

# Kontinuirana identifikacija parametara letjelice s četiri rotora u realnom vremenu

---

**Bambir, Krunoslav**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:908043>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Krunoslav Bambir**

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:

Krunoslav Bambir

Zagreb, 2020.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Veliku zahvalnost dugujem svojem mentoru prof. dr. sc. Josipu Kasaću na svim stručnim savjetima i pomoći pri izradi ovoga rada, kao i na strpljivosti te izdvojenom vremenu za moje upite.

Također, zahvaljujem se svojim roditeljima na pruženoj podršci tijekom cijelog studija.

Posebna zahvalnost ide mojoj zaručnici Josipi za veliku ljubav, neizmjerne potpore i strpljenje.

Krunoslav Bambir



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **KRUNOSLAV BAMBIR** Mat. br.: 0035197495

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Kontinuirana identifikacija parametara letjelice s četiri rotora u realnom vremenu**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Real-time continuous parameter identification of quadrotor**

Opis zadatka:

Parametri dinamičkog modela autonomnih letjelice variraju u ovisnosti o teretu koji prenose. S obzirom na to da je sinteza konvencionalnih upravljačkih algoritama zasnovana na poznavanju parametara dinamičkog modela, neophodno je te parametre identificirati u realnom vremenu. Konvencionalni algoritmi zasnovani na gradijentnoj ili Lyapunovljevoj metodi imaju relativno sporu asimptotsku konvergenciju i ovisni su o obliku pobudnog signala. U ovom radu razmatraju se kontinuirane metode identifikacije parametara koje, za razliku od konvencionalnih metoda, omogućuju gotovo trenutnu konvergenciju estimiranih varijabli prema realnim vrijednostima.

U radu je potrebno:

- Izvesti i implementirati kontinuiranu metodu najmanjih kvadrata za identifikaciju parametara i početnih uvjeta sustava drugog reda na temelju mjerenja samo pozicije sustava.
- Primijeniti metodu sukcesivnog parcijalnog integriranja s modulirajućim funkcijama za eliminaciju nepoznatih početnih uvjeta i identifikaciju parametara u realnom vremenu.
- Implementirati navedene metode za identifikaciju parametara letjelice s četiri rotora u realnom vremenu.
- Provesti simulacijsku analizu utjecaja šuma mjerenja na performanse kontinuiranih metoda identifikacije parametara.

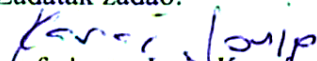
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
16. siječnja 2020.

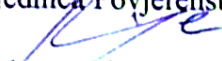
Rok predaje rada:  
19. ožujka 2020.

Predviđeni datum obrane:  
23. ožujka do 27. ožujka 2020.

Zadatak zadao:

  
prof. dr. sc. Josip Kasac

Predsjednica Povjerenstva:

  
prof. dr. sc. Biserka Runje

**Sadržaj**

<b>SADRŽAJ</b>	<b>II</b>
<b>POPIS SLIKA</b>	<b>IV</b>
<b>POPIS TABLICA</b>	<b>IV</b>
<b>POPIS OZNAKA</b>	<b>V</b>
<b>SAŽETAK</b>	<b>VII</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>VIII</b>
<b>1 UVOD</b>	<b>1</b>
<b>2 DINAMIČKI MODEL LETJELICE S ČETIRI ROTORA</b>	<b>3</b>
2.1 Uvod . . . . .	3
2.2 Osnovni koncept letjelice s četiri rotora . . . . .	3
2.3 Kinematika i dinamika krutog tijela . . . . .	4
2.4 Sile i momenti letjelice s četiri rotora . . . . .	5
2.5 Linearizacija dinamičkog modela letjelice . . . . .	7
2.6 Sinteza decentraliziranog linearnog regulatora . . . . .	8
2.7 Koncept adaptivnog upravljanja . . . . .	10
2.8 Regulacija primjenom observera stanja . . . . .	11
<b>3 KONTINUIRANE METODE IDENTIFIKACIJE PARAMETARA</b>	<b>15</b>
3.1 Identifikacija parametara primjenom kontinuirane metode najmanjih kvadrata . . . . .	16
3.1.1 Kontinuirana metoda najmanjih kvadrata . . . . .	16
3.1.2 Identifikacija parametra pri početnom dvostrukom integriranju . . . . .	17
3.1.3 Identifikacija parametra pri početnom množenju s prijenosnom funkcijom . . . . .	19
3.2 Metoda identifikacije pomoću diferencijalnog operatora s vremenskim pomakom . . . . .	26
3.3 Metoda identifikacije sukcesivnim parcijalnim integriranjem s modulirajućim funkcijama . . . . .	29
3.4 Neasimptotska estimacija stanja . . . . .	33
<b>4 Identifikacija parametara letjelice</b>	<b>37</b>
4.1 Identifikacija mase letjelice . . . . .	37

---

4.2	Identifikacija momenta inercija . . . . .	39
4.3	Identifikacija koeficijenta geometrije propelera letjelice . . . . .	42
4.4	Neasimptotska estimacija stanja letjelice . . . . .	46
<b>5</b>	<b>ZAKLJUČAK</b>	<b>49</b>
	<b>LITERATURA</b>	<b>50</b>

## Popis slika

1.	Raspodjela potisnih sila za izvođenje osnovnih manevara quadrotora. Strijelice indiciraju na smjer vrtnje propelera, [2] . . . . .	3
2.	Dinamički model letjelice s četiri rotora, [9] . . . . .	6
3.	Blok dijagram adaptivne regulacije . . . . .	11
4.	Observer stanja, prema [12] . . . . .	13
5.	Regulacija pozicije pri identifikaciji parametara metodom najmanjih kvadrata	18
6.	Identifikacija parametara bez šuma mjerenja korištenjem metode najmanjih kvadrata . . . . .	19
7.	Identifikacija parametara uz šum mjerenja korištenjem metode najmanjih kvadrata . . . . .	19
8.	Matrični i vektorski elementi . . . . .	20
9.	Identifikacija parametara uz šum mjerenja korištenjem metode najmanji kvadrata uz filter $G(s)$ . . . . .	24
10.	Matrični elementi ne divergiraju u vremenu . . . . .	24
11.	Vektorski elementi . . . . .	25
12.	Matrični element $\langle \phi_1, \phi_1 \rangle$ blago raste u vremenu, a oblik funkcije $f(t)$ ne divergira u vremenu . . . . .	25
13.	Druga diferencija signala - DDS . . . . .	27
14.	Simulink model . . . . .	28
15.	Regulacija pozicije pri korištenju operatora diferencije . . . . .	29
16.	Identifikacija mase ima sporu konvergenciju . . . . .	29
17.	Modulirajuća funkcija korištena za neasimptotsku estimaciju stanja . . . . .	36
18.	Regulacija pozicije uz identifikaciju metodom sukcesivnog parcijalnog integriranja . . . . .	37
19.	Varijable stanja imaju ograničene vrijednosti . . . . .	38
20.	Modulirajuća funkcija i njezine derivacije . . . . .	38
21.	Identifikacija parametra mase te pripadajuće izlazne funkcije $b(t)$ i $n(t)$ . . . . .	39
22.	Identifikacija parametra mase te pripadajuće izlazne funkcije $b(t)$ i $n(t)$ za veći šum mjerenja . . . . .	40
23.	Modulirajuća funkcija i njezine derivacije za $q = 1$ . . . . .	40
24.	Identifikacija parametra mase te pripadajuće izlazne funkcije $b(t)$ i $n(t)$ za veći šum mjerenja i $q = 1$ . . . . .	41



---

25.	<b>Regulacija pozicije po osi <math>x</math> uz identifikaciju metodom sukcesivnog parcijalnog integriranja . . . . .</b>	42
26.	<b>Identifikacija momenta inercije <math>I_y</math> (gore) i odziv kuta <math>\theta</math> (dolje) . . . . .</b>	43
27.	<b>Identifikacija koeficijenta geometrije propelera <math>k_p</math> (gore) i upravljačka varijabla <math>\bar{u}_3</math> (dolje) bez šuma mjerenja . . . . .</b>	45
28.	<b>Identifikacija koeficijenta geometrije propelera <math>k_p</math> (gore) i upravljačka varijabla <math>\bar{u}_3</math> (dolje) uz šum mjerenja . . . . .</b>	45
29.	<b>Varijable stanja kod neasimptotske estimacije pozicije i brzine letjelice . . .</b>	47

### Popis tablica

1	<b>Usporedba neasimptotske estimacije stanja s Luenbergerovim observerom za estimaciju stanja . . . . .</b>	47
---	---	----

## POPIS OZNAKA

<b>A</b>	-	Matrica koeficijenata
$A_{noise}$	-	Amplituda šuma mjerenja pozicije
<b>B</b>	-	Matrica ulaza
$\hat{\mathbf{B}}$	-	Estimirana matrica ulaza
<b>C</b>	-	Matrica izlaza
$c$	m	Faktor skaliranja sile u moment
<b>F</b>	N	Vektor upravljačkih varijabli
$F_z$	N	Vertikalni uzgon
$f_i$	N	Sila koju proizvodi $i$ -ti propeler
$g$	m/s <sup>2</sup>	Gravitacijsko ubrzanje
$\mathbf{I}_B$	kg/m <sup>2</sup>	Dijagonalna matrica inercijskih momenata
$I_x$	kg/m <sup>2</sup>	Inercijski moment oko $x$ osi
$I_y$	kg/m <sup>2</sup>	Inercijski moment oko $y$ osi
$\hat{I}_y$	kg/m <sup>2</sup>	Estimacija inercijskog momenta oko $y$ osi
$I_z$	kg/m <sup>2</sup>	Inercijski moment oko $z$ osi
$k$	kg <sup>-1</sup>	Masa letjelice ( $1/m$ )
$k_p$	-	koeficijent geometrije propelera
$K_D$	-	Derivacijsko pojačanje regulatora
$K_P$	-	Proporcionalno pojačanje regulatora
<b>K</b>	-	Matrica pojačanja adaptivnog regulatora
<b>L</b>	-	Matrica pojačanja Luenberger observera
$l$	m	Udaljenost od rotora letjelice do težišta letjelice
$m$	kg	Masa letjelice
$\hat{m}$	kg	Estimirana masa letjelice
<b>p</b>	-	Vektor željenih polova Luenberger observera
$\mathbf{R}(\eta)$	-	Rotacijska matrica
$s_1, s_2$	-	polovi regulatora
$t$	s	Vrijeme
$u_1, u_2, u_3, u_4$	N	Upravljačke varijable
$\tilde{u}_1$	N	Upravljačka varijabla s unaprijednom kompenzacijom gravitacijske sile

$\mathbf{v}$	m/s	Vektor linearnih brzina letjelice
$\mathbf{x}$	-	Vektor varijabli stanja
$\hat{\mathbf{x}}$	-	Vektor estimiranih varijabli stanja
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$	-	varijabla stanja
$x(t)$	m	Pozicija letjelice na $x$ -osi
$x_d(t)$	m	Referentna trajektorija $x$ -osi
$x_{noise}(t)$	m	Mjerena pozicija letjelice sa šumom na $x$ -osi
$\tilde{x}(t)$	m	Greška regulacije pozicije na $x$ -osi
$\hat{x}(t)$	m	Estimirana pozicija letjelice $x$ -osi
$\hat{\dot{x}}(t)$	m/s	Estimirana brzina letjelice na $x$ -osi
$y(t)$	m	Pozicija letjelice na $y$ -osi
$y_d(t)$	m	Referentna trajektorija $y$ -osi
$y_0$	m	početna pozicija letjelice po $y$ -osi
$z_d(t)$	m	Referentna trajektorija $z$ -osi
$\hat{\dot{z}}(t)$	m/s	Estimirana brzina letjelice na $z$ -osi
$\mathbf{y}$	-	Vektor izlaza
$\varepsilon$	s	Vrijeme uključenja identifikacije parametara
$\boldsymbol{\eta}$	°	Vektor Euler-ovih kutova
$\theta$	-	Euler-ov kut (prevrtanje)
$\lambda$	-	pol filtera
$\tau$	s	Vremenska konstanta
$\boldsymbol{\tau}$	Nm	Vektor upravljačkih momenata
$\tau_\theta$	Nm	Moment oko osi $\theta$
$\tau_\phi$	Nm	Moment oko osi $\phi$
$\tau_\psi$	Nm	Moment oko osi $\psi$
$\Phi(t)$	-	Modulirajuća funkcija
$\phi$	°	Euler-ov kut (valjanje)
$\psi$	°	Euler-ov kut (zakretanje)
$\Omega_B$	-	Transformacijska matrica
$\Omega_i$	rad/s	Kutna brzina $i$ -tog propelera
$\boldsymbol{\omega}$	rad/s	Vektor kutnih brzina

**SAŽETAK**

U ovom radu razmatrane su kontinuirane metode identifikacije parametara koje omogućuju gotovo trenutnu konvergenciju estimiranih parametara prema realnim vrijednostima. Parametri se estimiraju u realnom vremenu, kako bi se konvencionalnim upravljačkim algoritmima, koji su zasnovani na poznavanju parametara dinamičkog modela, omogućilo asimptotsko slijeđenje proizvoljne referentne trajektorije. Metode su primijenjene za identifikaciju parametara sustava drugog reda te se kao takve primjenjuju za identifikaciju mase i momenata tromosti letjelice s četiri rotora, čija se dinamika može podijeliti na više podsustava drugog reda. Za sve izvedene metode provedena je simulacijska analiza utjecaja šuma mjerenja na performanse kontinuiranih metoda identifikacije parametara.

Ključne riječi: identifikacija parametara, kontinuirani linearni sustavi, adaptivno upravljanje, letjelica s četiri rotora

**SUMMARY**

In this thesis, continuous parameter identification which enables almost instantaneous estimation of real system parameters to the real values was considered. The parameters are estimated in real time to allow conventional control algorithms based on knowledge of parameters of dynamic model to asymptotically follow an arbitrary reference trajectory. Methods were used to estimate parameters of second order system and then applied for identification of mass and moment inertia of quadrotor, which dynamics can be divided into more second order subsystems. For all the methods performed, a simulation analysis for sensor noise effect on the performance of continuous parameter identification methods was performed.

Key words: parameter identification, continuous linear systems, adaptive control, quadrotor, UAV

## 1. UVOD

Autonomne bespilotne letjelice (eng. Unmanned Aerial Vehicles - UAV) postaju sve više popularne i imaju brojne potencijalne primjene. Da bi se upravljalo takvim letjelicama, potrebno je projektirati i razviti robustan i adaptivan upravljački sustav te stoga identificirati parametre sustava poput mase i momente inercija. Mnogo naprednih strategija upravljanja nelinearnih dinamičkih ili robotskih sustava koji se mogu primijeniti na bespilotne letjelice ovise o poznavanju dinamike modela. Letjelice koje prenose različite terete svaki put imaju različite parametre te ih je zbog toga potrebno identificirati u realnom vremenu, s obzirom na to da upravljački algoritam sadrži te parametre.

Postoji mnogo metoda koje rješavaju navedeni problem. Metode identifikacije parametara sustava opisane u ovome radu ne zahtijevaju upotrebu ispitnih signala (step, PRBS, BLWN, "chirp", ...) koji bi pobuđivali aspekte dinamike procesa ("modove procesa"). Umjesto toga, identifikaciju je moguće provesti izravno temeljem standardnog mjerenja izlaza (signala pozicije) i upravljačkog signala. Također, opisane metode omogućuju neasimptotsku, gotovo trenutnu konvergenciju estimiranih parametara prema realnim vrijednostima.

Treba još napomenuti da se identifikacija parametara modela izvodi u kontinuiranom vremenu. To je direktan pristup za razliku od identifikacije u diskretnom vremenu, gdje se identifikacija vrši digitalno te se zatim transformira u kontinuiranu vremensku formu.

U ovom radu, identifikacija parametara sustava primijenjena je kod upravljanja autonomne letjelice, gdje je poznata pozicija letjelice koja je mjerljiva, ali s prisutnim šumom mjerenja. Također, poznate su brzine vrtnje propelera, a referentne trajektorije letjelice zadane. Za svaku metodu prikazan je utjecaj šuma mjerenja na identifikaciju parametara. Sve računalne simulacije odvijaju se u programskom paketu MATLAB.

### Pregled po poglavljima

U drugom je poglavlju opisana konstrukcija letjelice s četiri rotora te je izveden njegov nelinearni dinamički model primjenom Eulerovih kuteva. Zatim je provedena linearizacija upravljačkog modela kako bi se omogućilo jednostavnije upravljanje sustavom te je na kraju poglavlja provedena sinteza regulatora i ukratko opisan princip identifikacije parametara sustava što podrazumijeva i princip adaptivnog upravljanja.

Treće poglavlje daje kratki izvod i objašnjava princip rada Luenbergovog observera stanja koji u ovom radu koristimo za estimaciju brzine koja nam nije mjerljiva.

U četvrtom poglavlju izvedeno je više metoda identifikacija parametara. Sve metode zatim su primijenjene na modelu letjelice s četiri rotora za identifikaciju mase letjelice, dok je metoda koja se pokazala najboljom, primijenjena i za identifikaciju momenta te koeficijenta geometrije propelera letjelice. Provedena je analiza utjecaja šuma mjerenja na performanse kontinuiranih metoda identifikacije te su iznesene prednosti i nedostaci za svaku pojedinu metodu.

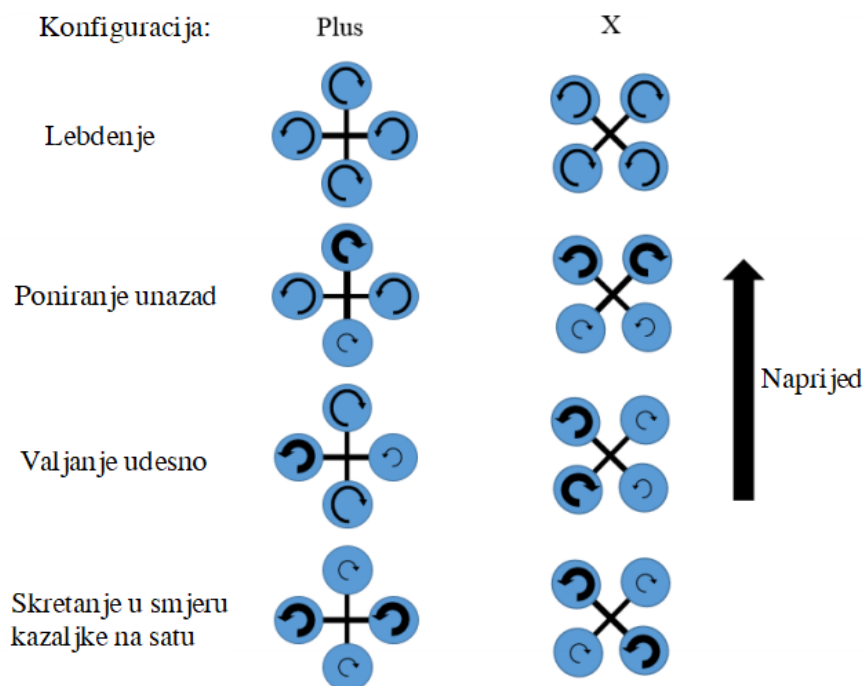
## 2. DINAMIČKI MODEL LETJELICE S ČETIRI ROTORA

### 2.1. Uvod

Letjelica s četiri rotora ima križnu konstrukciju s jednim propelerom na svakom kraju, kako bi bila potpuno upravljiva u 3D prostoru [1]. Propeleri su usmjereni prema gore te imaju fiksni kut. Svaki je rotor upravlján zasebno. Dva motora vrte propelere u smjeru vrtnje kazaljke na satu, dok druga dva vrte propelere u smjeru suprotnom od vrtnje kazaljke na satu te tako omogućuju svim rotorima sudjelovanje u podizanju letjelice, dok još uvijek može upravljati zakretnim momentima na propelerima.

### 2.2. Osnovni koncept letjelice s četiri rotora

Letjelica s četiri rotora može letjeti u dvije konfiguracije: "plus" ili "X", ovisno o inercijskom referentnom sustavu letjelice, dok se upravljanje dobiva raspodjelom potisaka propelera kako bi utjecali na položaj letjelice i usmjerili vektor podizanja u smjeru željenog kretanja. Primjeri takvih konfiguracija prikazani su na slici 1.



**Slika 1: Raspodjela potisnih sila za izvođenje osnovnih manevara quadrotora. Strijelice indiciraju na smjer vrtnje propelera, [2]**

Opisati ćemo gibanje rotora s "X" konfiguracijom. Postoje četiri osnovne naredbe letjelice:



- Potisak (eng. throttle) je naredba letjelice kojom se istovremeno i podjednako povećava i smanjuje brzina svih motora. Time se generira vertikalna potisna sila što rezultira dizanjem ili spuštanjem letjelice. U stanju lebdenja vertikalna potisna sila poništava djelovanje gravitacijske sile na tijelo.
- Poniranje (eng. pitch) je naredba koja rezultira gibanjem letjelice prema naprijed ili nazad u horizontalnoj ravnini. Zakretni moment oko osi letjelice stvara se promjenom omjera brzine vrtnje prednjih i stražnjih motora. Ovo rezultira nagibom quadrotora te podjele vertikalne potisne sile na horizontalnu i vertikalnu komponentu, gdje horizontalna komponenta sile potiska uzrokuje gibanje u smjeru nagiba.
- Valjanje (eng. roll) je naredba vrlo slična poniranju. Ona također rezultira naginjanjem te gibanjem letjelice ulijevo ili udesno promjenom omjera brzina vrtnje motora s desne i lijeve strane.
- Skretanje (eng. yaw) je naredba koja rezultira zakretanjem letjelice oko vlastite vertikalne osi. To se postiže promjenom omjera brzina vrtnje motora na dijagonalama. Rezultat je nepotpuno poništavanje reaktivnog momenta oko vertikalne osi koje zatim zakreće quadrotor u smjeru vrtnje dominantne dijagonale.

Za opisanu konfiguraciju quadrotora opisat ćemo jednadžbe kinematike i dinamike te izvesti nelinearni dinamički model letjelice prema [3, 4, 5]. Dinamiku takve letjelice opisuju iste jednadžbe kojima opisujemo dinamiku krutog tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja [6].

### 2.3. Kinematika i dinamika krutog tijela

**Rotacijska dinamika** krutog tijela u trodimenzionalnom koordinatnom sustavu opisana je sljedećom jednadžbom:

$$\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.1)$$

gdje je  $\mathbf{I}_B = \text{diag}\{I_x, I_y, I_z\}$  dijagonalna inercijska matrica,  $\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^T$  je vektor kutnih brzina i  $\boldsymbol{\tau}$  je vektor upravljačkih momenata.

**Rotacijska kinematika** krutog tijela opisana je jednadžbama

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Omega}_B \boldsymbol{\omega}, \quad (2.2)$$

gdje je  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$  vektor Eulerovih kutova definiranih u  $xyz$  koordinatnom sustavu, a

$$\mathbf{\Omega}_B = \frac{1}{c_\theta} \begin{bmatrix} c_\theta & s_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta \\ 0 & c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\theta \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix},$$

je transformacijska matrica koja prebacuje veličine koordinatnog sustava letjelice u inercijski koordinatni sustav, gdje su  $c_{\eta_i} \equiv \cos(\eta_i)$  i  $s_{\eta_i} \equiv \sin(\eta_i)$  za  $i = 1, 2, 3$ , gdje  $\eta_i$  su elementi vektora  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ .

**Translacijska dinamika** krutog tijela prikazana je jednadžbom

$$m[\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = \mathbf{F} - mg\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3, \quad (2.3)$$

gdje je  $\mathbf{F}$  vektor upravljačkih sila,  $g$  je gravitacijska akceleracija,  $m$  je masa letjelice i  $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ . Drugi izraz na desnoj strani jednadžbe (2.3) je projekcija sile gravitacije u koordinatnom sustavu krutog tijela.

**Translacijska kinematika** krutog tijela prikazana je jednadžbom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}, \quad (2.4)$$

gdje je  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$  vektor pozicija u inercijskom koordinatnom sustavu,  $\mathbf{v} = [u \ v \ w]^T$  je vektor linearnih brzina i  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})$  je rotacijska matrica koja prebacuje veličine koordinatnog sustava letjelice u inercijski koordinatni sustav te iznosi

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\psi s_\phi s_\theta - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi s_\theta \\ c_\theta s_\psi & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\psi s_\theta & c_\phi s_\psi s_\theta - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}.$$

#### 2.4. Sile i momenti letjelice s četiri rotora

Četiri propelera letjelice koje se rotiraju kutnim brzinama  $\Omega_i$  proizvode četiri sile

$$f_i = k_i \Omega_i^2, \quad (2.5)$$

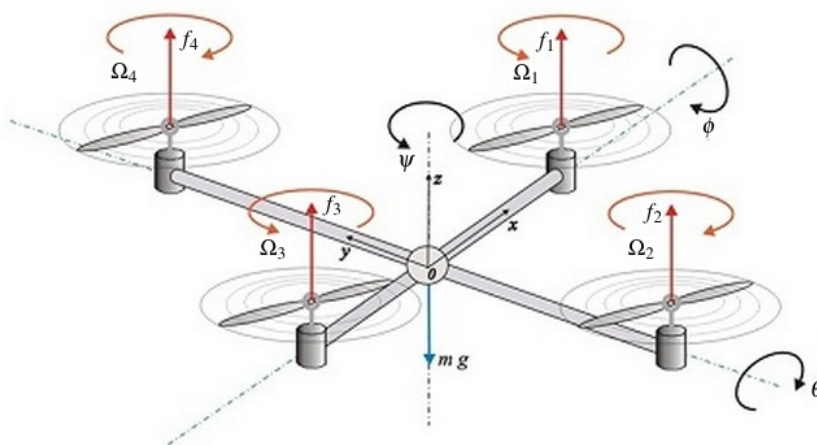
usmjerene vertikalno prema gore, gdje je  $k_i$  pozitivna konstanta za  $i = 1, 2, 3, 4$ . Kako bi lakše mogli prepoznati o kojim silama je riječ, sile i momenti dinamičkog modela dobivaju se kao projekcije sile potisaka propelera preko odgovarajuće alokacijske matrice [7, 8].

Tako, sile i momenti dinamičkog modela letjelice dobivaju se kao projekcije sile potisaka prope-

lera kao

$$\begin{bmatrix} F_z \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -l & 0 & l & 0 \\ 0 & l & 0 & -l \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

gdje je  $l$  udaljenost od motora do težišta letjelice, a  $c$  je konstanta poznata kao faktor skaliranja sile u moment. Dakle, ako poznamo koliki je potreban potisak i momenti, onda se sila koju proizvodi rotor računa koristeći jednadžbe (2.6).



Slika 2: Dinamički model letjelice s četiri rotora, [9]

Pri umjerenim brzinama letjelice, kutovi prevrtanja (*roll*) i nagnjanja (*pitch*) su približno jednaki nuli što omogućava da se matrica  $\mathbf{\Omega}_B$  aproksimira s jediničnom matricom, tako da se vektor derivacije Eulerovih kutova  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  može aproksimirati vektorom kutnih brzina  $\boldsymbol{\omega}$ . Pod tim pretpostavkama, rotacijska dinamika letjelice može se reducirati u prikladniju formu za upravljanje:

$$m\ddot{x} = (c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi) u_1 \quad (2.7)$$

$$m\ddot{y} = (s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi) u_1 \quad (2.8)$$

$$m\ddot{z} = -mg + (c_\phi c_\theta) u_1 \quad (2.9)$$

$$I_x \ddot{\phi} = (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} + u_2 \quad (2.10)$$

$$I_y \ddot{\theta} = (I_z - I_x) \dot{\phi} \dot{\psi} + u_3 \quad (2.11)$$

$$I_z \ddot{\psi} = (I_x - I_y) \dot{\phi} \dot{\theta} + u_4 \quad (2.12)$$

gdje su

$$u_1 = F_z, \quad u_2 = \tau_\phi, \quad u_3 = \tau_\theta, \quad u_4 = \tau_\psi \quad (2.13)$$

upravljajuće varijable.

### 2.5. Linearizacija dinamičkog modela letjelice

Letjelica s četiri rotora nelinearan je i podaktuiran dinamički sustav, koji ima šest stupnjeva slobodi gibanja  $\{x, y, z, \phi, \theta, \psi\}$  koje se upravljaju sa samo četiri ulazne varijable  $\{F_z, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi\}$ . Također, rotacijske kinematičke jednadžbe imaju singularitet (nula u nazivniku) za kut  $\theta = \pi/2$ .

Takav sustav ekstremno je kompleksan za upravljanje. Zato uvodimo sljedeće pretpostavke koje neće puno utjecati na točnost upravljanja. Uz pretpostavku malih kuteva  $\eta_i$ , za  $i = 1, 2, 3$ , slijedi da je  $\cos(\eta_i) \approx 1$  i  $\sin(\eta_i) \approx \eta_i$  te uz zanemarenje kvadratičnih članova malih kuteva i brzina, prethodni sustav jednadžbi reducira se na:

$$m\ddot{x} = \theta u_1 \quad (2.14)$$

$$m\ddot{y} = -\phi u_1 \quad (2.15)$$

$$m\ddot{z} = -mg + u_1 \quad (2.16)$$

$$I_x\ddot{\phi} = u_2 \quad (2.17)$$

$$I_y\ddot{\theta} = u_3 \quad (2.18)$$

$$I_z\ddot{\psi} = u_4 m \quad (2.19)$$

što je bilinearan sustav.

Uvodeći unaprijednu kompenzaciju tako da je  $u_1 = mg + \tilde{u}_1$ , dobivamo da je

$$m\ddot{x} = mg\theta + \theta\tilde{u}_1 \quad (2.20)$$

$$m\ddot{y} = -mg\phi - \phi u_1 \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

te uz  $\theta\tilde{u}_1 \simeq 0$  i  $\phi u_1 \simeq 0$  dobivamo potpuno linearizirani model:

$$\ddot{x} = g\theta \quad (2.23)$$

$$\ddot{y} = -g\phi \quad (2.24)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}\tilde{u}_1 \quad (2.25)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_x}u_2 \quad (2.26)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_y}u_3 \quad (2.27)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_z}u_4. \quad (2.28)$$

## 2.6. Sinteza decentraliziranog linearnog regulatora

Decentralizirani regulator podrazumijeva da se sad svakim članom upravlja s lokalnim, vlastitim regulatorom, bez ikakvih dijeljenja informacija sa susjednim regulatorima [10].

U cilju takvog upravljanja, sustav šest jednadžbi od (2.23) do (2.28) možemo podijeliti u četiri podsustava tako da jednadžbu (2.23) dva puta deriviramo i u nju uvrstimo u jednadžbu (2.27), i da jednadžbu (2.24) dva puta deriviramo i u nju uvrstimo u jednadžbu (2.26).

$$\text{Podsustav1 : } \ddot{z} = \frac{1}{m}\tilde{u}_1 \quad (2.29)$$

$$\text{Podsustav2 : } \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z}u_4 \quad (2.30)$$

$$\text{Podsustav3 : } x^{(4)} = \frac{g}{I_y}u_3 \quad (2.31)$$

$$\text{Podsustav4 : } y^{(4)} = -\frac{g}{I_x}u_2 \quad (2.32)$$

tako da je vektor izlaznih varijabli

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Cilj upravljanja je praćenje željene trajektorije letjelice  $\{x_d(t), y_d(t), z_d(t)\}$  tako da je  $\psi_d(t) = 0$ . Definirajmo pogreške upravljanja po svim osima:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - x_d(t), \\ \tilde{y} &= y - y_d(t), \\ \tilde{z} &= z - z_d(t).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Za upravljanje podsustavom 1 odabiremo regulator

$$\tilde{u}_1 = m (\ddot{z}_d - K_d \dot{\tilde{z}} - K_p \tilde{z}),\tag{2.35}$$

odnosno

$$u_1 = mg + m (\ddot{z}_d - K_d (\dot{z} - \dot{z}_d) - K_p (z - z_d)),\tag{2.36}$$

s kojime kad zatvorimo regulacijski krug, svodi dinamiku greške na jednadžbu

$$\ddot{\tilde{z}} + K_d \dot{\tilde{z}} + K_p \tilde{z} = 0.\tag{2.37}$$

Kako bi sustav u zatvorenom krugu bio stabilan, uvjet je da su pojačanja  $K_d, K_p > 0$ .

Slična sinteza vrijedi i za podsustav 2, gdje je regulator

$$u_2 = I_z (\ddot{\psi}_d - K_d \dot{\tilde{\psi}} - K_p \tilde{\psi}),\tag{2.38}$$

odnosno

$$u_2 = I_z (\ddot{\psi}_d - K_d (\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) - K_p (\psi - \psi_d)),\tag{2.39}$$

a zatvoreni krug opisuje dinamiku pogreške jednadžbom:

$$\ddot{\tilde{\psi}} + K_d \dot{\tilde{\psi}} + K_p \tilde{\psi} = 0.\tag{2.40}$$

Za podsustav 3, izgled regulatora je malo drugačiji jer je potrebno upravljati sustavom četvrtog reda, pa je zato:

$$u_3 = \frac{I_y}{g} \left( x_d^{(4)} - K_3 \ddot{\tilde{x}} - K_2 \dot{\tilde{x}} - K_1 \dot{\tilde{x}} - K_0 \tilde{x} \right),\tag{2.41}$$

odnosno:

$$u_3 = \frac{I_y}{g} \left( x_d^{(4)} - K_3 (g\dot{\theta} - \ddot{x}_d) - K_2 (g\theta - \dot{x}_d) - K_1 (\dot{x} - \dot{x}_d) - K_0 (x - x_d) \right),\tag{2.42}$$

za

$$\ddot{x} = g\theta\tag{2.43}$$

i

$$\ddot{x} = g\dot{\theta}. \quad (2.44)$$

Dinamika pogreške regulacije po  $x$  osi tada ima jednadžbu:

$$\tilde{x}^{(4)} + K_3\ddot{\tilde{x}} + K_2\dot{\tilde{x}} + K_1\dot{\tilde{x}} + K_0\tilde{x} = 0, \quad (2.45)$$

gdje pojačanja  $K_i > 0$  za  $i = 0, 1, 2, 3$  moraju zadovoljiti Hurwitzov kriterij stabilnosti.

Slična sinteza vrijedi i za podsustav 4, gdje je regulator:

$$u_2 = -\frac{I_x}{g} \left( y_d^{(4)} - K_3\ddot{y} - K_2\dot{y} - K_1\dot{y} - K_0y \right), \quad (2.46)$$

odnosno:

$$u_2 = -\frac{I_x}{g} \left( y_d^{(4)} - K_3(-g\dot{\phi} - \ddot{y}_d) - K_2(-g\phi - \dot{y}_d) - K_1(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_0(y - y_d) \right), \quad (2.47)$$

za

$$\ddot{y} = -g\phi \quad (2.48)$$

i

$$\ddot{y} = -g\dot{\phi}, \quad (2.49)$$

a jednadžba pogreške zatvorenog kruga:

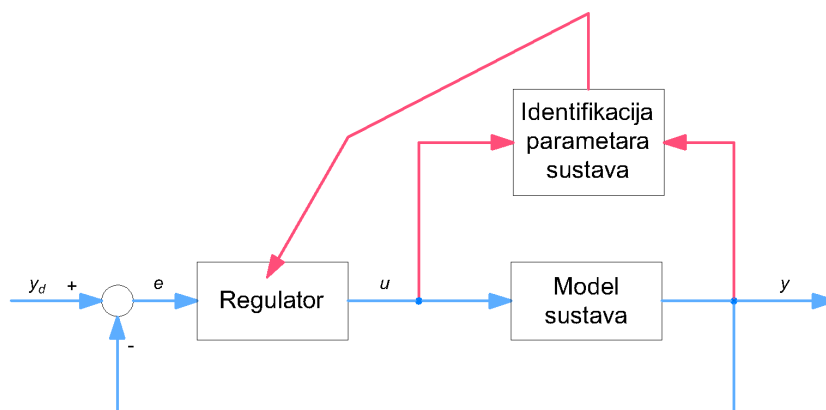
$$\tilde{y}^{(4)} + K_3\ddot{\tilde{y}} + K_2\dot{\tilde{y}} + K_1\dot{\tilde{y}} + K_0\tilde{y} = 0, \quad (2.50)$$

gdje također pojačanja  $K_i > 0$  za  $i = 0, 1, 2, 3$  moraju zadovoljiti Hurwitzov kriterij stabilnosti..

## 2.7. Koncept adaptivnog upravljanja

Regulator koji koristimo u radu je ustvari adaptivni regulator koji se zasniva na on-line estimaciji parametara dinamičkog modela sustava [Slika 3]. Adaptivna regulacija je tehnika upravljanja koja pruža sustavni pristup automatskom podešavanju regulatora u realnom vremenu, kako bi se postigla ili održala željena razina performanse upravljačkog sustava, kada su parametri dinamičkog modela sustava nepoznati i/ili promjenjivi u vremenu. Parametri modela sustava se estimiraju on-line iz mjerljivih izlaznih i upravljačkih varijabli te se koriste za računanje parametara regulatora. To prikazuje i blokovski dijagram sustava na slici 3. U poglavlju 3 prikazano je više metoda identifikacije parametara sustava na modelu sustava drugog reda. U prikazani blokovski dijagram

mogli bismo još uključiti smetnje pri identifikaciji parametara kao što su šum mjerenja i vanjski poremećaji, kao i observer stanja koji koristimo za estimaciju brzine. Taj observer opisan je u idućem poglavlju.



Slika 3: Blok dijagram adaptivne regulacije

### 2.8. Regulacija primjenom observera stanja

Spomenuli smo prije da je jedino pozicija letjelice u  $xyz$  koordinatama mjerljiva. Kako bi mogli upravljati sustavom drugog reda, potrebno je poznavati i linearnu brzinu. U tu svrhu koristit ćemo Luenbergerov observer stanja [11].

U ovom poglavlju navodimo osnovne informacije o Luenbergerovom observeru stanja.

Pretpostavljamo da linearni multivarijabilni sustav

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx},\end{aligned}\tag{2.51}$$

ima mjerljive izlaze  $\mathbf{y}$  iz kojih želimo rekonstruirati (estimirati) vektor stanja  $\mathbf{x}$ . Ako je dimenzija vektora izlaza jednaka dimenziji vektora stanja i ako je matrica  $\mathbf{C}$  za taj slučaj invertibilna tada možemo direktno dobiti vektor stanja  $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}$ .



Ako je dimenzije izlaznog vektora manja od dimenzije vektora stanja tada primjenjujemo Lu-  
enbergerov observer stanja

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}},\end{aligned}\quad (2.52)$$

gdje je  $\mathbf{L}$  matrica pojačanja observera. Ovaj observer je zapravo kopija modela sustava, zbog čega  
točnost estimacije jako ovisi o poznavanju parametara sustava 2.8. Jednadžba greške dobiva se  
oduzimanjem jednadžbe (2.51) od (2.52) te iznosi

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.53)$$

gdje je  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ . Stabilnost sustava je definirana karakterističnom jednadžbom:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}) = 0. \quad (2.54)$$

Sada, umjesto regulatora stanja  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{w}$  koji ovisi o nemjerljivom vektoru stanja  $\mathbf{x}$  ko-  
ristimo regulator

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w}, \quad (2.55)$$

tako da dinamika zatvorenog kruga postaje

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}. \quad (2.56)$$

Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga jednaka je karakterističnim jednadžbama dijagonalnih  
blok matrica, tako da pojačanja regulatora i observera određujemo metodom podešavanja polova

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^n (s + \bar{\lambda}_i), \quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}) = \prod_{i=1}^n (s + \lambda_i), \quad (2.57)$$

gdje su  $-\bar{\lambda}_i < 0$  i  $-\lambda_i < 0$  realni polovi regulatora i observera. S obzirom na to da dinamika  
observera mora biti brža od dinamike regulatora treba biti zadovoljen uvjet  $\lambda_i > \bar{\lambda}_i$ .

Primjenom Matlabove funkcije "place", možemo napisati izraze za pojačanja

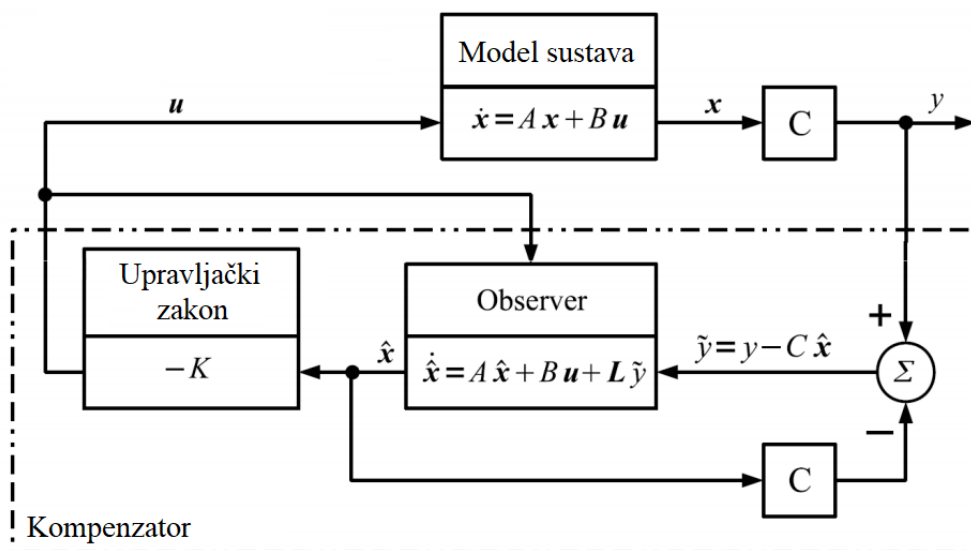
$$\mathbf{K} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}), \quad \mathbf{L}^T = \text{place}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \boldsymbol{\lambda}). \quad (2.58)$$

Kako matrica  $\mathbf{B}$  u dinamičkom modelu sadrži masu sustava koju je potrebno identificirati,

estimator varijabli stanja mora sadržavati estimirani parametar mase, pa izraz (2.52) postaje

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= \mathbf{A}\hat{x} + \hat{\mathbf{B}}u + \mathbf{L}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \mathbf{C}\hat{x},\end{aligned}\quad (2.59)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{B}} = [0 \quad 1/\hat{m}]^T$ .



Slika 4: Observer stanja, prema [12]

Provedimo sintezu observera stanja na mehaničkom sustavu drugog reda  $\ddot{y} = ku(t)$ , gdje je  $k = 1/m$ , a  $m$  je masa, uz pretpostavku da je mjerljiva jedino pozicija  $y$ .

Varijable stanja su  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ , dok su matrice sustava

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0].$$

Karakteristična jednadžba  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})$  za matricu pojačanja observera  $\mathbf{L} = [L_1 \ L_2]^T$  je

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}) = s^2 + L_1s + L_2 = 0,$$

gdje pojačanja  $L_1, L_2 > 0$  moraju zadovoljiti Hurwitzov kriterij stabilnosti. Parametri  $L_1, L_2$  također se mogu izračunati metodom namještanja polova. Uzmemo li stabilan dvostruki pol  $-\lambda$ , gdje je  $\lambda > 0$ , imamo

$$s^2 + L_1s + L_2 = (s + \lambda)^2 = s^2 + 2\lambda s + \lambda^2,$$

pa je  $\mathbf{L} = [2\lambda \ \lambda^2]^T$ .

Sada, jednadžbu (2.52) možemo napisati kao

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y. \quad (2.60)$$

gdje su

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -2\lambda & 1 \\ -\lambda^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

### 3. KONTINUIRANE METODE IDENTIFIKACIJE PARAMETARA

U ovom poglavlju prikazano je više metoda za identifikaciju parametara. Identifikacija će se izvršiti na mehaničkom sustavu drugog reda koji ćemo kasnije direktno koristiti u identifikaciji parametara letjelice.

Matematički model mehaničkog sustava drugog reda ima oblik:

$$\ddot{y} = ku(t), \quad (3.1)$$

gdje je  $y$  pozicija,  $u(t)$  upravljačka varijabla, a  $k$  parametar koji je potrebno identificirati. Radi lakše manipulacije jednadžbama prebacit ćemo sustav u Laplaceovu domenu.

Koristeći Laplaceovu transformaciju [13] jednadžba (3.1) poprima oblik:

$$s^2y(s) - sy_0 - v_0 = ku(s), \quad (3.2)$$

gdje je  $y_0$  početna pozicija, a  $v_0$  početna brzina. Za upravljanje ovakvim sustavom potrebno je poznavati sve parametre. Zato je potrebno identificirati dodatna dva početna uvjeta za koje pretpostavljamo da nam nisu poznata.

Kako bi se iz jednadžbe (3.2) odredio nepoznati parametar  $k$ , potrebno je poznavati drugu derivaciju pozicije, koja nije mjerljiva s obzirom na to da je pretpostavka da je mjerljiva samo pozicija, a ne i akceleracija. S druge strane, drugu derivaciju je moguće estimirati na temelju mjerenja samo pozicije, primjenom odgovarajućih estimatora derivacija signala [14, 15]. Međutim, takav pristup nije nužan i u ovom poglavlju razmatraju se neki direktni pristupi identifikaciji parametara u realnom vremenu na temelju mjerenja samo pozicije sustava, slično pristupu u radovima [16, 6].

Prva metoda koja pokušava riješiti ovaj problem je kontinuirana metoda najmanjih kvadrata (*eng. Continuous Least Squares*, CLS) prikazana u prvom potpoglavlju.

Osim identifikacije parametara dinamičkih sustava, navedene metode mogu se primijeniti za identifikaciju parametara signala, poput frekvencije periodičnog signala. Frekvenciju periodičkog signala nije moguće odrediti konvencionalnim metodama identifikacije [17], tako da se metode navedene u ovom poglavlju mogu koristiti za adaptivno podešavanje kompenzatora periodičkih poremećaja nepoznate frekvencije [18].

### 3.1. Identifikacija parametara primjenom kontinuirane metode najmanjih kvadrata

#### 3.1.1. Kontinuirana metoda najmanjih kvadrata

Prvo ćemo izvesti metodu najmanjih kvadrata prema [19]. Metoda traži funkciju  $y(t)$  koji će minimizirati funkciju pogreške, odnosno u našem primjeru, tražimo nepoznate parametre iz jednadžbe (3.2) koji će minimizirati funkciju pogreške. Funkcija pogreške definirana uzduž vremenskog perioda  $[0 T]$  je

$$E(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{2} \int_0^T [c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t) - y(t)]^2 dt. \quad (3.3)$$

Zatim, parcijalno deriviramo funkcije  $E(c_1, c_2, c_3)$  redom po sva tri parametra

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = \int_0^T \phi_1(t) [c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t) - y(t)] dt = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_2} = \int_0^T \phi_2(t) [c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t) - y(t)] dt = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_3} = \int_0^T \phi_3(t) [c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t) - y(t)] dt = 0, \quad (3.6)$$

odnosno

$$\int_0^T \phi_1(t)y(t)dt = c_1 \int_0^T \phi_1(t)\phi_1(t)dt + c_2 \int_0^T \phi_1(t)\phi_2(t)dt + c_3 \int_0^T \phi_1(t)\phi_3(t)dt, \quad (3.7)$$

$$\int_0^T \phi_2(t)y(t)dt = c_1 \int_0^T \phi_2(t)\phi_1(t)dt + c_2 \int_0^T \phi_2(t)\phi_2(t)dt + c_3 \int_0^T \phi_2(t)\phi_3(t)dt, \quad (3.8)$$

$$\int_0^T \phi_3(t)y(t)dt = c_1 \int_0^T \phi_3(t)\phi_1(t)dt + c_2 \int_0^T \phi_3(t)\phi_2(t)dt + c_3 \int_0^T \phi_3(t)\phi_3(t)dt, \quad (3.9)$$

Uvedemo li uobičajenu notaciju za skalarni produkt u funkcijskom prostoru

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)dt, \quad \langle y, \phi_i \rangle = \int_0^T \phi_i(t)y(t)dt, \quad (3.10)$$

za  $i, j = 1, 2, 3$  dobivamo konačno matrični sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{bmatrix} \langle y, \phi_1 \rangle \\ \langle y, \phi_2 \rangle \\ \langle y, \phi_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \langle \phi_1, \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \langle \phi_2, \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_3, \phi_1 \rangle & \langle \phi_3, \phi_2 \rangle & \langle \phi_3, \phi_3 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Invertiranjem gornjeg sustava dobivamo tražene parametre  $c_1, c_2, c_3$ .

U idućem potpoglavlju primjenjujemo opisanu metodu na sustav drugog reda.

### 3.1.2. Identifikacija parametra pri početnom dvostrukom integriranju

Kako bi mogli primijeniti metodu najmanjih kvadrata, potrebno je riješiti se svih derivacija funkcije  $y(t)$ . Zato prvo jednadžbu (3.2) pomnožimo s  $1/s^2$  (dvostruko integriranje) te dobivamo

$$k \frac{1}{s^2} u(s) + y_0 \frac{1}{s} + v_0 \frac{1}{s^2} = y(s) \quad (3.12)$$

gdje je  $y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  i  $u(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ .

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije na jednadžbu (3.12) dobivamo

$$k \int_0^t \int_0^\tau u(\tau_1) d\tau_1 d\tau + y_0 + v_0 t = y(t) \quad (3.13)$$

Uvedemo li sljedeće funkcije

$$\phi_1(t) = \int_0^t \int_0^\tau u(\tau_1) d\tau_1 d\tau, \quad \phi_2(t) = 1, \quad \phi_3(t) = t, \quad (3.14)$$

i sljedeće konstante

$$c_1 = k, \quad c_2 = y_0, \quad c_3 = v_0, \quad (3.15)$$

imamo

$$c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + c_3 \phi_3(t) = y(t) \quad (3.16)$$

Nepoznate parametre  $c_1, c_2, c_3$  sada možemo odrediti metodom najmanjih kvadrata. Navedena metoda integriranja naziva se invarijantno filtriranje [20, 21] jer ne utječe na točnost estimacije nepoznatih parametara.

Simulirat ćemo algoritam na mehaničkom sustavu drugog reda koristeći sljedeće parametre:

$$k = 1 \text{ kg}^{-1}; y_0 = 2 \text{ m}; v_0 = 3 \text{ m/s}; y_d(t) = \sin(3t) + 1 \text{ m}; s_1 = -2; s_2 = -3; A_{noise} = 0.2;$$

gdje je:

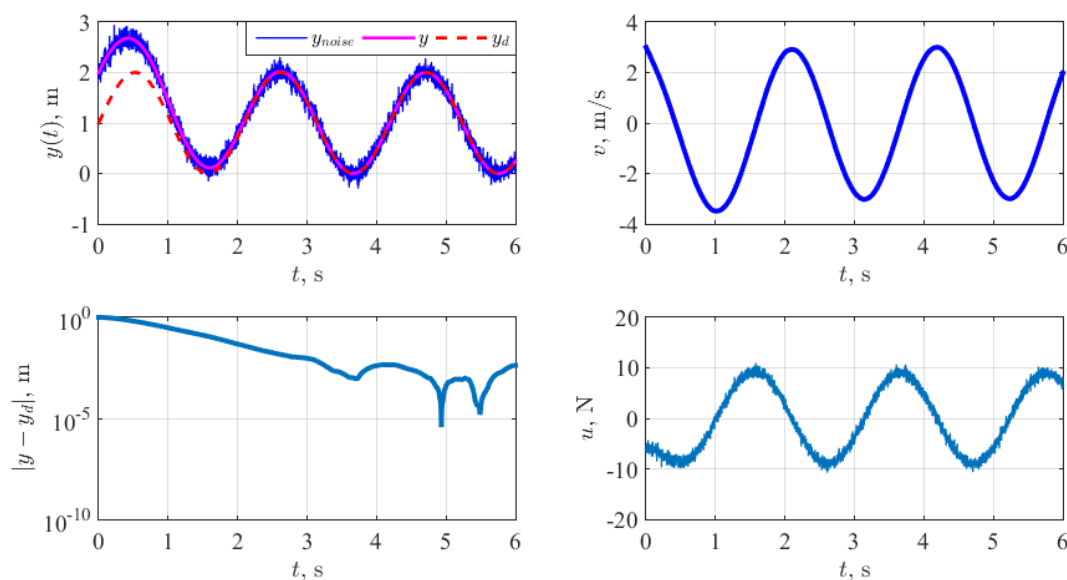
- $y_d(t)$  - referentna trajektorija
- $s_1$  i  $s_2$  - polovi regulatora
- $A_{noise}$  - amplituda šuma mjerenja.

Šum mjerenja simulirali smo koristeći matlabovu funkciju "random" za slučajne brojeve na način:  $A_{noise} * \text{random}('Normal', 0, \text{Sigm})$ , što predstavlja normalnu normiranu distribuciju uvećanu

za koeficijent  $A_{noise}$ . Ona se kao takva zbraja s pozicijom  $y(t)$ . Za regulator radi jednostavnosti koristimo PD regulator s unaprijednom kompenzacijom

$$u = \frac{1}{k}(\ddot{y}_d - K_d(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_p(y - y_d)). \quad (3.17)$$

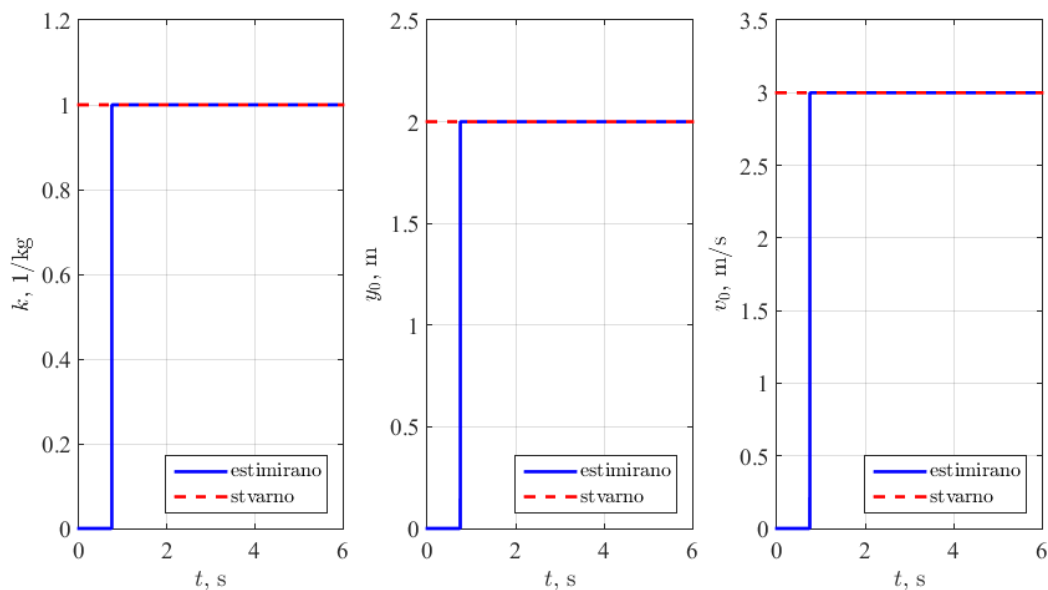
gdje su  $K_d$  i  $K_p$  pojačanja PD regulatora koji odgovaraju zadanim polovima regulatora  $s_1$  i  $s_2$ . Na slici 5 prikazana je regulacija pozicije. Crvena isprekidana krivulja označava zadanu referentnu trajektoriju koju želimo slijediti. Magentna (purpurna) krivulja je odziv sustava po  $y$  osi kada nije uključen šum mjerenja, dok plava krivulja pokazuje odziv uz prisutnost šuma.



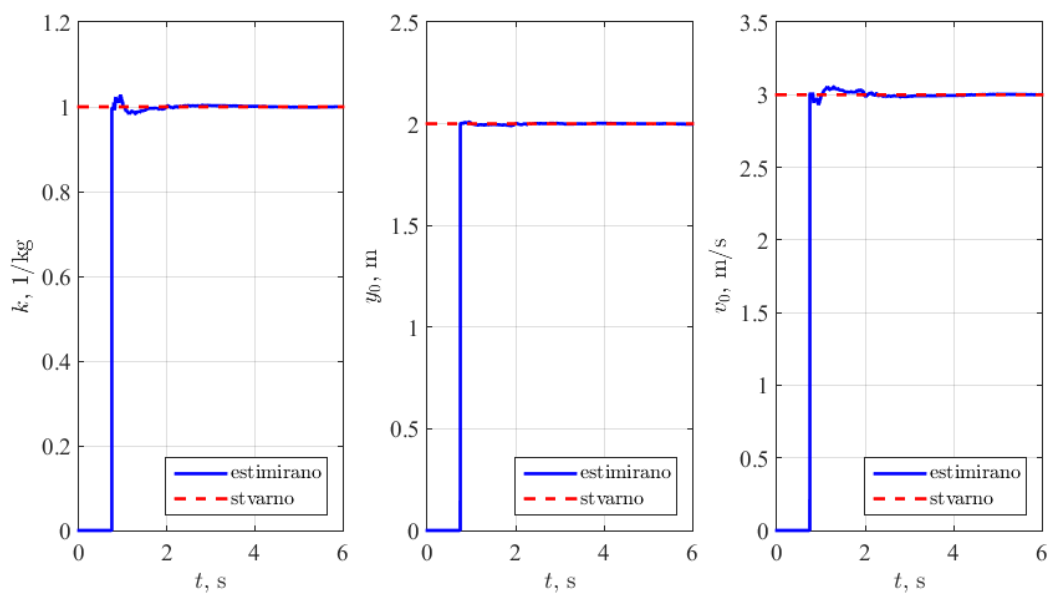
**Slika 5: Regulacija pozicije pri identifikaciji parametara metodom najmanjih kvadrata**

Na slici 6 prikazani su rezultati identifikacije parametara bez prisutnosti šuma. Parametri se, nakon inicijalnog vremena koje je potrebno proći zbog problema numeričkih grešaka, trenutno estimiraju na točnu vrijednost. Sličan rezultat daje i simulacija gdje je prisutan šum [Slika 7], uz zanemarivo odstupanje na početku identifikacije. Prema tome možemo zaključiti da ova metoda pokazuje izvrsnu robusnost na šum.

Na slici 8 prikazano je ponašanje matričnih i vektorskih elemenata iz matričnog sustava (3.11). Matrični elementi  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle$  divergiraju u vremenu s obzirom na to da funkcije  $\phi_i \notin \mathcal{L}_2$  (nisu kvadratno integrabilne, odnosno nemaju konačnu energiju). Kako apsolutne vrijednosti elemenata rastu, ovaj algoritam nije moguće direktno primijeniti na realnim sustavima radi zagušenja memorije i mogućih numeričkih netočnih izračuna zbog prevelikih brojeva. Taj problem možemo riješiti



**Slika 6: Identifikacija parametara bez šuma mjerenja korištenjem metode najmanjih kvadrata**



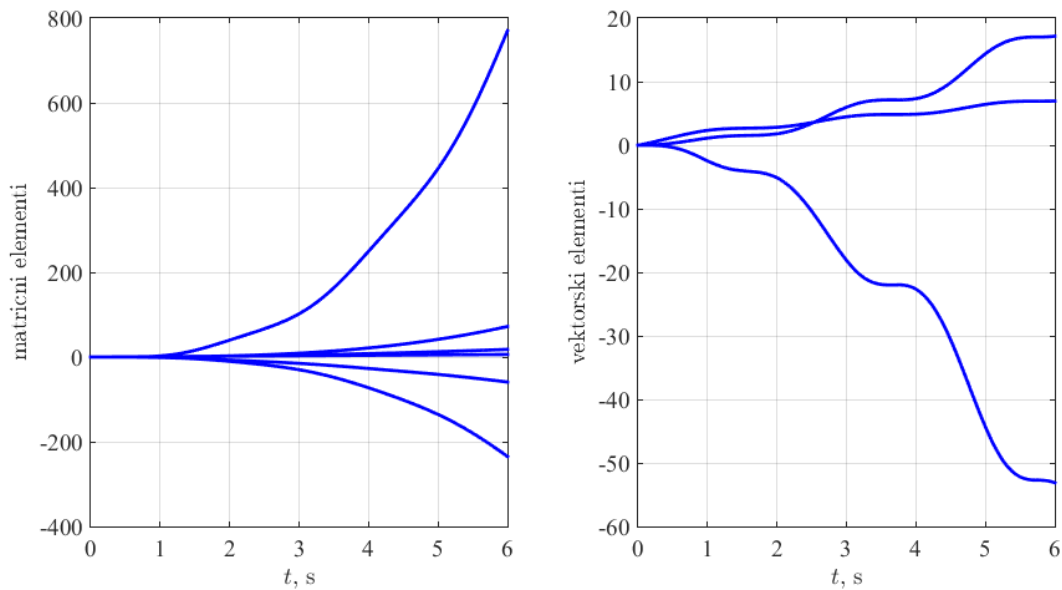
**Slika 7: Identifikacija parametara uz šum mjerenja korištenjem metode najmanjih kvadrata**

verzijom algoritma opisanoj u narednom poglavlju.

### 3.1.3. Identifikacija parametra pri početnom množenju s prijenosnom funkcijom

U ovoj verziji rješavamo problem velikih vrijednost elemenata matrica dobivenih u prošlom algoritmu. Metoda je zasnovana na radovima [6] i [16]. Umjesto dvostruke integracije, jednadžbu





Slika 8: Matrični i vektorski elementi

(3.2) u kompleksnoj domeni pomnožimo s prijenosnom funkcijom  $G(s)^3$ , gdje je

$$G(s) = \frac{1}{s + \lambda} \quad (3.18)$$

Kako bi svi elementi imali konačnu energiju, potrebno je množiti filterom koji je najmanje za jedan red veći od ukupnog reda dinamičkog sustava. Tako dobivamo:

$$kG(s)^3 u(s) + sG(s)^3 y_0 + G(s)^3 v_0 = s^2 G(s)^3 y(s), \quad (3.19)$$

odnosno

$$k \frac{1}{(s + \lambda)^3} u(s) + y_0 \frac{s}{(s + \lambda)^3} + v_0 \frac{1}{(s + \lambda)^3} = \frac{s^2}{(s + \lambda)^3} y(s). \quad (3.20)$$

Koristeći sljedeće algebarske izraze

$$sG(s) = 1 - \lambda G(s), \quad (3.21)$$

$$sG(s)^3 = G(s)^2 [1 - \lambda G(s)] = G(s)^2 - \lambda G(s)^3, \quad (3.22)$$

$$s^2 G(s)^2 = [1 - \lambda G(s)]^2 = 1 - 2\lambda G(s) + \lambda^2 G(s)^2, \quad (3.23)$$

$$s^2 G(s)^3 = G(s) - 2\lambda G(s)^2 + \lambda^2 G(s)^3, \quad (3.24)$$

dobivamo

$$kG(s)^3u(s) + [G(s)^2 - \lambda G(s)^3]y_0 + G(s)^3v_0 = [G(s) - 2\lambda G(s)^2 + \lambda^2 G(s)^3]y(s), \quad (3.25)$$

odnosno

$$c_1\phi_1(s) + c_2\phi_2(s) + c_3\phi_3(s) = f(s) \quad (3.26)$$

gdje je

$$\phi_2(s) = G(s)^2 - \lambda G(s)^3, \quad \phi_3(s) = G(s)^3 \quad (3.27)$$

i

$$\phi_1(s) = G(s)^3u(s), \quad f(s) = [G(s) - 2\lambda G(s)^2 + \lambda^2 G(s)^3]y(s). \quad (3.28)$$

U vremenskoj domeni imamo

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t) = f(t) \quad (3.29)$$

gdje je

$$\phi_2(t) = te^{-\lambda t} - \frac{1}{2!}\lambda t^2 e^{-\lambda t}, \quad \phi_3(t) = \frac{1}{2!}t^2 e^{-\lambda t}. \quad (3.30)$$

Primijetimo da više ne dobivamo polinome po  $t$ , nego eksponencijalne funkcije. Funkcije  $\phi_1(s)$  i  $f(t)$  predstavljaju odzive linearnih sustava trećeg reda. Imamo

$$\phi_1(s) = G(s)^3u(s) = G(s)G(s)G(s)u(s). \quad (3.31)$$

Prethodnu jednadžbu možemo zapisati u prostoru stanja [22]. To možemo postići uvođenjem kanonskih varijabli stanja tako da je

$$x_1(s) = G(s)u(s), \quad x_2(s) = G(s)x_1(s), \quad x_3(s) = G(s)x_2(s), \quad (3.32)$$

tada je

$$\phi_1(s) = x_3(s). \quad (3.33)$$

U vremenskoj domeni, nakon inverznog Laplaceovog transformata, dobivamo

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 + u(t), \quad (3.34)$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda x_2 + x_1, \quad (3.35)$$

$$\dot{x}_3 = -\lambda x_3 + x_2, \quad (3.36)$$

$$\phi_1(t) = x_3(t). \quad (3.37)$$

Nadalje, imamo

$$f(s) = G(s)y(s) - 2\lambda G(s)^2 y(s) + \lambda^2 G(s)^3 y(s). \quad (3.38)$$

Uvodimo kanonske varijable prostora stanja:

$$z_1(s) = G(s)y(s), \quad z_2(s) = G(s)z_1(s), \quad z_3(s) = G(s)z_2(s), \quad (3.39)$$

tada je

$$f(s) = z_1(s) - 2\lambda z_2(s) + \lambda^2 z_3(s). \quad (3.40)$$

U vremenskoj domeni, nakon inverznog Laplaceovog transformata, dobivamo

$$\dot{z}_1 = -\lambda z_1 + y(t), \quad (3.41)$$

$$\dot{z}_2 = -\lambda z_2 + z_1, \quad (3.42)$$

$$\dot{z}_3 = -\lambda z_3 + z_2, \quad (3.43)$$

$$f(t) = z_1(t) - 2\lambda z_2(t) + \lambda^2 z_3(t). \quad (3.44)$$

U matičnom obliku, gornje jednadžbe možemo prikazati

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad (3.45)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}y(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{0}, \quad (3.46)$$

$$\phi_1(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}, \quad (3.47)$$

$$f(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{z}, \quad (3.48)$$

gdje su gore navedene matrice jednake

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Nastavak je primjena navedenih funkcija u kontinuiranoj metodi najmanjih kvadrata (3.11), kao u prvoj verziji iz prethodnog potpoglavlja.

Uvodeći notaciju:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt, \quad \langle f, \phi_i \rangle = \int_0^T \phi_i(t) f(t) dt, \quad (3.51)$$

za  $i, j = 1, 2, 3$  dobivamo konačni matrični sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{bmatrix} \langle f, \phi_1 \rangle \\ \langle f, \phi_2 \rangle \\ \langle f, \phi_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \langle \phi_1, \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \langle \phi_2, \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_3, \phi_1 \rangle & \langle \phi_3, \phi_2 \rangle & \langle \phi_3, \phi_3 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

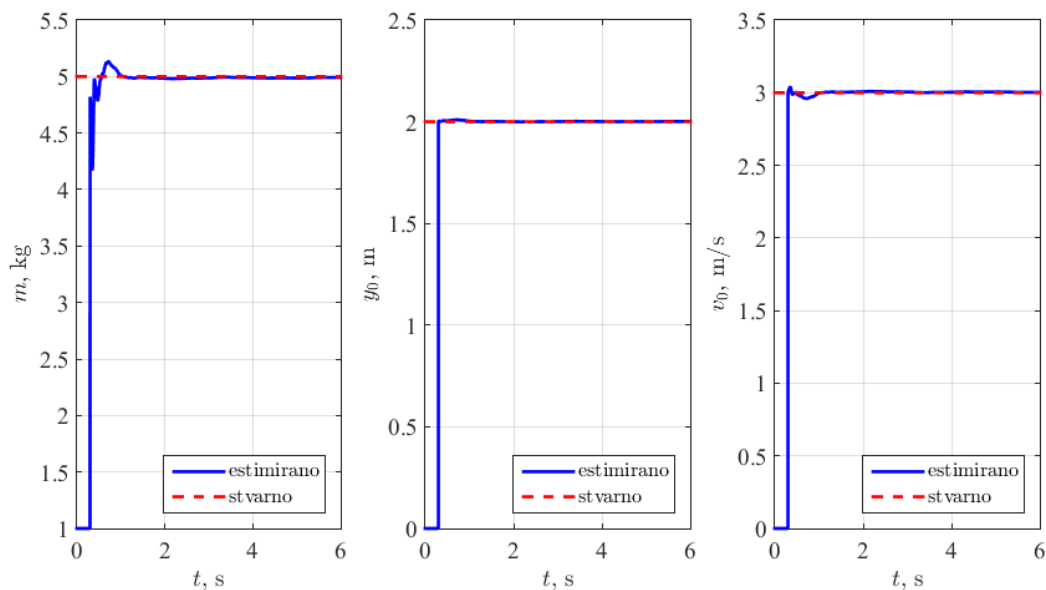
Dobiveni sustav simulirat ćemo sa zadanim parametrima.

Parametri korišteni u simulaciji su:  $k = 1 \text{ kg}^{-1}$ ;  $y_0 = 2 \text{ m}$ ;  $v_0 = 3 \text{ m/s}$ ;  $y_d = \sin(3t) + 1 \text{ m}$ ;  $s_1 = -2$ ;  $s_2 = -3$ ;  $A_{noise} = 0.2$ ;  $\lambda = 5$ ;  
gdje je  $\lambda$  parametar koji određuje pol  $-\lambda$ .

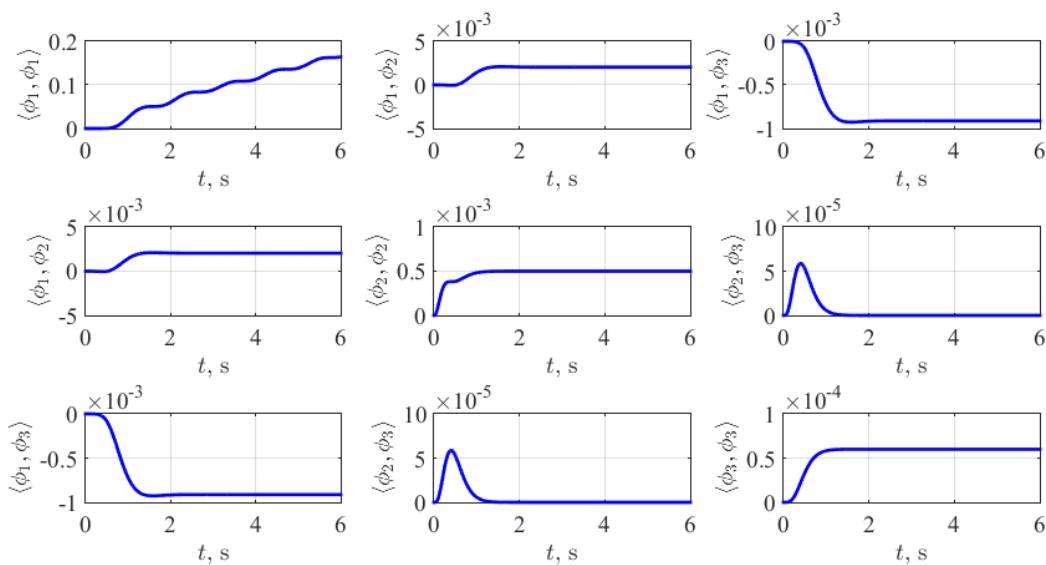
Za regulator kao i na prvoj verziji ove metode koristimo PD regulator s unaprijednom kompenzacijom.

Slika 9 prikazuje tražene estimirane parametre. Parametri su estimirani jednako dobro kao i u prvoj verziji. Robusnost na šum jednako je dobra u ovoj verziji.

Pogledamo li sliku 10, matrični elementi  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle$  više ne divergiraju u vremenu za razliku od prve verzije [Slika 8], što je bio i cilj ovog algoritma. Isto vrijedi i za vektorske elemente prikazane na slici 11. Ipak, jedan matrični elementi  $\langle \phi_1, \phi_1 \rangle$  lagano raste u vremenu. Razlog tome što je  $\phi_1$  funkcija upravljačke varijable  $u(t)$  koja je u ovom slučaju sinusnog oblika, a integral kvadrata takve funkcije mora rasti [Slika 12]. S obzirom na to da za funkcija raste vrlo sporo, u vremenu estimacije neće doći do ogromnih vrijednosti matrice. Ista stvar vrijedi i za vektorski element  $\langle \phi_1, f(t) \rangle$ .



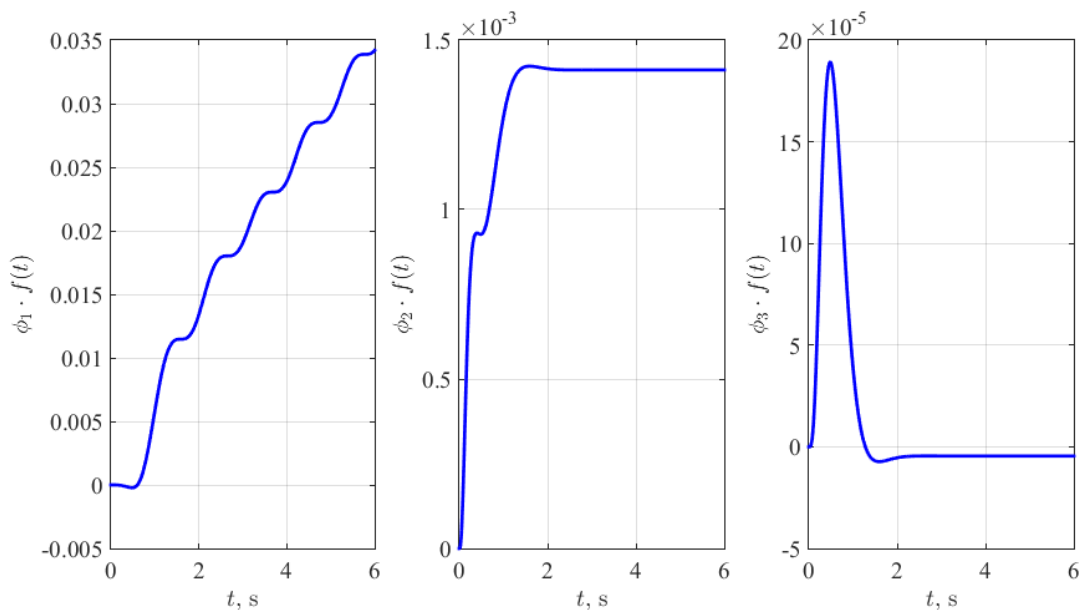
**Slika 9: Identifikacija parametara uz šum mjerenja korištenjem metode najmanji kvadrata uz filter  $G(s)$**



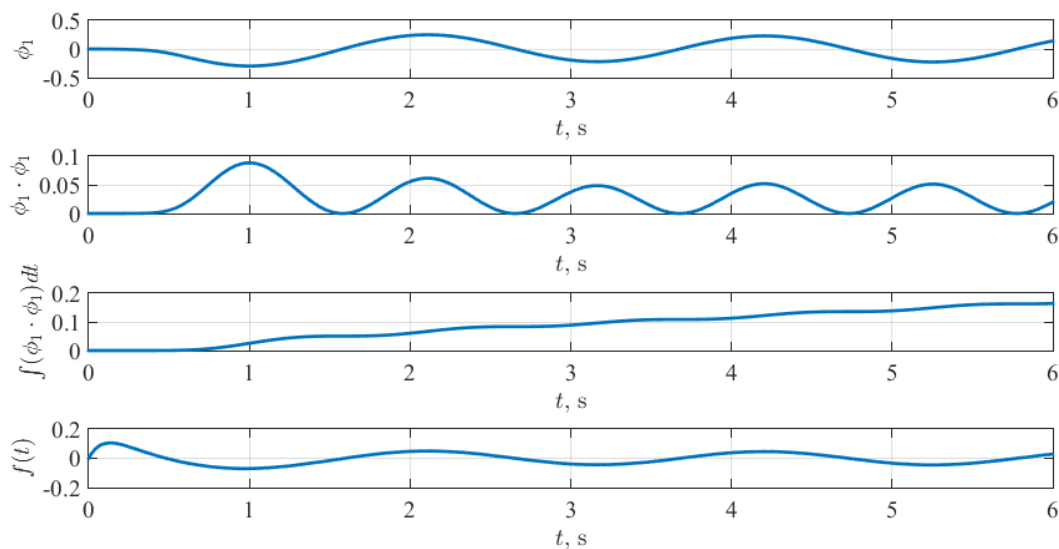
**Slika 10: Matrični elementi ne divergiraju u vremenu**

Brzina rasta funkcija ovisi između ostalog ovisi i položaju dvostrukog pola  $-\lambda$ .

Nedostatak kontinuirane metode najmanjih kvadrata je invertiranje matrice  $3 \times 3$  u svakom ko-



Slika 11: Vektorski elementi

Slika 12: Matrični element  $\langle \phi_1, \phi_1 \rangle$  blago raste u vremenu, a oblik funkcije  $f(t)$  ne divergira u vremenu

raku čime identifikacija gubi na brzini, a i moguće su numeričke pogreške. Također, ova metoda zahtjeva identifikaciju dodatna dva parametra (početne uvjete) kako bismo identificirali traženi parametar  $k$ . Sljedeća metoda omogućuje eliminaciju početnih uvjeta te s time rješava problem

invertiranja matrica.

### 3.2. Metoda identifikacije pomoću diferencijalnog operatora s vremenskim pomakom

Kontinuirana metoda najmanjih kvadrata zahtijevala je identifikaciju početnih uvjeta te s time povećavala dimenziju matrice koju je potrebno invertirati u svakom trenutku. Sljedeća metoda eliminira početne uvjete pomoću diferencijskog operatora s vremenskim pomakom te možemo direktno dobiti traženi parametar.

Definirajmo operator pomaka:

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t - \tau). \quad (3.53)$$

Svojstvo tog operatora je da ako je  $f(t) = \text{const.}$ , onda je

$$\Delta \text{const} = 0. \quad (3.54)$$

Dalje, za  $f(t) = t$  imamo

$$\Delta t = t - (t - \tau) = \tau, \quad (3.55)$$

gdje je  $\tau$  vremenska konstanta. Primijenimo li ponovno istu operaciju na jednadžbu (3.55), odnosno drugu diferenciju, vrijedi da je

$$\Delta^2 t = 0. \quad (3.56)$$

Na kraju, ako provedemo drugu diferenciju  $\Delta^2$  na proizvodnu funkciju  $f(t)$ , vrijedi da je

$$\Delta^2 f(t) = f(t) - 2f(t - \tau) + f(t - 2\tau). \quad (3.57)$$

Drugom diferencijom na jednadžbe (3.16) dobivamo sljedeće:

$$c_1 \Delta^2 \phi_1(t) + c_2 \Delta^2 \phi_2(t) + c_3 \Delta^2 \phi_3(t) = \Delta^2 y(t), \quad (3.58)$$

gdje kada primijenimo jednadžbe (3.54) i (3.56) gdje su  $\phi_2 = 1$ , a  $\phi_3 = t$ , ostaje

$$c_1 \Delta^2 \phi_1(t) = \Delta^2 y(t), \quad (3.59)$$

gdje je  $c_1 = k$ , tj. parametar koji tražimo. Parametri  $c_2$  i  $c_3$  su početni uvjeti te ih nije potrebno identificirati.

Iz (3.59) slijedi da je

$$k = \frac{\Delta^2 y(t)}{\Delta^2 \phi_1(t)}. \quad (3.60)$$

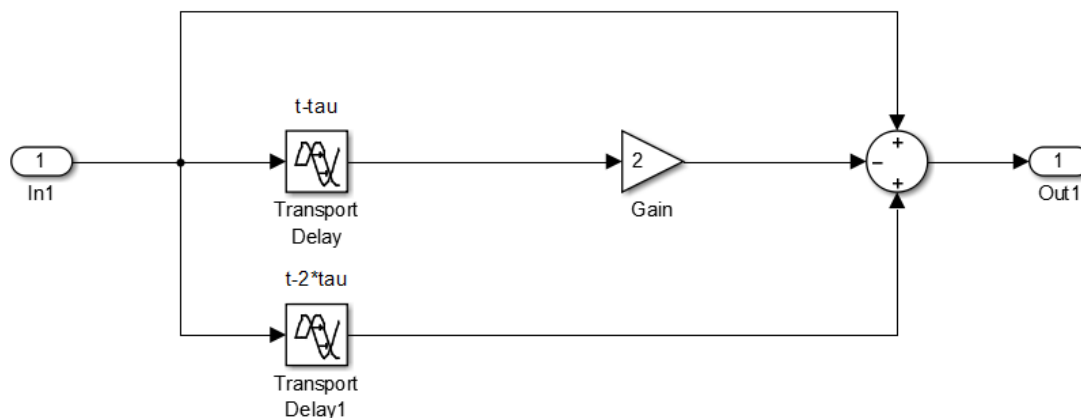
Broj u nazivniku u početnom trenutku uvijek je jedan nuli, a moguće je da i u nekom drugom trenutku funkcija  $\phi_1$  prolazi kroz nulu. Kako bi se izbjegla singularnost, primjenjuje se nelinearno invarijantno filtriranje, gdje na brojnik i na nazivnik primjenjujemo apsolutnu vrijednost te zatim integraciju po cijelom vremenskom intervalu. Traženi parametar tada iznosi:

$$k = \frac{\int_0^t |\Delta^2 y(\tau)| d\tau}{\int_0^t |\Delta^2 \phi_1(\tau)| d\tau}, \quad (3.61)$$

za  $t \geq \varepsilon > 0$ .

Prethodni sustav simulirat ćemo u Simulinku. Blok u simulink modelu koji predstavlja drugu diferenciju signala prema jednadžbi (3.57) prikazan je na slici 13, dok je cijeli simulink model prikazan je na slici 14.

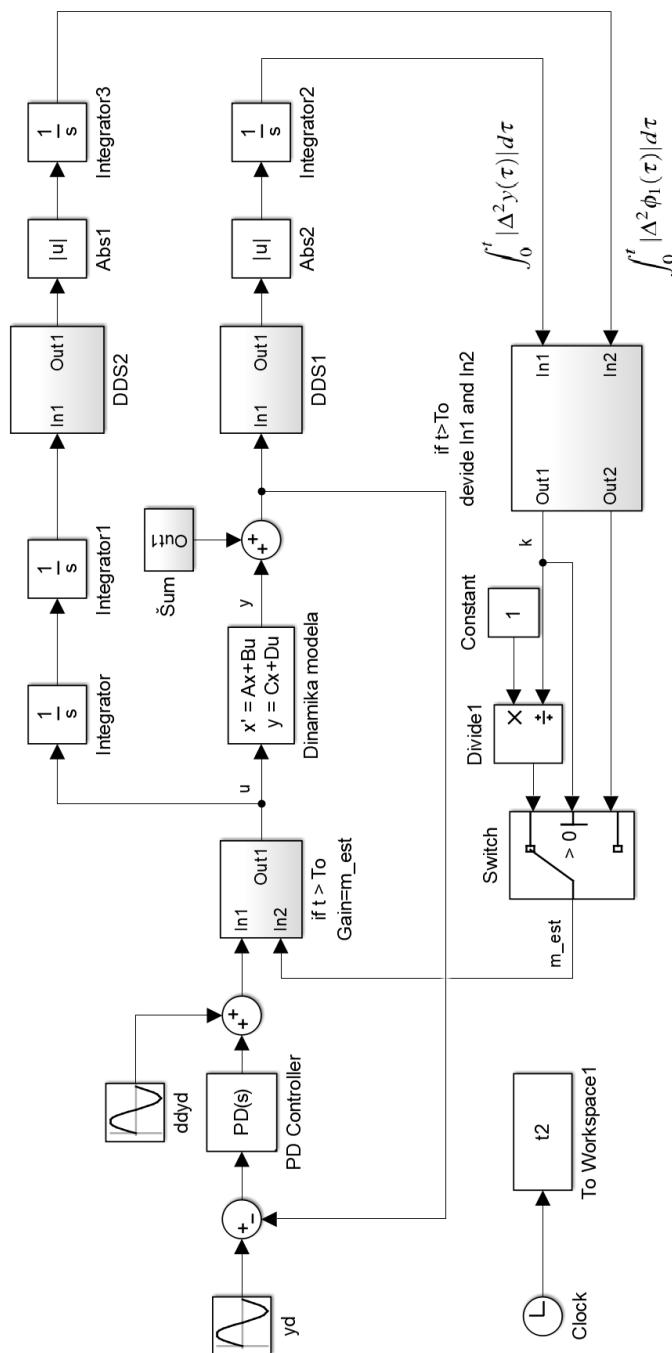
Zadani parametri jesu:  $\tau = 0.1$  s,  $m = 5$  kg,  $y_0 = 2$  m,  $v_0 = 3$  m/s,  $y_d = \sin(3t) + 1$  m,  $\varepsilon = 0.3$  s,  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -3$  i  $A_{noise} = 0.2$ . gdje je  $m = 1/k$  masa sustava. Za regulator koristimo kao i u prijašnjoj metodi identifikacije PD regulator s unaprijednom kompenzacijom.



Slika 13: Druga diferencija signala - DDS

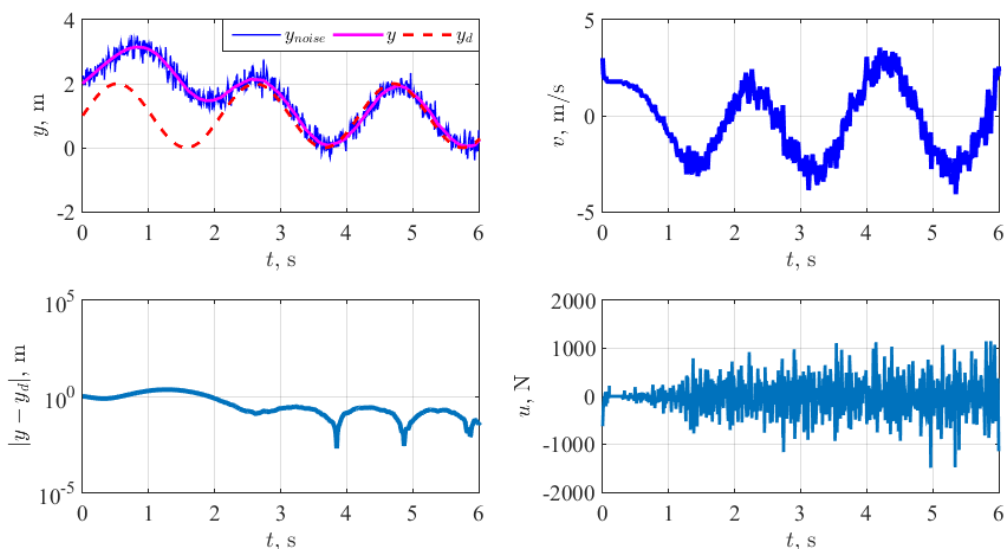
Na slici 15 možemo vidjeti kako se pozicija uspijeva regulirati, no upravljačka varijabla  $u$  jako varira svoju vrijednost što nema smisla upotrebljavati u realnim sustavima. Razlog tome je što metoda nije uspjela dobro identificirati parametar mase [Slika 16]. Estimirani parametar svakako konvergira k pravoj vrijednosti, no to čini jako sporo. Kako takav rezultat ne bi bio slučajno



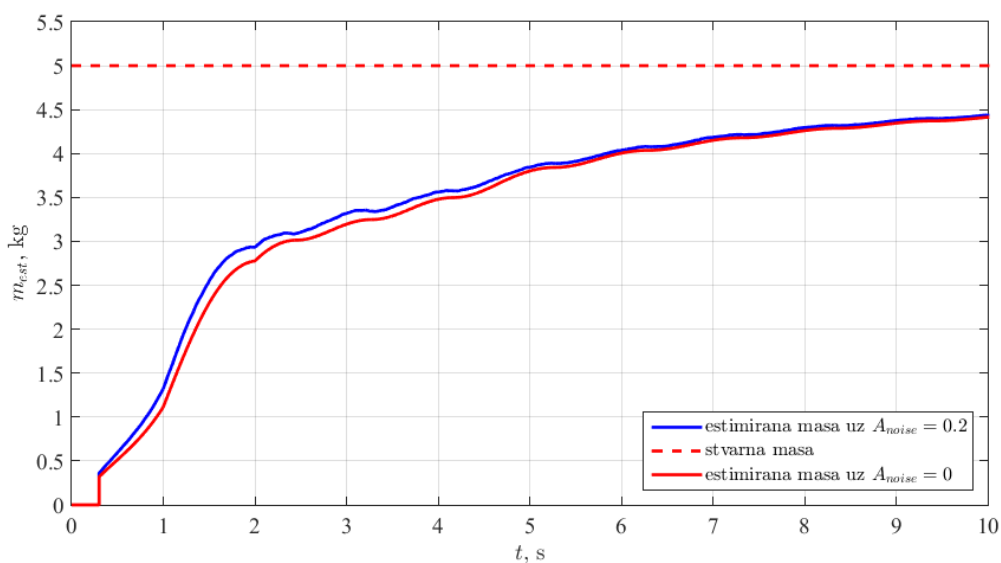


Slika 14: Simulink model

samo rezultat spore regulacijske petlje, metoda je testirana i off-line, gdje je ulaz sustava umjesto referentne trajektorije upravljačka varijabla, a regulator i s time povratna veza isključena. Rezultat toga bio je sličan kao u on-line identifikaciji parametara. Usprkos tome, metoda pokazuje dobru robusnost na šum, ali zbog spore estimacije parametara nije upotrebljiva.



Slika 15: Regulacija pozicije pri korištenju operatora diferencije



Slika 16: Identifikacija mase ima sporu konvergenciju

### 3.3. Metoda identifikacije sukcesivnim parcijalnim integriranjem s modulirajućim funkcijama

Ova metoda omogućuje eliminaciju početnih uvjeta, ali i brzu konvergenciju za razliku od posljednje isprobane metode.

U jednadžbu (3.1) dodat ćemo gravitacijsku komponentu kako u slučaju kada moramo uzeti u obzir gravitaciju, ne bi morali ponovno raditi izvod. Ako sustav ne sadrži gravitacijsku kompo-

mentu, jednostavno se može uzeti da je  $g = 0$  te tako cijeli izvod i sustav prikazan u prostoru dalje vrijedi. Jednadžba sada ima oblik:

$$\ddot{y} = ku(t) - g. \quad (3.62)$$

Pomnožimo jednadžbu (3.62) s funkcijom  $\Phi(t)$ :

$$\Phi(t)(\ddot{y} + g) = k\Phi(t)u(t) \quad (3.63)$$

gdje je

$$\Phi(t) = t^2 e^{-qt}; \quad q > 0 \quad (3.64)$$

i vrijedi

$$\Phi(0) = \dot{\Phi}(0) = 0 \quad (3.65)$$

To svojstvo funkcije  $\Phi(t)$  eliminira početne uvjete na sljedeći način kroz integriranje. Integriramo jednadžbu (3.63)

$$\int_0^t \Phi(\tau)(\ddot{y}(\tau) + g) d\tau = k \int_0^t \Phi(\tau)u(\tau) d\tau \quad (3.66)$$

što nas svodi na postupak parcijalne integracije

$$\Phi(\tau)(\dot{y}(\tau) + g\tau) \Big|_0^t - \int_0^t \dot{\Phi}(\tau)\dot{y}(\tau) d\tau = kw_1(t) \quad (3.67)$$

gdje je

$$w_1(t) = \int_0^t \Phi(\tau)u(\tau) d\tau \quad (3.68)$$

Dalje slijedi

$$\Phi(t)(\dot{y}(t) + gt) - \dot{\Phi}(\tau)\left(y(\tau) + \frac{1}{2}g\tau^2\right) \Big|_0^t + \int_0^t \ddot{\Phi}(\tau)\left(y(\tau) + \frac{1}{2}g\tau^2\right) d\tau = kw_1(t) \quad (3.69)$$

te nam ostaje

$$\Phi(t)(\dot{y}(t) + gt) = w_0(t) + kw_1(t) \quad (3.70)$$

gdje je

$$w_0(t) = \dot{\Phi}(t)\left(y(t) + \frac{1}{2}gt^2\right) - \int_0^t \ddot{\Phi}(\tau)\left(y(\tau) + \frac{1}{2}g\tau^2\right) d\tau \quad (3.71)$$

U jednadžbi (3.70) preostaje nam još jedna derivacija varijable  $y$  koju ćemo riješiti ponovnim integriranjem. No prvo, kako varijable stanja koje ćemo kasnije uvesti bile ograničene, potrebno

je jednadžbu (3.70) pomnožiti s funkcijom  $\Phi(t)$  te zatim provesti integraciju. Dakle, slijedi

$$\int_0^t \Phi^2(\tau) (\dot{y}(\tau) + g\tau) d\tau = \int_0^t \Phi(\tau) w_0(\tau) d\tau + k \int_0^t \Phi(\tau) w_1(\tau) d\tau \quad (3.72)$$

Ponavljja se postupak parcijalne integracije

$$\Phi^2(\tau) \left( y(\tau) + \frac{1}{2} g\tau^2 \right) \Big|_0^t - \int_0^t 2\Phi(\tau) \dot{\Phi}(\tau) \left( y(\tau) + \frac{1}{2} g\tau^2 \right) d\tau = \int_0^t \Phi(t) w_0(\tau) d\tau + k \int_0^t \Phi(t) w_1(\tau) d\tau \quad (3.73)$$

Uvrštavanjem granica određenog integrala i uvrštavanjem  $w_0(t)$  i  $w_1(t)$  nazad u jednadžbu, dobivamo:

$$\begin{aligned} & \Phi^2(t) \left( y(t) + \frac{1}{2} g t^2 \right) - 3 \int_0^t \Phi(\tau) \dot{\Phi}(\tau) \left( y(\tau) + \frac{1}{2} g\tau^2 \right) d\tau + \\ & + \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \ddot{\Phi}(\tau) \left( y(\tau) + \frac{1}{2} g\tau^2 \right) d\tau d\tau_1 = k \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \Phi(\tau) u(\tau) d\tau d\tau_1 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Označimo li lijevu stranu jednadžbe (3.74) s  $b_0(t)$ , a na desnoj sve osim parametra  $k$  s označimo s  $n_0(t)$ , dobivamo sljedeće

$$b_0(t) = k n_0(t) \quad (3.75)$$

Odnosno, traženi parametar  $k$  iznosi

$$k = \frac{b_0(t)}{n_0(t)} \quad (3.76)$$

Kako broj u nazivniku ne bi prolazio u nekom trenutku kroz nulu, brojnik i nazivnik stavljaju se pod apsolutnu vrijednost te integriraju za vrijeme od 0 do  $t$ . Kako te funkcije ne bi stalno rasle, apsolute vrijednosti pomnožit ćemo s funkcijom  $\Phi(\tau)$  te tako imamo

$$b(t) = \int_0^t \Phi(\tau) |b_0(t)| d\tau \quad (3.77)$$

i

$$n(t) = \int_0^t \Phi(\tau) |n_0(t)| d\tau \quad (3.78)$$

te nam na kraju parametar  $k$  iznosi

$$k = \frac{b(t)}{n(t)} \quad (3.79)$$

za  $t \geq \varepsilon > 0$ .

Prikažimo prethodni sustav u prostoru stanja.

S obzirom na jednadžbu (3.74), uvedimo pet varijabli stanja:

$$x_1(t) = \int_0^t \Phi(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (3.80)$$

$$x_2(t) = \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \Phi(\tau)u(\tau)d\tau d\tau_1, \quad (3.81)$$

$$x_3(t) = \int_0^t \ddot{\Phi}(\tau) \left( y(\tau) + \frac{1}{2}g\tau^2 \right) d\tau, \quad (3.82)$$

$$x_4(t) = \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \ddot{\Phi}(\tau) \left( y(\tau) + \frac{1}{2}g\tau^2 \right) d\tau d\tau_1, \quad (3.83)$$

$$x_5(t) = \int_0^t \Phi(\tau)\dot{\Phi}(\tau) \left( y(\tau) + \frac{1}{2}g\tau^2 \right) d\tau, \quad (3.84)$$

kako bi funkcije  $b_0(t)$  i  $n_0(t)$  postale

$$b_0(t) = \Phi^2(t) \left( y(t) + \frac{1}{2}gt^2 \right) + x_4(t) - 3x_5(t), \quad (3.85)$$

i

$$n_0(t) = x_2(t). \quad (3.86)$$

Derivacije varijabli stanja iznose:

$$\dot{x}_1(t) = \Phi(t)u(t), \quad (3.87)$$

$$\dot{x}_2(t) = \Phi(t)x_1(t), \quad (3.88)$$

$$\dot{x}_3(t) = \ddot{\Phi}(t) \left( y(t) + \frac{1}{2}gt^2 \right), \quad (3.89)$$

$$\dot{x}_4(t) = \Phi(t)x_3(t), \quad (3.90)$$

$$\dot{x}_5(t) = \Phi(t)\dot{\Phi}(t) \left( y(t) + \frac{1}{2}gt^2 \right), \quad (3.91)$$

Prostor stanja u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \ddot{\Phi} \\ 0 & 0 \\ 0 & \Phi\dot{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) + \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$\begin{bmatrix} b_0(t) \\ n_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Phi^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) + \frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Izvedenu metodu primijenit ćemo za identifikaciju mase letjelice, momenata inercije te geometrijskog koeficijenta propelera.

Međutim, osim identifikacije parametara sustava, izvedenu metodu možemo iskoristiti za estimaciju stanja na način prikazan u sljedećem potpoglavlju.

#### 3.4. Neasimptotska estimacija stanja

Izvesti ćemo algoritam za estimaciju stanja metodom korištenom za identifikaciju parametara u potpoglavlju 3.3. Radi preglednosti zanemarit ćemo gravitacijsku komponentu u sustavu. Parametar  $k = 1/m$  predstavlja masu sustava te za svrhu estimacije stanja pretpostavljamo da je parametar poznat. Polazeći od diferencijalne jednadžbe drugog reda  $\ddot{y} = ku$ , sukcesivno parcijalno integriranje i množenje s modulirajućom funkcijom  $\Phi(t)$  dovodi nas do jednadžbe (3.70), koja za  $g = 0$  ima oblik:

$$\Phi(t)\dot{y}(t) = w_0(t) + kw_1(t) \quad (3.94)$$

gdje je

$$w_0(t) = \dot{\Phi}(t)y(t) - \int_0^t \ddot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau \quad (3.95)$$

$$w_1(t) = \int_0^t \Phi(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (3.96)$$

Dijeleći jednadžbu (3.94) s funkcijom  $\Phi(t)$ , dobivamo izraz:

$$\dot{\hat{y}}(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \left( w_0(t) + kw_1(t) \right), \quad (3.97)$$

odnosno uvrštavajući jednadžbe (3.95) i (3.96):

$$\dot{\hat{y}}(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \left( \dot{\Phi}(t)y(t) - \int_0^t \ddot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau + k \int_0^t \Phi(\tau)u(\tau)d\tau \right), \quad (3.98)$$

gdje je  $\hat{y}(t)$  estimirana brzina.

Množenjem jednadžbe (3.94) funkcijom  $\Phi(t)$  te sukcesivnim parcijalnim integriranjem smanjujemo red sustava i dobivamo izraz:

$$\Phi^2(t)y(t) - 3 \int_0^t \Phi(\tau)\dot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau + \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \ddot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau d\tau_1 = k \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \Phi(\tau)u(\tau)d\tau d\tau_1. \quad (3.99)$$

Prebacivanjem članova jednadžbe na desnu stranu jednadžbe te dijeljenjem s kvadratom funkcije  $\Phi(t)$ , dobivamo izraz:

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{\Phi^2(t)} \left( 3 \int_0^t \Phi(\tau)\dot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau - \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \ddot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau d\tau_1 + k \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \Phi(\tau)u(\tau)d\tau d\tau_1 \right), \quad (3.100)$$

gdje je  $\hat{y}(t)$  estimirana pozicija.

Ubacimo dobivenu estimiranu poziciju u jednadžbu (3.98) umjesto mjerene pozicije  $y(t)$ . Krajnji izraz za estimiranu brzinu je:

$$\dot{\hat{y}}(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \left( \dot{\Phi}(t)\hat{y}(t) - \int_0^t \ddot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau + k \int_0^t \Phi(\tau)u(\tau)d\tau \right). \quad (3.101)$$

Kako bi ispitati metodu u Matlabu, prebacimo izraze estimiranih vrijednosti u prostor stanja. Definirajmo varijable stanja s obzirom na jednadžbu (3.100):

$$x_1(t) = \int_0^t \Phi(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (3.102)$$

$$x_2(t) = \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \Phi(\tau)u(\tau)d\tau d\tau_1, \quad (3.103)$$

$$x_3(t) = \int_0^t \ddot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau, \quad (3.104)$$

$$x_4(t) = \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^{\tau_1} \ddot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau d\tau_1, \quad (3.105)$$

$$x_5(t) = \int_0^t \Phi(\tau)\dot{\Phi}(\tau)y(\tau)d\tau, \quad (3.106)$$

Primijetimo da varijable stanja iste onima iz potpoglavlja 3.3 za estimaciju parametara sustava, uz razliku da je ovdje  $g = 0$ . Izlazne funkcije u ovom slučaju su estimirana pozicija i brzina, a u prostoru stanja imaju oblik:

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{\Phi^2(t)} \left( 3x_5(t) - x_4(t) + kx_2(t) \right), \quad (3.107)$$

$$\dot{\hat{y}}(t) = \frac{1}{\Phi(t)} \left( \dot{\Phi}(t)\hat{y}(t) - x_3(t) + kx_1(t) \right). \quad (3.108)$$

Derivacije varijabli stanja iznose:

$$\dot{x}_1(t) = \Phi(t)u(t), \quad (3.109)$$

$$\dot{x}_2(t) = \Phi(t)x_1(t), \quad (3.110)$$

$$\dot{x}_3(t) = \ddot{\Phi}(t)y(t), \quad (3.111)$$

$$\dot{x}_4(t) = \Phi(t)x_3(t), \quad (3.112)$$

$$\dot{x}_5(t) = \Phi(t)\dot{\Phi}(t)y(t), \quad (3.113)$$

a matrični oblik prostora stanja je:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \ddot{\Phi} \\ 0 & 0 \\ 0 & \Phi\dot{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{\Phi^2(t)} & 0 & -\frac{1}{\Phi^2(t)} & \frac{3}{\Phi^2(t)} \\ \frac{k}{\Phi(t)} & 0 & -\frac{1}{\Phi(t)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\Phi} \\ 0 & \ddot{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Potrebno je odabrati modulirajuću funkciju koja zadovoljava jednadžbe (3.65), a čija vrijednost neće težiti u nulu, kako njegova recipročna vrijednost koja se koristi u jednadžbama (3.107) i (3.108) ne bi divergirala u beskonačnost. Takva funkcija je

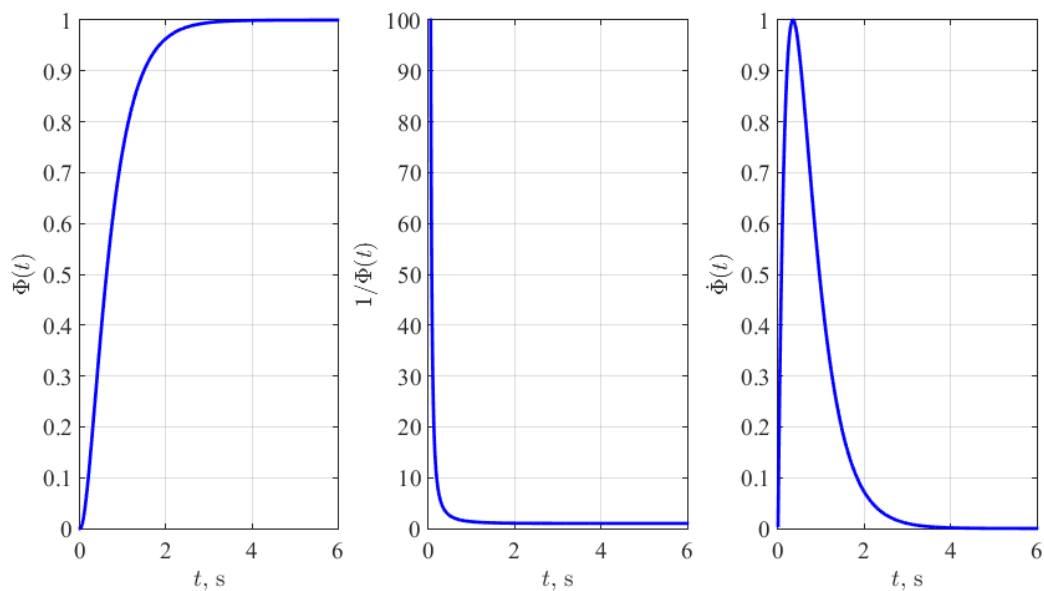
$$\Phi(t) = (e^{-qt} - 1)^2, \quad (3.116)$$



a njezina derivacija iznosi

$$\dot{\Phi}(t) = -2(e^{-qt} - 1)qe^{-qt}, \quad (3.117)$$

iz kojih izraza je lako vidjeti da im je vrijednost za  $t = 0$  jednaka nuli [Slika 17].



Slika 17: Modulirajuća funkcija korištena za neasimptotsku estimaciju stanja

## 4. Identifikacija parametara letjelice

### 4.1. Identifikacija mase letjelice

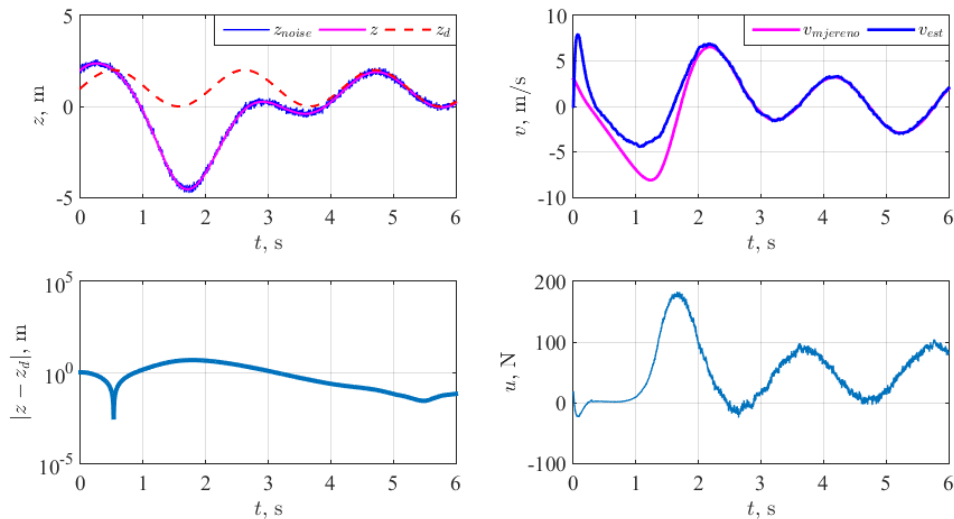
Masu letjelice identificirat ćemo iz podsustava iz jednadžbe (2.29) koja opisuje dinamiku letjelice po  $z$  osi. Masa letjelice iznosi  $m = 1/k$  gdje se parametar  $k$  računa prema jednadžbi (3.79).

Prostor u sustavu stanja koristimo u simulaciji za sljedeće parametre sustava:  $m = 5$  kg,  $z(0) = 2$  m,  $\dot{z}(0) = 3$  m/s,  $\varepsilon = 0.2$  s,  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -3$ ,  $A_{noise} = 0.2$ ,  $q = 2$ ,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>,  $z_d(t) = \sin(3t) + 1$  m,  $r_1 = -10$ ,  $r_2 = -15$ , gdje su  $r_1$  i  $r_2$  polovi observera. Regulator koji se koristi je PD regulator s unaprijednom kompenzacijom:

$$u_1 = \hat{m}(\ddot{z}_d - K_d(\dot{\hat{z}} - \dot{z}_d) - K_p(z - z_d) + g), \quad (4.1)$$

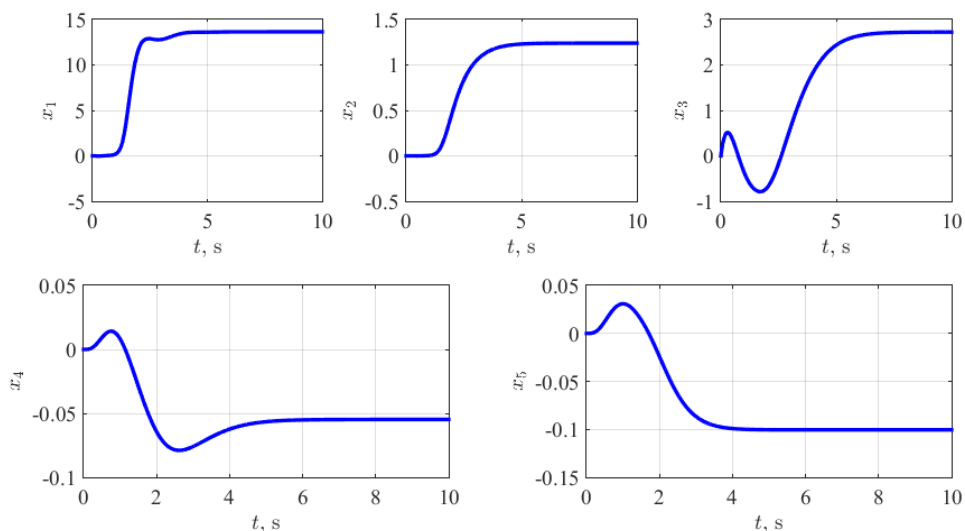
gdje su  $K_d$  i  $K_p$  pojačanja PD regulatora koji odgovaraju zadanim polovima regulatora  $s_1$  i  $s_2$ ,  $\hat{m}$  masa sustava koji se identificira te uvrštava u regulator, a  $\hat{z}$  estimirana brzina. Estimacija brzine izvršava se Luenbergerovim observerom prikazanim u poglavlju 2.8.

Slika 18 prikazuje regulaciju pozicije po  $z$  osi, brzinu, grešku pozicioniranja te veličinu upravljačke varijable. Svi parametri imaju odzive u skladu s očekivanim.



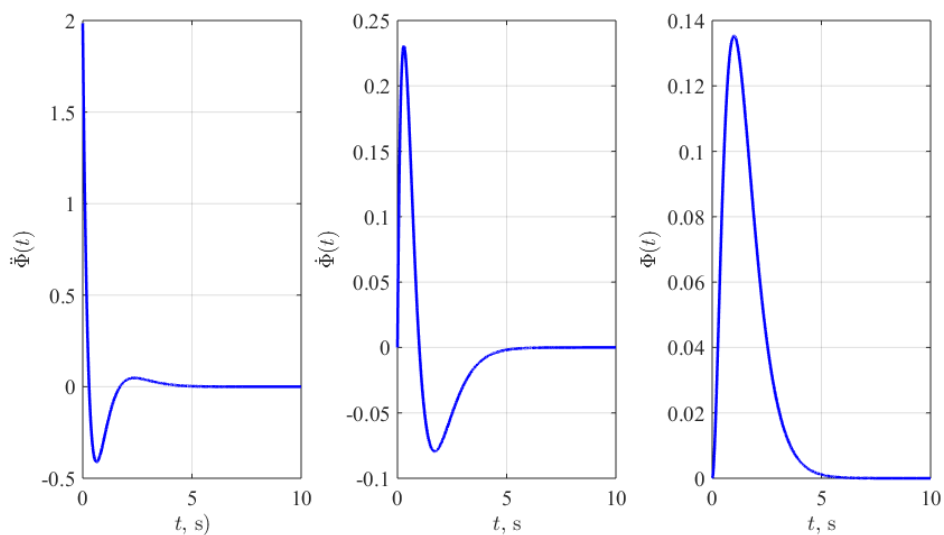
**Slika 18: Regulacija pozicije uz identifikaciju metodom sukcesivnog parcijalnog integriranja**

Na slici 19 iscrtane su sve varijable stanja iz jednadžbi od (3.80) do (3.84). Sve varijable stanja imaju ograničene vrijednosti.



**Slika 19: Varijable stanja imaju ograničene vrijednosti**

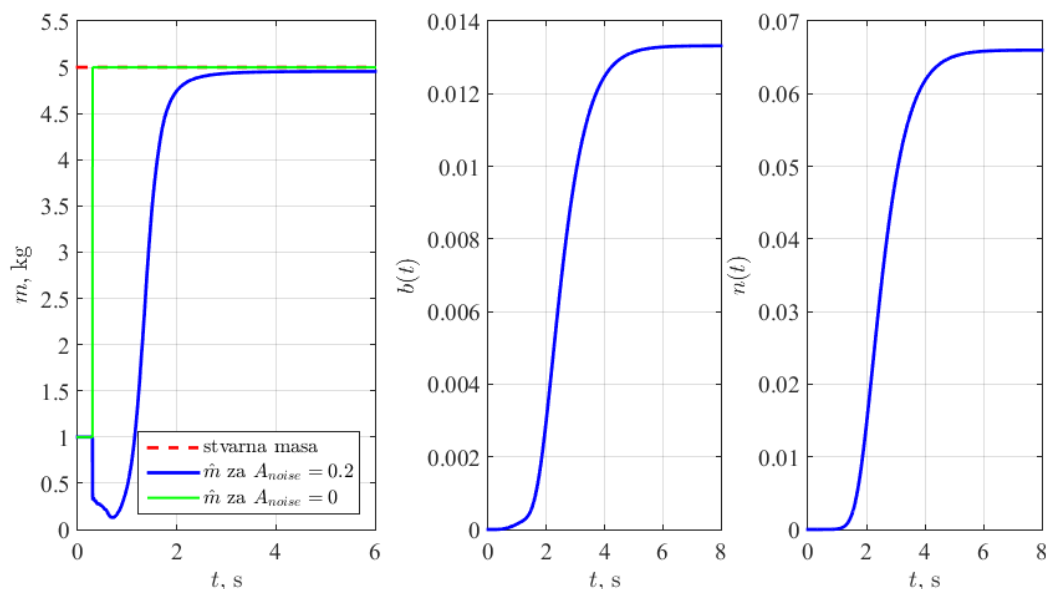
Sljedeća slika [Slika 20] prikazuje modulirajuću funkciju  $\Phi(t)$  te njezine prve dvije derivacije. Grafovi potvrđuju da vrijedi tvrdnja (3.65), odnosno da funkcije  $\Phi(t)$  i  $\dot{\Phi}(t)$  imaju vrijednost nula u početnom trenutku. Uz to, bitno je i da sve funkcije imaju konačnu vrijednost.



**Slika 20: Modulirajuća funkcija i njezine derivacije**

Slika 21 prikazuje nam tri grafa. Prvi graf pokazuje estimaciju mase, gdje možemo uočiti kako se masa  $\hat{m}$  pri mjerenju pozicije bez šuma, trenutno estimira na pravu vrijednost, dok se uz šum mjerenja masa estimira s malim vremenskim kašnjenjem. Sljedeća dva grafa prikazuju

odziv funkcije  $b(t)$  iz jednadžbe (3.77) te funkcije  $n(t)$  iz jednadžbe (3.78). Obje funkcije teže ka konstantnoj vrijednosti što je bitno za primjenu na stvarnim sustavima.



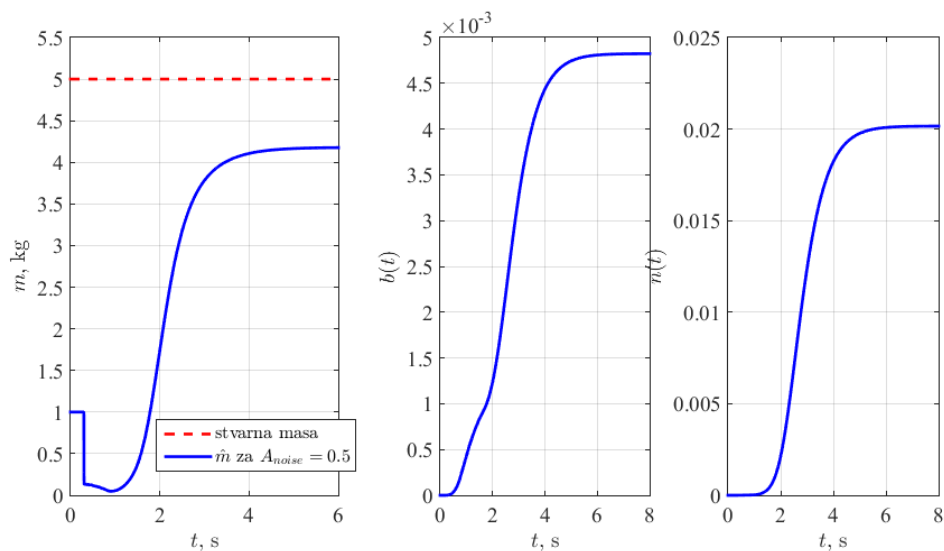
**Slika 21: Identifikacija parametra mase te pripadajuće izlazne funkcije  $b(t)$  i  $n(t)$**

Međutim, pojačamo li šum mjerenja na vrijednost  $A_{noise} = 0.5$ , masa se ne uspijeva estimirati na pravu vrijednost [Slika 22]. Razlog tome je što estimirana masa počne konvergirati k stacionarnoj vrijednosti prije nego se uspije estimirati na pravu vrijednost. Kako bi odgodili konvergenciju k stacionarnoj vrijednosti, potrebno je usporiti modulirajuću funkciju  $\Phi(t)$ . Tako za promjenu parametra  $q$  iz jednadžbe (3.64), s vrijednosti 2 na vrijednost 1, izgled funkcije  $\Phi(t)$  ima oblik kao na slici 23, dok estimirana masa sada konvergira na pravu vrijednost [Slika 24].

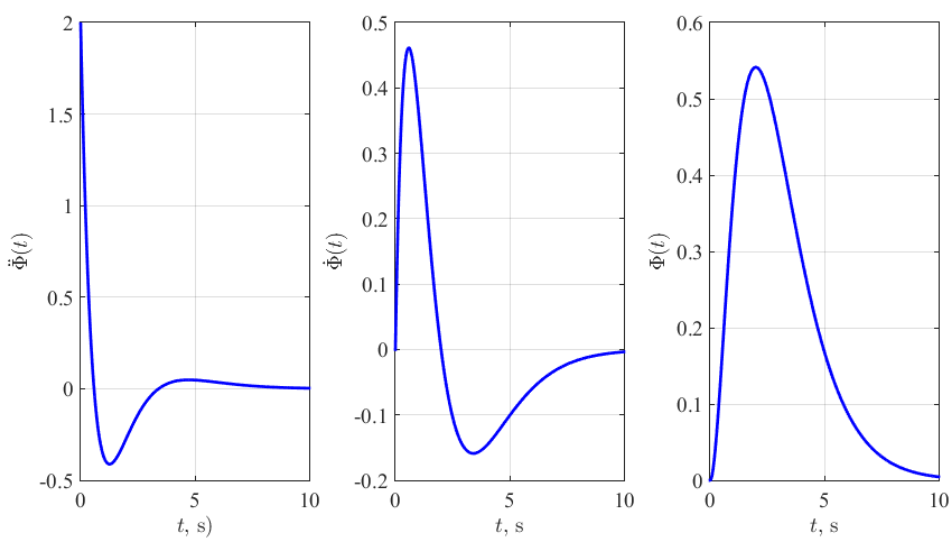
#### 4.2. Identifikacija momenta inercija

Identifikaciju momenta inercije provodi se iz jednadžbe (2.30) za  $I_z$ , iz (2.31) za  $I_y$  te iz (2.32) za  $I_x$ . Moment inercije  $I_z$  identificirao bi se na identičan način kao i masa letjelice za  $g = 0$ . Kako ne bi ponavljali postupak, u ovom radu ćemo prikazati identifikaciju za moment inercije  $I_y$  koja se izračunava iz dinamike letjelice po  $x$  osi.

Metoda sukcesivnog parcijalnog integriranja s modulirajućim funkcijama izvedena je za sustav drugog reda, dok je jednadžba koja sadrži moment inercije  $I_y$  četvrtog reda. Međutim, sustav četvrtog reda možemo promatrati kao dva sustava drugog reda, zbog toga što se  $\ddot{x} = g\theta$  za mjerenje akceleracije može koristiti akcelerometar. Iako akcelerometar ne može dati točne vrijednosti pozicije i brzine, ne nastaje problem kod deriviranja izlaza akcelerometra. Tako možemo dobiti četvrtu derivaciju pozicije  $x$ .

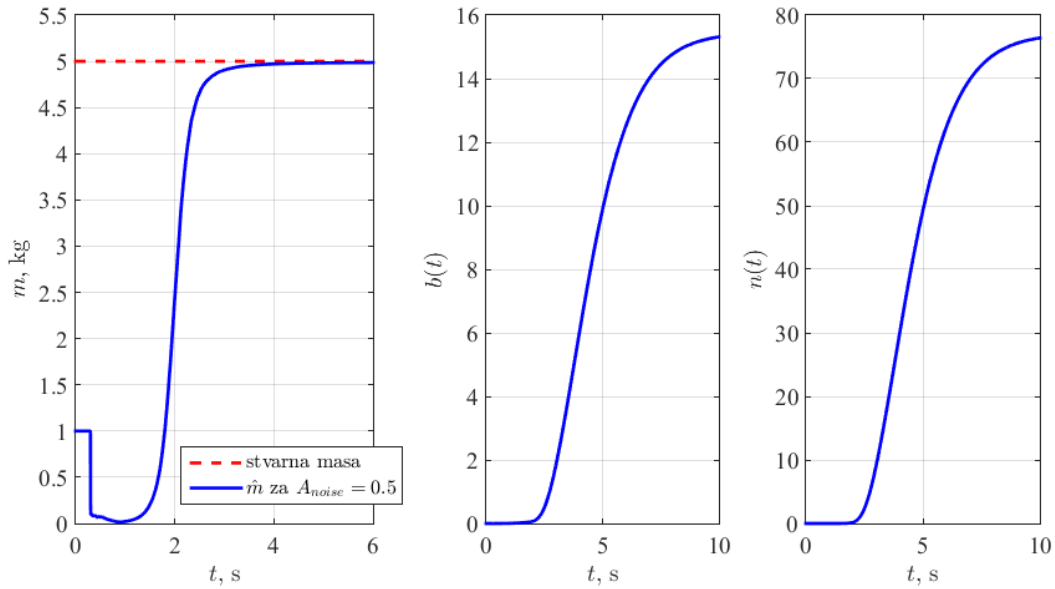


**Slika 22: Identifikacija parametra mase te pripadajuće izlazne funkcije  $b(t)$  i  $n(t)$  za veći šum mjerenja**



**Slika 23: Modulirajuća funkcija i njezine derivacije za  $q = 1$**

Kako se u jednadžbi (2.32) ne pojavljuje gravitacijska komponenta, za izvedenu metodu uvrstit ćemo da je  $g = 0$  te pokratiti dijelove koji sadrže gravitacijsku komponentu, tako da derivacije varijabli stanja iznose:



**Slika 24: Identifikacija parametra mase te pripadajuće izlazne funkcije  $b(t)$  i  $n(t)$  za veći šum mjerenja i  $q = 1$**

$$\dot{x}_1(t) = \Phi(t)u_3(t), \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_2(t) = \Phi(t)x_1(t), \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_3(t) = \ddot{\Phi}(t)\theta(t), \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_4(t) = \Phi(t)x_3(t), \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_5(t) = \Phi(t)\dot{\Phi}(t)\theta(t), \quad (4.6)$$

i izlazne funkcije

$$b_0(t) = \Phi^2(t)\theta(t) + x_4(t) - 3x_5(t), \quad (4.7)$$

$$n_0(t) = x_2(t), \quad (4.8)$$

gdje za upravljačku varijablu uvrštavamo  $u_3(t)$ , a za izlaznu varijablu uvrštavamo  $\theta(t)$ .

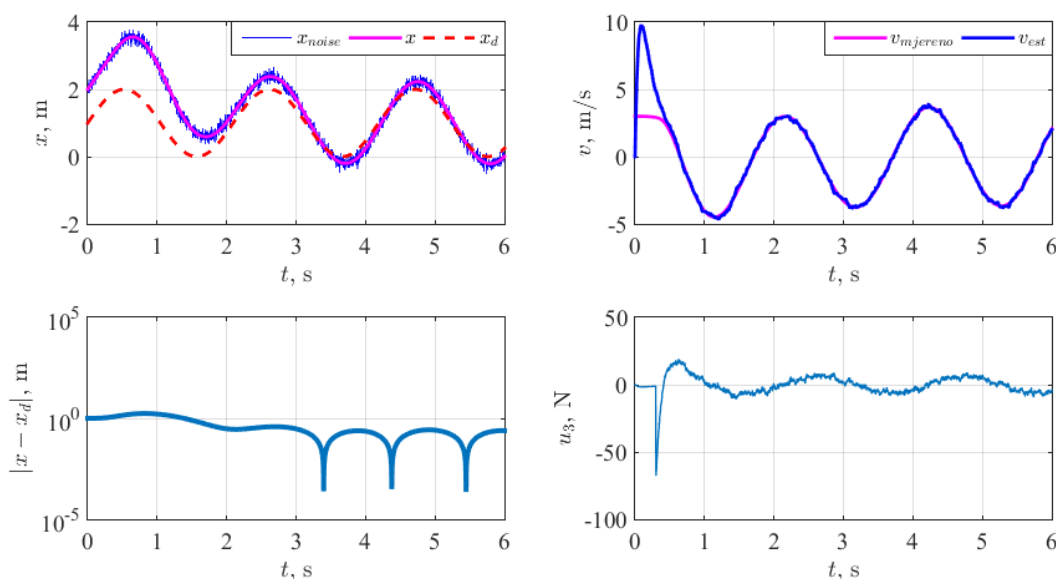
Parametri korišteni u simulaciji su:  $x(0) = 2$  m,  $\dot{x}(0) = 3$  m/s,  $\varepsilon = 0.2$  s,  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -3$ ,  $s_3 = -4$ ,  $s_4 = -5$ ,  $A_{noise} = 0.2$ ,  $q = 2$ ,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>,  $x_d(t) = \sin(3t) + 1$  m.  $I_y = 0.62$  kgm<sup>2</sup>.  $r_1 = -10$  i  $r_2 = -15$ .

Regulator koji koristimo u simulaciji je :

$$u_3 = \frac{\hat{I}_y}{g} (x_d^{(4)} - K_3(g\dot{\theta} - \ddot{x}_d) - K_2(g\theta - \dot{x}_d) - K_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - K_0(x - x_d)) \quad (4.9)$$

gdje je  $\hat{I}_y$  estimirani moment inercije i  $\dot{x}$  linearna brzina po osi  $x$  estimirana observerom stanja opisanim u poglavlju 2.8. Kutna brzina  $\dot{\theta}$  ima izmjerenu vrijednost.

Slika 25 pokazuje dobar odziv pozicije  $x$  i brzine estimirane observerom.



**Slika 25: Regulacija pozicije po osi  $x$  uz identifikaciju metodom sukcesivnog parcijalnog integriranja**

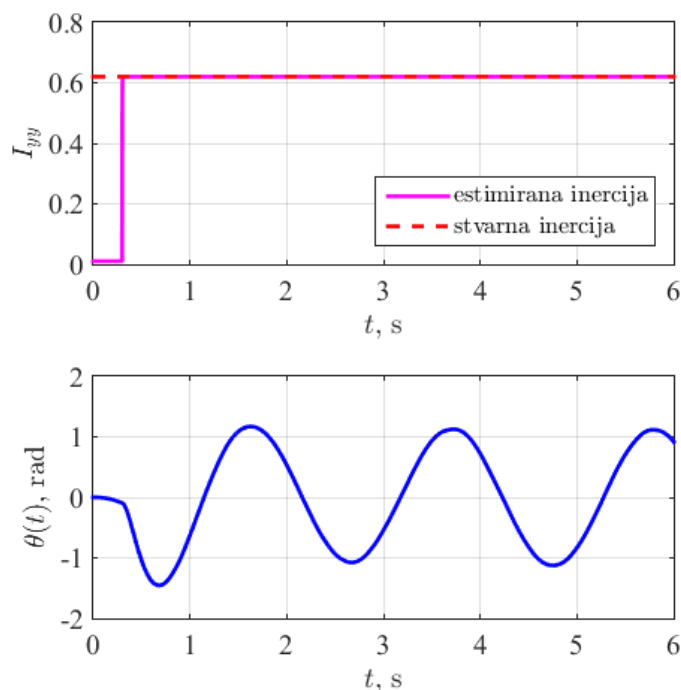
Na slici 26 vidimo kako se moment inercije  $I_y$  estimira trenutno na pravu vrijednost te da nema ni malo prebačaja. Razlog je tome što šum mjerenja nema direktnu povezanost s identifikacijom parametra, nego mu je povezanost preko upravljačke varijable koja kompenzira grešku vrlo brzo. Moment inercije  $I_x$  identificira se na isti način kao i  $I_y$ .

Upravljačka varijabla  $u_3$  u modelu letjelice, proizvodi se kutnom brzinom propelera letjelice. Uz tu kutnu brzinu u jednadžbi (2.5) stoji koeficijent  $k_i$  koji ovisi o geometriji propelera letjelice koji ćemo identificirati u sljedećem potpoglavlju.

#### 4.3. Identifikacija koeficijenta geometrije propelera letjelice

Iz jednadžbe (2.27) izdvojimo  $u_3$  na desnoj strani te dobijemo

$$I_y \ddot{\theta} = u_3 \quad (4.10)$$



Slika 26: Identifikacija momenta inercije  $I_y$  (gore) i odziv kuta  $\theta$  (dolje)

Za  $u_3$  uvrstimo odgovarajuću jednadžbu iz (2.6):

$$u_3 = \tau_\theta = lf_2 - lf_4 \quad (4.11)$$

te uvrstimo  $f_2$  i  $f_3$  iz jednadžbe (2.5) te imamo

$$u_3 = lk_2\Omega_2^2 - lk_4\Omega_4^2 \quad (4.12)$$

odnosno

$$I_y\ddot{\theta} = lk_2\Omega_2^2 - lk_4\Omega_4^2. \quad (4.13)$$

Svi propeleri imaju istu geometriju pa možemo pisati da je  $k_p = k_1 = k_2 = k_3 = k_4$ , što nam daje jednadžbu

$$\ddot{\theta} = \frac{lk_p}{I_y}\bar{u}_3 \quad (4.14)$$

gdje je  $\bar{u}_3 = (\Omega_2^2 - \Omega_4^2)$ .  $\Omega_2$  i  $\Omega_4$  su kutne brzine rotora koje su nam mjerljive, a  $l$  je poznati parametar udaljenosti od težišta letjelice do rotora.

Jednadžbu (4.14) provedemo kroz postupak integriranja i množenja s modulirajućom funkci-



jom kao i za jednadžbu (3.62) te dobijemo sličnu jednadžbu s razlikom da parametar  $k$  u jednadžbi (3.74) množimo s razlomkom  $l/\hat{I}_y$ . Dobiveni sustav u prostoru stanja opisuju sljedeće derivacije varijable stanja:

$$\dot{x}_1(t) = \Phi(t)\bar{u}_3(t), \quad (4.15)$$

$$\dot{x}_2(t) = \Phi(t)x_1(t), \quad (4.16)$$

$$\dot{x}_3(t) = \ddot{\Phi}(t)\theta(t), \quad (4.17)$$

$$\dot{x}_4(t) = \Phi(t)x_3(t), \quad (4.18)$$

$$\dot{x}_5(t) = \Phi(t)\dot{\Phi}(t)\theta(t), \quad (4.19)$$

i izlazne funkcije

$$b_0(t) = \Phi^2(t)\theta(t) + x_4(t) - 3x_5(t), \quad (4.20)$$

i

$$n_0(t) = \frac{l}{\hat{I}_y}x_2(t). \quad (4.21)$$

gdje se parametar  $k_p$  računa prema jednadžbom:

$$k_p = \frac{b(t)}{n(t)} \quad (4.22)$$

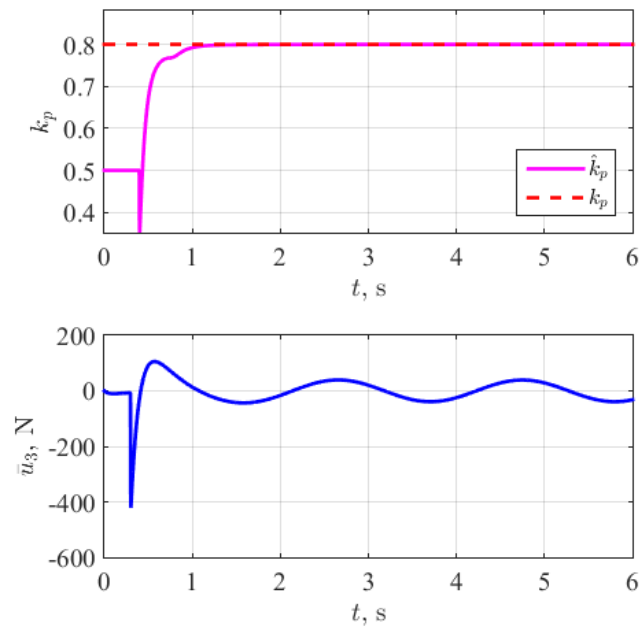
za  $t \geq \varepsilon > 0$ ,

a  $b(t)$  i  $n(t)$  računaju po jednadžbama (3.77) i (3.78) za nove vrijednosti  $b_0(t)$  i  $n_0(t)$ .

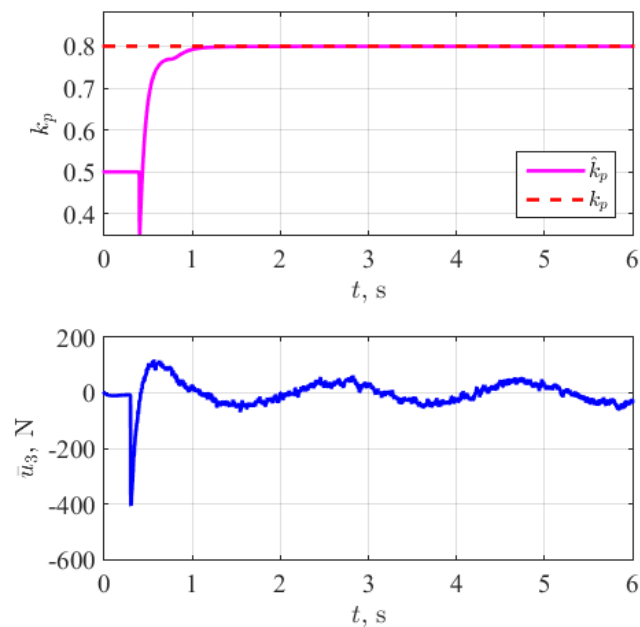
Provodimo simulaciju s istim parametrima kao iz prošlog primjera. Uz te parametre dodajemo još:  $l = 0.2$  m,  $k_p = 0.8$  i  $k_p(0) = 0.5$ .

Kut  $\theta$  određena je odzivom sustava iz prošlog potpoglavlja, gdje se regulira pozicija  $x$  te ima oblik prema slici 26 na doljem grafu.

Rezultat identifikacije bez šuma mjerenja prikazan je na slici 27. Koeficijent geometrije propelera  $k_p$  estimira se neasimptotski i bez preskoka u vrlo kratkom vremenu. Dodamo li šum mjerenja na mjerenje pozicije  $x$ , estimacija parametra jednako dobro se estimira što potvrđuje da metoda pokazuje odličnu robusnost na šum.



Slika 27: Identifikacija koeficijenta geometrije propelera  $k_p$  (gore) i upravljačka varijabla  $\bar{u}_3$  (dolje) bez šuma mjerenja



Slika 28: Identifikacija koeficijenta geometrije propelera  $k_p$  (gore) i upravljačka varijabla  $\bar{u}_3$  (dolje) uz šum mjerenja

#### 4.4. Neasimptotska estimacija stanja letjelice

Kroz četvrto poglavlje provedena je metoda identifikacije sukcesivnim parcijalnim integriranjem s modulirajućim funkcijama za identifikaciju parametara letjelice čiji je sustav opisan s više diferencijalnih jednadžbi drugog reda. Za estimaciju nemjerljivih varijabli stanja korišten je Luenbergerov observer. Međutim, kako je navedeno u potpoglavlju 3.4, navedena metoda korištena za identifikaciju parametara sustava može se upotrijebiti i za estimaciju varijabli stanja kao što su pozicija i brzina letjelice. U ovom potpoglavlju prikazane su performanse neasimptotske estimacije stanja na podsustavu letjelice koji je opisan diferencijalnom jednadžbom drugog reda te je metoda uspoređena s performansama estimacije stanja koje daje Luenbergerov observer.

Radi oznaka, provest ćemo analizu performansi estimatora stanja na podsustavu letjelice koji opisuje dinamiku letjelice po  $z$  osi. Gravitacijsku komponentu ćemo zanemariti, a pretpostavit ćemo da se masa letjelice s teretom poznata.

Izabrani parametri za simulaciju su:  $q = 2$ ,  $k = 2 \text{ kg}^{-1}$ ,  $z(0) = 2 \text{ m}$ ,  $\dot{z}(0) = 3 \text{ m/s}$ ,  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -3$ ,  $z_d = \sin(3t) + 1 \text{ m}$ ,  $r_1 = -10$ ,  $r_2 = -15$  i  $\varepsilon = 0.1 \text{ s}$ .

Parametri  $s_1$  i  $s_2$  su željeni polovi PD regulatora, dok su  $r_1$  i  $r_2$  željeni polovi observera. Pojačanja observera računaju se Ackermannovom formulom, a u Matlabu se to odvija na način  $\mathbf{L} = \text{acker}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{r}^T)$ , gdje je  $\mathbf{L}$  matrica pojačanja,  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{C}$  matrice koje opisuju dinamički model sustava, a  $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2]$  matrica željenih polova observera. Analiza estimatora varijabli stanja odvija se u zatvorenom regulacijskom krugu s PD regulatorom s unaprijednom kompenzacijom koji ima oblik:

$$u = \frac{1}{k}(\ddot{z}_d - k_D \dot{e} - k_P e), \quad (4.23)$$

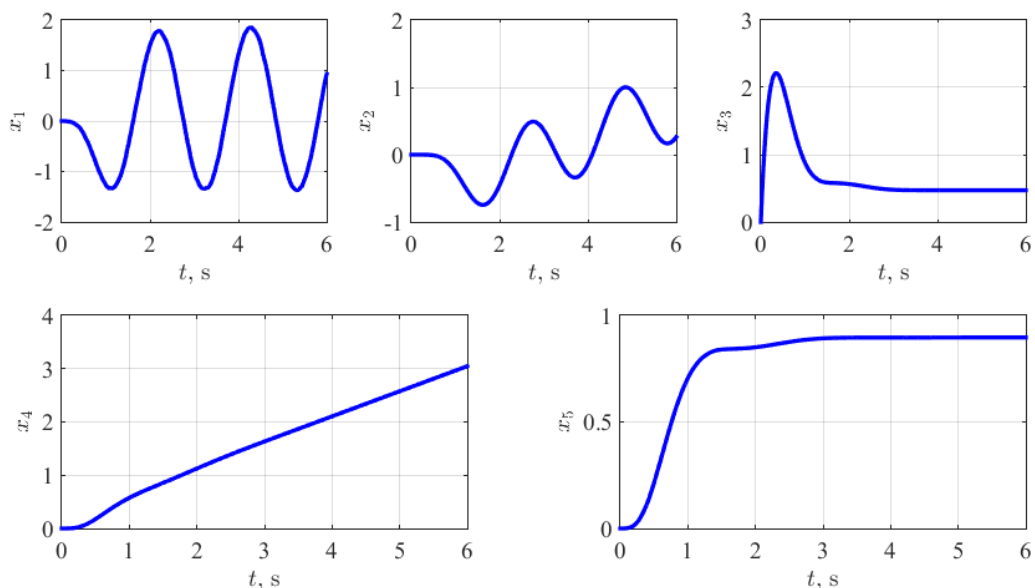
gdje je  $e = \hat{z} - z_d$  i  $\dot{e} = \dot{\hat{z}} - \dot{z}_d$ .

Bitno je i provjeriti odzive varijabli stanja ( $x_1 \dots x_5$ ) koje opisuju algoritam u prostoru stanja za estimiranu varijabli stanja. One su opisane jednadžbama od (3.102) do (3.106). Odzivi su prikazani na slici 29.

Varijabla  $x_4(t)$  divergira u vremenu, za razliku od njene stabilne konvergencije kod identifikacije parametara. Razlog tome je što smo promijenili funkciju  $\Phi(t)$  koja u ovom slučaju konvergira jedinici kad vrijeme ide u beskonačnost. Varijabla  $x_3(t)$  konvergira konstantnoj vrijednosti, dok je varijabla  $x_4(t)$  prema formuli (4.18) integral od  $\Phi(t)x_3(t)$ . Kako je funkcija  $\Phi(t)$  približno jedan za veće vrijednosti vremena, varijabla  $x_4(t)$  ima linearan rast.

Rješenje toga je da se umjesto integracije koristi invarijantno filtriranje opisano u drugoj metodi identifikacije izvedene u poglavlju 3.2.

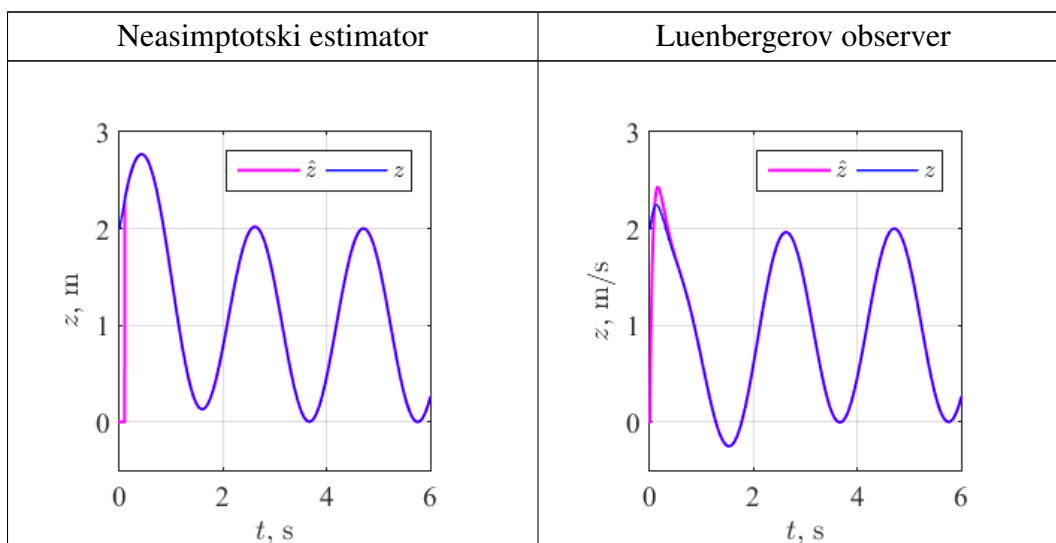
Kod estimacije varijabli stanja bitno je pretpostaviti da su nam početni uvjeti nepoznati. Zbog toga postavljamo početne vrijednosti neasimptotskog estimatora i observera na vrijednost nula.



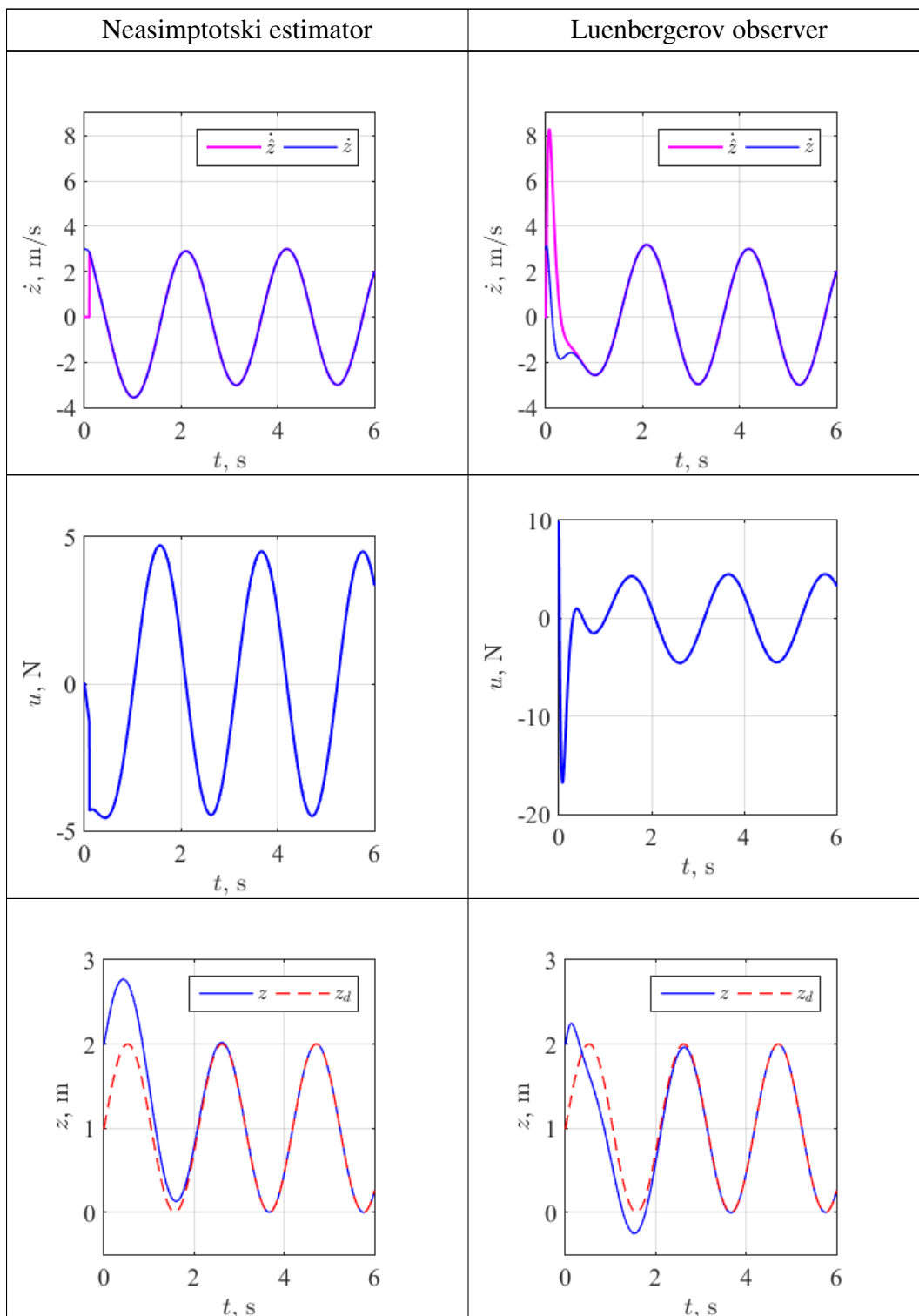
Slika 29: Varijable stanja kod neasimptotske estimacije pozicije i brzine letjelice

U tablici 1 uspoređene su performanse neasimptotskog estimatora i Leunbergerovom observera. Možemo zamijetiti kako neasimptotski estimator, kako mu je naziv govori, neasimptotski estimira vrijednosti pozicije i brzine, dok Luenbergerov observer to radi asimptotski uz preskok koji se osobito može vidjeti pri estimaciji brzine. Upravljačke varijable djeluju na sustav sličnom dinamikom u obje metode estimacije. Letjelica u oba slučajeva uspijeva pratiti zadanu trajektoriju.

Tablica 1: Usporedba neasimptotske estimacije stanja s Luenbergerovim observerom za estimaciju stanja



Tablica 1: (nastavak)



## 5. ZAKLJUČAK

U ovome su radu izvedene i ispitane različite kontinuirane metode za identifikaciju parametara u realnom vremenu. Navedenim metodama zajedničko je da imaju neasimptotsku konvergenciju estimiranog parametra. Predložene metode identifikacije su ispitane na simulacijskom modelu mehaničkog sustava drugog reda.

Prva metoda, kontinuirana metoda najmanjih kvadrata, ispitana je u dvije verzije. U prvoj verziji, jednadžba drugog reda dvostruko se integrira te provodi metoda najmanjih kvadrata. Metoda daje gotovo trenutnu estimaciju parametra na pravu vrijednost te pokazuje veliku robusnost na šum mjerenja. Međutim, navedena metoda nije upotrebljiva na realnim sustavima jer matrični elementi rastu eksponencijalno što će vrlo brzo dovesti do njihovih ogromnih vrijednosti te do numeričkih grešaka. Alternativna verzija algoritma rješava problem eksponencijalnog rasta iznosa matričnih elemenata uvođenjem filtra koji pomoću matematičkih manipulacija nad signalima reducira red sustava. Robusnost na šum jednaka je kao i u prvoj varijanti. Iako se time rješava problem eksponencijalnog rasta matričnih elemenata, metoda najmanjih kvadrata zahtjeva identifikaciju početnih uvjeta koji nam nisu potrebni za upravljanje sustavom. Zbog toga je potrebno invertirati matricu elemenata u svakome trenutku što može dovesti do numeričkih nestabilnosti, a i nepotrebno se zauzima procesorsko vrijeme i memoriju.

Navedeni problem rješava druga ispitana metoda, koja primjenom druge diferencije u vremenskoj domeni eliminira početne uvjete te time izbjegava invertiranje matrice. Iako metoda rješava sve nedostatke metode najmanjih kvadrata, pokazuje iznenađujuće sporu konvergenciju estimiranog parametra k pravoj vrijednosti.

Treća ispitana metoda, metoda sukcesivnog parcijalnog integriranja s modulirajućim funkcijama, pravim odabirom modulirajuće funkcije također eliminira početne uvjete. Modulirajuća funkcija uz to omogućuje i ograničavanje svih varijabli stanja sustava kako neke vrijednosti ne bi rasle te dovele do već spomenutih problema. Za dobro izabranu modulirajuću funkciju, metoda pokazuje brzu konvergenciju estimiranog parametra na pravu vrijednost i dobru robusnost na šum mjerenja. Osim identifikacije parametara sustava, pokazano je da se navedena metoda može koristiti i za estimaciju stanja.

Zbog zadovoljavajućih performansi koje je pokazala, metoda je upotrebljiva za identifikaciju parametara na realnim sustavima kao što je letjelica s četiri rotora, za koju su u ovome radu identificirani i drugi parametri potrebni za njezino upravljanje.

## Literatura

- [1] T. Bresciani, Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter, Lund University (2008).  
URL <http://lup.lub.lu.se/student-papers/record/8847641>
- [2] D. A. Wallace, Dynamics and control of a quadrotor with active geometric morphing, Thesis (Master's)–University of Washington 71 (2016).  
URL <http://hdl.handle.net/1773/35518>
- [3] J. Kasac, S. Stevanović, T. Žilić, J. Stepanić, Robust output tracking control of a quadrotor in the presence of external disturbances, Transactions of Famena 37 (4) (2013) 29–42.
- [4] T. Fossen, Guidance and Control of Ocean Vehicles, John Wiley & Sons, 1994.
- [5] P. Castillo Garcia, R. Lozano, A. Dzul, Modelling and control of mini-flying machines, Springer-Verlag (01 2005).
- [6] J. Kasac, T. Zilic, V. Milic, A. Jokic, Frequency-shifting-based stable on-line algebraic parameter identification of linear systems, Journal of the Franklin Institute 355 (18) (2018) 9224–9244.
- [7] D. Kotarski, P. Piljek, H. Brezak, J. Kasac, Chattering-free tracking control of a fully actuated multirotor with passively tilted rotors, Transactions of FAMENA 42 (2018) 1–14.
- [8] D. Kotarski, P. Piljek, H. Brezak, J. Kasac, Design of a fully actuated passively tilted multirotor UAV with decoupling control system, in: Proc. of the 8th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering: IEEE, Prag, Češka, 2017, pp. 385–390.
- [9] M. Fikri, A. Ashar, A. Dharmawan, B. Alldino, An overview of fundamental step using wi-fi communication for flight formation quadrotors, in: Proc. of the 4th International Conference on Science and Technology (ICST), Yogyakarta, Indonesia, 2018.
- [10] M. Fardad, F. Lin, M. R. Jovanović, On the optimal design of structured feedback gains for interconnected systems, in: Proc. of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Shanghai, P.R. China, 2009, pp. 978–983.
- [11] D. G. Luenberger, Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications, Jogn Wiley & Sons, 1979.
- [12] M. Srivastava, Control Systems, 8th Edition, Tata McGraw-Hill, India, 2008.
- [13] K. Lundberg, H. Miller, R. Trumper, Initial conditions, generalized functions, and the Laplace transform, IEEE Control Systems Magazine 27 (1) (2007) 22–35.
- [14] J. Kasac, D. Majetic, D. Brezak, An algebraic approach to on-line signal denoising and derivatives estimation, Journal of the Franklin Institute 355 (15) (2018) 7799–7825.
- [15] K. D. Listmann, Z. Zhao, A comparison of methods for higher-order numerical differentiation, in: Proc. of the European Control Conference, Zürich, Switzerland, 2013, pp. 9152–9158.
- [16] J. Kasac, D. Kotarski, P. Piljek, Frequency-shifting-based algebraic approach to stable on-line parameter identification and state estimation of multirotor UAV, Asian Journal of Control 21 (4) (2019) 1619–1629.
- [17] R. Isermann, M. Mnchhof, Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications, Springer-Verlag, 2011.
- [18] J. Kasac, B. Novakovic, V. Milic, On equivalence between internal and external model-based repetitive learning controllers for nonlinear passive systems, Asian Journal of Control 13 (2011) 15–24.

- [19] A. Charnes, E. L. Frome, P. L. Yu, The equivalence of generalized least squares and maximum likelihood estimates in the exponential family, *Journal of the American Statistical Association* 71 (353) (1976) 169–171.
- [20] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations* 9 (1) (2003) 151–168.
- [21] H. Sira-Ramírez, C. G. Rodríguez, J. C. Romero, A. L. Juárez, *Algebraic Identification and Estimation Methods in Feedback Control Systems*, John Wiley & Sons, 2014.
- [22] D. Majetić, J. Kasać, D. Brezak, *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja - Viševarijabilni sustavi*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.