukupna procijenjena varijanca		Vrijednost D kriterija	
	CCF	CCD	CCF	CCD	CCF	CCD	CCF	CCD
Pretpostavljeni model	1377		139,00		582		0,0554	
2.	739	739	139,99	139,99	$1,35 \times 10^7$	$1,35 \times 10^7$	$8,5 \times 10^{-20}$	$8,5 \times 10^{-20}$
3.	750	750	139,93	139,93	$8,39 \times 10^5$	$8,39 \times 10^5$	$5,6 \times 10^{-15}$	$5,6 \times 10^{-15}$
4.	768	777	139,81	139,76	$1,64 \times 10^5$	$1,19 \times 10^5$	$3,7 \times 10^{-12}$	$2,1 \times 10^{-11}$
5.	793	804	139,65	139,58	$5,12 \times 10^4$	$4,03 \times 10^4$	$3,7 \times 10^{-10}$	$1,4 \times 10^{-9}$
6.	826	855	139,44	139,25	$2,07 \times 10^4$	$1,36 \times 10^4$	$1,3 \times 10^{-8}$	$1,1 \times 10^{-7}$
7.	865	899	139,18	138,96	$9,90 \times 10^3$	$6,90 \times 10^3$	$2,4 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{-6}$
8.	912	951	138,88	138,62	$5,32 \times 10^3$	$3,86 \times 10^3$	$2,8 \times 10^{-6}$	$1,3 \times 10^{-5}$
9.	966	1035	138,52	138,08	$3,13 \times 10^3$	$2,04 \times 10^3$	$2,42 \times 10^{-5}$	$1,73 \times 10^{-4}$
10.	1027	1103	138,12	137,63	$1,98 \times 10^3$	$1,36 \times 10^3$	$1,58 \times 10^{-4}$	$9,06 \times 10^{-4}$
11.	1096	1211	137,68	136,93	$1,34 \times 10^3$	873	$8,55 \times 10^{-4}$	0,0071
12.	1171	-	137,19	-	965	-	0,0039	-
13.	1254	-	136,65	-	732	-	0,0158	-
Razlika	-123	-166	-2,35	-2,07	150	291	-0,0396	-0,0483
	-8,9%	-12%	-1,69%	-1,48%	25,8%	50%	-39%	-14%

#### 4.1.5 Karakteristike optimalnog modela

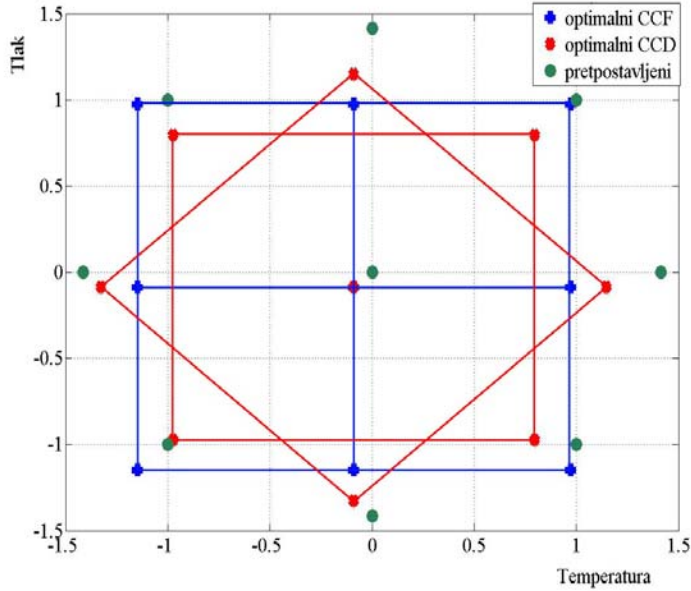
Raspodjela procijenjene varijance modela prikazani su na slikama 4-11 i 4-12.



Slika 4-11. Funkcija procijenjene varijance za optimalni plan pokusa CCF oblika uz  $k_p=0,3$



Slika 4-12. Funkcija procijenjene varijance za optimalni plan pokusa CCD oblika uz  $k_p=0,3$



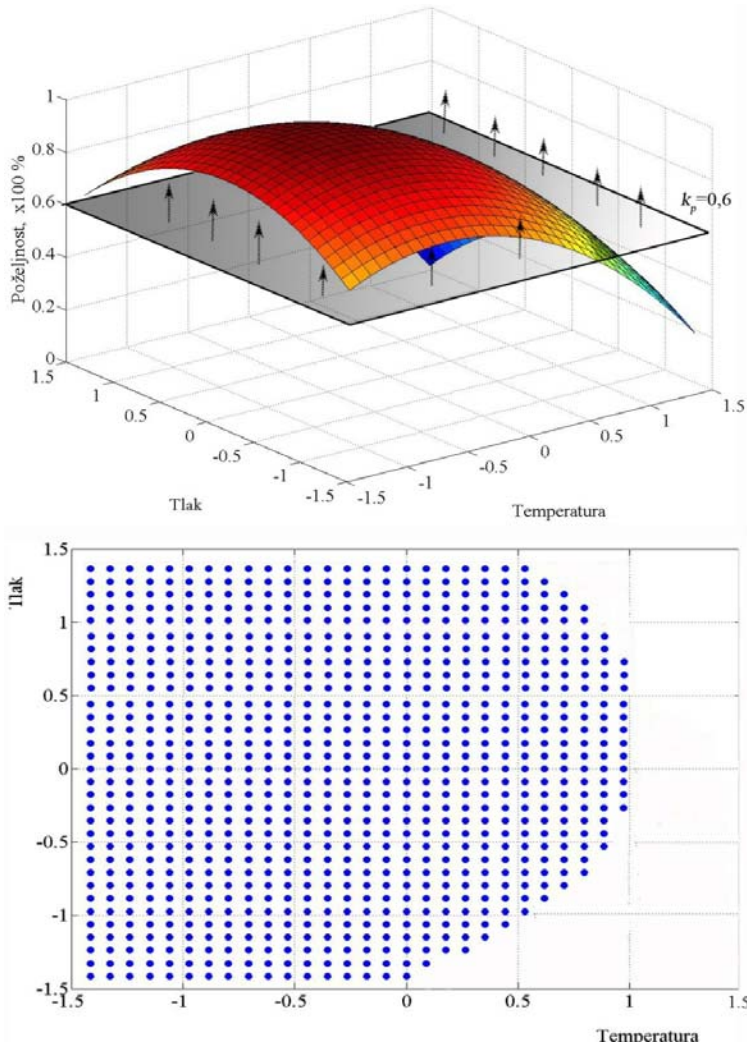
**Slika 4-13.** Raspored točaka u eksperimentalnom području za pretpostavljeni i potencijalno optimalni plan pokusa CCD i CCF oblika uz  $k_p=0,3$

Iz navedenih grafičkih prikaza i rezultata obrazloženih u prethodnom poglavlju, može se donijeti zaključak da po pitanju utroška resursa eksperimentiranja (vremena i troška) ipak prednost ide na stranu CCD oblika. Tvrdnja se može potkrijepiti činjenicom da je smanjenje troška eksperimentiranja kod CCD plana pokusa za 12% u odnosu na CCF kod kojeg je to smanjenje oko 9% (Tablica 4-2). U slučaju odabira bilo kojeg od dva oblika postići će se sigurna ušteda u resursima uz prihvatljiv gubitak preciznosti modela. Kako se može povećati ušteda i o kojim sve čimbenicima ovisi, te kako se to manifestira na poznate parametre evaluacije dobrote oblikovanog modela bit će pokazano u sljedećem poglavlju.

#### 4.1.6 Utjecaj promjene granične vrijednosti poželjnosti

U prethodnom poglavlju bilo je riječi o odabiru i mogućoj promjeni granične vrijednosti poželjnosti  $k_p$ . Granična vrijednost omogućava odbacivanje točaka s ekstremno velikim vrijednostima kriterija. U primjeru se primjenjivala vrijednost  $k_p=0,3$  što je vrlo blaga korekcija polja mogućih rješenja iz  $\mathcal{N}$  u  $\mathcal{N}_p$ . Stoga treba

promotriti slučaj oštrije granice poželjnosti. Odabrana granica poželjnosti bit će 0,6. Funkcija poželjnosti će imati isti oblik prikazan na slici 4-6, iz razloga što nije bilo promjene težinskih faktora kriterija, ali zbog  $k_p=0,6$  polje poželjnih stanja imati će oblik prikazan na slici 4-14.

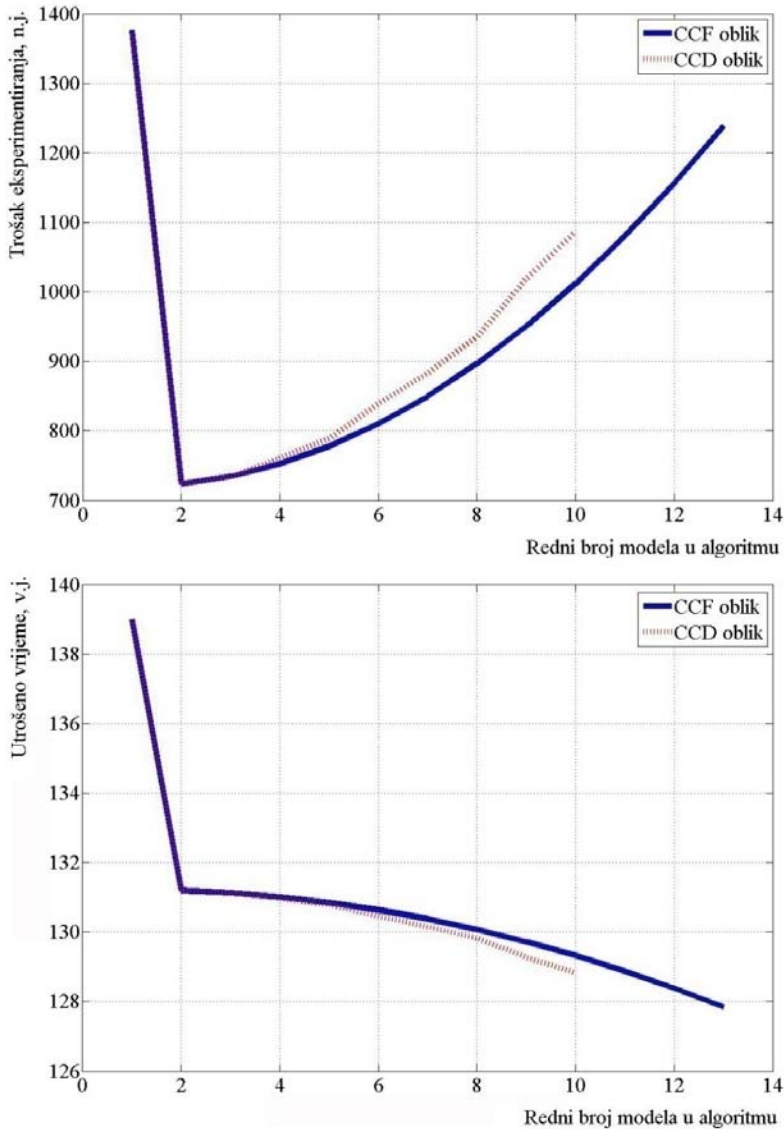


**Slika 4-14.** Funkcija poželjnosti i formiranje polja poželjnih stanja pokusa za slučaj  $k_p=0,6$

Obzirom da je polje mogućih rješenja  $\mathcal{N}_p$  za  $k_p=0,6$  manje od polja rješenja za slučaj  $k_p=0,3$  i sadrži točke visoke poželjnosti, sama kretanje i ušteda u resursima je osjetna, što je vidljivo na grafičkom prikazu (slika 4-15). Povećanjem granične poželjnosti, ušteda u resursima se bitno povećava, dok vrijednosti kriterija

optimalnosti vezani za procijenjenu varijancu, te poglavito D-kriterij se nužno i neizbježno narušavaju. U tablici 4-3 prikazano je kretanje vrijednosti kriterija po iteracijama.

Uzimajući kompletnu sliku o pojedinom pokusu u iteracijama algoritma na kraju je na istraživaču odluka o odabiru optimalnog plana pokusa.



Slika 4-15. Kretanje troška i utroška eksperimentiranja po iteraciji u algoritmu za CCF i CCD oblik plana pokusa uz  $k_p=0,6$



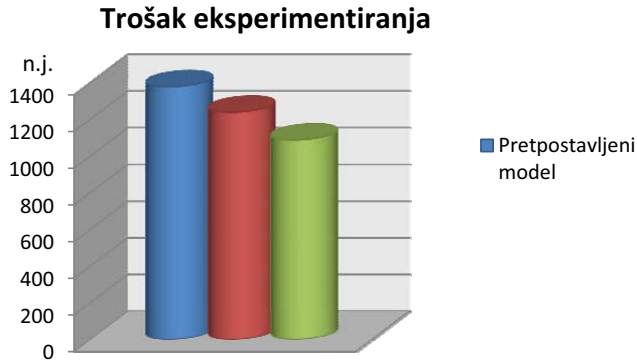
Rezultat uporabe algoritma sugerira da se optimalni plan pokusa odabere između posljednje iteracije CCF i CCD oblika plana pokusa. Točnije, ako bi se gledala ušteda konkretnog resursa troška eksperimentiranja koji je primaran u ovom problemu<sup>33</sup>, tada bi se moglo zaključiti da je optimalni plan pokusa 10-ta iteracija plana pokusa CCD oblika. Shema eksperimentalnih točaka dana je na slici 4-20.

**Tablica 4-3.** Kretanje vrijednosti ostalih kriterija za slučaj granične poželjnosti  $k_p=0,6$

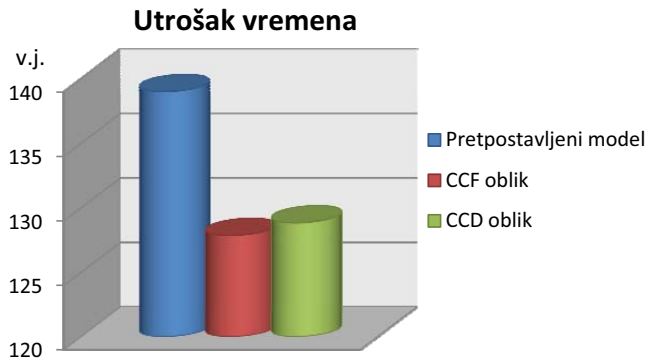
Red. br. modela	Trošak [n.j.]		Utrošak vremena [v.j.]		Ukupna procijenjena varijanca		Vrijednost D kriterija	
	CCF	CCD	CCF	CCD	CCF	CCD	CCF	CCD
Pretpostavljeni model	1377		139,00		582		0,0554	
2.	723	723	131,19	131,19	$1,78 \times 10^7$	$1,78 \times 10^7$	$8,6 \times 10^{-20}$	$8,6 \times 10^{-20}$
3.	734	734	131,12	131,12	$1,07 \times 10^6$	$1,07 \times 10^6$	$5,6 \times 10^{-15}$	$5,6 \times 10^{-15}$
4.	752	760	131,01	130,96	$2,09 \times 10^5$	$1,49 \times 10^5$	$3,7 \times 10^{-12}$	$2,1 \times 10^{-11}$
5.	777	788	130,85	130,78	$6,56 \times 10^4$	$5,05 \times 10^4$	$3,7 \times 10^{-10}$	$1,3 \times 10^{-9}$
6.	810	838	130,64	130,45	$2,65 \times 10^4$	$1,69 \times 10^4$	$1,3 \times 10^{-8}$	$1,1 \times 10^{-7}$
7.	849	883	130,38	130,16	$1,27 \times 10^4$	$8,66 \times 10^4$	$2,4 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{-6}$
8.	896	934	130,08	129,83	$6,79 \times 10^3$	$4,85 \times 10^3$	$2,8 \times 10^{-6}$	$1,3 \times 10^{-5}$
9.	950	1018	129,72	129,28	$3,95 \times 10^3$	$2,54 \times 10^3$	$2,4 \times 10^{-5}$	$1,7 \times 10^{-4}$
10.	1011	1087	129,32	128,83	$2,51 \times 10^3$	$1,68 \times 10^3$	$1,6 \times 10^{-4}$	$9,1 \times 10^{-4}$
11.	1080	-	128,87	-	$1,68 \times 10^3$	-	$8,6 \times 10^{-4}$	-
12.	1156	-	128,39	-	$1,19 \times 10^3$	-	0,0039	-
13.	1238	-	127,85	-	892	-	0,0158	-
Razlika	-139	-290	-11,15	-10,17	310	1098	-0,0396	-0,0545
	-10%	-21%	-8%	-7,3%	53%	189%	-71,5%	-98,4%

Rezultati se mogu grafički prikazati u prikazu svih relevantnih pokazatelja za pojedini potencijalni model pokusa (CCF ili CCD oblik) u usporedbi na pretpostavljeni. Pa tako na slikama 4-16, 4-17, 4-18 i 4-19 se vide odnosi vrijednosti pojedinih kriterija.

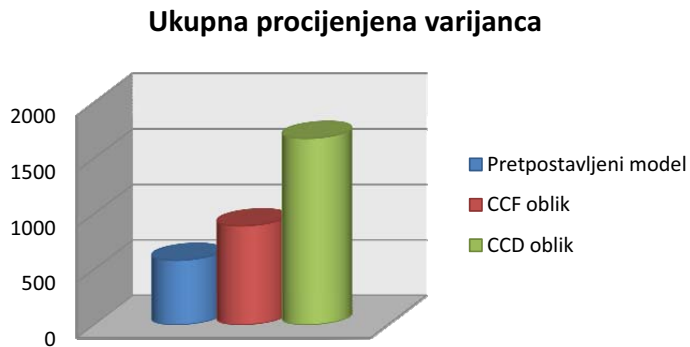
<sup>33</sup> Kriterij troška je važniji nasuprot kriteriju utroška vremena, a vezano za prethodno utvrđen odnos težinskih faktora (5:3 u korist kriterija troška).



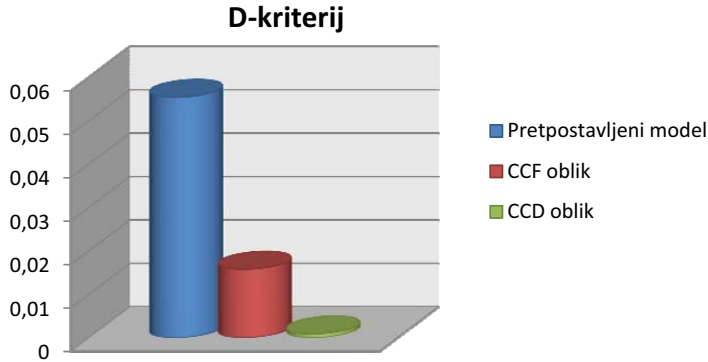
**Slika 4-16.** Usporedba troška eksperimentiranja pretpostavljenog modela i generiranih modela oblika CCF i CCD uz  $k_p=0,6$



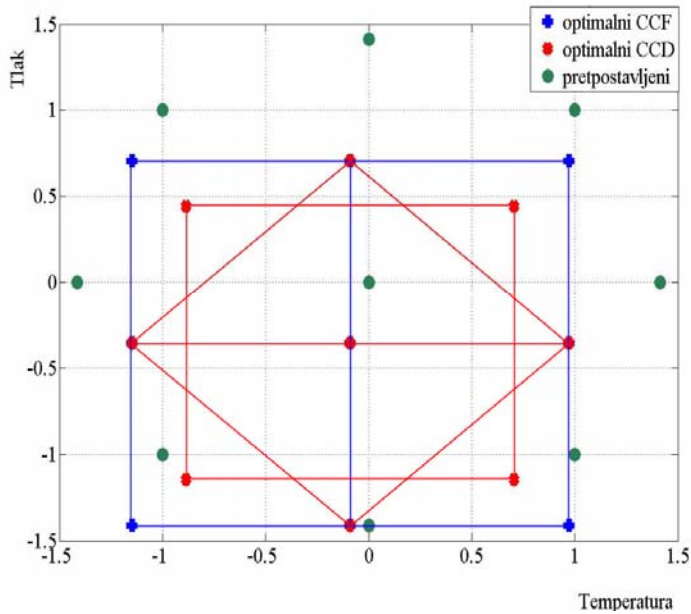
**Slika 4-17.** Usporedba utroška vremena eksperimentiranja pretpostavljenog modela i generiranih modela oblika CCF i CCD uz  $k_p=0,6$



**Slika 4-18.** Usporedba ukupne procijenjene varijance pretpostavljenog modela i generiranih modela oblika CCF i CCD uz  $k_p=0,6$

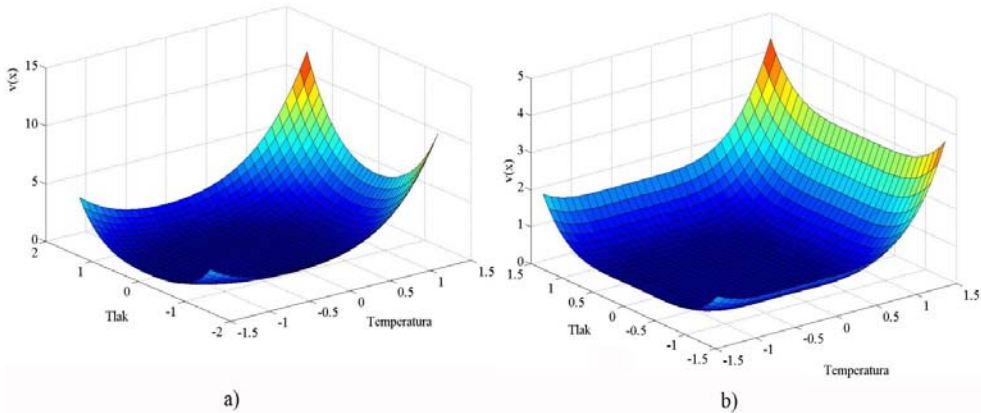


**Slika 4-19.** Usporedba prema D-kriteriju pretpostavljenog modela i generiranih modela oblika CCF i CCD uz  $k_p=0,6$



**Slika 4-20.** Raspored točaka u eksperimentalnom području za pretpostavljeni i potencijalno optimalni plan pokusa CCD i CCF oblika uz  $k_p=0,6$

Prema dobivenim rezultatima može se zaključiti kako je za  $k_p=0,6$  optimalni plan pokusa onaj CCF oblika jer zadržava relativno dobre vrijednosti postojećih klasičnih kriterija optimalnosti uz poboljšanje novouvedenih kriterija optimalnosti (troška i utroška vremena).



**Slika 4-21.** Funkcija procijenjene varijance za potencijalno optimalni plan pokusa CCD i CCF oblika uz  $k_p=0,6$

Općenito, uspoređujući vrijednosti kriterija generiranih modela s  $k_p=0,3$  i  $k_p=0,6$  može se zaključiti da sama granična vrijednost bitno utječe na rezultat, odnosno oblik plana pokusa. Stroža granica će dati veći apsolutni prirast vrijednosti svih kriterija.

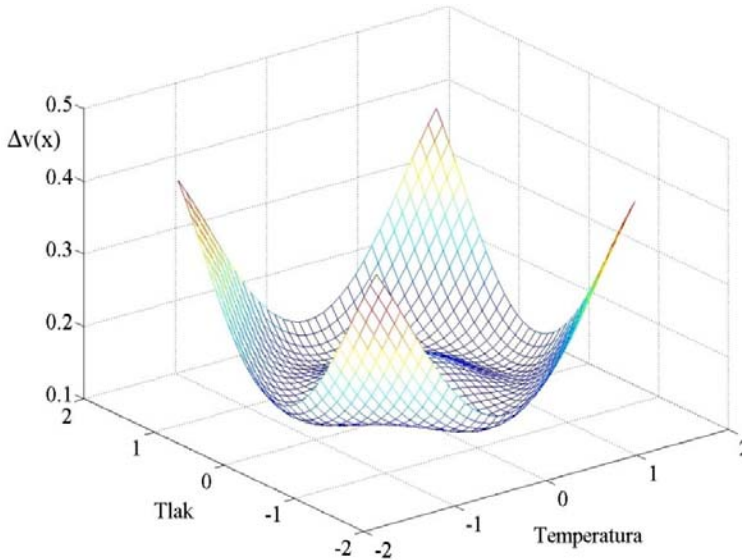
## 4.2 Načelo uporabe algoritma faze 2 (poboljšanje modela) na simuliranom primjeru

Načelo uporabe algoritma faze 2 bit će pokazan na simuliranom primjeru prikazanom i u poglavlju 4.1. Svrha ove faze algoritma VAOPP-a jest povećanje preciznosti modela dodavanjem i ponavljanjem točaka u planu pokusa. Dodavanjem eksperimentalnih točaka smanjuje se procijenjena varijanca modela te time direktno povećava preciznost modela.

Za primjer uporabe poboljšanja modela, kao početni oblik uzet će se pretpostavljeni oblik plana pokusa faze 1 algoritma VAOPP-a. Naravno, poboljšanje modela u vidu povećanja preciznosti moguće je provesti i na samom optimalnom modelu, onome koji je rezultat faze 1. Pretpostavljeni (početni) model jest oblika prikazanog u tablici 4-1 i na slici 4-1. Pronalaženje funkcije kriterija troška eksperimentiranja i utroška vremena je identičan proceduri iz poglavlja 4.1.1 te rezultata oblika navedenih u izrazima (83) i (84).

#### 4.2.1 Definicija prirasta preciznosti modela i funkcije poželjnosti

Prirast preciznosti za konkretni model definira se za svaku iteraciju u procesu poboljšavanja modela, odnosno za svaku dodanu eksperimentalnu točku. Standardizirana matrica kriterija  $\Delta Q^r$  preciznosti modela dobivena iz izraza (76), za početni oblik (pretpostavljeni model) dana je slici 4-22.

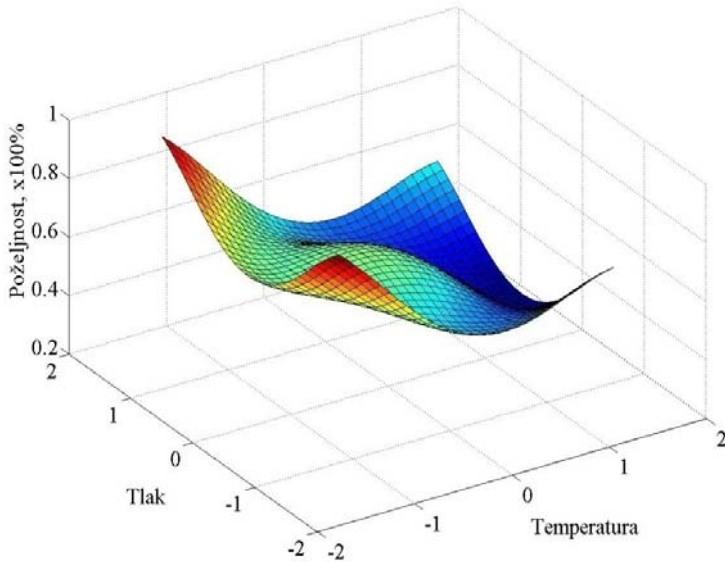


Slika 4-22. Funkcija prirasta preciznosti modela za pretpostavljeni model

Iz slike je vidljivo kako je prirast preciznosti najveći u području koje nije obuhvaćeno eksperimentalnim točkama, te se na temelju te činjenice predlaže dodavanje točaka u tom području. Kao kriterij postaje standardizirana matrica kriterija prirasta preciznosti koja je u skali od 0-1 te se u takvom obliku superponira s prethodna dva kriterija.

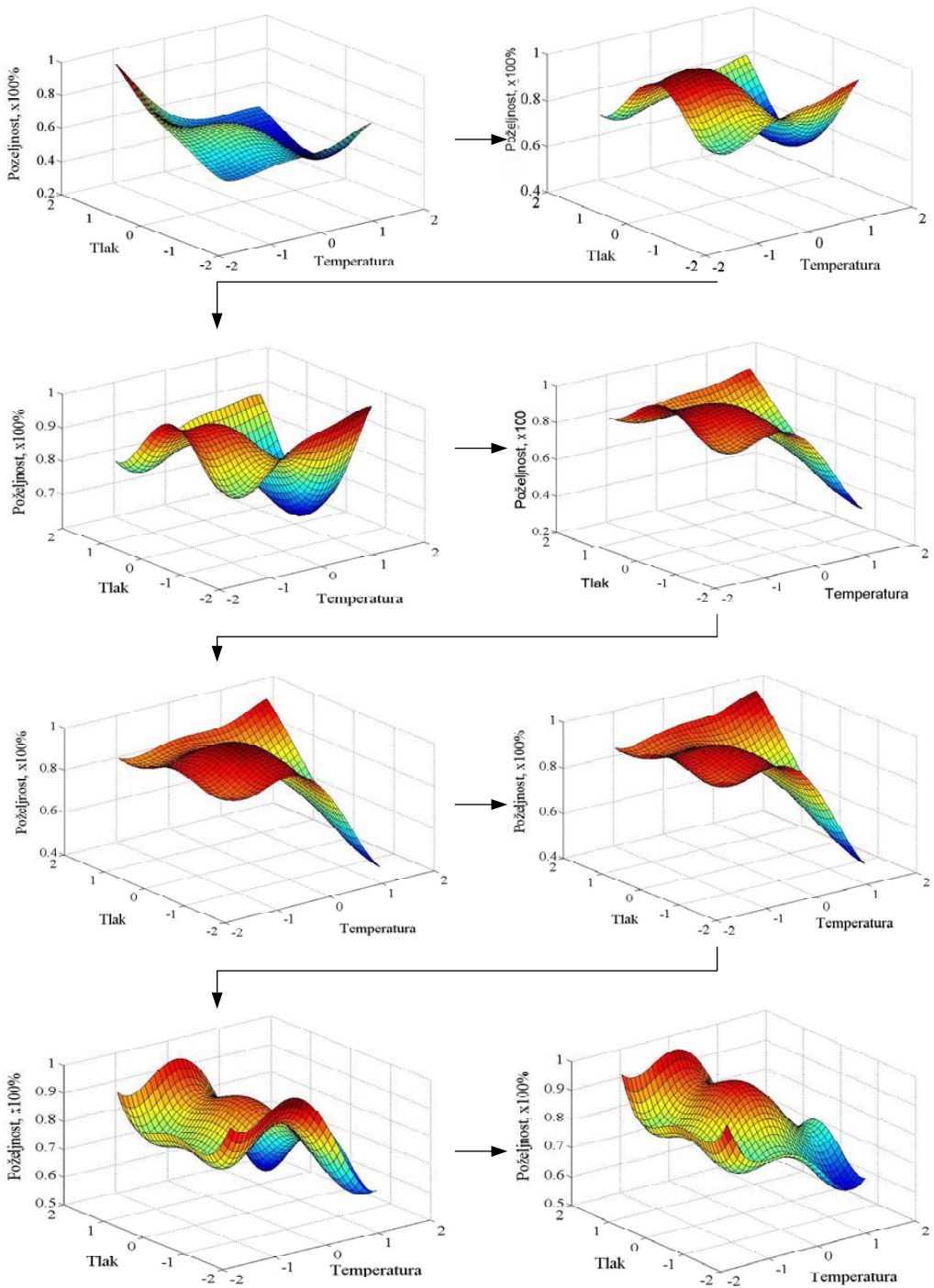
Standardizirani kriteriji funkcije troška, utroška vremena i prirasta preciznosti superponiraju se s prethodno ponderiranim težinskim faktorima. Uzeti su težinski faktor preciznosti modela  $k_{pr}=8$  dok su težinski faktori troška i utroška vremena redom  $k_t=5$ ,  $k_v=7$ . Time je dat odnos kriterija poboljšanja modela koji se može iščitati kao omjer 8:5:7. Rezultat operacije zbrajanja (superponiranja) jest matrica funkcije poželjnosti koju je moguće prikazati preko eksperimentalnog područja. Na slici 4-23 prikazana je funkcija poželjnosti iz čijeg se oblika jednostavno može očitati točka najveće poželjnosti, odnosno točka koja zadovoljava maksimum zadanih kriterija.

Konkretno, po funkciji poželjnosti pretpostavljenog modela u prvoj iteraciji, daje se prijedlog dodatne eksperimentalne točke s vrijednošću  $(-1,414 ; -1,414)$ .



**Slika 4-23.** Funkcija poželjnosti pretpostavljenog modela, prijedlog dodavanja eksperimentalne točke u prvoj iteraciji poboljšanja modela

Nakon dodavanja eksperimentalne točke s koordinatom  $(-1,414 ; -1,414)$  postupak formiranja funkcije prirasta preciznosti modela te funkcije poželjnosti se ponavlja. Funkcija poželjnosti mijenja oblik svakom iteracijom po kojoj se pridružuju nove točke prethodnoj matrici oblika plana pokusa. Promjena oblika funkcije poželjnosti je skicirana na slici **4-24** iz koje je vidljivo u svakom trenutku koja se vrijednost (eksperimentalna točka) predlaže kao sljedeća za integriranje u plan pokusa.



Slika 4-24. Promjena funkcije poželjnosti po iteracijama

Dodane točke pokusa nakon svake iteracije su redosljedom:

- 1) iteracija –  $T_1(-1,414; -1,414)$ ,
- 2) iteracija –  $T_2(-1,414; 1,414)$ ,
- 3) iteracija –  $T_3(-0,707; 0)$ ,
- 4) iteracija –  $T_4(1,414; -1,414)$ ,
- 5) iteracija –  $T_5(-1,414; 0)$ ,
- 6) iteracija –  $T_6(-0,3535; -0,2651)$ ,
- 7) iteracija –  $T_7(1,414; 1,414)$ ,
- 8) iteracija –  $T_8(-0,2651; -1,414)$ ,
- 9) iteracija –  $T_9(-1,414; 1,414)$ .

Iz navedenih parcijalnih rezultata, dodanih točaka matrici pretpostavljenog plana pokusa  $\mathbf{X}(\zeta_p)$  oblika (82), formirana je konačna matrica plana pokusa  $\mathbf{X}'(\zeta_d)$ .

Matrica sadrži sve dodane točke redosljedom kako su generirane procesom iteracija.

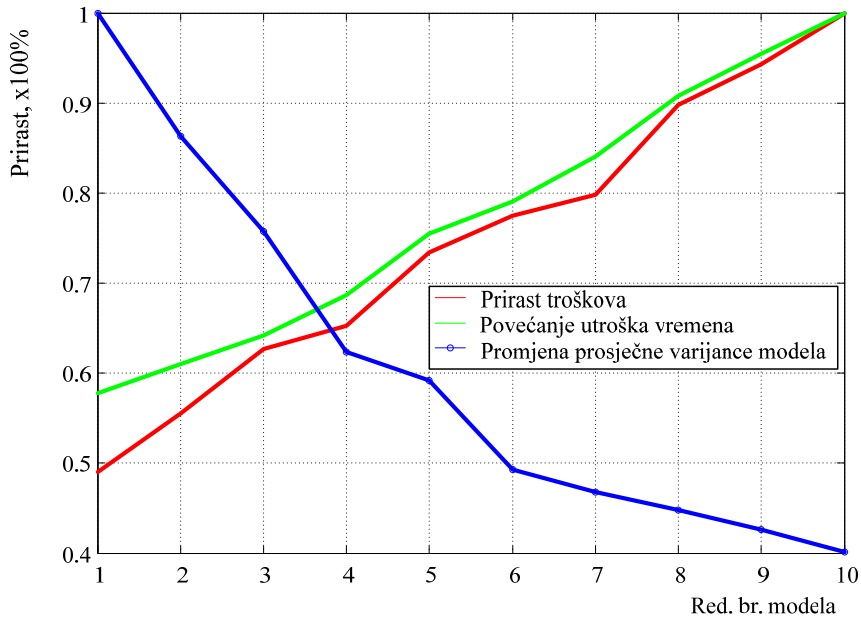
Strukturu matrice generiranog plana pokusa moguće je prikazati:

$$\mathbf{X}'(\zeta_d) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1,414 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1,414 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1,414 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1,414 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1,414 & -1,414 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1,414 & 1,414 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -0,707 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 1,414 & -1,414 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1,414 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -0,3535 & -0,2651 & 0,125 & 0,0703 & 0,0937 \\ 1 & 1,414 & 1,414 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -0,2651 & -1,414 & 0,0703 & 2 & 0,3749 \\ 1 & -1,414 & 1,414 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (87)$$



#### 4.2.2 Rezultati i odabir optimalnog plana pokusa

Budući da je devet iteracija (deseta matrica oblika) dovoljan skup rješenja za odabir optimalnog, potrebno je evaluirati ostale parametre koji će dati prijedlog optimalnog rješenja. Kao kriterij za odabir optimalnog rješenja uzima se najveći prirast preciznosti modela, izražen preko smanjenja prosječne varijance modela, što je moguće vidjeti iz sljedećeg dijagrama:

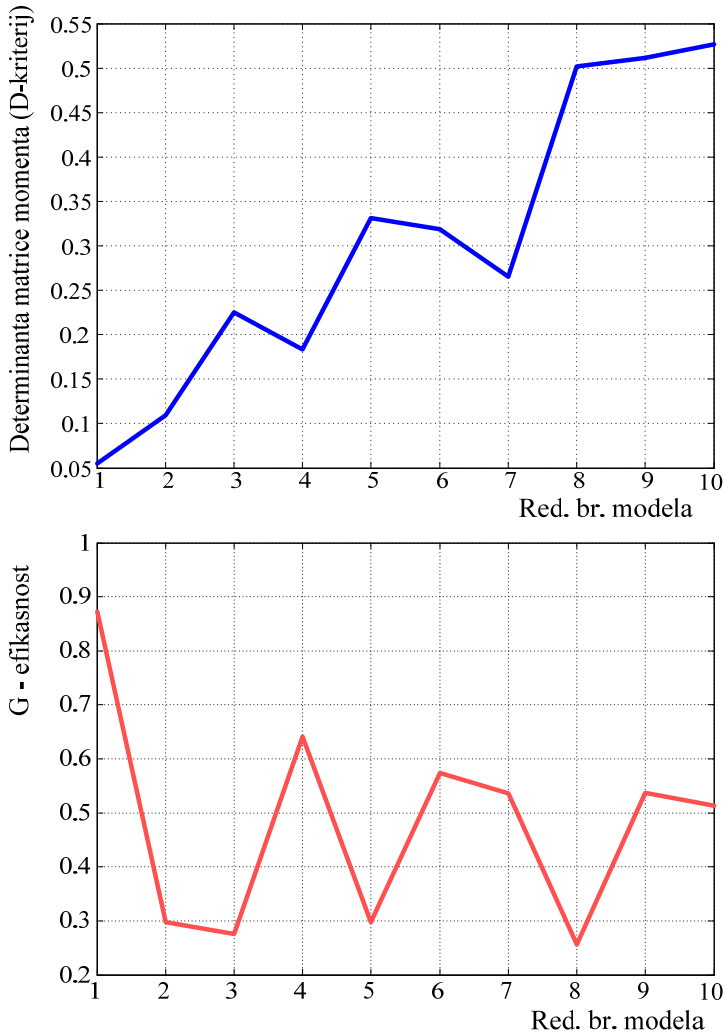


**Slika 4-25.** Prirast vrijednosti kriterija nakon procesa iteracija

Na slici se može primijetiti kako se nadogradnjom modela 3 postiže najveća promjena prosječne varijance modela (preko izraza (80) odabire se  $\Delta G$  koji ima maksimalnu vrijednost), u smislu najvećeg prirasta preciznosti. Stoga je zaključak da je model 4 onaj koji je za ovaj slučaj najbliži optimalnom rješenju. Model 4 jest pretpostavljeni model s dodanim eksperimentalnim točkama  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$ .

Kako bi se potvrdila optimalnost odabranog modela, potrebno je promotriti i ostale parametre modela kao što su: vrijednost D-kriterija, G-efikasnost i gubitak ortogonalnosti. Vrijednosti kretanja D-kriterija odnosno G-efikasnosti dani su na slici 4-26. Usporedbom s pretpostavljenim modelom, vrijednost D-kriterija se povećava dogradnjom modela eksperimentalnim točkama (većinom u rubnom području) što je i

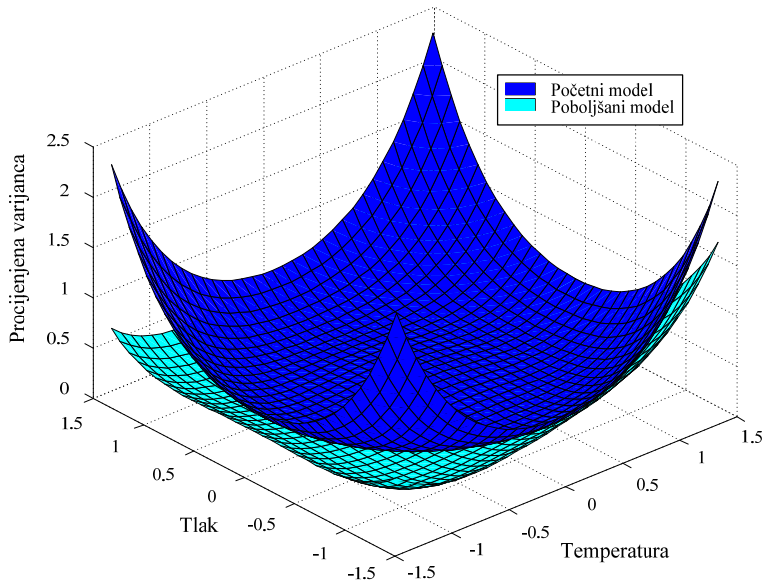
očekivano obzirom da je iz definicije D-kriterija (8) i sama "količina informacija" povećana.



**Slika 4-26.** Promjena vrijednosti D-kriterija i G-efikasnosti po iteracijama

Promatranjem promjene vrijednosti kriterija G-efikasnosti, može se uočiti kako je vrijednost modela 4 manja od vrijednosti pretpostavljenog modela. To znači da je odabrani model po pitanju omjera prosječne i maksimalne procijenjene varijance (iz izraza (17)) modela manji. Koristeći definiciju G-efikasnosti nameće se zaključak kako je odabrani model ujednačen obzirom na raspodjelu procijenjene varijance, a što je zorno prikazano na slici 4-27. Iz grafičkog prikaza procijenjene varijance dvaju modela vidljivo je da je poboljšani model ne samo kvalitetniji u procijeni odzivnih

vrijednosti (manja prosječna procijenjena varijanca) nego je posebice u području  $-1,5$  do  $-0,5$  raspona razina faktora temperature osjetno ujednačeniji.



**Slika 4-27.** Raspodjela procijenjene varijance pretpostavljenog i poboljšanog modela

Konkretno, u točki pokusa  $(-1,414, 0)$  vrijednost procijenjene varijance manja je za 33%, odnosno s vrijednosti od 0,62 pada na vrijednost 0,42. Procjena odzivnih vrijednosti preko intervala povjerenja (14) za konkretnu točku za slučaj:

- pretpostavljenog (početnog) modela

$$\hat{y}(1,414;0) - 2,023 \leq E[y(1,414;0)] < \hat{y}(1,414;0) + 2,023, \quad (88)$$

uz  $P=0,95$  ili  $|t_{\alpha/2}| = 2,57$ , i

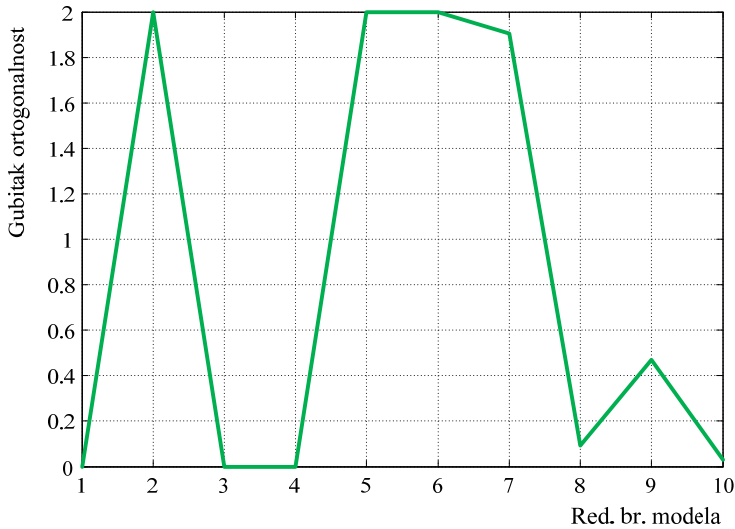
- poboljšanog modela (optimalnog) modela

$$\hat{y}(1,414;0) - 1,497 \leq E[y(1,414;0)] < \hat{y}(1,414;0) + 1,497, \quad (89)$$

uz  $P=0,95$  ili  $|t_{\alpha/2}| = 2,31$ .

Raspon intervala povjerenja odzivnih vrijednosti pokazuje konkretniju razliku među modelima. Promatrajući cijeli raspon intervala u konkretnoj točki, može se zaključiti da je razlika 25% u korist optimalnog modela.

Posljednji parametar modela koji je potrebno kontrolirati jest ortogonalnost. Po definiciji ortogonalnosti iz izraza (81), moguće je kontrolirati eventualni gubitak ortogonalnosti, te ga također grafički prikazati kroz dijagram kretanja vrijednosti sume produkata linearnih članova po iteracijama. Na slici 4-28 dana je promjena pokazatelja ortogonalnosti kroz iteracije.



**Slika 4-28.** Kretanje vrijednosti gubitka ortogonalnosti (sume produkata linearnih članova u matrici) po iteracijama

Kada su svi pokazatelji dobrote oblikovanog modela prihvaćeni, potrebno je promotriti prirast kriterija troška eksperimentiranja i utroška vremena. Dodatni uloženi trošak eksperimenta se kreće oko 30% dok je dodatno vrijeme eksperimentiranja produljeno za 18%. To povećanje vrijednosti kriterija je minimizirano a direktno je ovisno i o iznosima težinskih koeficijenata navedenim u početnim uvjetima poboljšavanja modela.

Nakon analize dobivenih rezultata može se prihvatiti činjenica da nakon je nakon faze poboljšavanja modela, model 4 optimalan sa sljedećom matricom plana pokusa:

$$\mathbf{X}(\zeta_{opt}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1,414 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1,414 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1,414 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1,414 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1,414 & -1,414 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1,414 & 1,414 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -0,707 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Konačno, ovaj primjer pokazuje mogućnost i smisao uporabe algoritma faze 2. U slučaju kada je potrebno poboljšati model, kako prije izvođenja pokusa tako i nakon izvedenog pokusa, uporabom algoritma VAOPP-a faze 2 moguće je povećati kvalitetu procjene odzivnih vrijednosti uz razumni (optimirani) utrošak raspoloživih resursa. U slučaju kada je eksperiment u završnoj fazi izvođenja, po potrebi se poboljšava model s naznakom da se prilikom izvođenja dodatnih eksperimentalnih točaka ne može zadržati slučajni redoslijed izvođenja, te se radi kontrole preporuča da se u formi bloka točke posebno tretiraju.

### 4.3 Uporaba algoritma VAOPP-a na primjeru istraživanja problema kolapsa strukture kod PE plinovodnih cijevi

U ovom poglavlju će se pokazati mogućnost uporabe algoritma VAOPP-a faze 2 (poboljšavanja modela) kroz primjer istraživanja problema pužanja polietilenskih cijevi. Primjer je preuzet iz istraživanja navedenog u literaturnom izvoru [39]. Istraživanje se bavi problemom procjene preostalog vremena uporabe oštećenih polietilenskih plinovodnih cijevi. U eksperimentalnom dijelu istraživanja sadržano je ispitivanje utjecajnih faktora na procjenu preostalog vremena uporabe oštećenih polietilenskih plinovodnih cijevi. Kao mogući utjecajni faktori u obzir su uzeti: duljina zarez (oštećenja), dubina zarez i tlak u cijevi. Zbog same nehomogenosti strukture,

odnosno prirode materijala (PE), očekivano je veliko rasipanje rezultata te vrlo nelinearna karakteristika. Obzirom na navedeno, istraživanju se pristupilo uporabom planova pokusa iz područja metodologije odzivne površine.

#### 4.3.1 Odabir pretpostavljenog modela plana pokusa i indikacija mogućih problema

Kao pretpostavljeni model uporabljen je model centralno kompozitnog plana pokusa (CCD) s 3 nezavisna faktora. Istraživanje je provedeno u laboratoriju gdje su uzorci podvrgnuti promjenama vrijednosti faktora, a kao odziv bilježeno je vrijeme do kolapsa strukture. Kao glavni problem koji je proizašao tijekom istraživanja jest ekstremno velika vrijednost utrošenog vremena na samo laboratorijsko ispitivanje nekih točaka pokusa. Točnije, nakon protoka vremena od 2 godine jedna od točaka pokusa još nije sadržavala konačnu informaciju. Zbog navedenog razloga, koje implicira prekoračenje rokova zadanih za ovo istraživanje, formulirana je odzivna funkcija s nepotpunim rezultatima. Formulacija odzivne površine u slučaju nepotpunosti rezultata u sebi sadrži razmjerno veliku procijenjenu varijancu, što rezultira smanjenoj preciznosti modela i nije poželjna značajka. Stoga se nameće potreba povećanja preciznosti dogradnjom modela eksperimentalnim točkama.

Kako bi se razjasnila mogućnost uporabe algoritma VAOPP-a u poboljšanju modela (povećanju preciznosti modela) potrebno je definirati pretpostavljeni plan pokusa (Tablica 4-4).

**Tablica 4-4.** Plan pokusa u kodiranim vrijednostima faktora za slučaj istraživanja problema kolapsa strukture PE cijevi

Stanje pokusa	Duljina zarez (x <sub>1</sub> )	Dubina zarez (x <sub>2</sub> )	Tlak (x <sub>3</sub> )	Vrijeme [h]
1	-1	-1	-1	14066,40
2	-1	-1	1	19,64
3	-1	1	-1	181,21
4	-1	1	1	0,36
5	1	-1	-1	13323,17
6	1	-1	1	20,40
7	1	1	-1	95,88

Stanje pokusa	Duljina zareza ( $x_1$ )	Dubina zareza ( $x_2$ )	Tlak ( $x_3$ )	Vrijeme [h]
8	1	1	1	0,01
9	-1,682	0	0	221,65
10	1,682	0	0	18,84
11	0	-1,682	0	8608,47
12	0	1,682	0	0,01
13	0	0	-1,682	11903*
14	0	0	1,682	0,01
15(C)	0	0	0	24,71
16(C)	0	0	0	16,52
17(C)	0	0	0	32,48
18(C)	0	0	0	20,50
19(C)	0	0	0	23,11

Može se primijetiti kako se radi o centralno kompozitnom planu pokusa s 5 centralnih točaka pokusa, te ukupno 19 stanja pokusa. Zbog složenosti problema s 3 faktora, tj. definiranja prirasta preciznosti modela, u primjeru poboljšanja plana pokusa uzet će se manje složeni model drugog reda s interakcijama, što u konačnici neće uzrokovati bitna odstupanja u rezultatu.

#### 4.3.2 Definicija funkcija utroška resursa i funkcije poželjnosti

Eksperimentalna točka pod red. br. 13 je nepotpuna, što znači da podatak nije konačan. Kako je potrebno definirati funkciju vremenskog trajanja, taj podatak će biti izuzet iz razloga što komponenta utroška vremena (dio koji se odnosi na laboratorijsko istraživanje) nije konačna. Stoga će matrica početnog plana pokusa  $\mathbf{X}(\zeta_p)$  biti veličine  $18 \times 10$ . Funkcija troška bit će definirana na temelju stvarnih podataka o trošku, a za potrebe testiranja dobivene od strane istraživača u obliku konstantne vrijednosti (vrijednosti identične za svako stanje pokusa) koja ne sadržava varijaciju u trošku korištenja ispitne stanice koji je vezan za protok vremena. Konkretno, funkciju utroška vremena moguće je direktno definirati kroz odzivne vrijednosti prikazane u tablici 4-4. Obzirom da ulazni podaci o protoku vremena (u satima) variraju u velikom rasponu, prije pronalaženja adekvatne funkcije potrebno je

transformirati odzivnu varijablu na način koji je detaljno objašnjen u radu [40]. Definirana funkcija utroška vremena glasi:

$$f_v^{0,2} = 28,57 - 0,042x_1 - 11,18x_2 - 2,12x_3 + 0,237x_2x_3 + 3,71 \times 10^{-4}x_1^2 + 2,34x_2^2 + 0,059x_3^2 - 1,05 \times 10^{-6}x_1^3 - 0,209x_2^3, \quad (91)$$

dok je funkcija troška definirana od strane istraživača iz rada [39]:

$$f_i = 3500. \quad (92)$$

Definicija prirasta preciznosti modela vrši se kroz proces iteracija identičnom procedurom objašnjenom u prethodnim poglavljima. Standardizirane funkcije (na područje 0-1) kriterija stavljaju se u odnos operacijom zbrajanja uz odabrane težinske faktore čiji su iznosi sljedeći:  $k_{pr}=5$ ,  $k_t=2$  i  $k_v=9$ . Dobivena funkcija poželjnosti modificira se do zaključno devete iteracije. Kao i u prethodnom primjeru nakon svake iteracije formira se nova matrica plana pokusa  $\mathbf{X}(\zeta_d)$ , koja ujedno predstavlja i skup eksperimentalnih točaka. Budući da je problem višedimenzionalan (3 faktora), grafički prikaz funkcija postaje neprikladan, stoga će biti prikazani samo prikazi kretanja konačnih parametara plana pokusa.

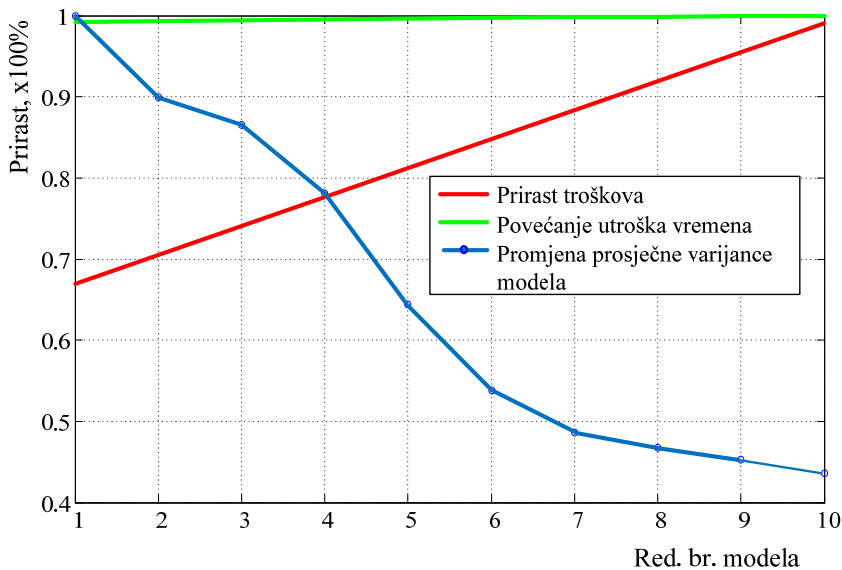
### 4.3.3 Rezultati i izbor optimalnog plana pokusa

Nakon procesa iteracija dobiveni su rezultati dodatnih točaka po funkciji poželjnosti. Prijedlog dodatnih eksperimentalnih točaka se može očitati iz konačne matrice pokusa koja je sljedećeg oblika:

$$\mathbf{X}(\zeta_d) = \begin{bmatrix} & & & & \underbrace{\mathbf{X}(\zeta_p)} & & & & & & \\ 1 & 1,68 & 1,68 & 1,68 & 2,82 & 2,83 & 2,83 & 2,83 & 2,83 & 2,83 & \\ 1 & -1,68 & 1,68 & 1,68 & 2,82 & 2,83 & 2,83 & -2,83 & 2,83 & -2,83 & \\ 1 & 1,20 & 1,68 & -1,68 & 1,44 & 2,83 & 2,83 & 2,02 & -2,83 & -2,02 & \\ 1 & -1,68 & 1,68 & -1,68 & 2,82 & 2,83 & 2,83 & -2,83 & -2,83 & 2,83 & \\ 1 & 0 & 0,24 & -1,68 & 0 & 0,06 & 2,83 & 0 & -0,40 & 0 & \\ 1 & 0 & 1,68 & 0,24 & 0 & 2,83 & 0,06 & 0 & 0,40 & 0 & \\ 1 & 0 & 1,68 & 1,68 & 0 & 2,83 & 2,83 & 0 & 2,83 & 0 & \\ 1 & 1,68 & 1,68 & 0 & 2,83 & 2,83 & 0 & 2,83 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \quad (93)$$



Dodatne eksperimentalne točke smještene su u području viših vrijednosti faktora  $x_2$  (faktor dubine zarez), što je uz uporabu konkretnih težinskih faktora i očekivano. Smisao je da dodatne točke povećaju preciznost u što kraćem vremenskom roku. Budući da je trošak konstantna funkcija i nema varijabilnosti unutar područja eksperimenta, utjecaj samog kriterija je i unutar algoritma zanemaren. Na slici **4-29** prikazan je prirast kriterija poboljšavanja pretpostavljenog modela gdje je vidljivo da u modelu pod rednim brojem 6<sup>34</sup> smanjenje prosječne varijance pada na 54% vrijednosti pretpostavljenog modela a uz vrlo mali prirast najvažnijeg kriterija utroška vremena. Utrošak vremena ima porast od okvirno 1%, što se može obrazložiti dodavanjem eksperimentalnih točaka u područje gdje je potreban mali vremenski period kako bi se dobio konačan rezultat.

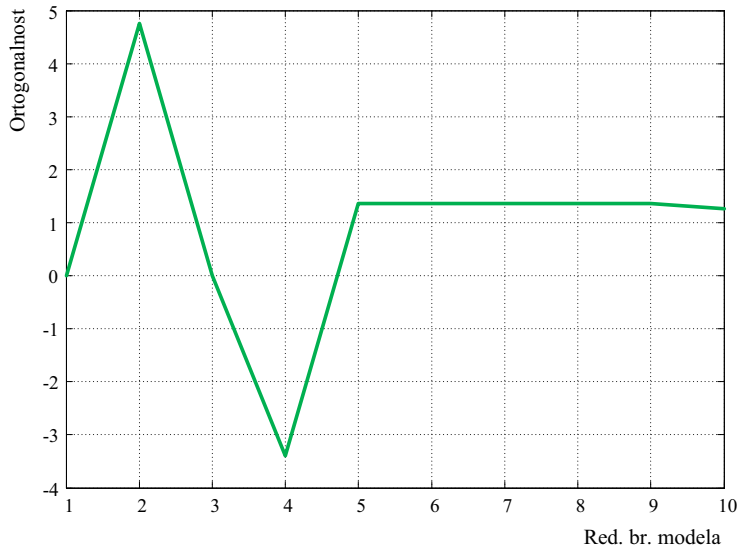


**Slika 4-29.** Prirast vrijednosti kriterija nakon procesa iteracija

Kada se pogleda kretanje troška eksperimentiranja, povećanje istih je za konkretan model 6 na razini manjoj od 20%. To je nužno dodatno ulaganje kako bi se postigla navedena preciznost modela. Svakako treba napomenuti da je, iz razloga konstante vrijednosti u eksperimentalnom prostoru, trošak u samom algoritmu traženja poželjnih eksperimentalnih točaka zanemaren. Razmatrani model 6 se smatra optimalnim modelom obzirom da je prirast preciznosti, odnosno smanjenje prosječne

<sup>34</sup> U narednom tekstu je objašnjeno zašto je uzet model 6 u razmatranje.

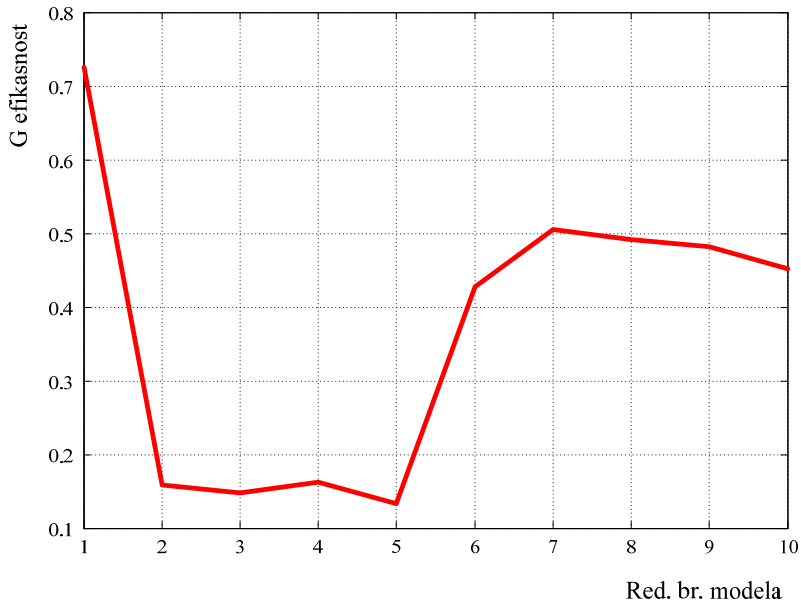
varijance modela najveće upravo formiranjem toga modela. Točnije, nakon modela 6 utrošak resursa raste povećanjem modela (pogotovo trošak eksperimenta), dok prirast preciznosti ima blagi trend promjene. Kako bi se provjerila adekvatnost modela potrebno je pogledati kretanje gubitka ortogonalnosti (slika 4-30). Od modela 6 pa sve do kraja procesa iteracija moguće je zaključiti da je gubitak ortogonalnosti približno konstantan i zanemariv što navodi na zaključak da će procjena efekata biti zadovoljavajuća.



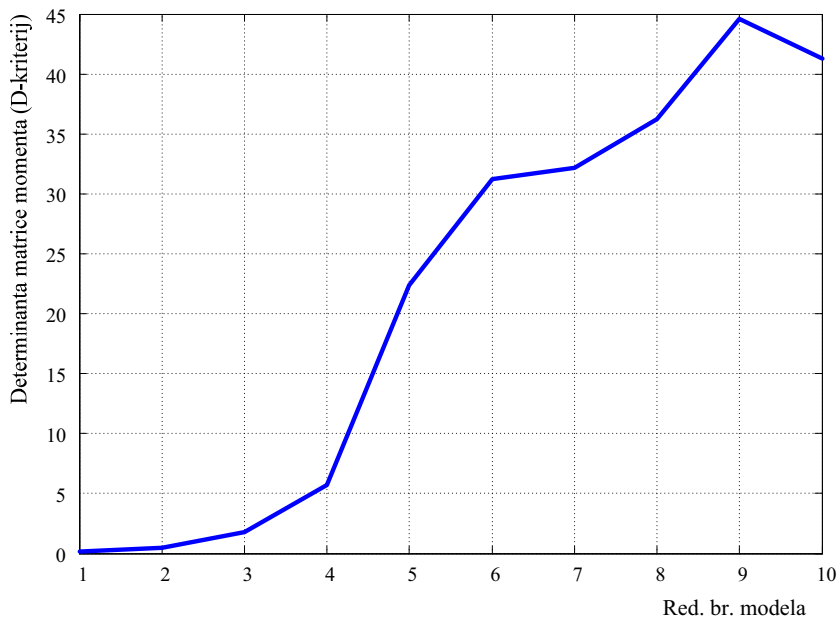
**Slika 4-30.** Kretanje gubitka ortogonalnosti po iteracijama u algoritmu

Gledajući ostale parametre optimalnosti kao što je G-efikasnost (slika 4-31) može se prihvatiti da je optimalni plan ipak nešto manje balansiran nego pretpostavljeni (razlika 44% : 73%), no to se tumači dodavanjem točaka isključivo u jednom dijelu eksperimentalnog prostora. Ta činjenica ne mora biti loša karakteristika iz razloga što se uvidom u raspodjelu procijenjene varijance može kontrolirati kvaliteta procjene očekivanih odzivnih vrijednosti.

Na posljepku ostaje još komentirati D kriterij. Zbog dodavanja određenih eksperimentalnih točaka D kriterij varira po iteracijama (slika 4-32). Gledajući promjenu vrijednosti determinante matrice momenta po iteracijama, također se može zaključiti da do odabrane iteracije (modela 6) postoji izraziti prirast, nego nakon odabrane iteracije gdje prirast stagnira i puno je blažeg karaktera. Stoga se generalno može zaključiti da je model 6 optimalni model u fazi poboljšavanja.



Slika 4-31. Promjena vrijednosti G-efikasnosti po iteracijama



Slika 4-32. Promjena vrijednosti D-kriterija po iteracijama

U matricu pretpostavljenog plana pokusa dodavanjem 5 poželjnih eksperimentalnih točaka dobiva se matrica optimalnog plana pokusa koja je sljedećeg oblika:

$$X(\zeta_{opt}) = \begin{bmatrix} & & & & \underline{X(\zeta_p)} & & & & & \\ 1 & 1,68 & 1,68 & 1,68 & 2,82 & 2,83 & 2,83 & 2,83 & 2,83 & 2,83 \\ 1 & -1,68 & 1,68 & 1,68 & 2,82 & 2,83 & 2,83 & -2,83 & 2,83 & -2,83 \\ 1 & 1,20 & 1,68 & -1,68 & 1,44 & 2,83 & 2,83 & 2,02 & -2,83 & -2,02 \\ 1 & -1,68 & 1,68 & -1,68 & 2,82 & 2,83 & 2,83 & -2,83 & -2,83 & 2,83 \\ 1 & 0 & 0,24 & -1,68 & 0 & 0,06 & 2,83 & 0 & -0,40 & 0 \end{bmatrix}. \quad (94)$$

Dodane eksperimentalne točke su smještene u području gdje je poželjnost najveća. Konkretno realne vrijednosti dodanih točaka navedene su u sljedećoj tablici:

**Tablica 4-5.** Dodane eksperimentalne točke nakon procesa poboljšavanja modela, u realnim vrijednostima faktora

<b>Dodana točka</b>	<b>Duljina zareza [mm]</b>	<b>Dubina zareza [mm]</b>	<b>Tlak [bar]</b>
1.	184,09	4,68	12,05
2.	15,91	4,68	12,05
3.	160,00	4,68	1,95
4.	15,91	4,68	1,95
5.	100,00	3,24	1,95

Za potrebe poboljšavanja modela, koji je u pretpostavljenom obliku bio nepotpun, ovo predloženo optimalno rješenje je prihvatljivo sa stajališta utroška značajnog resursa (vremena). Time je moguće poboljšati model smanjivanjem razmjerno velike procijenjene varijance a opet imajući na umu trajanje eksperimentalnih istraživanja i zadane rokove (u ovom primjeru trošak eksperimentiranja istraživaču nije značajan kriterij). Prijedlog poboljšanja modela uporabom ovog algoritma u isto vrijeme povećava kvalitetu procjene promatrane pojave po načelu maksimizacije omjera uloženog i dobivenog.

Budući da je istraživač postavio i proveo točke pokusa koristeći CCD oblik plana pokusa kao pretpostavljeni, nije eksplicitno navedeno ograničenje eksperimentalnog prostora na sferični oblik. Zbog tehnoloških mogućnosti izvedbe samih točaka pokusa, algoritmom su dobivena rješenja u kubičnom prostoru koja su time i korektna. U slučaju tehnoloških zapreka, moguće je i tu činjenicu uključiti u algoritam u vidu ograničenja, no to će biti predmet daljnjeg istraživanja i poboljšavanja same metodologije.

## 5. Zaključak

Postavljeni cilj ovoga istraživanja je razvoj novih modela (postupaka) oblikovanja pokusa, gdje se naglasak stavlja na oblikovanje uporabom više kriterija vezanih za realizaciju pokusa. Proces oblikovanja sadržava i mogućnost prilagodbe u slučaju promjene zahtjeva. Pod modelom podrazumijeva se razvoj metodologije te konkretizacija u vidu razvoja programskog koda. Programski kod je razvijen za potrebe testiranja same metodologije kojega je moguće koristiti i kao samostalan algoritam ili dio većeg programskog paketa.

Ovim radom istražena je mogućnost oblikovanja plana pokusa minimizirajući dostupne resurse (trošak i vrijeme potrebno za eksperimentiranje) uz maksimizaciju kvalitete procjene samih odzivnih vrijednosti, a što do sada nije navedeno u literaturi kao predmet istraživanja. Kroz primjere pokazano je da je moguće oblikovati i pozicionirati eksperimentalne točke plana pokusa u dio eksperimentalnog prostora gdje je utrošak resursa minimalan uz zadržavanje početnih zahtjeva koji moraju biti ispunjeni odabranim modelom pokusa. Algoritam je razvijen u skladu s metodologijom koja se koristi u razvoju algoritama koji rješavaju probleme iz područja statistike i planiranja i analize pokusa.

Skupi pokusi, te pokusi s velikim utroškom vremena, a poglavito u onom varijabilnom dijelu (dijelu vezanom za eksperimentalni prostor) su najpogodniji za aplikaciju algoritma koji u tom slučaju rezultira osjetnim uštedama. Stoga, rezimirajući rezultate evaluacije uporabe metodologije moguće je istaknuti nekoliko izrazito bitnih činjenica. Uporabom metodologije u fazi početnog oblikovanja postignute uštede na direktnim troškovima i utrošku vremena su se kretale u okvirima od 10–20%, što pak nije zanemarivi iznos. Nadalje, u svakom trenutku moguće je odgovoriti i na pitanje koliki je iznos vrijednosti nekih poznatih kriterija optimalnosti upućujući istraživača na eventualne manje nedostatke ili pak određena

---

---

poboljšanja. Korištenjem razvijenog algoritma VAOPP-a u fazi početnog oblikovanja definitivno se izbjegavaju i problemi nedostatka podataka (engl. *missing data*) koji nastaju zbog nemogućnosti izvedbe određenih stanja pokusa, a vezani su za nedostatak resursa. U slučaju poboljšanja modela u vidu preciznosti odzivne funkcije uzeta je poznata činjenica procijenjene varijance modela koja se temelji na rasporedu i broju eksperimentalnih točaka. Kao što je i testirano na primjeru u poglavlju 4.3 potreba povećanja preciznosti modela je nužna u problemima nedostatka podataka, gdje su vrijednosti procijenjene varijance odzivne funkcije vrlo velike. U pokazanom primjeru vidljivo je kako se algoritmom VAOPP-a faze 2 može kvaliteta procjene povećati uz razuman utrošak resursa. Time se efekt gubitka podatka smanjuje te je moguće procjenu odzivnih vrijednosti svesti na prihvatljivu razinu.

Sumirajući rezultate uporabe predložene metodologije i konkretno algoritma VAOPP-a (faze 1 i faze 2), shodno je istaknuti nekoliko glavnih prednosti:

- U fazi početnog oblikovanja, istraživač ima kompletnu sliku, a time i kontrolu nad korištenjem resursa u procesu planiranja, analize i izvedbe pokusa.
- Istraživaču je dana mogućnost promjene odnosa značajnosti kriterija i granice poželjnosti što utječe na vrijednost utrošenih resursa uz eksplicitno prikazane ostale karakteristike modela.
- Direktno iskazivanje svih parametara koje daju uvid u značajke modela za svaki model u iterativnom procesu posebno, te mogućnost odabira modela koji nije predložen kao optimalni.
- Poboljšanje preciznost modela (kvalitete procjene odzivnih vrijednosti) uz kontrolu utroška resursa dodavanjem eksperimentalnih točaka u procesu poboljšavanja modela.

Navedene prednosti pokazuju kako je moguće i na drugačiji način pristupiti procesu planiranja pokusa. Rezultat koji se dobiva provedbom predložene metodologije, tj. model plana pokusa, postaje primjereniji obzirom na utrošak resursa ujedno zadržavajući prihvatljive vrijednosti klasičnih parametara evaluacije kvalitete modela.

Mogući problemi i poteškoće uporabe ove metodologije kroz razvijeni algoritam vezani su za veći broj faktora, a očituju se u samom ograničenju<sup>35</sup> u izvođenju

---

<sup>35</sup> Izuzetno dugo vrijeme izvođenja.

---

programskog koda (veliki broj iteracija u petlji). Jednim dijelom to je posljedica uporabe nedostatne dostupne računalne tehnologije koja se koristila prilikom testiranja, te limitiranosti programskog paketa Matlab 6.5. Problem je moguće riješiti realizacijom algoritma u nekom bazičnom programskom jeziku i korištenjem aktualne računalne tehnologije. Također, rješenje navedenog problema bi utjecalo na povećanu kvalitetu rezultata mogućnošću uporabe detaljnije mreže eksperimentalnog prostora.

Iz opisa istraživanja sadržanog u doktorskom radu te tragom ovog zaključka, znanstveni doprinos je realiziran kroz definiciju novog pristupa oblikovanju planova pokusa te razrađenoj metodologiji koja može biti jedan od mogućih načina realizacije procesa odabira adekvatnog plana pokusa. Konačni rezultat istraživanja bi se mogao sažeti u dvije točke:

- Razrađen novi, poboljšani kriterij optimalnosti.
- Definirana metodologija i algoritam provjeren uz pomoć programskog rješenja na više primjera.

Prijedlog za nastavak istraživanja očituje se u istraživanju pogodnosti uporabe predložene metodologije na pokuse izvan područja metodologije odzivne površine i posebice na specifičnu skupinu pokusa sa smjesama. Postoje indicije da bi u procesu planiranja i poboljšavanja modela pokusa sa smjesama, bilo uputno koristiti ovu metodologiju. Obzirom da su pokusi sa smjesama bazirani na udjelima komponenti, koje mogu imati bitne razlike po pitanju utroška resursa i imati izražene varijacije u samom eksperimentalnom prostoru, primjena ove metodologije mogla bi biti od velike koristi.

---





---

## 6. Literatura

- [1] Montgomery D. C., "Design and Analysis of Experiments", Fifth Edition, John Wiley & Sons, 1997.
  - [2] Coleman D. E., Montgomery D. C., "A systematic approach to planning for a designed industrial experiment", *Technometrics*, Vol. 35, 1-12, 1993.
  - [3] Anderson-Cook, C. M., Borror, C. M., Montgomery, Douglas C., "Response surface design evaluation and comparison", *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, Vol. 39, 629-641, 2009.
  - [4] Myers, Raymond H., Montgomery, Douglas C., "Response Surface Methodology, Process and Product Optimization Using Designed Experiments", John Wiley & Sons, 1995.
  - [5] Fisher, R. A., "Collected Papers of R. A. Fisher", Volume 1, University of Adelaide, 1971-1974.
  - [6] Kiefer J. C., Brown, L. D., Olkin, I., Sacks, J., Wynn, H. P. (editors) "Jack Carl Kiefer, Collected Papers III, Design of Experiments", Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985.
  - [7] Cox, D. R., Reid, N., "The Theory of the Design of Experiments", Chapman&Hall, Washington D.C., 2000.
  - [8] Elfving, G., "Optimum allocation in linear regression theory", *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 23, 252-262, IMS Beachwood USA, 1952.
  - [9] Wald, A., "On the efficient design of statistical investigations", *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 14, 134-140, 1943.
  - [10] Welch, W. J., "Branch-and-Bound Search for Experimental Designs Based on D-optimality and Other Criteria", *Technometrics*, Vol. 24, No. 1, 1982.
  - [11] Giovannitti-Jensen, A., Myers, R. H., "Graphical Assessment of the Prediction Capability of Response Surface Designs", *Technometrics*, Vol. 31, 159-171, 1989.
  - [12] Khuri, I. A., "Discussion of Response surface design evaluation and comparison by Anderson-Cook, C. M., Borror, C. M., Montgomery, C. D.", *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 139, 647-649, 2009.
  - [13] Zahran, A., Anderson-Cook, C. M., Myers, R. H., "Fraction of Design Space to Assess Prediction Capability of Response Surface Designs", *Journal of Quality Technology*, Vol. 35, No. 4, 377-386, 2003.
-

- 
- [14] Khuri, A. I., "Quantile dispersion graphs for analysis of variance estimates of variance components", *Journal of Applied Statistics*, Vol. 24, 711-722, 1997.
- [15] Khuri, A. I., Lee, J., "A Graphical approach for evaluating and comparing designs for nonlinear models", *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 27, 433-443, 1998.
- [16] Sasha, S., Khuri, A. I., "Comparison of Designs for Response Surface Models with Random Block Effects" *Journal of Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 6, No. 3, 219-234, 2009.
- [17] Programski paket, Design Expert 7, Stat Ease, 2005, Minneapolis, 55413-9827, SAD, serijski broj licence 0010-9803
- [18] Anderson, M. J., Withcomb, P.J., "RSM Simplified: Optimizing processes using methods for design of experiments", Productivity Press, New York, SAD, 2005.
- [19] Snyman, J. A., "Practical Mathematical Optimization: An introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient Based Algorithms", Springer Science-Business Media, 2005.
- [20] Hinkelmann, K., Kempthorne, O., "Design and Analysis of Experiments", Vol. 1, Second Edition, Wiley&Sons, New Jersey, 2008.
- [21] Box, G. E. P., Wilson, K. B., "On the Experimental Attainment of Optimum Conditions", *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 13, 1-45, 1951.
- [22] Steel, R. G. D., Torrie, J. H., "Principles and procedures of statistics", McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
- [23] Jiménez-Contreras, E., Torres-Salinas, D., Bailón Moreno, R., Ruiz, Baños R., Delgado López-Cózar, E., "Response Surface Methodology and its application in evaluating scientific activity", *Scientometrics*, Vol. 79, No. 1, 201-218, 2009.
- [24] Box, G. E. P., Draper, N. R., "Empirical Model Building and Response Surfaces", John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [25] Kiefer, J., Wolfowitz, J., "Optimal design in regression problems", *Annual of Mathematical Statistics*, Vol. 30, 271-294, 1959.
- [26] Kiefer, J., "Optimum Experimental Designs", *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 21, 272-304, 1959.
- [27] Welch, J., "Computer-Aided Design of Experiments for Response Estimation", *Technometrics*, Vol. 26, No. 3, 217-224.
- [28] St. John, R. C., Draper, N. R., "D-optimality for Regression Designs: A review", *Technometrics*, Vol. 17, 15-23.
- [29] Pukelsheim, F., "Optimum Design of Experiments", Chapman&Hall, New York, 1995.
- [30] Nalimov, V. V., Golikova, T. I., Mikeshina, N. G., "On Practical Use of the Concept of D-optimality", *Technometrics*, Vol. 12, 799-812
-

- [31] Akhtar, M., "Response surface Designs Robust to Missing Observations", doktorski rad, Southampton University, UK, 1985.
  - [32] Draper, N. R., "Centre points in second-order response surface designs", *Technometrics*, Vol. 30, 105-111, 1982.
  - [33] Lucas, J. M., "Design Efficiencies for Varying Numbers of Centre Points", *Biometrika*, Vol. 64, 145-147, 1977.
  - [34] Snee, R. D., "Computer-Aided Design of Experiments: Some Practical Experiences", *Journal of Quality Technology*, Vol. 17, 222-236, 1985.
  - [35] Goel, T., Haftka, R. T., Shyy, W., Watson, L. T., "Pitfalls of Using Single Criterion for Selecting Experimental Designs", *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, Vol. 75, 127-155, 2008.
  - [36] Myers, R. H., Vining, G., Giovannitti-Jensen, A., Myers, S. L., "Variance Dispersion Properties of Second-Order Response Surface Designs", *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, 1-11, 1992.
  - [37] Akram, M., "Central composite designs robust to three missing observations", doktorski rad, The Islamia University Bahawalpur, Pakistan, 2002.
  - [38] Montgomery, D. C., "Solutions from Design and Analysis of Experiments", Appendix, Wiley, New York, 2004.
  - [39] Tonković, Z., "Procjena preostalog vremena uporabe oštećenih polietilenskih plinovodnih cijevi", doktorski rad, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, 2008.
  - [40] Cajner, H., Šakić, N., Tonković, Z., "The significance of data transformation in analysis of experiments", članak znanstveni, Proceedings of 12<sup>th</sup> International Scientific Conference on Production Engineering CIM 2009., Biograd, 2009.
-



## 7. Prilog

### 7.1 MATLAB programski kod algoritma VAOPP-a faza 1 za problem s 2 faktora

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROGRAMSKI KOD ALGORITMA ZA VAOPP-a ZA FAZU POČETNOG OBLIKOVANJA %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

Smanjenje_volumena=0;

%-----
% Učitavanje matrice dizajna D pokusa i vrijednosti troska, vremenskog utroška iz baze (*.txt)
%-----

D=load('MATRICA_OBLIKA.txt');
Ydata=(load('PODACI_O_TROSKU.txt'))';
Y_vrijeme_data=(load('PODACI_O_UTROSKU_VREMENA.txt'))';

disp('Matrica X plana pokusa')

%formiranje X matrice

X=zeros(length(D(:,1)),6);
for cnt_i=1:length(D(:,1))
    X(cnt_i,:)=1, D(cnt_i,1), D(cnt_i,2), (D(cnt_i,1)^2), (D(cnt_i,2)^2) , (D(cnt_i,1)) *(D(cnt_i,2));
end

%korak
br_koraka=32; %Unos preciznosti izračuna
step=1.414*2/br_koraka;

%definicija domene stanja pokusa x1 i x2
i = [-1.414:step:1.414];
j = [-1.414:step:1.414];

sigma=1;

%
% Izračun funkcija (matrice) troska na temelju ulaznih podataka o trosku po pojedinom stanju pokusa
%
% Formiranje Xdata parova tocaka za LSQcurve
Xdata=[X(:,2) X(:,3)]';
disp('Matrica troska')
[Xdata;Ydata]

%Ukupno trosak
Konstantni_trosak=input('konstantni trosak =');
suma_troskova=sum(Ydata)+Konstantni_trosak;

% Standardiziranje na podrucje 0..1
% Ydata=(Y_data)/(max(Y_data))

%Početna vrijednost vektora koeficijenata
x0 = zeros(1,6);

%Definiranje regresijske funkcije
response = inline('x(1)+x(2).*xdata(1,:) + x(3).*xdata(1,:).^2 + x(4).*xdata(1,:).*xdata(2,:) + x(5).*xdata(2,:)+x(6).*xdata(2,:).^2','x','xdata');

%Optimiranje parametara funkcije regresije
[x, resnorm, residuals] = lsqcurvefit(response,x0, Xdata, Ydata);

disp('koeficijenti funkcije:')
disp(x)

%Crtnje normplot-a
figure(1), subplot(122), normplot(residuals)

%Graf funkcije

```

```

[x_i,y_i] = meshgrid(-1.414:step:1.414);
Ftrosak =x(1)+x(2).*x_i + x(3).*x_i.^2 + x(4).*x_i.*y_i + x(5).*y_i+x(6).*y_i.^2;

% standardiziranje na podrucje 0 - 1 RELATIVNI TROSAK (F_trosak)
F_trosak=(Ftrosak)./(max(max(Ftrosak)));
figure(1), subplot(121)
title('Relativni trosak');
surf(x_i,y_i,F_trosak),xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('F_trosak');
hold on
plot3(Xdata(1,:),Xdata(2,:),Ydata, 'o');
raspon_z_osi=1.2*max(max(F_trosak));
AXIS([-2 2 -2 2 0 raspon_z_osi 0 raspon_z_osi]);

%Konturni dijagram
figure(2), contour(x_i,y_i,F_trosak), hold on, grid on
title('Konturni dijagram relativnog troska');

%Trošak preliminarnog modela
Trosak(1,1)=sum((Ydata)+(residuals))+Konstantni_trosak;

%Originalne tocke
figure(2), plot3(Xdata(1,:),Xdata(2,:),Ydata, 'o')

```

---

```

% Izračun funkcije (matrice) vremenskog trajanja eksperimenta na temelju ulaznih podataka o ukupnom trajanju
eksperimentiranja za pojedino stanje pokusa
%
% Formiranje Xdata parova tocaka za LSQcurve
Xdata=[X(:,2) X(:,3)'];

disp('Matrica vremenskog trajanja')
[Xdata;Y_vrijeme_data]

%Ukupno vrijeme
Konstantna_vremenska_komponenta=input('Konstantna vremenska komponenta =');
suma_utroska_vremena=sum(Y_vrijeme_data)+Konstantna_vremenska_komponenta;

%Početna vrijednost vektora koeficijenata
x0 = zeros(1,6);

%Definiranje regresijske funkcije
response = inline('x(1)+x(2).*xdata(1,:) + x(3).*xdata(1,:).^2 + x(4).*xdata(1,:).*xdata(2,:) +
x(5).*xdata(2,:)+x(6).*xdata(2,:).^2','x','xdata');

%Optimiranje parametara funkcije regresije
[x, resnorm, residuals] = lsqcurvefit(response,x0, Xdata, Y_vrijeme_data);

disp('Koeficijenti funkcije utroska vremena:');
disp(x)

%Crtnje 'normal probability plot'-a
figure(1), subplot(122), normplot(residuals)

%Graf funkcije
[x_i,y_i] = meshgrid(-1.414:step:1.414);
Fvrijeme =x(1)+x(2).*x_i + x(3).*x_i.^2 + x(4).*x_i.*y_i + x(5).*y_i+x(6).*y_i.^2;

% standardiziranje na podrucje 0 - 1 RELATIVNI VREMENSKI UTROŠAK
F_vrijeme=(Fvrijeme)./(max(max(Fvrijeme)));
figure(1), subplot(121)
title('Relativni vremenski utrosak');
surf(x_i,y_i,F_vrijeme),xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('F_vrijeme');
hold on
raspon_z_osi=1.2*max(max(F_vrijeme));
AXIS([-2 2 -2 2 0 raspon_z_osi 0 raspon_z_osi]);

%Konturni dijagram
figure(2), contour(x_i,y_i,F_vrijeme), hold on, grid on
title('Konturni dijagram relativnog vremenskog utroska');
%Utrosak vremena preliminarnog modela
Utrosak_vremena(1,1)=sum(Y_vrijeme_data+residuals)+Konstantna_vremenska_komponenta;

%Originalne točke
figure(2), plot3(Xdata(1,:),Xdata(2,:),Y_vrijeme_data, 'o')

```

---

```

%
%-----
%Izračun funkcije poželjnosti (faza početnog oblikovanja)
%-----

F_pozelj=zeros(length(i),length(j));

%Unos težinskih faktora za svaki kriterij
k_trosak=input('Težinski faktor kriterija "trosak" =');
k_vrijeme=input('Težinski faktor kriterija "vrijeme" =');

%Računanje funkcije poželjnosti
F_pozelj=(k_trosak*(1-F_trosak)+k_vrijeme*(1-F_vrijeme))/(max(max(k_trosak*(1-F_trosak)+k_vrijeme*(1-
F_vrijeme))); % (1-F_trosak) i (1-F_vrijeme)- oblik koji iskazuje najmanji Trošak i utrosak vremena

%Crtnje funkcije poželjnosti
figure(31)
surf(x_i,y_i,F_trosak),xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('F_trosak')
title('Funkcija troska')
figure(33)
surf(x_i,y_i,F_vrijeme),xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('F_vrijeme')
title('Funkcija utroska vremena')
figure(32)
surf(x_i,y_i,F_pozelj),xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('F_pozelj')

```

```

title('Funkcija poželjnosti')

%
%-----
% MODEL ZA 2FAKTORA (POČETNO OBLIKOVANJE)
%-----
%Točka 'maksimalne poželjnosti' za
F_pozelj_tmp=F_pozelj;
for cnt_max=1:br_koraka^2
    if max(max(F_pozelj_tmp))>=0.6 %Granična vrijednost poželjnosti
        [i_max(cnt_max),j_max(cnt_max)]=find(F_pozelj_tmp==max(max(F_pozelj_tmp)));
        t_i_max(cnt_max)=i(1,1)+(i_max(cnt_max)-1)*step;
        t_j_max(cnt_max)=j(1,1)+(j_max(cnt_max)-1)*step;
        F_pozelj_tmp(i_max(cnt_max),j_max(cnt_max))=0;
    else end
end
figure(41)
plot(t_i_max,t_j_max,'o');
AXIS([-1.5 1.5 -1.5 1.5]);
title('Podrucje maksimalne pozeljnosti');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%% CCF oblik plana pokusa %%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Početna matrica pokusa (X poc)
%Postavljanje centralne točke
i_centar=floor(mean(i_max));
j_centar=floor(mean(j_max));
t_i_poc(1)=i(1,1)+(i_centar-1)*step;
t_j_poc(1)=j(1,1)+(j_centar-1)*step;

%-----

%D kriterij preliminarnog modela
br_tocaka=length(X(:,1));
M(1,1)=det(X'*X)/(br_tocaka^6);

%G kriterij preliminarnog modela
I= inv(X'*X);
suma_v_point=zeros(1,length(X(:,1)));% inicijalizacija
br_tocaka=length(X(:,1));% broj točaka pokusa = broj redaka matrice X
for cnt0=1:br_tocaka
    v_point(1,cnt0)=X(cnt0,:)*I*(X(cnt0,:))'; % procijenjena varijanca u točkama
    pokusa (Leverage)
end
suma_v_point=sum(v_point(1,:));
p=suma_v_point/br_tocaka; % prosječna v(x) uzevši točke pokusa
Geff(1,1)=p/(max(v_point));

%Ortogonalnost preliminarnog modela
ORT(1,1)=sum(X(:,2).*X(:,3));

%Funkcija v(x) procijenjene varijance preliminarnog modela
v_X= zeros(length(i), length(j));
for cnt1=1:length(i)
    for cnt2=1:length(j)
        v_X(cnt1,cnt2)= sigma*[1 i(1,cnt1) j(1, cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1,
cnt2)*j(1, cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))] * I * [1 i(1,cnt1) j(1, cnt2)
(i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1, cnt2)*j(1, cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))]' ;
    end
end

Q(1,1)=mean(mean(v_X));

%Integral funkcije v(x) preliminarnog modela
integral_v(1,1)=sum(sum(v_X));

%-----

%Pronalaženje optimalnog modela plana pokusa - algoritmom promjena
t_i(1)=t_i_poc(1);
t_j(1)=t_j_poc(1);
Pokus_CCF(1,1)=[X];
%utvrđivanje minimalne udaljenosti centra od granice pokusa
i_donja_granica=1;
min_udaljenost=min((max(i_max)-i_centar), (max(j_max)-j_centar), (i_centar-
min(i_max), (j_centar-min(j_max)))));

for cnt_X=1:(min_udaljenost)

    %Postavljanje točaka na vrhovima pokusa
    i_vrh1=i_centar+cnt_X;
    j_vrh1=j_centar+cnt_X;
    t_i(2)=i(1,1)+(i_vrh1-1)*step;
    t_j(2)=j(1,1)+(j_vrh1-1)*step;
    i_vrh2=i_centar-cnt_X;
    j_vrh2=j_centar-cnt_X;
    t_i(3)=i(1,1)+(i_vrh2-1)*step;
    t_j(3)=j(1,1)+(j_vrh2-1)*step;
    i_vrh3=i_centar+cnt_X;
    j_vrh3=j_centar-cnt_X;
    t_i(4)=i(1,1)+(i_vrh3-1)*step;
    t_j(4)=j(1,1)+(j_vrh3-1)*step;
    i_vrh4=i_centar-cnt_X;
    j_vrh4=j_centar+cnt_X;
    t_i(5)=i(1,1)+(i_vrh4-1)*step;
    t_j(5)=j(1,1)+(j_vrh4-1)*step;

```

```

%postavljanje aksijalnih točaka
i_axial1=i_centar+cnt_X;
j_axial1=j_centar;
t_i(6)=i(1,1)+(i_axial1-1)*step;
t_j(6)=j(1,1)+(j_axial1-1)*step;
i_axial2=i_centar-cnt_X;
j_axial2=j_centar;
t_i(7)=i(1,1)+(i_axial2-1)*step;
t_j(7)=j(1,1)+(j_axial2-1)*step;
i_axial3=i_centar;
j_axial3=j_centar+cnt_X;
t_i(8)=i(1,1)+(i_axial3-1)*step;
t_j(8)=j(1,1)+(j_axial3-1)*step;
i_axial4=i_centar;
j_axial4=j_centar-cnt_X;
t_i(9)=i(1,1)+(i_axial4-1)*step;
t_j(9)=j(1,1)+(j_axial4-1)*step;
%barem dva ponavljanja točaka u centru
t_i(10)=t_i_poc(1);
t_i(11)=t_i_poc(1);
t_j(10)=t_j_poc(1);
t_j(11)=t_j_poc(1);

%formiranje matrice X_gen
for cnt_gen=1:length(t_i)
    X_gen(cnt_gen,:)=1      t_i(cnt_gen)      t_j(cnt_gen)
    t_i(cnt_gen)^2 t_j(cnt_gen)^2 t_i(cnt_gen)*t_j(cnt_gen)];
end

%IZRACUN KRITERIJA-----

%troškovi aktualnog modela

Suma_troskova_stanja=3*Ftrosak(i_centar,j_centar)+Ftrosak(i_vrh1,j_vrh1)+Ftrosak(i_vrh2,j_vrh2)+Ftrosak(i_vrh3,j_vrh3)
+Ftrosak(i_vrh4,j_vrh4)+Ftrosak(i_axial1,j_axial1)+Ftrosak(i_axial2,j_axial2)+Ftrosak(i_axial3,j_axial3)+Ftrosak(i_axial4,j_axial4);
Trosak(1,1+cnt_X)=Konstantni_trosak+Suma_troskova_stanja;

%utrošak vremena aktualnog modela
Suma_vremena_stanja=3*Fvrijeme(i_centar,j_centar)+Fvrijeme(i_vrh1,j_vrh1)+Fvrijeme(i_vrh2,j_vrh2)+Fvrijeme(i_vrh3,j_vrh3)
+Fvrijeme(i_vrh4,j_vrh4)+Fvrijeme(i_axial1,j_axial1)+Fvrijeme(i_axial2,j_axial2)+Fvrijeme(i_axial3,j_axial3)+Fvrijeme(i_axial4,j_axial4);
Utrosak_vremena(1,1+cnt_X)=Konstantna_vremenska_komponenta+Suma_vremena_stanja;

%D kriterij
br_tocaka=length(X_gen(:,1));
M(1,1+cnt_X)=det(X_gen'*X_gen)/(br_tocaka^6);

%G kriterij aktualnog modela
I_gen=inv(X_gen'*X_gen);
v_point=0; % inicijalizacija
br_tocaka=length(X_gen(:,1)); % broj točaka pokusa=broj redaka matrice X
for cnt0=1:br_tocaka
    v_point(1,cnt0)=X_gen(cnt0,:)*I_gen*(X_gen(cnt0,:))';%
    procijenjena varijanca u točkama pokusa (Leverage)
end
suma_v_point=sum(v_point(1,:));
p=suma_v_point/br_tocaka; % prosječna v(x) uzevši u obzir točke
pokusa
Geff(1,1+cnt_X)=p/(max(v_point));

%Ortogonalnost aktualnog modela
ORT(1,1+cnt_X)=sum(X_gen(:,2).*X_gen(:,3));

%Q-kriterij ('Average prediciton variance') aktualnog modela
v_gen= zeros(length(i), length(j));
I_gen=inv(X_gen'*X_gen);
for cnt3=1:length(i)
    for cnt4=1:length(j)
        v_gen(cnt3,cnt4)= sigma*[1 i(1,cnt3) j(1, cnt4)
        (i(1,cnt3)*i(1,cnt3) (j(1, cnt4)*j(1, cnt4)
        (i(1,cnt3)*j(1, cnt4))]*I_gen*[1 i(1,cnt3) j(1, cnt4)
        (i(1,cnt3)*i(1,cnt3) (j(1, cnt4)*j(1, cnt4)
        (i(1,cnt3)*j(1, cnt4)))]';
    end
end
Q(1,cnt_X+1)=mean(mean(v_gen));

%Integral funkcije v(x) aktualnog modela
integral_v(1,cnt_X+1)=sum(sum(v_gen));

%Polje Matrica pokusa
Pokus_CCP(1,1+cnt_X)=[X_gen];

end

#####
##### CCD oblik plana pokusa #####
#####

%Početna matrica pokusa (X_poc)
%Postavljanje centralne točke
i_centar=floor(mean(i_max));
j_centar=floor(mean(j_max));
t_i_poc(1)=i(1,1)+(i_centar-1)*step;
t_j_poc(1)=j(1,1)+(j_centar-1)*step;

%-----

```



```

Utrosak_vremena_CCD(1,1)= Utrosak_vremena(1,1);
Trosak_CCD(1,1)=Trosak(1,1);

%D kriterij preliminarnog modela
br_tocaka=length(X(:,1));
M_CCD(1,1)=det(X'*X)/(br_tocaka^6);

%G kriterij preliminarnog modela
I= inv(X'*X);
suma_v_point=zeros(1,length(X(:,1))); % inicijalizacija
br_tocaka=length(X(:,1)); % broj točaka pokusa = broj redaka matrice X
for cnt0=1:br_tocaka
    v_point(1,cnt0)=X(cnt0,:)*I*(X(cnt0,:))'; % procijenjena varijanca u
    točkama pokusa (Leverage)
end
suma_v_point=sum(v_point(1,:));
p=suma_v_point/br_tocaka; % prosječna vrijednost v(x) uzevši u obzir
točke pokusa
Geff_CCD(1,1)=p/(max(v_point));

%Ortogonalnost preliminarnog modela
ORT_CCD(1,1)=sum(X(:,2).*X(:,3));

%Funkcija v(x) procijenjene varijance preliminarnog modela
v_X= zeros(length(i), length(j));
for cnt1=1:length(i)
    for cnt2=1:length(j)
        v_X(cnt1,cnt2)= sigma*[1 i(1,cnt1) j(1, cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1))
        (j(1, cnt2)*j(1, cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))] * I * [1 i(1,cnt1) j(1, cnt2)
        (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1, cnt2)*j(1, cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))]';
    end
end
Q_CCD(1,1)=mean(mean(v_X));

%Integral funkcije v(x) preliminarnog modela
integral_v_CCD(1,1)=sum(sum(v_X));

%-----
%Pronalaženje optimalnog modela plana pokusa - algoritmom promjena
t_i(1)=t_i_poc(1);
t_j(1)=t_j_poc(1);
Pokus_CCD(1,1)=[X];
%utvrđivanje minimalne udaljenosti centra od granice pokusa
i_donja_granica=1;
min_udaljenost=min([(max(i_max)-i_centar), (max(j_max)-j_centar), (i_centar-
min(i_max)), (j_centar-min(j_max))]);
parametar_a=1 ;
for cnt_X_CCD=1:(min_udaljenost/(sqrt(2))+1)

    %Postavljanje točaka na vrhovima pokusa
    i_vrh1=i_centar+cnt_X_CCD;
    j_vrh1=j_centar+cnt_X_CCD;
    t_i(2)=i(1,1)+(i_vrh1-1)*step;
    t_j(2)=j(1,1)+(j_vrh1-1)*step;
    i_vrh2=i_centar-cnt_X_CCD;
    j_vrh2=j_centar-cnt_X_CCD;
    t_i(3)=i(1,1)+(i_vrh2-1)*step;
    t_j(3)=j(1,1)+(j_vrh2-1)*step;
    i_vrh3=i_centar+cnt_X_CCD;
    j_vrh3=j_centar-cnt_X_CCD;
    t_i(4)=i(1,1)+(i_vrh3-1)*step;
    t_j(4)=j(1,1)+(j_vrh3-1)*step;
    i_vrh4=i_centar-cnt_X_CCD;
    j_vrh4=j_centar+cnt_X_CCD;
    t_i(5)=i(1,1)+(i_vrh4-1)*step;
    t_j(5)=j(1,1)+(j_vrh4-1)*step;

    %postavljanje aksijalnih točaka
    i_axial1=i_centar+floor(sqrt((i_vrh1-i_centar)^2+(j_vrh1-
j_centar)^2));
    j_axial1=j_centar;
    t_i(6)=i(1,1)+(i_axial1-1)*step;
    t_j(6)=j(1,1)+(j_axial1-1)*step;

    i_axial2=i_centar-floor(sqrt((i_vrh1-i_centar)^2+(j_vrh1-
j_centar)^2));
    j_axial2=j_centar;
    t_i(7)=i(1,1)+(i_axial2-1)*step;
    t_j(7)=j(1,1)+(j_axial2-1)*step;
    i_axial3=i_centar;
    j_axial3=j_centar+floor(sqrt((i_vrh1-
i_centar)^2+(j_vrh1-j_centar)^2));
    t_i(8)=i(1,1)+(i_axial3-1)*step;
    t_j(8)=j(1,1)+(j_axial3-1)*step;
    i_axial4=i_centar;
    j_axial4=j_centar-floor(sqrt((i_vrh1-
i_centar)^2+(j_vrh1-j_centar)^2));
    t_i(9)=i(1,1)+(i_axial4-1)*step;
    t_j(9)=j(1,1)+(j_axial4-1)*step;
    %barem dva ponavljanja točaka u centru
    t_i(10)=t_i_poc(1);
    t_i(11)=t_i_poc(1);
    t_j(10)=t_j_poc(1);
    t_j(11)=t_j_poc(1);

    %formiranje matrice X_gen
    for cnt_gen=1:length(t_i)
        X_gen(cnt_gen,:)= [1 t_i(cnt_gen) t_j(cnt_gen) t_i(cnt_gen)^2

```

```

t_j(cnt_gen)^2 t_i(cnt_gen)*t_j(cnt_gen));
end

%IZRACUN KRITERIJA-----
%troškovi aktualnog modela

Suma_troskova_stanja=3*Ftrosak(i_centar,j_centar)+Ftrosak(i_vrh1,j_vrh1)+F
trosak(i_vrh2,j_vrh2)+Ftrosak(i_vrh3,j_vrh3)+Ftrosak(i_vrh4,j_vrh4)+Ftro
saka(i_axial1,j_axial1)+Ftrosak(i_axial2,j_axial2)+Ftrosak(i_axial3,j_axial3)
+Ftrosak(i_axial4,j_axial4);
Trosak_CCD(1,1+cnt_X_CCD)=Konstantni_trosak+Suma_troskova_stanja;

%utrošak vremena aktualnog modela

Suma_vremena_stanja=3*Fvrijeme(i_centar,j_centar)+Fvrijeme(i_vrh1,j_vrh1)+
Fvrijeme(i_vrh2,j_vrh2)+Fvrijeme(i_vrh3,j_vrh3)+Fvrijeme(i_vrh4,j_vrh4)+Fv
rijeme(i_axial1,j_axial1)+Fvrijeme(i_axial2,j_axial2)+Fvrijeme(i_axial3,j_
axial3)+Fvrijeme(i_axial4,j_axial4);

Utrosak_vremena_CCD(1,1+cnt_X_CCD)=Konstantna_vremenska_komponenta+Suma_vr
emena_stanja;

%D kriterij
br_tocaka=length(X_gen(:,1));
M_CCD(1,1+cnt_X_CCD)=det(X_gen'*X_gen)/(br_tocaka^6);

%G kriterij aktualnog modela
I_gen=inv(X_gen'*X_gen);
v_point=0; %inicijalizacija
br_tocaka=length(X_gen(:,1)); % broj točaka pokusa=broj
redaka matrice X
for cnt0=1:br_tocaka
v_point(1,cnt0)=X_gen(cnt0,:)*I_gen*(X_gen(cnt0,:))'; %
procijenjena varijanca u točkama pokusa (Leverage)
end
suma_v_point=sum(v_point(1,:));
p=suma_v_point/br_tocaka; % prosječna vrijednost v(x)
uzevsi u obzir točke pokusa
Geff_CCD(1,1+cnt_X_CCD)=p/(max(v_point));

%Ortogonalnost aktualnog modela

ORT_CCD(1,1+cnt_X_CCD)=sum(X_gen(:,2).*X_gen(:,3));

%Q-kriterij ('Average prediciton variance') aktualnog modela
v_gen= zeros(length(i), length(j));
I_gen=inv(X_gen'*X_gen);
for cnt3=1:length(i)
for cnt4=1:length(j)
v_gen(cnt3,cnt4)= sigma*[1 i(1,cnt3) j(1, cnt4)
(i(1,cnt3)*i(1,cnt3)) j(1, cnt4)*j(1, cnt4)]
(i(1,cnt3)*j(1, cnt4))] *I_gen*[1 i(1,cnt3) j(1, cnt4)
(i(1,cnt3)*i(1,cnt3)) j(1, cnt4)*j(1, cnt4)]';
end
end
Q_CCD(1,cnt_X_CCD+1)=mean(mean(v_gen));

%Integral funkcije v(x) aktualnog modela
integral_v_CCD(1,cnt_X_CCD+1)=sum(sum(v_gen));

%Polje Matrica pokusa
Pokus_CCD(1,1+cnt_X_CCD)=[X_gen];
end

#####
#####REZULTATI#####
#####

% prikaz ukupnog troska i utroska vremena 'Pokus_CCF'
figure(51)
plot(1:cnt_X+1,Trosak);
title('Trosak eksperimenta');
ylabel('Trosak');
xlabel('Redni broj modela u algoritmu');
hold on
plot(1:cnt_X_CCD+1,Trosak_CCD,'r');

figure(52)
plot(1:cnt_X+1,Utrosak_vremena);
title('Utrosak vremena');
ylabel('Utroseno vrijeme');
xlabel('Redni broj modela u algoritmu');
hold on
plot(1:cnt_X_CCD+1,Utrosak_vremena_CCD,'r')

% prikaz poznatih kriterija optimalnosti 'Pokus_CCF'
figure(61)
plot(1:cnt_X+1,M);
title('D kriterij');
ylabel('Det(X*X)');
xlabel('Redni broj modela u algoritmu');
hold on
plot(1:cnt_X_CCD+1,M_CCD,'r');

figure(62)
plot(1:cnt_X+1,integral_v)
title('Ukupna sirina intervala');
xlabel('Redni broj modela u algoritmu');
hold on
plot(1:cnt_X_CCD+1,integral_v_CCD,'r')

```

```

figure (63)
plot(1:cnt_X+1,Geff);
title('G kriterij');
ylabel('Geff');
xlabel('Redni broj modela u algoritmu');
hold on
plot(1:cnt_X_CCD+1,Geff_CCD,'r');

figure (64)
plot(1:cnt_X+1,ORT);
title('Ortogonalnost');
ylabel('Suma umnozaka tocaka');
xlabel('Redni broj modela u algoritmu');
hold on
plot(1:cnt_X_CCD+1,ORT_CCD,'r');

figure (65)
plot(1:cnt_X+1,Q);
title('Q-kriterij');
xlabel('Redni broj modela u algoritmu');
hold on
plot(1:cnt_X_CCD+1,Q_CCD,'r');

%Funkcija v(x) procijenjene varijance modela iz polja 'Pokus_CCF'
figure(221)

br_iteracije=length(Pokus_CCF);
v_opt_CCF= zeros(length(i), length(j));
X_opt_CCF=Pokus_CCF(1,br_iteracije);
I_opt_CCF=inv(X_opt_CCF'*X_opt_CCF);
for cnt1=1:length(i)
    for cnt2=1:length(j)
        v_opt_CCF(cnt1,cnt2)= sigma*[1 i(1,cnt1) j(1, cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1, cnt2)*j(1,
            cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))] * I_opt_CCF * [1 i(1,cnt1) j(1, cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1, cnt2)*j(1,
            cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))];
    end
end
surf(i,j,v_opt_CCF);
title('Funkcija procijenjene varijance modela');

%Funkcija v(x) procijenjene varijance modela iz polja 'Pokus_CCD'
figure(222)

br_iteracije=length(Pokus_CCD);
v_opt_CCD= zeros(length(i), length(j));
X_opt_CCD=Pokus_CCD(1,br_iteracije);
I_opt_CCD=inv(X_opt_CCD'*X_opt_CCD);
for cnt1=1:length(i)
    for cnt2=1:length(j)
        v_opt_CCD(cnt1,cnt2)= sigma*[1 i(1,cnt1) j(1, cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1,
            cnt2)*j(1, cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))] * I_opt_CCD * [1 i(1,cnt1) j(1, cnt2)
            (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1, cnt2)*j(1, cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))];
    end
end
surf(i,j,v_opt_CCD);
title('Funkcija procijenjene varijance modela');

%Funkcija v(x) procijenjene varijance pretpostavljenog modela
figure(223)

surf(i,j,v_X)

% GRAFIČKI PRIKAZI %
figure (225);
br_iteracije=length(Pokus_CCF);
plot(Pokus_CCF(1,br_iteracije):(,2),Pokus_CCF(1,br_iteracije):(,3),'d');
AXIS([-1.5 1.5 -1.5 1.5]);
hold on
br_iteracije=length(Pokus_CCD);
plot(Pokus_CCD(1,br_iteracije):(,2),Pokus_CCD(1,br_iteracije):(,3),'ro');
AXIS([-1.5 1.5 -1.5 1.5]);
hold on
br_iteracije=1;
plot(Pokus_CCD(1,br_iteracije):(,2),Pokus_CCD(1,br_iteracije):(,3),'g');
AXIS([-1.5 1.5 -1.5 1.5]);

*****
% KRAJ %
*****

```

## 7.2 MATLAB programski kod algoritma VAOPP-a faza 2 za problem s 2 faktora

```

*****
% Dodavanje točaka po principu minimizacije troska i utroska vremena ujedno
% maksimalno korigirajući (poboljšavajući) interval povjerenja arit.
% sredine modela
*****
clear all

```

```

Smanjenje_volumena=0;

%-----
% Ucitavanje matrice dizajna D pokusa i vrijednosti troska, vremenskog utroska iz baze (*.txt)
%-----

D=load('MATRICA_OBLIKA.txt');
Ydata=(load('PODACI_O_TROSKU.txt'))';
Y_vrijeme_data=(load('PODACI_O_UTROSKU_VREMENA.txt'))';

disp('Matrica X plana pokusa')

%formiranje X matrice

X=zeros(length(D(:,1)),6);
for cnt_i=1:length(D(:,1))
    X(cnt_i,:)=1, D(cnt_i,1), D(cnt_i,2), (D(cnt_i,1)^2), (D(cnt_i,2)^2), (D(cnt_i,1) * D(cnt_i,2));
end

%korak
br_koraka=32; %Unos preciznosti izracuna
step=1.414*2/br_koraka;

%definicija domene stanja pokusa x1 i x2
i = [-1.414:step:1.414];
j = [-1.414:step:1.414];

sigma=1;
%
% Izracun funkcija (matrice) troska na temelju ulaznih podataka o trosku po pojedinom stanju pokusa
%

% Formiranje Xdata parova tocaka za LSQcurve
Xdata=[X(:,2) X(:,3)'];

disp('Matrica troska')
[Xdata;Ydata]

%Ukupno trosak
Konstantni_trosak=input('konstantni trosak =');
suma_troskova=sum(Ydata)+Konstantni_trosak;

% Standardiziranje na podrucje 0..1
% Ydata=(Y_data)/(max(Y_data))

%Pocetna vrijednost vektora koeficijenata
x0 = zeros(1,6);

%Definiranje regresijske funkcije
response = inline('x(1)+x(2).*xdata(1,:) + x(3).*xdata(1,).^2 + x(4).*xdata(1,).*xdata(2,:) +
x(5).*xdata(2,)+x(6).*xdata(2,).^2','x','xdata');

%Optimiranje parametara funkcije regresije
[x, resnorm, residuals] = lsqcurvefit(response,x0, Xdata, Ydata);
disp('koeficijenti funkcije:')
disp(x)

%Crtnje normplot-a
figure(1), subplot(122), normplot(residuals)

%Graf funkcije
[x_i,y_i] = meshgrid(-1.414:step:1.414);
Ftrosak =x(1)+x(2).*x_i + x(3).*x_i.^2 + x(4).*x_i.*y_i + x(5).*y_i+x(6).*y_i.^2;

% standardiziranje na podrucje 0 - 1 RELATIVNI TROSAK (F_trosak)
F_trosak=(Ftrosak)./(max(max(Ftrosak)));
figure(1), subplot(121)
title('Relativni trosak');
surf(x_i,y_i,F_trosak),xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('F_trosak');
hold on
plot3(Xdata(1,:),Xdata(2,:),Ydata, 'o');
raspon_z_osi=1.2*max(max(F_trosak));
AXIS([-2 2 -2 2 0 raspon_z_osi 0 raspon_z_osi]);

%Konturni dijagram
figure(2), contour(x_i,y_i,F_trosak), hold on, grid on
title('Konturni dijagram relativnog troska');

%Trosak preliminarnog modela
Prirast_troskova(1,1)=sum((Ydata)+(residuals))+Konstantni_trosak;

%Originalne tocke
figure(2), plot3(Xdata(1,:),Xdata(2,:),Ydata, 'o')

%
% Izracun funkcije (matrice) vremenskog trajanja eksperimenta na temelju ulaznih podataka o ukupnom trajanju
eksperimentiranja za pojedino stanje pokusa
%

% Formiranje Xdata parova tocaka za LSQcurve
Xdata=[X(:,2) X(:,3)'];

disp('Matrica vremenskog trajanja')
[Xdata;Y_vrijeme_data]

%Ukupno vrijeme
Konstantna_vremenska_komponenta=input('konstantna vremenska komponenta =');
suma_utroska_vremena=sum(Y_vrijeme_data)+Konstantna_vremenska_komponenta;

%Pocetna vrijednost vektora koeficijenata
x0 = zeros(1,6);

```

```

%Definiranje regresijske funkcije
response = inline('x(1)+x(2).*xdata(1,:) + x(3).*xdata(1,:).^2 + x(4).*xdata(1,).*xdata(2,:) +
x(5).*xdata(2,)+x(6).*xdata(2,).^2','x','xdata');

%Optimiranje parametara funkcije regresije
[x, resnorm, residuals] = lsqcurvefit(response,x0, Xdata, Y_vrijeme_data);

disp('koeficijenti funkcije utroska vremena:');
disp(x)

%Crtnanje 'normal probability plot'-a
figure(1), subplot(122), normplot(residuals)

%Graf funkcije
[x_i,y_i] = meshgrid(-1.414:step:1.414);
Fvrijeme =x(1)+x(2).*x_i + x(3).*x_i.^2 + x(4).*x_i.*y_i + x(5).*y_i+x(6).*y_i.^2;
% standardiziranje na podrucje 0 - 1 RELATIVNI VREMENSKI UTROSAK
F_vrijeme=(Fvrijeme)./(max(max(Fvrijeme)));
figure(1), subplot(121)
title('Relativni vremenski utrosak');
surf(x_i,y_i,F_vrijeme),xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('F_vrijeme');
hold on
raspon_z_osi=1.2*max(max(F_vrijeme));
AXIS([-2 2 -2 2 0 raspon_z_osi 0 raspon_z_osi]);

%Konturni dijagram
figure(2), contour(x_i,y_i,F_vrijeme), hold on, grid on
title('Konturni dijagram relativnog vremenskog utroska');
%Utrosak vremena preliminarnog modela
Povecanje_ukupnog_vremena(1,1)=sum(Y_vrijeme_data+residuals)+Konstantna_vremenska_komponenta;

%Originalne tocke
figure(2), plot3(Xdata(1,:),Xdata(2,:),Y_vrijeme_data, 'o')

%-----
% MODEL ZA 2FAKTORA
%-----
sigma=1;

I = inv(X'*X);
%
%definicija domene stanja pokusa x1 i x2
i = [-1.414:step:1.414];
j = [-1.414:step:1.414];
%
v= zeros(length(i), length(j));
for cnt1=1:length(i)
    for cnt2=1:length(j)
v(cnt1,cnt2)= sigma*[1 i(1,cnt1) j(1, cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1, cnt2)*j(1, cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))]*I*[
i(1,cnt1) j(1, cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1, cnt2)*j(1, cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))]';
    end
end

volumen = zeros(length(i), length(j));

for cnt1=1:length(i)
    for cnt2=1:length(j)
        % Generiranje zadnjeg retka
        STANJE_POKUSA=[1, j(1,cnt2), i(1,cnt1), j(1,cnt2)^2, i(1,cnt1)^2, j(1,cnt2)*i(1,cnt1)];
        X1=[X; STANJE_POKUSA];
        I_1 = inv(X1'*X1);
        %Racunanje v_1 za jednu X1
        v_1= zeros(length(i), length(j));
        Delta_v = zeros(length(i), length(j));
        for cnt3=1:length(i)
            for cnt4=1:length(j)
v_1(cnt3,cnt4)= sigma*[1 i(1,cnt3) j(1,cnt4) i(1,cnt3)^2 j(1,cnt4)^2 (i(1,cnt3)*j(1,cnt4))]*I_1*[
i(1,cnt3)^2 j(1,cnt4)^2 (i(1,cnt3)*j(1,cnt4))]';
            end
            Delta_v = step^2*(sqrt(v)-sqrt(v_1));
            volumen(cnt1,cnt2)=sum(sum(Delta_v));
        end
    end
end

volumen ;

% Crtnanje volumena -----
figure (23)
title('Promjena volumena')
mesh(i,j,volumen)

%-----
% Funkcija prirasta preciznosti modela standardizirana od 0-1
F_prec=volumen./(max(max(volumen)));

%Obrnuto funkciji prirasta preciznosti modela
F_neprec=1-F_prec;

%Average Prediction Variance Q-kriterij
disp('Q kriterij');
Q(1,1)=mean(mean(v));

%izracun G-efikasnosti
suma_v_point=zeros(1,length(X(:,1))); % inicijalizacija
br_tocaka=length(X(:,1)); % broj tocaka pokusa=broj redaka matrice X
for cnt0=1:br_tocaka
    v_point(1,cnt0)=X(cnt0,:)*I*(X(cnt0,:))'; % (Leverage)
end

```

```

suma_v_point=sum(v_point(1,:));
p=suma_v_point/br_tocaka; % prosječna v(x) uzevši točke pokusa
Geff(1,1)=p/(max(V_point)); % G efikasnost po cijelom R prostoru
%
% Izracun D-efikasnosti
disp('D-optimalnost=');
M(1,1)=det(X'*X)/(br_tocaka^6);
Deff=M/0.0657;
%
% Ortogonalnost
ORT(1,1)=abs(sum(X(:,2).*X(:,3)));
%
% Polje Matrica pokusa
Pokus=cell(1,10);
Pokus(1,1)=X;
%
% v(x) prikaz
figure(21)
surf(i,j,v)
title('Predvižena varijanca');
xlabel('faktor x1');
ylabel('faktor x2');
zlabel('v(x)');
%
% Konturni dijagram SE Mean
figure(22)
contour(i,j,sqrt(v))
[c,h]=contour(i,j,sqrt(v));
clabel(c,h)
title('Standardna pogreška aritmetičke sredine');
xlabel('faktor x1');
ylabel('faktor x2');
%
% IZRACUN FUNKCIJE POZELJNOSTI ZA 2 FAKTORA
%
F_pozelj=zeros(length(i),length(j));
%
% Unos tezijskih faktora za svaki kriterij
k_prec=input('Tezijski faktor glavnog kriterija preciznosti modela =');
k_trosak=input('Tezijski faktor kriterija "trosak" =');
k_vrijeme=input('Tezijski faktor kriterija "vrijeme" =');
%
% Racunanje funkcije pozeljnosti
F_pozelj=(k_prec*F_prec+k_trosak*(1-F_trosak)+k_vrijeme*(1-F_vrijeme))/(max(max(k_prec*F_prec+k_trosak*(1-
F_trosak)+k_vrijeme*(1-F_vrijeme))); % (1-F_trosak) i (1-F_vrijeme)- oblik koji iskazuje najmanji trosak i utrosak vremena
%
% Crtanje funkcije pozeljnosti
figure(31)
surf(x_i,y_i,F_neprec),xlabel('x_1'),ylabel('x_2'),zlabel('F neprec')
title('Inverz funkcija prirasta preciznosti modela')
figure(32)
surf(x_i,y_i,F_trosak),xlabel('x_1'),ylabel('x_2'),zlabel('F trosak')
title('Funkcija troska')
figure(33)
surf(x_i,y_i,F_pozelj),xlabel('x_1'),ylabel('x_2'),zlabel('F pozelj')
title('Funkcija pozeljnosti')
figure(34)
surf(x_i,y_i,F_prec),xlabel('x_1'),ylabel('x_2'),zlabel('F prec')
title('Funkcija prirasta preciznosti modela')
figure(35)
surf(x_i,y_i,F_vrijeme),xlabel('x_1'),ylabel('x_2'),zlabel('F vrijeme')
title('Funkcija utroska vremena')
%
%
% -----
% ODABIR TOCACA ZA PONAVLJANJE PO FUNKCIJI POZELJNOSTI
% -----
%
% Tocka 'maksimalne pozeljnosti' za ponavljanje
Tocka=max(max(F_pozelj));
[j_max,i_max]=find(F_pozelj==max(max(F_pozelj)));
t_i=i(1,1)+(i_max-1)*step;
t_j=j(1,1)+(j_max-1)*step;
disp('Tocka maksimalne pozeljnosti=');
t_i;
t_j;
dodana_tocka_xi(1,1)=[t_i];
dodana_tocka_xj(1,1)=[t_j];
Xgen=[X;[1 t_i t_j t_i^2 t_j^2 t_i*t_j]];
%
% Prirast troskova zbog dodatnog stanja pokusa
Prirast_troskova(1,2)=Prirast_troskova(1,1)+Ftrosak(j_max,i_max);
%
% Prirast utroska vremena zbog dodatnog stanja pokusa
Povecanje_ukupnog_vremena(1,2)=Povecanje_ukupnog_vremena(1,1)+Fvrijeme(j_max,i_max);
%
% Smanjenje volumena v(x)
Preciznost_modela(1,1)=0;
Preciznost_modela(1,2)=sum(sum(volumen));
%
% Average Prediction Variance Q-kriterij
disp('Q kriterij');
Q(1,2)=mean(mean(v_1));

```

```

%Izracun G-efikasnosti nakon iteracije
suma_v_point=zeros(1,length(Xgen(:,1))); % inicijalizacija
br_tocaka=length(Xgen(:,1)); % broj tocaka pokusa=broj redaka matrice X
for cnt0=1:br_tocaka
    v_point(1,cnt0)=Xgen(cnt0,:)*I*(Xgen(cnt0,:)); % (Leverage)
end
suma_v_point=sum(v_point(1,:));
p=suma_v_point/br_tocaka; % prosjecna v(x) uzevsi tocke pokusa
Geff(1,2)=p/(max(v_point)); % G efikasnost po cijelom R prostoru

%Izracun D-efikasnosti
%disp('D-optimalnost=');
M(1,2)=det(Xgen'*Xgen)/(br_tocaka^6);
Deff=M/0.0657;

%Ortogonalnost
ORT(1,2)=abs(sum(Xgen(:,2).*Xgen(:,3))); %gubitak ortogonalnosti

%Polje Matrica pokusa
Pokus(1,2)=Xgen;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ITERACIJE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ydata_gen=Ydata;
Y_vrijeme_data_gen=Y_vrijeme_data;

for cnt_master=1:8

    % % RACUN ZA MODIFICIRANI X nakon koristenja funkcije pozeljnosti
    %
    X=Xgen;

    %Formiranje Xdata parova tocaka za LSQcurve
    Ydata_gen=[Ydata_gen, (Ftrosak(j_max,i_max))];
    Y_vrijeme_data_gen=[Y_vrijeme_data_gen, (Fvrijeme(j_max,i_max))];

    Xdata=[X(:,2) X(:,3)];

    disp('Matrica troska')
    [Xdata;Ydata_gen];

    disp('Matrica utroska vremena')
    [Xdata;Y_vrijeme_data_gen];

    %Pocetna vrijednost vektora koeficijenata
    x0 = zeros(1,6);

    %-----
    % MODEL ZA 2FAKTORA
    %-----

    sigma=1;

    I = inv(X'*X);

    %
    %definicija domene stanja pokusa x1 i x2

    i = [-1.414:step:1.414];
    j = [-1.414:step:1.414];
    %
    %
    v = zeros(length(i), length(j));
    for cnt1=1:length(i)
        for cnt2=1:length(j)
            v(cnt1,cnt2)= sigma*[1 i(1,cnt1) j(1,cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1,cnt2)*j(1,cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1,cnt2))]*I*[
            i(1,cnt1) j(1,cnt2) (i(1,cnt1)*i(1,cnt1)) (j(1,cnt2)*j(1,cnt2)) (i(1,cnt1)*j(1,cnt2))]';
        end
    end

    volumen = zeros(length(i), length(j));

    for cnt1=1:length(i)
        for cnt2=1:length(j)
            % Generiranje zadnjeg retka
            STANJE_POKUSA=[1, j(1,cnt2), i(1,cnt1), j(1,cnt2)^2, i(1,cnt1)^2, j(1,cnt2)*i(1,cnt1)];
            X1=[X; STANJE_POKUSA];
            I_1 = inv(X1'*X1);
            % Racunanje v_1 za jednu X1
            v_1 = zeros(length(i), length(j));
            Delta_v = zeros(length(i), length(j));
            for cnt3=1:length(i)
                for cnt4=1:length(j)
                    v_1(cnt3,cnt4)= sigma*[1 i(1,cnt3) j(1,cnt4) i(1,cnt3)^2 j(1,cnt4)^2 (i(1,cnt3)*j(1,cnt4))]*I_1*[
                    i(1,cnt3) j(1,cnt4) i(1,cnt3)^2 j(1,cnt4)^2 (i(1,cnt3)*j(1,cnt4))]';
                end
            end
            Delta_v = step^2*(sqrt(v)-sqrt(v_1));
            volumen(cnt1,cnt2)=sum(sum(Delta_v));
        end
    end

    volumen;

```

```

%-----
% Funkcija prirasta preciznosti modela standardizirana od 0-1
F_prec=volumen./(max(max(volumen)));
% Funkcija prirasta nepreciznosti modela
F_neprec=1-F_prec;
%
%-----
% IZRACUN FUNKCIJE POZELJNOSTI ZA 2 FAKTORA
%
F_pozelj=zeros(length(i),length(j));
%Racunanje fukcije pozeljnosti
F_pozelj=(k_prec*F_prec+k_trosak*(1-F_trosak)+k_vrijeme*(1-F_vrijeme))/(max(max(k_prec*F_prec+k_trosak*(1-
F_trosak)+k_vrijeme*(1-F_vrijeme))); % (1-F_trosak) i (1-F_vrijeme)- oblik koji iskazuje najmanji trosak i utrosak vremena
figure(500+cnt_master)
surf(x_i,y_i,F_pozelj),xlabel('Temperatura'),ylabel('Tlak'),zlabel('F_pozelj')
title('Funkcija pozeljnosti')
figure(600+cnt_master)
surf(x_i,y_i,F_prec),xlabel('x'),ylabel('y'),zlabel('F_prec')
title('Funkcija prirasta preciznosti modela')
%
%-----
% ODABIR TOCAKA ZA PONAVLJANJE PO FUNKCIJI POZELJNOSTI
%-----
%Tocka 'maksimalne pozeljnosti' za ponavljanje
Tocka=max(max(F_pozelj));
[j_max,i_max]=find(F_pozelj==max(max(F_pozelj)));
t_i=i(1,i_max-1)*step;
t_j=j(1,1)+(j_max-1)*step;
dodana_tocka_xi(1,cnt_master)=[t_i];
dodana_tocka_xj(1,cnt_master)=[t_j];
Xgen=[X;[1 t_i t_j t_i^2 t_j^2 t_i*t_j]];
%Prirast troskova zbog dodatnog stanja pokusa
Prirast_troskova(1,2+cnt_master)=Prirast_troskova(1,1+cnt_master)+F_trosak(j_max,i_max);
%Prirast utroska vremena zbog dodatnog stanja pokusa
Povecanje_ukupnog_vremena(1,2+cnt_master)=Povecanje_ukupnog_vremena(1,1+cnt_master)+F_vrijeme(j_max,i_max);
%Smanjenje volumena v(x)
Preciznost_modela(1,cnt_master+2)=Preciznost_modela(1,1+cnt_master)+sum(sum(volumen));
%Average Prediction Variance Q-kriterij
disp('Q kriterij');
Q(1,2+cnt_master)=mean(mean(v_1));
%Izracun G-efikasnosti nakon svake iteracije
suma_v_point=zeros(1,length(Xgen(:,1))); % inicijalizacija
br_tocaka=length(Xgen(:,1)); % broj tocaka pokusa=broj redaka matrice X
for cnt0=1:br_tocaka
v_point(1,cnt0)=Xgen(cnt0,:)*I*(Xgen(cnt0,:));% (Leverage)
end
suma_v_point=sum(v_point(1,:));
p=suma_v_point/br_tocaka; % prosjecna v(x) uzevsi tocke pokusa
Geff(1,2+cnt_master)=p/(max(v_point)); % G efikasnost po cijelom R prostoru
%Izracun D-efikasnosti
%disp('D-optimalnost=');
M(1,2+cnt_master)=det(Xgen'*Xgen)/(br_tocaka^6);
Deff=M/0.0657;
%Ortogonalnost
ORT(1,2+cnt_master)=abs(sum(Xgen(:,2).*Xgen(:,3))); %gubitak ortogonalnosti
%Polje Matrica pokusa
Pokus(1,2+cnt_master)=[Xgen];
end
%Rezultati
%Kriteriji troska, utroska vremena i preciznosti
figure(1001)
title('Odnos prirasta troskova i preciznosti modela');
plot(1:cnt_master+2,((Preciznost_modela)/max(Preciznost_modela)), 'b--')
hold on
plot(1:cnt_master+2,(Prirast_troskova/max(Prirast_troskova)), 'r-')
hold on
plot(1:cnt_master+2,(Povecanje_ukupnog_vremena/max(Povecanje_ukupnog_vremena)), 'g-')
hold on
plot(1:cnt_master+2,(Q/max(Q)), 'o-')
legend('Prirast preciznosti modela','Prirast troskova','Povecanje utroska vremena','Promjena prosjecne varijance
modela');
xlabel('Model');
ylabel('Prirast');
%Kriteriji G i D
figure(1002)
title('Promjena D kriterija obzirom na korekciju modela');
plot(1:cnt_master+2, M);
ylabel('D kriterij');

```



```

xlabel('Model');

figure(1003)
title('Promjena G efikasnosti obzirom na korekciju modela');
plot(1:cnt_master+2, Geff);
ylabel('G efikasnost');
xlabel('Model');

%Q kriterij
figure(1009)
plot(1:cnt_master+2, Q);
title('Promjena Q kriterij obzirom na korekciju modela');
ylabel('Prosječna vrijednost varijance (APV)');
xlabel('Model');

%Gubitak ortogonalnosti
figure(1006)
title('Gubitak ortogonalnosti');
plot(1:cnt_master+2, ORT);
ylabel('Ortogonalnost');
xlabel('Br. modela');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Cartanje modela i relevantnih parametara modela pokusa s optimalnim kriterijima %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(2001)
title('Optimalni model');
br_iteracije=4; %broj optimalnog modela (broj
iteracije)
plot(Pokus(br_iteracije)(:,2), Pokus(br_iteracije)(:,3), 'o');
hold on
plot(D(:,1), D(:,2), 'x');
xlabel('faktor x1');
ylabel('faktor x2');

%Pocetni model
X_pocetno=Pokus(1);
I_pocetno = inv(X_pocetno*X_pocetno);

%definicija domene stanja pokusa x1 i x2
i = [-1.414:step:1.414];
j = [-1.414:step:1.414];
%
v_pocetno= zeros(length(i), length(j));
for cnt1=1:length(i)
    for cnt2=1:length(j)
v_pocetno(cnt1,cnt2)= sigma*[1 j(1,cnt2) i(1, cnt1) (j(1,cnt2)*j(1,cnt2)) (i(1, cnt1)*i(1, cnt1)) (i(1,cnt1)*j(1,
cnt2))]*I_pocetno*[1 j(1,cnt2) i(1, cnt1) (j(1,cnt2)*j(1,cnt2)) (i(1, cnt1)*i(1, cnt1)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))]];
    end
end

%Optimalni model
X_optimalno=Pokus(br_iteracije)
I_optimalno = inv(X_optimalno*X_optimalno);

v_optimalno= zeros(length(i), length(j));
for cnt1=1:length(i)
    for cnt2=1:length(j)
v_optimalno(cnt1,cnt2)= sigma*[1 j(1,cnt2) i(1, cnt1) (j(1,cnt2)*j(1,cnt2)) (i(1, cnt1)*i(1, cnt1)) (i(1,cnt1)*j(1,
cnt2))]*I_optimalno*[1 j(1,cnt2) i(1, cnt1) (j(1,cnt2)*j(1,cnt2)) (i(1, cnt1)*i(1, cnt1)) (i(1,cnt1)*j(1, cnt2))]];
    end
end

figure(2010)
title('Procjenjena varijanca pocetnog i optimalnog modela');
surf(i, j, v_pocetno, 'FaceColor', [ 0 0 1]);
hold on;
surf(i, j, v_optimalno, 'FaceColor', [0 1 1]);
grid on;
legend('Pocetni model', 'Poboljšani model');

*****
***KRAJ***
*****

```



# Životopis

Hrvoje Cajner rođen je 07. ožujka 1978. u Požegi. Osnovnu školu "Eugen Kvaternik" kao i srednju školu "Prirodoslovno matematička gimnazija Velika Gorica" završio je u Velikoj Gorici. Nakon gimnazije, 1996. upisuje studij "Zrakoplovstvo" na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu te 2004. godine diplomira i stječe zvanje diplomiranog inženjera zrakoplovstva. Početkom 2005. godine zapošljava se kao znanstveni novak na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu na Zavodu za industrijsko inženjerstvo, Katedra za upravljanje proizvodnjom. U svom znanstveno istraživačkom radu bavio se problemima vezanim za područje analize, što u okviru znanstvenog projekta, što za vanjske naručitelje. U nastavi je održavao laboratorijske i auditorne vježbe iz kolegija studijskog smjera Industrijsko inženjerstvo te dijelu kolegija drugih smjerova. U svom dosadašnjem radu producirao je nekoliko znanstvenih radova publiciranih u časopisima te na međunarodnim znanstvenim konferencijama. Član je organizacijskog i znanstvenog odbora međunarodne konferencije MOTSP (Management of Technology and Sustainable Production). Aktivno se služi engleskim jezikom. Oženjen je i otac dvoje djece.

---

# Biography

Hrvoje Cajner was born on the 7<sup>th</sup> of March 1978 in Požega. He finished elementary school "Eugen Kvaternik" and high school "Prirodoslovno matematička gimnazija Velika Gorica" in Velika Gorica. After high school he enrolled into the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture in Zagreb, where he graduated in the year 2004 and received the degree B.sc. of aerospace engineering. In the year 2005 he started to work as a research novice at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture in Zagreb, in the Department of Industrial Engineering, section Production Control. During his work as a researcher his main area of research was Design of Experiments and Statistical Analysis. He has also been participating in the courses included in study of Industrial Engineering and some courses as part of other departments. He published several scientific papers presented in scientific journals and international scientific conferences. He is also a member of organizing and scientific committee of the international scientific conference MOTSP (Management of Technology and Sustainable Production). He is fluent in English. He is married and father of two children.

---