

# Modeliranje i konstrukcija letjelice s četiri rotora

---

Širjan, Jelena

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:100478>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-18**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Jelena Širjan**

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:

Jelena Širjan

Zagreb, 2019.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se, prvenstveno, svom mentoru dr.sc. Josipu Kasaću na strpljenju, susretljivosti, pozitivnom stavu i pruženoj pomoći oko ovog rada. Zahvaljujem se, također, i kolegama Matiji Krznaru i Denisu Kotarskom što su odvojili dio svoga vremena i podijelili korisne savjete.

Posebnu zahvalnost želim izraziti svome prijatelju Leonu Malnaru koji je uvijek bio spreman pomoći oko tehničke podrške vezane uz printer, ali i bušenja cijevi od ugljičnih vlakana. Zahvaljujem se kolegi Tinu Mihaljevskom Bolteku što je pristao sudjelovati u ovom zajedničkom projektu gdje se on bavio elektroničkim dijelom i regulacijom u nadi da letjelica uskoro doživi svoj prvi stabilni let. Također, veliku zahvalu dugujem svojoj obitelji na strpljenju te svim bliskim prijateljima na neizmornoj podršci tijekom realizacije ovog rad.

Jelena Širjan



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

|  |        |
|--|--------|
| Sveučilište u Zagrebu<br>Fakultet strojarstva i brodogradnje |        |
| Datum  | Prilog |
| Klasa:   |        |
| Ur.broj:   |        |

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **JELENA ŠIRJAN** Mat. br.: 0035202057

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **MODELIRANJE I KONSTRUKCIJA LETJELICE S ČETIRI ROTORA**

Naslov rada na engleskom jeziku: **MODELLING AND CONSTRUCTION OF QUADCOPTER**

Opis zadatka:

Brzi razvoj aditivnih tehnologije omogućuje sve jeftiniju konstrukciju malih bespilotnih letjelica. Bespilotne letjelice s četiri rotora modeliraju se dinamičkim jednadžbama krutog tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja i matricom alokacije koja omogućuje projekciju sila potisaka rotora na sile i momente krutog tijela. Osnovni zadatak ovog rada je modeliranje i konstrukcija letjelice s četiri rotora te simulacija leta na temelju identificiranih parametara letjelice.

U radu je potrebno:

- Konstruirati model letjelice primjenom programskog paketa SolidWorks ili Catia.
- Na temelju konstrukcijskog modela identificirati momente inercije i masu letjelice.
- Primjenom 3D printera izgraditi fizički model letjelice.
- Projektirati pogonski sustav letjelice.
- Implementirati kinematički i dinamički model letjelice u Matlabu.
- Provesti simulacije leta letjelice koristeći identificirane parametre letjelice.

Zadatak zadan:  
29. studenog 2018.

Rok predaje rada:  
**1. rok:** 22. veljače 2019.  
**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2019.  
**3. rok:** 20. rujna 2019.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 25.2. - 1.3. 2019.  
**2. rok (izvanredni):** 2.7. 2019.  
**3. rok:** 23.9. - 27.9. 2019.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Branko Bauer

## SADRŽAJ

|  |    |
|--|----|
| 1. UVOD .....                                      | 1  |
| 2. KONSTRUKCIJA LETJELICE S ČETIRI ROTORA .....    | 5  |
| 2.1. Uvod u tijek konstruiranja .....              | 5  |
| 2.2. Okvir .....                                   | 9  |
| 2.2.1. Izgled/dizajn okvira .....                  | 9  |
| 2.2.2. Dimenzije .....                             | 16 |
| 2.2.3. Materijal .....                             | 21 |
| 2.2.4. Masa, centar mase, momenti inercije .....   | 25 |
| 2.3. Pogonski sustav .....                         | 28 |
| 2.3.1. Motori .....                                | 29 |
| 2.3.2. Propeleri .....                             | 32 |
| 2.3.3. ESC .....                                   | 33 |
| 2.3.4. Baterija .....                              | 35 |
| 2.4. Zapovjedni i upravljački sustav .....         | 38 |
| 2.4.1. Daljinski upravljač i prijemnik .....       | 38 |
| 2.4.2. Kontroler leta .....                        | 39 |
| 2.4.3. Akcelerometar/ žiroskop/ magnetometar ..... | 40 |
| 2.4.4. PWM/servo pločica .....                     | 40 |
| 3. MATEMATIČKI MODEL .....                         | 42 |
| 3.1. Kinematika .....                              | 43 |
| 3.1.1. Referentni okvir .....                      | 43 |
| 3.1.2. Kinematički model .....                     | 43 |
| 3.2. Dinamika .....                                | 48 |
| 3.3. Simuliranje u MATLAB-u .....                  | 56 |
| 4. ZAKLJUČAK .....                                 | 63 |
| 5. LITERATURA .....                                | 64 |

## POPIS SLIKA

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Slika 1.  | Multitrotori.....  | 1  |
| Slika 2.  | Giroplaneom Breguet-Richet br. 1 [1] .....                             | 2  |
| Slika 3.  | Omnichen 2 [1] .....   | 2  |
| Slika 4.  | Nixie .....  | 3  |
| Slika 5.  | Primjeri najnovijih realizacija.....                                   | 5  |
| Slika 6.  | Prusa i3 MK3S .....  | 6  |
| Slika 7.  | PrusaSlicer .....  | 7  |
| Slika 8.  | Sučelje s odabirom materijala, ispune, potporne strukture.....         | 8  |
| Slika 9.  | FDM postupak aditivne proizvodnje .....                                | 8  |
| Slika 10. | H okvir .....  | 9  |
| Slika 11. | HX okvir .....   | 10 |
| Slika 12. | X („pravi/istinski“) okvir .....                                       | 10 |
| Slika 13. | Opruženi X okvir.....  | 11 |
| Slika 14. | Kvadratni okvir .....  | 12 |
| Slika 15. | Plus okvir .....   | 12 |
| Slika 16. | Cijev od ugljičnih vlakana .....                                       | 13 |
| Slika 17. | Spoj gornjeg i donjeg adaptera za motor .....                          | 14 |
| Slika 18. | Spoj gornje i donje središnje ploče .....                              | 14 |
| Slika 19. | Postavljanje matica za uprintavanje .....                              | 15 |
| Slika 20. | Veličina okvira .....  | 16 |
| Slika 21. | PETG filament .....  | 23 |
| Slika 22. | Priprema površine platforme za 3D ispis .....                          | 23 |
| Slika 23. | Odvajanje od platforme; prejako prijanjanje .....                      | 24 |
| Slika 24. | Slabo lijepljenje prvog sloja .....                                    | 24 |
| Slika 25. | Ukupna masa letjelice i momenti inercije .....                         | 26 |
| Slika 26. | Momenti inercije, $g \cdot mm^2$ .....                                 | 26 |
| Slika 27. | Pozicija centra mase .....   | 27 |
| Slika 28. | Struktura pogonskog sustava .....                                      | 28 |
| Slika 29. | Brushed i brushless motor .....  | 29 |
| Slika 30. | Rotor i stator kod brushless (lijevo) i brushed (desno) motora.....    | 29 |
| Slika 31. | SunnySky x2216, kV880.....   | 30 |
| Slika 32. | Značenje oznake motora x2216 .....                                     | 30 |
| Slika 33. | Propeler 1147 .....  | 32 |
| Slika 34. | Elektronički kontroler brzine [4].....                                 | 33 |
| Slika 35. | Spajanje ESC-a .....   | 34 |
| Slika 36. | Baterija Gens Ace 5000 mAh, 50 C.....                                  | 36 |
| Slika 37. | Preporuka proizvođača motora SunnySky.....                             | 36 |
| Slika 38. | Daljinski odašiljač i prijemnik [5].....                               | 38 |
| Slika 39. | Raspberry Pi 3 [6] .....   | 39 |
| Slika 40. | Akcelerometar/žiroskop/magnetometar, LSM9DSI [7] .....                 | 40 |
| Slika 41. | PWM/servo pločica [8].....   | 40 |
| Slika 42. | Inicijalni referentni okvir i referentni okvir tijela .....            | 44 |
| Slika 43. | Odazivi potpuno lineariziranog modela prikazanog jednačbama (4.3)..... | 60 |
| Slika 44. | Odazivi nelinearnog modela prikazanog jednačbama (4.2).....            | 61 |

---

Slika 45. Odzivi nelinearnog modela prikazanog jednačbama (3.20), u slučaju odstupanja parametara nominalnog upravljanja od realnih parametara sustava .....62



## **POPIS TABLICA**

|   |    |
|---|----|
| Tablica 1. Gabaritne mjere dijelova [mm] .....                  | 17 |
| Tablica 2. Vrste materijala prikladne za izradu letjelice ..... | 21 |
| Tablica 3. Mase dijelova .....                                  | 25 |
| Tablica 4. Usporedba baterija.....                              | 37 |

## POPIS OZNAKA

| Oznaka           | Jedinica           | Opis  |
|------------------|--------------------|---|
| $b$              | –                  | Konstanta proporcionalnosti sile potiska i kutne brzine propelera                       |
| $d$              | –                  | Konstanta proporcionalnosti momenta motora i kutne brzine                               |
| $C_B(V_B)$       | –                  | Matrica Coriolis-centripetalnih sila u odnosu na referentni okvir tijela                |
| $F^B$            | N                  | Vektor sile u odnosu na referentni okvir tijela   |
| $F^E$            | N                  | Vektor sile u inercijskom okviru  |
| $F_T$            | N                  | Vertikalna sila potiska letjelice   |
| $F_g^B$          | N                  | Vektor gravitacijske sile s obzirom na koordinatni sustav tijela                        |
| $g$              | $m \cdot s^{-2}$   | Gravitacijska konstanta   |
| $G_B$            | –                  | Vektor gravitacijske sile u odnosu na referentni okvir tijela                           |
| $I$              | $kg \cdot m^2$     | Matrica momenta inercije  |
| $l$              | m                  | Duljina kraka letjelice   |
| $m$              | kg                 | Masa letjelice  |
| $p$              | $rad \cdot s^{-1}$ | Kutna brzina oko osi $x_B$ u odnosu na referentni okvir tijela                          |
| $q$              | $rad \cdot s^{-1}$ | Kutna brzina oko osi $y_B$ u odnosu na referentni okvir tijela                          |
| $r$              | $rad \cdot s^{-1}$ | Kutna brzina oko osi $z_B$ u odnosu na referentni okvir tijela                          |
| $R(\theta, y_1)$ | –                  | Rotacijska matrica oko $y_1$ osi  |
| $R(\psi, Z)$     | –                  | Rotacijska matrica oko $z_E$ osi  |
| $R(\phi, x_2)$   | –                  | Rotacijska matrica oko $x_2$ osi  |
| $t$              | s                  | Vrijeme   |
| $u$              | $m \cdot s^{-1}$   | Linearna brzina uzduž osi $x_B$ u odnosu na referentni okvir tijela                     |
| $U_B$            | –                  | Vektor upravljanja u odnosu na referentni okvir tijela                                  |
| $v$              | $m \cdot s^{-1}$   | Linearna brzina uzduž osi $y_B$ u odnosu na referentni okvir tijela                     |
| $V^B$            | $m \cdot s^{-1}$   | Vektor linearnog položaja u odnosu na referentni okvir tijela                           |
| $\dot{V}^B$      | $m \cdot s^{-2}$   | Vektor linearne brzine u odnosu na referentni okvir tijela                              |
| $V^E$            | $m \cdot s^{-1}$   | Vektor linearnog položaja u odnosu na inercijski okvir                                  |
| $w$              | $m \cdot s^{-1}$   | Linearna brzina uzduž osi $z_B$ u odnosu na referentni okvir tijela                     |
| $x, y, z$        | m                  | Osi Kartezijevog pravokutnog koordinatnog sustava                                       |
| $X, Y, Z$        | m                  | Linearni položaj tijela u smjeru $x_E, y_E, z_E$ s obzirom na koordinatni sustav Zemlje |

|                   |                    |   |
|-------------------|--------------------|---|
| $\Gamma^E$        | m                  | Vektor linearnog položaja u odnosu na inercijski okvir        |
| $\dot{\Gamma}^E$  | $m \cdot s^{-1}$   | Vektor linearne brzine u odnosu na inercijski okvir           |
| $\ddot{\Gamma}^E$ | $m \cdot s^{-2}$   | Vektor linearnog ubrzanja u odnosu na inercijski okvir        |
| $\theta$          | rad                | Kutna pozicija oko osi $y_1$ (poniranje) u inercijskom okviru |
| $\dot{\theta}$    | $rad \cdot s^{-1}$ | Kutno ubrzanje oko osi $y_1$ u inercijskom okviru             |
| $\ddot{\theta}$   | $rad \cdot s^{-2}$ | Kutno ubrzanje oko osi $y_1$ u inercijskom okviru             |
| $\Theta^E$        | rad                | Vektor kutne pozicije u odnosu na inercijski okvir            |
| $\dot{\Theta}^E$  | $rad \cdot s^{-1}$ | Vektor kutne brzine u odnosu na inercijski okvir              |
| $\ddot{\Theta}^E$ | $rad \cdot s^{-2}$ | Vektor kutnog ubrzanja u odnosu na inercijski okvir           |
| $\tau^B$          | $N \cdot m$        | Vektor momenta u odnosu na referentni okvir tijela            |
| $\tau^E$          | $N \cdot m$        | Vektor momenta u odnosu na inercijski okvir                   |
| $\tau_x$          | $N \cdot m^{-1}$   | Moment sile oko osi $x$ referentnog okvira tijela             |
| $\tau_y$          | $N \cdot m^{-1}$   | Moment sile oko osi $y$ referentnog okvira tijela             |
| $\tau_z$          | $N \cdot m^{-1}$   | Moment sile oko osi $z$ referentnog okvira tijela             |
| $\phi$            | rad                | Kutna pozicija oko osi $x_2$ (valjanje) u inercijskom okviru  |
| $\dot{\phi}$      | $rad \cdot s^{-1}$ | Kutna brzina oko osi $x_2$ u inercijskom obliku               |
| $\ddot{\phi}$     | $rad \cdot s^{-2}$ | Kutno ubrzanje oko osi $x_2$ u inercijskom okviru             |
| $\psi$            | rad                | Kutna pozicija oko osi $z_E$ (skretanje) u inercijskom okviru |
| $\dot{\psi}$      | $rad \cdot s^{-1}$ | Kutna brzina oko osi $z_E$ u inercijskom okviru               |
| $\ddot{\psi}$     | $rad \cdot s^{-2}$ | Kutno ubrzanje oko osi $z_E$ u inercijskom okviru             |
| $\omega$          | $rad \cdot s^{-1}$ | Kutna brzina vrtnje   |
| $\omega^B$        | $rad \cdot s^{-1}$ | Vektor kutne brzine u odnosu na referentni okvir tijela       |
| $\dot{\omega}^B$  | $rad \cdot s^{-2}$ | Vektor kutnog ubrzanja u odnosu na referentni okvir tijela    |

## **SAŽETAK**

Ovaj rad bavi se modeliranjem konstrukcije, projektiranjem pogonskog sustava te simulacijom leta letjelice s četiri rotora. Razmotreni su najvažniji aspekti za izgradnju fizičkog modela, a neki od njih su: varijacije u konfiguraciji i izgledu okvira, prilagodba dimenzija letjelice ponajviše zbog odabira i smještaja elektroničkih uređaja, korištenje optimalnog materijala za izradu, kombiniranje različitih komponenti pogonskog sustava tako da su međusobno kompatibilne. Prvotno je modeliran cjelokupni CAD model letjelice, a zatim su, pomoću 3D tehnologije, izrađeni dijelovi za sklapanje konstrukcije. U radu je prikazana problematika odabira komponenti pogonskog sustava s ciljem postizanja zadovoljavajućih rezultata u učinkovitosti i nosivosti ovisno o željenoj namjeni i performansama letjelice. Na kraju je izveden kinematički i dinamički model letjelice sa šest stupnjeva slobode gibanja. U programskom paketu MATLAB implementiran je kinematički i dinamički model letjelice. Provedene su simulacije nominalnog upravljanja za zadanu trajektoriju letjelice.

Ključne riječi: kvadkopter, aditivna tehnologija, kinematika, dinamika

## **SUMMARY**

Scope of this thesis is modeling of structural parts, design of the propulsion system and simulation of the quadcopter flight. The most important aspects for designing a quadcopter model are considered, as: variations in the configuration and the frame layout, adjusting of the quadcopter dimensions primarily due to selection and positioning of electronic devices, the use of optimal designing material, combining various components of the propulsion system for achieving mutual compatibility. With the knowledge acquired during study, CAD model of the quadcopter was initially modeled, and then, using additive technology, parts were printed for completing the quadcopter assembly. In this thesis problem of selecting the propulsion system components with the aim of achieving adequate results in efficiency and load capacity depending on the desired purpose and performance of the quadcopter is presented. Finally, kinematic and dynamic models of the quadcopter with six degrees of freedom were derived. Kinematic and dynamic model of the quadcopter was implemented in the MATLAB software package. Nominal control simulations were performed for the given quadcopter trajectory.

Key words: quadcopter, additive technology, kinematics, dynamics

## 1. UVOD

Letjelica s četiri rotora poznata je i pod nazivom kvadkopter. Četiri rotora usmjerena su prema gore i postavljeni u četvrtastu formaciju s jednakom udaljenosti od središta. Dva rotora okreću se u smjeru kazaljke na satu, dok se druga dva okreću u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Letjelice s četiri rotora su aerodinamički nestabilne i zahtijevaju od kontrolera leta da pretvara ulazne naredbe u naredbe koje mijenjaju okretaje propelera kako bi proizveli željeno kretanje. Takva kontrola nad njima postaje izazov za dizajnere i istraživače, a izazov predstavlja i velika nelinearna dinamika, modeliranje te dizajn letjelice. Kvadkopter možemo također klasificirati kao bespilotnu letjelicu (UAV). Karakteristika je ta što nema ljudskog pilota, a umjesto njega, letjelicom upravlja osoba na zemlji pomoću upravljača ili je autonomno kontrolirana putem programa.



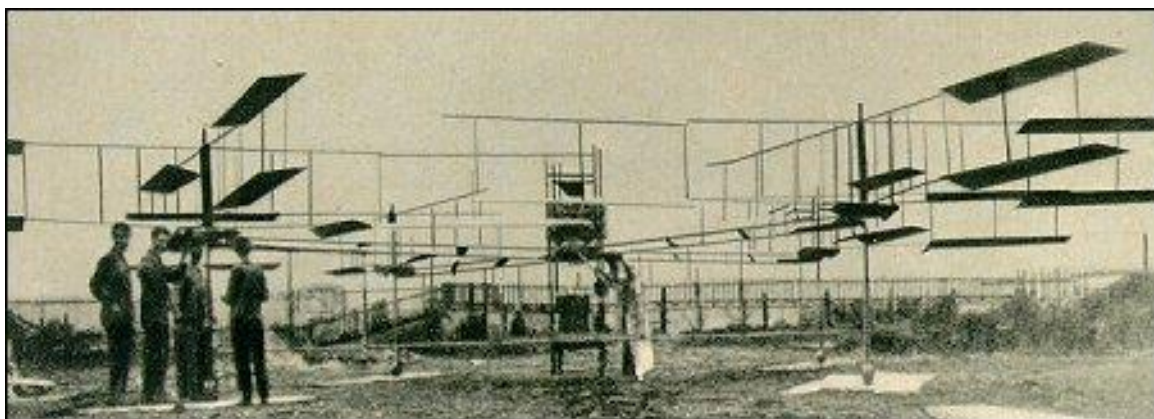
**Slika 1. Multirotori**

Multirotor je općenitiji pojam koji obuhvaća ne samo kvadkoptere, već i trikoptere, hekskoptere, oktorotore i sve ostale oblike letjelice s rotacijskim krilima s više od dva rotora.

Nadalje, postavlja se pitanje zašto su tek sad ovakve letjelice doživjele veliki uspon u proizvodnji i razvoju. Općenito je povijest letjelica s četiri rotora podijeljena u 5 perioda: razdoblje mirovanja (prije 1990.), razdoblje rasta (1990. – 2005.), razvoj (2005. – 2010.), razdoblje aktivnosti (2010. – 2013.) i razdoblje procvata (2013. – ) [1].

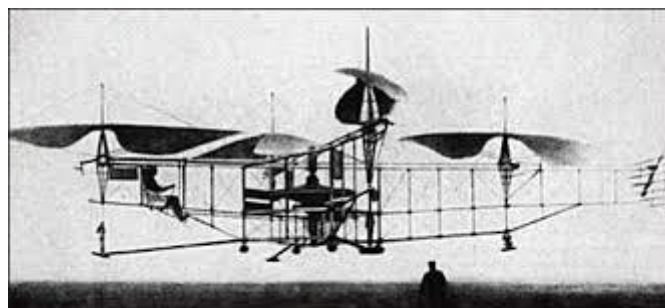
Prvi dizajneri eksperimentirali su s kvadkopterima jer su izgledali kao dobra alternativa jednom rasipnom, složenom i neučinkovitom glavnom rotoru s repnim rotorom za protutežu zakretnom momentu. Stražnji rotor na dizajnu jednog helikoptera troši između 10 i 15% snage motora, ali

ne stvara potisak. Najraniji primjerci kvadkoptera su često imali motor koji sjedi negdje u središnjem dijelu trupa, okrećući 4 rotora preko remena ili osovina.



**Slika 2. Giroplaneom Breguet-Richet br. 1 [1]**

Već 1907. u Francuskoj, pod vodstvom Charlesa Richeta, braća Breguet izgradila su letjelicu s četiri rotora za prijevoz ljudi i nazvali ga Giroplaneom Breguet-Richet br. 1. To je najraniji pokušaj izgradnje multirotora, iako je prvi let prošao neuspješno.

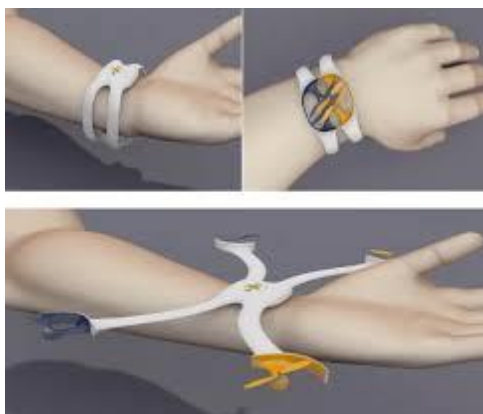


**Slika 3. Omnichen 2 [1]**

Inženjer Etienne Oemichen je eksperimentirao s dizajnom rotirajućeg krila 1920. Nakon nekih izračuna i rekonstrukcije, njegov drugi zrakoplov, Omnichen br. 2 uspostavio je svjetski rekord za helikoptere 1923. godine, ostajući u zraku do četrnaest minuta. Imao je četiri rotora i osam propelera, a sve je pokretao jedan motor.

Curtiss-Wright proizveo je VZ-7 1958. za američku vojsku. Bio je kontroliran promjenom potiska svakog od četiri propelera. Program VZ-7 otkazan je sredinom 1960-ih, kada se shvatilo

da posao za koji su izrađeni mogu jednostavnije i efikasnije obavljati konvencionalni helikopteri. Sve do 1990. nije došlo do značajnog razvoja takvih letjelica.



**Slika 4. Nixie**

Pojavom elektromotora, posebno mikroelektronike i mikromehaničkih uređaja, prije nekoliko godina postalo je moguće graditi pouzdane i učinkovite multirotoare. Do danas je moguće naći lepezu različitih ideja i varijacija na temu, od trkaćih kvadkoptera, kvadkoptera s tiltanim rotorima, minijaturnih koji se mogu nositi na zapešću (Nixie, slika 4), gigantskih taxi kvadkoptera, itd. Područje moguće primjene vrlo je široko, a neke od primjena su sljedeće:

- poljoprivreda - analiza potrebe za količinu gnojiva, detekcija usjeva i lociranje polja, otkrivanje bolesti;
- urbani – orto snimke, upravljanje zelenim površinama;
- okoliš – otkrivanje flore, brojanje/otkrivanje životinja;
- prevencija požara – detekcija šumskih požara, mapiranje, procjena širenja plamena;
- nadzor – infrastrukture, skladište(zalihe), cestovni promet/granice, vjetrenjače, brane, komunikacijske mreže;
- zdravstvo/ hitni slučajevi – prijevoz hitne opreme, prijevoz lijekova, pristup teško dostupnom području;
- umjetnički / mediji – profesionalne snimke iz „ptičje“ perspektive za razna događanja, televizija/kino, marketing;
- transport – dostava paketa, prijevoz stvari.



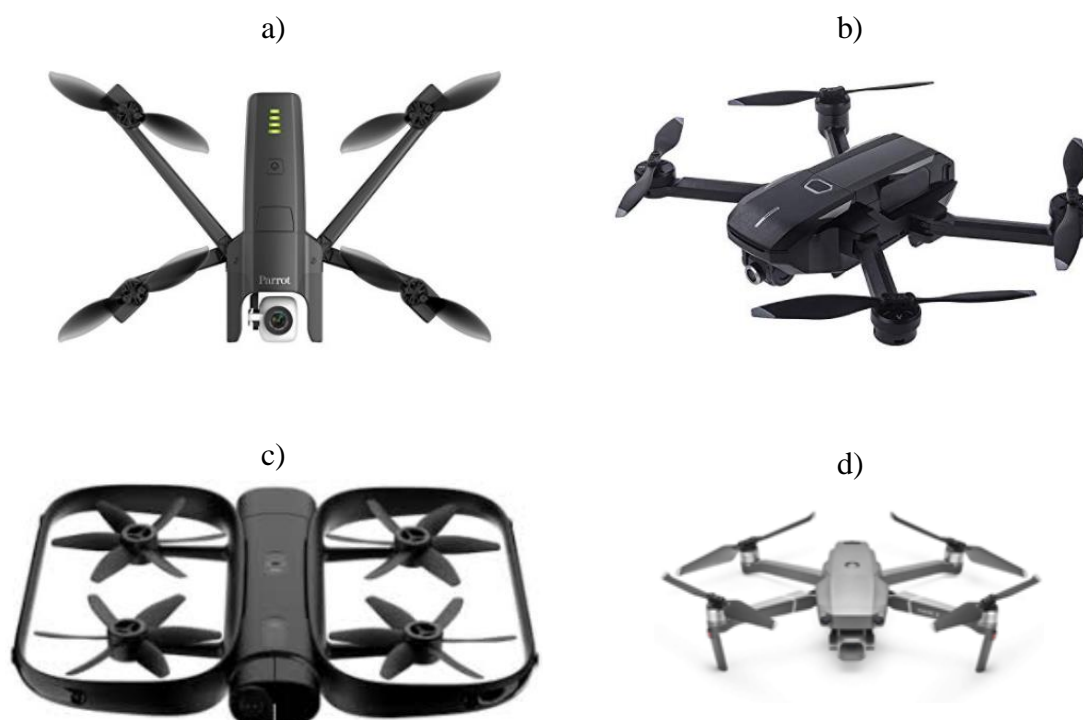
U današnje vrijeme, rastuća je potražnja za letjelicama s četiri rotora, pa se tako može vidjeti znatan razvoj u tom području, od ručno upravljanih do autonomnih kvadkoptera s minimalnom ljudskom intervencijom. Pretpostavlja se da ćemo za koju godinu biti svjedoci „kvadkopter neba“ gdje će biti uobičajeno da se na takav način dostavljaju/prenose stvari, pretražuju teško dostupna područja u razne svrhe, primjenjuju u agronomskim i vojnim sferama.

Svrha ovog rada je predstaviti osnove modeliranja kvadkoptera i kontrolu kao osnovu za daljnja istraživanja i razvoj na tom području. Ovaj rad ima dva cilja. Prvi cilj je konstruirati model i fizički ga izraditi primjenom 3D tehnologije. Ispravni dizajn vozila i odabir međusobno kompatibilnih pogonskih komponenata važan je dio koji olakšava posao za razradu upravljačkog sustava što utječe na ispravno funkcioniranje letjelice u cjelini. Drugi je cilj proučiti matematički model te prikazati kinematiku i dinamiku letjelice s četiri rotora pomoću programskog paketa MATLAB. Izazov u kontroli je taj što ovaj sustav ima šest stupnjeva slobode, a presudni su za stabilnost manevra.

## 2. KONSTRUKCIJA LETJELICE S ČETIRI ROTORA

### 2.1. Uvod u tijek konstruiranja

U ovom će poglavlju biti detaljnije objašnjen svaki pojedini dio modela kvadrotora da bi se osigurao cjelokupni kontekst i bolje razumijevanje varijacije mogućih rješenja te valjani odabir komponenti.

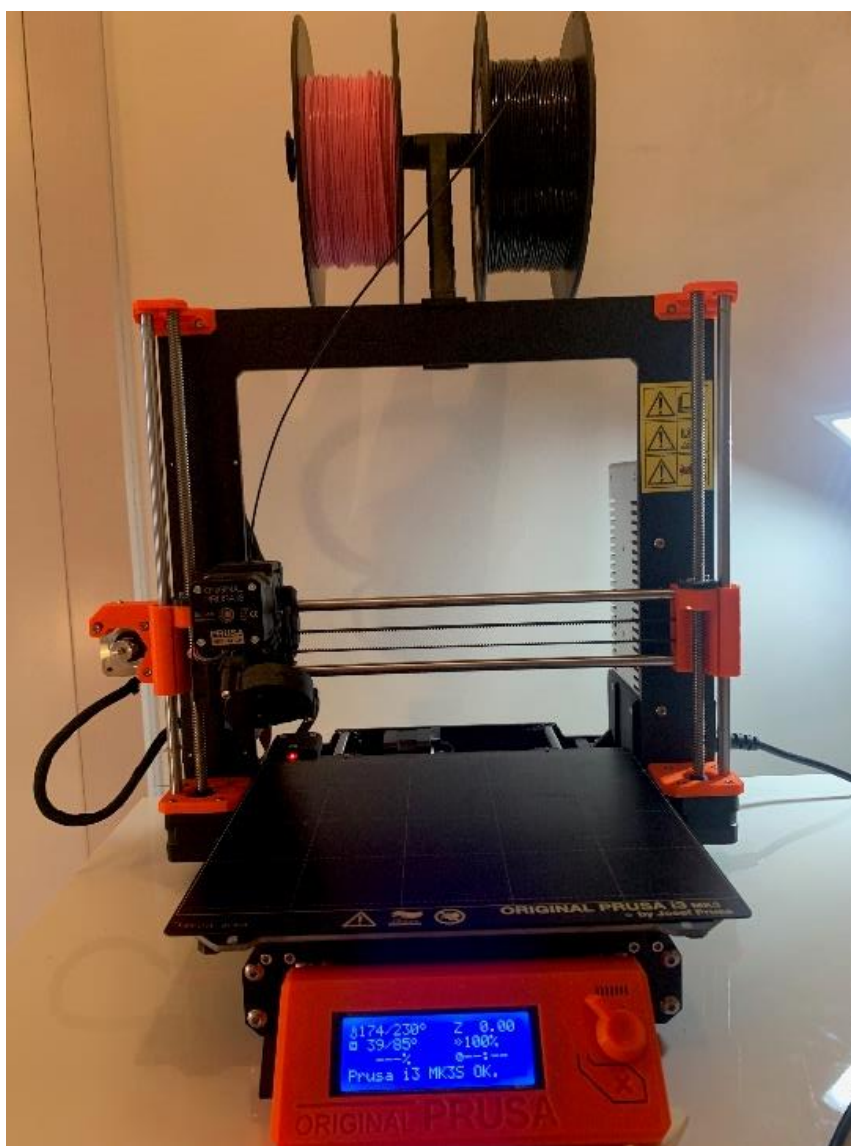


Slika 5. Primjeri najnovijih realizacija

Osim sličnosti četiri propelera kod svih kvadkoptera, postoji značajna pluralnost izvedbi koja je jasno prikazana na slici 4. Najnoviji i trenutno klasificirani kao najbolji modeli su: a) Parrot Anafi, b) Yuneec Mantis Q, c) Skydio R, d) DJI Mavis 2 Pro [2]. Iz te različitosti konfiguracija vidi se da ne postoji striktno najbolji dizajn te da se razvoj konstrukcije ne odvija jednosmjerno. Svaka komponenta konstrukcije nije neovisna varijabla, već međusobno zavise jedna o drugoj. Dizajn i primjena kvadrotorskog sustava postavlja nekoliko izazova, među kojima su ograničeni teret i vrijeme leta, brza i nestabilna dinamika, uska integracija upravljačke elektronike i senzora u kućište. Sustav se može podijeliti na nekoliko osnovnih područja poput: okvira, pogonskog sustava, zapovjednog i upravljačkog sustava. Okvir podrazumijeva izgled

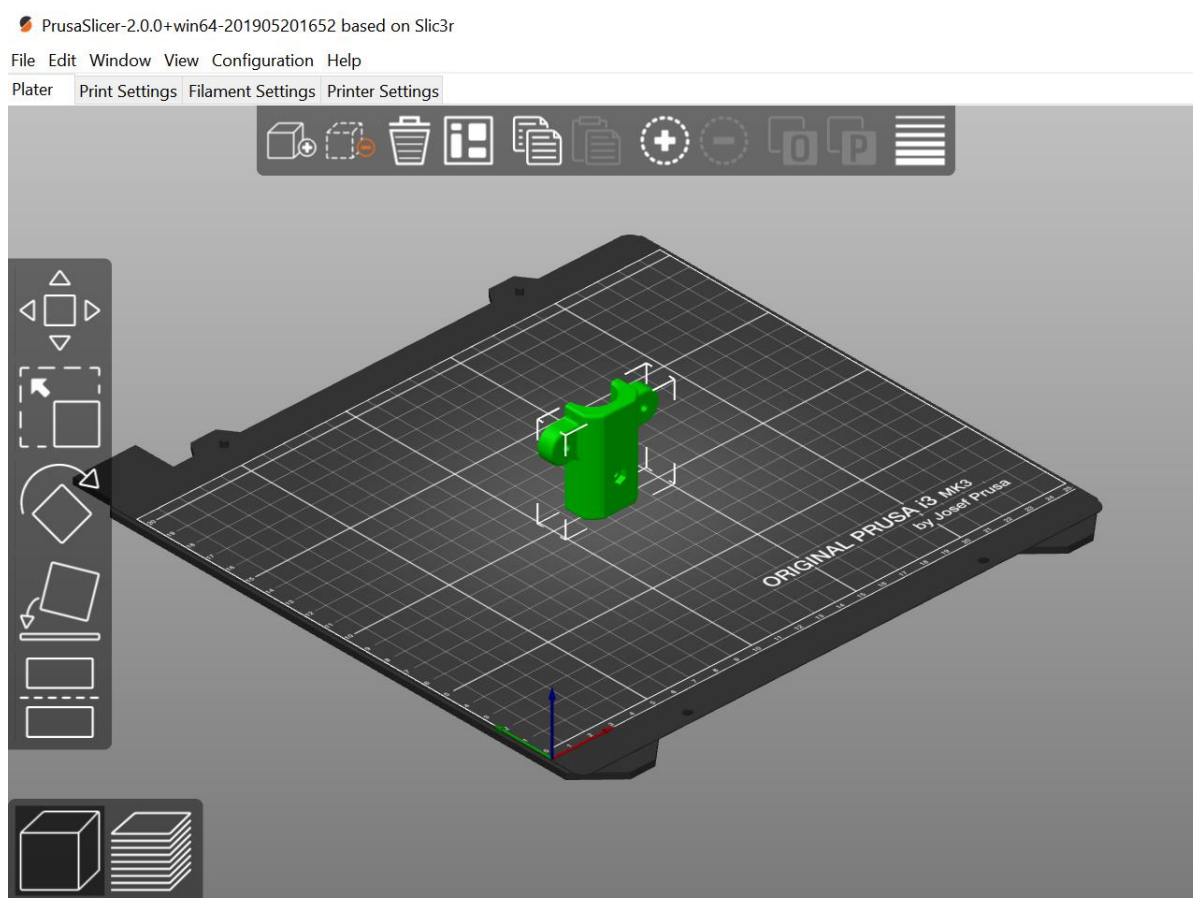
trupa njegove dimenzije, gradivni materijal, montažu, cijenu, čvrstoću i težinu, pogonski sustav uključuje propelere, motore, ESC-ove te bateriju, a zapovjedni i upravljački sustav nadzire pogonski sustav za postizanje određenog zadatka.

Svi elementi konstrukcije prvotno su modelirani u programskom paketu SolidWorks.



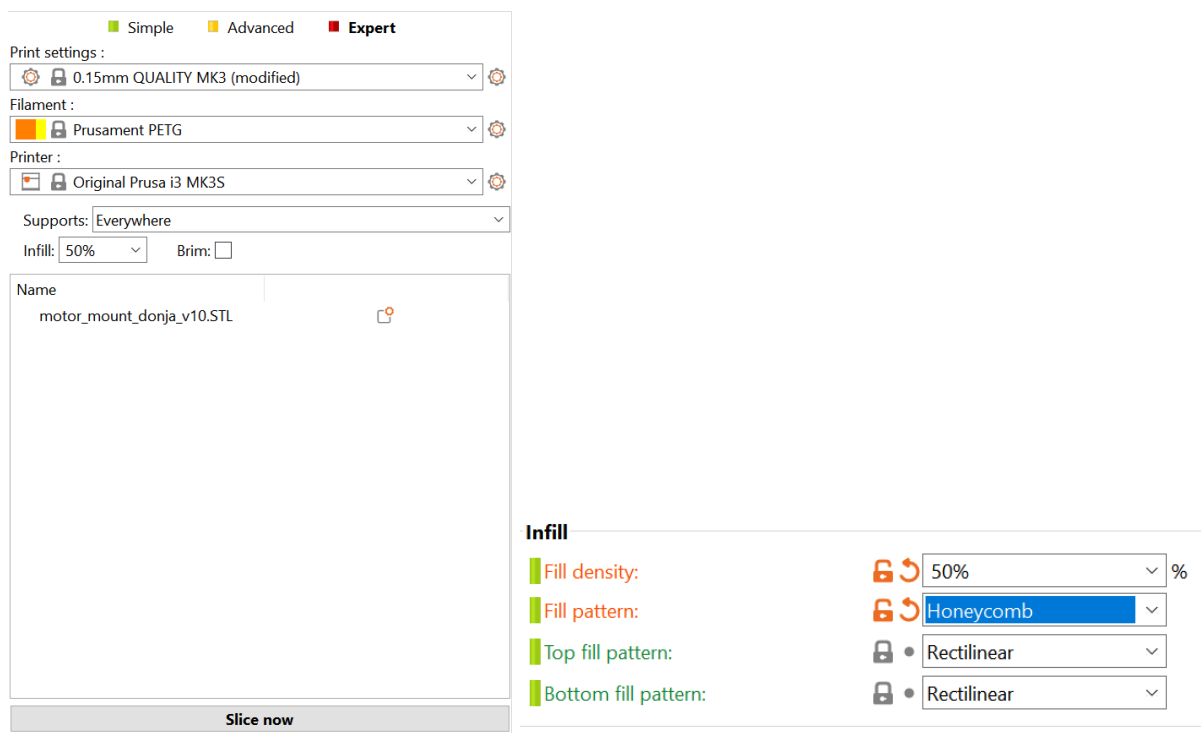
**Slika 6. Prusa i3 MK3S**

Fizička izrada dijelova okvira izvedena je 3D tehnologijom, korištenjem 3D printera proizvođača Prusa, model i3 MK3S. Da bi dijelovi mogli biti pušteni u izradu, potrebno je prethodno provesti par nužnih koraka.



Slika 7. PrusaSlicer

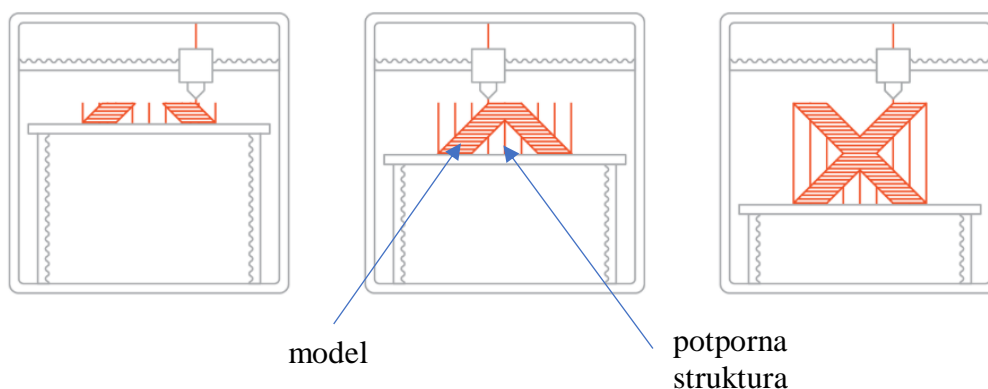
CAD modele potrebno je najprije spremi u STL formatu, a potom ih učitati u softver za rezanje. Za potrebe ovog rada korišten je program PrusaSlicer. Inače, softveri za rezanje modela na slojeve stvaraju G-kod koji printeru pruža informacije o korištenom materijalu, količini ispune, potpornoj strukturi ako je potrebna, itd. U tome programu potrebno je obratiti pažnju o položaju i orijentaciji objekta jer kako se objekti poslože na virtualnoj platformi tako će biti printani i na pravoj. Za dijelove objekta gdje nagibi premašuju  $45^\circ$ , potrebno je postaviti potpurnu strukturu (eng. *support*) da ne bi došlo do neželjenog modificiranja objekta.



**Slika 8. Sučelje s odabirom materijala, ispune, potporne strukture**

Za ispis svih dijelova odabrani su parametri prikazani na slici 8. Odabrana ispuna napravljena je u obliku saća iz razloga što konstrukciju čini čvršćom i dobro podnosi jača naprezanja.

Korišteni printer koristi FDM (Fused Deposition Modelling) postupak aditivne proizvodnje.



**Slika 9. FDM postupak aditivne proizvodnje**

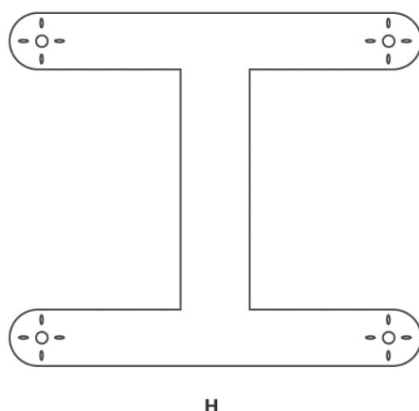
Postupak se temelji na istiskivanju grijanog plastičnog filamenata preko vrha mlaznice. Mlaznica istiskuje filament i tako se na platformi načinom sloj po sloj grade zadani objekti.

Korišteni materijali, filamenti, termoplastični su polimeri i dolaze u obliku niti. Postupak je jednostavan, dovoljno pouzdan i pristupačan korisniku. FDM postupak učinio je da aditivna tehnologija proizvodnje bude široko korisna u istraživačkim i razvojnim sektorima za poboljšanje procesa (jeftina izrada prototipova), ali se može koristiti i za izradu gotovih proizvoda. Složene geometrije i šupljine koje bi inače bile problematične za napraviti, ovim postupkom su relativno lako izvedive [3].

## 2.2. Okvir

### 2.2.1. Izgled/dizajn okvira

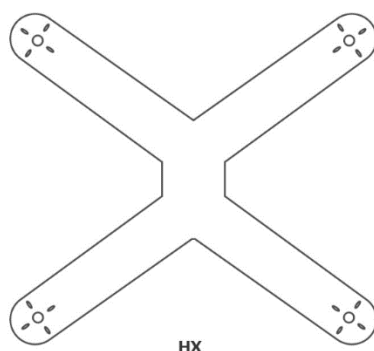
Neke od najvažnijih karakteristika ovise o kozmetičkom dizajnu okvira, koji ne samo da utječe na izgled letjelice, već igra ulogu u pružanju specifičnih aerodinamičkih karakteristika. Okviri moraju biti snažni i kruti, a istovremeno dovoljno lagani da se s lagano kreću zrakom. Neke od konfiguracija okvira koje su razmatrane: H, HX, X, raspruženi X, kvadratni i plus okvir.



Slika 10. H okvir

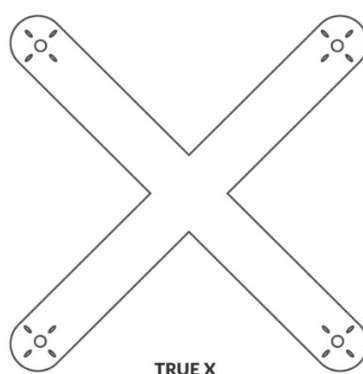
Kod pravilnog se H okvira, kao što i samo ime sugerira, ruke spajaju na prednjem i stražnjem dijelu tijela te tvore oblik slova H. Ovakav okvir pruža najviše prostora i lakše ga je graditi. Za to je zaslužno dugo i prostorno tijelo gdje se može smjestiti elektronika i više dodatne opreme te pri tome ostaje čisti i ne nakrčen izgled. Iz tih razloga su H okviri jedni od omiljenih izbora pri gradnji kvadkoptera. Težina je rasprostranjenija, a što se okretnosti tiče, slabija je od X okvira zbog većeg momenta inercije na osi nagiba. Međutim, ako je cilj glatko slobodno letenje

tada to nije prepreka. Takvi kvadrokopteri su među najtežima, imaju kratke ruke motora i problema sa torzijskom krutošću, ali su zato optimizirani za ugradnju kamere na prednjem kraju cjelokupne konstrukcije.



**Slika 11. HX okvir**

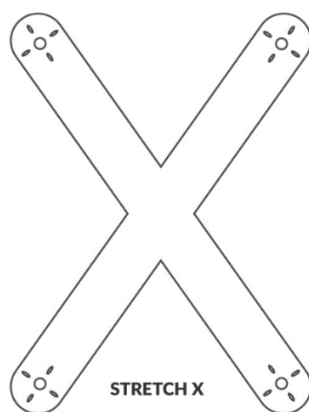
Hibridni H okvir ima ruke u formaciji X, a tijelo dugačko u obliku H. Postavljanje ruku pod 60 stupnjeva omogućava se skraćivanje tijela za 60%. Time je dobiven okvir 60% lakši od H okvira, pod pretpostavkom da su oba izrađena od istih materijala. Torzijska krutost se također linearno povećava kako se duljina smanjuje. Tijelo koje je 60% kraće, 60% je tvrđe.



**Slika 12. X („pravi/istinski“) okvir**

Na X okviru ruke su jednake širine i duljine te tvore X oblik. Tijelo se skraćuje što je više moguće kako bi se postigla centralizacija mase. Ono rezultira manjom inercijom i krajnje brzim karakteristikama leta u odnosu na H okvire što je idealna karakteristika kod kvadrokopterskih utrka. Okviri u stilu X su također lakši zbog smanjenja materijala. Ono što zadaje probleme je

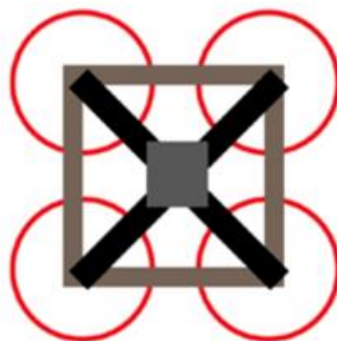
to što se dijelovi moraju slagati u sredini zbog manjeg kućišta, a to bi mogao biti malo zahtjevniji zadatak ako je predviđena opsežna oprema. Zbog toga što ima manje prostora treba i bolje planirati, pa se tako na tržištu mogu naći prilagođenije komponente poput 4in1 ESC-a što zamjenjuje 4 zasebna ESC-a i pritom se uštedi na masi. No, takva komponenta je skuplja, a i zamjena jednog znači zamjena svih četiri. U ovom radu to nije korišteno iz razloga jednostavnije zamjene ako se što pokvari, a na hrvatskom tržištu se lakše može naći pojedinačna varijanta. X okvir je više aerodinamičniji model jer ima manje materijala u sredini okvira, a obično se baterija montira ispod samog okvira što je slučaj i u ovom radu. Rizik postavljanja baterije ispod okvira je taj što može lakše doći do oštećenja prilikom nepravilnog slijetanja.



**Slika 13. Opruženi X okvir**

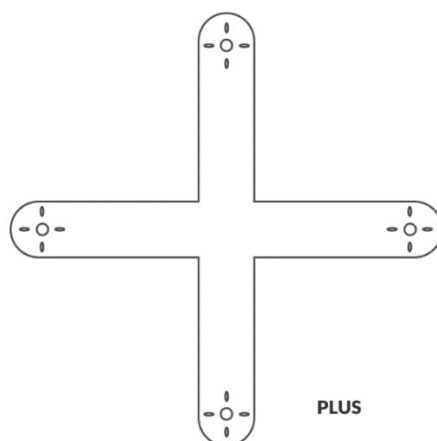
Opruženi X je okvir vrlo sličan X okviru, no, ruke su malo više ispružene. Formiraju obrise više elipsi nego krugu. Prednost je veća stabilnost koja se postiže boljim rasporedom motora. Ovakvi X okviri zahtijevaju malo drugačiji pristup prilikom podešavanja PID regulatora, a sve uslijed promjene geometrije okvira. Čini se da su rastezljivi X okviri precizniji u nagibu letenja te osjetljiviji / brži pri valjanju od standardnog X okvira. Oni obično teže nešto više zbog povećanja materijala koji se koriste u dužim rukama.





**Slika 14. Kvadratni okvir**

Kvadratni okvir može se temeljiti na okviru H ili X s dodatnim materijalom s vanjske strane koji spaja nosače motora. To u osnovi stvara čvršći okvir za koji je manje vjerojatno da će se ruke slomiti. S druge strane, porast materijala blokira protok zraka, povećava težinu i otpor zraka.



**Slika 15. Plus okvir**

Specifičnost ovog okvira je ta što je po izgledu identičan X okviru, no razlika je u tome što leti unaprijed poput znaka „+“. Uz to što se razlikuje u načinu leta od X okvira, regulacija za ovakav tip je jednostavnija. Jedan od glavnih nedostataka je taj što ako je okvir letjelice predviđen za montiranje kamere, prednji motor i propeler će upadati, tijekom leta, u vidno polje kamere.

Izgled okvira u sklopu ovog rada modeliran je u konfiguraciji plus, „+“, zbog lakšeg upravljanja, odnosno lakše dinamike letjelice. CAD modeli su izrađeni pomoću programskog

paketa SolidWorks. Tamo su modelirani pojedini dijelovi cjelokupne letjelice s četiri rotora, što uključuje:

- gornji adapter za motor
- donji pričvrtni dio adaptera za motor
- gornja ploča kućišta
- donja ploča kućišta
- poklopac/nosač
- držač baterije
- adapter za noge
- T-razdjelnik nogu



**Slika 16. Cijev od ugljičnih vlakana**

Ruke su jedini dio koji nije napravljen kao model u SW-u i naknadno izrađen aditivnom tehnologijom. Za ruke su odabrane četiri cijevi, promjera 18 mm, izrađene od ugljičnih vlakana. Cijevi su visokokvalitetne, vrlo lagane i čvrste, prikladne za primjene u kojima cijevi moraju imati visoke krutosti i male težine. Općenito, ova svojstva učinila su ugljična vlakna vrlo popularnima u zrakoplovstvu, građevinarstvu, vojsci i moto sportovima. Primjerice, puno su korištena kod izgradnje novog modela formule naziva Vulpes RT06E izrađene od strane FSB Racing Team-a. Ugljična vlakna su relativno skupa u usporedbi sa sličnim vlaknima, poput staklenih ili plastičnih vlakana. Problem kod nabavke cijevi je taj što ih je preporučljivo naručiti

rezane jer je postupak rezanja takvih vlakana istih dimenzija i ravnog reza, pogotovo cjevastog oblika, dosta zahtjevan.

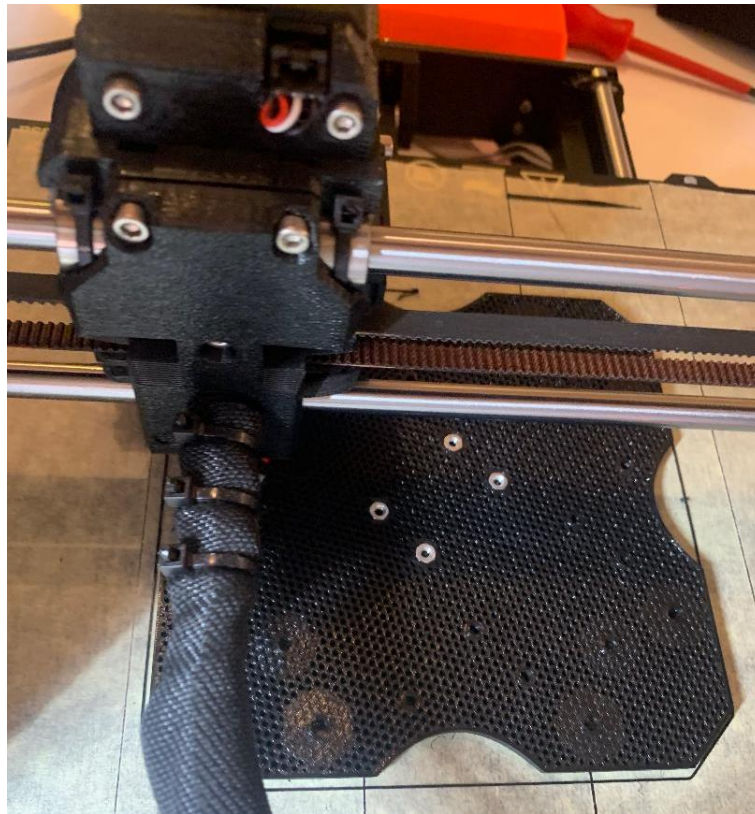
Gornji i donji adapteri za motor su napravljeni tako da su steznim spojem spojeni za cijev, a sigurnost od zakretanja pruža prolazni vijak. Na gornji adapter se vijcima pričvršćuje motor.



**Slika 17. Spoj gornjeg i donjeg adaptera za motor**



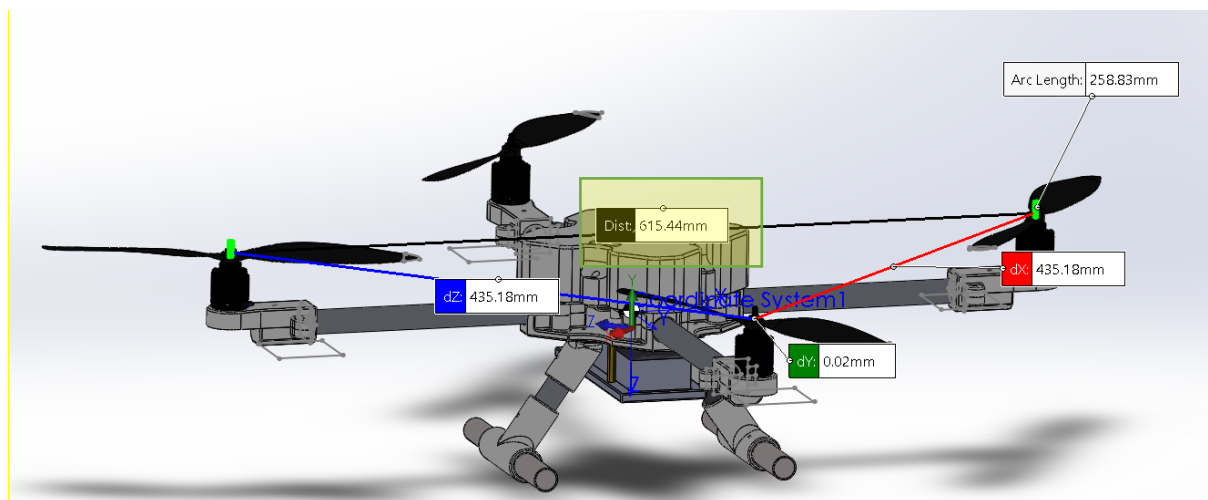
**Slika 18. Spoj gornje i donje središnje ploče**



**Slika 19. Postavljanje matice za uprintavanje**

Na donjoj ploči kućišta bilo je potrebno smjestiti pločicu sa akcelerometrom, žiroskopom i magnetometrom te ostaviti dovoljno prostora za provući ožičenje. Gornja i donja ploča su spojene sa cijevi, također, steznim spojem i prolaznim vijkom. Gornja ploča napravljena je tako da se može smjestiti kontroler leta, prijemnik signala za daljinsko upravljanje te PWM/servo pločice. Matice za pričvršćivanje pločica su uprintane u svrhu dobivanja čiste plohe.

### 2.2.2. Dimenzije



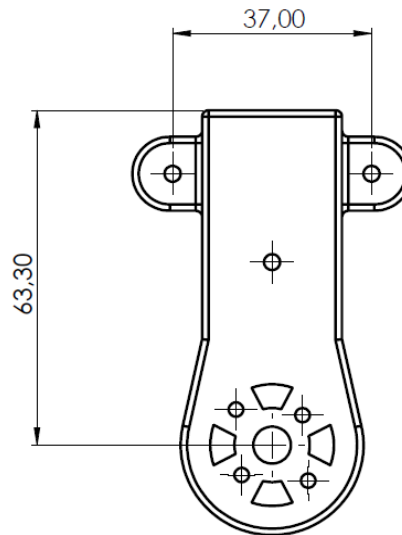
Slika 20. Veličina okvira

Veličina okvira, tzv. međuosovinsko rastojanje (eng. *wheelbase*), dijagonalna je udaljenost između dijagonalno montiranih motora u milimetrima. Postoji tendencija da okviri budu što manji, kako bi se težina što više smanjila, a da su motori što bliže središtu. Motori su montirani na samom kraju krakova. Što se više udaljuju od središta, to je veći moment inercije koji stvara tendenciju odupiranja kutnom ubrzanju i usporavanju. Nadalje, što je veći okvir, to je veći otpor zraka prilikom leta unaprijed. Na većim okvirima je i lakše raditi jer je na raspolaganju više prostora za ugradnju sve potrebne elektronike i željenih dodataka. To čini prostor i planiranje ožičenja lakšim i urednijim, a samim time je omogućena uporaba većih komponenti koje se lakše leme.

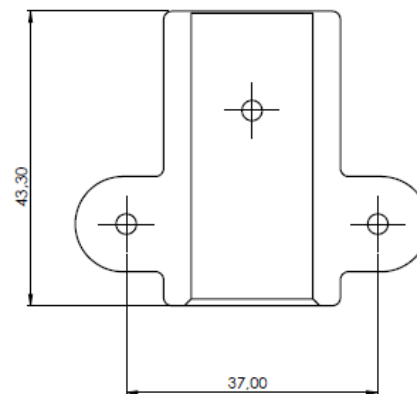
U slijedećoj tablici prikazane su gabaritne mjere svih dijelova izražene u milimetrima.

**Tablica 1. Gabaritne mjere dijelova [mm]**

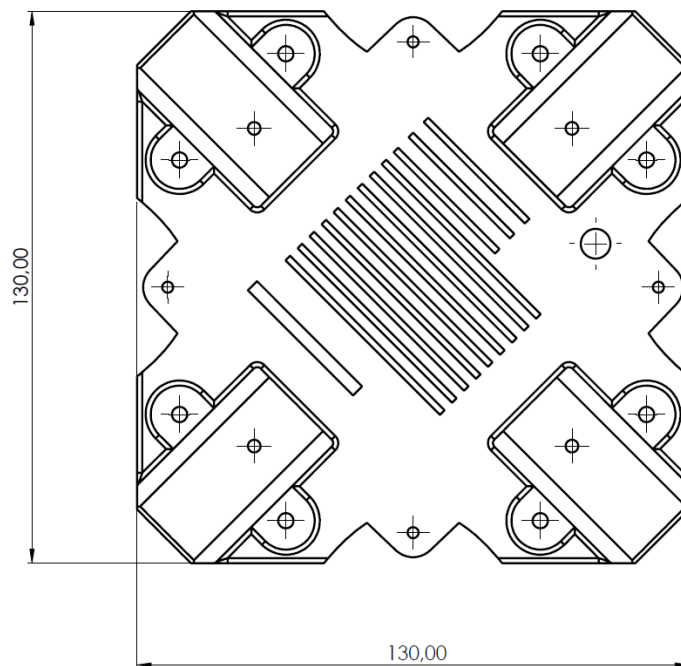
1. Gornji adapter za motor



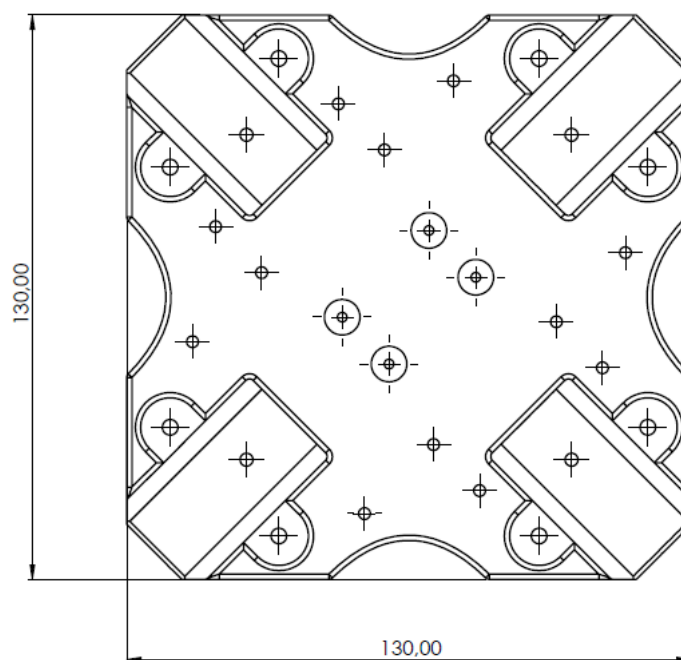
2. Donji pričvršni dio adaptera za motor



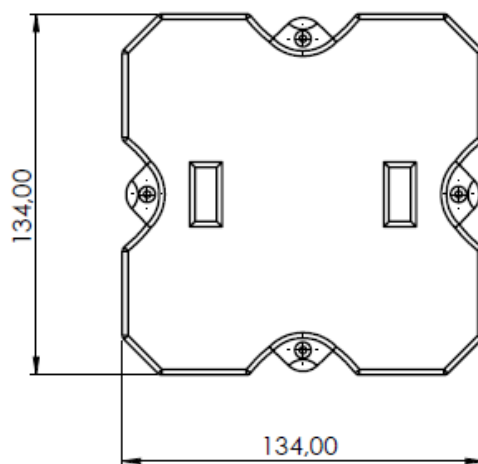
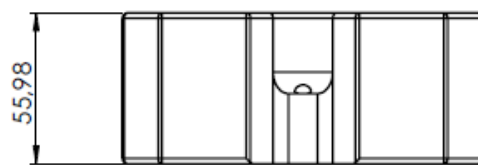
3. Gornja ploča kućišta



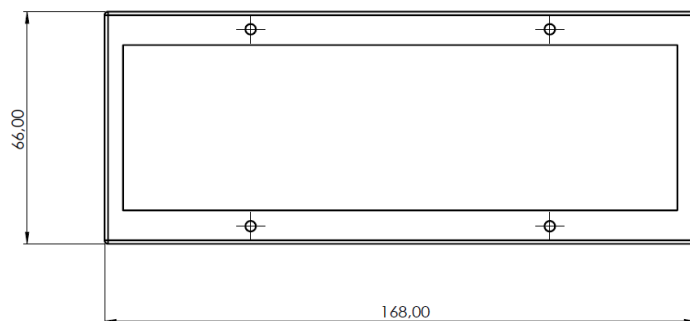
4. Donja ploča kućišta



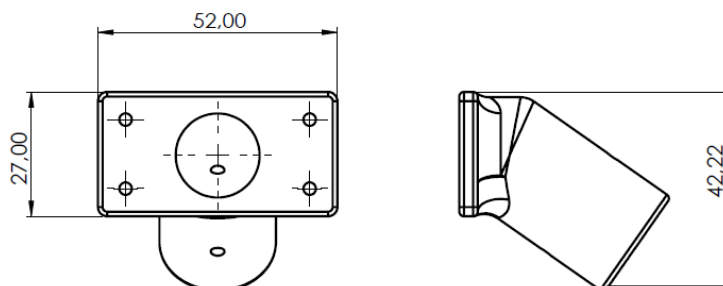
5. Poklopac



6. Držać baterije

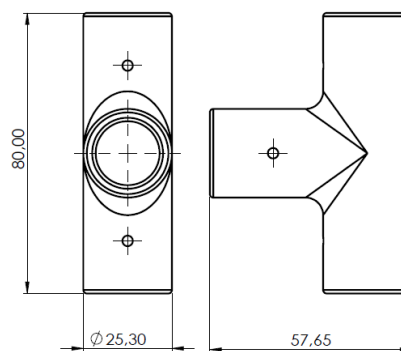


7. Adapter za noge





## 8. T- razdjelnik nogu



Prikazana konstrukcija letjelice s dijagonalom od 610 mm pripada skupini većih letjelica takve vrste.

### 2.2.3. Materijal

Materijal korišten za izradu modela 3D tehnologijom također je bitna značajka jer će svaki dodatni gram utjecati na vrijeme trajanja leta. Dostupno je mnogo različitih filamenata za 3D ispis te postoji cijeli spektar materijala, ali i različitosti njihove proizvodne kvalitete. Razmatrani materijali su sljedeći:

- PLA
- Nylon
- PET/PETG
- ABS

**Tablica 2. Vrste materijala prikladne za izradu letjelice**

| <i>Materijal</i> | <i>Karakteristike</i>  |
|------------------|--|
| <b>PLA</b>       | <ul style="list-style-type: none"> <li>• polilaktična kiselina - biorazgradiv, dobiva se iz obnovljivih izvora poput kukuruznog škroba ili šećerne trske;</li> <li>• prednosti: iznimno jednostavan za printanje. niska cijena, čvrsta i dobra čvrstoća, dobra dimenzijska preciznost, široko dostupan;</li> <li>• nedostaci: mala otpornost na toplinu i UV zračenje te zato nije najbolje prilagođen boravku na otvorenom (izlaganje suncu), niska fleksibilnost, ispisi se s vremenom razgrađuju;</li> <li>• prilikom izrade treba paziti da je printer u prostoriji gdje nema propuha ili temperaturnih fluktuacija, također to ne smije biti soba u kojoj ljudi spavaju.</li> </ul> |
| <b>Nylon</b>     | <ul style="list-style-type: none"> <li>• sintetički termoplastični linearni poliamid;</li> <li>• prednosti: visoka fleksibilnost, visoka otpornost na udarce, nema neugodnog mirisa tijekom ispisa, dobra otpornost na abraziju, lagan je, može se bojiti prije ili poslije procesa ispisa;</li> <li>• nedostaci: higroskopan je, što znači da upija vlagu, pa ga je potrebno čuvati na hladnom i suhom mjestu kako bi se osigurala</li> </ul>   |

|                 |   |
|-----------------|---|
|                 | <p>bolja kvaliteta i zbog toga nije pogodan za korištenje u vlažnim okruženjima; veća mogućnost vitoperenja.</p>  |
| <b>PET/PETG</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• PET / PETG je stabilan i otporan na udarce, ali zahtijeva grijanu i iznimno čistu podlogu, relativno je skuplji od ostalih;</li> <li>• s tipičnim PET-om, pregrijavanje može dovesti do lomljivih, mutnih rezultata, ali to se ne događa s PETG-om (dodavanje glikola sprečava da materijali kristaliziraju i postanu krhki);</li> <li>• prednosti: uglavnom nema mirisa tijekom ispisa, površina je sjajna, dobro podnosi udarna opterećenja, mala vjerojatnost da će se smanjiti ili izvitoperiti, visok stupanj fleksibilnosti;</li> <li>• nedostaci: mogu se stvoriti tanke dlačice na površini od žica, previše ljepljiv.</li> </ul>  |
| <b>ABS</b>      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• vrlo jak i svestran materijal velike toplinske otpornosti;</li> <li>• termoplastični polimer, a to znači da se baš poput PLA, može rastopiti i kristalizirati više puta bez previše degradacije;</li> <li>• prikladan je za unutarnju i vanjsku upotrebu;</li> <li>• prednosti: čvrst i stabilan, lagan i ima bolju temperaturnu otpornost, jeftin i široko dostupan, dobra otpornost na udarce i habanje;</li> <li>• nedostaci: potrebna je grijana komora za spis da bi se postigli optimalni rezultati ( još uvijek patent kompanije Statasys ), a tu su i otrovne pare koje je potrebno uzeti u obzir te miris koji nije najugodniji; često dolazi do većeg skupljanja, pa može doći do dimenzijskih netočnosti lošim projektiranjem.</li> </ul> |



**Slika 21. PETG filament**

Među razmatranim materijalima odabran je PETG iz razloga što čini dobru sredinu po karakteristikama između ABS-a i PLA-a. Glavne karakteristike koje su bile presudne za takav odabir su veća fleksibilnost i izdržljivost od PLA-a te lakši način ispisa od ABS-a. Zbog svoje fleksibilnosti, čvrstoće i otpornosti na temperaturu i udarce čini se idealnim materijalom za predmete koji mogu doživjeti dugotrajni ili iznenadni stres. Također, za izradu većih predmeta, ustanovljeno je svojstvo niskog skupljanja što bitno olakšava modeliranje s tolerancijama i planiranje ispisa dijelova.



**Slika 22. Priprema površine platforme za 3D ispis**



**Slika 23. Odvajanje od platforme; prejako prijanjanje**



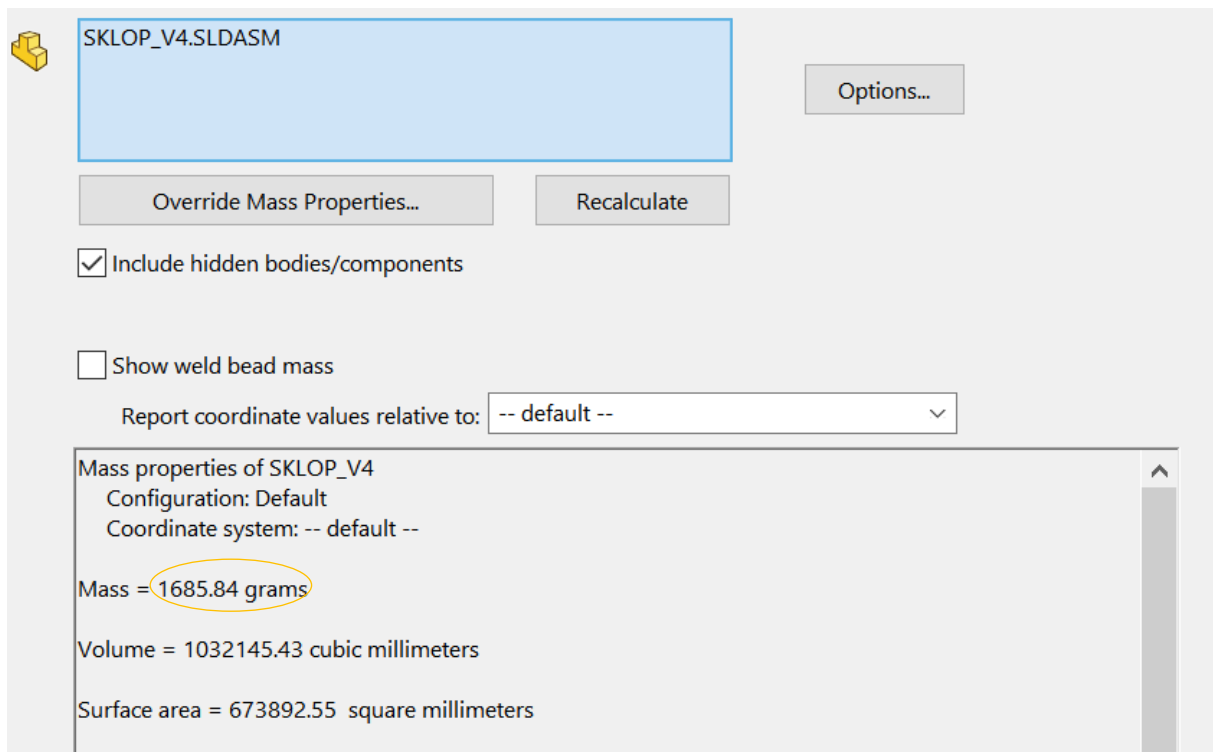
**Slika 24. Slabo lijepljenje prvog sloja**

Jedini veći problemi javljali su se u vidu neadekvatnog prijanjanja prvog sloja za podlogu, a druga krajnost je bila ta da se filament jako lijepio za podlogu. Da bi se postigla najbolja adhezija površine ispisa, neophodno je bilo održavati je čistom. Iako je na stranici proizvođača printera preporučeno da se zbog jake adhezije ne preporuča visoko koncentriran izopropilni alkohol, sve dok podloga nije bila njime prebrisana, prvi sloj se nepravilno lijepio, prikaz na slici 19. Nastale bi greške koje su svakim slojem bile sve veće te za koje vrijeme više nisu bile premostive zbog nakupljanja materijala na ekstruderu. Podloga je dodatno bila prekrivena trakom u svrhu zaštite originalne podloge od koje su se neki isprintani dijelovi teško odvajali.

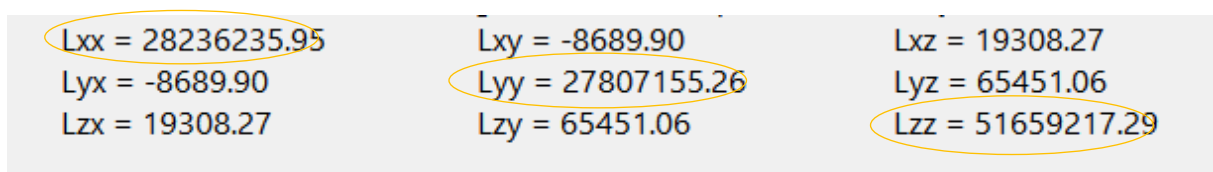
#### 2.2.4. Masa, centar mase, momenti inercije

Tablica 3. Mase dijelova

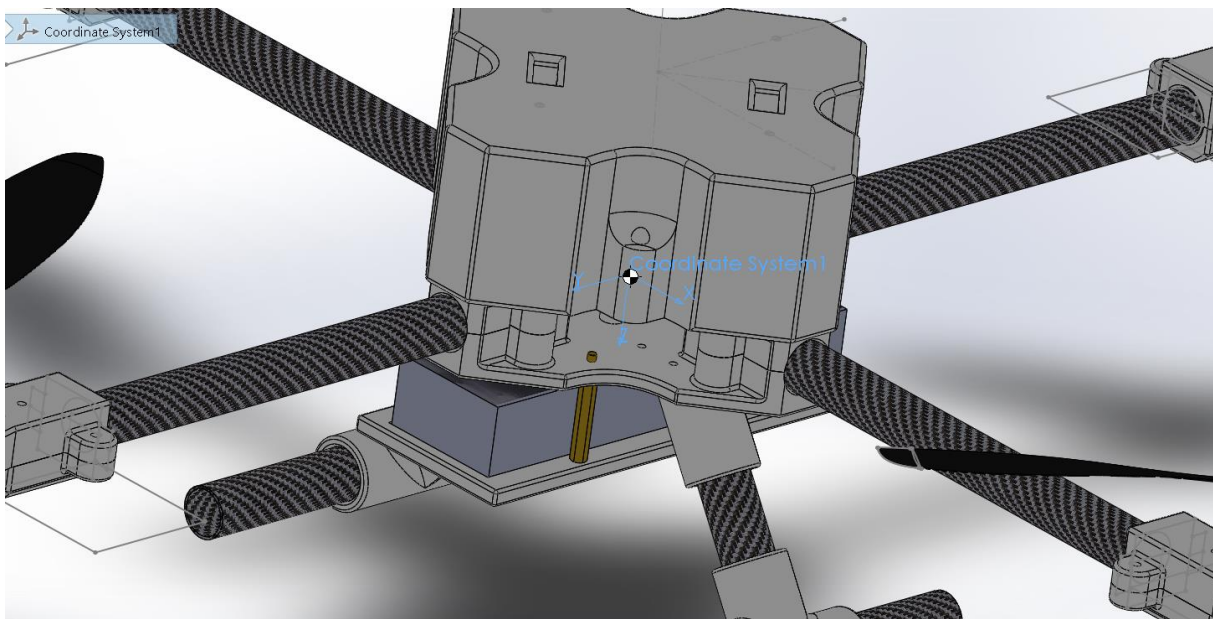
| Dijelovi                              | Masa [g] |
|---------------------------------------|----------|
| Gornji adapter za motor               | 30.4     |
| Donji pričvrtni dio adaptera za motor | 15       |
| Gornja ploča kućišta                  | 119.1    |
| Donja ploča kućišta                   | 153.6    |
| Poklopac/nosač                        | 193      |
| Držac baterije                        | 64.2     |
| Adapter za noge                       | 17.9     |
| T-razdjelnik nogu                     | 25.3     |



Slika 25. Ukupna masa letjelice i momenti inercije



Slika 26. Momenti inercije,  $g \cdot mm^2$



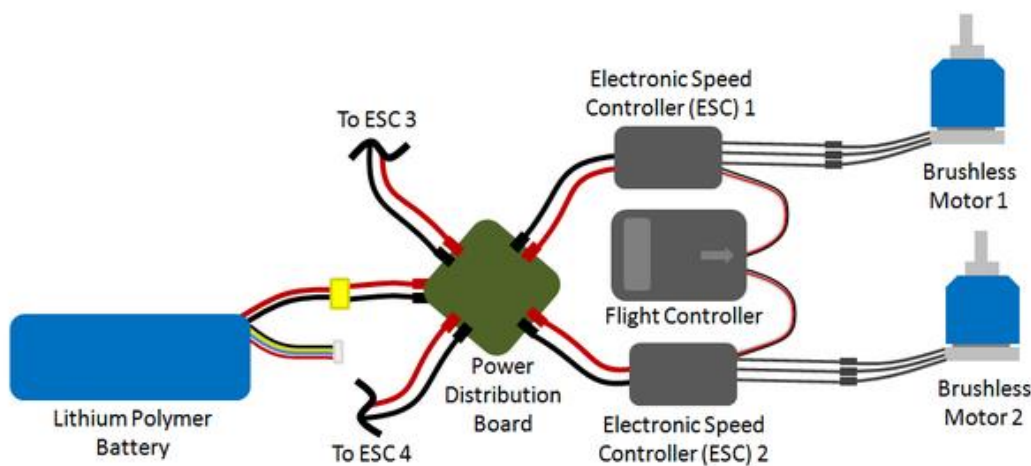
**Slika 27. Pozicija centra mase**

Na kraju, kada su svi pojedini dijelovi modelirani u SW programu, sastavljeni su u sklop odnosno zajedničku cjelinu letjelice. U programu je tada moguće odrediti sveukupni centar mase, masu letjelice i momente inercije što je prikazano na slikama 22., 23. i 24. Momenti inercije su u odnosu na centar mase.



### 2.3. Pogonski sustav

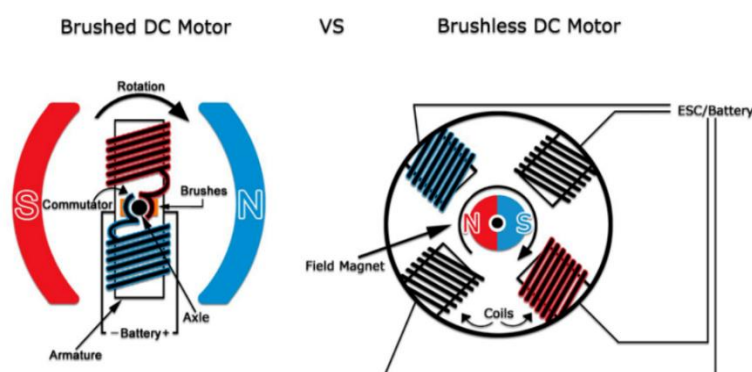
Pogonski sustav uključuje motore, propelere, elektroničke regulatore brzine (skraćen od eng. naziva ESC) i bateriju. Taj sustav je možda i najvažniji dio jer određuje glavne izvedbe poput vremena lebdjenja, sposobnost korisnog opterećenja te brzinu i udaljenost letenja. Međutim, kako je ranije spomenuto, komponente pogonskog sustava moraju biti kompatibilne jedne s drugima, jer u protivnom ne mogu ispravno raditi. Na primjer, u nekim uvjetima agresivni manevar može dovesti do prekoračenja sigurnosnog praga struje ESC-a, pa može doći do opasnih situacija kao što je prestanak rada motora, a time i nemogućnost upravljanja letjelicom koja pada.



Slika 28. Struktura pogonskog sustava

Sustav se sastoji od četiri motora pričvršćenih na kraj svake ruke. Na osovinu svakog motora pričvršćen je po jedan propeler. Svi motori su priključeni na elektronički regulator brzine (ESC) za kontrolu brzine svakog pojedinog motora. Četiri elektronska regulatora brzine međusobno su spojena paralelnim spajanjem na donju razvodnu ploču, a služi kao izvor energije cijelog sustava.

### 2.3.1. Motori



Slika 29. Brushed i brushless motor

Postoje dvije osnovne vrste motora: motor bez četkica i motor s četkicama. Motori bez četkica, eng. brushless, kao što im i samo ime govori ne koriste četkice. Kod četkanih, odnosno eng. brushed motora, četkice dovode struju kroz komutator u zavojnice koje su smještene na rotoru. Motor bez četkica ne provodi struju na zavojnice rotora jer one ni nisu smještene na rotoru kao što je slučaj s motorima s četkicama. Umjesto toga, rotor je trajni magnet, zavojnice se ne okreću, već su učvršćene na statoru. Budući da se zavojnice ne kreću, nisu potrebne četke i komutator. Pomoću četkanog motora rotacija se postiže upravljanjem magnetskim poljem koje generiraju zavojnice na rotoru, dok magnetsko polje, koje je generirano stacionarnim magnetima, ostaje fiksno. Da bi se promijenila brzinu rotacije, mijenja se napon zavojnice. Kod motora bez četkica, trajni magnet se okreće, a rotacija se postiže promjenom smjera magnetskog polja koje generiraju okolni stacionarni svici. Za kontrolu okretaja potrebno je prilagoditi jačinu i smjer struje u zavojnici.



Slika 30. Rotor i stator kod brushless (lijevo) i brushed (desno) motora

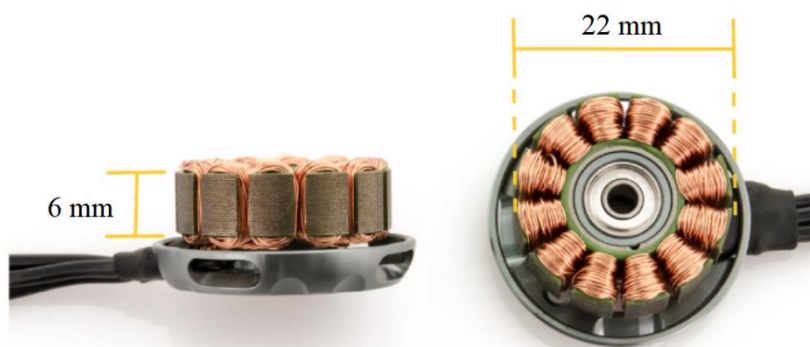
Velika prednost motora bez četkica je učinkovitost koja iznosi oko 85-90%, a kod četkanih je ona oko 75-80%. Druga velika prednost motora bez četkica je upravljivost. Precizna kontrola zauzvrat smanjuje potrošnju energije i proizvodnju topline, a u slučajevima kada motori rade na baterije produžuje se vijek trajanja baterije. Motor bez četkica traje duže jer nema četki koje se troše, dok se četkani motor brzo istroši. To, naravno, utječe na cijenu tako da su oni nešto višeg cjenovnog ranga.

Motori s četkicama još se uglavnom koriste kod nekih izvedbi mini letjelica jer su jeftini te su tako zbog stalnog padanja lako zamjenjivi odnosno ekonomičniji. Motori bez četkica su najčešći i skoro nezaobilazni za veće letjelice s četiri rotora.

Iz tog razloga je za ovaj projekt korišten model motora bez četkica SunnySky x2216 kV 880.



Slika 31. SunnySky x2216, kV880



Slika 32. Značenje oznake motora x2216

Veličina motora bez četkica se uobičajeno označava četveroznamenkastim brojem AABB. AA je oznaka za širinu statora (promjer statora), dok je BB oznaka za visinu statora u milimetrima. Smjernica KV 880 ukazuje na broj okretaja u minuti (o/min) koje motor okrene kada se primijeni 1 V bez pričvršćenog opterećenja.

Korišteni motor od 880 KV, kojega pokreće izabrana 11.1V baterija (3S). Motori s višim KV-om brže vrte propeler i mogu povući više struje. Motor s niskim KV-om motora ima više namotaja tanjih žica, što znači da će nositi više snage, proizvesti veći okretni moment i pokrenuti veći propeler. Suprotno tome, motor s visokim KV-om može proizvesti manji okretni moment te slijedno tome može pokretati manje propelere.

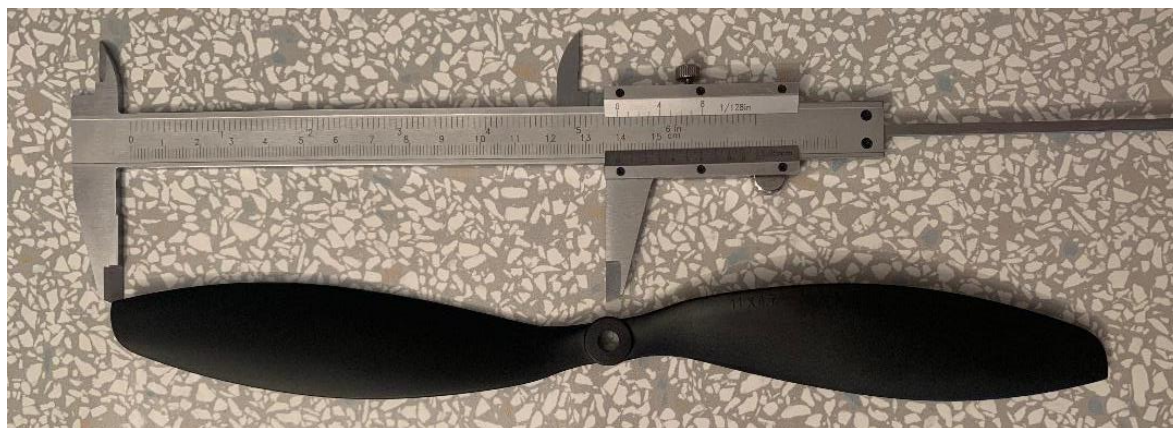
Sila zbog gravitacije, težina letjelice, suprotstavlja se podizanju. Ravnoteža između težine i dizanja dovodi do toga da se ravnina letjelice održava na konstantnoj visini. Kako bi se letjelica kretala prema naprijed, potrebno je osigurati silu koja nadoknađuje povlačenje prema zemlji. Ta se sila naziva potiskom. Potisak se generira sustavom pogona zrakoplova, motora.

Kod odabira motora prvotno je razmatran potisak. Potisak kojeg daju motori obično je mjereno u gramima i razlikuje se ovisno o brzini vrtnje motora i propelera koji rotiraju. Veći potisak omogućuje veće ubrzanje, ali to utječe na trenutno vučenje, pa i učinkovitosti. Ako letjelica crpi veliku struju pri velikim brzinama, maksimalna brzina pražnjenja baterije mora biti u mogućnosti pružanja dovoljno struje.

Iako je potisak važan aspekt u odabiru motora, to nije jedino što treba uzeti u obzir. Općenito pravilo nalaže da motori trebaju biti sposobni pružiti dvostruko veći potisak od ukupne težine cijele letjelice.

### 2.3.2. Propeleri

Propeler je komponenta koja proizvodi potisak i zakretni moment za upravljanje kvadkopterom. Učinkovitost motora varira ovisno o izlaznom okretnom momentu. Stoga bi se trebalo osigurati dobro podudaranje da motor radi u stanju visoke učinkovitosti, što će jamčiti manje utrošene energije za isti potisak.



Slika 33. Propeler 1147

Za odabrani model motora uzeti su propeleri ABS 1147, prikazan na slici 25. Model propelera je označen s četveroznamenkastim brojem gdje prva dva označavaju promjer propelera, a druga dva nagib propelera u inčima. Mjera nagiba pokazuje koliko daleko će se propeler pomaknuti kroz zrak za jedan okretaj motora.

Propeleri dolaze u različitim promjerima i nagibima, pa vrijedi relacija da što je veći promjer i nagib, veći je potisak koji propeler može stvoriti. Većem propeleru potrebno je više snage za pogon, ali će u tom slučaju moći podići veću težinu. Ako motor s malim okretnim momentom pokreće propeler koji mu je pretežak, motor neće moći proizvesti dovoljno sile da ga okrene u željenom broju okretaja, što rezultira slabom učinkovitošću i pregrijavanjem. Kod manjih kvadkoptera uzimaju se manji propeleri, ali zato dolaze u kombinaciji s motorima visokih okretaja.

Razlikuju se dvije vrste propelera, propeler koji guraju i propeleri koji vuku. Propeleri koji guraju, daju potisak kada se okreću u smjeru kazaljke na satu, a propeleri koji vuku daju potisak kad se okreću obrnuto od kazaljke na satu.

Propeleri se nude u raznim materijalima, dimenzijama i cijenama. Općenito, jeftiniji propeleri su manje precizno proizvedeni te su skloniji stvaranju vibracija. Iz tog razloga nije preporučeno samostalno izrađivanje propelera 3D tehnologijom.

Prilikom pothvata izrade kvadkoptera potrebno je nabaviti više parova propelera zato što kod provođenja probnih testova oni najčešće prvi nastradaju.

### 2.3.3. ESC

Elektronički kontroler brzine, bolje poznat kao ESC, elektronička je komponenta koja povezuje motore s kontrolerom leta te bateriju. Za letjelicu s četiri rotora, potrebna su četiri elektronička kontrolera brzine, po jedan za svaki motor. Njegov zadatak je kontrolirati i regulirati brzinu jednog motora. Ono prima signal s kontrolera leta te ga prevodi u okretaje motora. Bez ESC-a, kontroler leta ne bi mogao izravno komunicirati s motorima.

Različiti motori moraju biti opremljeni različitim ESC-ovima jer pogrešnim odabirom može se uzrokovati i direktni kvar motora. Oni crpe struju kad se okreću, a ako crpe više nego što ESC može izdržati, početak će se pregrijavati, a može doći i do njegovog zapaljenja. Zbog toga razlikujemo maksimalnu kontinuiranu i vršnu struju. Prva je maksimalna neprekidna struja u normalnom radnom stanju, dok je druga maksimalna trenutna struja koju ESC još može podnijeti, ali u vrlo kratkom periodu djelovanja.



Slika 34. Elektronički kontroler brzine [4]

Na odabranom modelu ESC-a , prikazan na slici 34., stoji oznaka 30A koja daje podatak o maksimalnoj kontinuiranoj struji. Na specifikaciji proizvoda je naznačena vršna struja od 40A koju on može podnijeti par sekundi.

Raspon napona koji omogućava ESC-u da radi ispravno je također važan parametar. Obično se oznake poput "3-4S LiPo" mogu naći u ESC specifikaciji, što znači da je naponski raspon za odabrani ESC 3-4 ćelije LiPo baterije, tj. 11,1-14,8 V.



**Slika 35. Spajanje ESC-a**

Za odabrani ESC:

- S jedne strane ESC-a postoje dvije žice koje se spajaju na pločicu kontrolera. Jedna žica (obično crna) je nula, a druga žica (bijela) je žica koja nosi signalnu poruku od kontrolera do ESC-a, 50 Hz, 1-2 ms. Treća, crvene boje, je 5 V iz BEC-a
- Na drugoj strani se nalaze 3 metak konektora koji se spajaju s motornom. Spoje se sve tri žice nasumičnim redoslijedom i zamijene dvije ako nije dobiven željeni smjer okretanja ili se pomoću softvera BLHeli, BLHeli\_S i BLHeli\_32 može mijenjati smjer motora u samom ESC softveru

### 2.3.4. Baterija

Baterija je izvor napajanja koji pokreće sve sustave na vašem dronu i omogućuje mu letenje. Litij-polimerne baterije (skraćeno LiPo) pronašle su veliku primjenu u ovom području napajanja zrakoplova na daljinsko upravljanj. Prikladne su zbog svoje male mase u različitim oblicima i veličinama gustoće energije, visoke stope pražnjenja što omogućuje brži prijenos energije, dužeg vremena rada i mogućnosti punjenja. Dvije glavne alternative LiPo baterijama su NiMH i NiCd baterije, no one su još uvijek preteške i ne mogu osigurati potrebnu količinu ispuštanja. Također, LiPo baterije imaju kraći životni vijek od oko 300 do 400 ciklusa u usporedbi s NiMH i NiCd baterijama. Također, ako se baterija nekim slučajem probije, postoji mogućnost požara ili eksplozije. Preporučuje se i dodatna opreznost tijekom punjenja i pražnjenja te je važno izabrati odgovarajuću i ispravnu opremu za punjenje.

Svaka ćelija LiPo baterije ima napon od 3.7 V. Ukupni napon baterije određen je brojem ćelija, a dobiva se kao umnožak broja serijski povezanih ćelija s nazivnim naponom. Napon baterije kvadrokoptera odredit će koliko se brzo okreću propeleri. Kao što je ranije spomenuto, motori bez četkica imaju nazivne vrijednosti označene KV-om, što je okretaj po volu. Dakle, što je više napona na raspolaganju, veći je maksimalni broj okretaja u minuti propelera. To može rezultirati dinamičnijom okretnošću i većim brzinama.

Kapacitet baterije predstavlja koliko snage može držati baterija te se mjeri u jedinicama miliamper sati, mAh. Razlikujemo tri razreda: mali – 0,1 Ah (100mAh), srednji – 2-3 Ah (2000mAh – 3000mAh), te veliki > 3 Ah. Što je veći kapacitet, to je dulje vrijeme leta. Uzimajući veću bateriju zbog dužeg vremena leta treba razmotriti povećanje težine, ali i fizičke veličine što zahtjeva prilagodbu konstrukcije. Međutim, to dodatno opterećenje može smanjiti dodano željeno vrijeme letenja za koje je bilo predviđeno da se dobije većim kapacitetom.

Uočljiva oznaka baterije je C rang, ono je mjera sigurnosti i kontinuiranosti maksimalne struje pražnjenja. Obično se C izražava kao dva broja odvojena kosom crtama, poput 45/90 ili 65/130. Prvi broj označava konstantnu struju koju baterija može isporučiti. Drugi broj je rafalna struja ili struja koju LiPo baterija može kratko vrijeme istisnuti. Vrijednosno gledano, ona je puno veća struja. Taj podatak koristan je kod naglog ubrzanja, ali ne i kod kontinuiranog letenja.

Ako je C niži od potrebnog, baterija neće moći isporučiti struju koja je potrebna motorima. To manifestira lošije performanse, a može doći i do gorenja baterije.



Napon se koristi za mjerenje napunjenosti baterije jer je teško izmjeriti kapacitet baterije. Količina energije koja ulazi u bateriju može se izmjeriti, ali ne i koliko je zapravo ima u bateriji.



**Slika 36. Baterija Gens Ace 5000 mAh, 50 C**

Za izvor energije u ovom radu odabrana je baterija Gens Ace 5000 mAh, 3 S, 50 C. No, to nije bio prvi izbor. Prvotno je uzeta baterija TATTU 5100 mAh, 3 S, 10 C. Naknadno je utvrđeno da baterija nije pogodna za ovaj rad, što je objašnjeno u nastavku.

Kod projektiranja pogonskog sustava ove letjelice, prvi podatak, kojeg je bilo bitno ugrubo procijeniti, je ukupna masa sa svim komponentama. Uzimanjem u obzir da je letjelica bila zamišljena kao neka vrsta dostavnog vozila, pretpostavka je bila da će sama otprilike oko 1800 grama. Uzimajući taj podatak u obzir, potrebno je bilo odabrati motore u kombinaciji s propelerima koji će davati barem 2 puta veći potisak od ukupne mase letjelice.

| Prop(inch) | Voltage(V) | Amps(A) | Thrust(gf) | Watts(W) |
|------------|------------|---------|------------|----------|
| APC11x4.7  | 11.1       | 0.7     | 100        | 7.77     |
|            |            | 1.8     | 200        | 19.98    |
|            |            | 3.1     | 300        | 34.41    |
|            |            | 4.4     | 400        | 48.84    |
|            |            | 5.9     | 500        | 65.49    |
|            |            | 7.7     | 600        | 85.47    |
|            |            | 9.7     | 700        | 107.67   |
|            |            | 11.7    | 800        | 129.87   |
|            |            | 14.7    | 900        | 163.17   |
|            |            | 16.8    | 1000       | 186.48   |

**Slika 37. Preporuka proizvođača motora SunnySky**

Proizvođač motora u specifikaciji proizvoda često pruži orijentacijske podatke i preporuke za dani motor. Potisak je izražen u jedinici gramske sile, gf. Gramska sila jednaka je masi jednog grama pomnoženoj sa standardnim ubrzanjem zbog gravitacije na Zemlji, odnosno:

$$1 \text{ gf} = 0.0098 \text{ N} \quad (1.1)$$

Što znači, da svaki od ukupno četiri motora sustava mora dati 900g potiska, a uz odabir propelera veličine 280 mm (11 inča) traži vrijednost struje od 14.7 A.

**Tablica 4. Usporedba baterija**

|   |                         |
|---|-------------------------|
| 1. Izbor: TATTU 5100 mAh (3 S, 10 C)    | 5100 mAh = 5.1 Ah (1.2) |
|   | 5.1 · 10 = 51 A (1.3)   |
| 2. Izbor: Gens Ace 5000 mAh (3 S, 50 C) | 5000 mAh = 5 A (1.4)    |
|   | 5 · 50 = 250 A (1.5)    |

Korišteni elektronički kontroler brzine, koji može provesti 30 A kontinuirane struje što je i više nego potrebno za trenutno stanje, uzet je zato što postoji tendencija da se letjelica redizajnira i nadogradi nakon tekućeg projekta. Uzimajući to u obzir, baterija mora osigurati struju koju će uzimati 4 elektronička kontrolera brzine, čime slijedi:

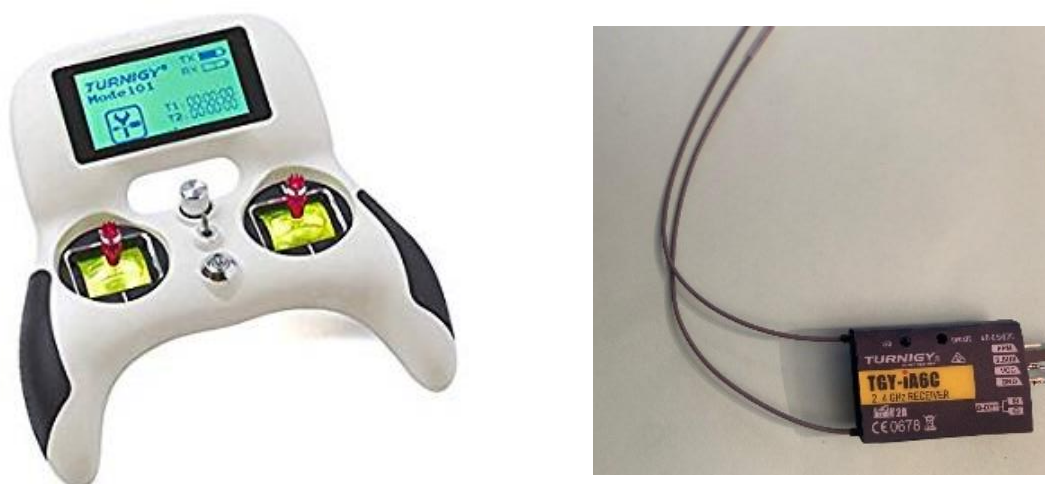
$$4 \cdot 30 \text{ A} = 120 \text{ A} \quad (1.6)$$

Iz podatka dobivenog u jednadžbi (1.6) može se zaključiti da će TATTU baterija biti preslaba za odabrani set komponenti, dok će Gens Ace baterija pružiti i više nego dovoljno struje. Problem koji je nastao pri 2. izboru baterije je taj što je za zadane parametre bilo teško naći „zlatnu“ sredinu, a da je bila lako dostupna i od afirmiranog proizvođača. Također, iskustveno je potvrđeno da za LiPo baterije zbog opasnosti od zapaljivanja/eksplozije, postoji dodatna barijera u vidu zabrane prodaje, ali i regularne dostave takvih baterija.

## 2.4. Zapovjedni i upravljački sustav

Za siguran rad letjelice s četiri rotora potrebna je stabilna zapovjedno-upravljačka veza između pilota na zemlji i bespilotne letjelice, tako osiguravajući da pilot u svakom trenutku održava kontrolu nad letjelicom. Upravljački sustav je stvar osobnog izbora jer postoje različite kombinacije proizvoda, a u daljnjem tekstu su opisane one koje su sastavni dio trenutnog projekta. Ukratko su objašnjeni odabrani dijelovi uključeni u kompletiranje ove letjelice.

### 2.4.1. Daljinski upravljač i prijemnik



Slika 38. Daljinski odašiljač i prijemnik [5]

Sustav radijske kontrole sastoji se od dva elementa, odašiljača kojeg pilot drži u rukama i prijemnika koji je postavljen na samoj letjelici. Daljinski odašiljač (eng. *RC transmitter*), koristi se za bežični prijenos naredbi od pilota na zemlji do prijemnika. On predaje podatke prijemniku. Nakon što prijemnik dobije te podatke, prosljeđuje ih kontroleru leta što omogućuje da se letjelica kreće u skladu s tim. Odašiljač i prijemnik komuniciraju radio valovima, a najčešće korištena radio frekvencija je 72 MHz i 2,4 GHz.

### 2.4.2. Kontroler leta

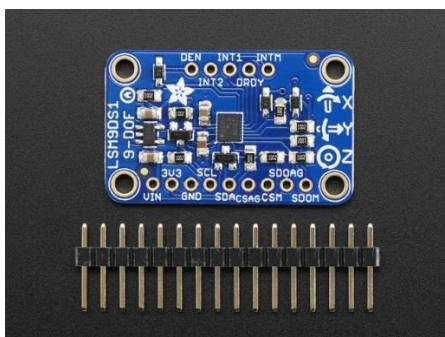


**Slika 39. Raspberry Pi 3 [6]**

Kontroler leta (eng. *Flight Controller*, FC), mozak je cjelokupne letjelice, u osnovi je točka kontakta između korisnika i uređaja. Sve informacije/naredbe koje su dane daljinskim upravljačem prenosi na zadana područja. Na primjer, ako se skreće u određenom smjeru, pomakne se palica na upravljaču, ono prenosi signal na prijemnik te dalje putuje do kontrolera leta koji radi poput računala i manipulira dalje motornim uređajima.

Inače, fiksno krilo u avionu je ono što pomaže da se održi u zraku. Letjelica s četiri rotora stabilna je dok lebdi, ali čim se dodirnu komande, stabilnost nestaje. Dovoljno je da samo jedan propeler ubrza ili uspori, pa da letjelica izvede neželjeni manevar ili se srušiti. Tu nastupa kontroler leta koji kontrolira da se propeleri vrte jednakom brzinom na temelju uputa koje su zadane. Oni uzimaju podatke od ostalih uređaja na letjelici: žiroskopa za stabilnost, akcelerometra za mjerenje i podešavanje brzine kretanja, magnetometra ili kompas za kretanje u pravom smjeru, barometar za mjerenje visine i GPS za mogućnost autonomnog letenja. Sve ove stvari rade zajedno zahvaljujući upravo kontroleru leta koji obrađuje prikupljene informacije/signale i poduzima daljnje akcije. Za ovaj rad odabran je Raspberry Pi 3.

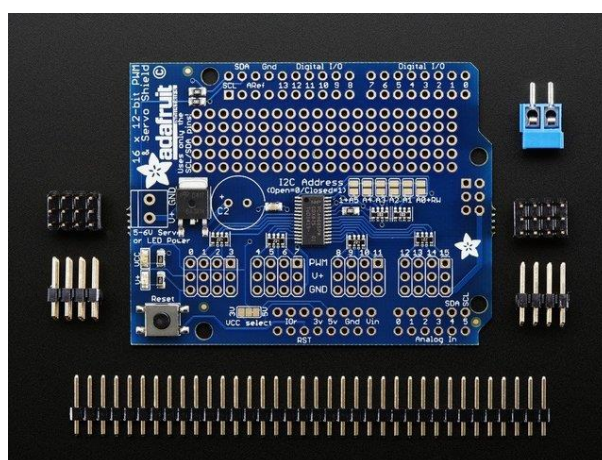
### 2.4.3. Akcelerometar/ žiroskop/ magnetometar



Slika 40. Akcelerometar/žiroskop/magnetometar, LSM9DS1 [7]

Odabrana je pločica Adafruit LSM9DS1 Accelerometer/Gyro/Magnetometer 9-DOF Breakout. Ova kontrolna pločica pruža informacije senzora kretanja, smjera i orijentacije. Unutar čipa nalaze se tri senzora, jedan je klasični troosni akcelerometar, koji govori koji je smjer prema Zemlji (mjerenjem gravitacije) ili koliko brzo se ploča ubrzava u 3D prostoru. Drugi je troosni magnetometar koji može osjetiti odakle dolazi najjača magnetska sila, koja se obično koristi za otkrivanje magnetskog sjevera. Treći je žiroskop u tri osi koji može mjeriti zavrtnanje i uvijanje. Kombinacijom ovih parametara, letjelica se može pravilno pozicionirati i orijentirati.

### 2.4.4. PWM/servo pločica



Slika 41. PWM/servo pločica [8]

Ova pločica služi za generiranje PWM-a, odnosno široko impulsnih modulacija za motore. Korištena je iz razloga što omogućuje Raspberry Pi-u da upravlja sa do 16 servomotora/ PWM-a. Iz te pločice izlazi 4 PWM signala za svaki pojedini ESC.

### 3. MATEMATIČKI MODEL

U ovom poglavlju bit će razrađen kinematički i dinamički model letjelice s četiri rotora te njihova implementacija u paketu programa MATLAB. Proučavanje tih modela daje naslutiti kako će se sustav ponašati u različitim uvjetima te tako možemo predvidjeti različite poremećaje na odziv sustava.

Kvadkopter je letjelica koja može uzlijetati, slijetati i lebdjeti na nebu. Koristi četiri rotora iste veličine, jednako raspoređenih i postavljenih na rubovima okvira. Oni guraju zrak prema dolje da bi tako ostvarili kretnju prema gore. Motor svojom vrtnom tako stvara reaktivni moment koji ima tendenciju rotirati konstrukciju u smjeru koji je suprotan od njegovog smjera vrtnje. Da bi se to spriječilo jedan par dijagonalnih motora okreće se u suprotnom smjeru od drugog para u svrhu neutraliziranja zakretnog momenta motora. Reaktivni moment u potpunosti se poništava samo u slučaju kada se svi motori rotiraju istim brzinama.

Za ostvarivanje željene pozicije i orijentacije razlikuju se četiri naredbe:

- potisak (eng. *throttle*) – postiže se istovremeno povećanje i smanjenje svih motora za jednaki iznos. Rezultat je stvaranje vertikalne sile kojom se letjelica diže ili spušta. Kada vertikalna potisna sila poništi djelovanje gravitacijske sile, letjelica je u stanju lebdjenja;
- skretanje (eng. *yaw*) – postiže se zakretanje kvadkoptera oko vlastite vertikalne osi povećanjem jednog para dijagonalnih motora te smanjenjem drugog. Zbog toga što se dijagonalni parovi kreću u istom smjeru dolazi do disbalansa u okretnim momentima te se cijela letjelica zakreće u smjeru dominantne dijagonale;
- poniranje (eng. *pitch*) – postiže se horizontalno gibanje unaprijed ili unazad, povećava se ili smanjuje brzina vrtnje prednjeg rotora i smanjuje ili povećava brzina stražnjeg rotora. Letjelica se tom naredbom naginje, a u novom položaju ima vertikalnu, ali i horizontalnu komponentu sile. Horizontalna komponenta sile potiska tada uzrokuje gibanje u smjeru nagiba;
- valjanje (eng. *roll*) – postiže naginjanje i gibanje letjelice u smjerovima lijevo i desno. Letjelica to postiže povećanjem ili smanjenjem brzine lijevog i smanjenjem ili povećanjem brzine desnog propelera.

### 3.1. Kinematika

Kinematika je znanost opisivanja kretanja objekata pomoću riječi, dijagrama, brojeva, grafova i jednažbi, a grana je mehanike. Cilj bilo kojeg istraživanja kinematike je razviti modele koji služe za opisivanje i objašnjavanje kretanja objekata iz stvarnog svijeta.

#### 3.1.1. Referentni okvir

Za opisivanje modela potrebno je definirati dva referentna okvira, inicijalni referentni okvir i referentni okvir tijela.

Inercijski referentni okvir je, u ovom slučaju, vezan za površinu planeta Zemlje (E okvir) gdje su izravno primjenjivi zakoni tromosti i inercije što znači da ovaj okvir ne rotira.

Referentni okvir tijela je kruto vezan za tijelo čije se gibanje opisuje, Newtonovi zakoni gibanja nisu izravno primjenjivi te okvir ima mogućnost rotacije. Uvodi se zato što su jednažbe gibanja prikladnije formulirane iz sljedećih razloga [9]:

- matrica inercije je vremenski invarijantna,
- simetričnost tijela može se iskoristiti za pojednostavljenje jednažbi,
- mjerenja sa senzora smještenih na letjelici odvijaju se u ovom okviru,
- vertikalne sile i momenti gotovo uvijek zadaju u okviru pričvršćenom za tijelo.

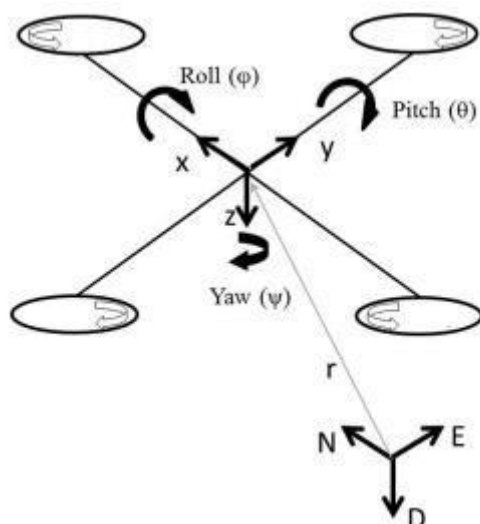
Kinematika gibanja povezuje pomični referentni okvir vezan uz tijelo s onim nepomičnim, inercijskim referentnim okvirom.

#### 3.1.2. Kinematički model

Model kvadkoptera gledamo kao kruto tijelo sa šest stupnjeva slobode gibanja, 3 rotacije i 3 translacije, a ima samo četiri motora što ovaj sustav čini podakuiranim. Kruta tijela su općenito definirana kao ona tijela kod kojih se ne mijenja oblik uslijed djelovanja vanjskih sila [10]. Pretpostavka podrazumijeva da je elastična ili plastična deformacija tijela toliko mala da se može zanemariti. Translacijska gibanja krutog tijela možemo opisati kao gibanje čestice smještene u centar mase [10]. Modeliranje krute dinamike tijela ima za cilj pronaći diferencijalne jednažbe koje odnose izlaze sustava (položaj i orijentaciju) na njegove ulaze (vektori sile i zakretnog momenta). Referentni okvir tijela definiran je sa ishodištem u centru mase.



Translacija i rotacija se mogu u potpunosti opisati translacijom i rotacijom referentnog okvira tijela.



Slika 42. Inicijalni referentni okvir i referentni okvir tijela

Na slici 31. prikazano je kako u inercijskom okviru definiramo poziciju i orijentaciju letjelice u prostoru. Inercijski referentni okvir definiran je desnokretnim pravokutnim koordinatnim sustavom sa  $O_E$ ,  $X_E$ ,  $Y_E$  i  $Z_E$  čiji smjerovi odgovaraju globalnom inercijskom sustavu u aeronautičkim primjenama poznat i pod nazivom "North-East-Down" (NED), E okvir. Ishodište  $O_E$  vezano je za površinu Zemlje,  $X_E$  usmjeren je prema sjeveru,  $Y_E$  usmjeren je prema istoku dok  $Z_E$  u skladu s definicijom osi gleda prema središta Zemlje [11].

Položaj i orijentacija letjelice trebaju biti opisani u odnosu na inercijski referentni okvir, dok linearna i kutna brzina vozila trebaju biti izražene u referentnom okviru tijela.

Linearna pozicija  $\Gamma^E$  definira položaj ishodišta referentnog okvira tijela (letjelice) s obzirom na ishodište inercijalnog okvira:

$$\Gamma^E = [X \quad Y \quad Z]^T. \quad (2.1)$$

Kutna pozicija  $\Theta^E$  postiže se trima uzastopnim rotacijama referentnog okvira vezanog uz tijelo u odnosu na inercijski okvir:

$$\Theta^E = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T. \quad (2.2)$$

Rotacije se opisuju Eulerovim kutovima skretanja (eng. *yaw*), poniranja (eng. *pitch*) i valjanja (eng. *roll*). Euler je dokazao da je skupom od tri kuta moguće prikazati svaku složenu rotaciju. Redosljed rotacija je bitan, ako se odabere jedan redosljed potrebno ga se i pridržavati. Ovdje će biti slijeđen ranije naveden raspored: skretanje (eng. *yaw*), poniranje (eng. *pitch*) i valjanje (eng. *roll*) [12].

Rotacijskim matricama opisujemo jednostavne rotacije koje opisuju rotacije za određeni kut oko samo jedne osi. Ako se pomnože ranije odabranim redosljedom dobije se rotacijska matrica za transformaciju između inercijskog okvira i referentnog okvira tijela, na predavanju često nazivana samo matricom transformacije.

Tri rotacijske matrice su sljedeće definirane:

1. Rotacija oko  $Z$  osi za kut  $\psi$  (skretanje-yaw) opisana je matricom  $\mathbf{R}(\psi, Z)$ :

$$\mathbf{R}(\psi, Z) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

2. Rotacija oko  $y_1$  osi za kut  $\theta$  (poniranje-pitch) opisana je matricom  $\mathbf{R}(\theta, y_1)$ :

$$\mathbf{R}(\theta, y_1) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

3. Rotacija oko  $x_2$  osi za kut  $\phi$  (valjanje-roll) opisana je matricom  $\mathbf{R}(\phi, x_2)$ :

$$\mathbf{R}(\phi, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Primjenom notacije  $s_k = \sin k$ ,  $c_k = \cos k$  i  $t_\theta = \tan \theta$  možemo jednostavnije zapisivati matrice. Umnožak rotacija pravilnim redosljedom daje rotacijsku matricu koja opisuje složenu rotaciju iz inercijalnog okvira u referentni okvir tijela:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E^B(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}(\phi, Z) \mathbf{R}(\theta, y_1) \mathbf{R}(\psi, x_2) \\ &= \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi c_\theta \\ s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Korištene veličine definirane su u referentnom okviru tijela. Za prevođenje u inercijski okvir koristimo inverz matricu koja je za rotacijske matrice jednaka transponiranoj:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B^E(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}(\phi, x_2) \mathbf{R}(\theta, y_1) \mathbf{R}(\psi, Z) = \mathbf{R}_E^B(\psi, \theta, \phi)^{-1} \\ &= \mathbf{R}_E^B(\psi, \theta, \phi)^T, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}_B^E(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ c_\theta s_\psi & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Definirani će biti i vektori linearne  $\mathbf{V}^B$  te kutne brzine  $\boldsymbol{\omega}^B$  letjelice u referentnom tijela:

$$\mathbf{V}^B = [u \quad v \quad w]^T, \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}^B = [p \quad q \quad r]^T. \quad (2.10)$$

Nadalje, pomoću izvedene rotacijske matrice moguće je prikazati vezu između linearne brzine u referentnom okviru tijela  $\mathbf{V}^B$  i linearne brzine  $\mathbf{V}^E$  (odnosno  $\dot{\mathbf{\Gamma}}^E$ , derivirana linearna brzina) u inercijskom okviru:

$$\mathbf{V}^E = \dot{\mathbf{\Gamma}}^E = \mathbf{R}_B^E(\phi, \psi, \theta) \mathbf{V}^B. \quad (2.11)$$

Kao što je ranije spomenuto, senzor mjeri vrijednosti kutnih brzina u referentnom okviru tijela, a ne u svakom pojedinom okviru. Kutne brzine nije moguće tako lako transformirati rotacijskim matricama jer se one zbivaju oko pojedine osi. Matrica koja prebacuje vrijednosti kutnih brzina iz inercijalnog u okvir tijela naziva se koordinatna transformacijska matrica  $\mathbf{T}_E^B(\phi, \theta, \psi)$ :

$$\mathbf{T}_E^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\theta & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

S obzirom da se senzori nalaze u okviru tijela, češće koristimo njen inverz  $\mathbf{T}_B^E(\phi, \theta, \psi)$ :

$$\mathbf{T}_B^E = \begin{bmatrix} 1 & t_\theta s_\phi & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Sumirano, translacijska kinematika krutog tijela sa šest stupnjeva slobode definirana je kao:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{R}_B^E(\phi, \psi, \theta) \mathbf{V}^B, \quad (2.14)$$

a rotacijska:

$$\dot{\mathbf{\Theta}}^E = \mathbf{T}_B^E(\phi, \psi, \theta) \boldsymbol{\omega}^B. \quad (2.15)$$

### 3.2. Dinamika

Dinamika je grana klasične mehanike koja povezuje gibanje tijela sa silama koje djeluju na tijelo. Razmotriti će se ulazi koji mogu biti primijenjeni na sustav kako bi se kontroliralo ponašanje kvadratora. Postoji nekoliko tehnika koje se koriste za deriviranje jednadžbi krutog tijela sa 6 stupnjeva slobode, a primijenit će se Newton-Eulerova formulacija.

Jednadžbe gibanja su povoljnije formulirane u referentnom okviru tijela, a za takav pristup ia dalje vrijede isti razlozi kao što je navedeno u poglavlju 3.1.1.

Vrijede i sljedeće pretpostavke:

- centar mase je ujedno i ishodište referentnog okvira tijela
- koordinate osi referentnog okvira tijela podudaraju se s glavnim osima krutog tijela

Izvod opisa translacijskog gibanja krutog tijela korištenjem Newton-Eulrove metode temelji se na prvom Eulerovom zakonu za kruto tijelo, izvedenom iz drugog Newtonovog zakona za česticu. Formulacija je definirana u inercijskom referentnom okviru, a moguće ju je izraziti i u referentnom okviru tijela:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\mathbf{I}}^E &= \mathbf{F}^E, \\
 m \overbrace{\mathbf{R}_B^E \dot{\mathbf{V}}^B} &= \mathbf{R}_B^E \mathbf{F}^B, \\
 m (\mathbf{R}_B^E \dot{\mathbf{V}}^B + \dot{\mathbf{R}}_B^E) &= \mathbf{R}_B^E \mathbf{F}^B, \\
 m \mathbf{R}_B^E (\dot{\mathbf{V}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{V}^B) &= \mathbf{R}_B^E \mathbf{F}^B, \\
 m (\dot{\mathbf{V}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{V}^B) &= \mathbf{F}^B,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje  $m$  označava masu kvadkoptera,  $\ddot{\mathbf{I}}^E$  linearnu akceleraciju s obzirom na inercijski okvir,  $\dot{\mathbf{R}}_B^E$  je derivirana rotacijska matrica,  $\dot{\mathbf{V}}^B$  je linearna akceleracija s obzirom na referentni okvir tijela,  $\mathbf{F}^E$  predstavlja sumu svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo s obzirom na inercijski okvir, a  $\mathbf{F}^E$  ima isto značenje u referentnom okviru tijela.

Za rotacijsko gibanje, drugi Newtonov zakon govori da je:

$$\mathbf{I}\ddot{\Theta}^E = \boldsymbol{\tau}^E,$$

$$\begin{aligned} \overbrace{\mathbf{I}\mathbf{T}_B^E\boldsymbol{\omega}^B}^{\cdot} &= \mathbf{T}_B^E\boldsymbol{\tau}^B, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) = \boldsymbol{\tau}^B,$$

gdje  $\mathbf{I}$  predstavlja matricu momenata inercije tijela (u referentnom okviru tijela),  $\ddot{\Theta}^E$  kutno ubrzanje letjelice s obzirom na inercijski okvir,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}^B$  kutno ubrzanje s obzirom na referentni okvir tijela,  $\boldsymbol{\tau}^E$  moment letjelice s obzirom na inercijski okvir, a  $\boldsymbol{\tau}^B$  moment s obzirom na referentni okvir tijela.

Moment inercije  $\mathbf{I}$  nije svojstven tijelu već ovisi o točki u odnosu na koju opisujemo rotaciju tijela. Matrica prikazuje inerciju tijela oko tri prostorne koordinatne osi:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

S obzirom na to da je kvadkopter simetričan oko sve tri osi, odnosno matrica inercije je dijagonalna:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Sada se može opisati gibanje proizvoljnog krutog tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja. Jednadžbe mogu biti prikazane u obliku matrica na slijedeći način:

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}^B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^B \times (m\mathbf{V}^B) \\ \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^B \\ \boldsymbol{\tau}^B \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

ili skraćeno zapisane:

$$\mathbf{M}_B \dot{\mathbf{V}}_B + \mathbf{C}_B(\mathbf{V}_B) \mathbf{V}_B = \mathbf{F}_B + \boldsymbol{\tau}_B. \quad (3.6)$$

Lijevi dio jednadžbe općenito opisuje dinamiku svakog krutog tijela sa šest stupnjeva slobode, dok desni predstavlja sile  $\mathbf{F}_B$  i moment  $\boldsymbol{\tau}_B$  koje djeluju na tijelo. Jednadžba opisuje gibanja s obzirom na referentni sustav.

Matrica  $\mathbf{M}_B$  naziva se matrica inercije sustava i sadrži članove koji opisuju otpor sustava prema translacijskom i rotacijskom gibanju:

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Matrica  $\mathbf{C}_B(\mathbf{V}_B)$  matrica je centripetalnih i Coriolisovih sila. Opisuje akceleracijske efekte tj. inercijske sile koje se javljaju u opisu s obzirom na referentni okvir tijela ako on rotira. Cjeloviti uređeni oblik matrice  $\mathbf{C}_B(\mathbf{V}_B)$  dobiven je primjenom svojstava antisimetričnih matrica te antikomutativno svojstvo vektorskog umnoška. Oblik matrice je sljedeći:

$$\mathbf{C}_B(\mathbf{V}_B) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^B \times (m\mathbf{V}^B) \\ \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & mw \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & -mu \\ 0 & 0 & 0 & -mv & mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_z r & -I_y q \\ 0 & 0 & 0 & I_z r & 0 & -I_x p \\ 0 & 0 & 0 & I_y q & I_x p & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Desni dio jednadžbe (3.6) sadrži vektor sume vanjskih sila na tijelo  $\mathbf{F}_B$  i vektor sume vanjskih momenata na tijelo  $\boldsymbol{\tau}_B$ .

U skladu s Bernoullijevim zakonom smanjenjem brzine fluida duž iste strujnice, tlak fluida raste što rezultira područjem višeg tlaka na donjoj površini profila propelera i područjem nižeg tlaka

zraka na gornjoj površini profila. Posljedica te razlike tlakova je vertikalna potisna sila  $F_p$  [9]. Slijedi veza između sila i momenata motora te kvadrata kutne brzine propelera:

$$F_p = b\omega^2, \quad (3.9)$$

$$\tau_p = d\omega^2, \quad (3.10)$$

gdje je  $b$  koeficijent potiska odnosno konstanta proporcionalnosti sile potiska i kutne brzine propelera, a konstanta proporcionalnosti momenta motora i kutne brzine naziva se koeficijent otpora zraka  $d$ . Moment  $\tau_p$  je onaj moment koji motor mora razviti da bi nadvladao otpor zraka i postigao željenu brzinu vrtnje  $\omega$ .

Sile sva četiri motora zajedno tvore vertikalnu silu potiska letjelice  $F_T$ :

$$F_T = -(F_{p1} + F_{p2} + F_{p3} + F_{p4}) = -b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2). \quad (3.11)$$

Negativni predznak ukazuje na smjer djelovanja u odnosu na definiranu os  $z_B$ .

Moment valjanja oko osi  $x_B$ :

$$\begin{aligned} \tau_x &= -l \sin \alpha F_{p1} + l \sin \alpha F_{p2} + l \sin \alpha F_{p3} - l \sin \alpha F_{p4} \\ &= bl \sin \alpha (-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Duljina  $l$  je duljina između centra mase i motora,  $\alpha$  predstavlja kut između osi  $x_B$  i krakova motora. Kut  $\alpha$  jednak je za sva četiri motora zbog simetrije. Udaljenost osi vrtnje motora od  $x_B$  izražena je kao  $l \cdot \sin \alpha$ .

Moment poniranja oko osi  $y_B$ :

$$\begin{aligned} \tau_y &= l \sin \beta F_{p1} - l \sin \beta F_{p2} + l \sin \beta F_{p3} - l \sin \beta F_{p4} \\ &= bl \sin \beta (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2). \end{aligned} \quad (3.13)$$



Duljina  $l$  je duljina između centra mase i motora,  $\beta$  predstavlja kut između osi  $x_B$  i krakova motora. Kut jednak je za sva četiri motora zbog simetrije. Udaljenost osi vrtnje motora od  $x_B$  izražena je kao  $l \cdot \sin\alpha$ .

Kutevi  $\alpha$  i  $\beta$  ovise o konfiguraciji letjelice, a najčešće vrijedi  $\alpha = \beta$ .

Moment oko osi  $z$  u stanju mirovanja:

$$\tau_y = b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2). \quad (3.14)$$

Sile i momente koji su uzrokovani vrtnjom motora kvadrokoptera možemo sažeto prikazati upravljačkom matricom  $\mathbf{U}_B$ :

$$\mathbf{U}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \\ bl \sin\alpha (-\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \\ bl \sin\beta (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \\ b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Sila uslijed djelovanja gravitacije:

$$\mathbf{F}_g^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

gdje je  $g$  oznaka za gravitacijsku konstantu.

Prebacivanje gravitacijske sile u referentni okvir tijela:

$$\mathbf{F}_g^B = \mathbf{R}_E^B \mathbf{F}_g^E = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Prilagođavanje zapis za jednadžbu gibanja:

$$\mathbf{G}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_g^B \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Ukupni dinamički model letjelice s četiri rotora modeliranog kao kruto tijelo sa šest stupnjeva slobode gibanja moguće je sažeti u oblik matrične jednadžbe gibanja:

$$\mathbf{M}_B \dot{\mathbf{V}}_B + \mathbf{C}_B(\mathbf{V}_B) \mathbf{V}_B = \mathbf{G}_B + \mathbf{U}_B, \quad (3.19)$$

gdje je  $\mathbf{M}_B$  matrica inercije sustava,  $\dot{\mathbf{V}}_B$  je vektor linearnih i kutnih brzina s obzirom na referentni okvir tijela,  $\mathbf{C}_B(\mathbf{V}_B)$  matrica je centripetalnih i Coriolisovih sila,  $\mathbf{G}_B$  vektor je gravitacijske sile, a  $\mathbf{U}_B$  je upravljački vektor.

Za izradu simulacija potrebno je jednadžbu (3.19) zapisati u obliku skupa diferencijalnih jednadžbi prvog reda, to je ujedno puni dinamički model definiran s obzirom na referentni okvir vezan za letjelicu :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (ur - wq) + g \sin \theta, \\ \dot{v} &= (wp - ur) - g \cos \theta \sin \phi, \\ \dot{w} &= (uq - vp) - g \cos \theta \sin \phi - \frac{F_T}{m}, \\ \dot{p} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{\tau_x}{I_x}, \\ \dot{q} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{\tau_y}{I_y}, \\ \dot{r} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} pr + \frac{\tau_z}{I_z}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pojednostavljeni dinamički model, uvodi sljedeća pojednostavljenja za puni model prikazan jednadžbom (3.20) :

- prve tri jednadžbe koje opisuju translacijska gibanja transformiraju se iz jednadžbi s obzirom na referentni okvir tijela u jednadžbe pisane s obzirom na inercijski referentni okvir
- kod ostale tri koje se odnose na rotacijsko gibanje unosimo pretpostavku malih kuteva tj. pretpostavljamo da je radna točka letjelice vrlo bliska stanju lebdenja.

Uvođenjem pojednostavljenja dobiju se slijedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= (-s_\theta s_\psi - c_\phi s_\theta c_\psi) \frac{F_T}{m}, \\
 \ddot{y} &= (-s_\phi c_\psi - c_\phi s_\theta s_\psi) \frac{F_T}{m}, \\
 \ddot{z} &= g - (c_\phi c_\theta) \frac{F_T}{m}, \\
 \ddot{\phi} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{\tau_x}{I_x}, \\
 \ddot{\theta} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} + \frac{\tau_y}{I_y}, \\
 \ddot{\psi} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta} + \frac{\tau_z}{I_z}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ovim modelom 2 dobiju se jednostavnije jednadžbe translacijskog gibanja. Model jednadžbi bi se koristio za simuliranje gibanja u šest stupnjeva slobode, ali to nije najpogodnije jer je teško procijeniti unutarnju poziciju ili kut  $\psi$ . Iz razloga što su još uvijek opisane u inercijskom okviru, translacijske jednadžbe više ne sadrže članove imaginarnih sila, a i gravitacijska sila se podudara s vertikalnom osi te su joj horizontalne sile jednake nuli.

Dodatno se pojednostavljuje i pretpostavkom malih kutova u rotacijskim jednadžbama gibanja za što vrijedi  $\sin \beta \approx \beta$ ,  $\cos \beta \approx 1$ , pa matrica transformacije postaje približno jednaka jediničnoj dijagonalnoj matrici:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Pod pretpostavkom malih kutova zanemarujemo ono što je u zagradi, pa konačni pojednostavljeni izraz glasi:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{F_T}{m}, \\ \ddot{y} &= \frac{F_T}{m}, \\ \ddot{z} &= g - \frac{F_T}{m}, \\ \ddot{\phi} &= \frac{\tau_x}{I_x}, \\ \ddot{\theta} &= \frac{\tau_y}{I_y}, \\ \ddot{\psi} &= \frac{\tau_z}{I_z}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dobiveni model 3 još uvijek nije linearan zbog umnoška upravljačke varijable i varijable stanja u prve dvije jednačbe. Bilinearizirani model potrebno je još pojednostaviti u svrhu dobivanja potpuno lineariziranog modela.

Zbog pretpostavke stanja bliskog lebdenju za silu potiska  $\mathbf{F}_T$  vrijedi:

$$\mathbf{F}_T \approx mg. \quad (3.24)$$

Kada uvrstimo pretpostavku u (3.23) dobiva se konačni linearizirani model kvadkoptera:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= -\theta g, \\
 \ddot{y} &= \phi g, \\
 \ddot{z} &= g - \frac{F_T}{m}, \\
 \ddot{\phi} &= \frac{\tau_x}{I_x}, \\
 \ddot{\theta} &= \frac{\tau_y}{I_y}, \\
 \ddot{\psi} &= \frac{\tau_z}{I_z}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

### 3.3. Simuliranje u MATLAB-u

Matematički model letjelice implementiran je za simulaciju u MATLAB-u, za intuitivniji prikaz uzeta je konvencija da  $z$  os ide od središta Zemlje prema gore.

Parametri koji su potrebni za simulaciju su:

- masa letjelice –  $m = 1742$  g,
- momenti inercije – približni momenti inercije dobiveni u programu SolidWorks:  
 $I_{xx} = 0.0282 \text{ Nms}^2$ ,  $I_{yy} = 0.0278 \text{ Nms}^2$ ,  $I_{zz} = 0.0517 \text{ Nms}^2$ .

Uvedene su slijedeće oznake za sile i momente [13]:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= F_Z, \\
 u_2 &= \tau_x, \\
 u_3 &= \tau_y, \\
 u_4 &= \tau_z.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jednadžba nelineariziranog modela glasi:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= \theta u_1, \\m\ddot{y} &= -\phi u_1, \\m\ddot{z} &= -mg + u_1, \\I_x\ddot{\phi} &= u_2, \\I_y\ddot{\theta} &= u_3, \\I_z\ddot{\psi} &= u_4.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Iz razloga što je sustav bilinearan:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= \theta u_1, \\m\ddot{y} &= -\phi u_1.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Potpuno linearizirani model:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= g\theta, \\\ddot{y} &= -g\phi, \\\ddot{z} &= \frac{1}{m}(-mg + u_1), \\\ddot{\phi} &= \frac{1}{I_x}u_2, \\\ddot{\theta} &= \frac{1}{I_y}u_3, \\\ddot{\psi} &= \frac{1}{I_z}u_4.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Podsustavi 1:

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}(-mg + u_1). \quad (4.5)$$

Podsustav 2:

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_z} u_4. \quad (4.6)$$

Podsustav 3:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g\theta, \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_y} u_3, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad x^{(4)} = \frac{g}{I_y} u_3. \quad (4.7)$$

Podsustav 4:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -g\phi, \\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{I_x} u_2, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad y^{(4)} = -\frac{g}{I_x} u_2. \quad (4.8)$$

Prikazana je simulacija gibanja u slučaju nominalnog upravljanja. Drugim riječima, to je upravljanje kada željenu trajektoriju uvrstimo u diferencijalnu jednačinu modela i direktno se dobivaju sile i momenti potrebni za takvo gibanje.

Zadana trajektorija glasi:

$$z_r(t) = z_f (1 - e^{-\lambda \cdot t})^5. \quad (4.9)$$

Referentna trajektorija  $z_r$  je ista i za  $x$  i za  $y$  zbog pojednostavljenja. Ovakav oblik trajektorije uzima se iz razloga da je 4 puta diferencijabilna u  $t = 0$ . U suprotnom bi se pojavili impulsi

poput Diracove funkcije, odnosno sve vrijednosti bi bile nula, osim u točki 0 gdje poprima beskonačno veliku vrijednost.

Derivacija referentne trajektorije:

$$\dot{z}_r(t) = 5 \cdot z_f \lambda e^{-\lambda t} \cdot (e^{-\lambda t} - 1)^4, \quad (4.10)$$

$$\ddot{z}_r(t) = -5\lambda^2 z_f e^{-5\lambda t} (e^{\lambda t} - 5)(e^{\lambda t} - 1)^3. \quad (4.11)$$

Uvrštavanjem trajektorije u diferencijalnu jednadžbu:

$$u_1(t) = m\ddot{z}_r + mg. \quad (4.12)$$

Analogno za x:

$$\ddot{y}_r(t) = 5\lambda^3 z_f e^{-5\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^2 (-14 e^{\lambda t} + e^{2\lambda t} 25), \quad (4.13)$$

$$y_r^{(4)}(t) = -5\lambda^4 z_f e^{-5\lambda t} (-256 e^{\lambda t} + 162 e^{2\lambda t} - 32 e^{3\lambda t} + e^{4\lambda t} + 125). \quad (4.14)$$

Uvrštava se u svrhu dobivanja  $u_2(t)$ :

$$u_2(t) = -\frac{I_x}{g} y_r^{(4)}. \quad (4.15)$$

Analogno za y:

$$x_r^{(4)}(t) = -5\lambda^4 z_f e^{-5\lambda t} (-256 e^{\lambda t} + 162 e^{2\lambda t} - 32 e^{3\lambda t} + e^{4\lambda t} + 125). \quad (4.16)$$

Uvrštava se u:

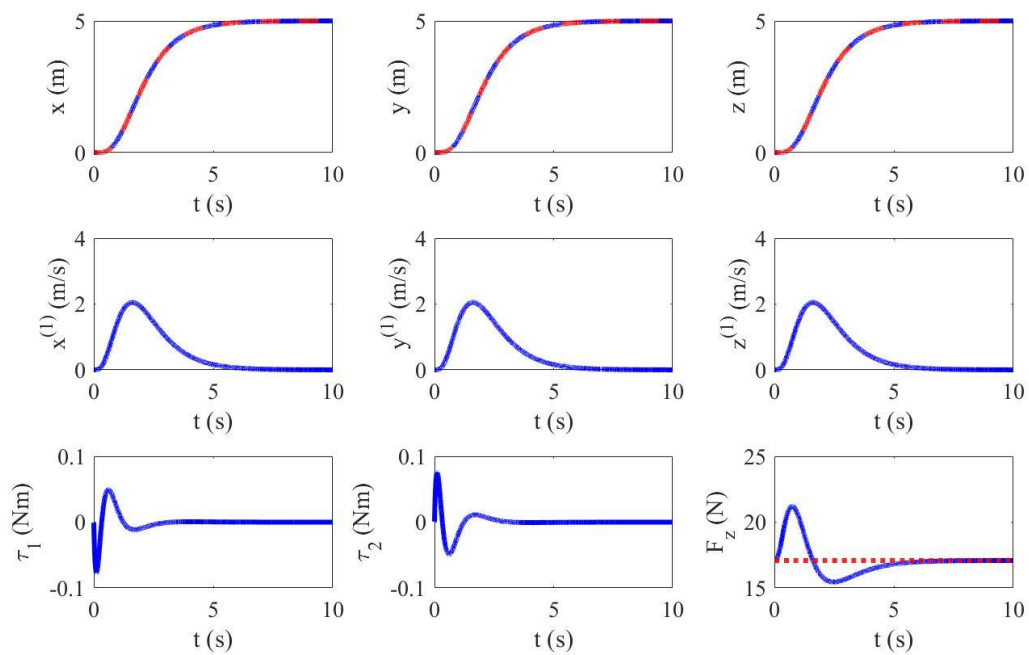
$$u_3(t) = \frac{I_y}{g} x_r^{(4)}, \quad (4.17)$$



dok je:

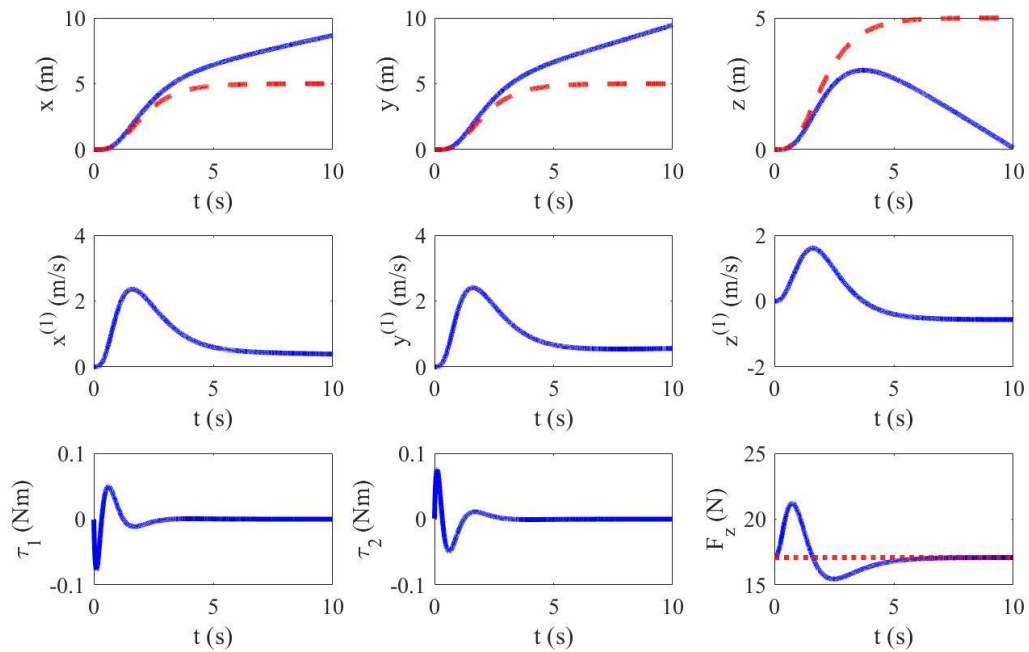
$$u_4(t) = 0. \quad (4.18)$$

Dobiveni su sljedeći rezultati:



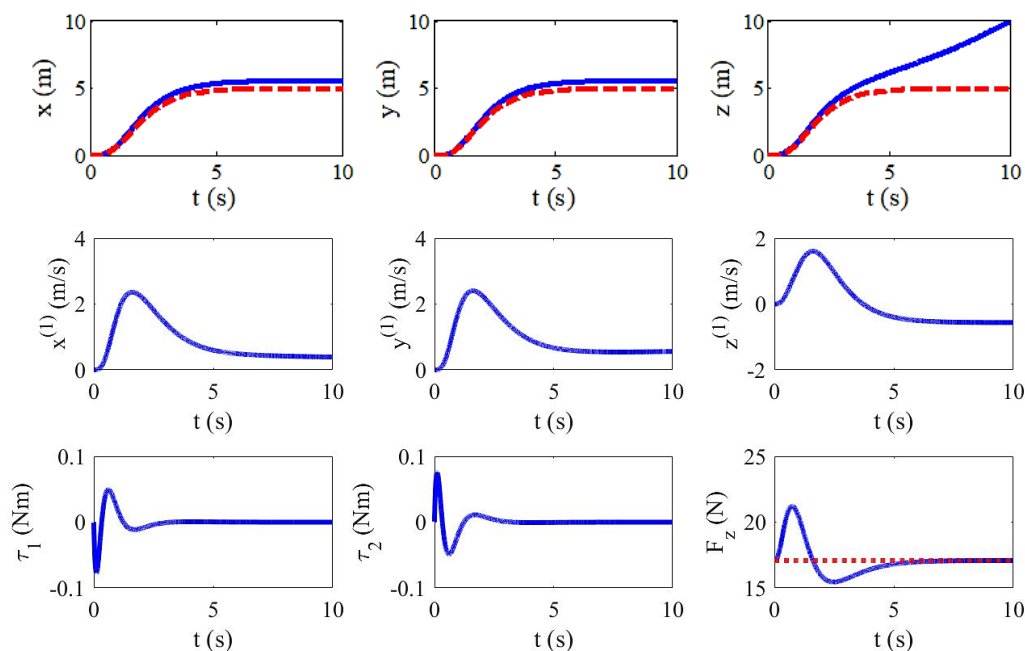
**Slika 43.** Odzivi potpuno lineariziranog modela prikazanog jednadžbama (4.3)

Slika 43. daje prikaz odziva potpuno lineariziranog modela prikazanog jednadžbama (4.3). Odziv sustava (plava linija) u potpunosti se podudara s referentnom trajektorijom (crvena linija).



**Slika 44. Odazivi nelinearnog modela prikazanog jednadžbama (4.2)**

Slika 43 daje prikaz odziva nelinearnog modela prikazanog jednadžbama (4.2). Odziv sustava (plava linija) odstupa od referentne trajektorije (crvena linija) zbog razlike između nelinearnog i lineariziranog modela koja se integracijom akumulira.



**Slika 45. Odzivi nelinearnog modela prikazanog jednađbama (3.20), u slučaju odstupanja parametara nominalnog upravljanja od realnih parametara sustava**

Slika 45 prikazuje odzive nelinearnog modela prikazanog jednađbama (3.20), u slučaju odstupanja parametara nominalnog upravljanja od realnih parametrima sustava.

Masa u nominalnom zakonu upravljanja razlikuje se 1% od mase u dinamičkom modelu (3.25) dok se momenti inercija razlikuju 10%.

Na temelju simulacijskih rezultata zaključujemo da se nominalno upravljanje ne može koristiti u realnim aplikacijama bez regulatora s povratnom vezom po mjerenim stanjima letjelice.

#### 4. ZAKLJUČAK

U sklopu ovog rada napravljen je fizički model letjelice s četiri rotira. Izrađena je pomoću 3D tehnologije, odnosno ispisom dijelova konstrukcije tehnikom sloj po sloj. Pokazani su izazovi u printanju različitih materijala te njihova svojstva i utjecaj na čvrstoću konstrukcije. Razmatranjem mase cjelokupne konstrukcije, njezinog centra te momenta inercije vidljivo je da postoji prostor za napredak. Pogonski sustav definiran je kao sustav koji sadrži propelere, motore, ESC-ove te bateriju. Problematika je sadržana u pravilnom odabiru svih potrebnih komponenti da su međusobno usklađene. Usklađivanje njihovih parametara direktno utječe na konfiguraciju i performanse letjelice. U radu je obrađena kinematika i dinamika krutog tijela sa šest stupnjeva slobode. Prikazana je translacijska i rotacijska kinematika. Kinematički model je zatim lineariziran uz navedene pretpostavke. Naposljetku, prikazane su simulacije za zadanu referentnu trajektoriju u svrhu dobivanja potrebnih sila potisaka i momenata. Na temelju dobivenih rezultata dolazi se do zaključka da je za regulaciju pogodno uvođenje PID regulator. Nakon kompletno realizirane konstrukcije letjelice, u okviru dizajniranja, ali i odabira kompatibilnijih komponenata, zaključujem da ima prostora za poboljšanje. Osim poboljšanja same konstrukcije i komponenata pogonskog sustava, ubuduće je razmatrano proširenje opreme letjelice kao što su GPS i kamera.

## 5. LITERATURA

- [1] Q. Quan, *Introduction to Multicopter Design and Control*. Singapore: Springer Singapore, 2017.
- [2] *The Best Drones of 2019 | Digital Trends*. [Na internetu]. Dostupno na: <https://www.digitaltrends.com/cool-tech/best-drones/>.
- [3] M. Šercer, D. Godec, i A. Pilipovi, *Aditivna proizvodnja s polimerima*. Predavanje, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, str. 257.
- [4] *TURNIGY Plush 30amp Speed Controller w/BEC*. [Na internetu]. Dostupno na: [https://hobbyking.com/en\\_us/turnigy-plush-30amp-speed-controller.html](https://hobbyking.com/en_us/turnigy-plush-30amp-speed-controller.html).
- [5] *Amazon.com: Turnigy Evolution Digital AFHDS Radio Control System w/TGY-iA6C Receiver (White) (Mode 2)*. [Na internetu]. Dostupno na: <https://www.amazon.com/Turnigy-Evolution-Digital-TGY-iA6C-Receiver/dp/B01N1Z5VII>.
- [6] *Amazon.in: Buy Raspberry PI 3 Model B+ Motherboard Online at Low Prices in India | Raspberry Reviews & Ratings*. [Na internetu]. Dostupno na: <https://www.amazon.in/Raspberry-Pi-3B-plus-Motherboard/dp/B07BDR5PDW>.
- [7] *Adafruit LSM9DS1 Accelerometer + Gyro + Magnetometer 9-DOF Breakout, Adafruit Learning System*. [Na internetu]. Dostupno na: <https://learn.adafruit.com/adafruit-lsm9ds1-accelerometer-plus-gyro-plus-magnetometer-9-dof-breakout/overview>.
- [8] *Adafruit 16-Channel 12-bit PWM/Servo Shield - I2C interface ID: 1411 - \$17.50*: Adafruit Industries, Unique & fun DIY electronics and kits. [Na internetu]. Dostupno na: <https://www.adafruit.com/product/1411>. [Pristupljeno: 23-ruj-2019].

- 
- [9] Hrvoje Brezak, *Robusno upravljanje autonomnom letjelicom s četiri rotora*. Diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2017.
- [10] Element. *Kinematičke točke*, [Na internetu]. Dostupno na:  
<https://element.hr/artikli/file/1249>
- [11] Tommaso Bresciani. *Modelling, identification and control of a kvadkopter helicopter*. Master's thesis, Department of Automatic Control, Lund University, 2008.
- [12] *Robotika-P06*. Predavanje, Industrijski i mobilni roboti, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu
- [13] Josip Kasac, Stojan Stevanović, Tihomir Žilić, and Josip Stepanić. *Robust output tracking control of a kvadkopter in the presence of external disturbances*. Transactions of Famena, 37(4):29–42, 2013.

## **PRILOZI**

I. CD-R disc