

# Lead-Lag regulator

---

**Perkov, Gabrijela**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:472976>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Gabrijela Perkov**

Zagreb, 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Dubravko Majetić

Student:

Gabrijela Perkov

Zagreb, 2020.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojoj obitelji na pomoći i potpori što mi je bezuvjetno pružaju tijekom cijelog školovanja što me potiče na daljnji trud i rad.

Također, zahvaljujem se svim svojim prijateljima što su uz mene tijekom svih ovih godina na preddiplomskom studiju te su time omogućili da mi ono ostane u lijepom i ugodnom sjećanju.

Gabrijela Perkov



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Gabrijela Perkov**

Mat. br.: **0035208510**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Lead-Lag regulator**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Lead-Lag controller**

Opis zadatka:

U području automatske regulacije moguće je pronaći različite tipove regulatora kojima se reguliraju dinamički sustavi. Jedan od takvih regulatora je i Lead-Lag regulator. Zadatak ovog rada je opis samog regulatora, a potom i njegova primjena na odabranim primjerima dinamičkih sustava.

U radu treba načiniti sljedeće:

1. Opisati Lead-Lag regulator
2. Na odabranim dinamičkim sustavima pokazati primjenu Lead-Lag regulatora.
3. Koristiti programski paket Matlab.
4. Izvesti zaključke rada.

Zadatak zadan:  
28. studenog 2019.

Datum predaje rada:  
1. rok: 21. veljače 2020.  
2. rok (izvanredni): 1. srpnja 2020.  
3. rok: 17. rujna 2020.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 24.2. – 28.2.2020.  
2. rok (izvanredni): 3.7.2020.  
3. rok: 21.9. - 25.9.2020.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Dubravko Majetić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Branko Bauer

## SADRŽAJ

SADRŽAJ.....	I
POPIS SLIKA.....	III
POPIS OZNAKA.....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY.....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Regulator.....	1
1.2. Dinamički sustav.....	1
2. OPIS LEAD – LAG REGULATORA.....	3
2.1. Opis Lead regulatora.....	3
2.1.1. Konstrukcija Lead regulatora metodom lokusa korijena.....	4
2.1.2. Konstrukcija Lead regulatora u frekvencijskom području pomoću Bodeovih dijagrama.....	6
2.2. Opis Lag regulatora.....	8
2.2.1. Konstrukcija Lag regulatora metodom lokusa korijena.....	9
2.2.2. Konstrukcija Lag regulatora u frekvencijskom području pomoću Bodeovih dijagrama.....	11
2.3. Opis Lead – Lag regulatora.....	14
3. PRIMJENA LEAD – LAG REGULATORA NA DINAMIČKIM SUSTAVIMA.....	15
3.1. Kontrola brzine automobila – Tempomat.....	15
3.1.1. Prijenosna funkcija sustava.....	15
3.1.2. Primjer primjene Lag regulatora.....	16
3.1.2.1. Konstrukcija Lag regulatora primjenom metode lokusa korijena.....	17

---

3.1.2.2.    Konstrukcija Lag regulatora u frekvencijskom području primjenom Bodeovih dijagrama .....	20
3.2.    Regulacija brzine istosmjernog motora .....	23
3.2.1.    Prijenosna funkcija sistema .....	23
3.2.2.    Primjer primjene Lag regulatora .....	24
3.2.2.1.    Konstrukcija Lag regulatora primjenom metode lokusa korijena.....	26
3.2.2.2.    Konstrukcija Lag regulatora u frekvencijskom području primjenom Bodeovih dijagrama .....	28
3.3.    Stabilizacija kugle na gredi .....	31
3.3.1.    Prijenosna funkcija sistema .....	31
3.3.2.    Primjer primjene Lead regulatora .....	32
3.3.2.1.    Konstrukcija Lead regulatora primjenom metode lokusa korijena .....	33
3.3.2.2.    Konstrukcija Lead regulatora u frekvencijskom području primjenom Bodeovih dijagrama .....	35
3.4.    Regulacija uspona aviona .....	38
3.4.1.    Prijenosna funkcija sistema .....	38
3.4.2.    Primjer primjene Lead regulatora .....	39
3.4.2.1.    Konstrukcija Lead regulatora primjenom metode lokusa korijena.....	40
3.4.2.2.    Konstrukcija Lead regulatora u frekvencijskom području primjenom Bodeovih dijagrama .....	44
4.    ZAKLJUČAK .....	49
LITERATURA.....	50

## POPIS SLIKA

Slika 2.1. Lokus korijena sustava – Lead primjer .....	5
Slika 2.2. Bodeov dijagram Lead regulatora .....	6
Slika 2.3. Bodeov dijagram – Lead primjer.....	8
Slika 2.4. Lokus korijena sustava – Lag primjer.....	11
Slika 2.5. Bodeov dijagram Lag regulatora .....	12
Slika 2.6. Bodeov dijagram – Lag primjer.....	14
Slika 3.1. Skica dinamičkog sustava - Tempomat .....	15
Slika 3.2. Odziv otvorenog kruga na odskočnu funkciju - Tempomat.....	17
Slika 3.3. Lokus korijena otvorenog sustava s Lag regulatorom - Tempomat .....	18
Slika 3.4. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju - Tempomat .....	19
Slika 3.5. Bodeov dijagram nereguliranog sistema - Tempomat .....	20
Slika 3.6. Bodeov dijagram otvorenog kruga s Lag regulatorom - Tempomat .....	21
Slika 3.7. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju - Tempomat .....	22
Slika 3.8. Skica dinamičkog sustava – Istosmjerni motor .....	23
Slika 3.9. Odziv otvorenog kruga na odskočnu funkciju – Istosmjerni motor .....	25
Slika 3.10. Lokus korijena otvorenog kruga s polovima zatvorenog kruga u području iznad ograničenja – Istosmjerni motor.....	27
Slika 3.11. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Istosmjerni motor .....	27
Slika 3.12. Bodeov dijagram nereguliranog kruga – Istosmjerni motor.....	28
Slika 3.13. Bodeov dijagram kruga s Lag regulatorom – Istosmjerni motor .....	29
Slika 3.14. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Istosmjerni motor .....	30
Slika 3.15. Skica dinamičkog sustava – Kugla na gredi .....	31
Slika 3.16. Odziv otvorenog kruga na odskočnu funkciju – Kugla na gredi .....	33
Slika 3.17. Lokus korijena otvorenog sustava s Lead regulatorom – Kugla na gredi .....	34
Slika 3.18. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Kugla na gredi.....	35
Slika 3.19. Bodeov dijagram otvorenog kruga – Kugla na gredi .....	35
Slika 3.20. Bodeov dijagram sustava s Lead regulatorom – Kugla na gredi .....	36
Slika 3.21. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Kugla na gredi.....	37
Slika 3.22. Skica dinamičkog sustava – Avion .....	38
Slika 3.23. Odziv otvorenog kruga na odskočnu funkciju – Avion .....	40



---

Slika 3.24.	Lokus korijena otvorenog kruga – Avion.....	41
Slika 3.25.	Lokus korijena otvorenog kruga s Lead regulatorom – Avion.....	42
Slika 3.26.	Lokus korijena otvorenog kruga s Lead regulatorom, uvećan dio blizu ishodišta – Avion	42
Slika 3.27.	Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Avion.....	43
Slika 3.28.	Bodeov dijagram otvorenog kruga – Avion .....	44
Slika 3.29.	Odziv zatvorenog sistema na odskočnu funkciju – Avion .....	45
Slika 3.30.	Bodeov dijagram otvorenog kruga s proporcionalnim regulatorom pojačanja 10 – Avion	46
Slika 3.31.	Bodeov dijagram otvorenog kruga s Lead regulatorom – Avion.....	47
Slika 3.32.	Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Avion.....	48

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$s$	-	kompleksna varijabla (kompleksna frekvencija)
$z_0, z$	-	nula regulatora
$p_0, p$	-	pol regulatora
$\omega_z$	-	frekvencija nule regulatora
$\omega_p$	-	frekvencija pola regulatora
$K_c$	-	pojačanje regulatora
$a$	-	centar gravitacije (centroid)
$G(s)$	-	prijenosna funkcija
$G_N(s)$	-	nazivnik prijenosne funkcije
$G_B(s)$	-	brojnik prijenosne funkcije
$a, T$	-	parametri regulatora
$C(s)$	-	prijenosna funkcija regulatora
$\omega_m$	$s^{-1}$	središnja frekvencija
$\phi$	rad (°)	fazni kut
$K$	-	pojačanje sustava
$e_0$	-	trajno regulacijsko odstupanje
$u(s)$	-	ulazna funkcija
$m$	kg	masa
$u$	N	kontrolna sila
$b_v$	N	sila otpora
$v$	m/s	brzina
$b$	Ns/m	koeficijent prigušenja
$P(s)$	-	prijenosna funkcija dinamičkog sustava
$K_p$	-	pojačanje proporcionalnog regulatora
$\omega_n$	$s^{-1}$	neprigušena vlastita frekvencija
$T_r$	s	vrijeme porasta
$\zeta$	-	stupanj prigušenja

---

$M_p$	-	maksimalni prebačaj
$ G(j\omega) $ prijenosne funkcije)	-	amplitudna frekvencijska karakteristika (apsolutna vrijednost
$J$	$\text{kgm}^2$	moment inercije
$\ddot{\theta}$	$\text{rad/s}^2$	kutno ubrzanje
$b$	$\text{Nms}$	konstanta viskoznog trenja motora
$\dot{\theta}$	$\text{rad/s}$	kutna brzina
$L$	$\text{H}$	induktivnost
$R$	$\text{Ohm}$	električni otpor
$V$	$\text{V}$	napon armature
$K$	$\text{V}/(\text{rad/s})$	konstanta elektromotorne sile, odnosno trenja motora
$R$	$\text{m}$	radijus
$g$	$\text{m/s}^2$	gravitacijsko ubrzanje
$L$	$\text{m}$	duljina
$d$	$\text{m}$	promjer
$\theta$	$\text{rad}$	kut
$\ddot{r}$	$\text{m/s}^2$	akceleracija
$T_s$	$\text{s}$	vrijeme smirivanja
$PM$	$\text{rad} (^{\circ})$	fazna rezerva
$\delta$	$\text{rad}$	kut

## SAŽETAK

Zadatak ovog rada je opisati Lead – lag regulator te ga primjeniti na dinamičkim sustavima. Najprije su opisani načini konstruiranja Lead – lag regulatora iz prijenosne funkcije metodom lokusa korijena te u frekvencijskom području pomoću Bodeovih dijagrama. Zatim su prikazana četiri primjera primjene Lead i Lag regulatora na dinamičkim sustavima, odnosno njihov utjecaj na dinamički sustav s pobudom u obliku odskočne funkcije. Regulatori su također konstruirani u frekvencijskom području te primjenom metode lokusa korijena. Svi grafovi koji prikazuju ponašanje dinamičkog sustava te samog regulatora generirani su u programskom paketu MATLAB.

Ključne riječi: Lead – lag regulator, dinamički sustav, prijenosna funkcija, konstrukcijski zahtjevi

## **SUMMARY**

Given task in this paper is to describe Lead – lag compensator and its implementation on dynamic systems. At first, root locus design methods and frequency domain methods using Bode diagrams were described to design Lead – lag compensators from transfer function form. Then, implementation of Lead – lag compensators were shown on four dynamic systems, their impact on dynamic system with step input, respectively. Compensators were also designed using root locus methods and frequency domain methods. All plots showing behaviour of dynamic systems and Lead – lag compensator itself were generated using programming language MATLAB.

Key words: Lead – lag compensators, dynamic system, transfer function, design specifications

## 1. UVOD

Automatska regulacija je po definiciji automatsko održavanje željenog stanja nekog procesa ili mijenjanje tog stanja po određenom zakonu, bez obzira na djelovanje vanjskih i unutarnjih poremećaja. To se postiže pomoću povratne veze, koja omogućava usporedbu izmjerene vrijednosti neke veličine reguliranog procesa s njenom željenom referentnom vrijednosti, te na temelju razlike tih dviju veličina odlučuje kako proces usmjeriti. Proces se usmjerava upravljanjem tokom energije ili tvari. Razlika između izmjerene vrijednosti neke veličine reguliranog procesa i željene vrijednosti, odnosno regulacijska pogreška, otklanja se regulacijskim djelovanjem regulatora čime se dinamički sustav prisiljava da promijeni svoje stanje kako bi regulirana veličina poprimila željenu vrijednost [1].

### 1.1. Regulator

Regulator je dio sustava automatske regulacije koji generira postavnu veličinu koja će djelovati na regulirani proces. Obično sadrži pojačalo, nekakvo vremensko djelovanje te komparator. U širem smislu uz to može obuhvatiti i generator referentne veličine, te razne elemente za obradu signala (npr. filtere, analogno – digitalnu i digitalno – analognu konverziju, itd.). Osnovni tipovi regulatora se rijetko susreću samostalno. Često je međusobno iskombinirano njihovo različito djelovanje na dinamički sustav. Mogu biti sastavljeni od nekoliko umreženih elektroničkih (čak i pneumatskih ili mehaničkih) elemenata, koji aproksimiraju proporcionalno – derivacijsko, proporcionalno – integralno ili proporcionalno – integralno – derivacijsko djelovanje, a tada je često svojstven naziv *lead* (vodeći), *lag* (zaostajući), odnosno *lead – lag* (vodeći – zaostajući) regulator [1].

### 1.2. Dinamički sustav

Na zadanu pobudu, ili signal ulaza, dinamički sustav generira odziv, ili signal izlaza. Dakle, dinamički sustav se može smatrati i uzročno – posljedičnom vezom između dva ili više signala. Također, sustav je skup elemenata međusobno povezanih vezama. Signal koji se može prepoznati kao uzrok posljedica naziva se izlaz ili odziv. Dinamički sustav obično prikazuje fizički proces, uređaj ili međusobnu vezu uređaja (pri tome se uređaj može interpretirati u najširem mogućem smislu). Dinamički sustavi se prikazuju blok –

dijagramima, gdje pravokutni ili kvadratni oblik predstavlja sustav, strijelica koja ulazi u blok predstavlja ulazni signal, dok strijelica koja izlazi iz bloka predstavlja izlazni signal. Promatranje odnosa ulaza i izlaza, odnosno uzroka i posljedice, osnovna je tema proučavanja teorije sustava, te automatske regulacije [1].

## 2. OPIS LEAD – LAG REGULATORA

Lead – Lag regulator je jedan od alata kojim se koriste inženjeri kako bi zadovoljili zahtjeve na izlaz aktuatora. To se postiže pravilnim izborom prijenosne funkcije koja ulazi u blok regulatora. Samo ime regulatora govori da su njegove sastavnice zapravo dva različita tipa regulatora: Lead (vodeći) regulatora kod kojeg izlaz predvodi ulaz za  $90^\circ$  (dodaje pozitivnu fazu izlazu) i Lag (zaostajući) regulatora kod kojeg izlaz kasni za ulazom za  $90^\circ$  (dodaje negativnu fazu izlazu). Lead – Lag regulator konstruira se za sistem u formi prijenosne funkcije.

### 2.1. Opis Lead regulatora

Lead regulator povećava stabilnost sustava te brzinu odgovora sistema na danu pobudu. Sastoji se od jedne realne nule i jednog realnog pola. Opisuje se jednadžbom prijenosne funkcije koja se može napisati u više oblika (2.1).

$$\frac{\frac{s}{z_0} - 1}{\frac{s}{p_0} - 1} = \frac{p_0 s - z_0}{z_0 s - p_0} = K_c \frac{(s - z_0)}{(s - p_0)} \quad (2.1)$$

Pol i nula Lead regulatora mogu biti bilo gdje na realnoj osi. Jedini uvjet je da je nula bliže ishodištu kompleksne ravnine (Gaussove ravnine) od pola prijenosne funkcije, odnosno  $z_0 < p_0$ . Omjer  $p_0/z_0$  predstavlja pojačanje  $K_c$ .

Nula Lead regulatora dodaje  $90^\circ$  fazi, dok pol oduzima istih tih  $90^\circ$ . Kako je nula bliže ishodištu kompleksne ravnine, odnosno ima manje pojačanje, pri nižim frekvencijama regulator će se ponašati kao prava nula (dodavati će pozitivnu fazu sistemu), dok pri višim frekvencijama pol poništava nulu, odnosno dodaje negativnu fazu sistemu. To se očituje kao pojačanje u fazi u određenom rasponu frekvencija, odnosno između dvije granične frekvencije. Pažljivim odabirom pola i nule regulatora to područje je moguće šriti, odnosno skupljati, ovisno na kojim frekvencijama je potrebno povećanje u fazi.



Bitno obilježje Lead regulatora je da povećava pojačanje ulaza visoke frekvencije, ali ne toliko koliko bi sama nula (derivacijski regulator) povećala. To predstavlja prednost pred derivacijskim regulatorima zbog manje buke koju proizvodi pri radu.

### **2.1.1. Konstrukcija Lead regulatora metodom lokusa korijena**

Lead regulator vuče lokus korijena otvorenog sistema ulijevo u kompleksnoj ravnini te omogućava smještanje polova zatvorenog sustava na negativnije položaje. Time se postiže povećanje brzine odziva sustava na danu pobudu i stabilnost sustava, ali i povećanje šuma. Dakle, Lead regulator pomicanjem lokusa korijena otvorenog sustava omogućava smještanje dominantnih polova zatvorenog sustava na željene lokacije (kako bi se postigli zahtjevi kao što su vrijeme smirivanja, vrijeme porasta, maksimalni prebačaj itd.).

Prilikom konstrukcije Lead regulatora potrebno je odrediti lokacije na koje se žele postaviti dominantni polovi zatvorenog sustava (to su polovi bliže ishodištu kompleksne ravnine, odnosno oni koji imaju sporiji odziv) na osnovu postavljenih zahtjeva na dinamički sustav. Da bi željene lokacije dominantnih polova bile dio lokusa korijena razlika sume kutova polova (kut linije koja povezuje pol na lokusu korijena s polom otvorenog kruga mjereno od pozitivnog dijela realne osi) i sume kutova nula (kut linije koja povezuje pol na lokusu korijena s nulom otvorenog kruga mjereno od pozitivnog dijela realne osi) mora iznositi  $180^\circ$ . Stoga se Lead regulator konstruira na način da se lokus korijena sustava premjesti na željene lokacije te da pol i nula regulatora kao i polovi i nule otvorenog sustava zadovoljavaju navedeni princip.

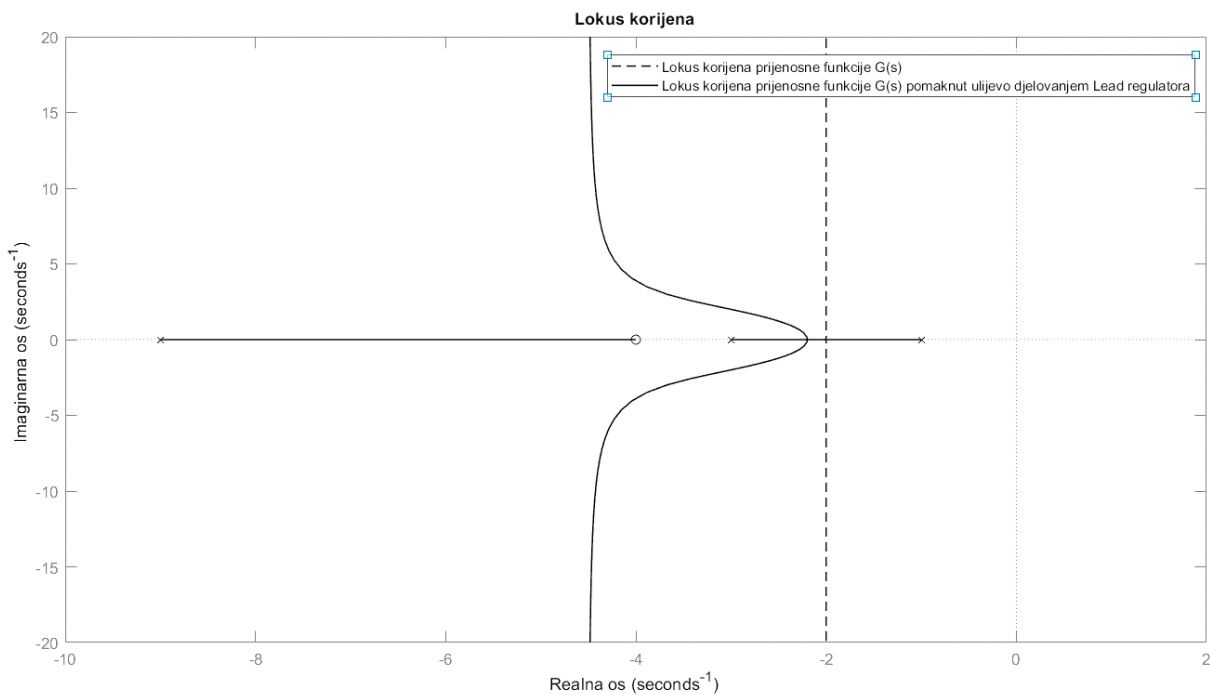
Lead regulator pomiče lokus korijena otvorenog sustava ulijevo na način da pomiče centar gravitacije (centroid, odnosno točku na realnoj osi u kojoj se sijeku asimptote po kojima se kreću polovi prema nulama u beskonačnosti). Činjenica da Lead regulator pomiče centar gravitacije ulijevo može se potvrditi iz samog izraza za njegovo izračunavanje (2.2). S obzirom da se Lead regulator sastoji od jedne negativne realne nule i jednog negativnijeg realnog pola, vrijednost centra gravitacije za regulirani sustav biti će broj negativniji od onog za neregulirani sustav. Pomicanjem samog centra gravitacije pomiče se i lokus korijena otvorenog kruga.

$$a = \frac{\sum \text{polova} - \sum \text{nula}}{\text{broj polova} - \text{broj nula}} \quad (2.2)$$

Primjerice, dana je prijenosna funkcija sustava (2.3) čiji polovi ne zadovoljavaju postavljene zahtjeve (polovi zatvorenog kuga moraju biti negdje lijevo od lokusa korijena).

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)} \quad (2.3)$$

Postavljanje polova zatvorenog kruga ulijevo u kompleksnoj ravnini najlakše se postiže Lead regulatorom. Lokus korijena otvorenog sustava se u programskom paketu MATLAB generira naredbom `controlSystemDesigner` uz prethodno definiranje prijenosne funkcije [Slika 2.1]. Lead regulator se dodaje sustavu naredbom `edit compensator` te se pol regulatora postavlja na lokaciju -9, a nula na lokaciju -4.



**Slika 2.1. Lokus korijena sustava – Lead primjer**

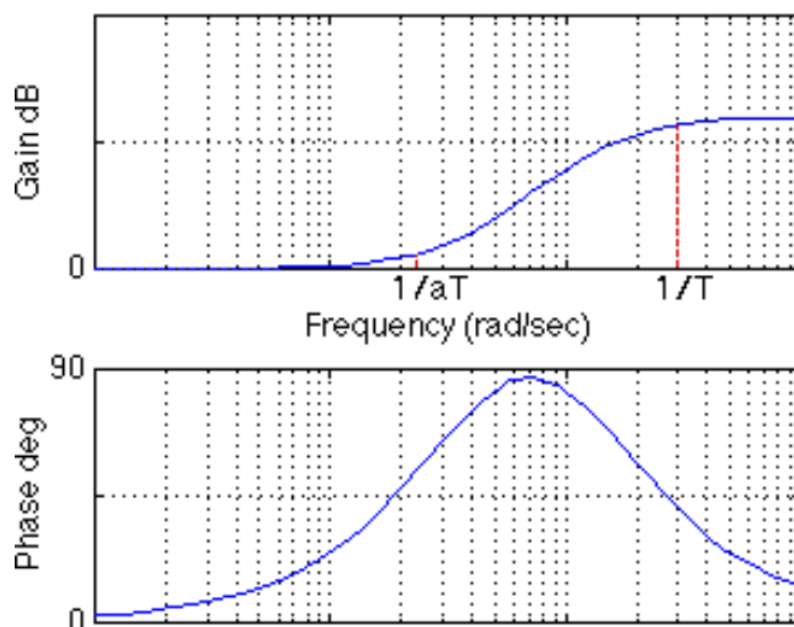
Na slici iznad prikazan je utjecaj Lead regulatora na lokus korijena otvorenog sustava. Pomicanje ulijevo te povećanje stabilnosti i brzine odziva.

### 2.1.2. Konstrukcija Lead regulatora u frekvencijskom području pomoću Bodeovih dijagrama

Lead regulator može biti konstruiran u frekvencijskom području uz primjenu Bodeovih dijagrama. Prijenosna funkcija regulatora u frekvencijskom području nešto je drugačija i dana je izrazom (2.4), no to je u osnovi isti izraz kao u (2.1). Bodeov dijagram Lead regulatora prikazan je na slici ispod [Slika 2.2.].

$$C(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad [a > 1] \quad (2.4)$$

Pol regulatora odgovara vrijednosti  $1/T$ , a nula  $1/aT$ . Parametar  $a$  je zapravo pojačanje sustava  $K$ . U frekvencijskom području, Lead regulator dodaje pozitivnu fazu sustavu između frekvencija pola i nule regulatora. Faza dodana sustavu ovisi o vrijednosti parametra  $a$  te maksimalno može iznositi  $90^\circ$ . U praksi se najčešće dodaje samo  $55^\circ$  faze jer za veće vrijednosti komponente postaju prevelike ili premale da bi bile praktične. Ukoliko je potrebno dodati veću količinu faze sistemu, serijski se spajaju dva Lead regulatora.



Slika 2.2. Bodeov dijagram Lead regulatora [2]

Maksimalna količina faze se dodaje pri središnjoj frekvenciji ( $\omega_m$ ) koja se izračunava izrazom (2.5), a maksimalna količina faze koja se može dodati za dani regulator izračunava se pomoću

izraza (2.6). Dodana pozitivna faza povećava faznu rezervu sistema i tako sistem postaje stabilniji. Iz toga proizlazi da se Lead regulator konstruira na osnovu faze koju je potrebno dodati sistemu da bi se zadovoljio kriterij fazne rezerve, odnosno stabilnosti, čime se određuje iznos parametra  $a$ , te frekvenciju kritične amplitude na kojoj je potrebno dodati tu određenu količinu faze čime se dobije iznos parametra  $T$ . Prilikom konstrukcije regulatora treba pripaziti na to da ukoliko je potrebno dodati određenu količinu faze pri nekoj frekvenciji, dodana faza će biti manje vrijednosti jer Lead regulator pomiče i frekvenciju kritične amplitude.

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} \quad (2.5)$$

$$\sin \phi = \frac{a - 1}{a + 1} \quad (2.6)$$

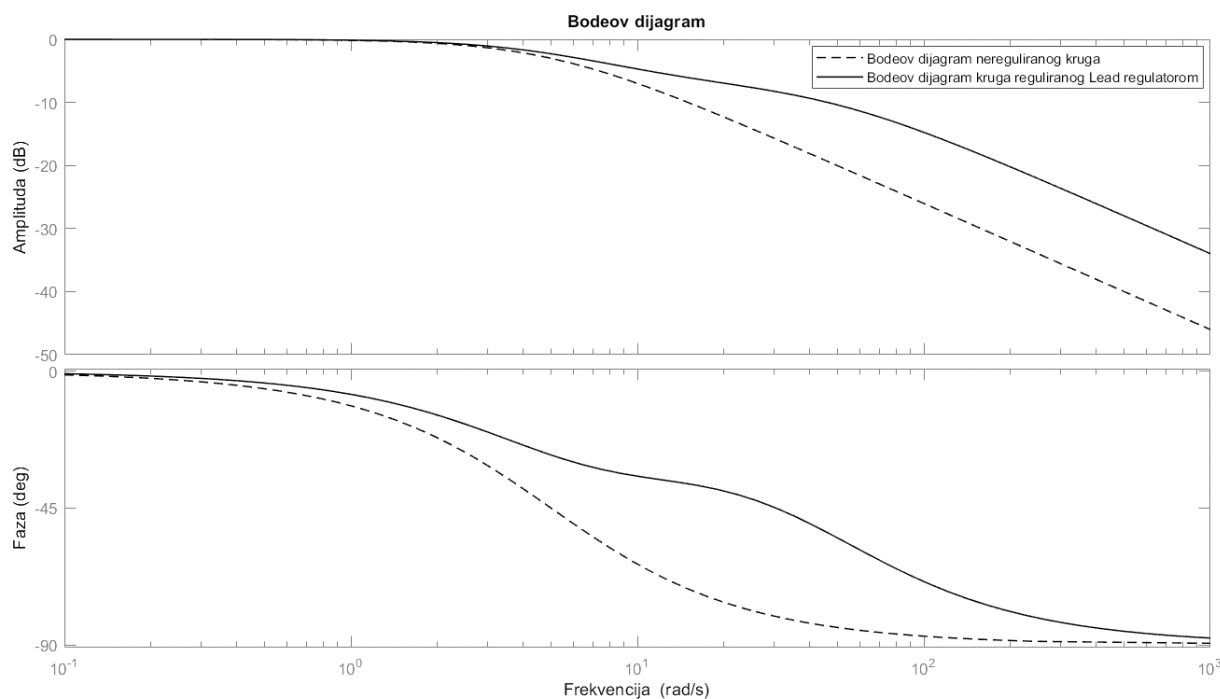
Prilikom analize u frekvencijskom području, točnije analizom dijagrama amplitudne frekvencijske karakteristike, uočava se još jedan značajna karakteristika Lead regulatora. Naime, Lead regulator povećava pojačanje sustava na visokim frekvencijama, što pogoduje smanjenju vremena porasta i vremena smirivanja sistema, ali može povećati šum.

Prilikom konstrukcije Lead regulatora on treba biti takav da sistem zadovolji postavljene kriterije koji su u frekvencijskom području već spomenuta fazna rezerva i frekvencija kritične amplitude, ali i amplitudna rezerva, pojasna širina (lomna frekvencija), pojačanje nulte frekvencije te trajno regulacijsko odstupanje. Pojačanje Lead regulatora je na niskim frekvencijama jednako nuli, stoga on nema utjecaja na kriterij trajnog regulacijskog odstupanja.

Primjerice, dana je prijenosna funkcija (2.7) koja ne zadovoljava zahtjev na faznu rezervu te je sustavu potrebno dodati određenu količinu faze bez narušavanja ostalih već zadovoljenih zahtjeva. To je najlakše postići Lead regulatorom.

$$G(s) = \frac{1}{0,2s + 1} \quad (2.7)$$

Bodeov dijagram otvorenog sustava se u programskom paketu MATLAB generira naredbom `controlSystemDesigner` uz prethodno definiranje prijenosne funkcije [Slika 2.3.]. Lead regulator se dodaje sustavu naredbom `edit compensator` uz vrijednost parametra  $T=0,022$ , a parametra  $aT=0,088$ . Na slici ispod prikazan je utjecaj Lead regulatora na Bodeov dijagram otvorenog sustava. Regulator dodaje fazu na frekvenciji kritične amplitude, ali je i pomiče na malo veću frekvenciju.



**Slika 2.3. Bodeov dijagram – Lead primjer**

## 2.2. Opis Lag regulatora

Lag regulator se najčešće koristi kako bi se smanjilo trajno regulacijsko odstupanje u sustavima. Opisuje se istom jednadžbom prijenosne funkcije kao i Lead regulator (2.1).

Pol i nula Lag regulatora mogu biti bilo gdje na realnoj osi. Jedini uvjet je da je pol bliže ishodištu kompleksne ravnine od nule prijenosne funkcije, odnosno:  $\omega_z > \omega_p$ . Omjer  $\omega_p/\omega_z$  predstavlja pojačanje  $K_c$ .

Pol Lag regulatora oduzima  $90^\circ$  fazi, dok nula dodaje istih tih  $90^\circ$ . Kako je pol bliže ishodištu kompleksne ravnine, odnosno ima manje pojačanje, pri nižim frekvencijama regulator će se ponašati kao pravi pol (dodavanje negativne fazu sistemu), dok pri višim frekvencijama nula poništava pol, odnosno dodaje negativnu fazu sistemu. To se očituje kao pad u fazi u

određenom rasponu frekvencija, odnosno između dvije granične frekvencije. Pažljivim odabirom iznosa pola i nule, to područje se može širiti, odnosno skupljati, ovisno na kojim frekvencijama je potreban pad u fazi.

S obzirom da je svrha uvođenja Lag regulatora u sustav najčešće smanjenje trajnog regulacijskog odstupanja, kako se ne bi narušila ostala svojstva sustava, nula i pol se najčešće postavljaju jako blizu jedno drugom te blizu ishodišta kompleksne ravnine.

### **2.2.1. Konstrukcija Lag regulatora metodom lokusa korijena**

Prijenosna funkcija Lag regulatora koja se koristi za konstrukciju metodom lokusa korijena je ona dana izrazom (2.1). Lag regulator vuče lokus korijena nereguliranog sistema prema desno u kompleksnoj ravnini, što je nepoželjno jer se smanjuje stabilnost i brzina odziva, stoga se nula i pol Lag regulatora postavljaju jako blizu jedno drugom te blizu ishodištu kompleksne ravnine. Najčešće se nula Lag regulatora postavlja bliže ishodištu kompleksne ravnine od dominantnog pola. Također, nula i pol se ne smiju postaviti preblizu ishodištu jer na taj način komponente regulatora postaju prevelike i nepraktične.

Lag regulator pomiče lokus korijena otvorenog sustava udesno na način da pomiče centar gravitacije udesno (centroid, odnosno točku na realnoj osi u kojoj se sijeku asimptote po kojima se kreću polovi prema nulama u beskonačnosti). To se može lako zaključiti iz samog izraza za određivanje centra gravitacije (2.2). S obzirom da se Lag regulator sastoji od jedne negativne nule i jednog negativnog pola, a kako je nula negativnija od pola, vrijednost centra gravitacije će biti pozitivniji broj u kompleksnoj ravnini nego za neregulirani krug. Pomicanjem centra gravitacije pomiče se i sami lokus korijena otvorenog kruga.

S obzirom na to da pomicanje lokusa korijena otvorenog sustava udesno ima negativan utjecaj na sistem, jer su polovi sustava najčešće već smješteni na željene pozicije, može se zaključiti da to nije primarna namjena Lag regulatora. On se pak koristi da bi se poboljšao regulacijski odziv sistema. Kako su pol i nula Lag regulatora dosta blizu ishodištu kompleksne ravnine, na visokim frekvencijama će sistem imati jedinično pojačanje. Na niskim frekvencijama pojačanje odgovara omjeru nule i pola regulatora, što je veće od 1. Ovaj omjer množi poziciju, brzinu ili akceleracijsku konstantu te će se na taj način tranjo regulacijsko odstupanje smanjiti za isti faktor. To se može vidjeti iz izraza za određivanje trajnog

regulacijskog odstupanja koje se određuje za nultu frekvenciju (2.8). U izrazu je prijenosna funkcija dana u formi  $G_B(s)/G_N(s)$ , gdje  $G_B(s)$  predstavlja brojnik prijenosne funkcije sistema, a  $G_N(s)$  nazivnik prijenosne funkcije sistema te se u seriju s njom postavlja Lag regulator.

$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{u(s)}{1 + \frac{G_B(s) * (s - z)}{G_N(s) * (s - p)}} \quad (2.8)$$

Definiranjem ulazne funkcije kao jedinične odskočne funkcije,  $u(s)=1/s$ , te rješavanjem limesa dobiva se izraz za određivanje trajnog regulacijskog odstupanja na temelju polova i nula Lag regulatora te same prijenosne funkcije sustava (2.9).

$$e_0 = \frac{G_N(0) * p}{G_N(0) * p + G_B(0) * z} \quad (2.9)$$

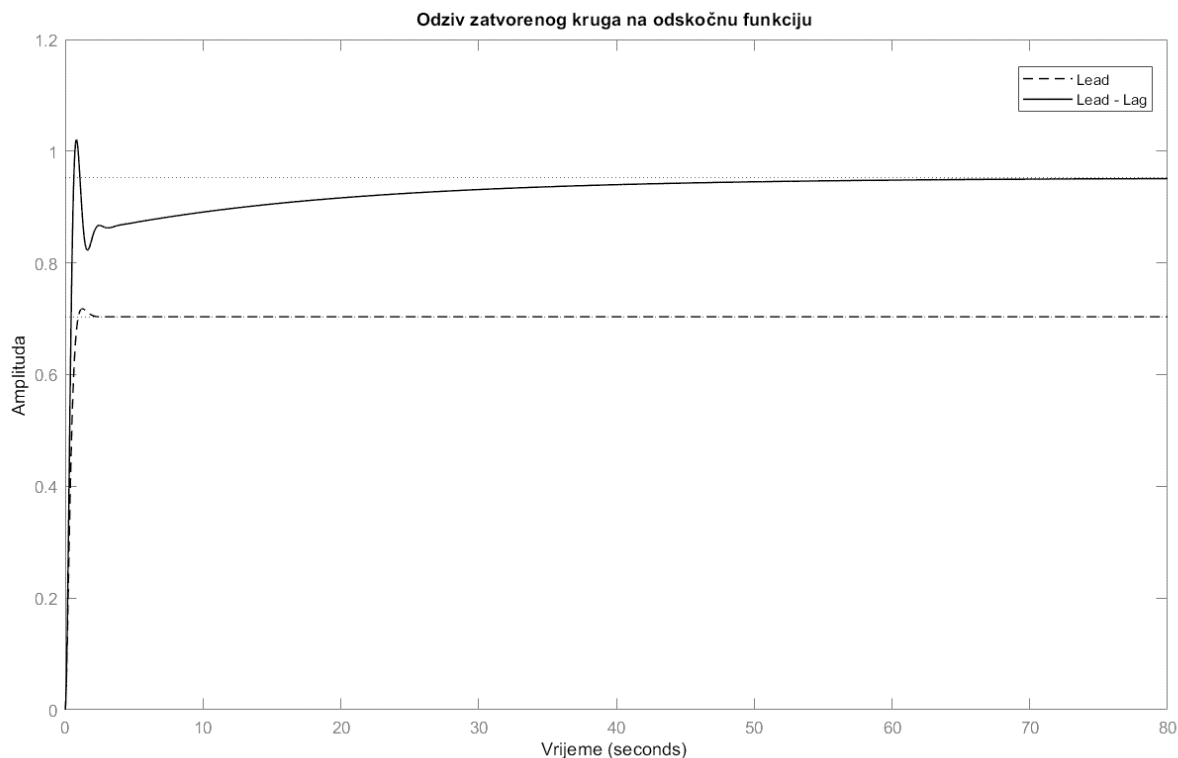
Iz izraza (2.9) proizlazi izraz (2.10) iz kojeg se jasno vidi utjecaj omjera nule i pola Lag regulatora na trajno regulacijsko odstupanje sistema.

$$\frac{z}{p} = \frac{G_N(0) - e_0 G_N(0)}{e_0 G_B(0)} \quad (2.10)$$

Primjerice, uvođenjem Lag regulatora u sistem reguliran Lead regulatorom dan u dijelu 2.1.1. smanjuje se trajno regulacijsko odstupanje sistema. Pol i nula Lag regulatora postavljaju se na jako male vrijednosti te blizu ishodišta kompleksne ravnine. Odnosno, nastoji se postići da razlika sume kutova polova i sume kutova nula ostane nepromijenjena kako ne bi došlo do pomaka lokusa korijena već povučenog ulijevo Lead regulatorom. Iz prijenosne funkcije sustava s Lead regulatorom i pojačanjem sustava,  $K$ , u iznosu 16 (2.11) pomoću izraza (2.9) dobije se da trajno regulacijsko odstupanje sistema iznosi 0,3. Trajno regulacijsko odstupanje sistema se smanjuje na iznos 0,1 omjerom nule i pola Lag regulatora čija vrijednost dobivena izrazom (2.10) iznosi 3,8. Za lokaciju nule se odabire -0,06, a za lokaciju pola 3,8 puta manja vrijednost koja iznosi -0,016. Generiranjem odziva na jediničnu odskočnu funkciju u

programskom paketu MATLAB uočava se kako se značajno povećala točnost odziva sistema uvođenjem Lag regulatora [Slika 2.4.].

$$G(s) = \frac{16(s + 4)}{(s + 1)(s + 3)(s + 9)} \quad (2.11)$$



**Slika 2.4. Lokus korijena sustava – Lag primjer**

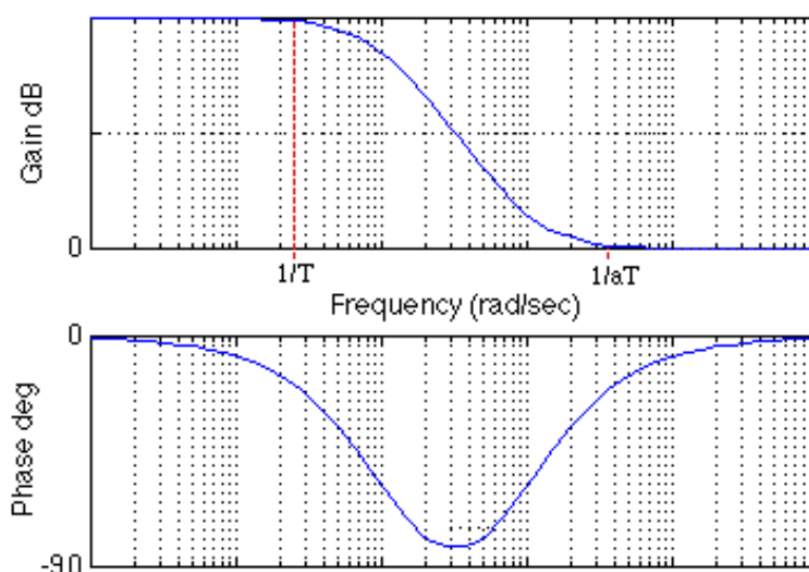
Također, uvođenjem Lag regulatora u sustav dobiven je Lead – Lag regulator, koji je ništa drugo nego serijski spoj tih dvaju regulatora.

### 2.2.2. Konstrukcija Lag regulatora u frekvencijskom području pomoću Bodeovih dijagrama

Prijenosna funkcija Lag regulatora u formi frekvencijskog odziva sistema potpuno je jednaka prijenosnoj funkciji Lead regulatora, no u ovom slučaju parametar  $a$  je manji od 1. Bodeov dijagram Lag regulatora prikazan je na slici ispod [Slika 2.5.].



Lag regulator dodaje negativnu fazu sistemu u određenom rasponu frekvencija. Granične frekvencije su iste kao kod Lead regulatora, te iznose  $1/T$  i  $1/aT$ . Lag regulator dodaje pojačanje na niskim frekvencijama te je njegov iznos jednak parametru  $a$ . Posljedica toga je da je trajno regulacijsko odstupanje zatvorenog sistema smanjeno za faktor  $a$ . Zbog toga što je pojačanje Lag regulatora na srednjim i visokim frekvencijama nula, on ne utječe znatno na stabilnost i prijelaznu funkciju sistema.



**Slika 2.5. Bodeov dijagram Lag regulatora [2]**

Također, Lag regulatorom se može utjecati i na faznu rezervu sistema. Nastoji se smanjiti pojačanje sistema bez pretjeranog utjecaja na fazu. To se mora postići na visokim frekvencijama zbog toga što Lag regulator na visokim frekvencijama ima veliko negativno pojačanje i zanemarivu promjenu u fazi, otprilike jednaku nuli. Kako bi se postiglo povećanje faze na visokim frekvencijama Lag regulator se konstruira tako da pol i nula imaju što manje iznose kako bi se dodavanje negativne faze sistemu poguralo na što niže frekvencije. Posljedica toga je da parametar  $T$  mora biti što veći, kako bi Lag regulator imao što manji utjecaj na originalan sistem, a parametar  $a$  mora biti odabran tako da se za njegov iznos smanji pojačanje sustava. Tako se postiže novi iznos frekvencije kritične amplitude, odnosno veći iznos fazne rezerve, bez pretjeranog utjecaja na samu fazu, s obzirom da je dodavanje negativne faze Lag regulatora pogurano na niže frekvencije. Maksimalna količina faze se oduzima pri središnjoj frekvenciji ( $\omega_m$ ) koja se izračunava izrazom (2.5), a maksimalna

količina faze koja se može oduzeti za zadani regulator izračunava se pomoću izraza (2.6). Također, potrebno je nešto malo više sniziti frekvenciju kritične amplitude sistema povećavanjem parametra  $a$ , budući da se Lag regulatorom u malim iznosima utječe i na fazu koja će za tu frekvenciju imati malo manju vrijednost faze nego sistem otvorenog kruga.

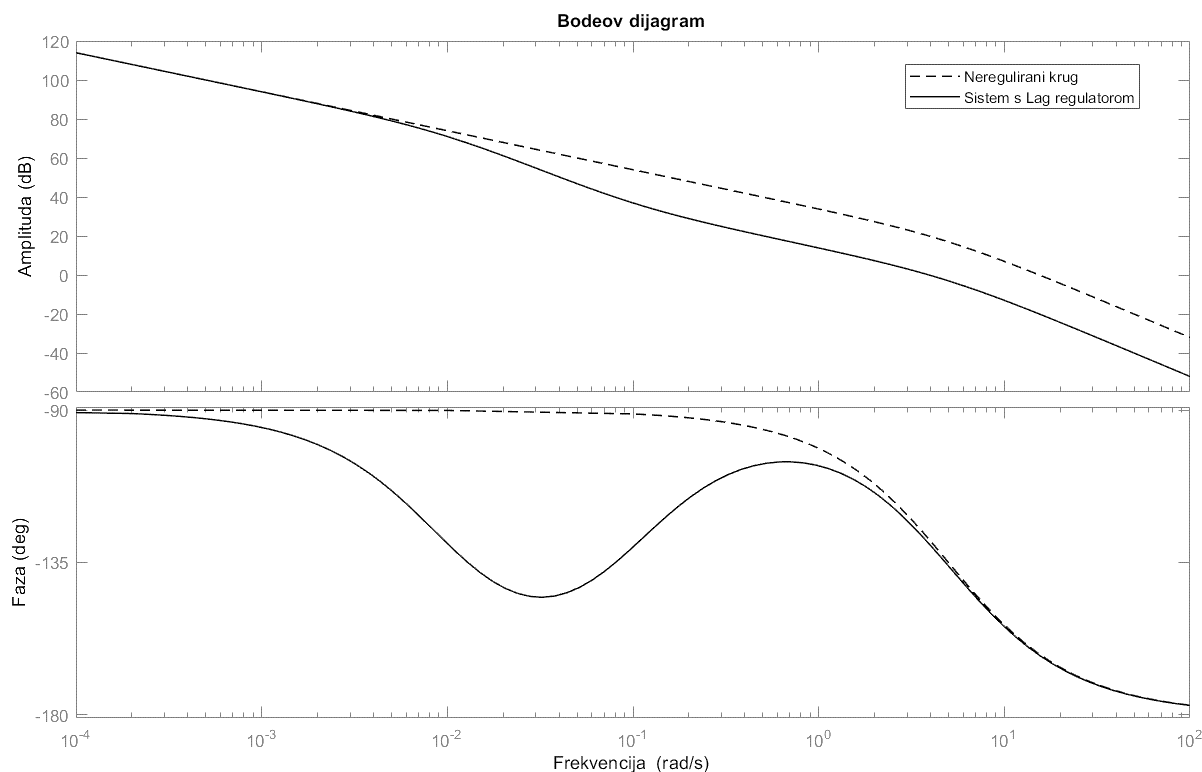
Lag regulatorom se postiže sporiji odziv sistema, na taj način sistem neće odgovarati na šum koji se javlja pri visokim frekvencijama. Također, upotrebom Lag regulatora nije bitno poznavati kako će se sistem ponašati na visokim frekvencijama jer nema odziva na takvim frekvencijama.

Primjerice, dana je prijenosna funkcija sistema koja ne zadovoljava zahtjev za faznom rezervom (2.12).

$$G(s) = \frac{50}{0,2s^2 + s} \quad (2.12)$$

Primjenom Lag regulatora, smanjuje se frekvencija kritične amplitude tako što se dodaje Lag regulator s malim vrijednostima parametra  $T$  čime ga se nastoji pomaknuti što više ulijevo, odnosno u područje nižih frekvencija, kako bi do izražaja došlo njegovo svojstvo koje posjeduje na višim frekvencijama, a to je negativno pojačanje sistema (smanjenje frekvencije kritične amplitude) i minimalan pomak u fazi. Ovisno o vrijednosti parametra  $a$  smanjuje se pojačanje sustava.

Prijenosnoj funkciji otvorenog kruga dodan je Lag regulator čiji parametar  $T$  iznosi 100, a parametar  $a=0,1$ . Generiranjem Bodeovih dijagrama u programskom paketu MATLAB može se uočiti povećanje fazne rezerve upotrebom Lag regulatora [Slika 2.6.].



**Slika 2.6. Bodeov dijagram – Lag primjer**

### 2.3. Opis Lead – Lag regulatora

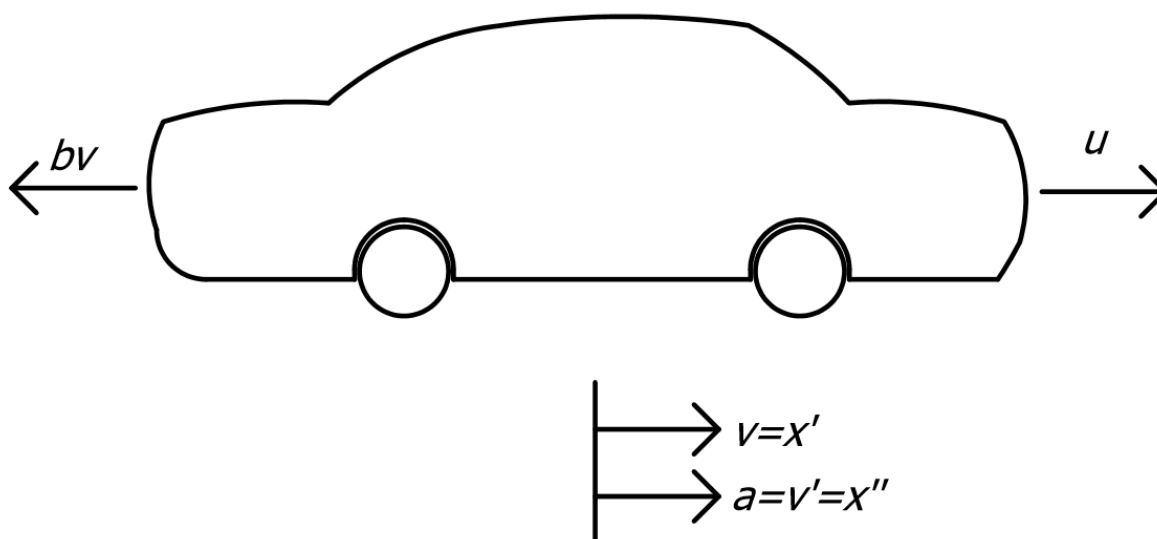
Lead – lag regulator je ništa drugo nego kombinacija Lead regulatora i Lag regulatora u serijskom spoju s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga. Dakle, Lead – Lag regulator kombinira povoljne utjecaje regulatora od kojih je sastavljen. Rezultat primjene je sistem povećane brzine odziva, poboljšane stabilnosti i trajnog regulacijskog odstupanja. Prilikom konstrukcije Lead – Lag regulatora, najprije se konstruira Lead regulator kojim se postiže traženi prijelazni odziv i stabilnost, te se zatim dodaje Lag regulator kojim se poboljšava odgovor stacionarnog stanja na pobudu sistema reguliranog Lead regulatorom, odnosno smanjuje trajno regulacijsko odstupanje.

### 3. PRIMJENA LEAD – LAG REGULATORA NA DINAMIČKIM SUSTAVIMA

#### 3.1. Kontrola brzine automobila – Tempomat

Automatska kontrola brzine je odličan primjer kontrole na dinamičkim sustavima primjenom povratne veze. Svrha kontrole brzine je održati konstantnu brzinu vozila usprkos vanjskim poremećajima kao što su vjetar ili poremećaji na cesti. Kontrola se postiže mjerenjem brzine vozila, usporedbom s referentnom vrijednosti te automatskim prilagođavanjem regulatora prema zakonu kontrole.

##### 3.1.1. Prijenosna funkcija sustava



Slika 3.1. Skica dinamičkog sustava - Tempomat

Pretpostavljen je jednostavan model dinamike vozila, prikazan u dijagramu slobodnog tijela [Slika 3.1.]. Vozilo (mase  $m$ ), pokreće se kontrolnom silom,  $u$ . Sila  $u$  predstavlja silu generiranu na dodiru kotača vozila i ceste. Za ovaj pojednostavljeni model zanemaruje se utjecaj dinamike pogonskog sklopa, guma itd., koji utječu na generiranje sile. Sila otpora,  $bv$ , uslijed trenja kotrljanja i otpora vjetra, pretpostavljena je kao linearna ovisnost o brzini vozila,  $v$ , i djeluje u smjeru suprotnom smjeru gibanja vozila.

Iz ovih pretpostavki proizlazi da je kontrolirani sistem prvog reda, odnosno sistem masa – opruga. Sumiranjem sila u smjeru osi  $x$  i primjenom Newton-ovog drugog zakona dobiven je izraz koji opisuje dinamički sustav (3.1).

$$m\dot{v} + bv = u \quad (3.1)$$

Za ulaz u sustav uzeta je kontrolna sila,  $u$ , a za izlaz iz sustava brzina vozila,  $v$ , te je dobivena prijenosna funkcija sustava (3.2).

$$P(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b} \left[ \frac{m/s}{N} \right] \quad (3.2)$$

### 3.1.2. Primjer primjene Lag regulatora

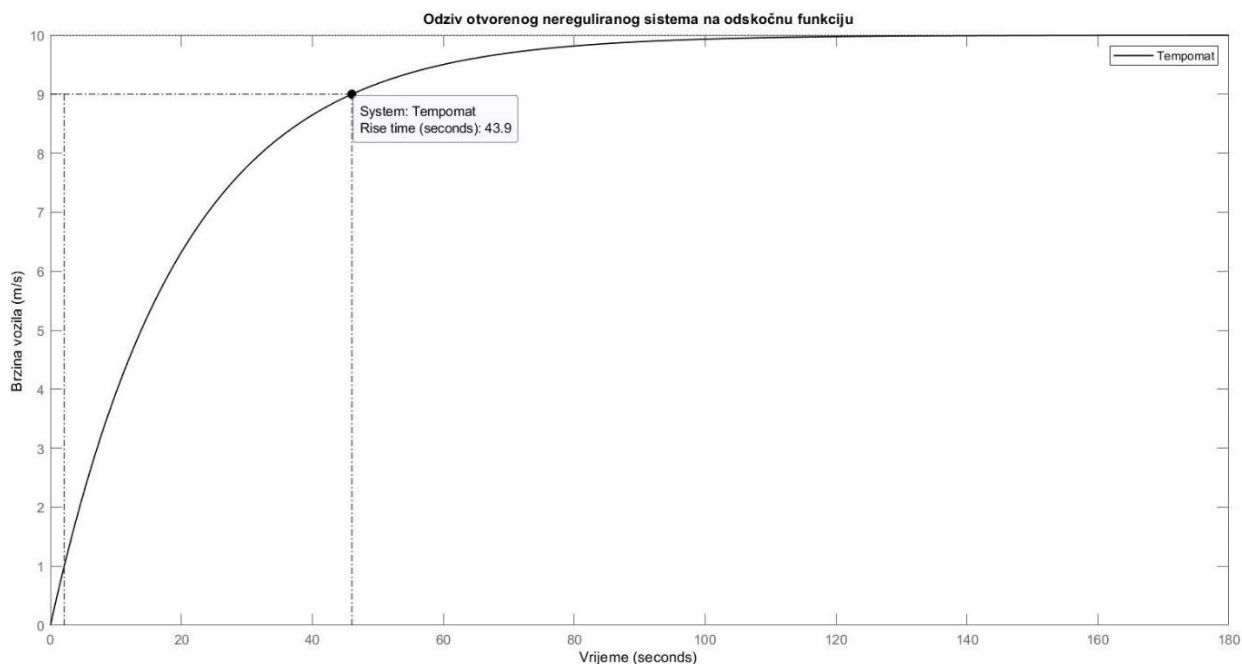
Za parametre prijenosne funkcije sustava odabrane su sljedeće vrijednosti:

- $m=1000\text{kg}$
- $b=50\text{Ns/m}$  (koeficijent prigušenja)
- $u=500\text{N}$

Dok su za zahtjeve koje sustav mora ispunjavati odabrane sljedeće vrijednosti:

- vrijeme porasta manje od 5s
- maksimalni prebačaj manji od 10%
- trajno regulacijsko odstupanje manje od 2%

Kada se kao ulaz u sustav postavi kontrolna sila  $u$  iznosu 500N, vozilo postiže maksimalnu brzinu od 10m/s. Iz odziva otvorenog kruga na odskočnu funkciju (iz čega se može zaključiti kakav će odziv sustav imati na druge vrste pobuda) uočava se da sistem postiže traženu brzinu bez trajnog regulacijskog odstupanja [Slika 3.2.]. Također, maksimalnog prebačaja u sustavu nema, no kriterij vremena porasta nije zadovoljen te iznosi 43,9s. Stoga je potrebno konstruirati regulator koji će ubrzati odgovor sistema na danu pobudu bez značajnog utjecaja na ostale već zadovoljene kriterije.



**Slika 3.2. Odziv otvorenog kruga na odskočnu funkciju - Tempomat**

### 3.1.2.1. Konstrukcija Lag regulatora primjenom metode lokusa korijena

Dijagram lokusa korijena otvorenog sustava prikazuje moguće lokacije polova zatvorenog sustava kada se pojačanje (ili bilo koji drugi parametar) sustava varira od nule do beskonačnosti.

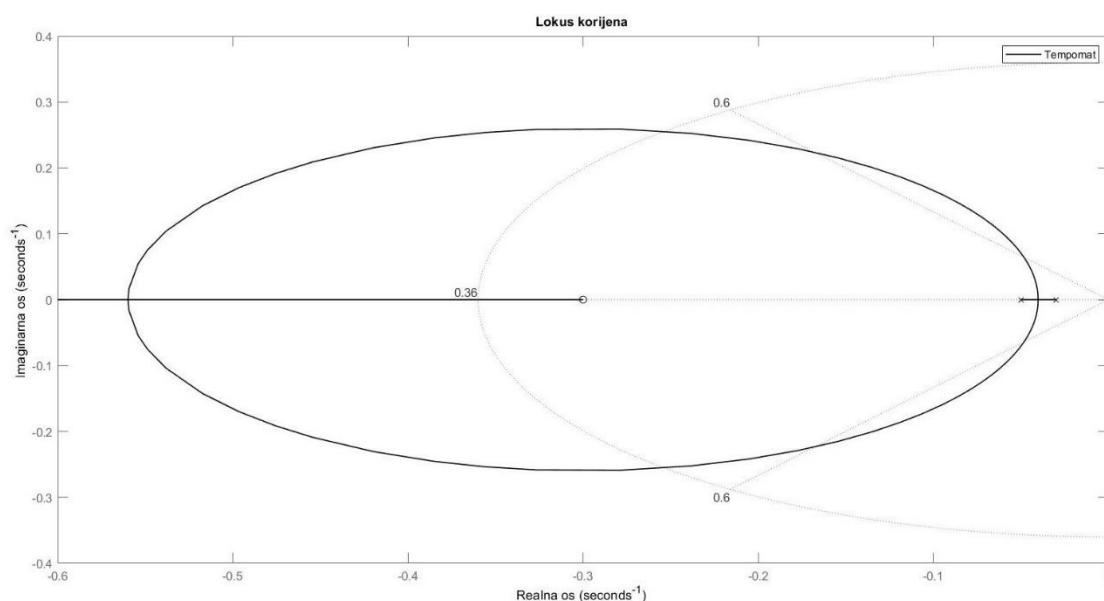
Kako bi se zadovoljio zahtjev na vrijeme porasta, najprije se sistemu dodaje proporcionalni regulator,  $K_p$ , u obliku pojačanja u iznosu 350. Međutim, uvođenjem proporcionalnog regulatora u sistem, narušen je kriterij trajnog regulacijskog odstupanja (sada iznosi preko 10%). Taj konstrukcijski zahtjev će se najlakše postići uvođenjem Lag regulatora u dinamički sustav. Prilikom njegove konstrukcije, kao i svih ostalih regulatora, potrebno je na lokusu korijena odrediti područja koja su pogodna za smještaj polova zatvorenog sustava. Kako se u ovom slučaju radi o sistemu prvog reda, zahtjev na vrijeme porasta može se izraziti preko zahtjeva na neprigušenu vlastitu frekvenciju pomoću izraza (3.3), čime se dobije da neprigušena vlastita frekvencija ne smije biti manja od 0,36 za vrijeme porasta od 5s.

$$\omega_n \geq \frac{1,8}{T_r} \quad (3.3)$$

Zahtjev na maksimalni prebačaj se pak iskazuje preko stupnja prigušenja ( $\zeta$ ) pomoću izraza (3.4), te za maksimalni prebačaj u iznosu od 10% iznosi 0,6.

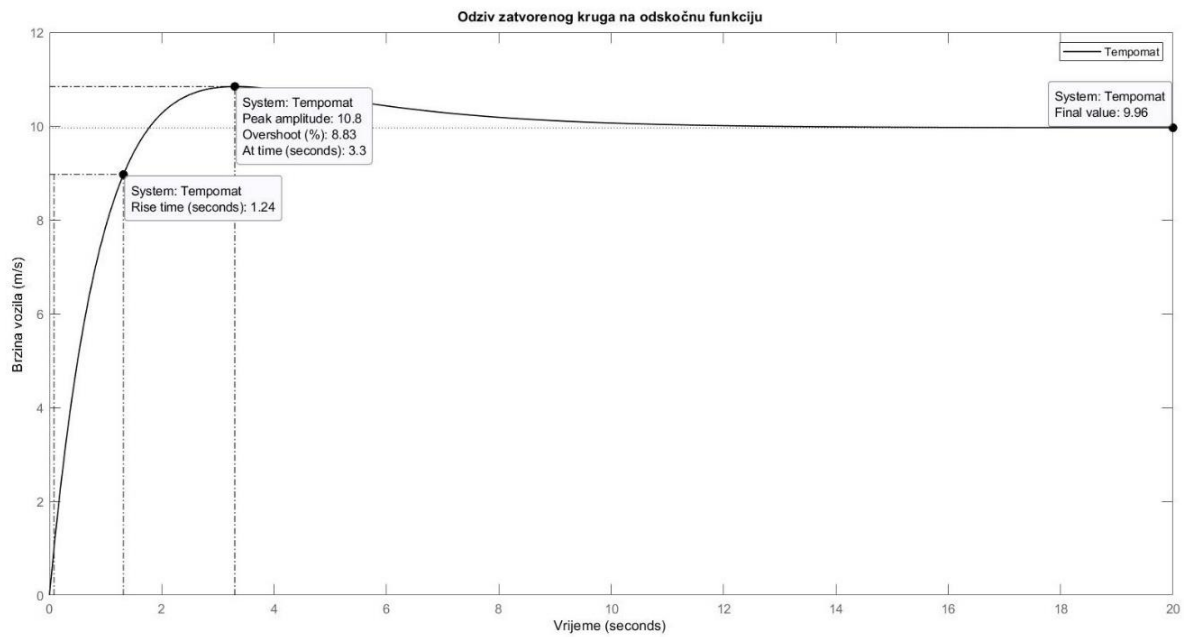
$$\zeta \geq \sqrt{\frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} \quad (3.4)$$

Nula i pol Lag regulatora postavljaju se dosta blizu jedno drugom te blizu ishodišta kompleksne ravnine kako ne bi narušili stabilnost i prijelaznu funkciju sistema. Također, kako se trajno regulacijsko odstupanje smanjuje ovisno o omjeru pojačanja nule i pola regulatora (omjer mora biti barem 10), nula i pol regulatora se postavljaju na lokacije  $z_0=0.3$  i  $p_0=0.03$ . Dodavanjem nule i pola Lag regulatora polu otvorenog kruga mijenja se izgled lokusa korijena otvorenog kruga. Lokus korijena se generira u programskom paketu MATLAB korištenjem naredbe rlocus te pokazuje lokacije pogodne za smještaj polova zatvorenog kruga, a to su one između isprekidanih linija iznosa 0,6 (predstavljaju stupanj prigušenja) te izvan isprekidane elipse iznosa 0,36 (predstavlja neprigušenu vlastitu frekvenciju). Uvođenjem Lag regulatora u sustav, lokus korijena otvorenog sustava prolazi kroz lokacije pogodne za smještaj polova zatvorenog sustava [Slika 3.3.]. Kako bi se zadovoljili postavljani zahtjevi potrebno je odabrati pojačanje kruga koje će smjestiti polove zatvorenog kruga na željene lokacije te se za iznos pojačanja proizvoljno uzima vrijednost 1294.



**Slika 3.3. Lokus korijena otvorenog sustava s Lag regulatorom - Tempomat**

Kako bi se provjerilo zadovoljava li takav sistem dane kriterije ponovno se zadaje pobuda u obliku odskočne funkcije te promatra odziv sustava [Slika 3.4.]. Upotrebom Lag regulatora svi postavljeni zahtjevi su zadovoljeni. Vrijeme porasta je 1,24s, maksimalni prebačaj je 8,83% a trajno regulacijsko odstupanje 0,4%. Maksimalni prebačaj se javio u sustavu zbog uvođenja Lag regulatora.

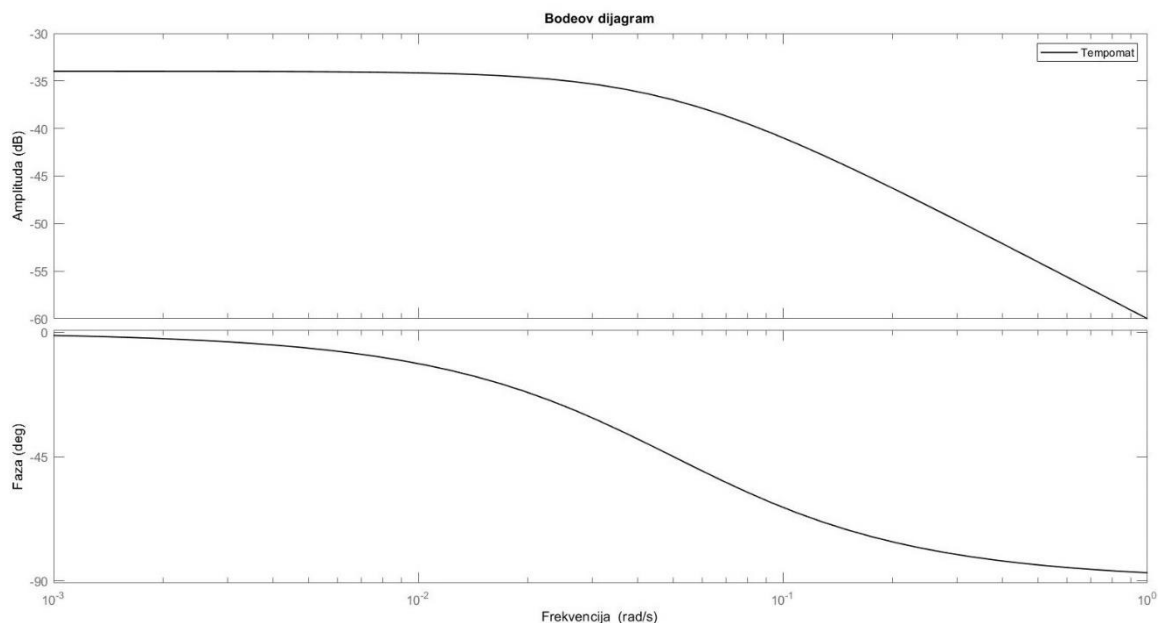


**Slika 3.4. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju - Tempomat**



### 3.1.2.2. Konstrukcija Lag regulatora u frekvencijskom području primjenom Bodeovih dijagrama

Iz Bodeovog dijagrama otvorenog kruga može se predvidjeti odziv zatvorenog kruga te se zbog toga regulatori često konstruiraju u frekvencijskom području. Iz Bodeovog dijagrama zadanog otvorenog kruga može se vidjeti zadovoljava li sistem postavljene kriterije [Slika 3.5.].



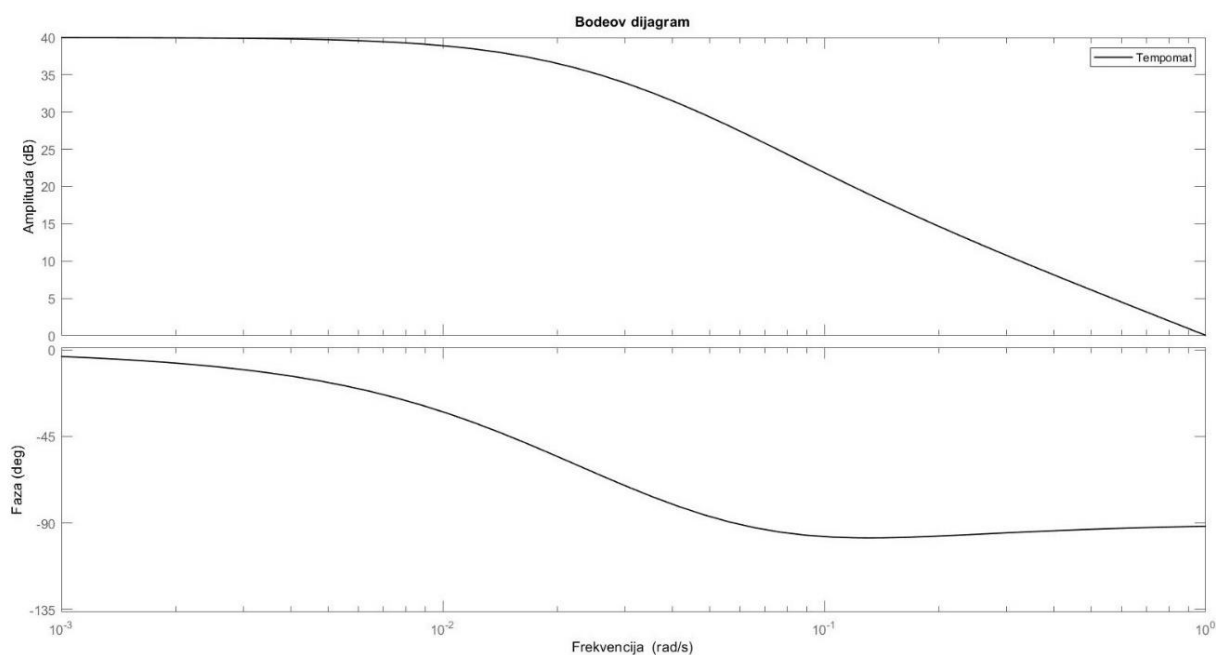
**Slika 3.5. Bodeov dijagram nereguliranog sistema - Tempomat**

Iz izraza (3.5) se izračunava trajno regulacijsko odstupanje koje za amplitudnu frekvencijsku karakteristiku od -34dB (odnosno apsolutnu vrijednost prijenosne funkcije od 0,02) iznosi 98% (izračunava se za nulte frekvencije). To se bi se također moglo vrlo lako vidjeti iz odgovora sistema na odskočnu funkciju s jediničnom povratnom vezom.

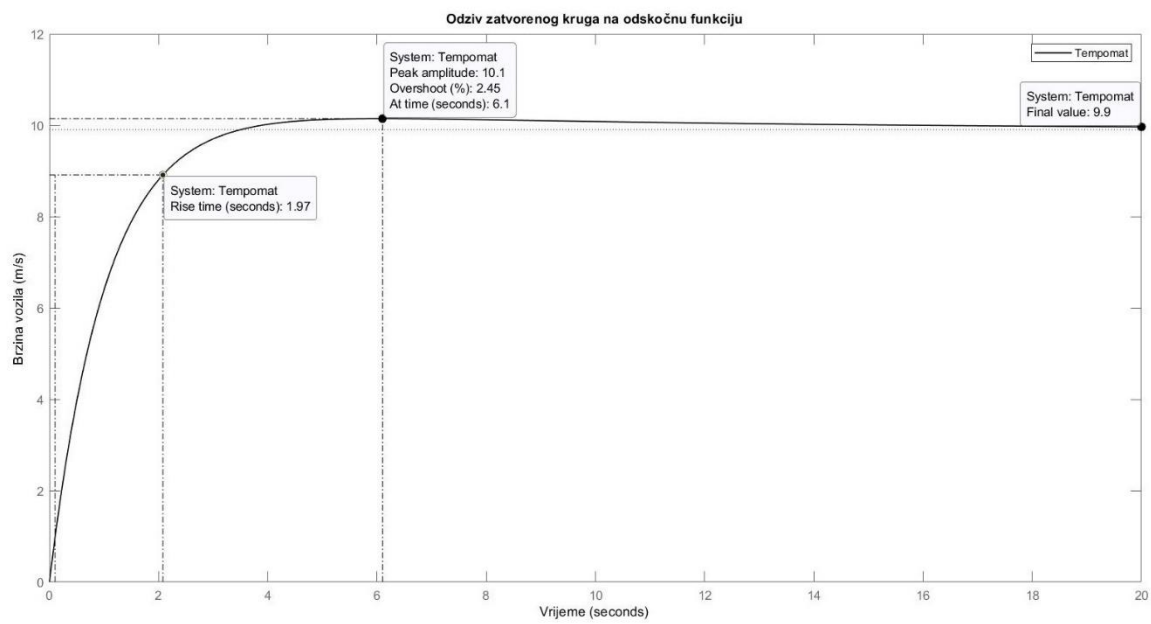
$$e_0 = \frac{1}{1 + |G(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0}} * 100\% \quad (3.5)$$

Kako bi se smanjilo tako veliko trajno regulacijsko odstupanje potrebno je povećati pojačanje na nižim frekvencijama, to se postiže proporcionalnim regulatorom,  $K_p$ . Zahtjev na trajno regulacijsko odstupanje iznosi 2%, stoga proporcionalnim regulatorom treba dodati otprilike 33,8dB amplitude, što se također izračunava izrazom (3.5).

Korištenjem isključivo proporcionalnog regulatora zahtjev vremena porasta i dalje neće biti zadovoljen. Zbog toga će se zahtjev trajnog regulacijskog odstupanja ipak zadovoljiti Lag regulatorom u seriji s proporcionalnim regulatorom, čime će se zadovoljiti i zahtjev na vrijeme porasta. Lag regulator dodaje pojačanje na nižim frekvencijama kako bi se smanjilo trajno regulacijsko odstupanje bez da mijenja iznos pojase širine čime se zadovoljava zahtjev na vrijeme porasta. Kako pol i nula Lag regulatora moraju biti jako blizu jedno drugom te blizu ishodištu kompleksne ravnine, te kako se vrijednost trajnog regulacijskog odstupanja smanjuje proporcionalno njihovom omjeru, za iznos nule izabire se vrijednost -0,1, a za iznos pola vrijednost -0,02. Za pojačanje proporcionalnog regulatora uzima se vrijednost 1000. Unosom podataka u programski paket MATLAB te naredbom bode generira se Bodeov dijagram otvorenog kruga iz kojeg se jasno može vidjeti da je zahtjev trajnog regulacijskog odstupanja zadovoljen (amplituda=40dB) [Slika 3.6.]. Također, generiranjem odziva zatvorenog kruga na odskočnu funkciju uočava se da su i zahtjevi vremena porasta te maksimalnog prebačaja zadovoljeni [Slika 3.7.].



**Slika 3.6. Bodeov dijagram otvorenog kruga s Lag regulatorom - Tempomat**



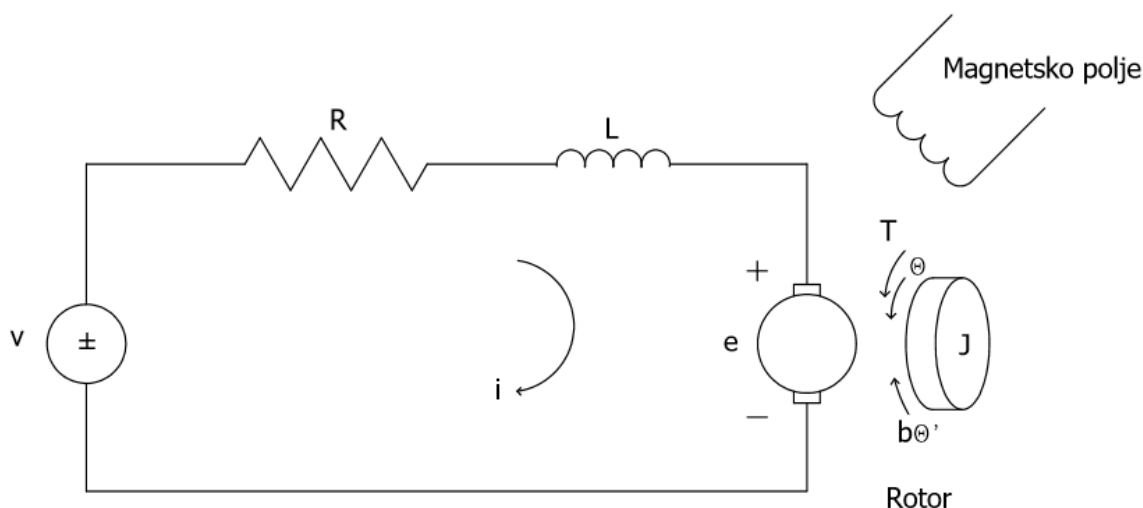
**Slika 3.7. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju - Tempomat**

### 3.2. Regulacija brzine istosmjernog motora

Istosmjerni motor pretvorbom električne energije u mehaničku daje rotacijsko gibanje, odnosno vezom s kotačima translacijsko gibanje. Svrha kontrole u ovom primjeru je održati konstantu kutnu brzinu vrtnje rotora motora.

#### 3.2.1. Prijenosna funkcija sistema

Pretpostavljen je kruti sustav rotora i vratila te model viskozno trenja, što znači da je moment trenja proporcionalan kutnoj brzini. Skica dinamičkog sustava prikazana je na slici ispod [Slika 3.8.].



**Slika 3.8. Skica dinamičkog sustava – Istosmjerni motor**

Općenito, moment generiran istosmjernim motorom proporcionalan je struji armature i snazi magnetskog polja. U ovom primjeru pretpostavljeno je konstantno magnetsko polje te je moment motora proporcionalan jedino struji armature preko konstante  $K_t$ . To znači da je motor upravlján strujom armature. Povratna elektromotorna sila, *emf*, proporcionalna je kutnoj brzini vratila preko konstante  $K_e$ . U SI sustavu, moment motora i povratna elektromotorna sila su jednake što znači da je  $K_t=K_e$ .

Prijenosna funkcija sistema proizlazi iz dvaju izraza (3.6) koja opisuju dinamički sustav te koji su dobiveni Newton – ovim drugim zakonom i Kirchoffovim zakonom o električnom naponu, gdje  $J$  predstavlja moment inercije motora,  $\ddot{\theta}$  kutno ubrzanje,  $b$  konstantnu viskozno trenja motora,  $\dot{\theta}$  kutnu brzinu rotora,  $K$  konstantu elektromotorne sile, odnosno trenja motora,  $i$  struju armature rotora,  $L$  induktivnost,  $R$  električni otpor te  $V$  napon armature rotora.

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = Ki$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\dot{\theta} \quad (3.6)$$

Laplaceovom transformacijom ovih dvaju izraza dobije se prijenosna funkcija sustava (3.7) (izostavljanjem struje armature iz jednadžbi) gdje ulaz u sustav predstavlja napon na armaturi te izlaz iz sustava kutna brzina rotora, odnosno vratila na kojem je smješten.

$$P(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \left[ \frac{\text{rad/s}}{V} \right] \quad (3.7)$$

### 3.2.2. Primjer primjene Lag regulatora

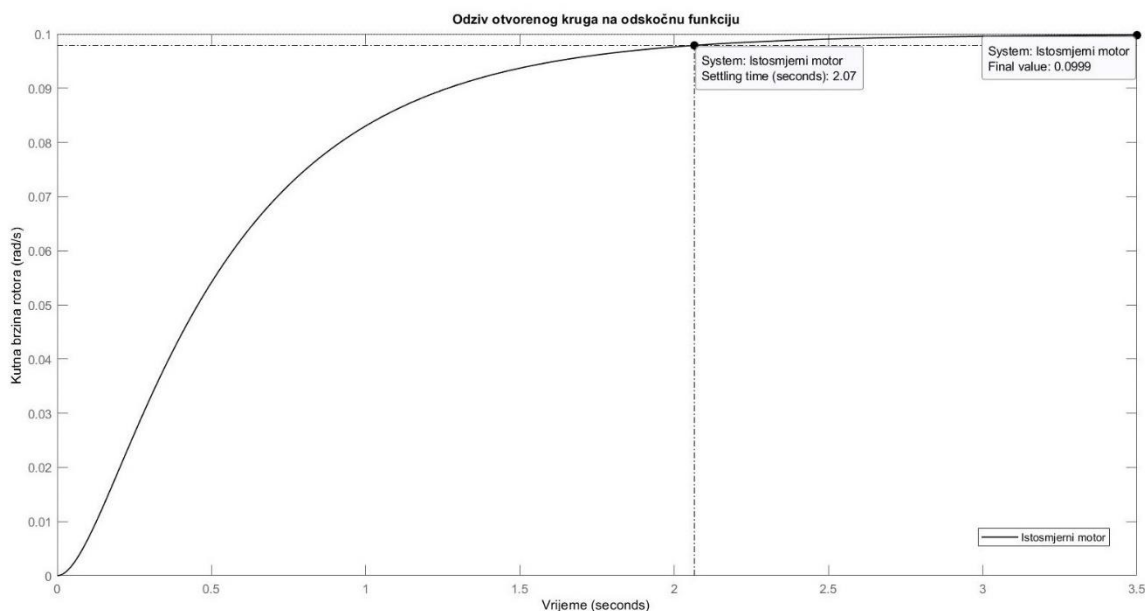
Kao parametri izvršnog člana nad kojim će se vršiti regulacija izabrani su sljedeći:

- $J=0,01 \text{ kgm}^2$
- $b=0,1 \text{ Nms}$
- $K=0,01 \text{ V/rad/s (Nm/Amp)}$
- $R=1 \text{ Ohm}$
- $L=0,5 \text{ H}$

Za zahtjeve koje sustav mora ispunjavati odabrane su sljedeće vrijednosti:

- Trajno regulacijsko odstupanje manje od 1%
- Vrijeme smirivanja manje od 2s
- Maksimalni prebačaj manji od 5%

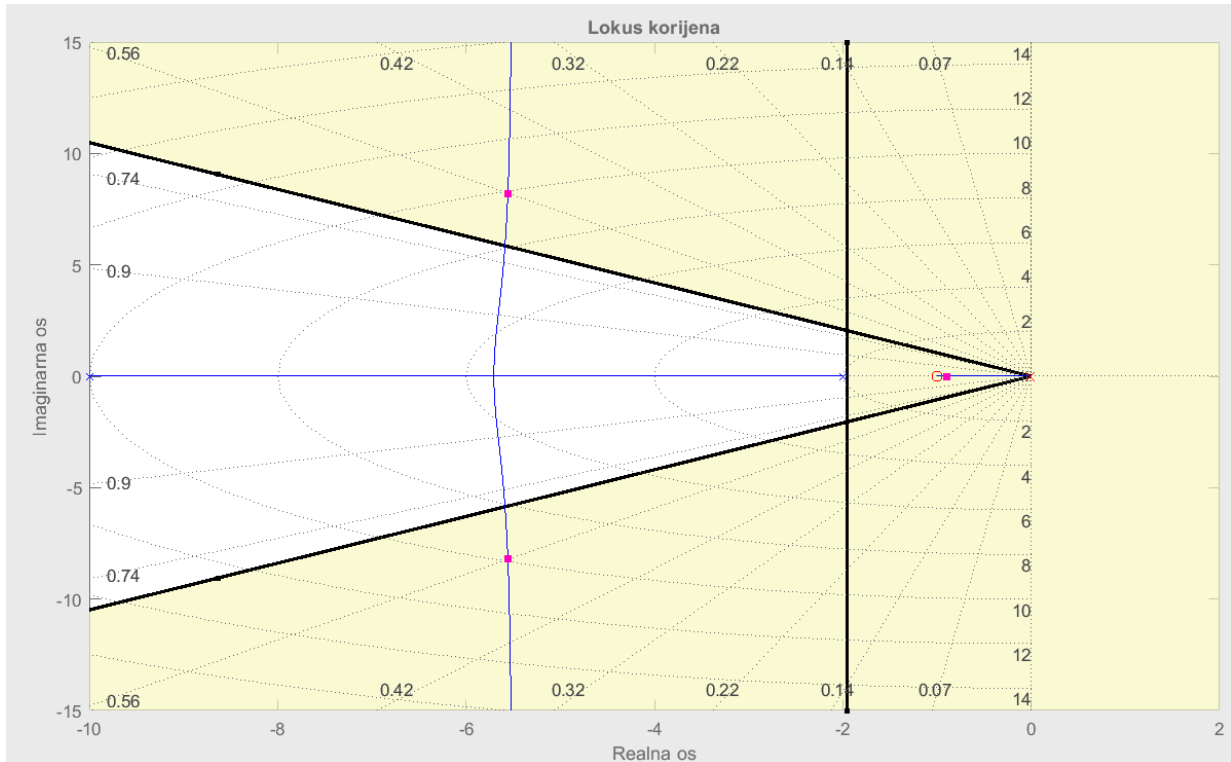
Pri danom ulazu u iznosu od 1V (ulazni napon) rotor motora rotira brzinom vrtnje u iznosu od 0,1rad/s koja mora biti konstantna. Kako bi se dao uvid u sustav, odnosno razmotrilo zadovoljava li sustav postavljene kriterije, kao ulazna pobuda sustavu se daje odskočna funkcija. Generiranjem odziva otvorenog kruga na jediničnu odskočnu funkciju ( $V=1V$ ) u programskom paketu MATLAB, uočava se da pri jediničnom ulazu sustav dostiže izlaznu vrijednost od 0,1 rad/s što je 10 puta manje od danog ulaza [Slika 3.9.]. Također, motor dostiže stacionarno stanje za 2,07s što ne zadovoljava kriterij vremena smirivanja od 2s (dominantan pol u -2 uzrokuje sporiji odziv sistema). Prebačaja željene vrijednosti nema, čime je zadovoljen kriterij maksimalnog prebačaja od 5% (zbog jednog pola u -10 a jednog u -2 sistem drugog reda se ponaša kao sistem prvog reda zbog dominantnog pola u -2, što se može vidjeti u odsutnosti prebačaja što je karakteristika sistema prvog reda).



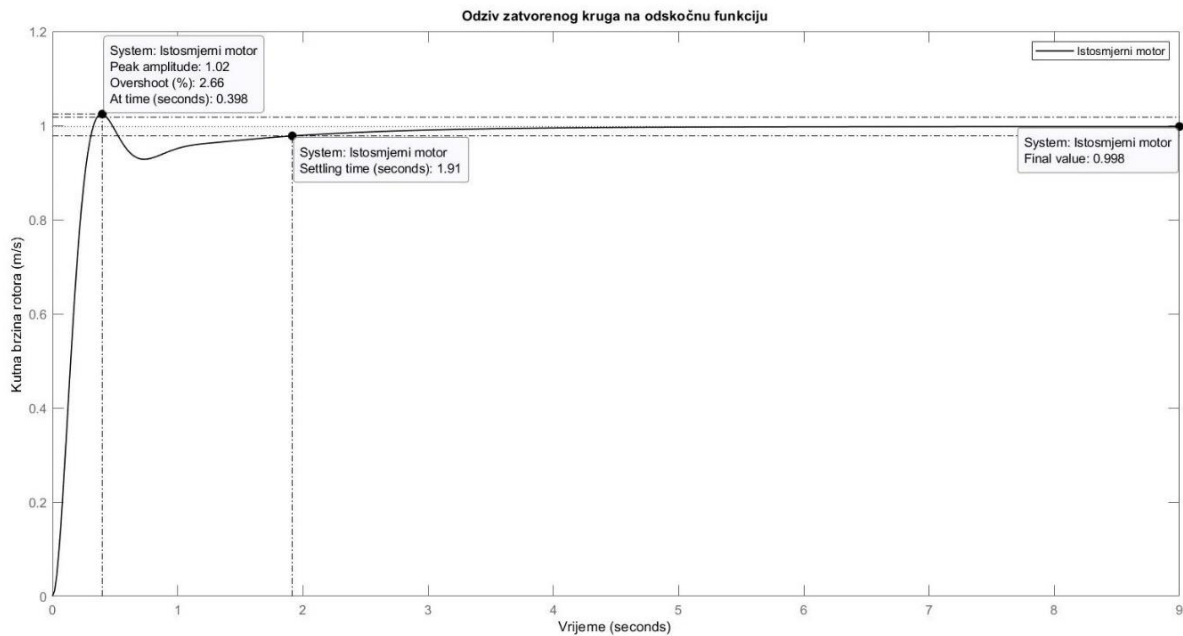
**Slika 3.9. Odziv otvorenog kruga na odskočnu funkciju – Istosmjerni motor**

### 3.2.2.1. Konstrukcija Lag regulatora primjenom metode lokusa korijena

Generiranjem dijagrama lokusa korijena otvorenog kruga u programskom paketu MATLAB te postavljanjem kriterija vremena porasta te maksimalnog prebačaja dobiva se područje koje je pogodno za smještaj polova zatvorenog kruga (nezasjenjeno područje). Dodavanjem proporcionalnog regulatora u obliku čistog pojačanja sistemu kriterij vremena smirivanja se zadovoljava, no kriterij trajnog regulacijskog odstupanja nije zadovoljen i ne može biti samo pojačanjem jer se njegovim povećavanjem i zadovoljavanjem kriterija trajnog regulacijskog odstupanja javlja veliki maksimalni prebačaj odziva, što također nije poželjno. Kako bi se zadovoljio kriterij trajnog regulacijskog odstupanja sistemu se dodaje Lag regulator. Prilikom njegove konstrukcije treba obratiti pozornost na to da Lag regulator može smanjiti vrijeme smirivanja. Nula Lag regulatora postavlja se na lokaciju  $-1$  u kompleksnoj ravnini, dok se pol Lag regulatora postavlja na lokaciju  $-0,01$ . Ovisno o njihovom omjeru (nule i pola) smanjuje se trajno regulacijsko odstupanje. U dijagramu lokusa korijena sada se odabiru povoljne lokacije polova zatvorenog sustava odabirom pojačanja proporcionalnog regulatora. Smještanjem polova u područje iznad ograničenja maksimalnog prebačaja (kvadratići u zasjenjenom području), odnosno za vrijednost pojačanja  $44$ , sustav će vjerojatno zadovoljiti postavljene kriterije [Slika 3.10.]. Polove zatvorenog kruga je moguće smjestiti u prostor iznad ograničenja jer sistemom dominira pol Lag regulatora koji je dosta male vrijednosti te ima najsporiji odziv. Smještanjem kompleksno konjugiranih polova iznad područja ograničenja maksimalnog prebačaja taj zahjev je i dalje zadovoljen, međutim time se postiže zadovoljenje kriterija vremena smirivanja jer se pol regulatora pomiče ulijevo te se odziv sistema na odskočnu funkciju ubrzava. Da je sistem sada zadovoljio postavljene kriterije može se vidjeti iz odgovora sistema na pobudu u obliku odskočne funkcije [Slika 3.11.]. Vrijeme smirivanja sada iznosi  $1,91s$ , a trajno regulacijsko odstupanje  $0,2\%$ . Pošto se sistem i dalje ponaša kao sistem prvog reda jer njime dominira pol najbliže ishodištu, kriterij maksimalnog prebačaja sistema je i dalje zadovoljen.



**Slika 3.10. Lokus korijena otvorenog kruga s polovima zatvorenog kruga u području iznad ograničenja – Istosmjerni motor**



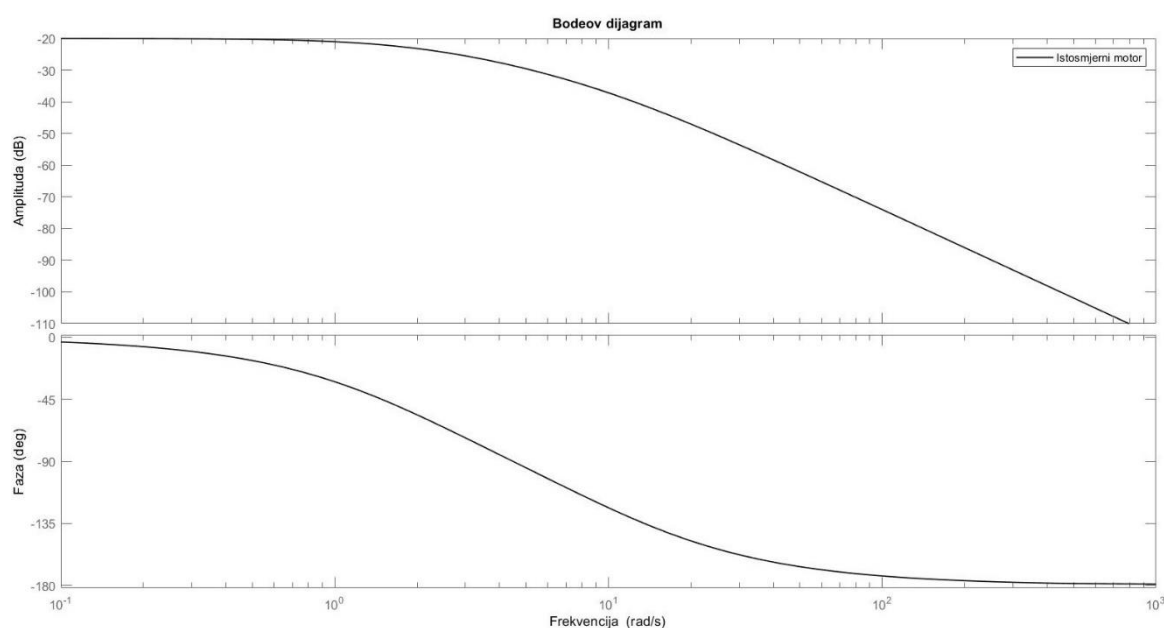
**Slika 3.11. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Istosmjerni motor**



### 3.2.2.2. Konstrukcija Lag regulatora u frekvencijskom području primjenom Bodeovih dijagrama

Dodavanje regulatora otvorenom krugu mijenja Bodeov dijagram otvorenog kruga tako mijenjajući odziv zatvorenog kruga. Stoga je cilj konstruirati regulator koji će mijenjati Bodeov dijagram otvorenog kruga tako da se odziv zatvorenog kruga ponaša na željeni način.

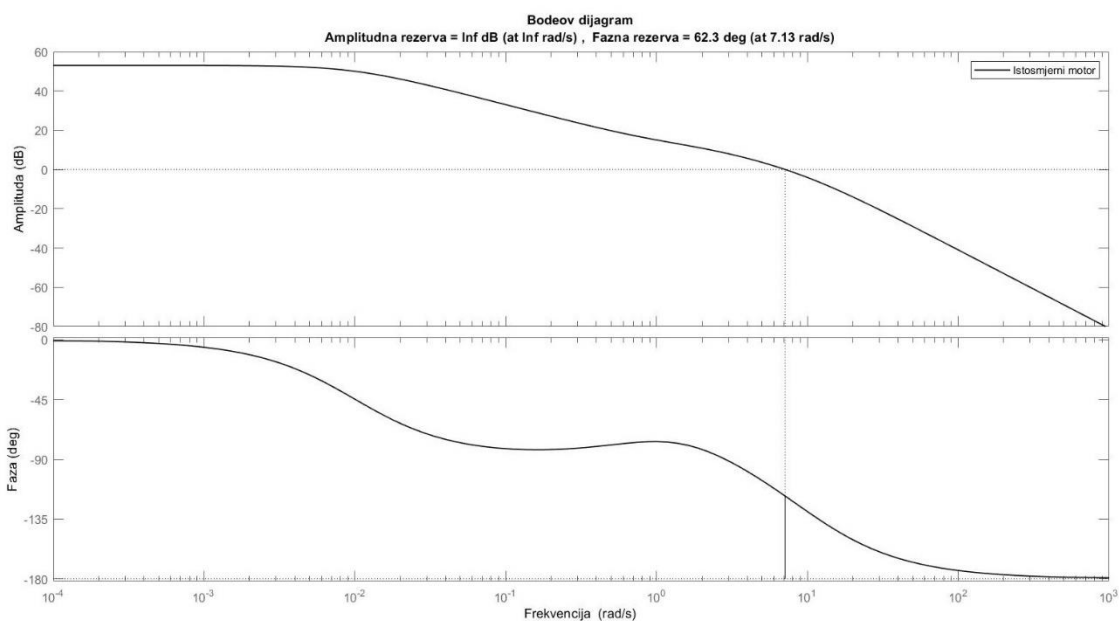
Iz Bodeovog dijagrama izvršnog člana uočava se da su amplitudna i fazna rezerva beskonačne što ukazuje na robusnost sistema, odnosno minimalan prebačaj [Slika 3.12.]. Fazna rezerva je beskonačna jer je amplitudna frekvencijska karakteristika 0 za sve frekvencije. To ukazuje na činjenicu da će sustav imati problema s praćenjem različitih referentnih signala.



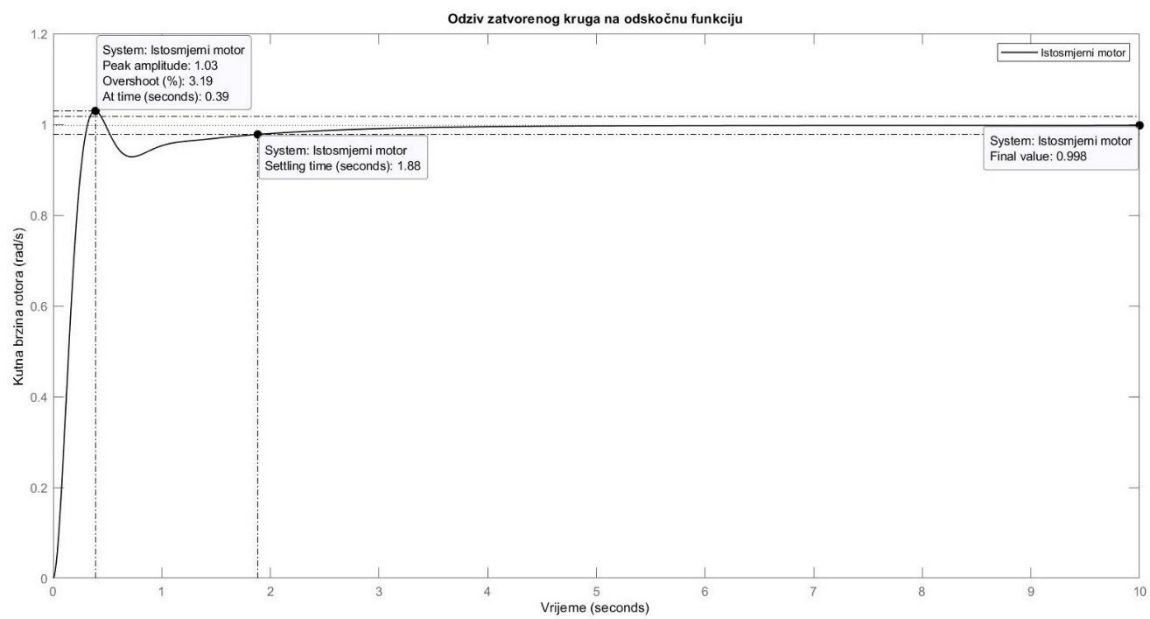
**Slika 3.12. Bodeov dijagram nereguliranog kruga – Istosmjerni motor**

Nastoji se povećati pojačanje sustava, odnosno amplituda bez značajnog utjecaja na faznu rezervu. Fazna rezerva u iznosu 60° je dostatna za osiguranje stabilnosti sustava. Ta vrijednost se u ovom sistemu postiže na otprilike 10 rad/s. Stoga je potrebno dodati pojačanje u iznosu 72 na toj frekvenciji (točna vrijednost fazne rezerve te pojačanja kojeg je potrebno dodati na 10rad/s dobivena je u programskom paketu MATLAB korištenjem naredbe [mag,phase,w]=bode(plant,freq)). Kako bi se zadovoljili kriteriji maksimalnog prebačaja i trajnog regulacijskog odstupanja (na to utječe i samo pojačanje) dinamičkom sistemu se dodaje Lag regulator koji će smanjiti frekvenciju kritične amplitude tako da poveća faznu rezervu bez smanjenja pojačanja sistema. Nula Lag regulatora postavlja se na lokaciju -1, a

pol Lag regulatora na lokaciju  $-0,01$  te se pojačanje sustava sada smanjuje na 45 (to je moguće jer ne utječe samo pojačanje sustava na smanjenje trajnog regulacijskog odstupanja nego i Lag regulator). Kako su nula i pol Lag regulatora na frekvenciji znatno manjoj od frekvencije kritične amplitude, fazno kašnjenje koje je uneseno Lag regulatorom neće znatno utjecati na performanse sistema što se može uočiti iz Bodeovog dijagrama [Slika 3.13.]. Generiranjem odziva zatvorenog kruga na odskočnu funkciju uočava se da su svi postavljeni kriteriji zadovoljeni: maksimalni prebačaj od 3,19%, vrijeme smirivanja od 1,88s te trajno regulacijsko odstupanje u iznosu od 0,2% [Slika 3.14.].



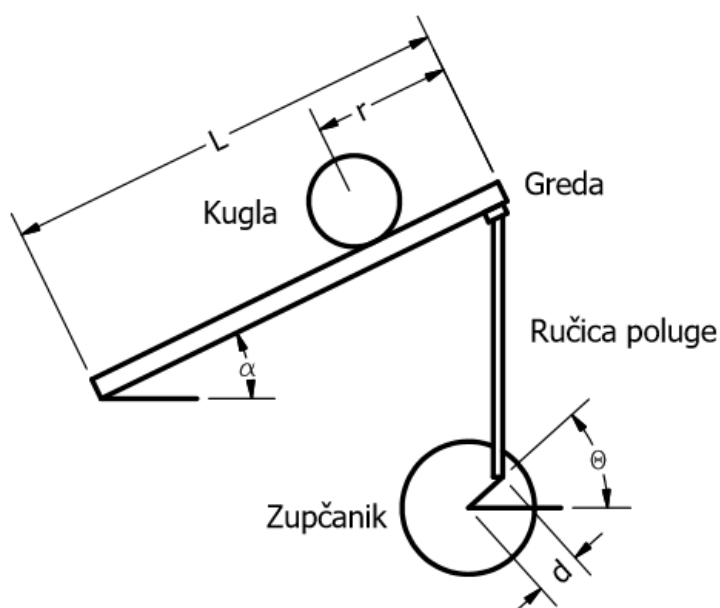
**Slika 3.13. Bodeov dijagram kruga s Lag regulatorom – Istosmjerni motor**



**Slika 3.14. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Istosmjerni motor**

### 3.3. Stabilizacija kugle na gredi

Kugla je smještena na gredi, te joj je dozvoljeno gibanje s jednim stupnjem slobode gibanja duž grede. Ručica poluge je povezana s gredom na jednom kraju i servo zupčanikom na drugom kraju. Kako se servo zupčanik zakrene za kut  $\theta$ , tako poluga promijeni kut grede za  $\alpha$ . Kada se kut pomakne iz horizontalne pozicije, gravitacija uzrokuje kotrljanje kugle po gredi. Regulator se konstruira kako bi se manipuliralo pozicijom kugle. Skica dinamičkog sustava prikazana je na slici ispod [Slika 3.15.].



Slika 3.15. Skica dinamičkog sustava – Kugla na gredi

#### 3.3.1. Prijenosna funkcija sistema

Za ovaj problem je pretpostavljeno da nema proklizavanja kugle s grede te da je trenje između kugle i grede zanemarivo. Linearizacijom Lagrangeove jednadžbe gibanja kugle oko kuta grede ( $\alpha=0$ ) te linearnom aproksimacijom kuta grede preko kuta servo zupčanika dobije se izraz gibanja kugle po gredi (3.8).

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right) \ddot{r} = -mg \frac{d}{L} \theta \quad (3.8)$$

Gdje je  $J$  moment inercije kugle,  $R$  radijus kugle,  $m$  masa kugle,  $\ddot{r}$  akceleracija kugle, gravitacijsko ubrzanje,  $d$  udaljenost ručice poluge od sredine servo zupčanika,  $L$  duljina grede, a  $\theta$  kut servo zupčanika.

Laplaceovom transformacijom danog izraza dobije se izraz (3.9), gdje  $R(s)$ , odnosno pozicija kugle, predstavlja izlaz sistema, a  $\theta(s)$ , odnosno kut servo zupčanika, predstavlja ulaz sistema.

$$P(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)} \frac{1}{s^2} \left[ \frac{m}{rad} \right] \quad (3.9)$$

Iz gornjeg izraza može se primjetiti kako je izvršni član, odnosno prijenosna funkcija sustava, ustvari dvostruki integrator time čineći sustav granično stabilnim.

### 3.3.2. *Primjer primjene Lead regulatora*

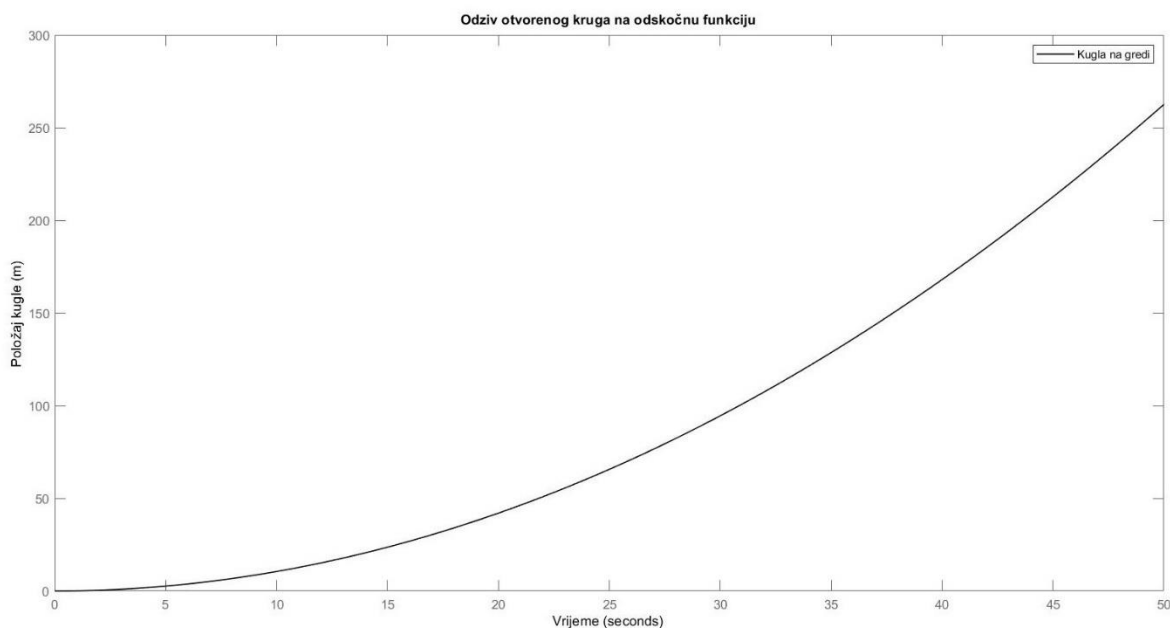
Za parametre prijenosne funkcije sistema odabrane su sljedeće vrijednosti:

- $m=0,111\text{kg}$
- $R=0,015\text{m}$
- $d=0,03\text{m}$
- $g=9,8\text{m/s}^2$
- $L=1\text{m}$
- $J=9,99 \cdot 10^{-6}\text{kg}\cdot\text{m}^2$

Dok su za zahtjeve koje sustav mora ispunjavati odabrani sljedeći:

- Vrijeme smirivanja manje od 3s
- Maksimalni prebačaj manji od 5%

Iz odziva otvorenog kruga na odskočnu funkciju može se uočiti da sistem ne zadovoljava postavljene zahtjeve i da je nestabilan, odnosno da će se kugla otkotrljati do kraja grede [Slika 3.16.]. Kako bi se sustav stabilizirao te zadovoljio tražene zahtjeve regulira se Lead regulatorom.



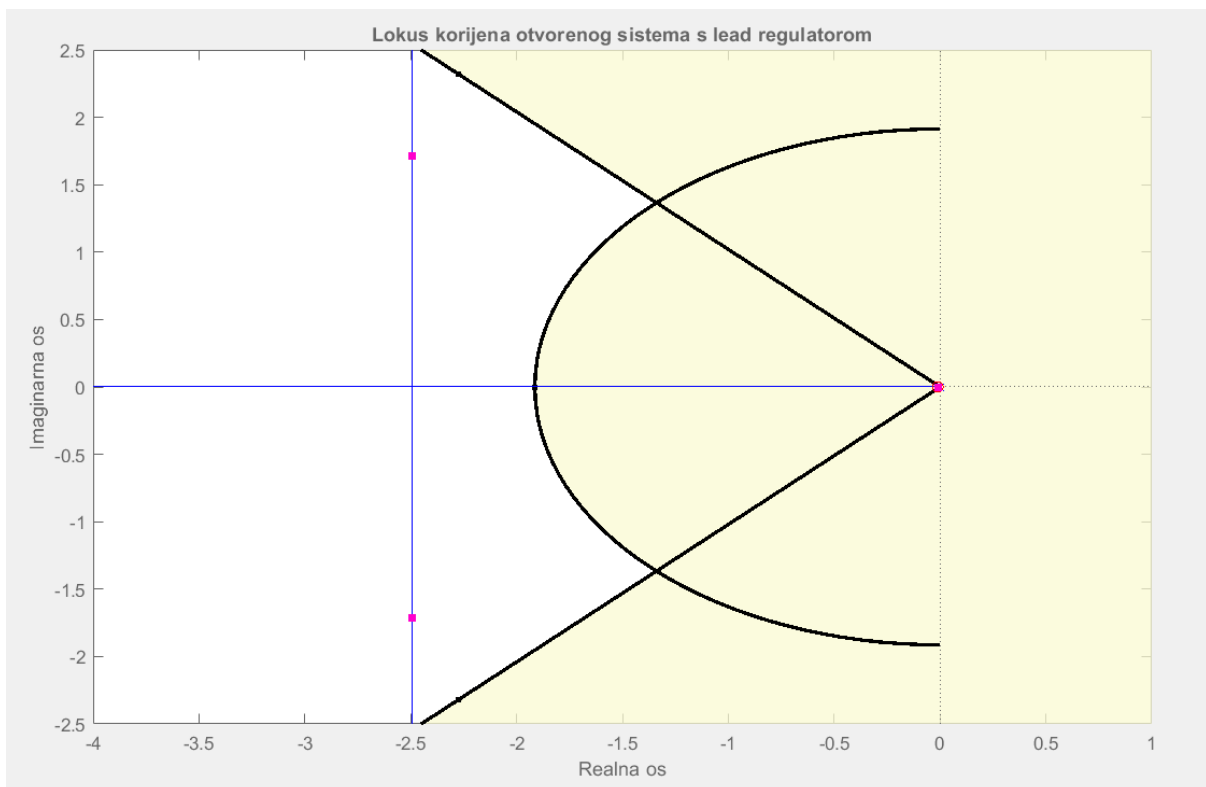
**Slika 3.16. Odziv otvorenog kruga na odskočnu funkciju – Kugla na gredi**

### 3.3.2.1. *Konstrukcija Lead regulatora primjenom metode lokusa korijena*

Kako sustav čine polovi u ishodištu koordinatnog sustava, što se vidi iz prijenosne funkcije sustava, da se zaključiti da se lokus korijena otvorenog sustava poklapa s imaginarnom osi u kompleksnoj ravnini, odnosno da je sustav nestabilan. Prilikom konstrukcije regulatora potrebno je odrediti područje pogodno za smještaj polova zatvorenog sustava postavljanjem danih zahtjeva u lokus korijena (nezasjenjeno područje). Kriterij maksimalnog prebačaja se izražava pomoću kriterija omjera prigušenja koje za maksimalni prebačaj u iznosu od 5% iznosi 0,7 te se dobije preko izraza (3.4). Kriterij vremena smirivanja se pak pomoću dobivene vrijednosti omjera prigušenja u dijagram unosi u obliku središnje frekvencije koja se izračunava iz izraza (3.10) uz vrijednost vremena smirivanja od 3s i omjera prigušenja 0,7 i iznosi 1,9 (za taj izraz vrijedi pretpostavka da se odziv ustalio uz trajno regulacijsko odstupanje od maksimalno 2%).

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (3.10)$$

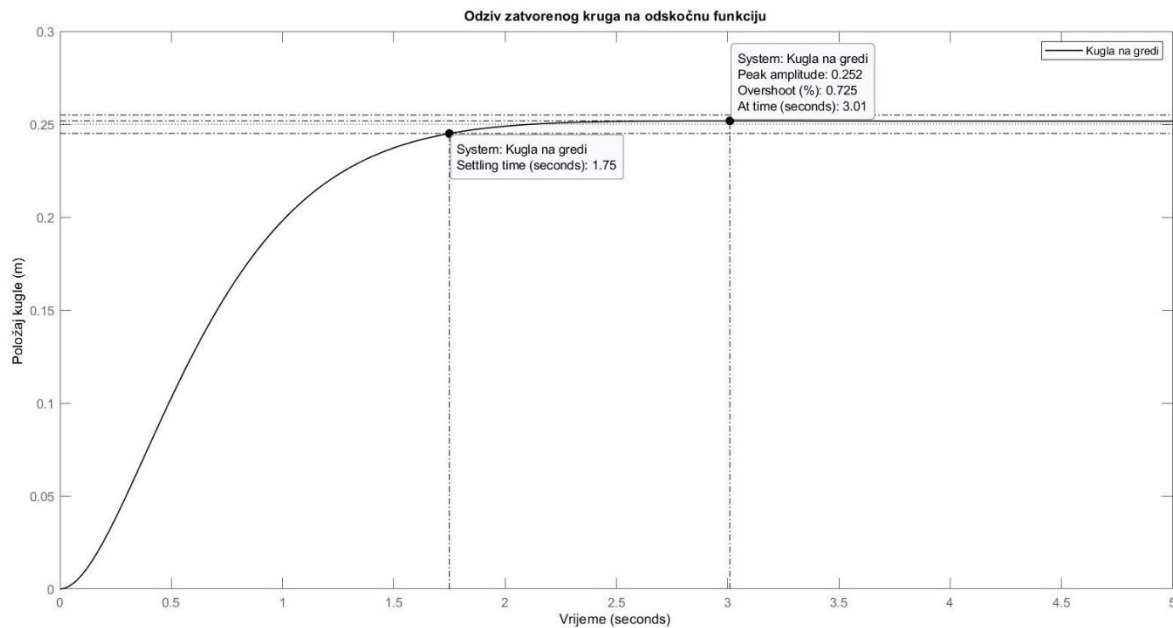
Lokus korijena otvorenog sustava potrebno je pomaknuti ulijevo, što se postiže Lead regulatorom. Nula Lead regulatora postavlja se blizu ishodišta kako bi poništila jedan od polova otvorenog sustava. Pol Lead regulatora postavlja se dalje ulijevo u kompleksnoj ravnini kako bi se povećala stabilnost sistema. Kao lokacije za postavljanje nule i pola odabiru se  $-0,01$  i  $-5$ . Lokus korijena sustava sada prolazi kroz područje pogodno za smještaj polova zatvorenog sustava te je potrebno odabrati pojačanje koje će smjestiti polove na željene lokacije [Slika 3.17.].



**Slika 3.17. Lokus korijena otvorenog sustava s Lead regulatorom – Kugla na gredi**

Jedan pol ostaje u ishodištu kompleksne ravnine te ga poništava nula dovoljno blizu njega. Preostala dva pola postavljaju se pojačanjem u iznosu 35 na pogodne lokacije.

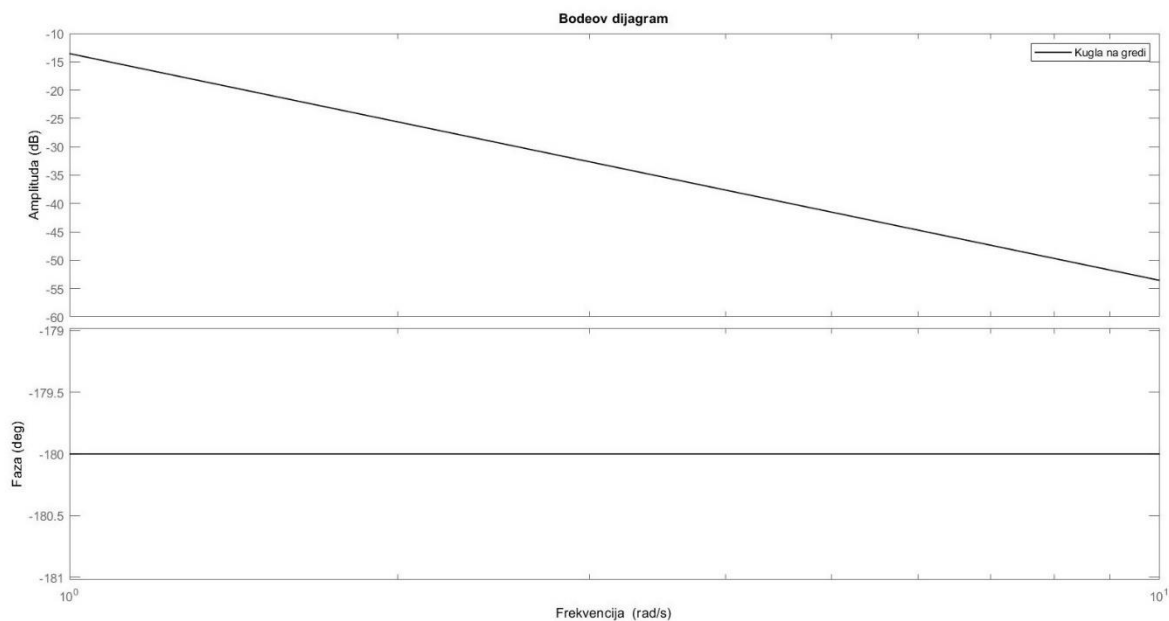
Iz odgovora zatvorenog sistema na pobudu u obliku odskočne funkcije može se vidjeti da su postavljene kriteriji zadovoljeni upotrebom Lead regulatora [Slika 3.18.].



**Slika 3.18.** Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Kugla na gredi

### 3.3.2.2. Konstrukcija Lead regulatora u frekvencijskom području primjenom Bodeovih dijagrama

Iz Bodeovog dijagrama prijenosne funkcije sistema može se uočiti kako je fazna rezerva sistema 0 što znači da je sistem nestabilan [Slika 3.19.]. Stoga se uvođenjem Lead regulatora nastoji povećati fazna rezerva.



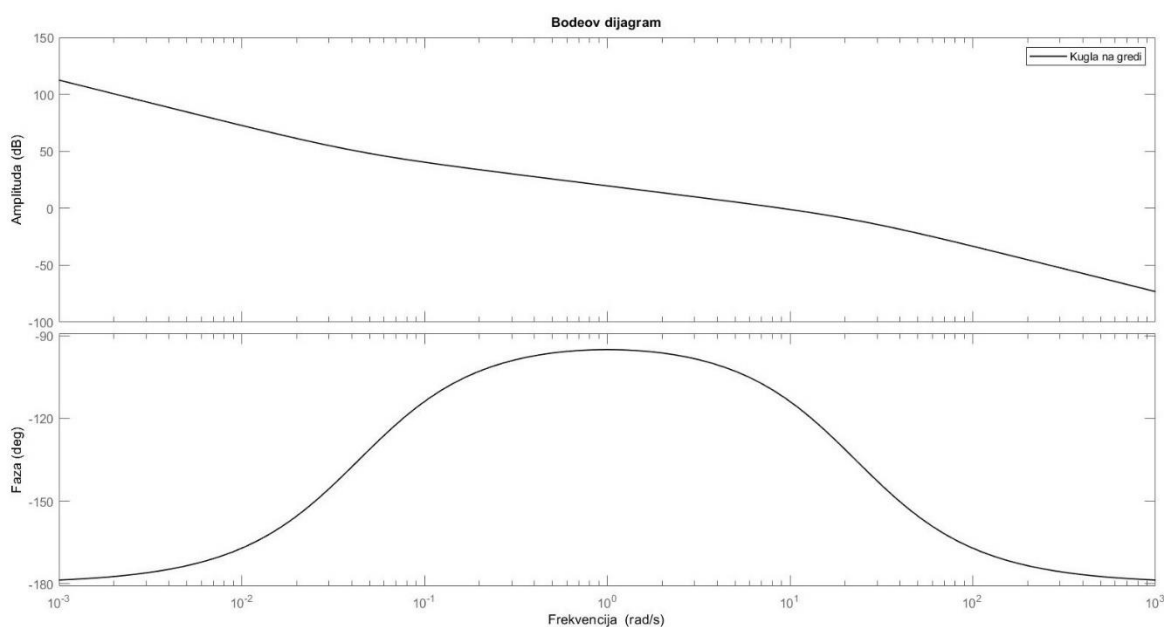
**Slika 3.19.** Bodeov dijagram otvorenog kruga – Kugla na gredi



Iz zadanog kriterija maksimalnog prebačaja dobiven je minimalni stupanj prigušenja kojeg sustav mora zadovoljavati. On iznosi 0,7. S faznom rezervom sustava povezan je izrazom (3.11) iz kojeg slijedi da minimalna fazna rezerva koja mora biti dodana sistemu iznosi  $70^\circ$ . Sigurnosti radi, sistemu će biti dodano  $85^\circ$  faze čime će se još više smanjiti maksimalni prebačaj.

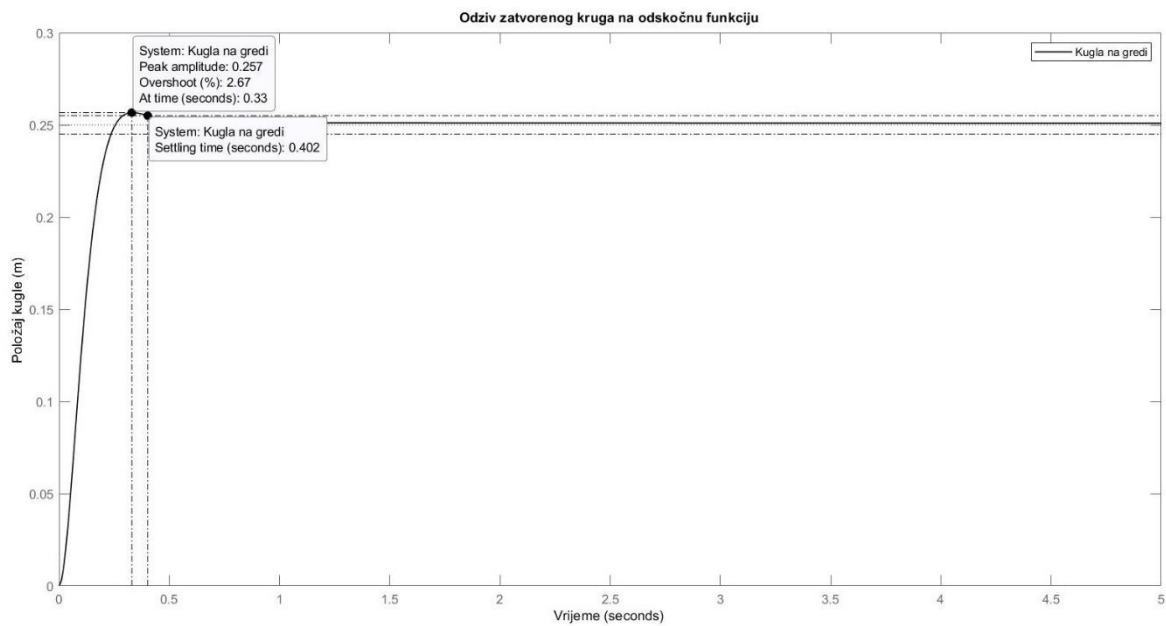
$$PM = 100\zeta \quad (3.11)$$

Frekvenciju pri kojoj je potrebno dodati tu količinu faze je u ovom slučaju malo teže odrediti jer su prikazi u Bodeovom dijagramu zapravo ravne linije. U ovom slučaju koristi se poveznica između vremena smirivanja i pojasne širine te se dobiva da pojasna širina iznosi 1,92rad/s. Stoga se za središnju frekvenciju pri kojoj je potrebno dodati fazu odabire manja vrijednost, odnosno 1rad/s. Iz dobivenih vrijednosti središnje frekvencije i fazne rezerve pomoću izraza (2.5) i (2.6) izračunavaju se parametri  $a$  i  $T$  Lead regulatora. Parametar  $a$  u ovom slučaju iznosi 0,00191, a parametar  $T=22,9$ . Također, sustavu je potrebno dodati i pojačanje, u ovom slučaju u iznosu 2. Time se sustav ubrzava, odnosno povećava se vrijednost frekvencije kritične amplitude, i vrijeme smirivanja se skraćuje.



**Slika 3.20. Bodeov dijagram sustava s Lead regulatorom – Kugla na gredi**

Iz Bodeovog dijagrama sistema reguliranog Lead regulatorom može se uočiti kako je fazna rezerva sistema povećana te je frekvencija kritične amplitude postavljena na vrijednost od otprilike 10rad/s čime je sistem ubrzan [Slika 3.20.]. Generiranjem odziva zatvorenog sistema na pobudu u obliku odskočne funkcije uočava se kako je sustav stabiliziran i svi kriteriji zadovoljeni [Slika 3.21.].



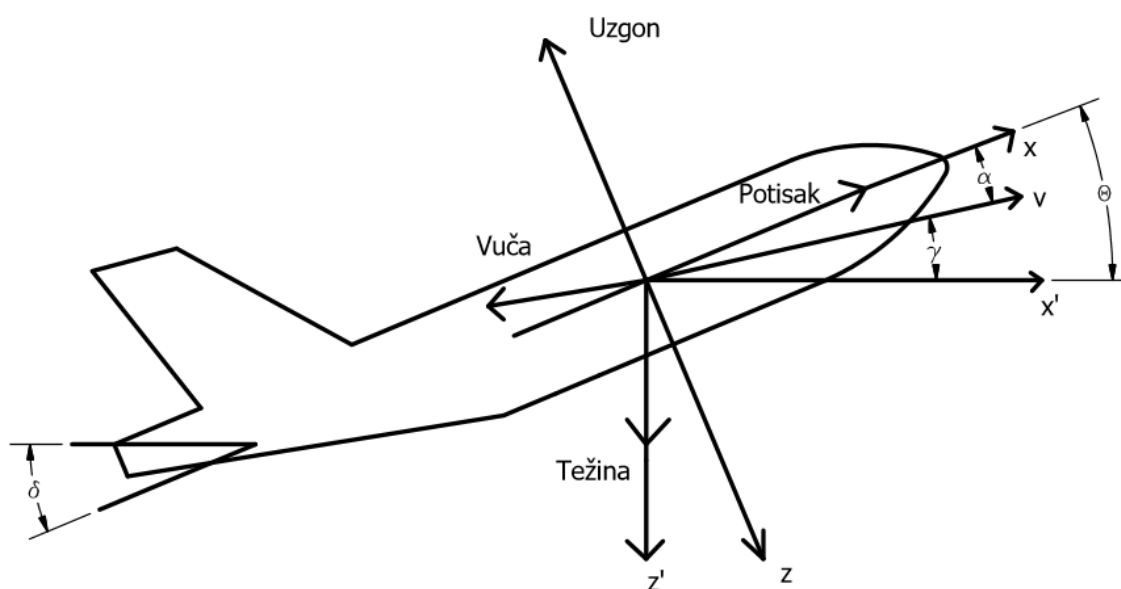
**Slika 3.21. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Kugla na gredi**

### 3.4. Regulacija uspona aviona

Gibanje aviona je opisano nizom od 6 kompliciranih spregnutih nelinearnih diferencijalnih jednačbi. Uz određene pretpostavke, one mogu biti raspregnute i linearizirane u uzdužne i poprečne jednačbe. Uspon aviona vođen je uzdužnom dinamikom. U ovom primjeru, biti će konstruiran autopilot koji kontrolira uspon aviona.

#### 3.4.1. Prijenosna funkcija sistema

Standardne koordinatne osi i sile koje djeluju na avion prikazane su skicom ispod [Slika 3.22.]



Slika 3.22. Skica dinamičkog sustava – Avion

Pod pretpostavkom da je avion u ravnotežnom krstarenju na konstantnoj visini i pri konstantnoj brzini, sile potiska, težine, uzgona i vuče uravnotežuju jedna drugu u horizontalnoj i vertikalnoj osi. Također, pretpostavlja se da promjena u kutu uspona ne mijenja brzinu aviona ni pod kakvim okolnostima. Primjenom navedenog, dobivaju se longitudinalne jednačbe sistema. Uvrštavanjem brojčanih vrijednosti parametara za komercijalni Boeingov avion dobivaju se jednačbe koje znatno olakšavaju postupak (3.12).

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -0,313\alpha + 56,7q + 0,232\delta \\ \dot{q} &= -0,0139\alpha - 0,426q + 0,0203\delta \\ \dot{\theta} &= 56,7q\end{aligned}\tag{3.12}$$

Laplaceovom transformacijom gore navedenih jednadžbi uz odabir  $\theta$ , odnosno kuta uspona, za izlaz iz sistema te  $\delta$ , odnosno kuta otklona, za ulaz sistema dobiva se sljedeći izraz uz početne uvjete jednake nuli (3.13).

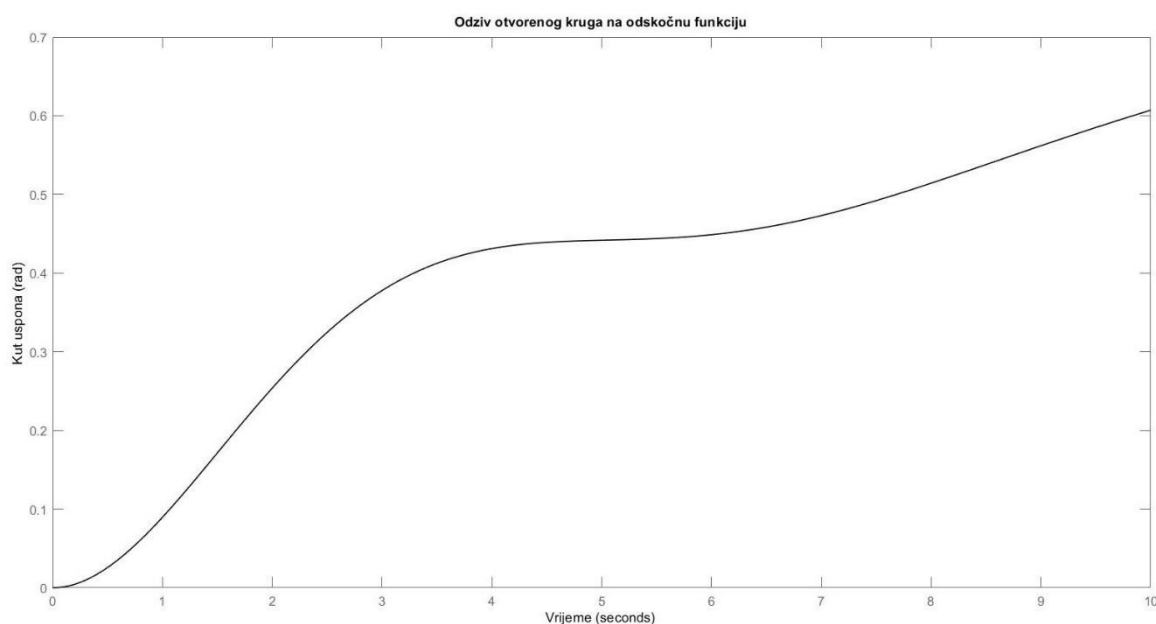
$$P(s) = \frac{\Theta(s)}{\Delta(s)} = \frac{1,151s + 0,1774}{s^3 + 0,739s^2 + 0,921s}\tag{3.13}$$

### 3.4.2. Primjer primjene Lead regulatora

Za konstrukcijske zahtjeve koje sustav mora ispunjavati odabrane su sljedeće vrijednosti:

- Maksimalni prebačaj manji od 10%
- Vrijeme porasta manje od 2s
- Vrijeme smirivanja manje od 10s
- Trajno regulacijsko odstupanje manje od 2%

Prije primjene regulacije na sistem, potrebno je ispitati kako se ponaša sistem otvorenog kruga, odnosno sama prijenosna funkcija sistema na danu pobudu. To se najbolje može vidjeti iz odziva sistema na pobudu u obliku odskočne funkcije [Slika 3.23.]. Kao zadani kut otklona uzima se vrijednost 0,2 koja predstavlja pojačanje kojim se množi prijenosna funkcija prilikom generiranja odziva na odskočnu funkciju programskom paketu MATLAB.



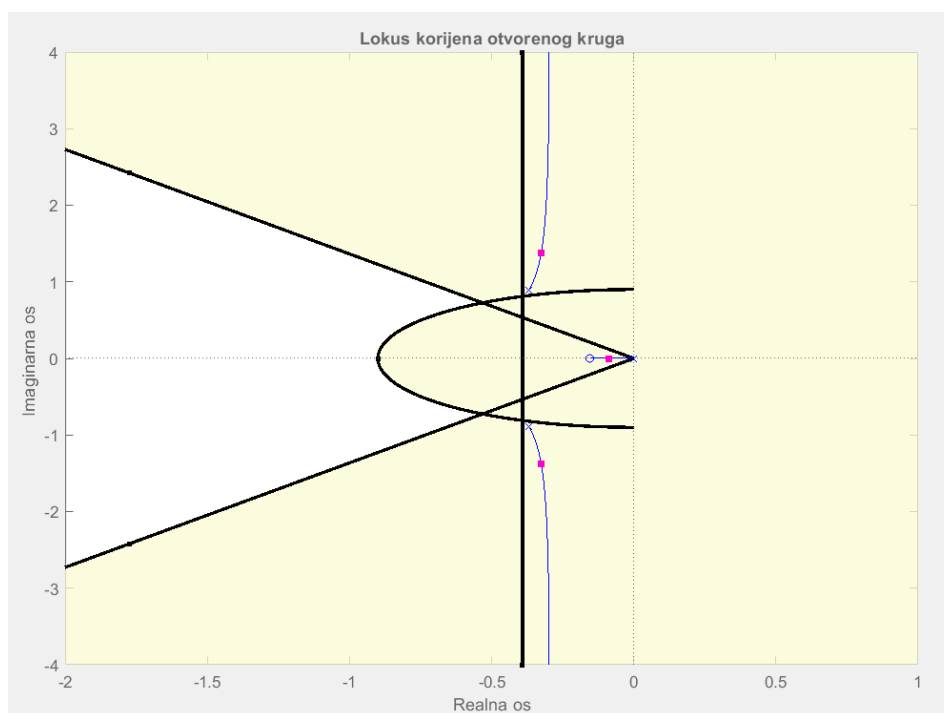
**Slika 3.23. Odziv otvorenog kruga na odskočnu funkciju – Avion**

Iz odziva otvorenog kruga na odskočnu funkciju pojačanja 0,2 može se uočiti da sustav ne zadovoljava postavljene kriterije i da je nestabilan. Stabilnost sistema može se odrediti pomoću polova prijenosne funkcije. U MATLABU se polovi prijenosne funkcije pronalaze naredbom `pole` te u ovom slučaju iznose  $0$ ,  $-0,3695+0,8857i$  te  $-0,3695-0,8857i$ . Pol u ishodištu koordinatnog sustava uzrok je nestabilnosti sistema. Ponaša se kao integrator, odnosno uzrokuje da izlaz sistema raste u beskonačnost. Kako bi se sistem stabilizirao te ostvarili postavljene zahtjeve, sistem se regulira Lead regulatorom.

#### 3.4.2.1. *Konstrukcija Lead regulatora primjenom metode lokusa korijena*

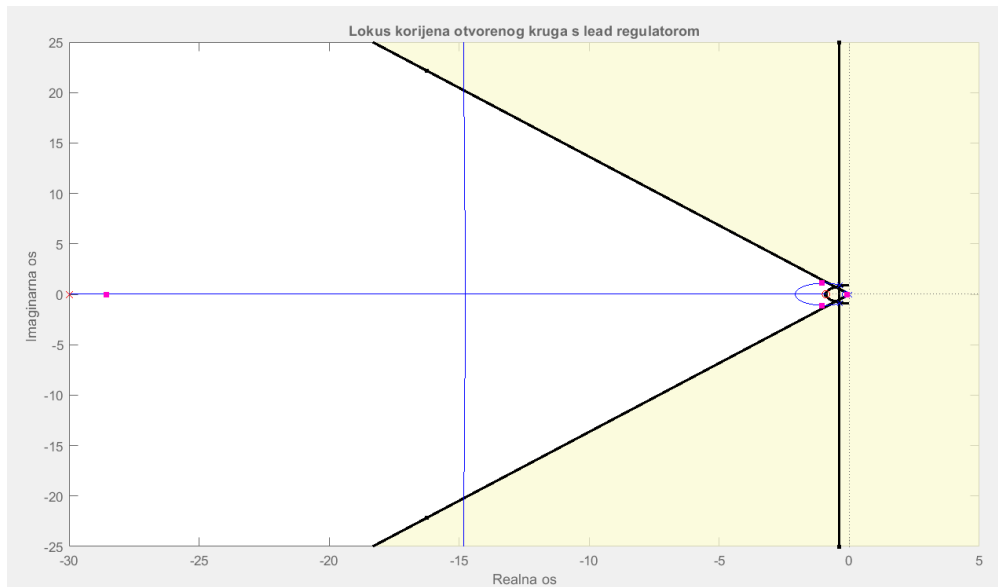
Lokus korijena otvorenog sustava proizlazi iz prijenosne funkcije sistema koja se množi s pojačanjem od 0,2 što predstavlja predkompensator, što je dano kao ulaz u sistem. Iz lokusa korijena otvorenog sustava uvođenjem zadanih kriterija određuju se područja u kompleksnoj ravnini koja su pogodna za smještaj polova zatvorenog kruga. Ta područja pretpostavljaju sistem drugog reda, a kako je dinamički sistem zapravo sistem trećeg reda, ona u ovom slučaju samo služe kao orijentir prilikom odabira pravog oblika regulacije. Ta područja su prikazana nezasjenjenim dijelom na dijagramu lokusa korijena. Vrijeme smirivanja i maksimalni prebačaj se unose direktno, a vrijeme porasta se uvodi preko središnje frekvencije

njihovom vezom pomoću izraza (3.3). Pomoću tog izraza za vrijeme porasta od 2s dobiva se iznos središnje frekvencije od 0,9rad/s.

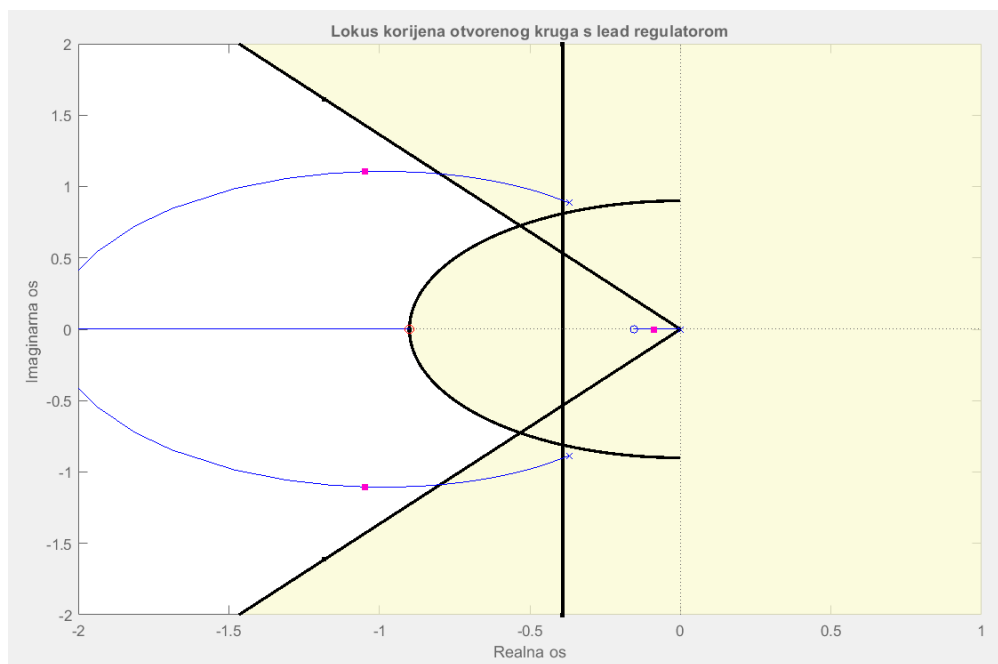


**Slika 3.24. Lokus korijena otvorenog kruga – Avion**

Iz lokusa korijena otvorenog sustava uočava se da ne postoji nijedna kombinacija polova zatvorenog kruga, koja se može postaviti proporcionalnim regulatorom u obliku pojačanja, koja bi zadovoljavala kriterije [Slika 3.24.]. Stoga je sistemu potrebno dodati polove i nule kako bi se lokus korijena sustava preoblikovao i pomaknuo ulijevo u kompleksnoj ravnini. To se postiže Lead regulatorom. Nula Lead regulatora postavlja se na lokaciju -0.9 u kompleksnoj ravnini, odnosno na rub uvjeta za vrijeme porasta prikazanog preko središnje frekvencije. Time se omogućava da povećanjem pojačanja u sustavu, dio lokusa korijena koji prilazi toj nuli otvorenog kruga neće izaći iz željenog područja. Kako pol Lead regulatora mora biti lijevo od nule u kompleksnoj ravnini, on se proizvoljno postavlja na lokaciju -30.



**Slika 3.25.** Lokus korijena otvorenog kruga s Lead regulatorom – Avion



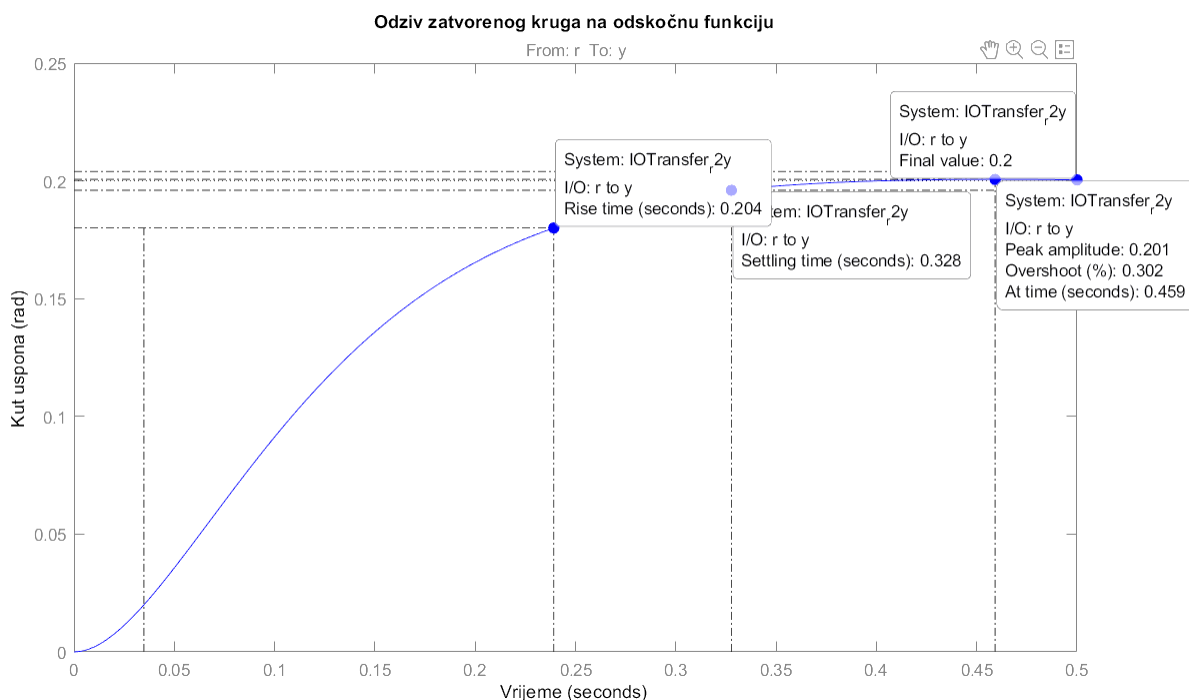
**Slika 3.26.** Lokus korijena otvorenog kruga s Lead regulatorom, uvećan dio blizu ishodišta – Avion

Iz lokusa korijena otvorenog kruga s Lead regulatorom može se uočiti da sada postoji područje lokusa korijena koje je unutar željenog područja [Slika 3.25.]. No samo 3 od 4 granče lokusa korijena su unutar željenog područja [Slika 3.26.]. Iako pol koji pripada toj

branši ima najsporiji odziv i inače bi bio dominantan pol, u ovom slučaju on je poništen nulom zatvorenog kruga koja se nalazi blizu njega. Što se veća vrijednost pojačanja zada sistemu, nula i pol zatvorenog kruga će biti bliži jedno drugom te će imati manji utjecaj na odziv sistema.

Postavljanjem lokusa korijena otvorenog kruga u željeno područje pomoću Lead regulatora pruža se mogućnost odabira pojačanja za koje će zahtjevi biti zadovoljeni. Za pojačanje sustava,  $K$ , uzima se vrijednost 200 jer će time polovi sporijeg odziva, odnosno oni bliže ishodištu, biti poništeni nulama zatvorenog kruga. Druga dva pola koja su više lijevo u kompleksnoj ravnini pojačanjem 200 su postavljena na realnu os čime se ostvaruju kriteriji vremena smirivanja i vremena porasta. Već spomenutim polom blizu ishodišta, koji se ponaša kao integrator, trajno regulacijsko odstupanje sistema također iznosi 0 što je jedan od zahtjeva.

Ostvarenje postavljenih kriterija se može uočiti iz odziva zatvorenog sistema na pobudu u obliku odskočne funkcije [Slika 3.27.].

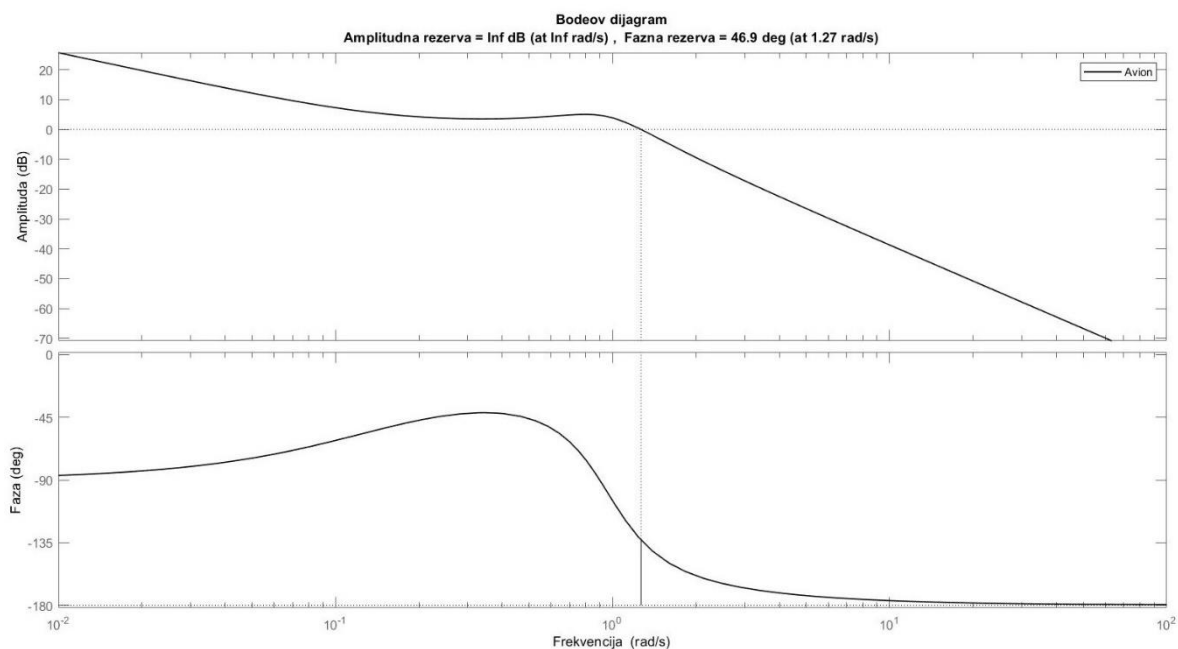


**Slika 3.27. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Avion**



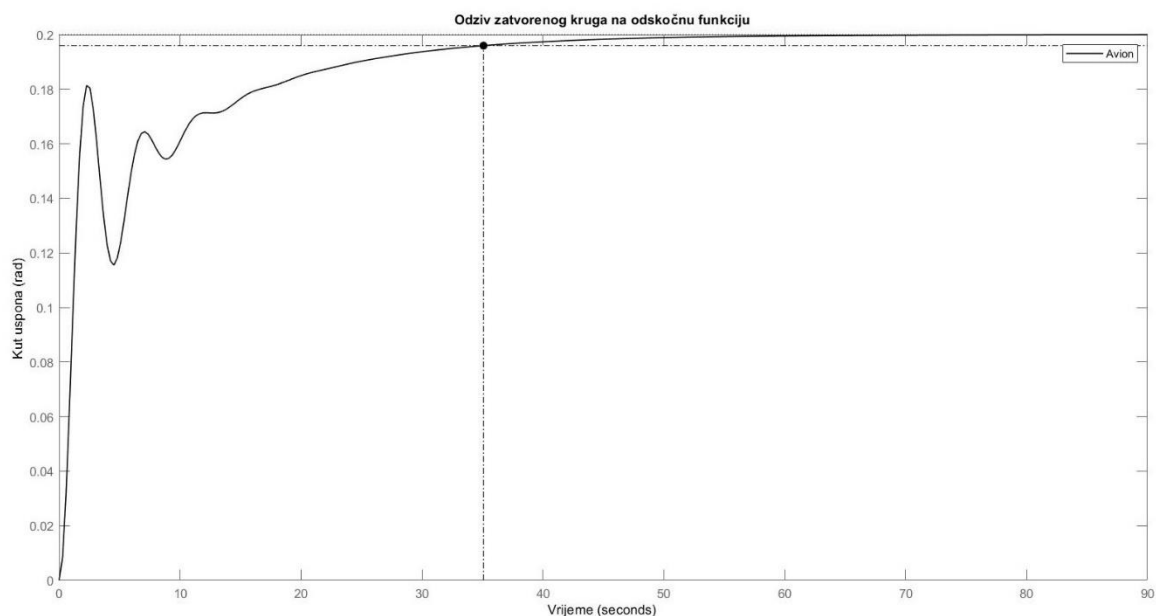
### 3.4.2.2. Konstrukcija Lead regulatora u frekvencijskom području primjenom Bodeovih dijagrama

Iz Bodeovih dijagrama otvorenog kruga mogu se uočiti karakteristike zatvorenog kruga. Prema tome i bez zatvaranja kruga jediničnom povratnom vezom primjenom Bodeovog dijagrama otvorenog kruga se može uočiti da će sistem ipak biti stabilan. Na to ukazuje fazna rezerva sistema koja mora biti pozitivna kako bi sistem bio stabilan. U ovom slučaju iznosi  $46,9^\circ$ . Amplitudna rezerva je u ovom slučaju beskonačna [Slika 3.28.].



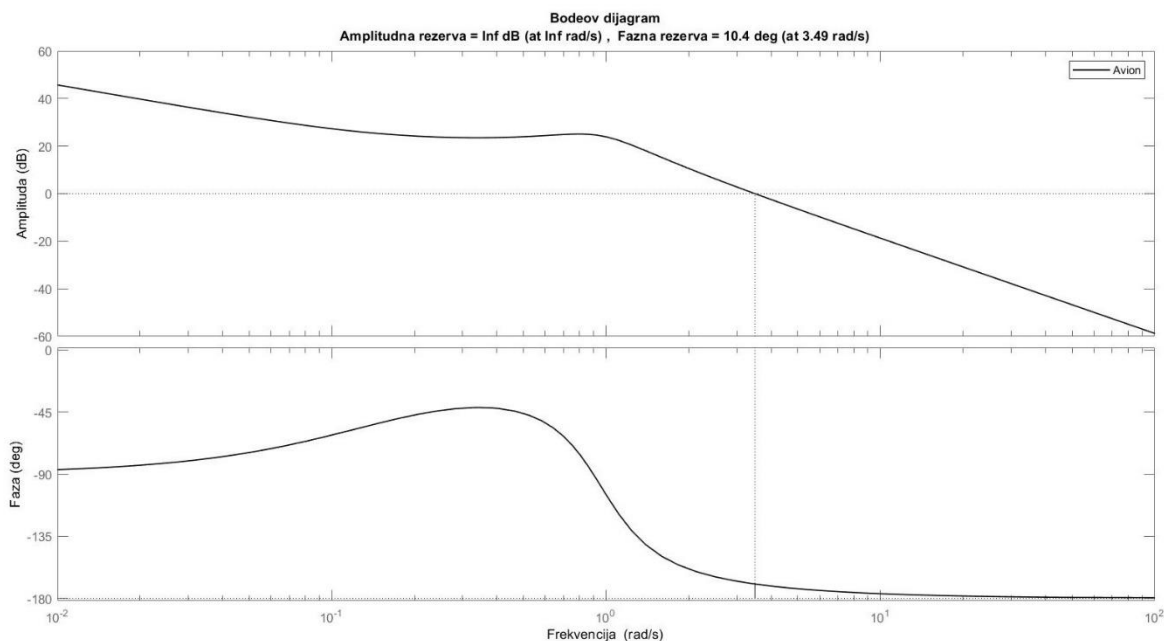
**Slika 3.28. Bodeov dijagram otvorenog kruga – Avion**

Kako bi se ispitalo zadovoljava li sistem postavljene kriterije, sistem se mora zatvoriti jediničnom povratnom vezom i pobuditi odskočnom funkcijom [Slika 3.29.].



**Slika 3.29. Odziv zatvorenog sistema na odskočnu funkciju – Avion**

Iz odziva zatvorenog sistema na odskočnu funkciju uočava se da vrijeme smirivanja od 10s nije zadovoljeno. To se može postići ubrzavanjem odziva sistema samo pojačanjem, odnosno proporcionalnim regulatorom, ali će na taj način vjerojatno biti narušen kriterij maksimalnog prebačaja. Zadovoljenje svih kriterija se postiže regulatorom koji će promijeniti Bodeov dijagram otvorenog kruga. Kod Bodeovog dijagrama frekvencija kritične amplitude je direktno povezana s brzinom odziva zatvorenog sistema, a fazna rezerva je inverzno povezana s maksimalnim prebačajem zatvorenog sistema. Stoga je potrebno konstruirati regulator koji će povećati faznu rezervu sistema i frekvenciju kritične amplitude. To će se najlakše postići Lead regulatorom. Lead regulator dodaje pozitivnu fazu sistemu tako povećavajući faznu rezervu, te prigušenje čime se maksimalni prebačaj sistema smanjuje. Također, Lead regulator povećava pojačanje sistema na visokim frekvencijama tako povećavajući frekvenciju kritične amplitude i brzinu odgovora sistema na pobudu. Na taj način će se smanjiti vrijeme smirivanja sistema. Pojačanje Lead regulatora se postavlja tako da zadovolji zahtjev trajnog regulacijskog odstupanja, ali, kako se u ovom slučaju radi o sistemu prvog reda, zbog nule u ishodištu, trajno regulacijsko odstupanje će neovisno o tom pojačanju biti nula. Pojačanje regulatora će u ovom slučaju biti odabrano na način da dovoljno poveća frekvenciju kritične amplitude te je za njegovu vrijednost odabrana 10. Takvo pojačanje smanjuje faznu rezervu sistema na otprilike  $10,4^\circ$ , što će se nadoknaditi Lead regulatorom [Slika 3.30.].



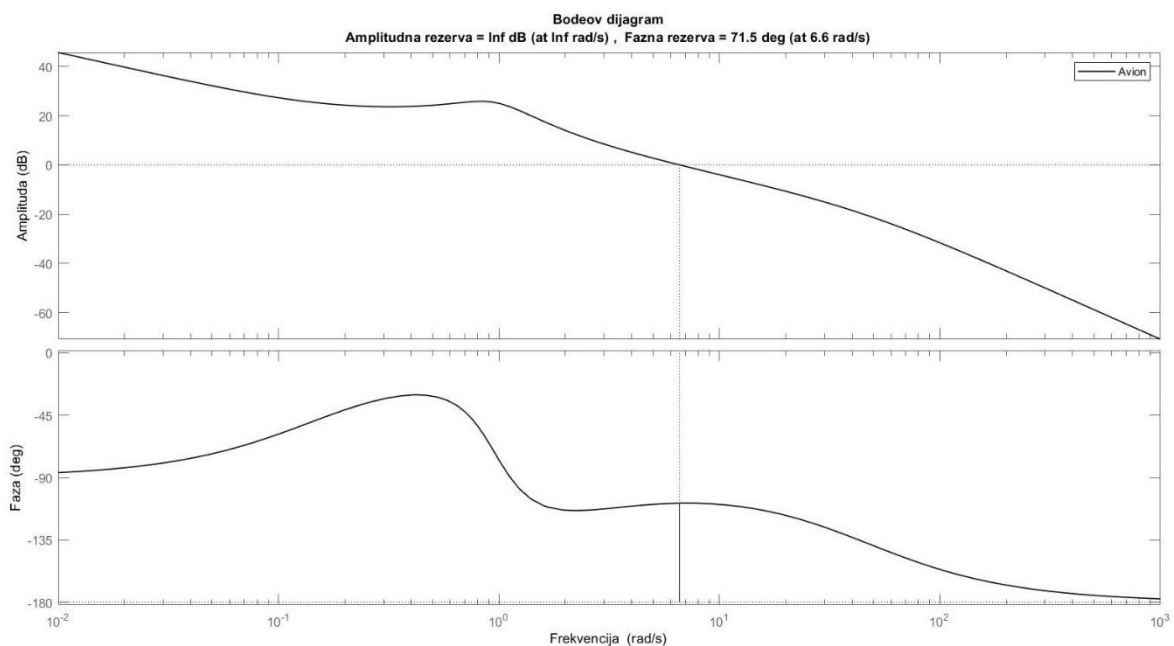
**Slika 3.30. Bodeov dijagram otvorenog kruga s proporcionalnim regulatorom pojačanja 10 – Avion**

Prilikom konstrukcije Lead regulatora potrebno je odrediti vrijednosti parametara  $a$  i  $T$ . Parametar  $a$  predstavlja vrijednost omjera nule i pola regulatora. Što je veći njihov omjer, veći je skok u fazi. Vrijednost faze, odnosno parametra  $a$  određuje se pomoću stupnja prigušenja koji za maksimalni prebačaj u iznosu 10% iznosi 0,6, što se dobiva izrazom (3.4). Poveznica između stupnja prigušenja i fazne rezerve je izraz (3.11) koji vrijedi za sisteme koji nisu u kanonskoj formi drugog reda. Iz tog izraza proizlazi da fazna rezerva sistema iznosi  $60^\circ$ , stoga je potrebno dodati otprilike  $50^\circ$  faze, no sigurnosti radi sistemu će biti dodano otprilike  $67^\circ$  faze zbog činjenice da će se frekvencija kritične amplitude pomaknuti na frekvenciju s malo više kašnjenja u fazi. Iz toga proizlazi da će parametar  $a$  Lead regulatora iznositi 0,04 preko izraza (2.6). Pomoću izraza (3.14) se dobije da će za parametar  $a$  u iznosu 0,04 povećanje u amplitudi iznositi 13,98 dB.

$$20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \quad (3.14)$$

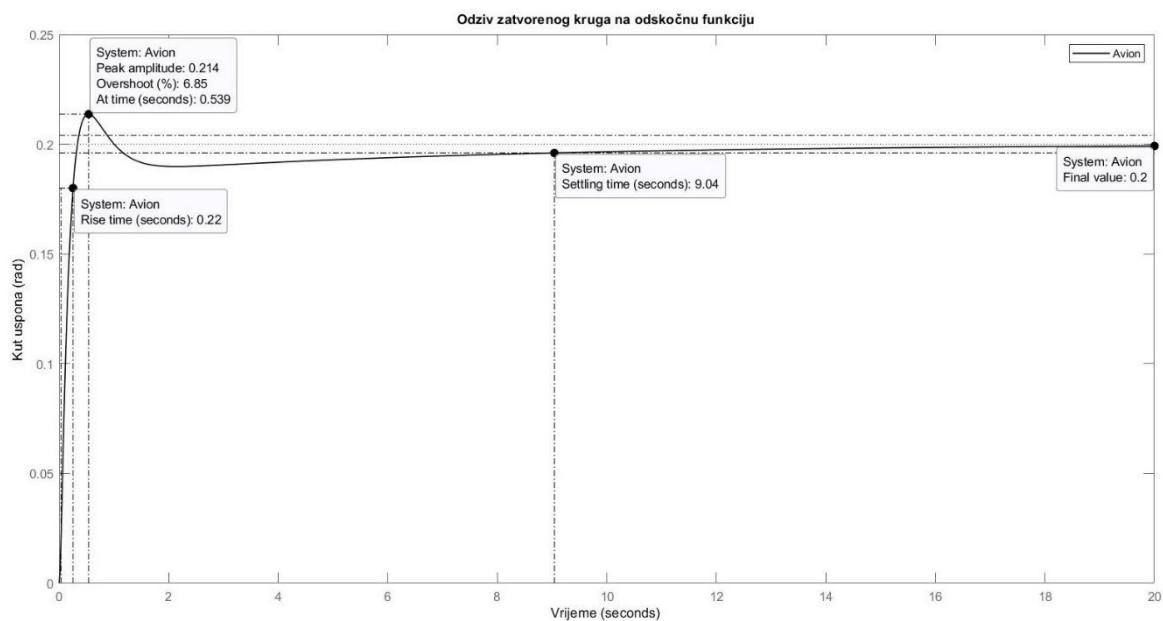
Iz Bodeovog dijagrama otvorenog kruga s proporcionalnim regulatorom može se uočiti da sustav ima -13,98 dB amplitude pri frekvenciji 9,09rad/s. To znači da će za povećanje u amplitudi od -13,98dB frekvencija od 9,09rad/s sada postati nova frekvencija kritične amplitude. Preko izraza (3.15) se izračunava vrijednost parametra  $T$  za novu vrijednost frekvencije kritične amplitude te parametra  $a$  koji iznosi 0,55.

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} \quad (3.15)$$



**Slika 3.31. Bodeov dijagram otvorenog kruga s Lead regulatorom – Avion**

Na Bodeovom dijagramu iznad se može uočiti povećanje fazne rezerve sustava Lead regulatorom [Slika 3.31.].



**Slika 3.32. Odziv zatvorenog kruga na odskočnu funkciju – Avion**

Iz odziva zatvorenog kruga na odskočnu funkciju pojačanja 0,2 može se uočiti kako sistem zadovoljava postavljene kriterije [Slika 3.32.].

#### 4. ZAKLJUČAK

Lead – lag regulator je često korišten tip regulatora u automatskoj regulaciji, no ne toliko koliko naprimjer PID regulator, usprkos vrlo jednostavnom postizanju temeljnih zahtjeva na dinamički sustav. U sustavu se rijetko javlja samostalno, najčešće je kombiniran s proporcionalnim regulatorom. Regulator je vrlo jednostavne konstrukcije, odnosno sastoji se samo od dvije nule i dva pola čiji je međusobni položaj strogo definiran, što je uzrok vrlo jednostavnog namještanja i promjene parametara regulatora u svrhu ostvarenja postavljenih zahtjeva. Jednostavnost konstruiranja se ogleda i u činjenici što se javlja isključivo u formi prijenosne funkcije.

Iz danih primjera da se uočiti kako je primjenom Lead regulatora vrlo lako ostvariti stabilnost sistema, dok se Lag regulatorom osigurava visoka točnost dinamičkih sustava što su dva temeljna zahtjeva koje sustav mora ispunjavati. Sam Lead – lag regulator nije ništa drugo no serijski spoj tih dvaju regulatora koji zapravo predstavljaju dva potpuno suprotna djelovanja na dinamički sustav. Njihovom kombinacijom se stoga postiže ono što svaki od ta dva regulatora zasebno ne bi mogao (prednosti jednog su nedostaci drugog i obrnuto). U toj činjenici je upravo svrha primjene Lead – lag regulatora.

Također, iz primjera primjene Lead – Lag regulatora da se uočiti kako se taj tip regulatora može vrlo jednostavno primjeniti na dinamički sustav u programskom paketu MATLAB (korištenjem vrlo jednostavnih naredbi) te se na taj način i bez velikog poznavanja teorije automatske regulacije može odabrati regulator sa zadovoljavajućim parametrima, najčešće nakon samo nekoliko iteracija.

## **LITERATURA**

- [1] J. Petrić, Automatska regulacija: Uvod u analizu i sintezu, Zagreb 2012.
- [2] [http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Extras\\_Leadlag](http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Extras_Leadlag)