

# Određivanje mehaničke impedancije prigušivača vibracija tipa Stockbridge

---

Zenzerović, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad

2010

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:414395>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-11**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

# **ZAVRŠNI RAD**

Ivan Zenzerović

Zagreb, 2010.

Sveučilište u Zagrebu  
**Fakultet strojarstva i brodogradnje**

# **ZAVRŠNI RAD**

Voditelj rada:  
Hinko Wolf

Ivan Zenzerović

Zagreb, 2010.

## **Izjava**

Ja, Ivan Zenzerović, izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći stečeno znanje i dostupnu literaturu.

## Sadržaj

Sadržaj.....	I
Popis slika.....	III
Popis tablica .....	VI
Popis oznaka .....	VII
Uvod .....	X
1. Strujanjem uzrokovane vibracije.....	1
1.1. Vjetar kao izvor uzbude.....	5
1.2. Vibracije uzrokovane otkidanjem vrtloga.....	7
1.2.1. Opstrujavanje cilindričnih tijela .....	7
1.2.2. Trag von Karmanovih vrtloga .....	10
1.2.3. Mehanizam nastanka vibracija .....	12
1.2.4. "Uglavljivanje" frekvencija.....	14
1.3. Vibracije dalekovoda .....	16
1.3.1. Galopiranje .....	16
1.3.2. Eolske vibracije užeta dalekovoda .....	18
2. Vibracijski sustav užeta dalekovoda s prigušivačem tipa Stockbridge.....	22
2.1. Metoda ravnoteže snaga.....	26
2.1.1. Snaga uzbudnih sila .....	27
2.1.2. Snaga uslijed vlastitog prigušenja užeta.....	28
2.1.3. Snaga disipirana u prigušivaču tipa Stockbridge .....	29
3. Matematički model prigušivača tipa Stockbridge .....	30
3.1. Opis prigušivača.....	30
3.2. Diferencijalna jednačba gibanja prigušivača .....	34
3.2.1. Model prigušivača bez prigušenja .....	34
3.2.2. Krutost čeličnog užeta .....	39
3.2.3. Prigušenje u čeličnom užetu.....	41
3.2.3.1. Odnos između krutosti i prigušenja .....	44
3.2.4. Model prigušivača s prigušenjem .....	45

3.3. Rješenje diferencijalne jednačbe gibanja, vlastite kružne frekvencije, glavne forme vibriranja .....	47
3.4. Simetrični Stockbridge prigušivač.....	53
3.5. Asimetrični Stockbridge prigušivač.....	55
3.6. Karakteristika Stockbridge prigušivača.....	60
3.6.1. Mehanička impedancija .....	60
3.6.2. Snaga prigušenja.....	61
3.7. Proračun čvrstoće Stockbridge prigušivača.....	65
4. Eksperimentalno određivanje parametara čeličnog užeta .....	70
4.1. Određivanje prigušenja čeličnog užeta.....	71
4.2. Određivanje krutosti čeličnog užeta.....	79
4.2.1. Linearna karakteristika krutosti .....	79
4.2.2. Nelinearna karakteristika krutosti .....	86
5. Usporedba analitičkih i eksperimentalnih rezultata.....	88
5.1. Ispitni prigušivač.....	88
5.2. Analiza rezultata .....	91
5.2.1. Vlastite frekvencije, glavne forme vibriranja .....	91
5.2.2. Mehanička impedancija, fazni kut impedancije, disipirana snaga..	96
6. Zaključak .....	101
Sažetak.....	104
Summary .....	105
Literatura.....	106

## Popis slika

Slika 1.	Mehanizmi nastanka uzbude [1].....	2
Slika 2.	Utjecaj oblika terena na strujanje vjetra [2].....	5
Slika 3.	Strujnice pri laminarnom opstrujavanju cilindra .....	7
Slika 4.	Nastanak vrtloga.....	8
Slika 5.	von Karmanovi vrtlozi i trag von Karmanovih vrtloga.....	8
Slika 6.	Polje tlaka oko cilindra [4].....	9
Slika 7.	Vrtložni trag pri visokim Re.....	10
Slika 8.	Dijagram ovisnosti $St$ o $Re$ [1] .....	11
Slika 9.	Putanja vibracija užeta dalekovoda [1] .....	13
Slika 10.	Dijagram odziva cilindra u struji vode [1] .....	15
Slika 11.	Karakteristika koeficijenta otpora i uzgona o napadnom kutu za uže s nakupinom leda [1].....	17
Slika 12.	Promjena napadnog kuta zbog gibanja tijela [1].....	17
Slika 13.	Dijagram ovisnosti koeficijenta uzgona i otpora cilindra u ovisnosti o $Re$ i $Tu$ [1].....	19
Slika 14.	Utjecaj strukture užeta i kuta otklona na uzgon i otpor užeta [1] ...	20
Slika 15.	Lom užeta dalekovoda uslijed zamora .....	22
Slika 16.	Model užeta dalekovoda s prigušivačem.....	23
Slika 17.	Usporedba egzaktnog rješenja i rješenja metode ravnoteže snaga [14] .....	26
Slika 18.	Funkcija reducirane snage vjetra po različitim autorima [15] .....	28
Slika 19.	Skica Stockbridge prigušivača iz patenta [7] .....	30
Slika 20.	Uteg prigušivača.....	31
Slika 21.	Skica polovice prigušivača u gibanju .....	34
Slika 22.	Sile na uteg u gibanju .....	35
Slika 23.	Utjecajni koeficijenti .....	40
Slika 24.	Petlja histereze .....	41
Slika 25.	Aproksimirane glavne forme vibriranja .....	51

Slika 26. Skica simetričnog Stockbridge prigušivača .....	53
Slika 27. Skica asimetričnog Stockbridge prigušivača .....	55
Slika 28. Vektorski dijagram sila vibracijskog sustava masa-opruga- prigušivač .....	63
Slika 29. Skica lijevog kraja prigušivača s dinamičkim silama.....	65
Slika 30. Vibrator LDS V555.....	70
Slika 31. Shema eksperimentalnog postava za ispitivanje prigušenja užeta.....	71
Slika 32. Petlja histereze za frekvenciju 35 Hz i amplitudu brzine 100 mm/s.....	73
Slika 33. Ovisnost histerezne konstante prigušenja o frekvenciji za dva mjerjenja.....	74
Slika 34. Ovisnost histerezne konstante prigušenja o frekvenciji pri ukrućenoj i neukrućenoj ploči.....	75
Slika 35. Ovisnost histerezne konstante prigušenja o frekvenciji za različite amplitude brzine .....	76
Slika 36. Petlja histereze za frekvenciju 50 Hz i amplitudu brzine 100 mm/s.....	77
Slika 37. Petlja histereze za frekvenciju 40 Hz i amplitudu brzine 150 mm/s s prikazanim nagibom petlje.....	79
Slika 38. Krivulja sila-pomak dobivena iz mjerenja pri amplitudi brzine 100 mm/s.....	80
Slika 39. Krivulja sila-pomak nakon filtriranja podataka dijagrama sa slike 38. ....	81
Slika 40. Interpolacija rezultata dobivenih iz analize petlji histereze .....	82
Slika 41. Interpolacija grupe točaka svih mjerenja .....	84
Slika 42. Usporedba linearne i nelinearne interpolacije.....	86
Slika 43. Ispitni prigušivač.....	88
Slika 44. Uteg pričvršćen na glasničko uže .....	89
Slika 45. Eksperimentalno snimljena krivulja impedancije ispitnog prigušivača .....	92



Slika 46. Eksperimentalno snimljena krivulja disipirane snage ispitnog prigušivača .....	95
Slika 47. Usporedba rezultata za mehaničku impedanciju .....	96
Slika 48. Usporedba rezultata za disipiranu snagu .....	97
Slika 49. Usporedba rezultata za fazni kut impedancije .....	98
Slika 50. Karakteristika ispitnog prigušivača za $\mu=1$ .....	99

## Popis tablica

Tablica 1. Pregled rezultata eksperimentalnog određivanja prigušenja užeta.....	78
Tablica 2. Pregled rezultata eksperimentalnog određivanja krutosti užeta ....	83
Tablica 3. Inercijski i geometrijski parametri ispitnog prigušivača .....	90
Tablica 4. Pregled vlastitih frekvencija prigušivača .....	93

## Popis oznaka

Oznaka	Opis	Mjerna jedinica
$A$	Amplituda vibracija	m
$c$	Krutost konzole	$N \cdot m^{-1}$
$c_{ij}$	Utjecajni koeficijenti	$N \cdot m^{-1}, N, N \cdot m, N \cdot m^2$
$c_w$	Brzina vala	$m \cdot s^{-1}$
$C_L$	Koeficijent aerodinamičkog uzgona	
$C_D$	Koeficijent aerodinamičkog otpora	
$d$	Promjer cilindra (užeta)	m
$E \cdot I$	Savojna krutost užeta	$N \cdot m^2$
$E \cdot I_y$	Savojna krutost glasničkog užeta	$N \cdot m^2$
$f$	Frekvencija vibracija	Hz
$f_N$	Vlastita frekvencija sustava	Hz
$f_S$	Frekvencija otkidanja vrtloga	Hz
$F_A$	Sila u točki A	N
$h$	Histerezna konstanta prigušenja	$N \cdot m^{-1}$
$h_{ij}$	Utjecajni koeficijenti histereznog prigušenja	$N \cdot m^{-1}, N, N \cdot m$
$J_C$	Centralni inercije (tromosti) utega	$kg \cdot m^2$
$k$	Konstanta viskoznog prigušenja	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
$k_{ij}$	Utjecajni koeficijenti viskoznog prigušenja	$N \cdot s \cdot m^{-1}, N \cdot s, N \cdot s \cdot m$
$k_1$	Faktor poprečnog presjeka užeta	
$k_2$	Faktor ispune užeta	
$K$	Faktor proporcionalnosti užeta	
$l$	Duljina žice/položaj težišta utega	m
$l_1$	Položaj prigušivača na rasponu	m

	dalekovoda	
$L$	Duljina užeta prigušivača	m
$L_C$	Duljina užeta prigušivača do težišta C	m
$m$	Masa tijela/utega	kg
$m_l$	Masa užeta po jedinici duljine	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$
$m_s$	Masa stezaljke	kg
$M_A$	Moment u točki A	$\text{N} \cdot \text{m}$
$M_B$	Moment savijanja u točki B	$\text{N} \cdot \text{m}$
$n$	Redni broj forme vibriranja	
$P_D$	Snaga prigušenja prigušivača	W
$T$	Vlačna (natezna) sila u užetu	N
$\hat{u}$	Amplituda pomaka stezaljke	m
$v$	Ustaljena brzina strujanja fluida	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\bar{v}$	Srednja brzina struje fluida	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$v'_{RMS}$	Srednje kvadratno odstupanje brzine	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\hat{\dot{x}}$	Amplituda ubrzanja	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
$\hat{x}_A$	Amplituda vertikalnih vibracija utega	m
$y_0$	Amplituda vibracija	m
$Z$	Apsolutni iznos mehaničke impedancije	$\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$
$\alpha$	Kut između brzine i sile na stezaljci	rad
$\gamma_4$	Fazni kut impedancije	rad
$\zeta$	Bezdimenzijski parametar prigušenja	
$\mu$	Bezdimenzijska mjera prigušenja	
$\nu$	Kinematička viskoznost fluida	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$\rho$	Gustoća fluida	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$\sigma_A$	Maksimalno normalno naprezanje u presjeku A	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
$\sigma_B$	Maksimalno normalno naprezanje u	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

	presjeku B	
$\tau_A$	Smično naprezanje u presjeku A	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
$\tau_B$	Smično naprezanje u presjeku B	$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$
$\hat{\phi}$	Amplituda kutnih vibracija utega	rad
$\omega$	Vlastita kružna frekvencija prigušivača	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
$\Omega$	Kružna frekvencija vibracija	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

## Uvod

U današnje vrijeme, kad je život bez električne energije nezamisliv, tehnika prijenosa električne energije je od vitalne važnosti, kako za stanovništvo, tako i za gospodarstvo. Dalekovodi predstavljaju glavno sredstvo prijenosa električne energije na velike udaljenosti te je potrebno osigurati njihovu dugovječnost i pouzdanost. Oni su svakodnevno izloženi različitim vremenskim uvjetima među koje se može ubrojiti vjetar. Vjetar svojim strujanjem oko užeta dalekovoda izaziva vibracije užeta koje s vremenom mogu oštetiti konstrukcijske elemente dalekovoda i skratiti njegov životni vijek. Da bi se to spriječilo, na dalekovodima su u najširoj primjeni prigušivači vibracija tipa Stockbridge koje se u ovom radu i proučava.

U prvom poglavlju je općenito obrađena tematika vibracija uzrokovanih strujanjem. Opisani su razni mehanizmi nastanka uzbude, a u detalje je opisano opstrujavanje cilindričnih tijela sa posebnostima koje se javljaju na užetu dalekovoda. Također su opisane i pojave koje se mogu pojaviti prilikom opstrujavanja cilindričnih tijela, a koje dovode do posebnih oblika vibracija. Prvo poglavlje predstavlja uvod u problematiku vibracija dalekovoda i omogućava razumijevanje nastanka vibracija uzrokovanih strujanjem.

U drugom poglavlju je detaljnije opisan vibracijski sustav užeta dalekovoda s prigušivačem tipa Stockbridge. U ovom poglavlju su opisane razne metode kojima se pristupa rješavanju problema vibracija ovog sustava, a polazi se od najopćenitijeg modela koji se koristi u znanstvenim istraživanjima, pa do metode ravnoteže snaga koja se koristi u tehničkoj praksi.

Matematički model Stockbridge prigušivača je izveden u trećem poglavlju krenuvši od najjednostavnijeg modela bez prigušenja da bi postepeno bio uveden model prigušenja za kojeg se u literaturi navodi da najbolje opisuje prigušenje u čeličnom užetu. Izvedeni model je linearan, a primjenjen je u slučaju simetričnog i asimetričnog prigušivača vibracija. Izvedene su i veličine koje

opisuju karakteristiku prigušivača te su izvedena i naprezanja u odnosu na koje se provjerava prigušivač od zamora.

Četvrto se poglavlje bavi problemom određivanja parametara čeličnog užeta koja uključuju prigušenje i krutost užeta. Opisan je eksperimentalni postav kojim se u Dalekovod-Laboratoriju ispitivalo čelično uže te su obrađeni snimljeni podaci. Ukratko se osvrnulo i na nelinearnosti koje su prisutne u čeličnom užetu.

Da bi se izvedeni analitički model prigušivača verificirao, tj. provjerila njegova ispravnost konstruiran je ispitni prigušivač koji je opisan u petom poglavlju. U poglavlju su također uspoređeni i rezultati modela i eksperimentalnog snimanja karakteristike prigušivača.

Zaključak je dan kao šesto poglavlje i u njemu su predloženi zaključci koji su izvedeni iz analize provedene u radu te je dan osvrt na cjelokupan rad.

Cilj ovog rada je postizanje što veće točnosti analitičkog modela prigušivača tipa Stockbridge uz pretpostavke linearnog ponašanja prigušenja i krutosti čeličnog užeta. Također se želi ispitati i mogućnost opisivanja nelinearnog sustava linearnim, koja su ograničenja i na koji način linearizirati krutost i prigušenje užeta da se postigne što veća točnost modela.

Metode koju su u radu primjenjene, a u svrhu postizanja cilja, uključuju izvod analitičkog modela korištenjem znanja iz dinamike i teorije vibracija. Eksperimentalnim metodama su određeni parametri te je u konačnici verificiran analitički model. Naposljetku su usporedbom analizirani podaci dobiveni u radu.

Ovom prilikom se posebne zahvale upućuju mentoru, Prof. dr. sc. Hinku Wolfu na velikoj ukazanoj pomoći, podršci i strpljenju prilikom izrade ovog rada. Zahvaljujem se tvrtci Dalekovod, Dalekovod-Laboratoriju na omogućavanju provođenja eksperimentalnog ispitivanja, a posebice dipl. ing. Borisu Adumu na pruženoj pomoći prilikom eksperimentalnih ispitivanja. Zahvale se upućuju i Prof. dr. sc. Zdravku Viragu na pruženoj pomoći oko izbora literature iz područja opstrujavanja tijela.

## 1. Strujanjem uzrokovane vibracije

Pojava vibracija uzrokovanih strujanjem se u današnje vrijeme intenzivno proučava, posebice kako se toj problematici tek kroz posljednjih 40-ak godina počelo pridavati više važnosti. Važnost koja se pridaje vibracijama i utjecaju strujanja fluida oko konstrukcija je porasla nakon katastrofalnog kolapsa mosta na Tacoma Narrowsu (SAD) 1940. godine. Mnoge inženjerske grane se bave tom problematikom, svaka sa svojom terminologijom i specifičnim metodama.

Kod strujanjem uzrokovanih vibracija problem ne leži u konstrukciji i njezinom odzivu (osim ako sustav nije izrazito nelinearan), već je problem vezan uz način uzbude sustava. Izvora uzbude je mnogo i teško ih je identificirati. Prema [1] izvori uzbude su klasificirani u tri skupine:

- uzbuda izazvana vanjskim utjecajima (eng. Extraneously induced excitation - EIE),
- uzbuda izazvana nestabilnošću (eng. Instability-induced excitation - IIE),
- uzbuda izazvana gibanjem (eng. Movement-induced excitation - MIE).

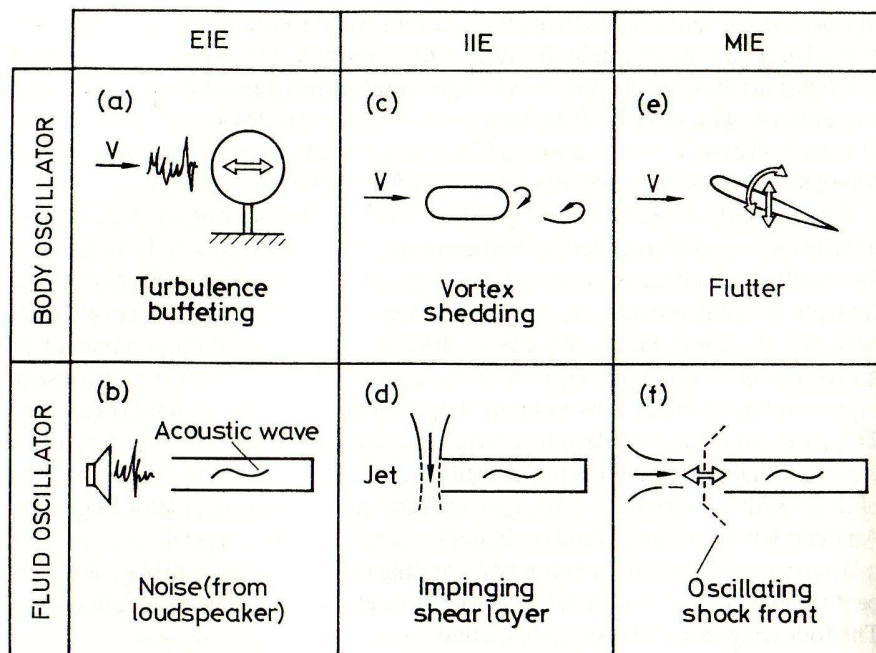
Uzbuda izazvana vanjskim utjecajima je uzrokovana fluktuacijama u brzini ili tlaku strujanja, i ne ovisi o nestabilnostima strujanja koja su uzrokovana opstrujavanjem konstrukcije. Primjer takve uzbude je tijelo koje vibrira uslijed turbulencija u struji fluida koja nailazi na tijelo, zatim vibracije uslijed kavitacije ili nekih aspekata dvofaznog strujanja, uslijed oscilirajućeg strujanja uključujući i valove, uslijed potresa (kod podvodnih konstrukcija) i sličnih pojava. Kod ove je uzbude najbitnije napomenuti kako energija uzbude dolazi iz vanjskog izvora.

Kod uzbude izazvane nestabilnošću, izvor se krije u nestabilnosti strujanja koje je u pravilu intrinzično u sustavu strujanja. Intrinzično zato što je nestabilnost rezultat opstrujavanja konstrukcije. Fluktuacije u strujanju se javljaju kad brzina strujanja prijeđe određeni iznos. Najopasniji oblik ove uzbude je fluido-elastičan



ili aero-rezonantan oblik, o čemu će više riječi biti kasnije. Osnovne skupine nestabilnosti su:

- otkidanje vrtloga,
- narušeni smični slojevi,
- nestabilnost područja kontakta,
- nestabilnosti bistabilnog strujanja,
- nestabilnosti vrtložnog strujanja.



Slika 1. Mehanizmi nastanka uzbude [1]

Kod uzbude izazvane nestabilnošću problem leži u činjenici što postoji mehanizam pojačanja nestabilnosti koji dovodi do vrlo velikih uzbudnih sila ukoliko se, taj mehanizam, ne uzme u obzir i spriječi njegov nastanak. Priroda mehanizma pojačanja može biti:

- fluido-dinamička,
- fluido-elastična,
- fluido-rezonantna.

Kod fluido-dinamičkog mehanizma nastanka uzbude, uzbudna je sila ovisna samo o uvjetima strujanja, dok je kod ostala dva mehanizma uzbudna sila ovisna o dinamici strujanja, ali također i o dinamici konstrukcije, odnosno cijelog sustava. Glavna značajka fluido-elastičnog i fluido-rezonantnog mehanizma je pojačanje uzbudne sile i "uglavljivanje" (eng. lock-in) frekvencije uzbude sa vlastitom frekvencijom sustava u određenom rasponu brzina strujanja.

Uzbuda izazvana gibanjem je rezultat promjenjivih sila koje nastaju uslijed gibanja konstrukcije kroz fluid. Radi se o tzv. samoinduciranim vibracijama jer prestankom gibanja konstrukcije nestaje i djelovanje uzbude u sustavu. Gibanje tijela u fluidu uzrokuje nestabilno strujanje fluida oko tijela koje inducira promjenjive uzbudne sile. Samoinducirane vibracije nastaju ukoliko promjene uzbudne sile dovedu do pojave negativnog prigušenja ili prijenosa energije sa fluida na tijelo. Opasnost uzbude izazvane gibanjem tijela je u tome što ona ne može biti otkrivena prilikom ispitivanja modela, osim ako se pojavu ne predvidi i ispitivanje shodno tome prilagodi. Prilikom planiranja ispitivanja, a zbog gibanja konstrukcije, potrebno je da model ima, osim slične geometrije, sličnu masu, prigušenje i krutost (elastična svojstva). Ti zahtjevi dodatno kompliciraju i poskupljuju eksperiment.

Ovaj oblik uzbude se javlja prilikom pojave treptanja krila zrakoplova (eng. flutter) koje dovodi do vrlo brzog kolapsa konstrukcije. Krilo se deformira poprečno i torzijski, a u strujanju izaziva polja višeg i nižeg tlaka koja nastoje poremećaj dodatno povećati.

U praksi su strujanjem uzrokovane vibracije vrlo kompleksna pojava pošto su u većini slučajeva prisutna dva ili više mehanizma uzbude. U tom je slučaju potrebno pažljivo identificirati svaki mehanizam posebno.

Rijetki slučajevi strujanjem uzrokovanih vibracija su posljedica parametarske uzbude. Ta je uzbuda posljedice vremenske promjenjivosti jednog ili više parametra vibracijskog sustava poput mase, prigušenja ili krutosti.

Dalekovod je specifični vibracijski sustav zbog svoje geometrije. Vodič dalekovoda (uže) je cilindrično tijelo vrlo velike duljine u odnosu na promjer, a

krutost užeta je relativno mala što uvjetuje vrlo velik broj bliskih rezonantnih frekvencija.

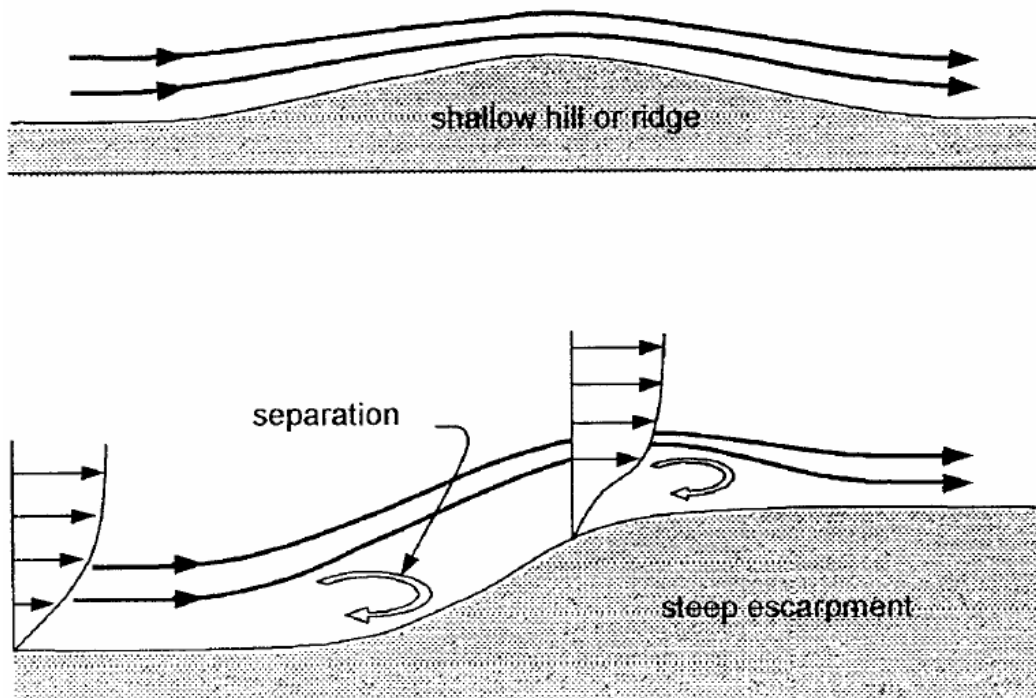
Vibracije užadi dalekovoda se dijele na eolske vibracije i galopiranje dalekovoda. Dominantne karakteristike eolskih vibracija (poglavlje 1.3.2.) jesu da osnovni mehanizam nastanka uzbude potječe od odvajanja von Karmanovih vrtloga pri umjerenim brzinama vjetra i laminarnom nastrujavanju fluida na vodič. Amplitude vibracija su malene, najviše do jednog promjera vodiča, a opasnost ovih vibracija leži u pojavi zamora materijala konstrukcijskih elemenata dalekovoda.

Galopiranje dalekovoda (poglavlje 1.3.1.) je mnogo opasnija pojava zbog složenijeg i manje predvidljivog mehanizma uzbude. Amplitude vibracija su veoma velike uz vrlo niske frekvencije.

## 1.1. Vjetar kao izvor uzbude

Eolske su vibracije ime dobile prema grčkom bogu vjetra, Aeolusu, a nastaju uslijed nestrujavanja vjetra na konstrukciju. Uzbuda ovisi o karakteristikama strujanja vjetra koja ovise o lokaciji, godišnjem dobu i općenitim klimatskim uvjetima.

Općeniti problem kod strujanjem uzrokovanih vibracije je određivanje energije koju u vibracijski sustav unosi fluid. Do danas su mnoga istraživanja provedena na tu temu, no većinom su se temeljila na pretpostavkama laminarnog strujanja. U slučaju kada uzbuda dolazi od vjetra, određivanje snage je dodatno zakomplicirano. Uzrok tomu je što polje vjetra nije konstantno, tj. mijenja se s vremenom, a ukoliko je konstrukcija većih dimenzija uzima se u obzir i prostorna raspodijela polja vjetra. Uz to, komplikacije unosi i činjenica da struja zraka nije laminarna već je prisutna i određena razina turbulencija, koje znatno utječu na unesenu energiju u sustav.



Slika 2. Utjecaj oblika terena na strujanje vjetra [2]

Osim karakteristika strujanja vjetra od jako velike važnosti je i geometrija konstrukcije koja kod svih mehanizama uzbude ima jako veliki utjecaj. Najveći utjecaj geometrija konstrukcije ima pri uzbuli izazvanoj nestabilnošću i gibanjem pošto je tu uzrok uzbude upravo opstrujavanje konstrukcije.

Problem koji se javlja u hladnim predjelima, kako su konstrukcije koje su izložene vjetru izložene i ostalim vremenskim utjecajima, je promjena geometrije uslijed gomilanja snijega i leda. Promjenom geometrije mijenja se i oblik uzbude, što u praksi često dolazi s katastrofalnim posljedicama po konstrukciju. Primjer koji će kasnije biti opisan je galopiranje električnih vodiča dalekovoda.

Prilikom proučavanja eolskih vibracija bilo bi dobro sve navedene utjecaje uzeti u obzir, no tada cijela analiza postaje prekompleksna i praktički nerješiva zbog mnogih utjecajnih parametara koje je teško, ili gotovo nemoguće odrediti. Najveći je problem stohastička priroda vjetra, pa se zato analizi pristupa sa usrednjenim vrijednostima i uz niz pojednostavljenja. Istraživači koji su se bavili ovim područjem (Morkovin 1964., Wille 1974., Parkinson 1974, 1989., i ostali koji su se bavili nestabilnošću opstrujavanja cilindričnih tijela, te Diana, Krispin, Leblond i Hardy, Rawlins i ostali koji su proučavali problematiku vibracija dalekovoda) su u većini slučajeva pribjegavali eksperimentu ili "in-situ" praćenju konstrukcija kako bi odredili parametre sustava i evaluirali svoje analitičke modele. Problemi eolskih vibracija se uglavnom rješavaju kombiniranim pristupom, gdje uz analitički određene parametre dolaze i eksperimentalne provjere istih te naknadna korekcija u svrhu smanjenja greške.

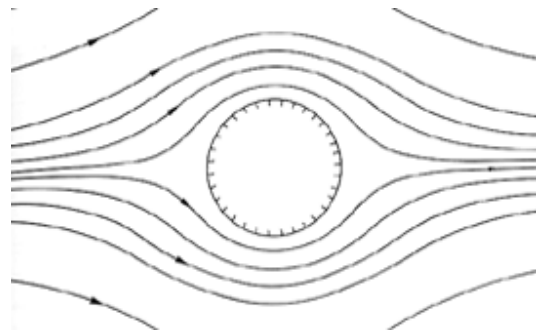
## 1.2. Vibracije uzrokovane otkidanjem vrtloga

Kad su u pitanju opstrujavanja tijela, posebnu važnost je potrebno posvetiti problematici opstrujavanja cilindričnih tijela. Ova pojava je uzrok mnogih vrsta vibracija, a njihov mehanizam nastanka je u sljedećim poglavljima detaljno objašnjen radi stvaranja cjelokupne slike problema vibracija ovještene užadi dalekovoda.

### 1.2.1. Opstrujavanje cilindričnih tijela

Mehanizam opstrujavanja tupih tijela je opisan na primjeru cilindra, kao jednog od oblika koji se u inženjerskoj praksi najčešće susreće.

Ukoliko se cilindrično tijelo postavi u uniformnu slobodnu struju fluida, na način da je ono dvodimenzionalni problem (ista slika strujanja se ponavlja u svakom sloju), fluid će biti prisiljen skrenuti svoj tok oko tijela. Pri niskim Reynoldsovima ( $Re$ ), koji su prema [3]  $Re < 5$ , strujnice koje opisuju tok fluida oko tijela će biti jednake rješenju potencijalnog strujanja, a pri tome će tok fluida ostati nerazdvojen. Slika 3 prikazuje strujnice pri ovom načinu opstrujavanja cilindra. Vidljivo je kako su one neprekinute glatke krivulje.



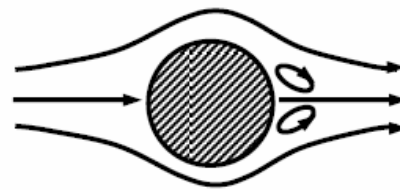
Slika 3. Strujnice pri laminarnom opstrujavanju cilindra

Prema [4] laminarno je opstrujavanje cilindra moguće do  $Re=3$ , međutim sve preciznijim metodama izvođenja eksperimenata utvrđeno je laminarno strujanje i pri  $Re=5$ . Kad između tijela i fluida ne bi bilo trenja (pretpostavka idealnog fluida), strujanje bi bilo laminarno i pri vrlo visokim Reynoldsovima. Za slučaj strujanja oko cilindra Reynoldsov se broj računa prema izrazu

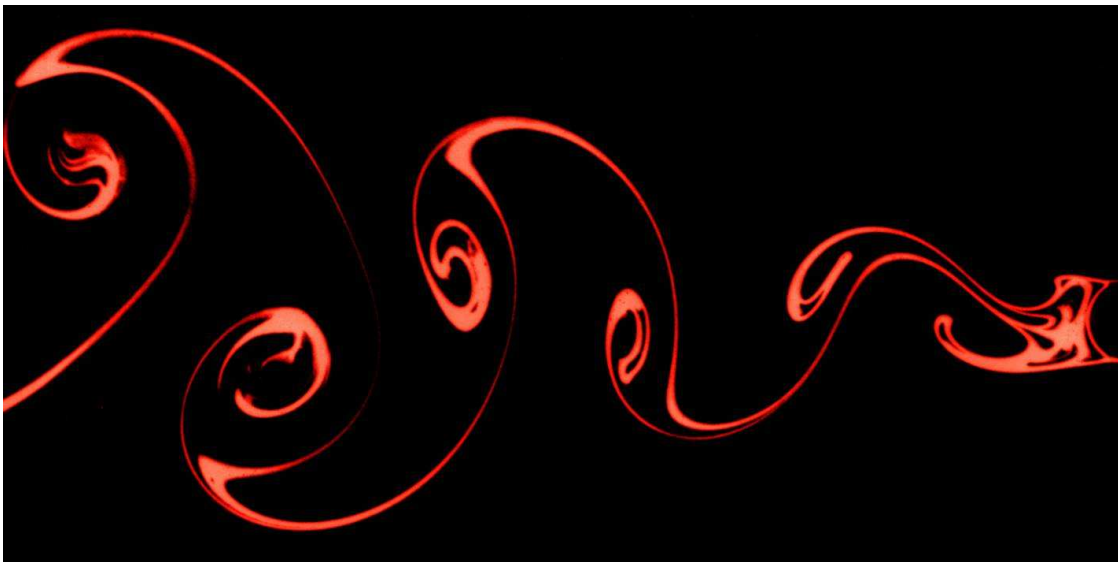
$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}, \quad (1.1)$$

gdje je  $v$  ustaljena brzina strujanja fluida prije nailaska na cilindar,  $d$  je promjer cilindra (ili ekvivalentna dimenzija necilindričnog tijela), a  $\nu$  je kinematička viskoznost fluida.

Kako se Reynoldsov broj postepeno povećava, kod vrijednosti  $5 < Re < 40$  [3] na zavjetrinskoj strani tijela (strana na kojoj fluid napušta tijelo) se počinju formirati dva vrtloga suprotne rotacije, a koji se još uvijek drže za tijelo (slika 4). Naime, iza tijela se formira trag ili "brazda" (eng. wake), tj. područje jako usporenog strujanja koje za navedene Reynoldsove brojeve još uvijek miruje. S porastom Reynoldsovog broja ( $Re > 40$ , prema [3] tj.  $Re > 60$  prema [4]), počinju se nastali vrtlozi odvajati od tijela. Izvori [1] i [5] čak navode da se to javlja pri  $Re > 100$ . Nastali vrtlozi koji se odvoje od tijela zatim putuju zajedno sa strujom fluida (slika 5).

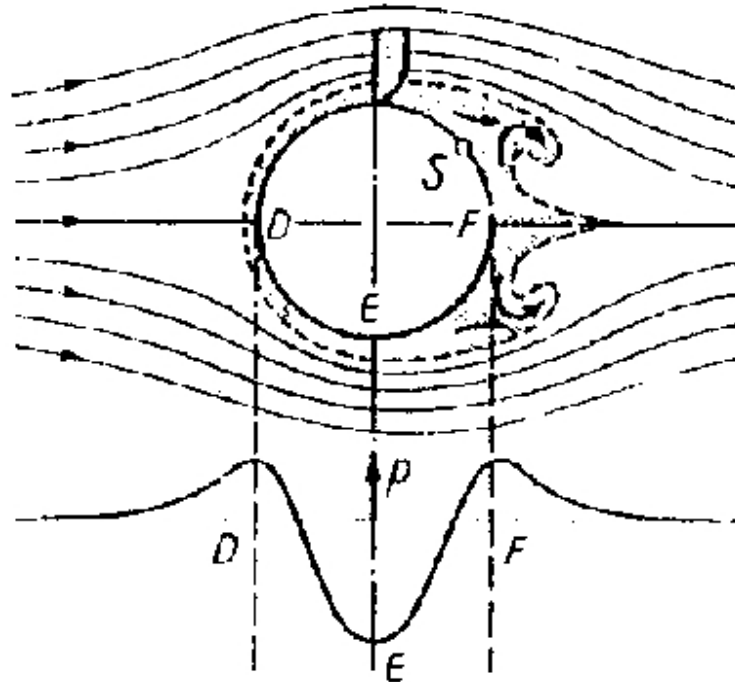


Slika 4. Nastanak vrtloga



Slika 5. von Karmanovi vrtlozi i trag von Karmanovih vrtloga

Odvajanje vrtloga se javlja kod realnih fluida kao posljedica sveprisutnog trenja (viskoznosti fluida). U području usporenog gibanja iza tijela vlada polje povišenog tlaka. Pojava odvajanja graničnog sloja je direktno vezana uz distribuciju tj. polje tlaka oko tijela. Čestice fluida nastrujavaju na tijelo, i u zaustavnoj točki D (slika 6) se stvara područje povišenog tlaka (zaustavni tlak).



Slika 6. Polje tlaka oko cilindra [4]

Gibajući se uz tijelo čestice fluida ubrzavaju, no kako dolaze prema području povišenog tlaka iza tijela, ne posjeduju dovoljno kinetičke energije da savladaju tlak i stignu do točke F. Razlog nedostatka kinetičke energije je taj da čestice izgube značajan dio energije u području od točke D do točke E zbog velikih sila trenja u tankom graničnom sloju. Te čestice, sa smanjenom energijom, ne mogu doći duboko u područje E-F, te zbog otpora one naposljetku staju. Visoki vanjski tlak tada uzrokuje da se čestice krenu gibati u suprotnom smjeru, nastaje vrtlog koji raste i naposljetku se otkida od graničnog sloja oko tijela i otputuje zajedno sa strujom fluida stvarajući tako vrtložni trag.



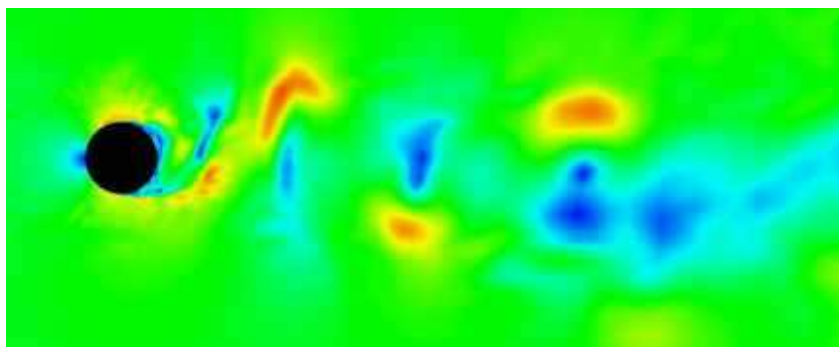
### 1.2.2. Trag von Karmanovih vrtloga

Vrtlozi koji se otkidaju od graničnog sloja se nazivaju von Karmanovi vrtlozi u čast Theodorea von Karmanu, mađarskom fizičaru koji je proučavao problematiku stabilnosti laminarnog strujanja, turbulencije i granični sloj.

Iza cilindričnog tijela, kao što je već spomenuto, se može uočiti područje u kojem su pravilno naizmjenično raspoređeni von Karmanovi vrtlozi suprotnih orijentacija (slika 5). To se područje naziva trag von Karmanovih vrtloga (eng. von Karman vortex street), a brzina kojom se vrtlozi udaljavaju od tijela je manja od brzine nastujavanja fluida na tijelo.

Tijela kod kojih se pojavljuje otkidanje vrtloga imaju veliki koeficijent aerodinamičkog otpora, što se može objasniti postojanjem velike razlike u distribuciji tlakova (koja je i razlog otkidanja vrtloga). Tijela kod kojih je prisutno odvajanje graničnog sloja se nazivaju tupa tijela i njima je svojstven omjer dimenzija poprečnog presjeka blizak jedinici. Takva tijela posjeduju pozitivan gradijent tlaka na zavjetrinskoj strani. Kasnije će biti više riječi o utjecaju koeficijenta otpora na uzbudnu silu, no svakako je bitno napomenuti kako ono posjeduje značajan utjecaj u mehanizmima uzbude.

Vraćajući se na vrtložni trag, istraživanja su pokazala kako je do iznosa Reynoldsovog broja  $Re=5000$  [4] trag prepoznatljiv i pravilan. Pri većim Reynoldsovim brojevima, iza tijela nastaje potpuno turbulentno strujanje i trag nije moguće raspoznati.



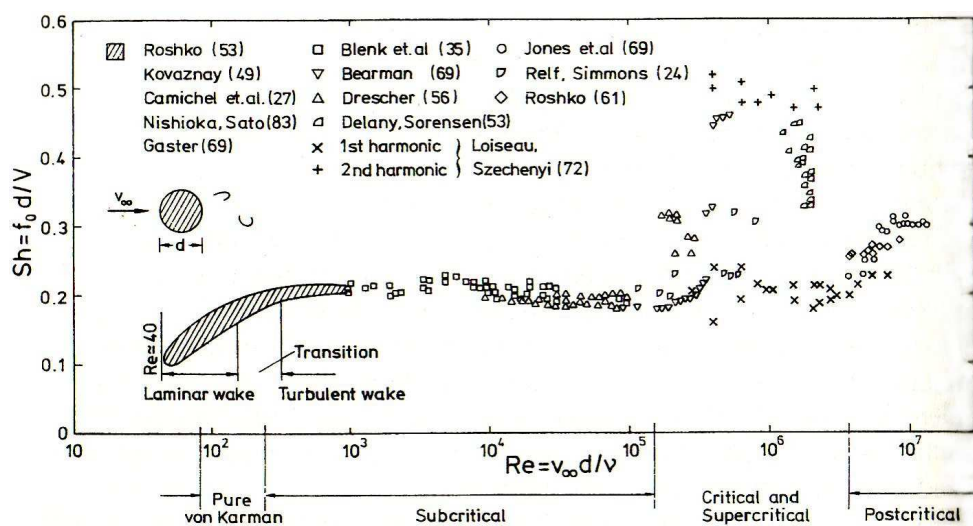
Slika 7. Vrtložni trag pri visokim  $Re$

Slika 7 prikazuje kako se pri visokim Reynoldsovima brojevima vrtložni trag brzo raspršuje, a daljnjim povećanjem, sve do nadkritične vrijednosti, trag je sve manje prepoznatljiv.

Bezdimenzijska veličina koja opisuje ovu vrstu strujanja, tj. otkidanje graničnog sloja od tupog tijela, se naziva Strohaulov broj ( $St$ ) prema češkom fizičaru Vincencu Strohaulu. Strohaulov broj predstavlja bezdimenzijsku frekvenciju i računa se prema izrazu

$$St = \frac{f_s \cdot d}{v} \quad (1.2)$$

gdje je  $f_s$  frekvencija otkidanja vrtloga. U literaturi se Strohaulov broj često označava i sa  $S$ ,  $Sh$ , i  $c_s$ . Pojava otkidanja vrtloga s graničnog sloja je do danas jako dobro istražena i postoji mnogo eksperimentalnih rezultata. Često su citirani ([1] i [4]) rezultati koje je dobio Anatol Roshko, a koji dokazuju čvrstu zavisnost Strohaulova broja o Reynoldsovom za niže vrijednosti Reynoldsovog broja. Slika 8 prikazuje dijagram ovisnosti Strohaulova broja o Reynoldsovom broju. Pri višim vrijednostima Reynoldsovog broja, Strohaulov je broj približno konstantan i ovisno o izvoru uzimaju se vrijednosti  $St=0,19-0,22$ .



Slika 8. Dijagram ovisnosti  $St$  o  $Re$  [1]

### 1.2.3. Mehanizam nastanka vibracija

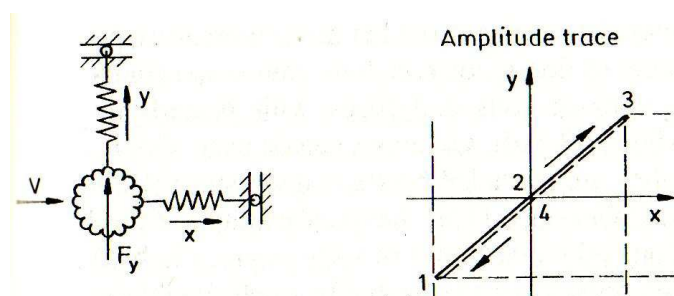
U prethodnom je poglavlju objašnjen nastanak i otkidanje vrtloga sa cilindričnog tijela u struji fluida, a u nastavku je opisana poveznica između vibracija tijela i strujanja fluida. Uzbuda koja je izazvana otkidanjem vrtloga spada u grupu nestabilnošću izazvane uzbude, preciznije, uzbude izazvane nestabilnošću opstrujavanja tijela. Rezultat te nestabilnosti, koja se na licu mjesta povećava, jesu veoma robusne, samoodržavajuće vibracije.

Da bi moglo doći do pojave vibracija, tijelo mora biti elastično oslonjeno i/ili samo posjedovati elastična svojstva (što svako realno tijelo i posjeduje). Vibracijski sustav posjeduje inercijska svojstva (masa), elastična svojstva (krutost) i prigušna svojstva (najčešći je izvor prigušenja materijal, ali to mogu biti i različiti spojevi konstrukcije). Takav sustav posjeduje jednu ili više rezonantnih frekvencija, čijom se pobudom dobivaju jake vibracije s velikim amplitudama. To se događa kada se frekvencija otkidanja von Karmanovih vrtloga poklopi s jednom od vlastitih frekvencija konstrukcije, nastaju vibracije velikih amplituda (koje ovise o stupnju prigušenja) i može doći do kolapsa.

Ovisno o tome kako vrtlozi iza tijela, a koji se još drže za granični sloj, međusobno utječu jedan na drugoga i odvajaju se od tijela, ovisi i sila koja će nastati nakon odvajanja vrtloga. Pritom geometrija tijela ima značajan utjecaj. Kako u graničnom sloju vlada nejednolika raspodjela tlaka, kad se vrtlog u kojem je zbog veće brzine čestica manji tlak odvoji, na mjestu na kojem se on nalazio djeluje polje višeg tlaka (s područja usporenog strujanja neposredno iza tijela). U tom trenutku, na suprotnoj strani od one s koje se odvojio vrtlog, nalazi se drugi vrtlog koji raste i nije se još odvojio, a u kojem vlada polje nižeg tlaka. Zbog te razlike tlakova na stranama tijela, nastaje resultantna sila koja je gotovo okomita na smjer strujanja. Najveće su amplitude vibracija upravo i okomite na smjer strujanja fluida.

U jednom ciklusu se odvoji po jedan vrtlog sa svake strane, pa se zaključuje kako se frekvencija uzbudne sile poklapa s frekvencijom otkidanja vrtloga s tijela.

Zbog geometrije poprečnog presjeka tijela, ali i zbog načina odvajanja vrtloga, resultantna sila nije okomita na smjer strujanja fluida, već je prisutna i komponenta paralelna sa smjerom strujanja fluida. Za razliku od sile okomite na pravac strujanja, sila u pravcu strujanja se mijenja s frekvencijom dvostrukom od one odvajanja vrtloga s tijela. To je posljedica toga što se vrtlozi otkidaju samo sa zavjetrinske strane, pa i sila djeluje u istom smjeru prilikom otkidanja svakog vrtloga. U jednom periodu se odvoje dva vrtloga, što znači da se uzbudna sila paralelna sa strujom fluida dvaput promijeni od minimalnog do maksimalnog iznosa. Iz tog je razloga frekvencija promjene ove harmonijske sile dvostrukog iznosa od frekvencije odvajanja vrtloga, i ta je sila mnogo manjeg iznosa od one okomite na smjer strujanja. Općenite procjene amplituda vibracija u smjeru strujanja variraju od  $0,2 \cdot d$  [1] do  $0,5 \cdot d$  [3], gdje je  $d$  promjer cilindra. Za usporedbu, amplitude vibracija poprečnih na smjer strujanja se mogu kretati i do  $1,5 \cdot d$  [1].



Slika 9. Putanja vibracija užeta dalekovoda [1]

Slika 9 prikazuje model užeta dalekovoda s elastičnim svojstvima predstavljenim oprugama u modelu i putanjom koju uže opisuje u ravnini poprečnog presjeka. Zbog ranije navedene razlike u amplitudama vibracija u  $x$  i  $y$  smjeru sa slike, u praksi se vibracije u smjeru osi  $x$  najčešće zanemaruju, a u obzir se uzimaju dominantne vibracije u smjeru osi  $y$ , tj. vertikalne vibracije.

Za tijelo na koje nastrijava fluid s prisutnim turbulencijama u strujanju, amplitude vibracija se smanjuju u odnosu na one pri laminarnom nastrijavanju. Razlog tome je što se von Karmanovi vrtlozi više ne mogu formirati u punoj veličini (kao u slučaju laminarnog strujanja), pa je rezultat toga manja uzbudna sila i manja unesena snaga u vibracijski sustav.

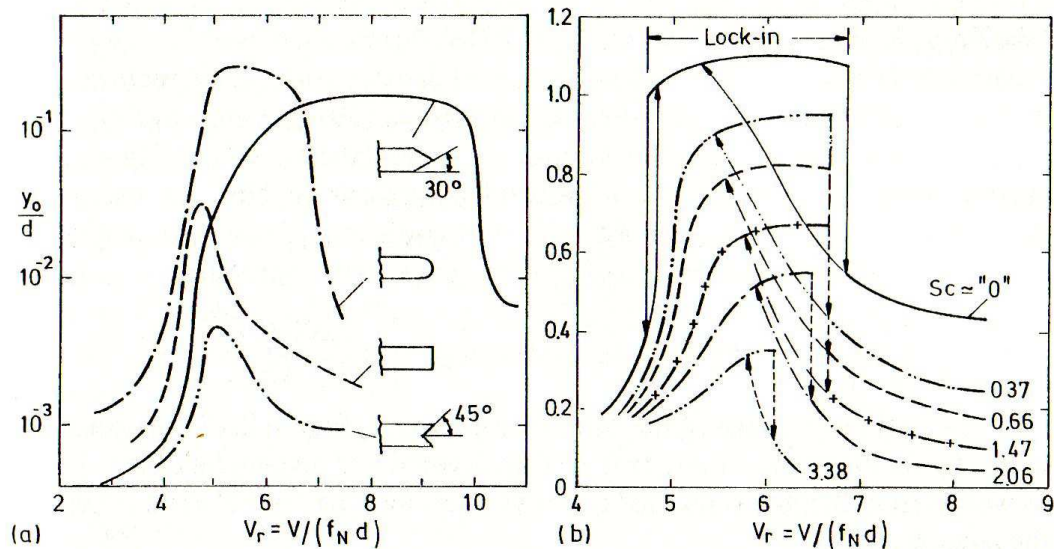
#### 1.2.4. "Uglavljivanje" frekvencija

Sile koje se javljaju prilikom opstrujavanja tijela ovise i o gibanju samog tijela. Naravno, što je gibanje veće, veći je i utjecaj na uzbudne sile, a za male pomake taj se efekt može zanemariti. Uzimajući u obzir gibanje tijela dolazi se do slučaja kada je u sustavu istovremeno prisutno više mehanizama uzbude. Naime, uz uzbudu izazvanu nestabilnošću (odvajanje vrtloga), prisutna je i uzbuda izazvana gibanjem tijela. Gibanje je tijela po harmonijskom zakonu, i ono utječe na nestabilnost i uvjete opstrujavanja. Ova kombinacija mehanizama uzbude u konačnici definira rezultatnu uzbudu na cjelokupnu konstrukciju.

Utjecaj gibanja tijela na uzbudu predstavlja jedan oblik povratne veze. Preko te povratne veze, tj. interakcije fluida i konstrukcije, dolazi do konačnog postizanja dinamičke ravnoteže preko izjednačavanja impedancije konstrukcije i uzbude. Ova je interakcija najizraženija kad je frekvencija odvajanja vrtloga bliska ili jednaka vlastitoj frekvenciji sustava. Gibanje tijela u fluidu izaziva promjenu u efektivnim dodanim masama (virtualne mase, inercija koja je dodana tijelu jer ono mora u gibanju pomicati i dio okolnog fluida), te na taj način može pomicati vlastitu frekvenciju sustava još bliže frekvenciji odvajanja vrtloga. U određenim slučajevima dvije se frekvencije poklope te dolazi do pojave rezonancije.

Kod elastično oslonjenog cilindričnog tijela može doći do pojave kada se frekvencija gibanja cilindra poklopi s frekvencijom odvajanja vrtloga, što se javlja u određenom rasponu frekvencija. Dakle, zbog efekta dodanih masa mijenja se vlastita frekvencija sustava na način da se u određenom spektru frekvencija sustav nalazi u rezonanciji. Što je amplituda gibanja tijela veća, to će biti širi i spektar frekvencija u kojima će dolaziti do opisane pojave jer je zbog duljeg djelovanja uzbude na rezonantnoj frekvenciji amplituda sve veća. Porastom amplitude (do maksimalne, određene prigušenjem) raste i efekt dodanih masa, što opet širi frekvencijski raspon u kojem se pojava javlja. Ovaj se fenomen naziva "uglavljivanje" (eng. lock-in) frekvencija, a na njega se može utjecati preko prigušenja ukoliko je taj parametar sustava moguće mijenjati.

Meier-Windhorst (1939.) je provodio ispitivanja u kojima je mijenjao bezdimenzijski faktor prigušenja  $\zeta$  i pokazao kako se s povećanjem prigušenja u sustavu sužava i frekvencijski raspon u kojemu dolazi do pojave uglavljivanja frekvencija. Slika 10 prikazuje dijagram u kojem su prikazani rezultati istraživanja koje je provedeno na cilindru uronjenom u vodi.



Slika 10. Dijagram odziva cilindra u struji vode [1]

Na slici je s  $y_0$  označena amplituda vibracija,  $v_r$  je reducirana brzina, dok parametar  $Sc$  povezuje masu i prigušenje sustava. Reducirana brzina i parametar masa-prigušenje se izračunavaju prema izrazima

$$v_r = \frac{v}{f_N \cdot d}, \quad (1.3)$$

$$Sc = \frac{2 \cdot \zeta \cdot m}{\rho \cdot d^2}, \quad (1.4)$$

gdje je  $f_N$  vlastita frekvencija sustava,  $m$  je masa tijela, a  $\rho$  je gustoća fluida.

Dijagram a) prikazuje utjecaj geometrije zavjetrinskog dijela tijela na odziv sustava, dok dijagram b) prikazuje kako povećanje prigušenja (povećanje parametra  $Sc$ ) smanjuje raspon brzina  $v_r$  u kojemu dolazi do pojave uglavljivanja.

### 1.3. Vibracije dalekovoda

Iz izloženog se zaključuje kako su vibracije električnih vodiča dalekovoda veoma kompleksne, sa više uzbudnih mehanizama i popratnih efekata. Ovješena užad, poput one na dalekovodima, može vibrirati u dva različita režima:

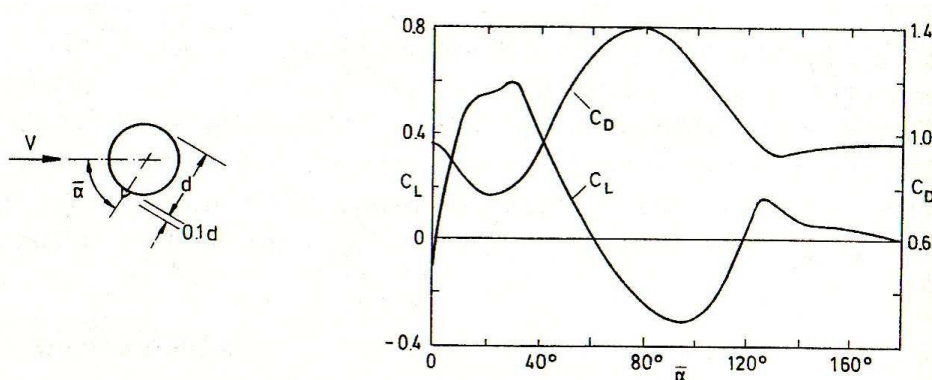
- galopiranje,
- eolske vibracije užadi.

#### 1.3.1. Galopiranje

Galopiranje je rijetka pojava visokoamplitudnih vibracija užeta koja se obično javlja u krajevima s hladnim zimama. Javlja se pri strujanjima kod kojih se razdvojeni smični slojevi fluida iza tijela ne spajaju (barem prilikom mirovanja tijela). Uzbuda je u sustavu uzrokovana gibanjem tijela, a specifično je to što uzbudna sila u sustavu djeluje bez pomaka u odnosu na brzinu (tj. djeluje točno u fazi s brzinom) što rezultira velikim unosom energije u sustav. Općenito, na uzbudnu silu utječu koeficijent aerodinamičkog otpora  $C_D$  i koeficijent aerodinamičkog uzgona  $C_L$  na koje pak utječe geometrija tijela, vrsta strujanja, rubni utjecaji i sl. Istraživanja (Richardson et al (1965.), Novak i Davenport (1978.)) su pokazala da jako male promjene geometrije značajno mijenjaju karakteristike koeficijenata otpora i uzgona (koje se prikazuju u ovisnosti o napadnom kutu strujanja  $\bar{\alpha}$ ). Te promjene u karakteristikama koeficijenata mogu iznenadno dovesti do pojave galopiranja. Kod dalekovoda je promjena geometrije izazvana nakupinama leda na vodičima, a pokazano je da već i sakupljanje vode (kiša) izaziva nestabilnosti (Hikami i Shiraishi (1987.), Matsumoto et al (1988.)).

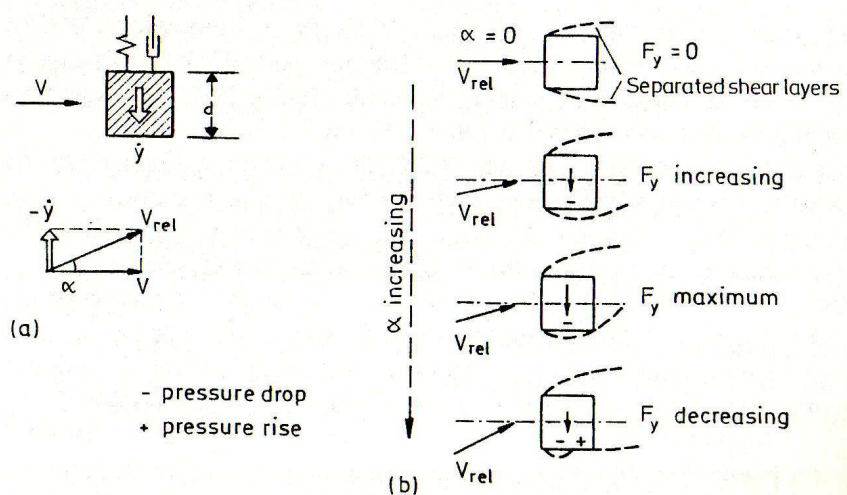
Terenska su snimanja pokazala da je frekvencija galopiranja električnih vodiča između 0,08 i 3 Hz (ovisno o formi, tj. postignutom stojnom valu),

amplitude mogu narasti i do reda veličine 10 metara [1], a sve se odvija pri niskim brzinama vjetra (primjerice 4,5 m/s).



Slika 11. Karakteristika koeficijenata otpora i uzgona o napadnom kutu za užu s nakupinom leda [1]

Na slici 11 je prikazana karakteristika koeficijenata otpora i uzgona u ovisnosti o napadnom kutu strujanja prikazanom na popratnoj skici za užu promjera  $d$  na kojem se stvorila nakupina, primjerice leda, debljine  $0,1 \cdot d$ . Vidljivo je iz dijagrama da koeficijent aerodinamičkog uzgona  $C_L$  ima maksimum pri napadnom kutu od  $\bar{\alpha} \cong 35^\circ$  za kojeg sustav postaje nestabilan upravo zbog visoke vrijednosti uzgona.



Slika 12. Promjena napadnog kuta zbog gibanja tijela [1]



Najveći utjecaj na pojavu galopiranja ima gibanje užeta. Zbog relativnog gibanja užeta u odnosu na struju fluida mijenja se napadni kut fluida na užu. Taj efekt prikazuje slika 12, sa koje je vidljivo kako se povećanjem brzine tijela prema dolje povećava i napadni kut fluida na tijelo.

Danas postoje relativno jednostavne metode kojima je moguće procijeniti podložnost sustava galopiranju. Pojavu je moguće spriječiti promjenom geometrije poprečnog presjeka, no u slučaju dalekovoda to nije financijski isplativo. Izrada Stockbridge prigušivača bi bila krajnje nepraktična pošto bi zahtjevala jako velike mase zbog male frekvencije vibracija. Kad na dalekovodu dođe do pojave galopiranja na raspolaganju stoji nekoliko opcija. Ukoliko su se na vodičima stvorile nakupine leda, moguće je u vodiču povećati struju da se one pokušaju otopiti, no sigurnija je opcija isključenje vodiča i čekanje da pojava iščezne.

### 1.3.2. Eolske vibracije užeta dalekovoda

Mehanizmi uzbude su ranije opisani, a u ovom su poglavlju opisane posebnosti u slučaju vibracija užeta dalekovoda.

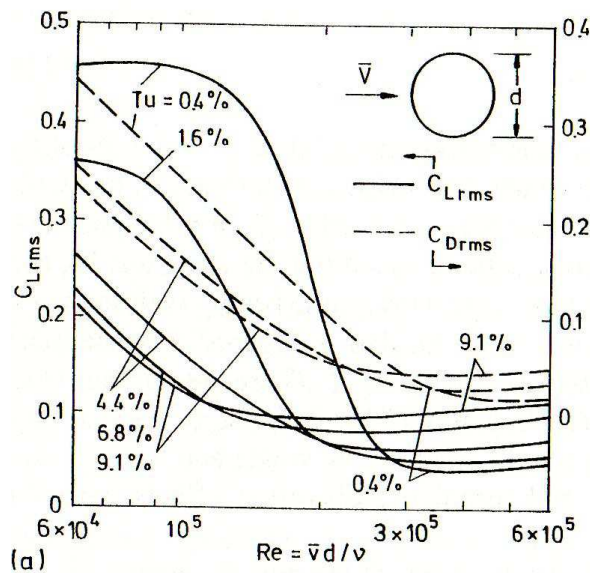
Frekvencije vibracija užeta prilikom eolskih vibracija variraju od 3 do 150 Hz (iznimno 200 Hz), a ovise o brzini vjetra, promjeru užeta, rasponu dalekovoda i sličnim parametrima. Amplitude vibracija su reda veličine od nekoliko milimetara pa do jednog promjera užeta (iznimno  $1,5 \cdot d$ ).

Kod eolskih vibracija dalekovoda su prisutna sva tri mehanizma nastanka uzbude. Uzbuda uslijed vanjskih utjecaja nastaje zbog činjenice da je u struji vjetra uvijek prisutan udio turbulencije. Nastrujavanjem takve struje zraka na užu, zbog različite raspodjele tlakova i brzina u polju vjetra, nastaju različite sile na užu. Pojava se također može objasniti i pomoću koeficijenta aerodinamičkog uzgona. Razina turbulencije koja je prisutna u struji utječe na koeficijent uzgona koji, također, ovisi i o Reynoldsovom broju. Veličina koja opisuje razinu turbulencije se označava s  $Tu$  i dana je izrazom

$$Tu = \frac{v'_{RMS}}{\bar{v}}, \quad (1.5)$$

gdje je  $\bar{v}$  srednja brzina struje fluida, a  $v'_{RMS}$  je srednje kvadratno odstupanje brzine od srednje brzine.

Slika 13 prikazuje dijagram ovisnosti koeficijenata uzgona i otpora za tijelo kružnog poprečnog presjeka u ovisnosti o Reynoldsovom broju za različite razine turbulencije u struji fluida. Iz dijagrama je vidljivo kako porastom razine turbulencije opada koeficijent uzgona, što rezultira manjom uzbudnom silom. To je u skladu s ranijom tvrdnjom da turbulencija u strujanju smanjuje unos energije u sustav. Međutim, zbog nastajanja vrtloga na užetu stvara se nejednoliko polje tlaka i brzine na užetu, što rezultira silama koje djeluju paralelno sa smjerom strujanja. Rezultirajuće će vibracije također biti paralelne sa smjerom struje fluida, no horizontalne se vibracije dalekovoda uglavnom ne razmatraju jer su razmjerno malene u odnosu na vertikalne vibracije.

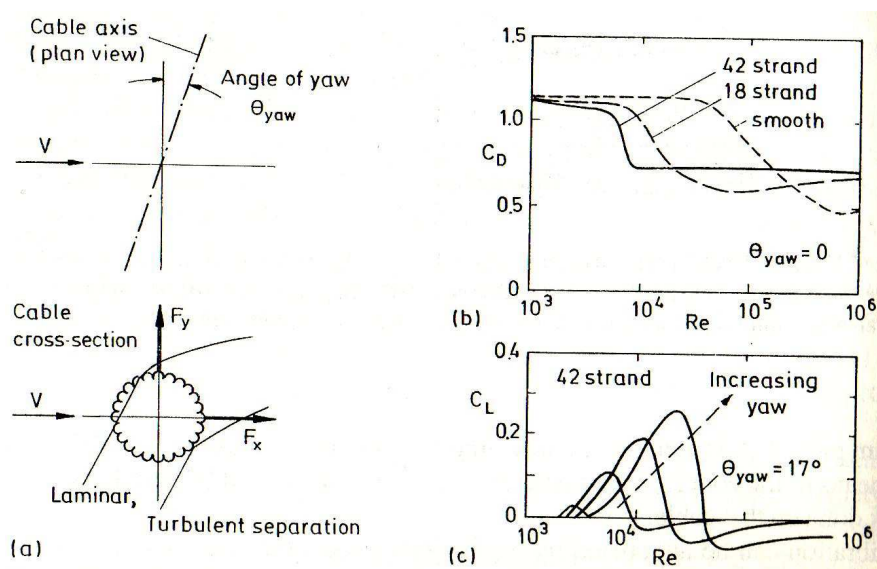


Slika 13. Dijagram ovisnosti koeficijenata uzgona i otpora cilindra u ovisnosti o  $Re$  i  $Tu$  [1]

Kod eolskih vibracija amplitude gibanja užeta su uglavnom malene pa utjecaj gibanja na uzbudu nema značajnijeg utjecaja. Na taj je način problem

moguće pojednostaviti, a analiza eolskih vibracija se svodi na promatranje vibracija uzrokovanih odvajanjem vrtloga s užeta. Upravo je iz tog razloga ranije detaljno razrađen mehanizam nastanka vrtloga i nastanak uzbudne sile uslijed odvajanja vrtloga.

U ranijim razmatranjima u obzir nije uzeto stanje površine tijela. Uže dalekovoda je spiralno, ispleteno od tankih žica. Ta razlika u geometriji utječe samo na činjenicu da uže stvara uzgon i u blizini kritičnog Reynoldsovog broja,  $Re_{CR}$ , koji je definiran kao Reynoldsov broj pri kojem se granični sloj, na strani užeta na koju nastrojava fluid, mijenja iz laminarnog u turbulentni.



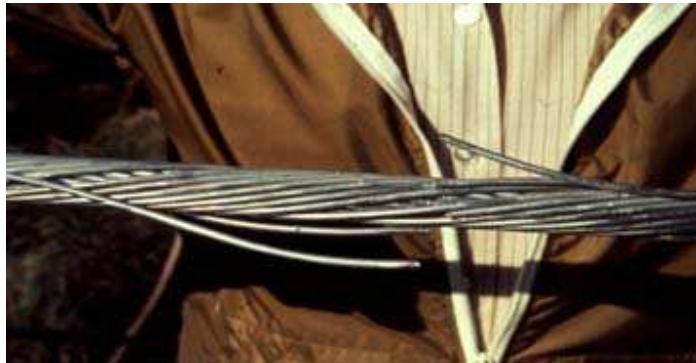
Slika 14. Utjecaj strukture užeta i kuta otklona na uzgon i otpor užeta [1]

Ukoliko struja fluida nije okomita na uzdužnu os užeta, već je otklonjena za kut  $\theta_{yaw}$ , žice s jedne strane će stvarati veći kut sa strujom fluida od onih na drugoj strani. Na strani s većim kutom u odnosu na smjer struje fluida brže će doći do razvoja turbulentnog graničnog sloja. To izaziva asimetriju odvajanja vrtloga i dovodi do većeg koeficijenta uzgona (slika 14). Ova pojava dovodi do vibracija veoma malih frekvencija, ali jako velikih amplituda, slično kao i kod galopiranja, no do toga dolazi veoma rijetko pošto mora biti zadovoljen niz uvjeta vezanih uz vlastite frekvencije sustava i početno gibanje užeta. Dakle, u posebnim slučajevima, geometrija užeta može imati utjecaja na vibracijske

karakteristike, no u općem slučaju to nije potrebno uzimati u obzir. Također, hrapavost užeta nije dovoljno velika da spriječi nastanak i odvajanje von Karmanovih vrtloga.

## 2. Vibracijski sustav užeta dalekovoda s prigušivačem tipa Stockbridge

Potreba proučavanja vibracijskog sustava dalekovoda s prigušivačem leži u tome što tijekom vremena vibracije užeta mogu dovesti do zamora materijala na konstrukcijskim dijelovima dalekovoda. Za smisleno proučavanje problema vibracija dalekovoda mnogi su autori radili na analitičkom pristupu kojim se dobiva odziv sustava na vanjske uzbudne sile. Pritom su u



**Slika 15. Lom užeta dalekovoda uslijed zamora**

odzivu najbitnije amplitude vibracija iz kojih se računaju dinamička naprezanja u kritičnim presjecima. Svoja saznanja iz analitičkih modela istraživači su zatim provjeravali na realnim konstrukcijama u svrhu verifikacije modela i određivanja nepoznatih parametara sustava. Ovaj je pristup i danas uobičajen, a korišten je i prilikom određivanja mehaničke impedancije prigušivača u ovom radu.

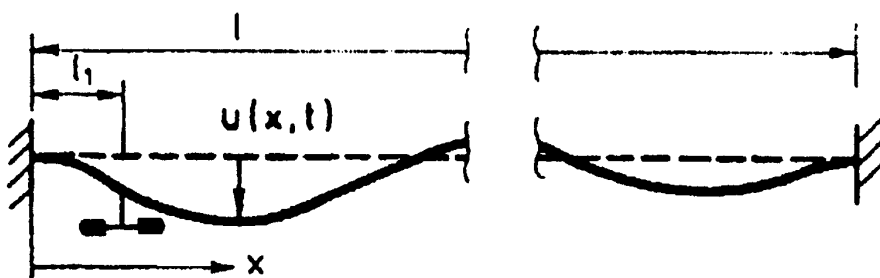
Pri razmatranju vibracijskog sustava dalekovoda se uvode dva pojednostavljena. Ovješeno uže dalekovoda na rasponu između dva stupa, a zbog vlastite težine, poprima oblik lančanice, tj. prisutan je provjes. Prilikom vibracija užeta stvaraju se stojni valovi čije su duljine pri frekvencijama od 5 do 50 Hz svega nekoliko metara, dok se rasponi između dva stupa mjere u stotinama metara. Budući da su provjesi užeta u pravilu maleni u odnosu na duljinu raspona, oni se pri razmatranju vibracija užeta zanemaruju. Druga pretpostavka je već ranije detaljno obrađena, a tiče se zanemarivanja vibracija užeta u horizontalnoj ravnini. Vibracije u vertikalnoj ravnini su dominantne i u tehničkoj se praksi jedino one uzimaju u obzir.

Jedan od uobičajenih pristupa modeliranju užeta dalekovoda je da se ono promatra kao greda savojne krutosti  $EI$  u kojoj djeluje vlačna sila  $T$  velikog

iznosa zbog nategnutih krajeva užeta na stupovima. Diferencijalna jednadžba (2.1) opisuje poprečne vibracije gore opisanog modela

$$E \cdot I \cdot u''''(x,t) - T \cdot u''(x,t) + m_l \cdot \ddot{u}(x,t) = q(x,t) + d(u, \dot{u}, t). \quad (2.1)$$

Navedena jednadžba vrijedi za sve koordinate  $x$ , osim za  $x = l_1$ , tj za koordinatu na kojoj se nalazi pričvršćen prigušivač vibracija (slika 16). Za rješavanje problema vibracija na mjestu učvršćenja prigušivača na užetu moraju se u obzir uzeti sile i momenti kojima prigušivač djeluje na užu. Jednadžba (2.1) je nehomogena i nelinearna parcijalna diferencijalna jednadžba četvrtog reda i njezino je rješavanje mukotrpno ukoliko se ne uvede niz pretpostavki i ograničenja. Kako je problem dinamičke prirode, progib  $u$  je funkcija koordinate  $x$  i vremena  $t$ . Derivacije označene crticama predstavljaju deriviranje po koordinati  $x$ , a točkice označavaju deriviranje po vremenu  $t$ . U jednadžbi je sa  $m_l$  označena masa užeta po jedinici duljine, član  $q(x,t)$  predstavlja uzбудnu silu koja djeluje na užu, dok član  $d(u, \dot{u}, t)$  označava vlastito prigušenje užeta. Da bi se jednadžbu moglo riješiti potrebno je odrediti funkcije na desnoj strani, kao i savojnu krutost užeta.



Slika 16. Model užeta dalekovoda s prigušivačem

Iako na prvi pogled djeluje jednostavno, savojnu krutost užeta je moguće odrediti samo eksperimentalnim pristupom. Izračuni savojne krutosti su nepouzdana [6] zbog kompleksne strukture užeta. Naime, kako se užu sastoji od tanjih žica spiralno pletenih u deblje užu, žice prilikom deformacije užeta mogu

relativno klizati jedna u odnosu na drugu. Štoviše, žice koje se nalaze u dijelu užeta u kojem vlada tlačno naprezanje se mogu i izviti [6], a sve navedeno utječe na svojstva užeta, kako elastična, tako i prigušna. Vrijednost savojne krutosti užeta se kreće između vrijednosti koja bi se dobila kada bi se uzelo da je poprečni presjek kompaktan (u potpunosti ispunjen materijalom, bez mogućnosti relativnog klizanja) i vrijednosti koja bi se dobila kada se moment inercije poprečnog presjeka računa kao zbroj momenata inercija žica koje nisu međusobno povezane.

Često se model pojednostavljuje na način da se zanemaruje savojna krutost užeta, što dovodi do iščezavanja člana s četvrtom derivacijom u jednadžbi (2.1). Ovime se ne uvodi velika greška jer je utjecaj savojne krutosti kod određivanja vlastitih frekvencija užeta i formi vibriranja u razmatranom području frekvencija zanemariv [6]. Korištenjem izraza

$$\omega_n = \frac{n \cdot \pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{T}{m_l}}, \quad (2.2)$$

mogu se izračunati vlastite frekvencije žice duljine  $l$  bez savojne krutosti, učvršćene na oba kraja i zategnute vlačnom silom  $T$ .

Sve vlastite kružne frekvencije su cjelobrojni višekratnici prve vlastite kružne frekvencije. Ukoliko se uže promatra kao žicu bez savojne krutosti, i u obzir se uzme činjenica da je kod tipičnih dalekovoda prva vlastita frekvencija reda veličine 0,1 Hz, pokazuje se da za frekvencijski raspon 5 do 50 Hz odgovara interval od 50. do 500. forme vibriranja. Područje frekvencija od 5 do 50 Hz je najinteresantnije pošto su najučestalije frekvencije eolskih vibracija, koje se javljaju pri slabim do umjerenim vjetrovima, upravo u ovom rasponu. Prilikom rješavanja jednadžbe (2.1) sve navedene forme vibriranja se moraju na odgovarajući način modelirati, a rješavanjem jednadžbe

$$-T \cdot u''(x,t) + m_l \cdot \ddot{u}(x,t) = q(x,t) + d(u, \dot{u}, t), \quad (2.3)$$

dobivaju se rješenja za vertikalne vibracije žice bez savojne krutosti.

Na temelju dobivenih rješenja, i vrijednosti savojne krutosti  $EI$ , mogu se izvesti izrazi za deformacije užeta [11]. Razlike u deformacijama dobivenim gore opisanim pristupom i onih dobivenih egzaktnim rješavanjem jednadžbe (2.1) su vrlo male pa je gornji pristup vrlo često korišten zbog svoje jednostavnosti i preciznosti [11]. Za uobičajenu tehničku praksu je i pristup rješavanjem jednadžbe (2.3) relativno kompliciran. Zato su za tehničke proračune razvijene različite metode. Jedna, često korištena, je metoda ravnoteže snaga (eng. Energy balance method/principle) koja je opisana u sljedećem poglavlju.

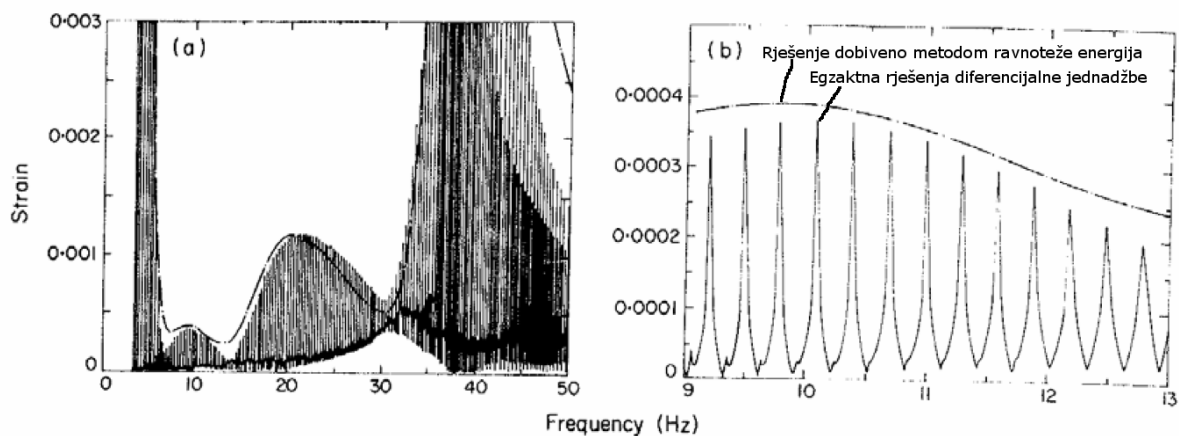


## 2.1. Metoda ravnoteže snaga

Metoda ravnoteže snaga je relativno jednostavna i u tehničkoj praksi primjenjiva metoda koja se temelji na ravnoteži snaga za slučaj stacionarnih vibracija užeta. Jednadžba

$$P_w(A) = P_D(A) + P_C(A), \quad (2.4)$$

daje ravnotežu snaga pri stacionarnim vibracijama užeta za određenu frekvenciju vibracija. Član  $P_w$  označava snagu koju uzbudne sile unose u sustav,  $P_D$  je snaga koju disipira (apsorbira) prigušivač dok je  $P_C$  snaga koju uže disipira uslijed vlastitog prigušenja. Jednadžba (2.4) je nelinearna funkcija amplitude vibracija  $A$  na nekoj određenoj frekvenciji.



Slika 17. Usporedba egzaktnog rješenja i rješenja metode ravnoteže snaga [14]

Sa slike 17 je vidljivo kako rješenja za amplitudu koja daje ova metoda predstavljaju envelopu egzaktnog rješenja diferencijalne jednačbe (2.1). Također je iz egzaktnog rješenja vidljivo kako su vlastite rezonantne frekvencije užeta veoma bliske, što omogućava da se za rješenje uzme envelopa egzaktnog rješenja. U tehničke je svrhe to sasvim dovoljno, pošto se položaj samih rezonancija užeta mijenja s temperaturom koja uzrokuje promjenu zatezne sile i svojstava užeta. Za određivanje frekvencijskog odziva, tj. amplituda vibracija u

ovisnosti o frekvenciji vibracija, odnosno brzini vjetra, potrebno je poznavati funkcije koje opisuju gore navedene snage.

### 2.1.1. Snaga uzbudnih sila

U ranijim razmatranjima je detaljno opisan uzrok uzbude i način stvaranja uzbudne sile. Uzbudna sila izazvana odvajanjem von Karmanovih vrtloga sa cilindričnog tijela se mijenja po harmonijskom zakonu, a matematički se može izraziti jednadžbom

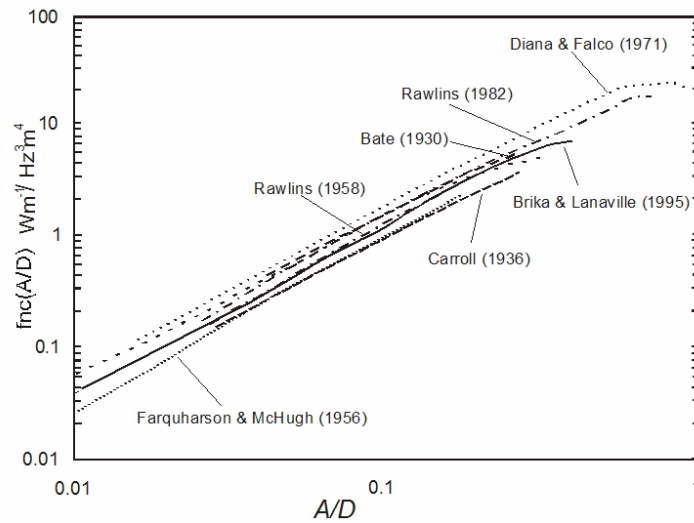
$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot d \cdot l \cdot v^2 \cdot C_L \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t). \quad (2.5)$$

Gornji izraz vrijedi samo kod cilindričnih tijela koja su u stanju mirovanja, što kod užadi dalekovoda nije slučaj. Unatoč tomu, taj se izraz ponekad koristi pri određivanju amplituda eolskih vibracija užadi, no u praksi je najčešći slučaj korištenja eksperimentalno dobivenih rezultata o snazi uzbude. Izraz

$$P_w = l \cdot f^3 \cdot d^4 \cdot fnc\left(\frac{A}{d}\right), \quad (2.6)$$

daje snagu uzbude za eksperimentalno dobivene podatke, gdje je  $f$  frekvencija vibracija užeta, a  $fnc\left(\frac{A}{d}\right)$  se naziva funkcijom reducirane snage (eng. Reduced power function) koja ovisi o omjeru amplitude vibracija i promjera užeta.

Na slici 18 je prikazana funkcija reducirane snage prema različitim autorima, a koja je dobivena eksperimentalnim pristupom.



Slika 18. Funkcija reducirane snage vjetra po različitim autorima [15]

### 2.1.2. Snaga uslijed vlastitog prigušenja užeta

Zbog kompleksne, spiralne, geometrije užeta, prigušenje užeta ovisi o frekvenciji, amplitudi vibracija te sili zatezanja užeta. In-situ mjerenja su pokazala kako amplitude vibracija opadaju s povećanjem frekvencije, kao i sa smanjenjem sile u užetu [6]. Kao i unesena snaga u sustavu, tako se i disipirana snaga u užetu izračunava na temelju eksperimentalnih rezultata. U posljednje se vrijeme snaga vlastitog prigušenja računa preko izraza

$$P_C = l \cdot K \cdot \frac{y_0^p \cdot f^m}{T^n}, \quad (2.7)$$

gdje je  $K$  faktor proporcionalnosti koji karakterizira prigušna svojstva pojedinog tipa užeta, a  $y_0$  je amplituda vibracija. Eksponenti  $p$ ,  $m$  i  $n$  variraju od autora do autora, a određeni su eksperimentalno. Različite vrijednosti eksponentata, uz različitu vrijednost faktora proporcionalnosti prigušnih svojstava užeta, dovode do velikih razlika u procjenjenoj snazi vlastitog prigušenja užeta.

### 2.1.3. Snaga disipirana u prigušivaču tipa Stockbridge

Snaga koju disipira prigušivač montiran na užetu dalekovoda funkcija je karakteristike prigušivača (apsolutne vrijednosti impedancije  $Z$  i faznog kuta impedancije tj. kuta između brzine i sile koja djeluje na stezaljku prigušivača  $\alpha$ ), karakteristike užeta (vlačne sile u užetu  $T$ , mase užeta po jedinici duljine  $m_l$ ), udaljenosti prigušivača od nosne stezaljke  $l_1$ , te amplitude vibracija užeta  $A$  i frekvencije vibracija  $f$ . Izraz (2.8) pomoću kojeg se određuje snaga koja se disipira u prigušivaču preuzet je iz [9]

$$P_D = \frac{1}{4} \cdot T \cdot c_w \cdot k^2 \cdot \frac{1 - (h^2 - g^2)}{1 + h^2 + g^2} \cdot d^2 \cdot \left(\frac{A}{d}\right)^2, \quad (2.8)$$

gdje je

$$h = -\frac{\sin^2(k \cdot l_1) \cdot (\sin(2 \cdot k \cdot l_1) + 2 \cdot \gamma \cdot \sin(\alpha))}{\sin^2(k \cdot l_1) + \gamma^2 + 2 \cdot \gamma \cdot \sin(k \cdot l_1) \cdot \sin(k \cdot l_1 + \alpha)},$$

$$g = \frac{\sin^2(k \cdot l_1) \cdot \cos(2 \cdot k \cdot l_1) + \gamma^2 + \gamma \cdot \sin(2 \cdot k \cdot l_1) \cdot \sin(\alpha)}{\sin^2(k \cdot l_1) + \gamma^2 + 2 \cdot \gamma \cdot \sin(k \cdot l_1) \cdot \sin(k \cdot l_1 + \alpha)},$$

$k = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \sqrt{m_l/T}$  je broj vala,  $c_w$  je brzina širenja vala, a  $\gamma = T/(Z \cdot \cos(k \cdot l_1))$ .

Svakako treba naglasiti da snaga koju disipira prigušivač montiran na užetu dalekovoda ne odgovara snazi koju disipira prigušivač montiran na vibrator (poglavlje 3.6.1.).

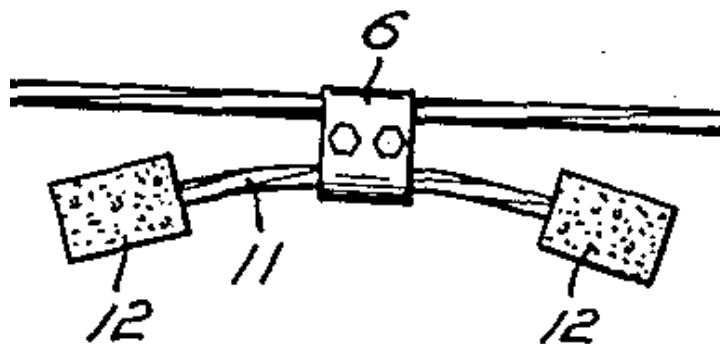
U nastavku rada je analitički izvedena karakteristika prigušivača, a zatim slijedi eksperimentalno određivanje parametara i usporedba analitičkog modela sa ispitnim prigušivačem pojednostavljene konstrukcije.

### 3. Matematički model prigušivača tipa Stockbridge

Prigušivači vibracija tipa Stockbridge, koji se koriste za prigušenje eolskih vibracija užeta dalekovoda, kao i za prigušenje vibracija ostale užadi na konstrukcijama, je danas jedna od najraširenijih vrsta prigušivača. Svoju raširenost u praktičnoj primjeni, ova vrsta prigušivača, uvelike duguje jednostavnoj konstrukciji i dobroj karakteristici. Upravo se i zbog raširenosti primjene veliki naponi ulažu u matematičko modeliranje ovog vibracijskog sustava kako bi se karakteristika mogla optimirati i ponašanje prigušivača u radnim uvjetima učinkovito predvidjeti. Dakako, jedan od bitnijih faktora je i proizvodni postupak, tj. financijski faktor. Uz pomoć matematičkog modela moguće je pristupiti i materijalnoj optimizaciji prigušivača, što bi rezultiralo jeftinijom, ali učinkovitom izvedbom.

#### 3.1. Opis prigušivača

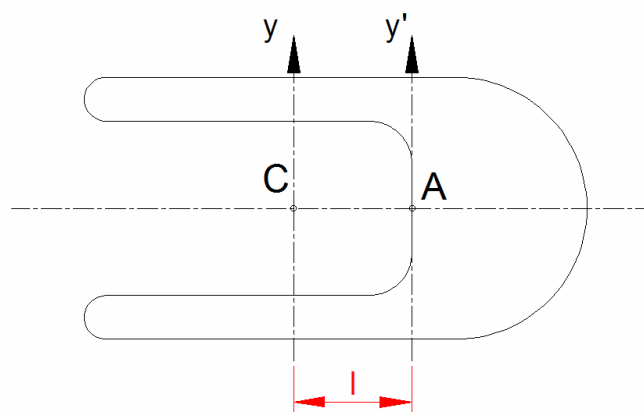
Kao što je već spomenuto, konstrukcija Stockbridge prigušivača je vrlo jednostavna.



Slika 19. Skica Stockbridge prigušivača iz patenta [7]

Slika 19 prikazuje Stockbridge prigušivač u verziji za koju je, 3. srpnja 1928. godine, George H. Stockbridge dobio patent. Prigušivač se sastoji od stezaljke (6) kojom se prigušivač steže na užu dalekovoda. Na stezaljci se nalazi uklješteno uže (11) koje vibracije dalekovoda prenosi do inercijskih elemenata, utega (12), koji su uklješteni na drugoj strani užeta. U stranoj se literaturi to uže naziva i glasničko uže (eng. Messenger cable), pošto ono prenosi uzбудu do inercijskih elemenata. U originalnoj izvedbi je Stockbridge, koji je promatrao utjecaj ovješene mase na vibracije užeta dalekovoda, za utege koristio betonske blokove [7]. Tijekom godina prigušivač je usavršen, no nije bilo nikakvih suštinskih promjena. Najveću je promjenu doživjela geometrija utega, kao i materijali od kojih se prigušivač izrađuje.

Kako je uteg nositelj inercijskih svojstava prigušivača, najbitniji su parametri njegova masa i moment tromosti oko referentne osi. Poznato je kako moment tromosti ovisi o geometriji tijela (tj. raspodjeli mase), pa se različitim konstrukcijskim izvedbama utega mogu dobiti utezi različitih parametara, te se na taj način može podešavati karakteristika prigušivača. U modernim konstrukcijama prigušivača utezi su najčešće zvonolikog oblika, izrađeni od različitih metalnih legura koje su otporne na atmosferske utjecaje.



Slika 20. Utteg prigušivača

Na slici 20 je u tlocrtu prikazan jedan oblik utega. Glasničko je uže na uteg uklješteno u točki A, a točka C označava težište utega. Prorezi u vertikalnoj ravnini dopuštaju veću slobodu gibanja utega u odnosu na užu, pošto pri velikim

pomacima ono može izlaziti izvan granica utega. Referentni moment tromosti utega je onaj oko osi  $y$ , koja prolazi kroz težište, a u proračunima se često koristi moment tromosti oko osi  $y'$ . Jednom kad je poznat moment tromosti oko jedne od osi, lako se pomoću primjene Steinerovog pravila odredi moment tromosti oko bilo koje druge osi. Od utjecaja je i udaljenost između točke uklještenja (A) i težišta utega (C) koja ulazi u matematički model kao jedan od parametara.

Elastična i prigušna svojstva su određena užetom koje povezuje utege sa stezaljkom. Prilikom vibriranja uža se savija i u njemu se javljaju elastične restorativne sile koje sustav nastoje vratiti u prvobitni (ravnotežni) položaj. Nadalje, uža predstavlja i disipator energije, što zbog samog histereznog prigušenja užeta, što zbog trenja koje se javlja između žica (iz kojih je uža pleteno) tijekom deformiranja. lako se može činiti da bi jednostavnije bilo korištenje nekog drugog elementa za povezivanje utega i stezaljke, što bi omogućavalo i izvođenje preciznijeg matematičkog modela, pleteno se uža koristi upravo zbog dobrih prigušnih svojstava koja poboljšavaju karakteristiku prigušivača.

Na svojstva, tj. karakteristiku prigušivača se može, osim parametrima utega, utjecati i parametrima užeta. Za danu vrstu i promjer užeta na krutost se može utjecati promjenom duljine. Iz Nauke o čvrstoći je poznato da krutost konzole (uže je na jednom kraju uklješteno, a na drugom slobodno što se modelira konzolom) ovisi o duljini konzole. Na prigušenje se ne može utjecati na jednostavan način. Ono ovisi o vrsti užeta i promjeru, no teško je odrediti ukupan utjecaj parametara na stupanj prigušenja užeta. U konačnici se na karakteristiku prigušivača, za određenu vrstu i promjer užeta, utječe sa tri parametra: masa utega, moment tromosti utega (geometrija utega) i duljina užeta.

U praksi se razlikuju dvije vrste Stockbridge prigušivača: simetrični i asimetrični. Ta se podjela temelji na razlici u gore navedenim parametrima za dvije strane prigušivača: lijevu i desnu. Pretpostavka koja se ovdje uvodi je da gibanje jednog kraja prigušivača ne utječe na gibanje drugog kraja prigušivača, a zajednička im je samo uzbuda. Svaki kraj prigušivača utječe na mehaničku impedanciju koja se mjeri na stezaljci.

Kod simetričnog su prigušivača parametri s jedne strane jednaki parametrima s druge strane. Kako je kasnije pokazano, takav prigušivač ima samo dvije rezonancije. U općem slučaju, svaki kraj prigušivača ima po dvije rezonancije jer posjeduje dva stupnja slobode gibanja. Na taj način kompletan prigušivač posjeduje četiri stupnja slobode, dakle četiri vlastite rezonantne frekvencije. Kod simetričnog prigušivača se po dvije odgovarajuće rezonancije poklapaju pa se u karakteristici efektivno očitavaju dvije rezonancije. Jedna je rezonancija uslijed vertikalne translacije utega, dok je druga posljedica rotacije utega, a detalji su obrađeni u nastavku.

Nesimetričnom su prigušivaču parametri na krajevima različiti, što rezultira sa četiri rezonancije u konačnoj karakteristici. Upravo se zbog te činjenice u praksi najviše (ili gotovo uvijek) koriste asimetrični prigušivači. Njihova je osnovna prednost pred simetričnima da bolje prigušuju vibracije u širem frekvencijskom rasponu. To je posljedica činjenice da prigušivač najviše energije disipira u rezonanciji i da disipacija energije raste s približavanjem rezonantnoj frekvenciji. Kako asimetrični prigušivač ima četiri rezonancije to znači da se u većem rasponu frekvencija još uvijek nalazi u blizini rezonancije što daje veću disipaciju energije i bolju učinkovitost.

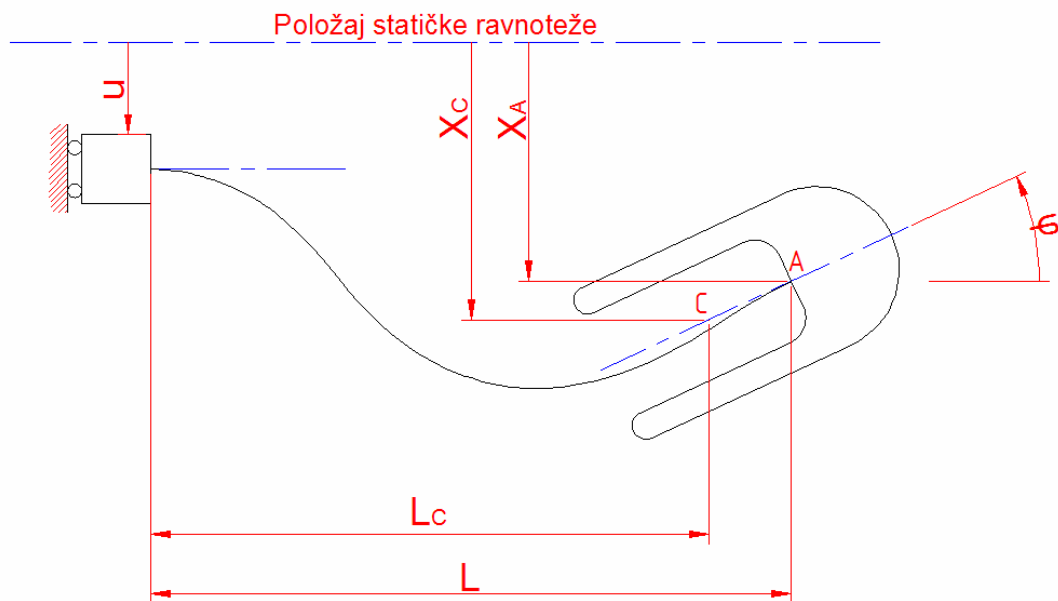
Osnovni zahtjev na prigušivače vibracija na dalekovodima je da učinkovito prigušuju vibracije (disipiraju energiju, smanjuju amplitude) u spektru frekvencija u kojima se javljaju eolske vibracije. Izvan frekvencijskog područja eolskih vibracija, za koje su optimirani, prigušivači više nisu efikasni. Jedan primjer gdje prigušivači tipa Stockbridge nisu od koristi jest ranije opisana pojava galopiranja vodiča.



### 3.2. Diferencijalna jednačba gibanja prigušivača

Diferencijalna jednačba gibanja izvedena je razmatranjem jedne polovice Stockbridge prigušivača, pošto se iz modela polovice prigušivača u daljnjoj analizi jednostavno može izvesti kako model simetričnog, tako i model asimetričnog Stockbridge prigušivača.

#### 3.2.1. Model prigušivača bez prigušenja



Slika 21. Skica polovice prigušivača u gibanju

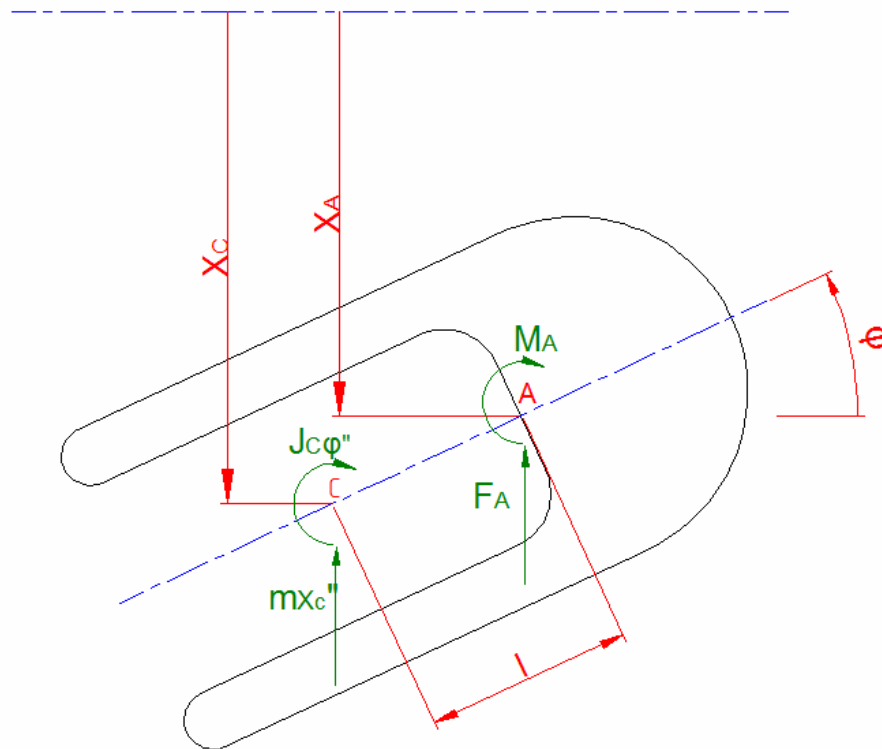
Slika 21 prikazuje polovicu Stockbridge prigušivača u gibanju. Koordinate  $x_C$ ,  $x_A$  i  $u$  su apsolutne koordinate, tj. odnose se na globalni inercijski koordinatni sustav, a koordinata  $\varphi$  predstavlja kut zakreta utega od horizontale.

Pomoću slike 20 se mogu izvesti geometrijski odnosi koji povezuju pomake točke A s pomacima težišta C.

$$x_A = x_C - l \cdot \varphi / \frac{d^2}{dt^2}, \quad (3.1)$$

$$\ddot{x}_A = \ddot{x}_C - l \cdot \ddot{\varphi}.$$

Na slici 22 su prikazane sile koje djeluju na uteg prilikom gibanja. Pritom je s  $M_A$  označen moment kojim deformirano uže djeluje na uteg u točki uklještenja A, dok je sa  $F_A$  označena sila kojom deformirano uže djeluje u točki A na uteg. Derivacija po vremenu je označena crticama. Obje sile su restorativne i rezultat su deformiranja užeta, tj. elastičnih svojstava užeta o kojima i ovisi njihov iznos.



Slika 22. Sile na uteg u gibanju

Postavljanjem uvjeta dinamičke ravnoteže, tj. izjednačavanjem sume sila u smjeru vertikalne osi i sume momenata oko težišta utega C dobiju se izrazi (3.2) do (3.4)

$$m \cdot \ddot{x}_C + F_A = 0. \quad (3.2)$$

Uvrštenjem izraza (3.1) u izraz (3.2) dobije se

$$m \cdot \ddot{x}_A + m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + F_A = 0. \quad (3.3)$$

Iz sume momenata dobije se izraz

$$J_C \cdot \ddot{\varphi} + M_A - F_A \cdot l = 0. \quad (3.4)$$

Prema Steinerovom pravilu, moment tromosti oko osi  $y'$  koja prolazi kroz točku A iznosi

$$J_A = J_C + m \cdot l^2. \quad (3.5)$$

Uvrštenjem izraza (3.5) u uvjet dinamičke ravnoteže (3.4) dobije se

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + M_A - F_A \cdot l = 0. \quad (3.6)$$

Nadalje, iz jednadžbe (3.3) je moguće izraziti čemu je jednaka restorativna sila

$$F_A = -m \cdot \ddot{x}_A - m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}. \quad (3.7)$$

Uvrštenje (3.7) u (3.6) daje

$$J_A \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot l \cdot \ddot{x}_A + M_A = 0. \quad (3.8)$$

Matrično zapisane, jednadžbe (3.3) i (3.8) glase

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot l \\ m \cdot l & J_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Matrična jednačba (3.9) predstavlja jednačbu gibanja polovice Stockbridge prigušivača. Ovdje prigušenje nije uzeto u obzir, već će u model biti uvršteno kasnije kada bude obrađen model prigušenja. Sada je potrebno definirati restorativne sile  $F_A$  i  $M_A$  koji djeluju na uteg uslijed deformacije užeta. Ukoliko uže promatramo kao gredu uklještenu na jednom kraju, pomake na drugom kraju je moguće odrediti pomoću uplivnih koeficijenata. Analogno tomu, mogu se odrediti i sile koje moraju djelovati na slobodnom kraju užeta da bi se ono deformiralo. Na taj se način uvode utjecajni koeficijenti  $c_{ij}$  koji su definirani kao iznos poopćene sile koja djeluje na mjestu  $i$  uslijed jediničnog pomaka na mjestu  $j$  za slučaj kad su pomaci svih ostalih mjesta jednaki nuli. U promatranom slučaju indeksi utjecajnih koeficijenata mogu poprimiti vrijednosti  $x_A$  ili  $\varphi$ . Sila  $F_A$  se izračunava pomoću izraza (3.10), a moment  $M_A$  pomoću izraza (3.11)

$$F_A = c_{x_A \varphi} \cdot \varphi + c_{x_A x_A} \cdot (x_A - u), \quad (3.10)$$

$$M_A = c_{\varphi \varphi} \cdot \varphi + c_{\varphi x_A} \cdot (x_A - u), \quad (3.11)$$

što se matrično može zapisati izrazom

$$\begin{bmatrix} F_A \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} & c_{x_A \varphi} \\ c_{\varphi x_A} & c_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A - u \\ \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Uvrštenjem izraza za izračun restorativnih sila u jednačbu gibanja (3.9) dobije se jednačba gibanja sustava za slobodne neprigušene vibracije

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot l \\ m \cdot l & J_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} & c_{x_A \varphi} \\ c_{\varphi x_A} & c_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A - u \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Uočava se kako su jednadžbe gibanja spregnute i po inercijskim i po restorativnim silama. Daljnjim se sređivanjem, nakon što se elementi matricno izmnože i uzbuda  $u$  prebaci na desnu stranu, dobiju izrazi

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_A + m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + c_{x_A x_A} \cdot x_A + c_{x_A \varphi} \cdot \varphi &= c_{x_A x_A} \cdot u, \\ m \cdot l \cdot \ddot{x}_A + J_A \cdot \ddot{\varphi} + c_{\varphi x_A} \cdot x_A + c_{\varphi \varphi} \cdot \varphi &= c_{\varphi x_A} \cdot u, \end{aligned}$$

što se matricno može zapisati

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot l \\ m \cdot l & J_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} & c_{x_A \varphi} \\ c_{\varphi x_A} & c_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \\ c_{\varphi x_A} \end{bmatrix} \cdot u. \quad (3.14)$$

Iz jednadžbe gibanja (3.14) vidi se kako uzbudu  $u$  sustavu predstavlja pomak stezaljke prigušivača. Dakako, uz sam pomak stezaljke koji predstavlja pomak užeta dalekovoda na mjestu pričvršćenja prigušivača, prisutna je i rotacija stezaljke. Kod nesimetričnog je prigušivača prisutan i moment savijanja na stezaljci zbog različitih sila koje djeluju na lijevoj i desnoj strani prigušivača. Navedeni se utjecaji mogu zanemariti, a u slučaj simetričnog prigušivača se momenti na lijevoj i desnoj strani međusobno ponište.

Jednadžba gibanja opisuje model prigušivača (polovicu prigušivača) bez prigušenja. Dakako, prigušenje ima značajan utjecaj i od velike je važnosti u modelu, pa ga je potrebno uzeti u obzir.

### 3.2.2. Krutost čeličnog užeta

Krutost konzole  $c$  ovisi o njoj duljini, svojstvima poprečnog presjeka i materijalu. Najjednostavniji način za određivanje krutosti je pomoću statičkog pokusa određivanja krutosti konzole, međutim, postoje i druge metode kojima se može odrediti krutost. U poglavlju 4. je krutost određena iz eksperimentalno snimljenih petlji histereze.

Iz ranije određene krutosti konzole, prema pravilima iz Nauke o čvrstoći, izračunavaju se utjecajni koeficijenti. Utjecajni koeficijenti se određuju tako da se zamisli da sva referentna mjesta, osim promatranog, ostaju u svom prvobitnom položaju, a mjesto na koje se koeficijent odnosi ima jediničan pomak za slučaj kad je pomak ostalih mjesta jednak nuli. Na taj se način umnoškom pomaka i utjecajnog koeficijenta dobiva iznos sile (momenta) koja ga izaziva.

Fizikalno značenje utjecajnih koeficijenata koji se ovdje koriste je sljedeće:

$c_{x_A x_A}$  - sila na mjestu A koja uzrokuje jediničan pomak  $x_A = 1$ , uz  $\varphi = 0$ ,

$c_{x_A \varphi}$  - sila na mjestu A koja uzrokuje jediničan pomak  $\varphi = 1$ , uz  $x_A = 0$ ,

$c_{\varphi x_A}$  - moment na mjestu  $\varphi$  koji uzrokuje jediničan pomak  $x_A = 1$ , uz  $\varphi = 0$ ,

$c_{\varphi \varphi}$  - moment na mjestu  $\varphi$  koji uzrokuje jediničan pomak  $\varphi = 1$ , uz  $x_A = 0$ .

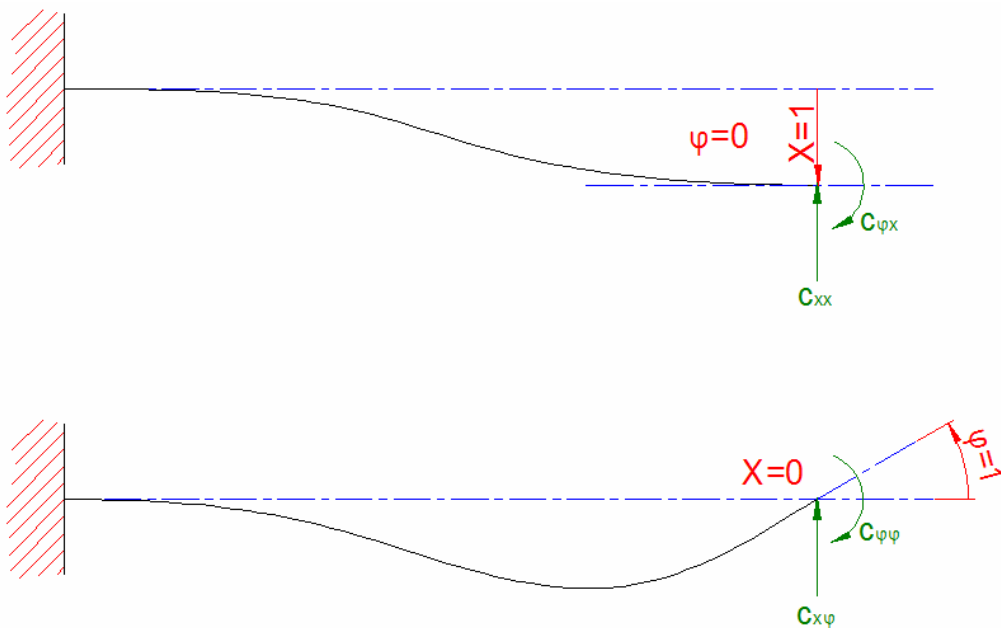
Slika 23 prikazuje utjecajne koeficijente i slučajeve za koje oni vrijede. Na slici je jedinični pomak  $x_A = 1$  označen s  $x = 1$ .

Metodama iz Nauke o čvrstoći se pokazuje da između krutosti konzole i pojedinih utjecajnih koeficijenata postoji poveznica

$$\begin{aligned}
 c_{x_A x_A} &= 4 \cdot c, \\
 c_{x_A \varphi} &= c_{\varphi x_A} = 2 \cdot c \cdot L, \\
 c_{\varphi \varphi} &= \frac{4 \cdot c \cdot L^2}{3},
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

pri čemu je krutost konzole jednaka

$$c = \frac{3 \cdot E \cdot I_y}{L^3}.$$



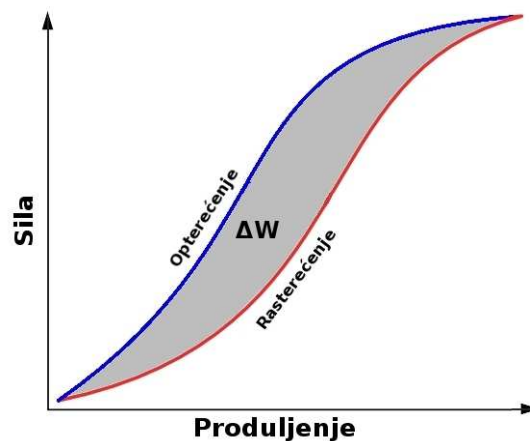
Slika 23. Utjecajni koeficijenti

Iako su gornji izrazi izvedeni za homogenu gredu, laboratorijska su istraživanja pokazala kako oni vrijede i za čelično užje [10].

### 3.2.3. Prigušenje u čeličnom užetu

Čelično je uže sastavljeno od više čeličnih žica pletenih u spiralno uže. Ranije je već spomenuto kako se prilikom deformiranja užeta svaka žica deformira na drugačiji način što dovodi do klizanja jedne žice po drugoj i pojavi trenja među njima. Sile trenja također disipiraju energiju, kao i unutrašnje trenje u samom materijalu žica. Model prigušenja koji dobro opisuje ovaj način disipacije energije je model histereznog (strukturnog) prigušenja kod kojeg je sila prigušenja proporcionalna pomaku, a u protufazi je s brzinom. Trenje među žicama u ovaj model uvodi nelinearnosti i teškoće prilikom određivanja koeficijenta histereznog prigušenja, no to je detaljnije razrađeno u poglavlju 4.1. gdje se govori o određivanju koeficijenta prigušenja.

Histerežno prigušenje je rezultat pojave da se prilikom opterećenja i rasterećenja konstrukcije, u dijagramu  $\sigma - \varepsilon$  (ili  $F - x$  dijagramu) ne putuje po istoj krivulji, već se formira tzv. petlja histereze (slika 24).



Slika 24. Petlja histereze

Površina koju zatvara petlja histereze u dijagramu sila-produljenje ( $F - x$ ) jednaka je disipiranoj energiji u jednom periodu vibracija. Na temelju snimljenih petlji histereze se određuje prigušenje čeličnog užeta, a postupak snimanja i obrade podataka detaljno je obrađen u poglavlju 4.1.



Sila prigušenja je proporcionalna pomaku, a u protufazi je s brzinom što se matematički u kompleksnom području može zapisati izrazom

$$\underline{F}_{P,H} = h \cdot \underline{x}(t) \cdot i,$$

gdje je  $h$  histerezna konstanta prigušenja, a  $i$  je imaginarna jedinica s kojom je izraz pomnožen kako bi se ukazalo na činjenicu da je sila u protufazi s brzinom. Ako se pomak opisuje s jednadžbom u realnom području

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\Omega \cdot t),$$

tada se sila prigušenja opisuje jednadžbom

$$F_{P,H}(t) = h \cdot \hat{x} \cdot \sin(\Omega \cdot t),$$

jer će tako biti u protufazi s brzinom. Diferencijal rada sile prigušenja se dobije umnoškom sile i diferencijala pomaka

$$\begin{aligned} dW_H &= F_{P,H} \cdot dx, \\ dx &= -\hat{x} \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot dt. \end{aligned}$$

Rad sile prigušenja u jednom periodu vibracija se tada računa pomoću integrala

$$\Delta W_H = \int_0^T dW_H = \int_0^T F_{P,H} \cdot dx = -\int_0^T h \cdot \hat{x}^2 \cdot \Omega \cdot \sin^2(\Omega \cdot t) dt, \quad (3.16)$$

gdje je  $T$  period vibracija koji se računa iz frekvencije vibracija  $\Omega$  prema izrazu

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega}.$$

Rješavanje integrala (3.16) u navedenim granicama integracije daje izraz za disipiranu energiju u jednom periodu vibracija

$$\Delta W_H = -\pi \cdot h \cdot \hat{x}^2. \quad (3.17)$$

Negativan predznak u izrazu (3.17) govori kako se radi o disipiranoj snazi. U matematičkom je modelu uveden model viskoznog prigušenja, stoga je potrebno odrediti poveznicu između viskoznog i histereznog prigušenja, tj. povezati histereznu konstantu prigušenja  $h$  s konstantom viskoznog prigušenja  $k$ .

Rad sile prigušenja za slučaj viskoznog modela prigušenja se izvodi za isti oblik harmonijskog gibanja kao i pri izvodu rada za histerezno prigušenje. Prigušna sila viskoznog prigušenja je ovisna o brzini i s njom je u protufazi što se matematički može prikazati izrazom

$$F_{P,K}(t) = -k \cdot \dot{x}(t) = k \cdot \hat{x} \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t).$$

Na analogan način kao i u prethodnoj analizi dobije se za isti period vibracija izraz za izračun rada sile viskoznog prigušenja

$$\Delta W_K = \int_0^T dW_K = \int_0^T F_{P,K} \cdot dx = -\int_0^T k \cdot \hat{x}^2 \cdot \Omega^2 \cdot \sin^2(\Omega \cdot t) \cdot dt. \quad (3.18)$$

Rješavanjem gornjeg integrala dobije se izraz (3.19) za disipiranu energiju viskoznog prigušenja u jednom periodu vibracija

$$\Delta W_K = -\pi \cdot k \cdot \hat{x}^2 \cdot \Omega. \quad (3.19)$$

Cilj je histerezno prigušenje prikazati preko viskoznog, a to je moguće učiniti tako da se izjednače radovi sila prigušenja oba modela u jednom periodu

vibracija. Tako se izjednačavanjem izraza (3.17) i (3.19) dobije poveznica između histerezne konstante prigušenja i konstante viskoznog prigušenja

$$\Delta W_H = \Delta W_K, \quad (3.20)$$

$$k = \frac{h}{\Omega}. \quad (3.21)$$

Vidi se da se ove dvije konstante prigušenja razlikuju samo u faktoru  $\frac{1}{\Omega}$  i to iz razloga što je histerezno prigušenje ovisno o iznosu pomaka, a viskozno o iznosu brzine. Frekvencija  $\Omega$  povezuje amplitudu brzine vibracija sa amplitudom vibracija na način da je amplituda brzine vibracija jednaka umnošku amplitude pomaka i frekvencije vibracija.

### 3.2.3.1. Odnos između krutosti i prigušenja

Uočeno je da prigušne sile djeluju na sličan način kao i restorativne sile [10, 11]. Kako je prigušenje histerezno tj. ovisi o pomacima, vrijede izrazi (3.22) za utjecajne koeficijente histereznog prigušenja

$$\begin{aligned} h_{x_A x_A} &= 4 \cdot h, \\ h_{x_A \varphi} &= h_{\varphi x_A} = 2 \cdot h \cdot L, \\ h_{\varphi \varphi} &= \frac{4 \cdot h \cdot L^2}{3}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Usporedbom izraza (3.15) i (3.22), tj. dijeljenjem izraza za utjecajne koeficijente histereznog prigušenja i izraza za utjecajne koeficijente krutosti dobije se

$$\frac{h_{x_A x_A}}{c_{x_A x_A}} = \frac{h_{x_A \varphi}}{c_{x_A \varphi}} = \frac{h_{\varphi x_A}}{c_{\varphi x_A}} = \frac{h_{\varphi \varphi}}{c_{\varphi \varphi}} = \frac{h}{c} = \mu. \quad (3.23)$$

Novouvedeni faktor  $\mu$  se naziva bezdimenzijskom mjerom prigušenja, a kombinacijom izraza (3.21) i (3.23) dobije se izraz (3.24) za koeficijente histereznog prigušenja čeličnog užeta

$$k_{ij} = \frac{c_{ij} \cdot \mu}{\Omega}. \quad (3.24)$$

### 3.2.4. Model prigušivača s prigušenjem

Prigušenje u sustavu je prisutno kako pri linearnom vertikalnom pomaku utega, tako i pri rotaciji utega. Diferencijalna jednadžba gibanja je izvedena za slučaj viskoznog prigušenja, a zatim je prilagođena za slučaj histereznog prigušenja koje najbolje opisuje prirodu prigušenja u čeličnom užetu prigušivača [10, 11]. Utjecaj viskoznog prigušenja se u matematičkom modelu uzima u obzir preko utjecajnih koeficijenata  $k_{ij}$ , koji su definirani kao sila na mjestu  $i$  uslijed jedinične brzine na mjestu  $j$  za slučaj kada su sva ostala mjesta, osim mjesta  $j$ , nepomična.

Kako je prisutna i translacija i rotacija utega prigušenje će se manifestirati sa silom i momentom prigušenja. Iznosi prigušnih sila ovise o brzini i prigušnim karakteristikama užeta. Pošto je  $x_A$  apsolutna koordinata potrebno je, kao i kod izračuna elastičnih sila, odrediti relativnu brzinu između stezaljke i utega prigušivača koja je jednaka  $(\dot{x}_A - \dot{u})$ . Prigušna sila i moment su

$$F_{PA} = k_{x_A x_A} \cdot (\dot{x}_A - \dot{u}) + k_{x_A \varphi} \cdot \dot{\varphi},$$

$$M_{PA} = k_{\varphi x_A} \cdot (\dot{x}_A - \dot{u}) + k_{\varphi \varphi} \cdot \dot{\varphi},$$

što se matricno može zapisati jednačbom

$$\begin{bmatrix} F_{PA} \\ M_{PA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x_A x_A} & k_{x_A \varphi} \\ k_{\varphi x_A} & k_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_A - \dot{u} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Uvrštenjem izraza za prigušne sile (3.25) u jednačbu gibanja neprigušenog sustava (3.14) na način da se desna strana jednačbe (3.25) pridoda lijevoj strani jednačbe (3.14), dobije se jednačba gibanja polovice Stockbridge prigušivača za slučaj prigušenih prisilnih vibracija (viskozno prigušenje)

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot l \\ m \cdot l & J_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x_A x_A} & k_{x_A \varphi} \\ k_{\varphi x_A} & k_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_A - \dot{u} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} & c_{x_A \varphi} \\ c_{\varphi x_A} & c_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \\ c_{\varphi x_A} \end{bmatrix} \cdot u.$$

Sređivanjem gornjeg izraza, tj. prebacivanjem uzbude na desnu stranu jednakosti dobiva se konačan oblik jednačbe gibanja

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot l \\ m \cdot l & J_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x_A x_A} & k_{x_A \varphi} \\ k_{\varphi x_A} & k_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} & c_{x_A \varphi} \\ c_{\varphi x_A} & c_{\varphi \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x_A x_A} \\ k_{\varphi x_A} \end{bmatrix} \cdot \dot{u} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \\ c_{\varphi x_A} \end{bmatrix} \cdot u. \quad (3.26)$$

Iz jednačbe gibanja (3.26) vidi se da je uzbuda kinematička, pomakom elastičnog i prigušnog elementa, što i odgovara stvarnosti pošto se vibracije sa užeta dalekovoda prenose putem stezaljke i užeta (nositelj prigušnih i elastičnih svojstava) do utega prigušivača.

### 3.3. Rješenje diferencijalne jednačbe gibanja, vlastite kružne frekvencije, glavne forme vibriranja

Pretpostavlja se da stezaljka prigušivača vrši samo vertikalno harmonijsko gibanje, koje se u kompleksnom matematičkom području može zapisati izrazom

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{i\Omega t}, \quad (3.27)$$

gdje je  $\hat{u}$  amplituda vibracija stezaljke, a  $\Omega$  je kružna frekvencija vibracija. Deriviranjem po vremenu dobije se kompleksna brzina

$$\underline{\dot{u}}(t) = i \cdot \hat{u} \cdot \Omega \cdot e^{i\Omega t} = \hat{\underline{u}} \cdot e^{i\Omega t}, \quad (3.28)$$

gdje je  $\hat{\underline{u}}$  kompleksna amplituda brzine vibracija stezaljke. Kako je uzbuda u sustavu prigušivača harmonijska, može se pretpostaviti i harmonijski odziv vibracijskog sustava. U stvarnosti ova pretpostavka nije u cijelosti zadovoljena zbog prisutnih nelinearnosti u sustavu. Izvor nelinearnosti leži u prigušnim i elastičnim svojstvima čeličnog užeta. Odziv sustava (pretpostavka rješenja) zapisan u kompleksnom obliku, kao i njegova prva i druga derivacija po vremenu, zapisane su izrazima

$$\begin{aligned} \underline{x}_A(t) &= \hat{\underline{x}}_A \cdot e^{i\Omega t}, & \underline{\varphi}(t) &= \hat{\underline{\varphi}} \cdot e^{i\Omega t}, \\ \underline{\dot{x}}_A(t) &= i \cdot \hat{\underline{x}}_A \cdot \Omega \cdot e^{i\Omega t}, & \underline{\dot{\varphi}}(t) &= i \cdot \hat{\underline{\varphi}} \cdot \Omega \cdot e^{i\Omega t}, \\ \underline{\ddot{x}}_A(t) &= -\hat{\underline{x}}_A \cdot \Omega^2 \cdot e^{i\Omega t}, & \underline{\ddot{\varphi}}(t) &= -\hat{\underline{\varphi}} \cdot \Omega^2 \cdot e^{i\Omega t}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

gdje podcrtane veličine označavaju veličine u kompleksnom području.

Kompleksne amplitude vibracija  $\hat{\underline{x}}_A$  i  $\hat{\underline{\varphi}}$  se sastoje od realne amplitude vibracija i faznog kuta odziva sustava u odnosu na uzbudu, a mogu se zapisati izrazima

$$\underline{\hat{x}}_A = \hat{x}_A \cdot e^{i\gamma_1}, \quad \underline{\hat{\phi}} = \hat{\phi} \cdot e^{i\gamma_2}. \quad (3.30)$$

Uvrštenjem pretpostavke rješenja u diferencijalnu jednadžbu gibanja (3.26) dobiju se sljedeći izrazi

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} m & m \cdot l \\ m \cdot l & J_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}_A \\ \underline{\hat{\phi}} \end{bmatrix} \cdot \Omega^2 \cdot e^{i\Omega t} + \begin{bmatrix} k_{x_A x_A} & k_{x_A \phi} \\ k_{\phi x_A} & k_{\phi \phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}_A \\ \underline{\hat{\phi}} \end{bmatrix} \cdot i \cdot \Omega \cdot e^{i\Omega t} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} & c_{x_A \phi} \\ c_{\phi x_A} & c_{\phi \phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}_A \\ \underline{\hat{\phi}} \end{bmatrix} \cdot e^{i\Omega t} = \\ & = \begin{bmatrix} k_{x_A x_A} \\ k_{\phi x_A} \end{bmatrix} \cdot i \cdot \hat{u} \cdot e^{i\Omega t} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \\ c_{\phi x_A} \end{bmatrix} \cdot \hat{u} \cdot e^{i\Omega t}, \end{aligned}$$

odnosno nakon sređivanja

$$\begin{bmatrix} c_{x_A x_A} + i \cdot \Omega \cdot k_{x_A x_A} - m \cdot \Omega^2 & c_{x_A \phi} + i \cdot \Omega \cdot k_{x_A \phi} - m \cdot l \cdot \Omega^2 \\ c_{\phi x_A} + i \cdot \Omega \cdot k_{\phi x_A} - m \cdot l \cdot \Omega^2 & c_{\phi \phi} + i \cdot \Omega \cdot k_{\phi \phi} - J_A \cdot \Omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}_A \\ \underline{\hat{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} + i \cdot \Omega \cdot k_{x_A x_A} \\ c_{\phi x_A} + i \cdot \Omega \cdot k_{\phi x_A} \end{bmatrix} \cdot \hat{u}. \quad (3.31)$$

Izraz (3.31) se može dodatno pojednostaviti uvođenjem bezdimenzijske mjere prigušenja iz izraza (3.24) pa se može pisati

$$\begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \cdot (1 + i \cdot \mu) - m \cdot \Omega^2 & c_{x_A \phi} \cdot (1 + i \cdot \mu) - m \cdot l \cdot \Omega^2 \\ c_{\phi x_A} \cdot (1 + i \cdot \mu) - m \cdot l \cdot \Omega^2 & c_{\phi \phi} \cdot (1 + i \cdot \mu) - J_A \cdot \Omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}_A \\ \underline{\hat{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \cdot (1 + i \cdot \mu) \\ c_{\phi x_A} \cdot (1 + i \cdot \mu) \end{bmatrix} \cdot \hat{u}. \quad (3.32)$$

Iz sustava algebarskih jednadžbi (3.32) može se odrediti amplituda ustaljenih prisilnih vibracija utega, funkcija povećanja i fazni kut odziva sustava. Za određivanje navedenih veličina potrebno je poznavati parametre vibracijskog sustava. Vlastite se kružne frekvencije neprigušenih vibracija mogu, također, odrediti iz gornjeg izraza na način da se uzbuda i prigušenje izjednače s nulom tj.  $\hat{u} = 0$  i  $\mu = 0$ , pa se dobije sustav algebarskih jednadžbi

$$\begin{bmatrix} c_{x_A x_A} - m \cdot \omega^2 & c_{x_A \varphi} - m \cdot l \cdot \omega^2 \\ c_{\varphi x_A} - m \cdot l \cdot \omega^2 & c_{\varphi \varphi} - J_A \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

U jednadžbi (3.33) kružna frekvencija prisilnih vibracija  $\Omega$  zamijenjena je s kružnom frekvencijom slobodnih neprigušenih vibracija  $\omega$ , a amplitude prelaze u realno područje jer nema prigušenja koje bi uzrokovalo pomak u fazi. Gornja je jednadžba matična jednadžba oblika  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Da bi sustav imao netrivialna rješenja ( $\hat{x}_A \neq 0$ ;  $\hat{\varphi} \neq 0$ ), determinanta matrice  $\mathbf{A}$  mora biti jednaka nuli

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} c_{x_A x_A} - m \cdot \omega^2 & c_{x_A \varphi} - m \cdot l \cdot \omega^2 \\ c_{\varphi x_A} - m \cdot l \cdot \omega^2 & c_{\varphi \varphi} - J_A \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj.} \quad (3.34)$$

$$(c_{x_A x_A} - m \cdot \omega^2) \cdot (c_{\varphi \varphi} - J_A \cdot \omega^2) - (c_{x_A \varphi} - m \cdot l \cdot \omega^2) \cdot (c_{\varphi x_A} - m \cdot l \cdot \omega^2) = 0.$$

Kako iz Nauke o čvrstoći vrijedi da je  $c_{x_A \varphi} = c_{\varphi x_A}$  dobije se bikvadratna jednadžba

$$(m \cdot J_A - m^2 \cdot l^2) \cdot \omega^4 + (2 \cdot c_{x_A \varphi} \cdot m \cdot l - c_{\varphi \varphi} \cdot m - c_{x_A x_A} \cdot J_A) \cdot \omega^2 + c_{x_A x_A} \cdot c_{\varphi \varphi} - c_{x_A \varphi}^2 = 0. \quad (3.35)$$

Iz jednadžbe (3.35), koja se naziva i frekvencijska jednadžba, dobiju se vrijednosti vlastitih kružnih frekvencija neprigušenih vibracija promatrane polovice Stockbridge prigušivača. Izraz za izračun vlastitih kružnih frekvencija prigušivača se može napisati i u obliku

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}, \quad (3.36)$$

gdje se faktori izračunavaju prema izrazima



$$b = 4 \cdot c \cdot \left[ m \cdot L \cdot \left( l - \frac{L}{3} \right) - J_A \right],$$

$$a = m \cdot (J_A - m \cdot l^2), \quad (3.37)$$

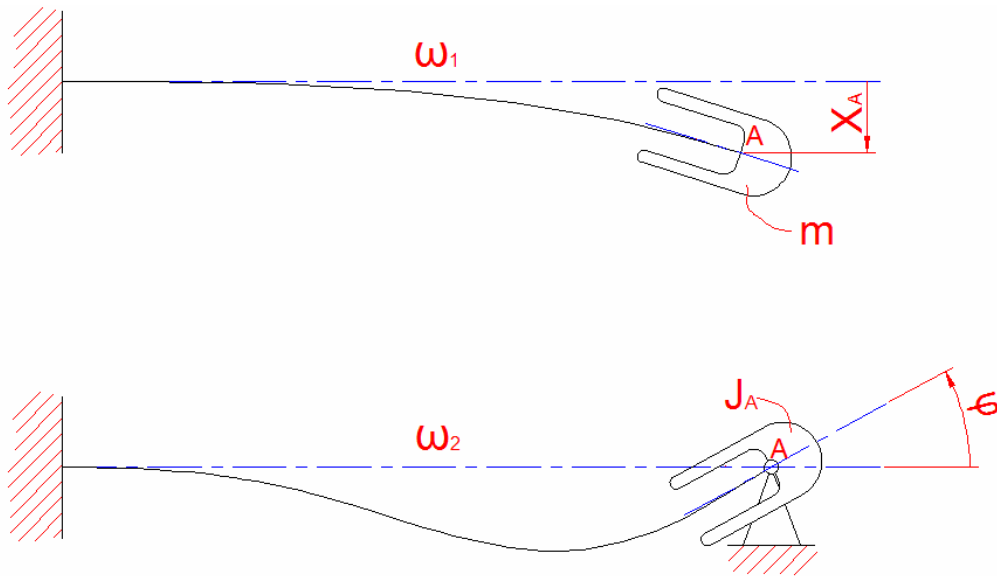
$$D = \left( 4 \cdot c \cdot m \cdot L \cdot l - \frac{4}{3} \cdot c \cdot L^2 \cdot m - 4 \cdot c \cdot J_A \right)^2 - \frac{4}{3} \cdot (4 \cdot m \cdot J_A - 4 \cdot m^2 \cdot l^2) \cdot c^2 \cdot L^2.$$

Glavne forme vibriranja se određuju tako da se u izraze za amplitudu vibracija (3.33) uvrštavaju odgovarajuće vlastite kružne frekvencije, te se dobiju omjeri amplituda vibracija stupnjeva slobode. Eksperimentalna su istraživanja [6] pokazala da je kod većine Stockbridge prigušivača omjer vlastitih kružnih frekvencija unutar raspona  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 3 - 5$ . Zbog toga se prva forma vibriranja može približno aproksimirati s vertikalnim vibracijama težišta utega, pri kojima su kutni zakreti utega vrlo mali i mogu se zanemariti.

Druga glavna forma vibriranja može se približno aproksimirati rotacijom utega oko vlastitog težišta uz zanemarivo male vertikalne pomake utega.

Upravo se zbog navedenih, eksperimentalno potvrđenih rezultata [6], iznosi vlastitih kružnih frekvencija mogu približno odrediti kad se glavne forme vibriranja aproksimiraju s ranije opisanim slučajevima. Slika 25 prikazuje glavne forme vibriranja, tj. njihove aproksimacije.

Takvim se razmatranjem dolazi do zaključka da se jedan sustav s dva stupnja slobode može promatrati kao dva nezavisna sustava s jednim stupnjem slobode gibanja. To je moguće samo kod linearnih vibracijskih sustava kod kojih postoji linearna veza između prigušnih i elastičnih svojstava. Prigušenje i krutost čeličnog užeta su povezane bezdimenzijskom mjerom prigušenja prema (3.23), a koja je u promatranom frekvencijskom rasponu eolskih vibracija približno konstantna [10].



Slika 25. Aproksimirane glavne forme vibriranja

Vlastite kružne frekvencije sustava prema slici 25 su izražene jednažbama (3.38) i (3.39) i one odgovaraju aproksimaciji vlastitih kružnih frekvencija jedne polovice Stockbridge prigušivača

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (3.38)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_{\varphi\varphi}}{J_A}}. \quad (3.39)$$

Odziv sustava kod prisilnih vibracija se određuje rješavanjem jednažbi (3.32), što se uobičajeno provodi primjenom Kramerovog pravila

$$\hat{x}_A = \frac{\underline{\Delta}_1}{\underline{\Delta}}, \quad \hat{\varphi} = \frac{\underline{\Delta}_2}{\underline{\Delta}}, \quad (3.40)$$

gdje je

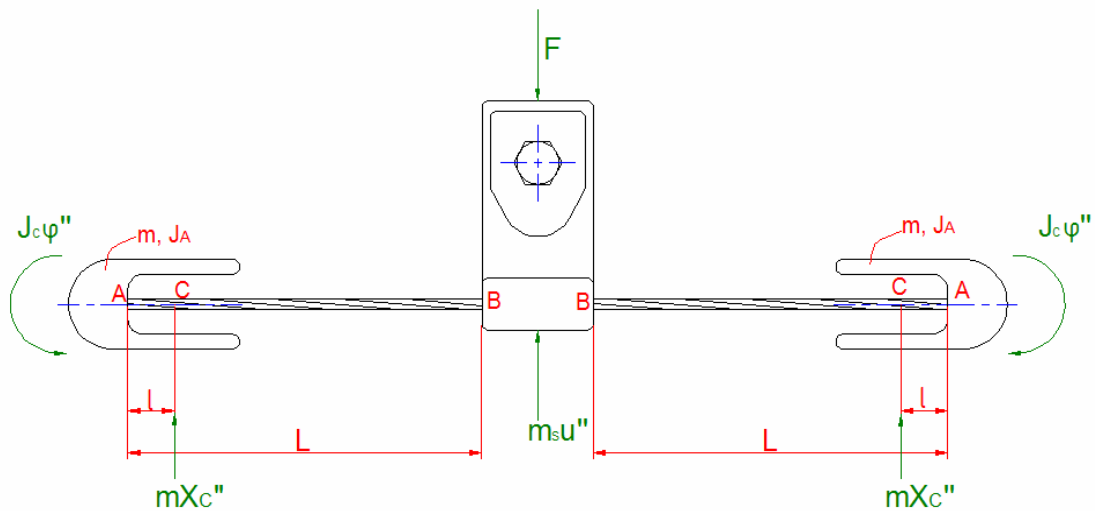
$$\underline{\Delta} = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \cdot (1+i \cdot \mu) - m \cdot \Omega^2 & c_{x_A \varphi} \cdot (1+i \cdot \mu) - m \cdot l \cdot \Omega^2 \\ c_{\varphi x_A} \cdot (1+i \cdot \mu) - m \cdot l \cdot \Omega^2 & c_{\varphi \varphi} \cdot (1+i \cdot \mu) - J_A \cdot \Omega^2 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\underline{\Delta}_1 = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} & c_{x_A \varphi} \cdot (1+i \cdot \mu) - m \cdot l \cdot \Omega^2 \\ c_{\varphi x_A} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} & c_{\varphi \varphi} \cdot (1+i \cdot \mu) - J_A \cdot \Omega^2 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\underline{\Delta}_2 = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_A} \cdot (1+i \cdot \mu) - m \cdot \Omega^2 & c_{x_A x_A} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} \\ c_{\varphi x_A} \cdot (1+i \cdot \mu) - m \cdot l \cdot \Omega^2 & c_{\varphi x_A} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

### 3.4. Simetrični Stockbridge prigušivač

Nakon izvoda matematičkog modela jedne polovice prigušivača, dobiveni se izrazi mogu primjeniti na Stockbridge prigušivaču sa jednakim parametrima na objim stranama. Razmatranjem takvog prigušivača dolazi se do izraza za silu koja uzrokuje harmonijsko gibanje stezaljke prigušivača. Slika 26 prikazuje skicu simetričnog Stockbridge prigušivača sa silama koje se javljaju prilikom njegova gibanja.



Slika 26. Skica simetričnog Stockbridge prigušivača

Kod simetričnog prigušivača se dinamički momenti lijeve i desne strane prigušivača međusobno poništavaju zbog simetrije. Zaključuje se kako su i sve ostale sile u simetričnim dijelovima prigušivača jednake. Sila koja uzrokuje gibanje stezaljke prigušivača se dobiva iz sume sila u vertikalnom smjeru, a izražena je jednačbom

$$F = 2 \cdot m \cdot \ddot{x}_C + m_s \cdot \ddot{u} , \quad (3.44)$$

gdje je  $m_s$  masa stezaljke prigušivača. Uvrštavanjem jednačbe (3.1) u (3.44) dobije se

$$F = 2 \cdot m \cdot (\ddot{x}_A + l \cdot \ddot{\varphi}) + m_S \cdot \ddot{u}. \quad (3.45)$$

Uvrštenjem pretpostavki rješenja (3.29) u izraz (3.45) dobije se amplituda sile na stezaljci u funkciji amplituda vibracija utega. Za silu je također uvedena pretpostavka rješenja u kompleksnom području koja se sastoji od kompleksne amplitude  $\underline{\hat{F}}$  i harmonijske funkcije u kompleksnom području  $e^{i\Omega t}$

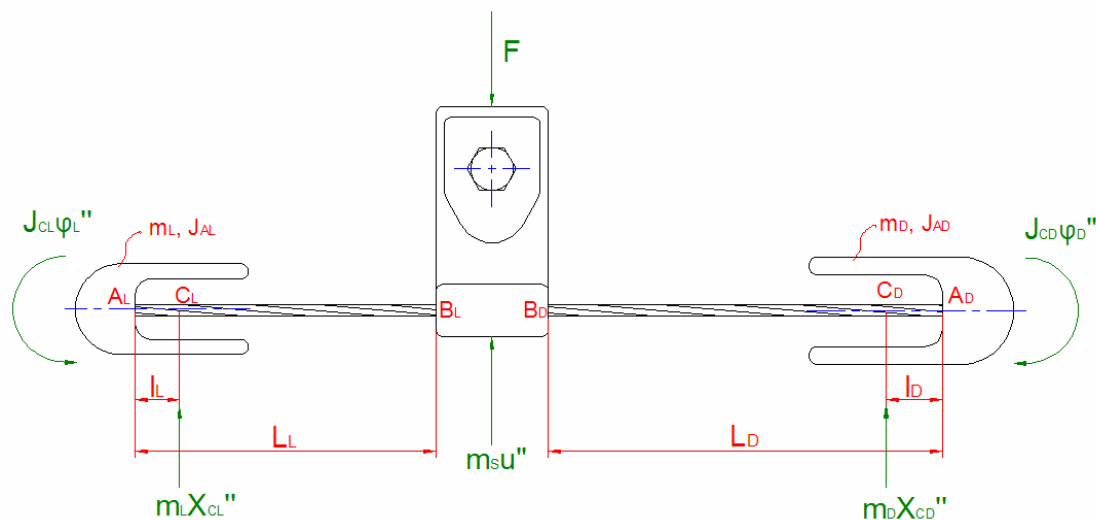
$$\underline{\hat{F}} \cdot e^{i\Omega t} = -2 \cdot m \cdot \Omega^2 \cdot (\underline{\hat{x}}_A + l \cdot \underline{\hat{\varphi}}) \cdot e^{i\Omega t} - m_S \cdot \Omega^2 \cdot \underline{\hat{u}} \cdot e^{i\Omega t},$$

što sređivanjem daje

$$\underline{\hat{F}} = -2 \cdot m \cdot \Omega^2 \cdot (\underline{\hat{x}}_A + l \cdot \underline{\hat{\varphi}}) - m_S \cdot \Omega^2 \cdot \underline{\hat{u}}. \quad (3.46)$$

### 3.5. Asimetrični Stockbridge prigušivač

Asimetrični se Stockbridge prigušivači najčešće koriste u praksi zbog već opisanih prednosti njihove uporabe tj. zbog bolje karakteristike u širem frekvencijskom rasponu. Slika 27 prikazuje izgled asimetričnog prigušivača sa označenim geometrijskim i inercijskim parametrima kao i silama koje djeluju na prigušivač prilikom vibriranja.



Slika 27. Skica asimetričnog Stockbridge prigušivača

Kako je kod ovog tipa prigušivača gibanje utega različito na obje strane zbog različitih parametara sustava (mase, geometrije, krutosti), za matematički opis su potrebne četiri varijable koje u potpunosti opisuju položaj utega. To dovodi do zaključka kako je asimetrični prigušivač vibracijski sustav s četiri stupnja slobode gibanja.

Izvod jednadžbi za lijevu i desnu stranu asimetričnog prigušivača je u potpunosti jednaka izvodu jednadžbe gibanja (3.26). Zbog navedenog nije potrebno iznova izvoditi jednadžbe gibanja, već se jednadžba (3.26) dvaput primjenjuje, jednom za lijevi dio, jednom za desni dio prigušivača. Za veličine koje opisuju lijevi dio prigušivača koristi se indeks L, a za veličine koje opisuju desni dio prigušivača koristi se indeks D. Diferencijalne jednadžbe gibanja za slučaj asimetričnog prigušivača su dane izrazima

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_D & m_D \cdot l_D \\ m_D \cdot l_D & J_{AD} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_{AD} \\ \ddot{\phi}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x_A x_A D} & k_{x_A \phi D} \\ k_{\phi x_A D} & k_{\phi \phi D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_{AD} \\ \dot{\phi}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A D} & c_{x_A \phi D} \\ c_{\phi x_A D} & c_{\phi \phi D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{AD} \\ \phi_D \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} k_{x_A x_A D} \\ k_{\phi x_A D} \end{bmatrix} \cdot \dot{u} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A D} \\ c_{\phi x_A D} \end{bmatrix} \cdot u,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_L & m_L \cdot l_L \\ m_L \cdot l_L & J_{AL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_{AL} \\ \ddot{\phi}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x_A x_A L} & k_{x_A \phi L} \\ k_{\phi x_A L} & k_{\phi \phi L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_{AL} \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A L} & c_{x_A \phi L} \\ c_{\phi x_A L} & c_{\phi \phi L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{AL} \\ \phi_L \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} k_{x_A x_A L} \\ k_{\phi x_A L} \end{bmatrix} \cdot \dot{u} + \begin{bmatrix} c_{x_A x_A L} \\ c_{\phi x_A L} \end{bmatrix} \cdot u.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Analognim se postupkom, pretpostavkom harmonijskog rješenja u kompleksnom području, uvrštavanjem i sređivanjem, dobije rješenje za amplitude vibracija utega. Uvođenjem izraza (3.24) gornji se izraz pojednostavljuje i u konačnici se dobije

$$\begin{bmatrix} c_{x_A x_A D} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot \Omega^2 & c_{x_A \phi D} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot l_D \cdot \Omega^2 \\ c_{\phi x_A D} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot l_D \cdot \Omega^2 & c_{\phi \phi D} \cdot (1+i \cdot \mu) - J_{AD} \cdot \Omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_{AD} \\ \hat{\phi}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x_A x_A D} \cdot (1+i \cdot \mu) \\ c_{\phi x_A D} \cdot (1+i \cdot \mu) \end{bmatrix} \cdot \hat{u}, \tag{3.49}$$

$$\begin{bmatrix} c_{x_A x_A L} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot \Omega^2 & c_{x_A \phi L} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot l_L \cdot \Omega^2 \\ c_{\phi x_A L} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot l_L \cdot \Omega^2 & c_{\phi \phi L} \cdot (1+i \cdot \mu) - J_{AL} \cdot \Omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_{AL} \\ \hat{\phi}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{x_A x_A L} \cdot (1+i \cdot \mu) \\ c_{\phi x_A L} \cdot (1+i \cdot \mu) \end{bmatrix} \cdot \hat{u}. \tag{3.50}$$

Kako je asimetrični prigušivač sustav s četiri stupnja slobode, u konačnici postoje i četiri rezonantne frekvencije koje se računaju kad se u jednadžbama (3.49) i (3.50) prigušenje i uzbuđa izjednače s nulom. Tada gornji izrazi prelaze u izraze

$$\begin{bmatrix} c_{x_A x_A D} - m_D \cdot \omega_D^2 & c_{x_A \varphi D} - m_D \cdot l_D \cdot \omega_D^2 \\ c_{\varphi x_A D} - m_D \cdot l_D \cdot \omega_D^2 & c_{\varphi \varphi D} - J_{AD} \cdot \omega_D^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_{AD} \\ \hat{\varphi}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} c_{x_A x_A L} - m_L \cdot \omega_L^2 & c_{x_A \varphi L} - m_L \cdot l_L \cdot \omega_L^2 \\ c_{\varphi x_A L} - m_L \cdot l_L \cdot \omega_L^2 & c_{\varphi \varphi L} - J_{AL} \cdot \omega_L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_{AL} \\ \hat{\varphi}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Iz uvjeta netrivialnih rješenja sustava (3.51) i (3.52) proizlaze i frekvencijske jednadžbe (3.53) i (3.54) iz kojih se izrazom analognom (3.36) mogu izračunati vlastite kružne frekvencije prigušivača

$$\begin{aligned} & (m_D \cdot J_{AD} - m_D^2 \cdot l_D^2) \cdot \omega_D^4 + (2 \cdot c_{x_A \varphi D} \cdot m_D \cdot l_D - c_{\varphi \varphi D} \cdot m_D - c_{x_A x_A D} \cdot J_{AD}) \cdot \omega_D^2 + \\ & + c_{x_A x_A D} \cdot c_{\varphi \varphi D} - c_{x_A \varphi D}^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} & (m_L \cdot J_{AL} - m_L^2 \cdot l_L^2) \cdot \omega_L^4 + (2 \cdot c_{x_A \varphi L} \cdot m_L \cdot l_L - c_{\varphi \varphi L} \cdot m_L - c_{x_A x_A L} \cdot J_{AL}) \cdot \omega_L^2 + c_{x_A x_A L} \cdot c_{\varphi \varphi L} - \\ & - c_{x_A \varphi L}^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Prema ranijem razmatranju, prva se forma vibriranja može aproksimirati s vertikalnom translacijom utega, a druga forma vibriranja s zakretom utega oko vlastitog težišta. Uvažavanjem gornjih aproksimacija mogu se približno odrediti vlastite kružne frekvencije prema izrazima (3.55) koji su analogni izrazima (3.38) i (3.39)

$$\begin{aligned} \omega_{D1} &= \sqrt{\frac{c_D}{m_D}}, & \omega_{L1} &= \sqrt{\frac{c_L}{m_L}}, \\ \omega_{D2} &= \sqrt{\frac{c_{\varphi \varphi D}}{J_{AD}}}, & \omega_{L2} &= \sqrt{\frac{c_{\varphi \varphi L}}{J_{AL}}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$



Odziv prigušenog sustava na vanjsku uzbuđu se određuje pomoću Kramerovog pravila, kao i u ranijim razmatranjima polovice prigušivača

$$\begin{aligned}\hat{x}_{AD} &= \frac{\underline{\Delta}_{D1}}{\underline{\Delta}_D}, & \hat{x}_{AL} &= \frac{\underline{\Delta}_{L1}}{\underline{\Delta}_L}, \\ \hat{\phi}_D &= \frac{\underline{\Delta}_{D2}}{\underline{\Delta}_D}, & \hat{\phi}_L &= \frac{\underline{\Delta}_{L2}}{\underline{\Delta}_L},\end{aligned}\tag{3.56}$$

gdje je

$$\underline{\Delta}_D = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_{AD}} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot \Omega^2 & c_{x_A \phi_D} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot l_D \cdot \Omega^2 \\ c_{\phi x_{AD}} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot l_D \cdot \Omega^2 & c_{\phi \phi_D} \cdot (1+i \cdot \mu) - J_{AD} \cdot \Omega^2 \end{bmatrix}, \tag{3.57}$$

$$\underline{\Delta}_{D1} = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_{AD}} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} & c_{x_A \phi_D} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot l_D \cdot \Omega^2 \\ c_{\phi x_{AD}} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} & c_{\phi \phi_D} \cdot (1+i \cdot \mu) - J_{AD} \cdot \Omega^2 \end{bmatrix}, \tag{3.58}$$

$$\underline{\Delta}_{D2} = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_{AD}} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot \Omega^2 & c_{x_A x_{AD}} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} \\ c_{\phi x_{AD}} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_D \cdot l_D \cdot \Omega^2 & c_{\phi x_{AD}} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} \end{bmatrix}, \tag{3.59}$$

$$\underline{\Delta}_L = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_{AL}} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot \Omega^2 & c_{x_A \phi_L} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot l_L \cdot \Omega^2 \\ c_{\phi x_{AL}} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot l_L \cdot \Omega^2 & c_{\phi \phi_L} \cdot (1+i \cdot \mu) - J_{AL} \cdot \Omega^2 \end{bmatrix}, \tag{3.60}$$

$$\underline{\Delta}_{L1} = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_{AL}} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} & c_{x_A \phi_L} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot l_L \cdot \Omega^2 \\ c_{\phi x_{AL}} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} & c_{\phi \phi_L} \cdot (1+i \cdot \mu) - J_{AL} \cdot \Omega^2 \end{bmatrix}, \tag{3.61}$$

$$\underline{\Delta}_{L2} = \det \begin{bmatrix} c_{x_A x_{AL}} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot \Omega^2 & c_{x_A x_{AL}} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} \\ c_{\phi x_{AL}} \cdot (1+i \cdot \mu) - m_L \cdot l_L \cdot \Omega^2 & c_{\phi x_{AL}} \cdot (1+i \cdot \mu) \cdot \hat{u} \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Ukupna sila na stezaljci prigušivača koja uzrokuje njezino harmonijsko gibanje se dobiva iz uvjeta dinamičke ravnoteže u vertikalnom smjeru (slika 27)

$$F = m_D \cdot \ddot{x}_{CD} + m_L \cdot \ddot{x}_{CL} + m_S \cdot \ddot{u}. \quad (3.63)$$

Iz geometrijskih odnosa slijede relacije (3.64) koje su analogne relaciji (3.1)

$$\ddot{x}_{CD} = \ddot{x}_{AD} + l_D \cdot \ddot{\phi}_D, \quad (3.64)$$

$$\ddot{x}_{CL} = \ddot{x}_{AL} + l_L \cdot \ddot{\phi}_L.$$

Uvrštenjem izraza (3.64) u izraz za silu na stezaljci (3.63) dobije se

$$F = m_D \cdot (\ddot{x}_{AD} + l_D \cdot \ddot{\phi}_D) + m_L \cdot (\ddot{x}_{AL} + l_L \cdot \ddot{\phi}_L) + m_S \cdot \ddot{u}. \quad (3.65)$$

Uvrštenjem pretpostavki rješenja (3.29) u izraz (3.65), te uz kompleksnu silu, dobije se amplituda sile na stezaljci u funkciji amplituda vibracija utega

$$\underline{\hat{F}} = -m_D \cdot \Omega^2 \cdot (\underline{\hat{x}}_{AD} + l_D \cdot \underline{\hat{\phi}}_D) - m_L \cdot \Omega^2 \cdot (\underline{\hat{x}}_{AL} + l_L \cdot \underline{\hat{\phi}}_L) - m_S \cdot \Omega^2 \cdot \underline{\hat{u}}. \quad (3.66)$$

Dinamički moment koji se javlja na stezaljci prigušivača u slučaju asimetričnog prigušivača nije jednak nuli. To uvjetuje da pretpostavka o translacijskom gibanju stezaljke nije u potpunosti zadovoljena, te da na uže dalekovoda u tom slučaju djeluje moment savijanja (poglavlje 3.7.).

### 3.6. Karakteristika Stockbridge prigušivača

Karakteristika Stockbridge prigušivača se promatra i ocjenjuje preko tri dijagrama koji redom prikazuju apsolutnu vrijednost mehaničke impedancije, fazni kut impedancije (kut sile na stezaljci spram brzine stezaljke) te disipiranu snagu. Sve veličine se u dijagramu prikazuju u ovisnosti o frekvenciji vibracija. Ovi dijagrami u potpunosti opisuju vibracijske karakteristike prigušivača koje su relevantne za njegovo ispitivanje i koje zahtjeva standard [8].

#### 3.6.1. Mehanička impedancija

Mehanička impedancija je jedna od važnijih veličina u mehaničkim vibracijama. To je mjera otpora kojom se konstrukcija odupire gibanju kada se na nju djeluje silom. Impedancija u korelaciju dovodi silu i brzinu u zadanoj točki konstrukcije. Može se zaključiti kako će impedancija u sustavu masa-opruga, gdje uzbuda djeluje na masu, biti minimalna u rezonancijama, jer je u tom slučaju za postizanje velike brzine potrebna jako mala sila.

Međutim, u slučaju Stockbridge prigušivača sila ne djeluje na utege već je uzbuda kinematička, preko stezaljke prigušivača. Impedancija je kod prigušivača definirana kao omjer sile koja djeluje na stezaljku i brzine stezaljke, tj. s omjerom kompleksnih amplituda sile i brzine

$$\hat{Z} = \frac{\hat{F}}{\hat{u}} = \frac{\hat{F}}{i \cdot \Omega \cdot \hat{u}}. \quad (3.67)$$

Tako definirana mehanička impedancija je maksimalna upravo u rezonancijama prigušivača. Razlog tomu je što je u rezonancijama amplituda gibanja utega prigušivača maksimalna i, za zadano gibanje  $u(t)$  stezaljke, prigušivač stvara najveću silu na stezaljci. Izraz (3.68) daje apsolutnu vrijednost

impedancije koja se prikazuje u dijagramima koji opisuju karakteristiku prigušivača

$$\hat{Z} = \frac{|\hat{F}|}{\Omega \cdot \hat{u}}. \quad (3.68)$$

Od navedenih veličina koje opisuju karakteristiku prigušivača mehanička je impedancija najbitnija pošto se ona koristi za određivanje amplituda vibracija užeta dalekovoda. U poglavlju 2.1.3. je opisana disipirana snaga u prigušivaču, gdje je mehanička impedancija jedan od ulaznih parametara.

Mehanička se impedancija u karakteristici prigušivača može prikazati imaginarnim i realnim dijelom, ili apsolutnom vrijednošću i faznim kutom impedancije. Fazni kut impedancije je definiran izrazom (3.72) koji u kombinaciji sa izrazom (3.73) (izrazi su izvedeni u poglavlju 3.6.2.) daje konačni izraz za fazni kut  $\gamma_4$

$$\gamma_4 = \left[ \arctan\left(\frac{\text{Im}(\hat{F})}{\text{Re}(\hat{F})}\right) - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.69)$$

Prilikom izračuna faznog kuta pomoću izraza (3.69) potrebno je posebno paziti da funkcija arkus tangens vodi računa o tome u kojem se kvadrantu nalazi točka, tj. da je domena rješenja koje daje funkcija u rasponu od  $-\pi$  do  $\pi$  kako bi i predznak snage, koja također ovisi o faznom kutu bio ispravan.

### 3.6.2. Snaga prigušenja

Od velike važnosti za vibracije ovješnog užeta dalekovoda je i snaga koju disipira prigušivač kao pokazatelj efikasnosti prigušivača u danom frekvencijskom rasponu. Ovdje izražena snaga ne predstavlja ulaznu veličinu u

metodu ravnoteže snaga, već se ona izvodi iz mehaničke impedancije prigušivača. Snaga koju apsorbira prigušivač je definirana kao umnožak sile na stezaljci i brzine stezaljke

$$P_D = F(t) \cdot \dot{u}(t). \quad (3.70)$$

Vidljivo je kako je disipirana snaga funkcija vremena, a ovisi o uzbuđi i parametrima prigušivača. Da bi snagu zapisali u realnom matematičkom obliku potrebno je silu i brzinu stezaljke prikazati kao realne veličine, što je učinjeno u jednadžbama

$$F(t) = -|\hat{F}| \cdot \cos(\Omega \cdot t + \gamma_3), \quad (3.71)$$

$$\dot{u}(t) = -\Omega \cdot \hat{u} \cdot \sin(\Omega \cdot t),$$

pri čemu je

$$\gamma_3 = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\hat{F})}{\text{Re}(\hat{F})}\right). \quad (3.72)$$

Uvrštenjem jednadžbi (3.71) u izraz za snagu (3.70) dobije se izraz za disipiranu snagu kao periodičku funkciju vremena

$$P_D(t) = |\hat{F}| \cdot \Omega \cdot \hat{u} \cdot \cos(\Omega \cdot t + \gamma_3) \cdot \sin(\Omega \cdot t).$$

Gornji izraz se primjenom trigonometrijskih transformacija može pretvoriti u

$$P_D(t) = -\frac{1}{2} \cdot |\hat{F}| \cdot \Omega \cdot \hat{u} \cdot [\sin(\gamma_3) - \cos(2 \cdot \Omega \cdot t + \gamma_4)],$$

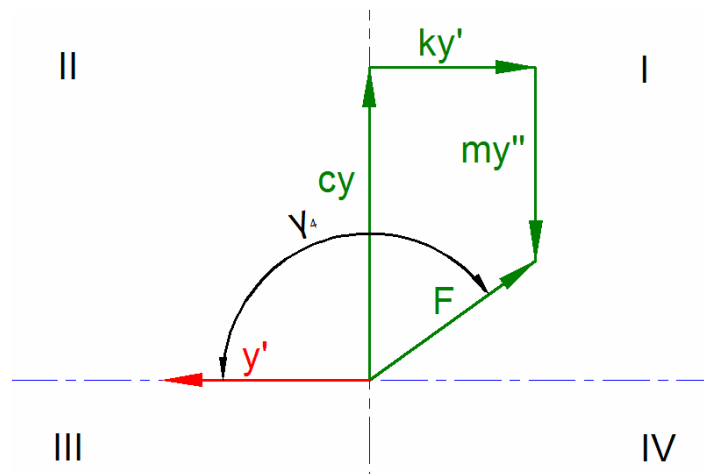
gdje je

$$\gamma_4 = \gamma_3 - \frac{\pi}{2}, \quad (3.73)$$

što u konačnici daje izraz

$$P_D(t) = -\frac{1}{2} \cdot |\hat{F}| \cdot \Omega \cdot \hat{u} \cdot [\cos(\gamma_4) - \cos(2 \cdot \Omega \cdot t + \gamma_4)]. \quad (3.74)$$

Može se pokazati da je srednja vrijednost disipirane snage negativna (kad se sila  $F$  nalazi u 1. i 4. kvadrantu, a to je uvijek ispunjeno jer je prigušna sila  $k \cdot \dot{u}$  u protufazi s brzinom vibracija, slika 28), što je u skladu s fizikalnošću procesa jer se energija u sustavu gubi zbog prigušenja. U ovom razmatranju nije potrebno uzimati u obzir predznak snage, pošto sam naziv govori da se radi o disipiranoj snazi. Imajući na umu prirodu disipirane snage, u daljnjem se razmatranju u obzir neće uzimati njezin predznak.



Slika 28. Vektorski dijagram sila vibracijskog sustava masa-opruga-prigušivač

Snaga je vremenska harmonijska funkcija koja se mijenja dvostruko većom frekvencijom od frekvencije vibracija, tj. uzbude. Od interesa je, prilikom

ocjenjivanja efikasnosti prigušivača, analizirati srednju vrijednost snage, a koja se izračunava prema izrazu

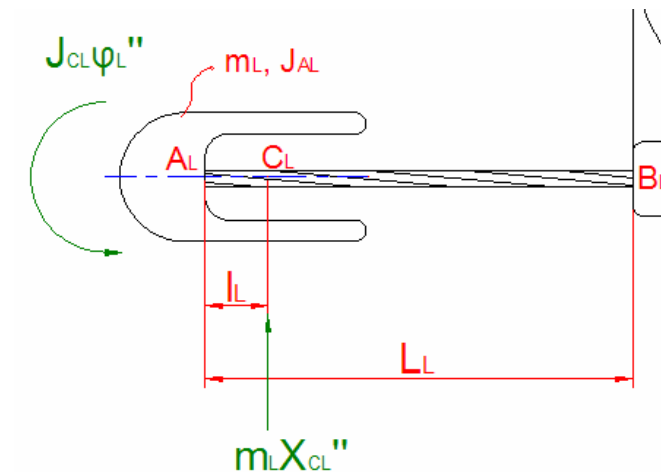
$$\bar{P}_D = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P_D(t) \cdot dt.$$

Nakon rješavanja gornjeg integrala dobije se izraz (3.75) za srednju disipiranu snagu u jednom periodu vibracija. Zamjećuje se kako je srednja disipirana snaga funkcija frekvencije i amplitude uzbude, što je pogodno za dijagramski prikaz disipirane snage u funkciji frekvencije uzbude

$$\bar{P}_D = \frac{1}{2} \cdot |\hat{F}| \cdot \Omega \cdot \hat{u} \cdot \cos(\gamma_4). \quad (3.75)$$

### 3.7. Proračun čvrstoće Stockbridge prigušivača

Do sada je fokus bio na izvodu matematičkog modela koji opisuje ponašanje simetričnog i asimetričnog Stockbridge prigušivača. Izvedeni model daje karakteristiku prigušivača koja opisuje njegovu efikasnost pri disipaciji energije koju u sustav unosi vjetar. Međutim, matematički model daje i podatke potrebne za proračun čvrstoće prigušivača. Najopterećeniji dio prigušivača je glasničko užje. Pošto su sile dinamičke, tj vremenski promjenjive, i naprezanja će biti iste takve prirode. Užje je najopterećenije u točkama uklještenja A i B (prema slikama 26 i 27).



Slika 29. Skica lijevog kraja prigušivača s dinamičkim silama

Slika 29 prikazuje lijevi dio asimetričnog Stockbridge prigušivača sa dinamičkim silama prisutnima prilikom vibriranja sustava. Postavljanjem uvjeta dinamičke ravnoteže, sumom momenata oko točke A, dobije se jednadžba

$$M_{AL} = J_{CL} \cdot \ddot{\varphi}_L + m_L \cdot l_L \cdot \ddot{x}_{CL}. \quad (3.76)$$

Uvrštenjem izraza (3.64) u (3.76) se moment savijanja u točki A lijevog dijela prigušivača može zapisati izrazom



$$M_{AL} = J_{CL} \cdot \ddot{\varphi}_L + m_L \cdot l_L \cdot (\ddot{x}_{AL} + l_L \cdot \ddot{\varphi}_L), \quad (3.77)$$

a primjenom Steinerovog pravila (3.5) se dobije

$$M_{AL} = J_{AL} \cdot \ddot{\varphi}_L + m_L \cdot l_L \cdot \ddot{x}_{AL}. \quad (3.78)$$

Poprečna sila na mjestu uklještenja je jednaka i u točki A i u točki B pošto, osim inercijske sile, nema drugih poprečnih sila koje djeluju na užu (pritom se težina utega zanemaruje)

$$F_{AL} = F_{BL} = m_L \cdot \ddot{x}_{CL}, \quad (3.79)$$

$$F_{AL} = F_{BL} = m_L \cdot (\ddot{x}_{AL} + l_L \cdot \ddot{\varphi}_L).$$

Iz slike 29 proizlazi i iznos momenta savijanja u presjeku B

$$M_{BL} = J_{CL} \cdot \ddot{\varphi}_L + m_L \cdot (L_L - l_L) \cdot \ddot{x}_{CL}. \quad (3.80)$$

Izraz (3.80) se može preurediti uvrštenjem izraza (3.64) i (3.5) u konačan oblik

$$M_{BL} = (J_{AL} - m_L \cdot l_L \cdot L_L) \cdot \ddot{\varphi}_L + (m_L \cdot L_L - m_L \cdot l_L) \cdot \ddot{x}_{AL}. \quad (3.81)$$

Uvrštenjem pretpostavke harmonijskog rješenja za prisilne prigušene vibracije sustava dobije se iznos kompleksne amplitude momenata i sila u funkciji kompleksnih amplituda odziva sustava

$$\begin{aligned}\hat{M}_{AL} &= -\Omega^2 \cdot J_{AL} \cdot \hat{\phi}_L - \Omega^2 \cdot m_L \cdot l_L \cdot \hat{x}_{AL}, \\ \hat{M}_{BL} &= -\Omega^2 \cdot \left[ (J_{AL} - m_L \cdot l_L \cdot L_L) \cdot \hat{\phi}_L + (m_L \cdot l_L - m_L \cdot L_L) \cdot \hat{x}_{AL} \right] \\ \hat{F}_{AL} &= \hat{F}_{BL} = -\Omega^2 \cdot m_L \cdot (\hat{x}_{AL} + l_L \cdot \hat{\phi}_L)\end{aligned}\quad (3.82)$$

Analogno, za desni dio prigušivača izrazi za izračunavanje momenata savijanja i poprečnih sila u kritičnim presjecima su dani jednažbama

$$\begin{aligned}\hat{M}_{AD} &= -\Omega^2 \cdot J_{AD} \cdot \hat{\phi}_D - \Omega^2 \cdot m_D \cdot l_D \cdot \hat{x}_{AD}, \\ \hat{M}_{BD} &= -\Omega^2 \cdot \left[ (J_{AD} - m_D \cdot l_D \cdot L_D) \cdot \hat{\phi}_D + (m_D \cdot l_D - m_D \cdot L_D) \cdot \hat{x}_{AD} \right] \\ \hat{F}_{AD} &= \hat{F}_{BD} = -\Omega^2 \cdot m_D \cdot (\hat{x}_{AD} + l_D \cdot \hat{\phi}_D)\end{aligned}\quad (3.83)$$

Kao što je već ranije navedeno (poglavlje 3.5.), na stezaljku prigušivača djeluje i moment koji nastaje zbog nesimetrije prigušivača

$$\hat{M}_L = \hat{M}_{BL} - \hat{M}_{BD}. \quad (3.84)$$

Taj moment dodatno opterećuje uže dalekovoda na savijanje i važno ga je držati unutar iskustvenih granica da mu utjecaj na trajnost užeta dalekovoda bude što manji.

Iz vrijednosti amplituda dinamičkih sila i momenata u uklještenjima A i B mogu se izračunati vrijednosti amplitude dinamičkih naprezanja, koje su dane izrazima

$$\sigma_{AL} = \frac{|\hat{M}_{AL}|}{W}, \quad \sigma_{AD} = \frac{|\hat{M}_{AD}|}{W}, \quad (3.85)$$

$$\sigma_{BL} = \frac{|\hat{M}_{BL}|}{W}, \quad \sigma_{BD} = \frac{|\hat{M}_{BD}|}{W},$$

$$\tau_{AL} = \frac{|\hat{F}_{AL}|}{A}, \quad \tau_{AD} = \frac{|\hat{F}_{AD}|}{A}, \quad (3.86)$$

$$\tau_{BL} = \frac{|\hat{F}_{BL}|}{A}, \quad \tau_{BD} = \frac{|\hat{F}_{BD}|}{A}.$$

Kao i amplitude sila i momenata, tako su i amplitude naprezanja funkcije zavisne o frekvenciji uzbude  $\Omega$ .

U opterećenju dominantan utjecaj imaju momenti savijanja. Uzevši to u obzir tangencijalna se naprezanja dana jednađžbom (3.86) mogu i zanemariti, a uže se dimenzionira u odnosu na dopušteno dinamičko čisto naizmjenično normalno naprezanje (izazvano savijanjem).

Stvarni moment otpora poprečnog presjeka užeta promjera  $d$  dan je izrazom

$$W = k_1 \cdot \frac{d^3 \cdot \pi}{32}, \quad (3.87)$$

u kojemu je s  $k_1$  označen faktor koji uzima u obzir da poprečni presjek užeta nije krug, te da je ono ispleteno od žica između kojih je moguća pojava relativnog klizanja. Faktor  $k_1$  je manji od jedinice i ovisi o vrsti užeta.

Površina poprečnog presjeka se računa pomoću izraza

$$A = k_2 \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}, \quad (3.88)$$

u kojem je s  $k_2$  označen faktor koji u obzir uzima da površina poprečnog presjeka užeta nije u potpunosti ispunjena materijalom. Faktor  $k_2$  se naziva faktorom ispunje, a ovisi o vrsti užeta i uvijek je manji od jedinice.

Poprečne sile, momenti savijanja i naprezanja se kod simetričnog prigušivača izračunavaju primjenom istih izraza kao za asimetrični prigušivač. Naime, parametri sustava su na obje strane prigušivača jednaki pa će tako i sile i momenti na obje strani biti jednaki, dok će resultantni moment na uže dalekovoda biti jednak nuli.

Drugi elementi prigušivača, poput stezaljke, su manje podložni zamoru zbog drugačijeg stanja naprezanja, kao i zbog predimenzioniranosti kako bi zadovoljili neke druge kriterije. Primjerice, stezaljka je također visokoopterećeni dio, ali statički. Jednom kada je prigušivač pritegnut na uže dalekovoda, tj. stezaljka je zategnuta propisanim momentom, ona ne smije proklizati po užetu pri silama manjim od standardom propisane. Sila koja se stvara uslijed zatezanja propisanim momentom je mnogo veća od dinamičkih sila koje se javljaju prilikom vibriranja pa nije potrebna provjera stezaljke na zamor.

## 4. Eksperimentalno određivanje parametara čeličnog užeta

Nakon što je izveden potpuni matematički model prigušivača pristupa se njegovoj verifikaciji na realnom prigušivaču. Prije no što se može izvršiti verifikacija modela, potrebno je odrediti ulazne parametre sustava, prigušenje i krutost čeličnog užeta. Mjerenja prigušenja i krutosti užeta su provedena u Dalekovod-Laboratoriju koristeći raspoloživu opremu i resurse laboratorija. Korišten je elektrodinamički vibrator (eng. shaker, slika 30) proizvođača LDS, model V555, sa prihvatnicom koja na sebi ima ugrađen senzor sile. Akcelerometri koji su korišteni, proizvođača PCB Piezotronics, model B35, su za nominalni raspon ubrzanja do 50 g, dok je uređaj za prikupljanje podataka proizvođača HBM, maksimalne frekvencije uzorkovanja 9600 Hz.

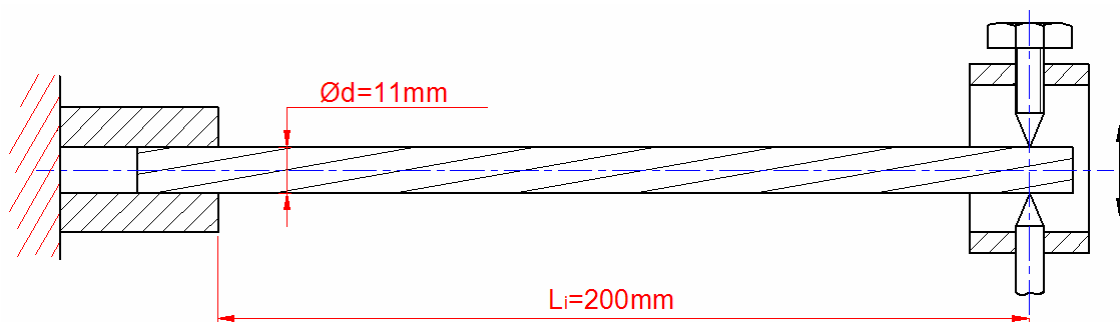


Slika 30. Vibrator LDS V555

Krutost i prigušenje užeta su ispitivani na spiralno pletenom čeličnom užetu promjera 11 mm, sa žicama promjera 2,25 mm, kakvo tvrtka Dalekovod koristi za glasničko uže na Stockbridge prigušivačima manjih dimenzija. U nastavku su opisani eksperimentalni postavi, način provođenja ispitivanja te rezultati.

### 4.1. Određivanje prigušenja čeličnog užeta

U poglavljima 3.2.3. i 3.2.4. obrađen je model prigušenja u čeličnom užetu gdje je spomenuto kako je dominantan utjecaj histereznog prigušenja materijala užeta, dok je utjecaj trenja među žicama općenito teško odrediti.



**Slika 31. Shema eksperimentalnog postava za ispitivanje prigušenja užeta**

Na slici 31 je prikazana shema ispitnog postava kojim je ispitivano čelično uže. Na lijevom kraju užeta je uklješteno, dok se na desnom kraju nastojalo postići uvjete zglobnog oslanjanja kako bi se dopustili kutni zakreti kraja užeta. Uklještenje je postignuto tako što je uže čvrsto pritegnuto sa dvije čelične ploče koje leže u ravnini okomitoj na smjer pomaka užeta. Na ispitnom postavu su ploče učvršćene na nepomičan nosač, koji se pak nalazi na temeljnom bloku vibratora. Desni kraj užeta je prihvaćen na vibrator preko posebne prihvatnice kojom se uže steže pomoću vijka sa šiljcima koja predstavlja zglobni prihvat kraja užeta na vibrator. Opisana prihvatnica se prilikom ispitivanja pokazala dobrom pošto je dopuštala kutne zakrete kraja užeta i u slučajevima kada je ono bilo jače pritegnuto šiljastim vijcima, tj. utjecaj prihvata na vibrator je u konačnim rezultatima mjerenja minimalan. Još jedan razlog minimalnog utjecaja prihvata na rezultate je taj što su amplitude pomaka kraja užeta relativno malene. Najveća amplituda koja se pojavila prilikom ispitivanja je pri amplitudi brzine od 150 mm/s i frekvenciji 5 Hz i iznosi 4.7746 mm, dok je najmanja amplituda pomaka kraja

užeta pri frekvenciji 60 Hz i amplitudi brzine ispitivanja od 50 mm/s iznosa 0,1326 mm.

Cilj ispitivanja je bio dobiti vrijednost histerezne konstante prigušenja  $h$ . U tu svrhu je bilo potrebno snimiti petlje histereze užeta za različite frekvencije ispitivanja. Petlje histereze su snimane u rasponu frekvencija od 5 do 60 Hz da se ustanovi kako se s amplitudom pomaka kraja užeta mijenja histerezna konstanta prigušenja. Prema standardu [8] preporučena amplituda brzine iznosi 100 mm/s, pa se prilikom ispitivanja uglavnom držalo te brzine ispitivanja. Tako se držanjem konstantne amplitude brzine ispitivanja promjenom frekvencije mijenjalo i amplituda pomaka kraja užeta, te su snimane petlje histereze užeta za svaku ispitnu frekvenciju, tj. amplitudu pomaka. Dakako, kako bi se provjerio utjecaj brzine ispitivanja na prigušenje užeta, snimljene su petlje histereze i za amplitudu brzine od 150 mm/s, kao i za amplitudu 50 mm/s.

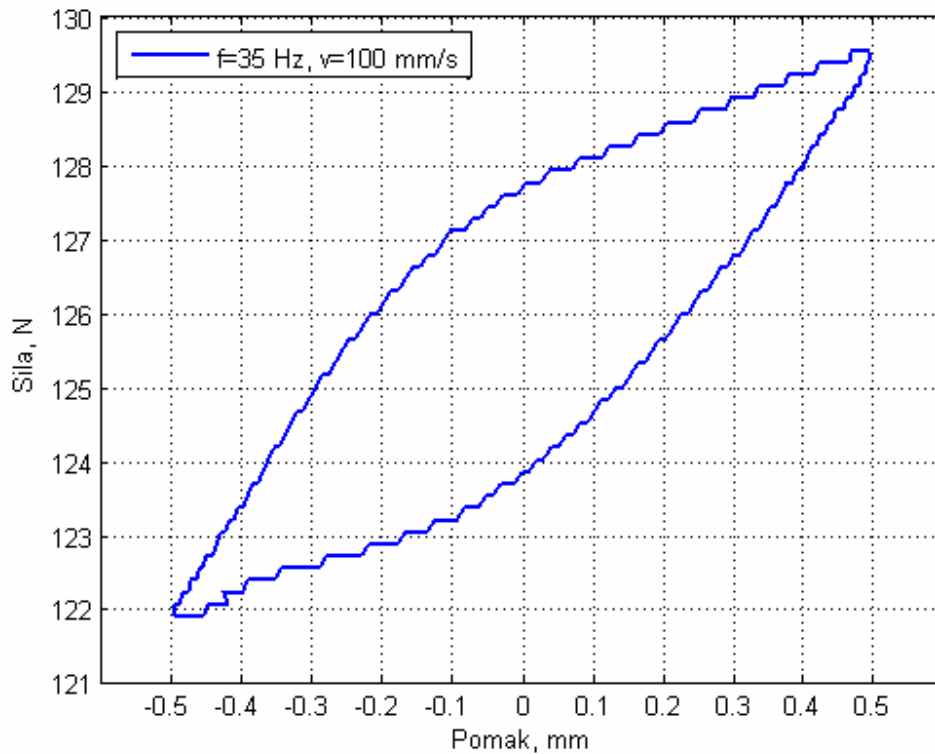
Daljnji postupak se sastoji u tome da se izmjeri površina koju omeđuje zatvorena petlja histereze i pomoću izraza (3.17) izračuna histerezna konstanta prigušenja. Na vibratoru se mjere dva parametra: ubrzanje i sila na vibratoru. Za određenu frekvenciju ispitivanja moguće je iz ubrzanja i frekvencije izračunati amplitudu pomaka pomoću izraza

$$\hat{x} = \frac{\hat{\ddot{x}}}{(2 \cdot \pi \cdot f)^2}. \quad (4.1)$$

Koristeći te podatke moguće je nacrtati petlje histereze, gdje os apscisa predstavlja pomake, dok je na osi ordinata predstavljena sila. Slika 32 prikazuje snimljenu petlju histereze za frekvenciju ispitivanja 35 Hz i amplitudu brzine vibracija od 100 mm/s.

Uočljivo je sa slike kako krivulja nije glatka već je nazubljena. Razlog tomu je rezolucija mjernog uređaja, tj. uređaja za prikupljanje podataka koji vrijednosti zaokružuje na određenu decimalu. Pomoću računalnih alata GNU Octave i MATLAB ( naredba *polyarea*) je dobivena površina koju omeđuje petlja histereze, te je iz nje već opisanim postupkom izračunata histerezna konstanta prigušenja.

Opisanim postupkom su određene histerezne konstante prigušenja za sve snimljene petlje histereze.

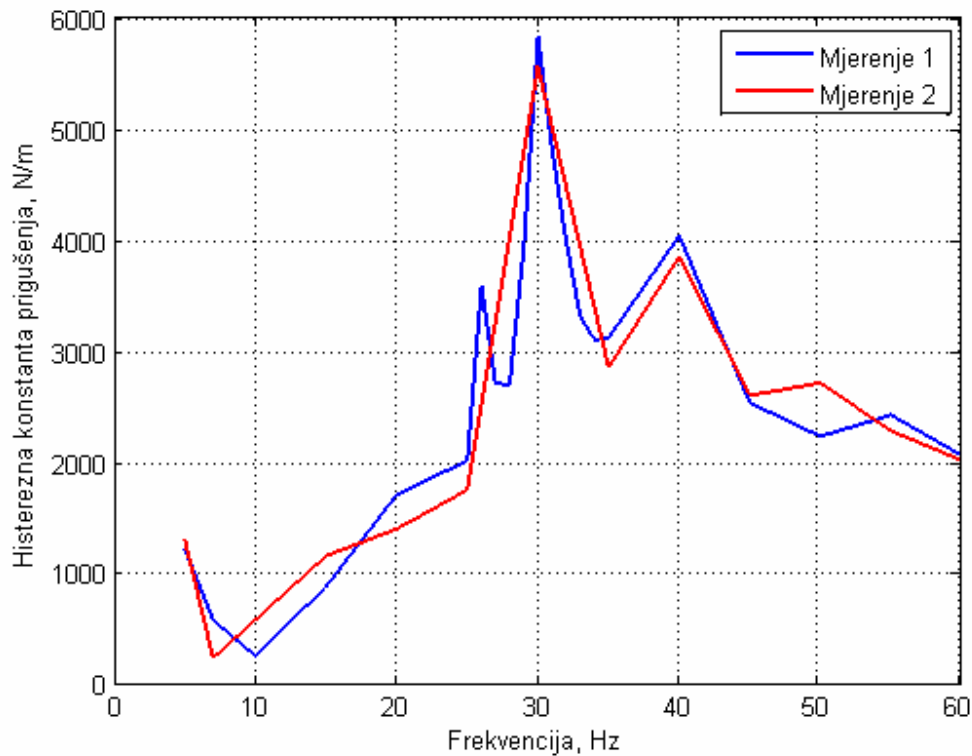


**Slika 32. Petlja histereze za frekvenciju 35 Hz i amplitudu brzine 100 mm/s**

Na prikazanoj petlji histereze (slika 32) vidi se kako je pomak jednak nuli u središtu površine opisane petljom, ali da to nije slučaj za vrijednost sile. Razlog tomu je što prije ispitivanja senzor sile nije kalibriran, a u samo mjerenje se ne unosi nikakva greška. U dijagramima nije bitan apsolutni iznos sile, već je jedino bitna površina petlje histereze koja ovisi samo o obliku petlje i razlikama u iznosima sile i pomaka na vrhovima elipsoidne petlje. Dakle, statički pomak sile na osi ordinata ne utječe na mjerenje niti na konačan rezultat.

Slika 33 prikazuje dijagram koji daje histereznu konstantu prigušenja u ovisnosti o frekvenciji ispitivanja.



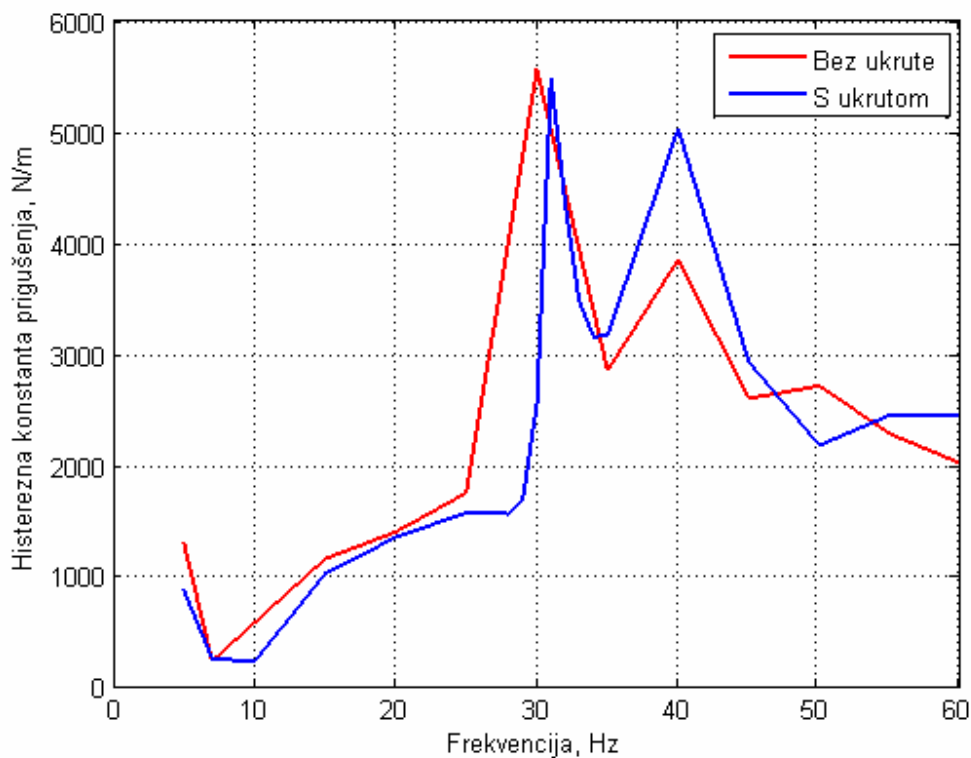


**Slika 33. Ovisnost histerezne konstante prigušenja o frekvenciji za dva mjerenja**

Slika prikazuje rezultate dobivene dvama mjerenjima. Cilj je bio utvrditi rasipanje podataka između dva mjerenja na istom uzorku užeta i pri istim uvjetima ispitivanja, a iz dijagrama se može zaključiti kako je ono u granicama prihvatljivosti. Također je vidljivo kako se konstanta prigušenja jako mijenja s frekvencijom, no tu je potrebno promotriti pouzdanost mjerenja. Naime, vibrator je elektrodinamički, te pri nižim frekvencijama regulacija uređaja nije toliko precizna. Zbog toga se u referentnu sinusoidu, koju bi na izlazu uređaj trebao pratiti, uključuju i viši harmonici koji remete sliku, a snimljena petlja histereze sjeće samu sebe više puta. Iz tog se razloga podaci za niže frekvencije (do 25 Hz) ne smatraju pouzdanima i ne uzimaju se u razmatranje.

Još jedan problem koji se pojavio prilikom ispitivanja jest rezonancija ploče na kojoj je užo uklješteno. Kad je ploča u rezonanciji njezina gibanja postaju neprihvatljivo velika, te nije zadovoljen uvjet da je užo nepomično uklješteno. Također su i za te frekvencije (okolica 30 Hz) snimljene petlje

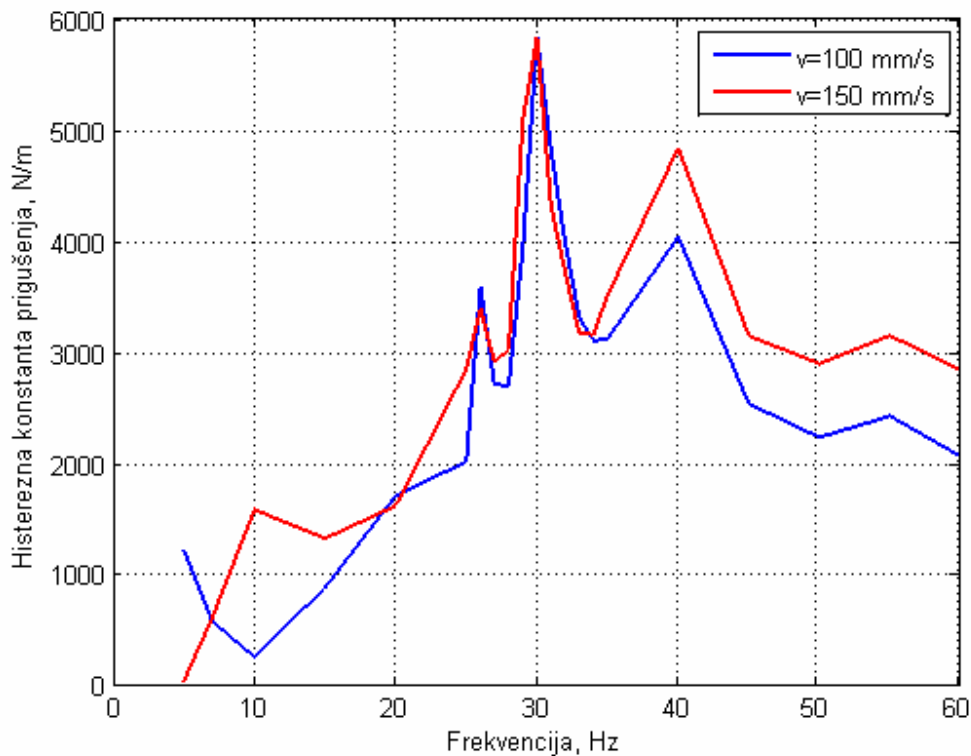
histereze, ali rezultirajuća konstanta prigušenja značajno odskoče. Na slici 33 se to očituje naglim skokovima vrijednosti konstante prigušenja u okolici frekvencije od 30 Hz. Nakon što je uočen problem, ploča se dodatno ukrutila i pristupljeno je ponovnom snimanju petlji histereze i izračunavanju histerezne konstante prigušenja. Slika 34 prikazuje ovisnost histerezne konstante prigušenja u slučaju kada je ona izračunata za sustav s neukrućenom pločom i za sustav s dodatnom ukrutom na ploči.



**Slika 34. Ovisnost histerezne konstante prigušenja o frekvenciji pri ukrućenoj i neukrućenoj ploči**

Iz slike 34 se može zaključiti kako se s povećanjem krutosti sustava ranije opisana rezonancija premješta u više frekvencije što je u skladu s fizikalnošću problema. Dijagram pokazuje kakav bi trend imala krivulja u slučaju kada bi u sustavu bila izbjegnuta rezonancija konstrukcije na kojoj je uklješteno užje. Zbog ograničenja prilikom ispitivanja, nije se moglo posvetiti više pažnje izbjegavanju opisane pojave. Zaključuje se kako histerezna konstanta prigušenja ima skok u

vrijednosti oko frekvencije 30 Hz. Rezimirajući, utjecaj ima rezonancija ploče, ali i pojava viših harmonika u uzbudnoj funkciji je također prisutna do frekvencije od 30 Hz. Tek se u petljama histereze od 25 do 30 Hz prestaje zamijećivati kako krivulja sječe samu sebe. Pri nižim frekvencijama je teško pouzdano odrediti vrijednost prigušenja pa se kao referentne vrijednosti uzimaju konstante prigušenja za frekvencije ispitivanja veće od 25 Hz.

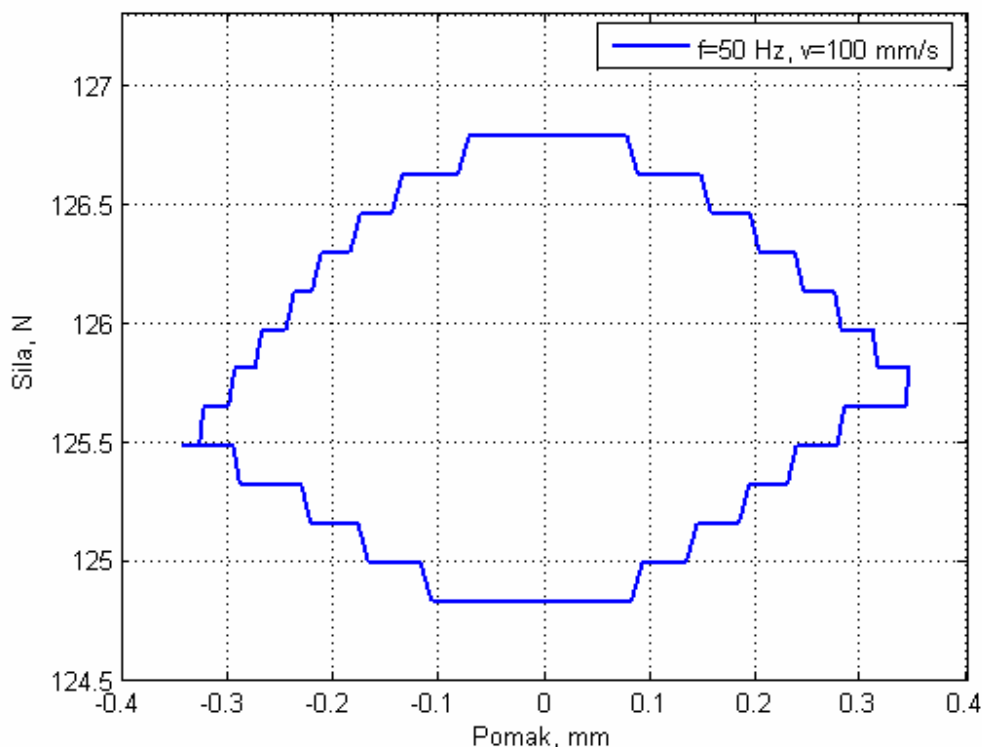


**Slika 35. Ovisnost histerezne konstante prigušenja o frekvenciji za različite amplitude brzine**

U dijagramima se zamijećuje i skok koji se pojavljuje pri ispitnoj frekvenciji od 40 Hz. Porijeklo ovog skoka nije poznato i postoji mogućnost da je prigušna karakteristika užeta skokovita zbog prisutnosti trenja među žicama. Zbog te nesigurnosti, prilikom izračuna histerezne konstante prigušenja u obzir su uzeti svi skokovi. Sad se može i potvrditi činjenica kako je najveći izvor nelinearnosti u sustavu upravo čelično uže koje povezuje stezaljku sa utezima prigušivača.

Najveća je nelinearnost upravo kod prigušenja zbog kompleksne strukture užeta i mnogo utjecajnih faktora. Radi prikazivanja nelinearnosti svojstava užeta, provedeno je i ispitivanje pri amplitudi brzine vibracija od 150 mm/s koje je prikazano u usporedbi sa ispitivanjem pri 100 mm/s (slika 35). Krivulje sa slike 35 su dobivene prilikom ispitivanja kada sustav nije bio dodatno ukrućen. Za različite amplitude brzine vibracija mijenja se i konstanta prigušenja, no krivulja ima isti trend. S obzirom na veličinu promjene brzine, promjena konstante prigušenja nije toliko značajna. Promjena prigušenja s brzinom u nastavku nije dalje razrađena, a prilikom određivanja konstante prigušenja najviše je mjerenja provedeno za amplitudu brzine vibracija od 100 mm/s što je brzina preporučena standardom [8].

Zamijećeno je kako se ispitno uže duljine 200 mm u rezonanciji našlo pri frekvencijama oko 50 Hz. To je uočeno iz petlje histerese koje su poprimile oblik horizontalne elipse, a primjer je prikazan slikom 36.



Slika 36. Petlja histerese za frekvenciju 50 Hz i amplitudu brzine 100 mm/s

Prikazanu petlju histereze se može iskoristiti za određivanje prigušenja. Kad je sustav u rezonanciji elastične i inercijske sile se međusobno poništavaju, dok prigušna sila opstaje u istom obliku, proporcionalna pomaku. Stoga, rezonancija ne utječe na površinu petlje histereze već samo na njen nagib. Prilikom ispitivanja se ovaj oblik petlje histereze najčešće javljao u frekvencijskom rasponu od 50 do 55 Hz.

Nakon što su detaljno obrađene pojave i problemi koji su se pojavili prilikom snimanja petlje histereza i određivanja histerezne konstante prigušenja, može se pristupiti izračunu srednje vrijednosti prigušenja za svako ispitivanje. U tablici 1 su prikazani podaci za svako izvršeno mjerenje sa izračunatom srednjom vrijednošću histerezne konstante prigušenja. Prilikom izračuna srednje vrijednosti prigušenja zanemarene su frekvencije manje od 26 Hz, sukladno ranije opisanim razlozima.

R. Br. Ispitivanja	Amplituda brzine, mm/s	Srednja histerezna konstanta prigušenja, N/m	Ukruta
1.	100	3401.49	-
2.	100	3121.90	-
3.	150	3660.39	-
4.	50	3218.23	-
5.	50	2343.54	-
6.	100	2906.38	+
7.	150	3005.58	+
<b>Srednja vrijednost prigušenja</b>		<b>3093.93</b>	

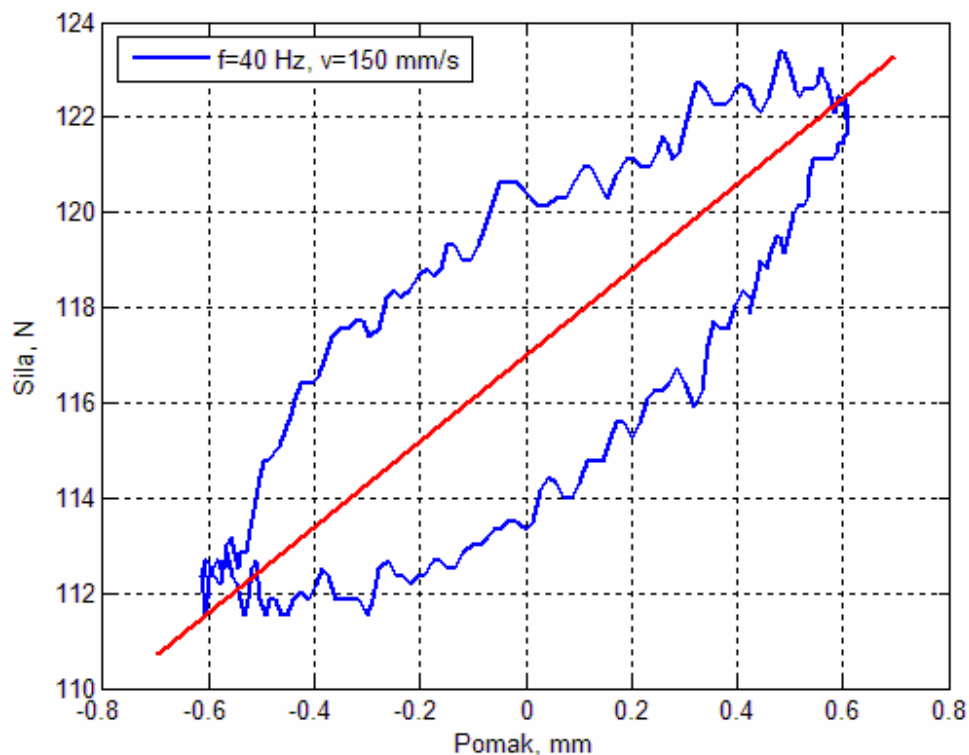
**Tablica 1. Pregled rezultata eksperimentalnog određivanja prigušenja užeta**

U tablici 1 su redom dana mjerenja koja su izvršena u Dalekovod-Laboratoriju korištenjem navedene opreme i računalnih alata. Označeno je pri kojoj se amplitudi brzine vibracija mjerenje provodilo, izračunata je srednja histerezna konstanta prigušenja za svako mjerenje te je dan podatak i o korištenju ukrute. Minus označava da ukruta nije korištena, a plus označava korištenje ukružene ploče.

## 4.2. Određivanje krutosti čeličnog užeta

Najlakši način određivanja krutosti užeta je statičkim pokusom kojim se snima krivulja  $F = F(x)$ , no zbog nemogućnosti korištenja potrebne opreme krutost užeta je određena na alternativni način. Iz petlji histereze snimljenih na eksperimentalnom postavu prikazanom slikom 31 moguće je daljnjom analizom odrediti i krutost čeličnog užeta. Površina petlje histereze ovisi o iznosu histerezne konstante prigušenja dok njezin nagib ovisi o iznosu krutosti užeta.

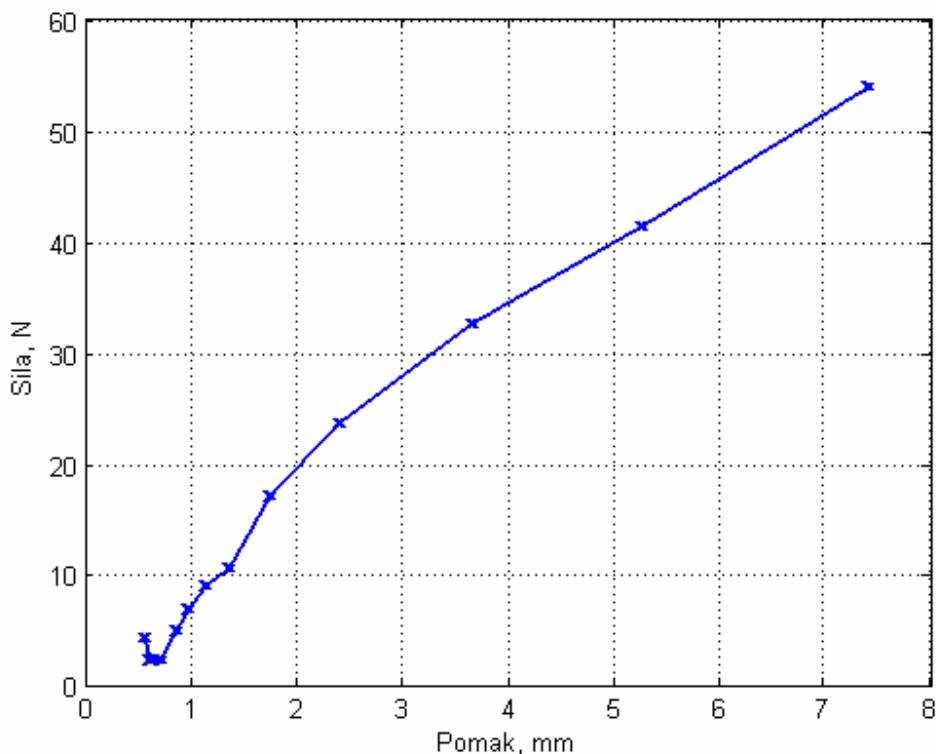
### 4.2.1. Linearna karakteristika krutosti



Slika 37. Petlja histereze za frekvenciju 40 Hz i amplitudu brzine 150 mm/s s prikazanim nagibom petlje

U ovom poglavlju se krutost čeličnog užeta smatra linearnom, tj. da se nagib krivulje u dijagramu sila-pomak ne mijenja s pomakom. Imajući to na umu je izračunat iznos savojne krutosti užeta na temelju izmjerenih podataka tj. nelinearno je ponašanje krutosti užeta aproksimirano linearnim, a detaljnije objašnjenje nelinearnosti užeta je obrađeno u poglavlju 4.2.2.

Postupak određivanja krutosti iz snimljenih petlji histereze je objašnjen pomoću slike 37 koja prikazuje petlju histereze snimljenu pri frekvenciji od 40 Hz i amplitudi brzine od 150 mm/s. Crveni pravac spaja vrhove zatvorene petlje histereze koja je elipsoidnog oblika i njegov nagib je upravo jednak konstanti krutosti čeličnog užeta na zadanoj frekvenciji koja, uz brzinu, određuje amplitudu pomaka. Za svaku su snimljenu petlju histereze određeni vrhovi petlje i izračunata razlika u iznosu sila i pomaka u vrhovima petlje.

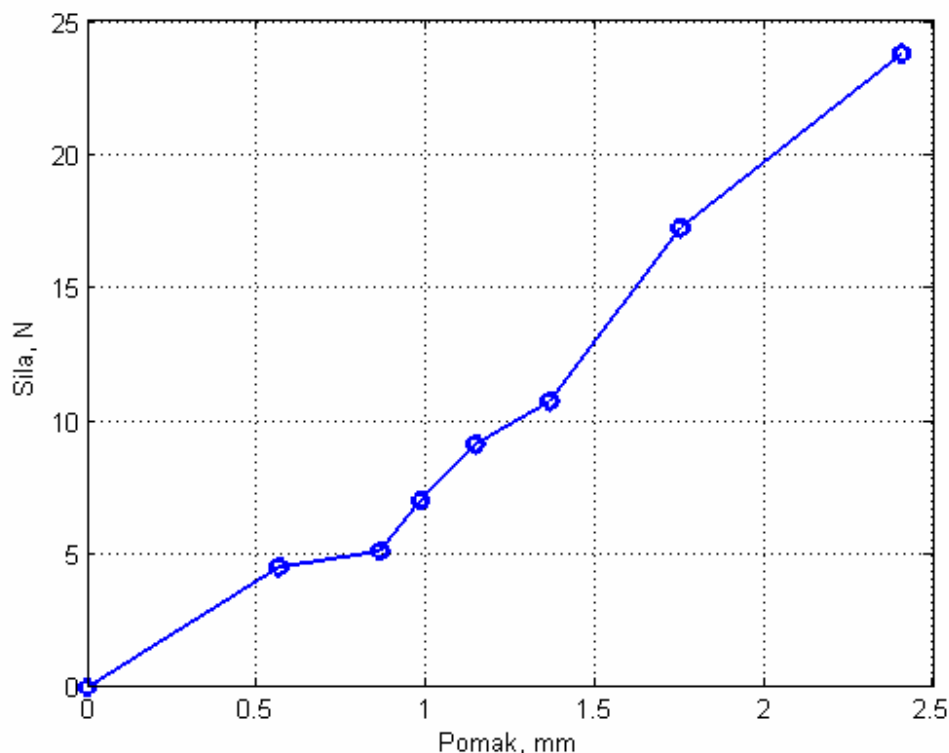


Slika 38. Krivulja sila-pomak dobivena iz mjerenja pri amplitudi brzine 100mm/s

Kako bi se dobilo pouzdanije rezultate, krutost nije određivana na temelju nagiba jedne petlje histereze već su za svaku petlju histereze određene razlike u

iznosu sile i pomaka u vrhovima petlje. Gornjim se postupkom za svako ispitivanje, kojim su snimane petlje histereze za frekvencije od 5 do 60 Hz, crtao dijagram  $\Delta F - \Delta x$  pomoću izračunatih vrijednosti iz petlji histereze. Na slici 38 je prikazan dijagram  $\Delta F - \Delta x$  za mjerenje izvršeno pri amplitudi brzine vibracija od 100 mm/s.

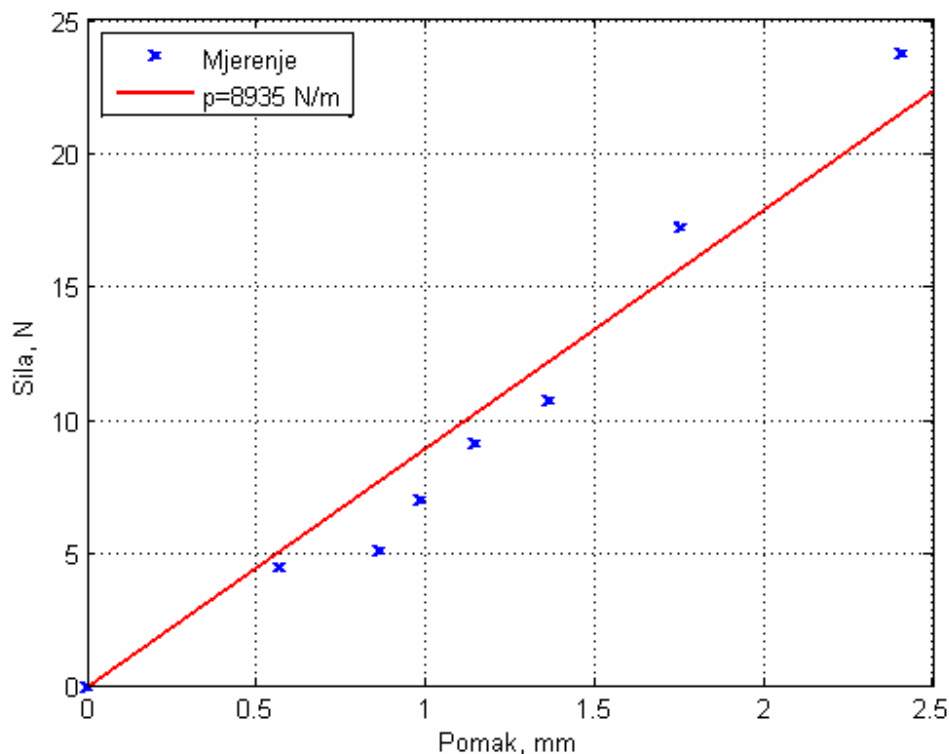
Prilikom analize, najmanje se vrijednosti pomaka dobivaju za najveće frekvencije, a za najniže se frekvencije dobivaju najveći pomaci. Na temelju te činjenice zaključuje se kako, sukladno objašnjenjima iz poglavlja 4.1., treba zanemariti dio krivulje koja se odnosi na niže frekvencije. Razlog tomu je nepouzdanost mjerenja pri nižim frekvencijama što uzrokuje petlju histereze koja sjeće samu sebe. Međutim, iz petlji za niže frekvencije je također moguće odrediti nagib petlje. Pokazuje se da je moguće odrediti nagib petlje histereze za frekvencije veće od 15 Hz, pa su iz daljnje analize izuzete petlje histereze snimljene za frekvencije ispod 15 Hz.



Slika 39. Krivulja sila-pomak nakon filtriranja podataka dijagrama sa slike 38



Također, u poglavlju 4.1. je objašnjena i pojava rezonancije užeta na frekvencijama koje se nalaze u okolici 50 Hz. Na tim frekvencijama je nagib petlje histereze približan nuli te su u daljnoj analizi rezultati dobiveni iz petlji histereze koje se nalaze u okolici rezonancije užeta zanemareni. Kako se rezonancija nije svaki put pojavila na točno 50 Hz, bilo je potrebno u najviše slučajeva zanemariti podatke o silama i pomaku za frekvencije od 45, 50 i 55 Hz, tj. za frekvencije u okolici rezonantne. Na slici 38 se vidi kako se rezonancija pojavila na višim frekvencijama zbog nultog nagiba krivulje pri malim pomacima, ali pri frekvenciji od 60 Hz (točka najbliža ishodištu) opet postoji veći nagib petlje. Nakon odbacivanja točaka i dodavanja ishodišta kao početne točke, dijagram sa slike 38 prelazi u oblik prikazan slikom 39 na kojoj je karakteristika užeta (dijagram sila-progib) puno bolje opisana.



Slika 40. Interpolacija rezultata dobivenih iz analize petlji histereze

Daljnji postupak određivanja konstante krutosti se sastoji interpolaciji filtriranih podataka (točaka u dijagramu sila-progib) pomoću računalnog alata

MATLAB, modul Curve Fitting Tool. Točke su interpolirane krivuljom prvog reda tj. pravcem. Interpolacija daje za rezultat nagib pravca  $p$ , a matematički oblik interpolacijskog pravca je

$$F = p \cdot x,$$

iz kojeg se vidi da on uvijek polazi iz ishodišta, što je postavljeno kao uvjet interpolacije da bi se dobila što realnija rješenja.

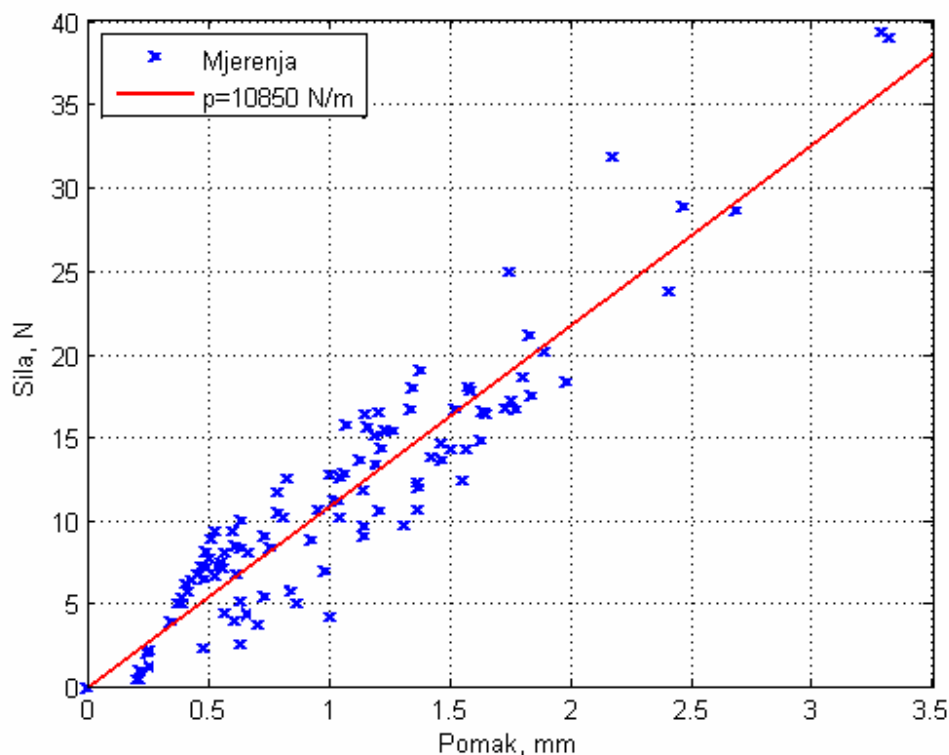
Slika 40 prikazuje interpolaciju rezultata sa slike 39. Plavim križićima na slici su prikazane točke koje su izračunate iz petlji histereze, a interpolacijski je pravac crvene boje. U opisu je dan iznos nagiba pravca (iako je dijagram u milimetrima i njutnima, nagib pravca je iznesen u njutnima po metru). U slučaju da je krutost čeličnog užeta linearna, tada bi se nagib dobivenog pravca mogao uzeti kao konstanta krutosti, no to nije slučaj (poglavlje 4.2.2.).

R. Br. Ispitivanja	Nagibi pravaca dobiveni interpolacijom, N/m
1.	8935
2.	10530
3.	14650
4.	14010
5.	10960
6.	9239
7.	13290
<b>Srednja vrijednost krutosti</b>	<b>11659</b>

**Tablica 2. Pregled rezultata eksperimentalnog određivanja krutosti užeta**

Tablica 2 prikazuje rezultate dobivene opisanom analizom. Prikazani su nagibi interpolacijskih pravaca izračunati iz svakog pojedinog mjerenja, te je na kraju iz njih izračunata srednja vrijednost nagiba pravaca. Iz tablice je vidljivo da se nagib interpolacijskog pravca dobivenog za mjerenja čeličnog užeta duljine 200 mm i uklještenog na jednom kraju kreće u rasponu od 8935 N/m do maksimalne vrijednosti od 14650 N/m.

Konstantu krutosti za slučaj linearne karakteristike užeta na eksperimentalnom postavu se, koristeći snimljene i izračunate podatke, može dobiti i na način da se svi podaci dobiveni iz petlji histereze (razlike sila i pomaka u vrhovima petlji) promatraju zajedno u istom dijagramu i pomoću te grupe točaka se odredi interpolacijski pravac, tj. njegov nagib. Na slici 41 je prikazan pravac koji je dobiven interpolacijom grupe točaka koja je u dijagramu prikazana križićima.



Slika 41. Interpolacija grupe točaka svih mjerenja

Zaključuje se kako je ovaj način određivanja krutosti relativno nepouzdan i kao rezultat se dobiva raspon u kojem se kreće krutost užeta. Razlozi zbog kojih je ova metoda neprecizna leže u već opisanim (poglavlje 4.1.) pojavama i problemima koji se javljaju prilikom ispitivanja užeta na eksperimentalnom postavu. Rezultat provedenog ispitivanja jest da se krutost užeta (linearna karakteristika) kreće u rasponu od 10850 N/m, što je najniža dobivena vrijednost,

do vrijednosti 11659 N/m dobivene kao srednje vrijednosti nagiba pravaca dobivenih iz svakog mjerenja zasebno.

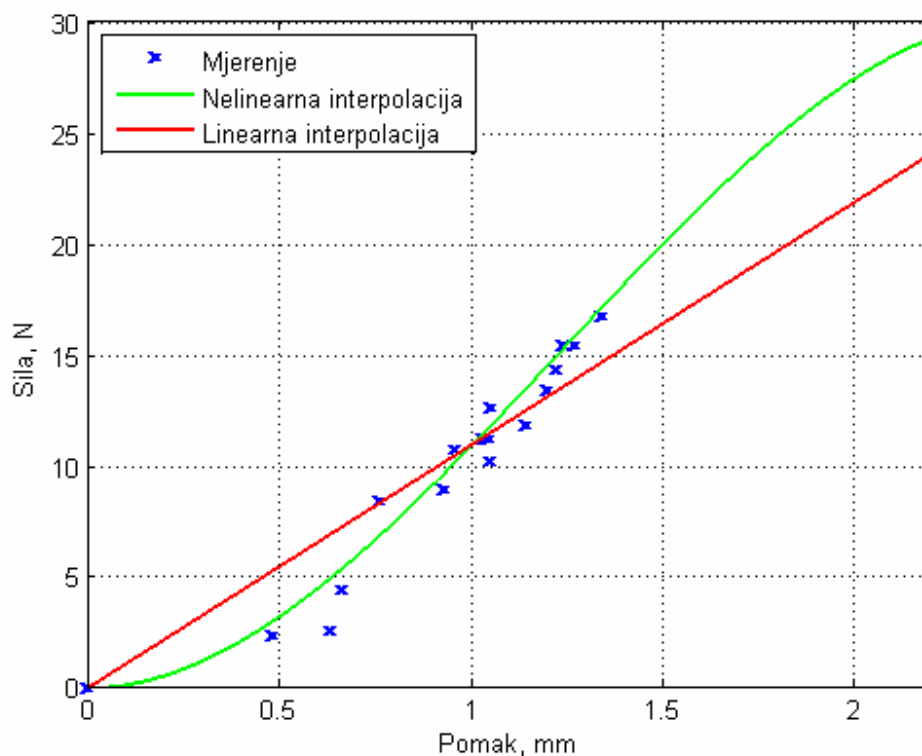
U proračunu prigušivača ovako izračunata krutost nije od koristi zbog različite duljine užeta na prigušivačima. Ispitni duljina užeta iznosi 200 mm, te se iz tog podatka, poznavajući izraz za krutost konzole (poglavlje 3.2.2.), može izračunati vrijednost savojne krutosti užeta. Proračunom se dobiva da je vrijednost savojne krutosti ( $EI$ ), za manji iznos krutosti konzole, jednak 28,933 N·m<sup>2</sup>. Usporedbom vrijednosti dobivenih ovim mjerenjem i vrijednosti koje se mogu pronaći u dostupnoj literaturi, pokazuje se kako se rezultati mjerenja dobro poklapaju. Prema [10], za uže promjera 9 mm (žice promjera 3 mm) vrijednost savojne krutosti iznosi 31,8 N·m<sup>2</sup>. Ispitivano uže je promjera 11 mm, ali su žice tanje, promjera 2,25 mm. Razlika u vrijednosti savojne krutosti leži u različitoj strukturi užeta, kao i u različitim promjerima žica iz kojih je uže pleteno (iz tog razloga se za deblje uže dobije približno jednaka krutost u odnosu na tanje uže iz [10]). Ovim se razmatranjem pokazuje kako je konstantu krutosti, prilikom njezinog određivanja opisanim postupkom, bolje računati iz skupnih podataka za sva mjerenja i pritom se držati nižih vrijednosti.

U poglavlju 5. je izvedeni analitički model prigušivača, sa eksperimentalno određenim parametrima, verificiran na eksperimentalnom prigušivaču pojednostavljene konstrukcije. Pokazalo se kako se vlastite frekvencije dobivene modelom, koje prvenstveno zavise od krutosti užeta i mase, te geometrije utega, jako dobro poklapaju sa eksperimentalno snimljenim frekvencijama. To je još jedan dokaz kako je ova metoda određivanja savojne krutosti užeta dala dobre rezultate. Međutim, pomnijom analizom gornjih dijagrama vidi se da je stvarna karakteristika krutosti užeta u stvari nelinearna što dovodi do zaključka da krutost užeta ovisi o iznosu pomaka.

#### 4.2.2. Nelinearna karakteristika krutosti

U ovom poglavlju je ukratko opisana nelinearna karakteristika užeta. Uključivanje nelinearnosti svojstava čeličnog užeta zahtjevalo bi izvod nelinearnog matematičkog modela prigušivača što je izvan okvira ovog rada. Također, proučavanje nelinearnog ponašanja krutosti čeličnog užeta zahtjevalo bi provođenje dodatnih ispitivanja.

Razmatranjem dijagrama sa slike 39, ili skupnih rezultata sa slike 41 može se uočiti kako je ponašanje karakteristike užeta (u pogledu krutosti) nelinearno. Za male iznose pomaka karakteristika je tvrda dok se zbog nedostataka podataka za veće pomake ne može procjeniti ponašanje karakteristike. Slikom 42 je prikazana usporedba nelinearne i linearne interpolacije rezultata dobivenih iz analize petlji histereze.



Slika 42. Usporedba linearne i nelinearne interpolacije

Rezultati koji su dobiveni linearnom interpolacijom se mogu smatrati donekle dobrima ukoliko se u dijagramu prikazanom slikom 42 promatraju površine ispod linearne i nelinearne karakteristike. Za pomake veće od 1.5 mm nema dovoljno podataka za nelinearnu interpolaciju i općenito nije moguće odrediti niti pretpostaviti ponašanje karakteristike za veće pomake..

Ova analiza je preglednog karaktera i služi da se ukaže na nelinearno ponašanje krutosti čeličnog užeta. Za ozbiljnije razmatranje nelinearnog ponašanja užeta i preciznije određivanje zamjenske konstante krutosti (za linearni model krutosti) trebalo bi pristupiti razmatranju potencijalnih energija za slučaj linearnog i nelinearnog ponašanja užeta.

Zbog opisane nelinearnosti, u poglavlju 5. je u dijagramu apsolutnog iznosa mehaničke impedancije, impedancija prikazana kao familija krivulja čiji je parametar krutost užeta kako bi se dodatno potkrijepila tvrdnja o nelinearnosti užeta.

## 5. Usporedba analitičkih i eksperimentalnih rezultata

U svrhu verifikacije ispravnosti analitičkog modela prigušivača kao i provjere ispravnosti eksperimentalno određenih parametara čeličnog užeta (poglavlje 4.) u Dalekovod-Laboratoriju je razvijen eksperimentalni uzorak prigušivača tipa Stockbridge. Ispitni je prigušivač zatim podvrgnut standardom [8] propisanom postupku određivanja karakteristike koja je zatim uspoređena s karakteristikom dobivenom analitičkim modelom.

### 5.1. Ispitni prigušivač

Ispitni prigušivač tipa Stockbridge je u razvoju koncipiran da bude simetričan kako bi se snimanjem dobila što jednostavnija karakteristika prigušivača sa samo dvije rezonancije. Da bi bilo što jednostavnije odrediti moment tromosti utega oni su izvedeni kao cilindri poznatih dimenzija i mase.



Slika 43. Ispitni prigušivač

Slikom 43 je prikazan izgled ispitnog prigušivača. U sredini se nalazi stezaljka kojom se prigušivač pričvršćuje na užu dalekovoda, a u ovom slučaju na posebno izrađen prihvat na vibratoru. Na stezaljku je uklješteno užo kakvo se

ispitivalo u poglavlju 4., promjera 11 mm, a na krajevima se nalaze dva utega istih dimenzija i svojstava. Uklještenje užeta na utege je izvedeno pomoću vijaka, a da bi veza bila što čvršća na svakom utegu je postavljeno osam vijaka dimenzije M10.



**Slika 44. Uteg pričvršćen na glasničko uže**

Utezi su na glasničkom užetu smješteni simetrično, dakle na istim udaljenostima od stezaljke. Vijci kojima su utezi pričvršćeni na uže nakon pritezanja izlaze izvan osnovnog (cilindričnog) tijela utega što je prikazano na slici 44. Također je bitno napomenuti kako, zbog nejednakih dužina užeta na jednom i drugom kraju prigušivača, na jednom kraju postoji malen višak užeta nakon postavljanja utega na jednaku udaljenost od stezaljke.

Utjecaj dijela vijaka koji su izvan osnovne geometrije utega na moment tromosti utega je malen i on je, kao i masa dijela užeta koji je viška s jedne strane, zanemaren. Centralni moment inercije utega oko referentne osi je izračunat iz modela utega izrađenog u programskom paketu Pro/ENGINEER, a radi sigurnosti je dobivena vrijednost provjerena i pomoću analitičkog izraza za moment tromosti iz literature [12]. Utezi su izvagani zajedno s vijcima, dok je masi stezaljke (stezaljka s užetom) pridodana i masa prihvata na vibrator što je u analitički model uvršteno kao masa stezaljke. U tablici 3 su dani parametri



prigušivača iz kojih se u analitičkom modelu izračunala karakteristika prigušivača.

R. Br.	Parametar	Oznaka	Iznos i mjerna jedinica
1.	Masa utega D	$m_L$	0,850 kg
2.	Masa utega L	$m_D$	0,852 kg
3.	Masa stezaljke s užetom	$m'_S$	0,566 kg
4.	Masa prihvata	$m_P$	0,686 kg
5.	Masa stezaljke (3.+4.)	$m_S$	1,252 kg
6.	Moment inercije utega u težištu	$J_C$	0,0003078 kg·m <sup>2</sup>
7.	Duljina užeta do uklještenja	$L$	0,1325 m
8.	Udaljenost težišta od uklještenja	$l$	-0,008 m

**Tablica 3. Inercijski i geometrijski parametri ispitnog prigušivača**

Za svojstva užeta u analitičkom modelu je uvrštena vrijednost histerezne konstante prigušenja od 3093,93 N/m (poglavlje 4.1.), dok je konstanta krutosti, zbog svog izrazito nelinearnog ponašanja (poglavlje 4.2.2.), uvrštena kao poseban parametar u čijoj su ovisnosti dane familije krivulja u karakteristici prigušivača.

## 5.2. Analiza rezultata

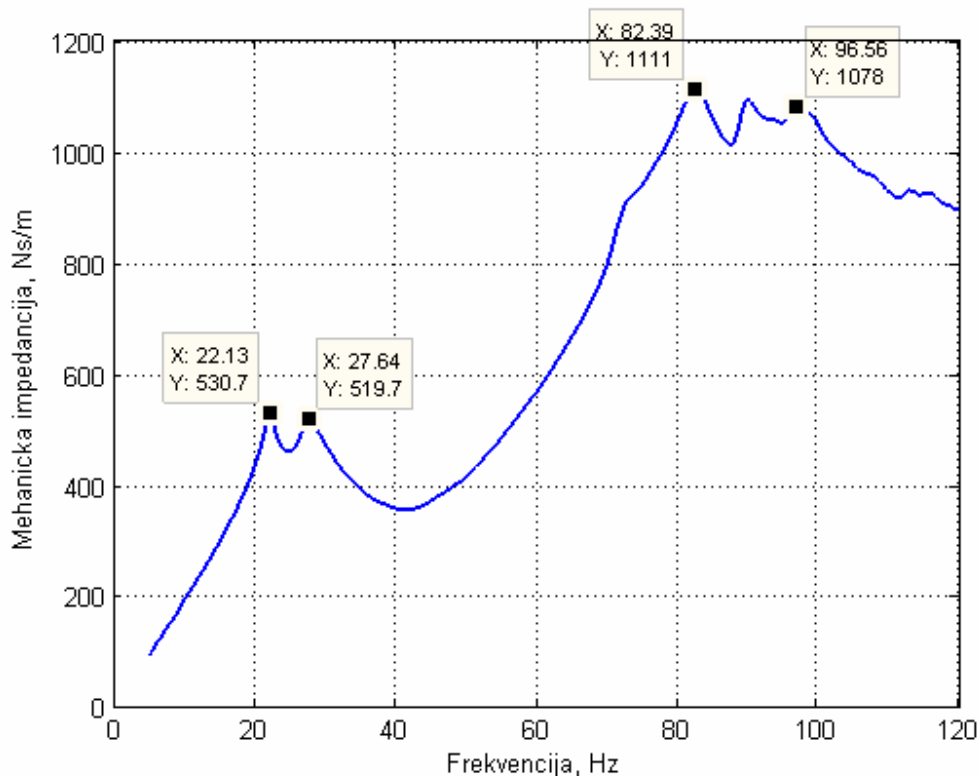
Analiza rezultata se provodi u dva koraka. Prvo se obrađuju vlastite frekvencije sustava prigušivača gdje se eksperimentalno snimljeni podaci uspoređuju s analitički određenim rezonantnim frekvencijama, a osvrće se i na rezonantne frekvencije određene pomoću aproksimativne metode opisane u poglavlju 3.3. Također je određen i omjer amplituda vibracija stupnjeva slobode za glavne forme vibriranja. U drugom dijelu analize obrađuje se mehanička impedancija prigušivača, fazni kut impedancije te disipirana snaga prigušivača.

### 5.2.1. Vlastite frekvencije, glavne forme vibriranja

Vlastite frekvencije ispitnog prigušivača su određene iz dijagrama mehaničke impedancije prikazanog slikom 45. Vidi se iz dijagrama kako u prvoj rezonanciji postoje dvije vlastite frekvencije. Prva je misao bila da je to uslijed nesimetričnosti ispitnog prigušivača, no usporedbom s rješenjima koja daje analitički model ispostavilo se da problem leži u nelinearnostima karakteristika užeta te mogućoj nesimetriji prigušnih i elastičnih svojstava krajeva prigušivača. Na dijagramu su označene i koordinate vrhova krivulje koja daje apsolutni iznos mehaničke impedancije. Određene su vlastite frekvencije ispitnog prigušivača pri čemu se prva rezonantna frekvencija kreće u rasponu  $22,13\text{Hz} < f_{1\text{exp}} < 27,64\text{Hz}$ , dok se druga rezonantna frekvencija ispitnog prigušivača nalazi u području  $82,39\text{Hz} < f_{2\text{exp}} < 96,56\text{Hz}$ . U analitičkom se modelu, kako je navedeno na kraju poglavlja 5.1., iznos prigušenja držao konstantnim dok se iznos krutosti čeličnog užeta mijenjao. Najbolje je podudaranje u iznosima vlastitih kružnih frekvencija između analitičkog modela i eksperimentalnog snimanja postignuto za iznos savojne krutosti  $EI$  jednak  $20,027 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ . U tom se slučaju, iz analitičkog modela,

dobiju vrijednosti vlastitih frekvencija (nepriгуšeni sustav)  $f_{1D} = 24,871\text{Hz}$ ,  $f_{2D} = 248,52\text{Hz}$ ,  $f_{1L} = 24,899\text{Hz}$ ,  $f_{2L} = 248,53\text{Hz}$ .

Vidi se iz vrijednosti vlastitih frekvencija kako je podudaranje dobro u prvoj vlastitoj frekvenciji dok je razlika u iznosu druge vlastite frekvencije jako velika i neprihvatljiva.



**Slika 45. Eksperimentalno snimljena krivulja impedancije ispitnog prigušivača**

Uzrok tako velike razlike u iznosima proračunatog i snimljenog položaja druge rezonantne frekvencije leži u nepoznavanju parametara krutosti za jako male pomake. Naime, eksperimentalno određivani parametri, krutost i prigušenje, su određivani za frekvencije do 60 Hz, a karakteristika ispitnog prigušivača je snimana do frekvencije od 120 Hz. Iz tog se razloga razmatra područje do frekvencije od 60 Hz, a koje obuhvaća samo prvu rezonanciju prigušivača pošto su za to područje poznati parametri čeličnog užeta (ili raspon unutar kojeg se kreću njihovi iznosi).

Pogodno je ove rezultate usporediti i s rezultatima za rezonantne frekvencije dobivene pomoću aproksimativne metode kad se sustav s dva stupnja slobode rastavlja u dva sustava s po jednim stupnjem slobode. Primjenom te metode dobiju se vrijednosti vlastitih frekvencija  $f_{1DA} = 27,71\text{Hz}$ ,  $f_{2DA} = 205,59\text{Hz}$ ,  $f_{1LA} = 27,74\text{Hz}$ ,  $f_{2LA} = 205,62\text{Hz}$ . Indeks A označava da su frekvencija dobivene aproksimativnom metodom. Radi zornijeg prikaza, svi su rezultati za vlastite frekvencije prikazani u tablici 4.

	Rezonancija	Eksperiment, Hz	Analitički model, Hz	Aproksimacija, Hz
Desno	1.	22,13 – 27,64	24,871	27,71
	2.	82,39 – 96,56	248,52	205,59
Lijevo	1.	22,13 – 27,64	24,899	27,74
	2.	82,39 – 96,56	248,53	205,62

**Tablica 4. Pregled vlastitih frekvencija prigušivača**

Usporedbom rezultata zaključuje se kako je aproksimativna metoda daje najveći iznos prve vlastite frekvencije, a razlika između analitičkih i aproksimativnih rezultata iznosi 11,8% za prvu rezonantnu frekvenciju, odnosno 17,3% u drugoj rezonantnoj frekvenciji. To dovodi do zaključka kako je aproksimativna metoda pogodna za grubu procjenu vlastitih frekvencija, posebice prve gdje je preciznost cijele analize puno veća.

Omjeri vlastitih frekvencija ispitnog prigušivača se kreću u rasponu 2,98 do 4,36, ovisno o tome koji se iznos uzima kao relevantan. Ukoliko se uzme da je rezonancija ispitnog prigušivača aritmetička sredina očitanih frekvencija, tada taj omjer postaje 3.59. Te se vrijednosti poklapaju s onima koje se navode u literaturi [6]. Analitički model daje omjer vlastitih frekvencija u iznosu 9,99, a aproksimativni pristup daje omjer od 7,42. Međutim, zbog nepoznavanja parametara čeličnog užeta u okolici druge rezonantne frekvencije ovi se podaci ne mogu uzeti kao relevantni.

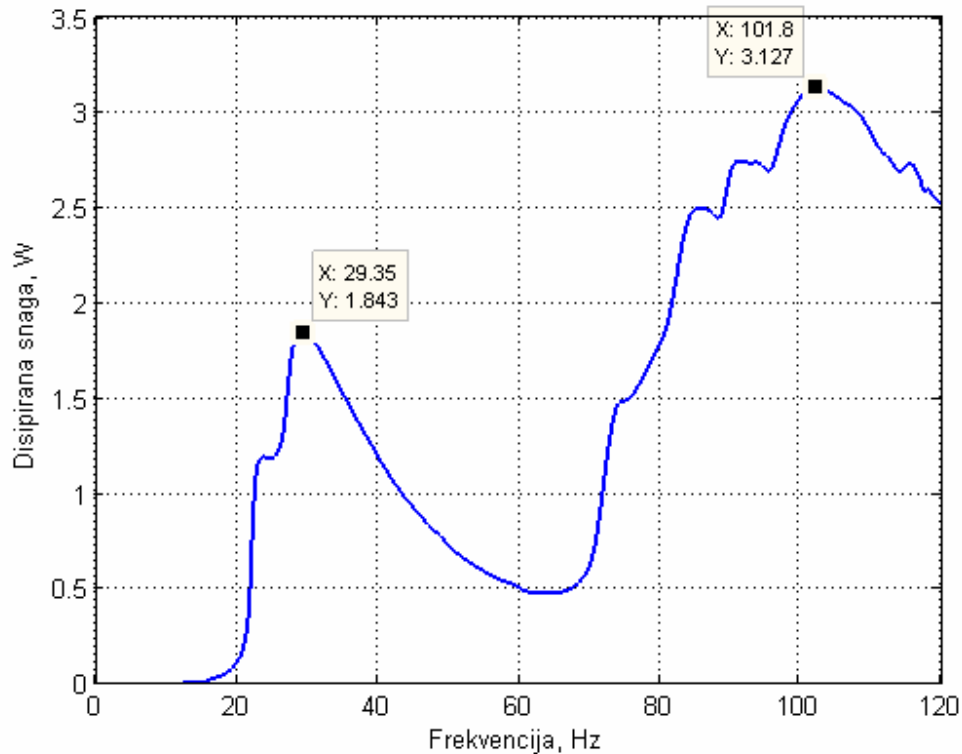
Ovdje se još provjeravaju i forme vibriranja, tj. koliki je omjer amplituda stupnjeva slobode u rezonantnim frekvencijama. Uvštenjem iznosa vlastitih kružnih frekvencija (analitički rezultat) u izraz (3.33) može se odrediti omjer amplituda vibracija stupnjeva slobode. Tako se dobivaju iznosi omjera amplituda  $\rho_{1D} = -11,77 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$ ,  $\rho_{2D} = 84,13 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$ ,  $\rho_{1L} = -11,77 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$ ,  $\rho_{2L} = 84,07 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$ , gdje je omjer amplituda jednak

$$\rho = \frac{\hat{\phi}}{\hat{x}_A}.$$

Konkretno, ovi rezultati za omjere amplituda se mogu protumačiti na sljedeći način. Ukoliko je u prvoj rezonantnoj frekvenciji iznos vertikalnog pomaka točke A jednak 1 mm, vrijednost kutnog pomaka u toj rezonanciji iznosi  $-0,67^\circ$ . Ako se ta vrijednost zakreta pretvori u vrijednost pomaka u težištu ( $x = l \cdot \hat{\phi}$ ) dobije se vrijednost od 0,094 mm. Time se pokazuje kako u je prvoj vlastitoj frekvenciji zaista dominantan utjecaj vertikalne translacije utega dok su rotacije jako malene. Ukoliko se ista analiza provede za drugu rezonanciju, za vertikalni pomak utega od 1 mm dobije se zakret utega od  $4,82^\circ$  (pomak u težištu iznosa  $-0,673$  mm). Ovdje je pretpostavka o dominantnosti kutnih zakreta utega upitna i to je vjerojatno jedan od uzroka razlike u iznosima druge rezonantne frekvencije između analitičkog modela i aproksimativne metode.

Prije no što se fokus analize prebaci na karakteristiku prigušivača potrebno je opisati položaje lokalnih ekstrema u snimljenim dijagramima mehaničke impedancije i disipirane snage. Naime, iz dijagrama se na jednostavan način određuju položaji ekstrema, no ne nalaze se na istoj frekvenciji u svakom dijagramu tj. položaj lokalnih ekstrema u dijagramu apsolutne mehaničke impedancije i dijagramu disipirane snage se ne poklapaju. U dijagramu disipirane snage lokalni se ekstremi nalaze na frekvencijama od 29,35 Hz (prvo rezonantno područje) i 101,8 Hz (drugo rezonantno područje). Vidi se da su te vrijednosti u odnosu na one iz dijagrama mehaničke impedancije

pomaknute prema višim frekvencijama. Slika 46 prikazuje položaj lokalnih ekstrema u dijagramu disipirane snage.



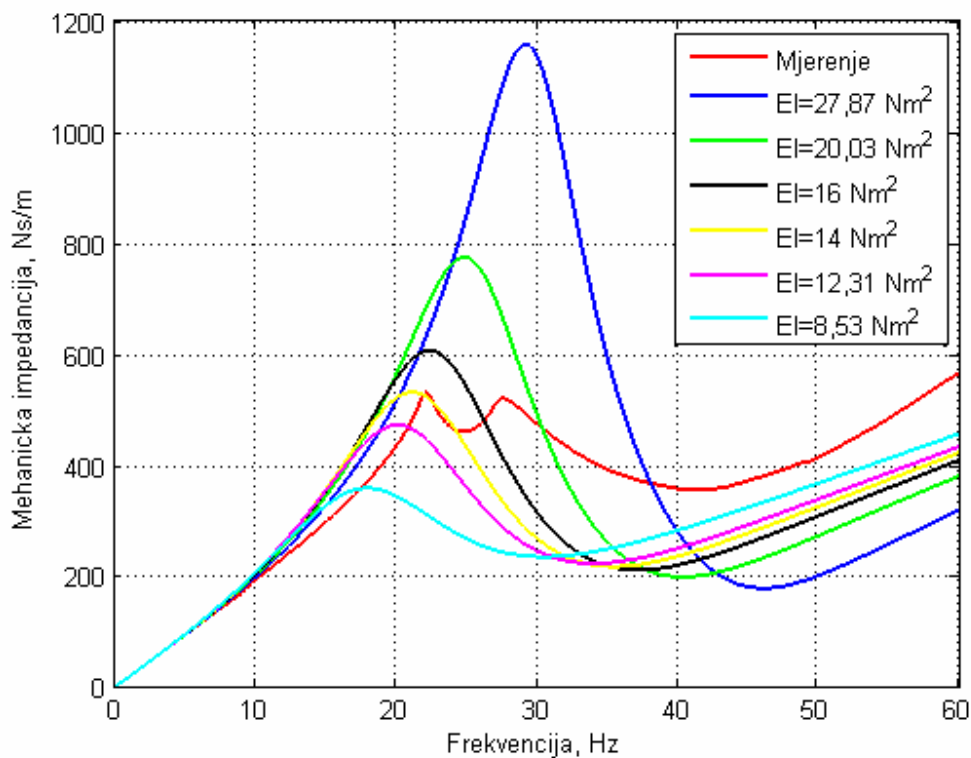
**Slika 46. Eksperimentalno snimljena krivulja disipirane snage ispitnog prigušivača**

Uzrok pomaka lokalnih ekstrema leži u prisutnosti prigušenja koje pomiče ekstreme prema području viših frekvencija tj. zbog pomaka u fazi koje uzrokuje prigušenje prigušivač ne disipira maksimalnu snagu točno u rezonanciji već postoji malen pomak.

U slučaju kad u sustavu nema prigušenja (tj. veoma malen iznos prigušenja) rezonantne se frekvencije u dijagramu mehaničke impedancije i dijagramu disipirane snage dobro poklapaju.

### 5.2.2. Mehanička impedancija, fazni kut impedancije, disipirana snaga

Dijagram apsolutne vrijednosti mehaničke impedancije je prikazan slikom 47 na kojoj je usporedno s eksperimentalno snimljenom vrijednošću impedancije prikazana familija krivulja impedancije dobivenih analitičkim modelom, a čiji je parametar savojna krutost užeta.

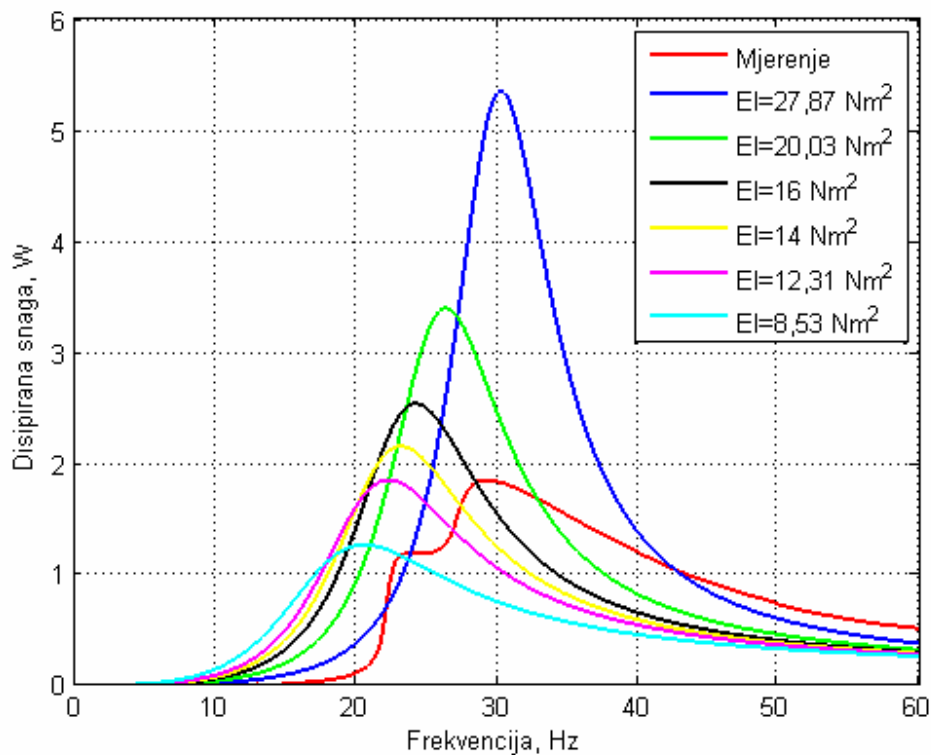


Slika 47. Usporedba rezultata za mehaničku impedanciju

Dijagram je prikazan do frekvencije od 60 Hz iz razloga što za više frekvencije nisu poznati parametri čeličnog užeta.

Sa slike 47 je vidljivo kako se s povećanjem savojne krutosti apsolutni iznos mehaničke impedancije povećava, a rezonancija se pomiče prema višim frekvencijama što je očekivani i fizikalni rezultat. Najbolje se podudaranje iznosa mehaničke impedancije u rezonanciji postiže za vrijednost savojne krutosti od 14 N·m². Pri nižim se frekvencijama, do 15 Hz, sve krivulje dobro poklapaju s

izmjenom, no općenito s porastom frekvencije razlike između izmjerenih i analitičkih rezultata su značajne. Bitno je još jednom napomenuti kako su ovi rezultati dobiveni za konstantan iznos prigušenja, a kasnije je u obzir uzeta i nelinearnost prigušnih svojstava čeličnog užeta i parametri su podešeni tako da se postigne što bolje poklapanje izmjerenih i analitičkih rezultata.

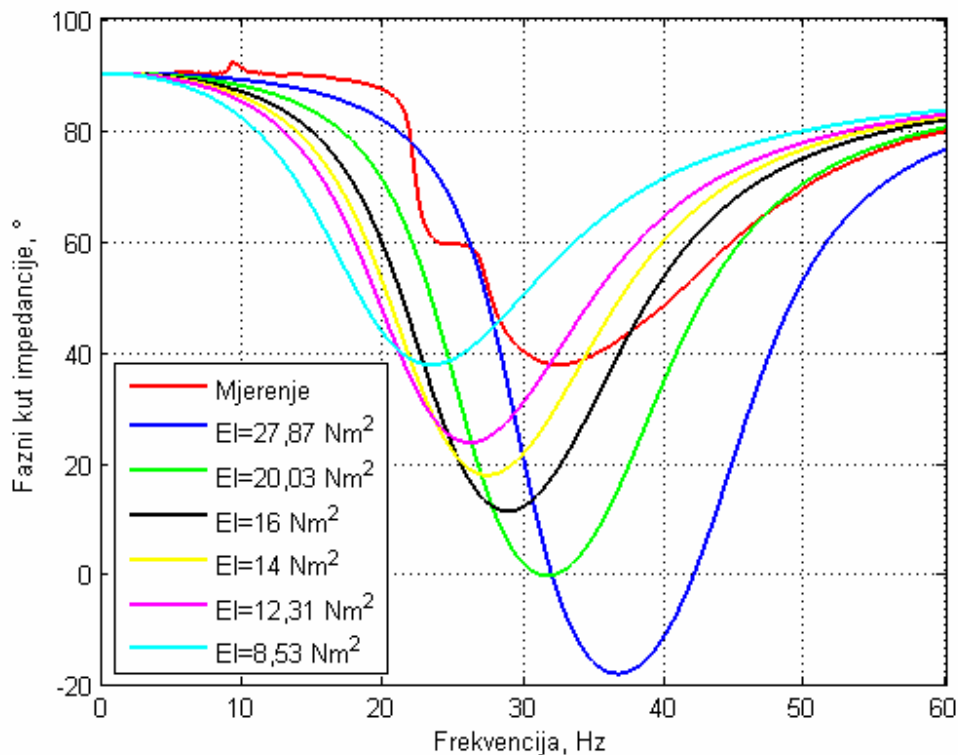


**Slika 48. Usporedba rezultata za disipiranu snagu**

Dijagram sa slike 48 prikazuje usporedbu rezultata za disipiranu snagu na prigušivaču tj. na njegovoj stezaljci. Najbolje poklapanje snage u rezonanciji se dobije za iznos savojne krutosti 12,31 N·m<sup>2</sup>.

Slika 49 prikazuje dijagram faznog kuta impedancije na kojem je uz snimljenu krivulju prikazana i familija krivulja dobivena analitičkim modelom.



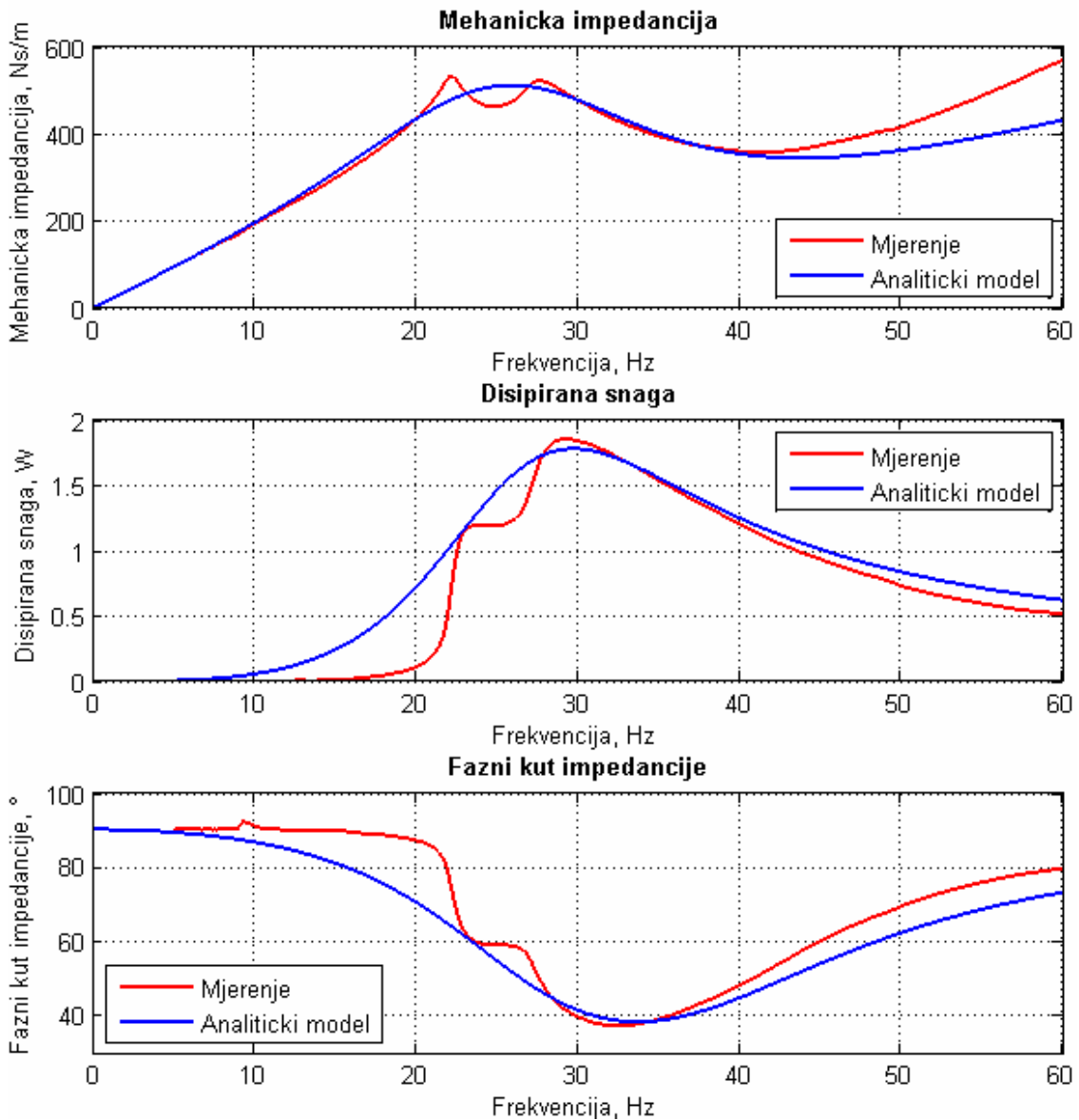


Slika 49. Usporedba rezultata za fazni kut impedancije

Najbolje poklapanje sa snimljenom vrijednošću faznog kuta impedancije u rezonanciji se postiže za iznos savojne krutosti užeta od 8,53 N·m<sup>2</sup>. Pažljivijim proučavanjem dijagrama danih slikama 47 do 49 vidi se kako se za zadovoljavanje jednog parametra u krakteristici udaljava od točne vrijednosti drugih parametra. Primjerice: smanjenjem krutosti u cilju postizanja iste vrijednosti disipirane snage udaljava se vrijednost rezonantnih frekvencija od izmjerenih, a smanjuje se i vrijednost mehaničke impedancije ispod izmjerene.

Prilikom ispitivanja karakteristika čeličnog užeta pokazano je kako ono posjeduje izrazito nelinearno ponašanje koje nije u detalje ispitivano zbog linearne analize u ovom radu. Upravo zbog toga se u nastavku parametre užeta podesilo na način da se rezultati analitičkog modela što bolje poklope s izmjerenom karakteristikom. Ispostavilo se kako su se karakteristike najbolje poklopile za iznos konstante histereznog prigušenja 6500 N/m i iznos savojne krutosti užeta od 17,33 N·m<sup>2</sup>. Vrijednost konstante histereznog prigušenja je

dana za ispitni primjerak užeta duljine 200 mm, uvrštavanjem iznosa savojne krutosti u izraz za krutost konzole dobije se da je krutost ispitnog primjerka užeta 6500 N/m. Zaključuje se kako se najbolji rezultati dobiju za iznos bezdimenzijske mjere prigušenja jednak jedinici. Dijagrami koji opisuju karakteristiku ispitnog prigušivača za gornji slučaj su prikazani slikom 50.



Slika 50. Karakteristika ispitnog prigušivača za  $\mu=1$

Vidi se iz dijagrama kako je poklapanje s rezultatima mjerenja jako dobro, no postavlja se pitanje zašto se u dijagramu mehaničke impedancije prva rezonancija očitava u dva lokalne ekstrema. Iako bi se moglo zaključiti kako je posrijedi nesimetričnost prigušivača pokazalo se kako ona nije geometrijske ili inercijske naravi. Problem leži u nelinearnoj karakteristici prigušenja i krutosti čeličnog užeta. Također je u obzir potrebno uzeti pojavu viših harmonika u uzbuđi koje unosi vibrator pri nižim frekvencijama (do 25 Hz), što može biti uzrok pojavi dva ekstrema u okolini prve rezonancije.

Vraćajući se na vlastite frekvencije sustava, iz eksperimentalno određenog iznosa rezonantne frekvencije može se, koristeći amproksimativne izraze za rezonantne frekvencije (3.38) i (3.39), dobiti vrijednost savojne krutosti užeta. Za prvu rezonanciju pokazuje se da je krutost užeta oko  $16 \text{ N}\cdot\text{m}^2$  pri amplitudi pomaka od oko 1,25 mm. Iz dijagrama 47 se vidi kako je poklapanje mjerenja i analitičkog rezultata za taj iznos savojne krutosti (crna krivulja) dosta dobro, a odstupanja se mogu pripisati greški u iznosu prigušenja.

Iako područje druge rezonancije ovdje nije razmatrano, može se i iz njega odrediti iznos savojne krutosti. Dobije se vrijednos od  $2,9 \text{ N}\cdot\text{m}^2$  pri amplitudi pomaka od približno 0,1 mm. To potkrepljuje raniju tvrdnju da je karakteristika krutosti čeličnog užeta izrazito tvrda. Nadalje, pomnijom analizom dijagrama ovisnosti histerezne konstante prigušenja (poglavlje 4.1.) o frekvenciji može se pokazati kako ona povećanjem frekvencije opada. Uzimanjem te tendencije pada u obzir pokazuje se kako je iznos bezdimenzijskog parametra prigušenja (omjer histerezne konstante prigušenja i krutosti konzole) blizak iznosu parametra u prvoj rezonanciji.

## 6. Zaključak

U radu je opisan uzrok i mehanizam nastanka eolskih vibracija vodiča dalekovoda, kao i vibracijski sustav užeta dalekovoda s montiranim prigušivačem tipa Stockbridge. U tehničkoj se praksi za određivanje amplituda vibracija užeta dalekovoda vrlo često koristi metoda ravnoteže snaga koje je ukratko opisana.

Mehanički model simetričnog i asimetričnog Stockbridge prigušivača je detaljno obrađen. Izvedene su diferencijalne jednačbe gibanja za linearni model prigušivača. Model je linearan zbog pretpostavljene linearne karakteristike krutosti i prigušenja, a pretpostavljeno je dominantno histerežno prigušenje u čeličnom užetu prigušivača. Rješavanjem izvedenih linearnih diferencijalnih jednačbi dobiveni su izrazi koji opisuju odziv linearnog modela prigušivača.

Na eksperimentalnom postavu za ispitivanje prigušnih i elastičnih svojstava užeta u Dalekovod-Laboratoriju ispitano je čelično uže kakvo tvrtka Dalekovod koristi na vlastitim prigušivačima vibracija tipa Stockbridge. Dobivene karakteristike pokazuju izrazitu nelinearnost i nije ih moguće jednostavno linearizirati. Temeljem dobivenih karakteristika je zaključeno kako bi za određivanje odziva prigušivača u čitavom spektru frekvencija (za različite amplitude vibracija) bio neophodan izvod nelinearnog analitičkog modela. Nelinearnim modelom bi u obzir bila uzeta ovisnost karakteristika užeta o amplitudi i frekvenciji vibracija.

Izvedeni linearni model se pokazao vrlo preciznim u slučaju kad su nelinearne karakteristike čeličnog užeta linearizirane unutar ograničenog raspona frekvencija tj. pomaka (lokalna linearizacija). U radu je razmatrano područje prve rezonancije tj. do frekvencije od 60 Hz do koje su snimane i karakteristike čeličnog užeta. I prigušenje i krutost užeta pokazuju izrazito nelinearnu karakteristiku (poglavlje 4.). Zbog toga su rezultati analitičkog modela za frekvencije iznad 60 Hz zanemareni i nisu uspoređivani s eksperimentalnim rezultatima. Za to je područje provedena i lokalna linearizacija parametara užeta,

dok se područje druge rezonancije nije moglo proučavati zbog nedostatka podataka.

Prilikom određivanja vlastitih frekvencija prigušivača ispostavilo se kako se za vrijednost prve rezonantne frekvencije dobiju dosta pouzdani rezultati. Analitičkim određivanjem druge rezonantne frekvencije na temelju lokalne linearizacije za prvu vlastitu frekvenciju dobivena je, očekivana, velika greška u odnosu na izmjerene podatke.

Između analitičkih rezultata (vlastita frekvencija neprigušenih vibracija) i aproksimiranih frekvencija (rastav sustava s dva stupnja slobode na dva sustava s jednim stupnjem slobode gibanja) je prisutna značajna razlika. Analizom glavnih formi vibriranja je pokazano kako je u prvoj rezonanciji zaista dominantan utjecaj vertikalnih vibracija utega, u drugoj formi vibriranja se ne može zaključiti kako su zakreti utega dominantni.

Pretpostavke preuzete iz dostupne literature se nisu pokazale u potpunosti ispunjenima za ispitani primjerak čeličnog užeta. Iako se u literaturi navodi kako se uklješteno čelično uže ponaša poput uklještena grede to nije sasvim sigurno, pogotovo u slučaju utjecajnih koeficijenata. U pitanje se dovodi primjenjivost utjecajnog koeficijenta  $c_{\varphi\varphi}$ , kao i koeficijenata  $c_{x_A\varphi}$  te  $c_{\varphi x_A}$ . U linearnim problemima mehanike deformabilnih tijela posljednja dva utjecajna koeficijenta su jednakog iznosa, ali u nelinearnim problemima to nije slučaj.

Što se tiče mehaničke impedancije, u dijagramu se za prvu rezonantnu frekvenciju javljaju dva lokalna maksimuma. Pokazalo se kako to nije rezultat nesimetrije uzrokovane netočnostima izrade, koje su zanemarive, nego prisutnošću viših harmonika (do frekvencije 25 Hz) u harmonijskom gibanju stezaljke vibratora (uzbudi).

U daljnjem istraživanju bi trebalo pristupiti detaljnijoj analizi svojstava čeličnog užeta, posebnu pozornost pokloniti njegovoj nelinearnosti i mogućnostima lineariziranja karakteristike. Posebice je potrebno odrediti utjecaj duljine užeta na prigušenje užeta, dok duljina na vrijednost savojne krutosti ( $EI$ ) općenito ne utječe. Potrebno je i kvalitetno snimiti nelinearnu karakteristiku krutosti u području vrlo malih pomaka kako bi se mogla provesti lokalna

linearizacija za područje druge rezonantne frekvencije. Eksperimentalnim postupkom treba utvrditi valjanost utjecajnih koeficijenata te odrediti njihov odnos s krutošću konzole za ispitivano čelično uže.

Linearni model se, nakon što se odrede svojstva užeta na višim frekvencijama, može podijeliti u dva dijela: za prvo i za drugo rezonantno područje. Naravno, za to je potrebno provesti detaljna ispitivanja užeta opisana u prethodnom odjeljku. Naposljetku je potrebno ocjeniti i potrebu za izvodom nelinearnog matematičkog modela. Kako je pokazano, prigušivač tipa Stockbridge posjeduje izrazito nelinearnu karakteristiku što je poznato i iz literature [13], ali u ovom radu je s lokalno lineariziranim linearnim modelom postignuta zadovoljavajuća točnost u okolici prve rezonancije.

## Sažetak

Radi boljeg razumijevanja problematike koja se obrađuje u radu, opisana je pojava eolskih vibracija užeta dalekovoda koje spadaju u grupu vibracija uzrokovanih strujanjem fluida oko konstrukcije. Također je opisan i način modeliranja vibracijskog sustava užeta dalekovoda s prigušivačem vibracija tipa Stockbridge kao i metoda ravnoteže snaga koja se u praksi uobičajeno koristi.

U radu je detaljno izveden analitički model prigušivača vibracija tipa Stockbridge. Izvedeni model je linearan uz pretpostavljeni dominantni utjecaj histereznog tipa prigušenja u čeličnom užetu prigušivača. Opisane su i izvedene veličine koje opisuju karakteristiku prigušivača od kojih je mehanička impedancija najbitnija jer je upravo ona ulazni parametar u metodu ravnoteže snaga pomoću koje se u praksi određuju amplitude vibracija užeta dalekovoda. Na eksperimentalnom postavu za ispitivanje prigušnih i elastičnih svojstava užeta u Dalekovod-Laboratoriju je ispitano čelično užo kakvo tvrtka Dalekovod koristi na vlastitim prigušivačima vibracija. Predočena je i detaljna analiza snimljenih podataka te su opisani pojave koje su se tokom ispitivanja javljale.

U svrhu verifikacije analitičkog modela s eksperimentalno određenim parametrima konstruiran je ispitni primjerak prigušivača pojednostavljene konstrukcije. Na ispitnom postavu su snimljene stvarne karakteristike ispitnog prigušivača.

U konačnici su uspoređene eksperimentalno određene karakteristike ispitnog prigušivača s karakteristikama koje su dobivene korištenjem izvedenog analitičkog modela. Posebno je obrađena nelinearnost svojstava čeličnog užeta prigušivača kao osnovni uzrok razlika u rezultatima. Lokalnom linearizacijom parametara čeličnog užeta postiglo se dobro poklapanje rezultata u okolini prve rezonancije prigušivača te su temeljem toga predloženi pravci budućeg istraživanja koji uključuju detaljno ispitivanje nelinearnih svojstava čeličnog užeta kao i eventualni izvod nelinearnog matematičkog modela.

## Summary

In order to provide a wider picture of the problem analyzed in this thesis the description of Aeolian vibrations of overhead transmission lines is presented. These vibrations are classified under the group of flow-induced vibrations caused by the fluid-structure interaction. The modeling of a single conductor with an installed Stockbridge damper is also described, as well as the Energy Balance Method that is commonly used in technical practice.

The analytical model of the dynamics of Stockbridge dampers is established and explained in detail. The established model is linear with the assumption of the dominant influence of hysteretic damping in the steel messenger cable. The characteristic of the damper is established with focus on the mechanical impedance as the most important quantity. On the experimental setup of Dalekovod-Laboratory the parameters (damping and stiffness) of the steel messenger cable were investigated. The detailed analysis and results of the experiment are given in the thesis.

For the verification of the analytical model of Stockbridge dampers a special, simplified, version of the damper is developed and the characteristics experimentally obtained.

In the end the experimentally and analytically obtained characteristics of the developed damper are compared and commented on. The nonlinearities of the damper behavior are also commented. By local linearization of the parameters in the analytical model a very good agreement with the real characteristic of the damper is achieved in the proximity of the first resonance. Based on the conclusions in the thesis the directions of future research activities are proposed. Future research should include detailed investigation of the steel messenger cable properties and the establishment of a nonlinear mathematical model should be also considered.



## Literatura

- [1] Naudascher, E.; Rockwell, D., Flow-induced vibrations: an engineering guide, Dover Publications, Mineola 2005.
- [2] Holmes, J. D., Wind loading of structures, Spon Press, London 2003.
- [3] Dahl, J. M., Vortex-Induced Vibration of a Circular Cylinder with Combined In-line and Cross-flow Motion, Massachusetts Institute of Technology, 2008.
- [4] Schlichting, H., Boundary-layer theory, McGraw-Hill, New York 1979.
- [5] Den Hartog, J. P., Mechanical vibrations, Dover Publications, New York 1985.
- [6] Claren, R.; Diana, G., Mathematical Analysis of Transmission Line Vibration, IEEE Transactions on power apparatus and systems, (1969.), No. 12, str. 1741 do 1771
- [7] Stockbridge, G. H., Vibration damper, U.S. Patent 1,675,391, 1928.
- [8] IEEE Guide for Laboratory Measurement of the Power Dissipation Characteristics of Aeolian Vibration Dampers for Single Conductors, IEEE Std 664-1993, IEEE Standards Board, New York 1993.
- [9] Wolf, H.; Adum, B.; Semenski, D.; Pustaić, D., Using the Energy Balance Method in the Estimation of Overhead Transmission Line Aeolian Vibrations, Strojarstvo, (2008.), No. 5, str. 269 do 276
- [10] Wagner, H.; Ramamurti, V.; Sastry, R. V. R.; Hartmann, K., Dynamics of Stockbridge Dampers, Journal of Sound and Vibration, 30., (1973.), No. 2, str. 207 do 220
- [11] Hagedorn, P, Ein einfaches Rechenmodell zur Berechnung winderregter Schwingungen an Hochspannungsleitungen mit dampfern, Ingenieur-Archiv, 49, (1980.), str. 161 do 177
- [12] Skupina autora, Inženjerski priručnik – IP1, Temelji inženjerskih znanja, Školska knjiga, Zagreb 1996.

- [13] CIGRE TF B2.11.01, Modelling of Aeolian Vibrations of a Single Conductor Plus Damper: Assessment and Technology (draft 16. 12. 2003.)
- [14] Schafer, B., The energy method and the exact solution for conductor oscillations, a comparision, Proceedings of CIGRE Symposium, Stockholm, (1981.), str. 22 do 81
- [15] CIGRE TF 22.11.1, Modelling of Aeolian Vibrations of a Single Conductor Plus Damper: Assessment and Technology, Electra, 181, (1998.), str. 53 do 68