

# Analitički model za predviđanje naprežanja u parodontnom ligamentu kod ortodontske terapije

---

Jurić, Antonio

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:630310>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Antonio Jurić**

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić, dipl. ing.

Student:

Antonio Jurić

Zagreb, 2019.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Tanji Jurčević Lulić na pruženoj stručnoj pomoći i savjetima tijekom izrade ovog rada.

Antonio Jurić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Antonio Jurić**

Mat. br.: 0035205818

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analitički model za predviđanje napreznja u parodontnom ligamentu kod ortodontske terapije**

Naslov rada na engleskom jeziku: **An Analytical Model for Stress Prediction in Periodontal Ligament during Orthodontic Treatment**

Opis zadatka:

Zub je okružen tankom membranom - parodontnim ligamentom, koja ga povezuje s alveolnom kosti. Preko parodontnog ligamenta, prenose se na alveolnu kost sile koje djeluju na krunu zuba tijekom ortodontske terapije. Poznavanje raspodjele napreznja i deformacija u parodontnom ligamentu, koristi se za predviđanje gibanja zubi kod ortodontske terapije.

U radu je potrebno odrediti analitički napreznja u parodontnom ligamentu kod horizontalne translacije jednokorijenskog zuba. Pretpostaviti da ligament ima oblik paraboloida te eliptičnog paraboloida, da je homogen, izotropan i linearno elastičan te jednolike debljine. Modul elastičnosti i Poissonov faktor parodontnog ligamenta iznose:  $E = 0,68 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,49$ . Potrebno je usporediti rezultate dobivene za različite pretpostavljene oblike parodontnog ligamenta. Geometrijske parametre modela dogovoriti s mentorom.

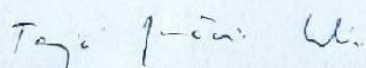
U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
29. studenog 2018.

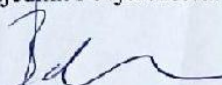
Rok predaje rada:  
1. rok: 22. veljače 2019.  
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2019.  
3. rok: 20. rujna 2019.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 25.2. - 1.3. 2019.  
2. rok (izvanredni): 2.7. 2019.  
3. rok: 23.9. - 27.9. 2019.

Zadatak zadao:

  
Prof.dr.sc. Tanja Jurčević Lulić

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

# Sadržaj

Sadržaj.....	I
Popis slika .....	III
Popis tablica .....	IV
Popis oznaka.....	V
Sažetak .....	VII
Summary .....	VIII
1 Uvod .....	1
2 Zubi .....	2
2.1 Klasifikacija zuba .....	2
2.2 Morfologija zuba .....	2
2.2.1 Sjekutići.....	3
2.2.2 Očnjaci .....	3
2.2.3 Pretkutnjaci.....	4
2.2.4 Kutnjaci .....	4
2.3 Građa zuba .....	4
2.3.1 Parodontni ligament .....	6
2.3.2 Alveolna kost.....	7
3 Osnovni pojmovi ortodontske terapije .....	8
3.1 Središte otpora .....	8
3.2 Biomehanika pomaka .....	10
4 Analitički modeli.....	11
4.1 Pretpostavke.....	11
4.2 Geometrije modela.....	12
4.3 Matrice transformacije.....	14
4.4 Pomaci .....	16
4.5 Deformacije .....	18
4.6 Naprezanja .....	19
4.7 Paraboloid.....	21
4.8 Eliptični paraboloid .....	25
5 Rezultati .....	29

---

5.1	Grafički prikaz rješenja za paraboloid.....	29
5.2	Grafički prikaz rješenja za eliptični paraboloid.....	34
5.3	Usporedba analitičkih modela .....	38
6	Zaključak.....	40
	Literatura .....	41

## Popis slika

Slika 2.1 Morfologija zuba [3] .....	3
Slika 2.2 Anatomija zuba [5].....	4
Slika 2.3 Građa zuba [6].....	5
Slika 2.4 Građa parodontnog ligamenta i okolnih potpornih tkiva [7] .....	6
Slika 2.5 Histološka građa kosti [10] .....	7
Slika 3.1 Središte otpora prilikom čiste translacije [11] .....	8
Slika 3.2 Različiti položaji središta otpora [12] .....	9
Slika 3.3 Središte otpora jednokorijenskog i višekorijenskog zuba [13] .....	9
Slika 3.4 Biomehanika ortodontskog pomaka [15].....	10
Slika 4.1 Osnovni pojmovi i geometrija modela [14] .....	12
Slika 4.2 Položaj koordinatnih sustava [1].....	13
Slika 4.3 Transformacija iz $(n, t, \theta)$ u $(x', y', \theta)$ .....	14
Slika 4.4 Transformacija iz $(x', y', \theta)$ u $(X, Y, Z)$ .....	15
Slika 4.5 Parabolični presjek - Paraboloid .....	21
Slika 4.6 Kružni presjek - Paraboloid .....	23
Slika 4.7 Parabolični presjek - Eliptični paraboloid.....	25
Slika 4.8 Eliptični presjek – Eliptični paraboloid.....	27
Slika 5.1 Raspodjela naprezanja u smjeru osi $X$ za paraboloid.....	30
Slika 5.2 Raspodjela naprezanja u smjeru osi $Y$ za paraboloid .....	31
Slika 5.3 Raspodjela naprezanja u smjeru osi $Z$ za paraboloid .....	32
Slika 5.4 Raspodjela posmičnog naprezanja za paraboloid .....	33
Slika 5.5 Raspodjela naprezanja u smjeru osi $X$ za eliptični paraboloid.....	34
Slika 5.6 Raspodjela naprezanja u smjeru osi $Y$ za eliptični paraboloid .....	35
Slika 5.7 Raspodjela naprezanja u smjeru osi $Z$ za eliptični paraboloid .....	36
Slika 5.8 Raspodjela posmičnog naprezanja za eliptični paraboloid .....	37



## Popis tablica

Tablica 1.1 Karakteristične vrijednosti naprezanja u smjeru osi $X$ za paraboloid .....	30
Tablica 1.2 Karakteristične vrijednosti naprezanja u smjeru osi $Y$ za paraboloid.....	31
Tablica 1.3 Karakteristične vrijednosti naprezanja u smjeru osi $Z$ za paraboloid.....	32
Tablica 1.4 Karakteristične vrijednosti posmičnog naprezanja za paraboloid.....	33
Tablica 1.5 Karakteristične vrijednosti naprezanja u smjeru osi $X$ za eliptični paraboloid .....	35
Tablica 1.6 Karakteristične vrijednosti naprezanja u smjeru osi $Y$ za eliptični paraboloid.....	36
Tablica 1.7 Karakteristične vrijednosti naprezanja u smjeru osi $Z$ za eliptični paraboloid.....	37
Tablica 1.8 Karakteristične vrijednosti posmičnog naprezanja za eliptični paraboloid.....	38
Tablica 1.9 Usporedba naprezanja analitičkih modela na visini $y = 6,24$ mm.....	38

## Popis oznaka

$a$	[mm]	duljina velike poluosi
$a_1$		koeficijent parabole
$b$	[mm]	duljina male poluosi
<b>D</b>		matrica elastičnosti
$D$	[mm]	promjer parodontog ligamenta
$d$	[mm]	distalni pomak
$E$	[N/mm <sup>2</sup> ]	Youngov modul elastičnosti
$e$	[mm]	linearni ekscentricitet
$F_R$	[N]	rezultantna sila
$F_x, F_y, F_z$	[N]	komponente sile koja djeluje na zub
$h$	[mm]	visina parodontnog ligamenta
$M_x, M_y, M_z$	[N/mm]	komponente momenta
$n, t, \theta$		koordinatne osi lokalnog koordinatnog sustava
<b>P</b>		točka na parodontnom ligamentu
$p_x, p_y, p_z$		koordinate točke P
$r$	[mm]	polumjer parodontnoga ligamenta
<b>S</b>		središte otpora
<b>T<sup>1</sup>, T<sup>2</sup></b>		matrice transformacije
$u_x, u_y, u_z$	[mm]	komponente pomaka u globalnom koordinatnom sustavu
$u_{x'}, u_{y'}, u_{\theta}$	[mm]	komponente pomaka u pomoćnom lokalnom koordinatnom sustavu
$u_n, u_t, u_{\theta}$	[mm]	komponente pomaka u lokalnom koordinatnom sustavu
$X, Y, Z$		koordinatne osi globalnog koordinatnog sustava
$x', y', \theta$		koordinatne osi pomoćnog lokalnog koordinatnog sustava
$Y_S$	[mm]	položaj središta otpora zuba
$\alpha$	[rad, °]	kut prve transformacije

---

$\delta$	[mm]	debljina parodontnog ligamenta
$\varepsilon$		numerički ekscentricitet
$\boldsymbol{\varepsilon}$		matrica deformacije
$\boldsymbol{\theta}$		vektor tangecijalan na površinu korijena zuba
$\boldsymbol{\theta}^*$		jedinični vektor
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	[rad, °]	komponente rotacije u globalnom koordinatnom sustavu
$\nu$		Poissonov faktor
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	komponente normalnog naprezanja
$\boldsymbol{\sigma}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	tenzor naprezanja
$\tau_{xy}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	komponenta posmičnog naprezanja
$\varphi$	[rad, °]	kut druge transformacije

## Sažetak

U radu su prikazani analitički modeli za predviđanje naprezanja u parodontnom ligamentu kod ortodontske terapije.

Ortodoncija kao specijalistička grana stomatologije predstavljena je u uvodnom prvom poglavlju. Navedeni su primarni ciljevi i trenutni izbori liječenja te njihove prednosti i nedostaci.

U drugom poglavlju prikazana je klasifikacija i morfologija zubi te je opisana građa i funkcija zubi kao i okolnih tkiva. Posebno su naglašeni parodontni ligament i alveolna kost jer imaju značajnu ulogu kod ortodontskog pomaka zuba.

Osnovni pojmovi ortodontske terapije prikazani su u trećem poglavlju. Zbog potpunog razumijevanja procesa ortodontskog pomaka zuba, objašnjena je biomehanika koja stoji iza pomaka zuba, kao i pojam središta otpora zuba.

Četvrto poglavlje obuhvaća razvoj analitičkih modela. Korijen zuba aproksimiran je pomoću dva modela, a to su paraboloid i eliptični paraboloid. Uvedene su određene pretpostavke i ograničenja modela na temelju kojih su dobivene analitičke formule. Izvod je proveden pomoću klasične teorije elastičnosti, a odnosi se na horizontalnu translaciju jednokorijenskog zuba.

U petom poglavlju prikazani su rezultati provedenih analiza naprezanja za oba modela. Raspodjela komponenti naprezanja prikazana je: grafički, jednadžbom i tablično. Kako su za oba modela korištene iste dimenzije i svojstva parodontnog ligamenta, dobiveni rezultati su međusobno uspoređeni pomoću relativne razlike. Naknadno su grafička raspodjela i rezultati usporedbe potkrijepljeni dokazima.

Na kraju je dan zaključak na temelju provedenih analiza naprezanja.

Ključne riječi: parodontni ligament, ortodontski pomak, analitički model, naprezanje.

## **Summary**

This study focuses on analytical models for stress prediction of periodontal ligament in orthodontic therapy.

Orthodontics as specialist branch of dentistry is introduced in the first chapter. The primary goals and current choices of treatment as their advantages and disadvantages are listed in introductory chapter.

The second chapter presents the classification and morphology of the teeth and describes the structure and function of the teeth as well as the surrounding tissues. Periodontal ligament and alveolar bone are particularly emphasized as they play a significant role in orthodontic tooth movement.

The basic concepts of orthodontic therapy are presented in the third chapter. To fully understand the process of orthodontic tooth movement, it is necessary to explain the biomechanics behind the tooth movement, as well as the term center of tooth resistance.

Chapter four covers the development of analytical models. The root of the tooth was approximated by two models, namely the paraboloid and the elliptical paraboloid. Certain assumptions and limitations of the model were introduced, on the basis of which analytical formulas were obtained. The excerpt was performed using the classical theory of elasticity, referring to the horizontal translation of a single root tooth.

Section five presents the results of the stress analyzes performed for both models. The distribution of stress components is shown: graphically, by equation and in tabular form. As the same dimensions and properties of periodontal ligament were used for both models, the obtained results were compared by relative difference. Subsequently, the graphical distribution and results of the comparison were supported by the evidence.

Finally, a conclusion is made based on the performed stress analyzes.

Key words: periodontal ligament, orthodontic displacement, analytical model, stress.

# **1 Uvod**

Ortodoncija je specijalistička grana stomatologije koje se bavi rastom, razvojem i održavanjem dentofacijalnog kompleksa te proučavanjem razvojnih poremećaja i svih čimbenika koji mogu uzrokovati poremećaj normalnog zagriža. Primarni cilj je dobivanje točnog morfološkog odnosa između zubi gornje i donje čeljusti. Trenutni izbor liječenja temelji se na iskustvu ortodonta i postupku pokušaja i pogrešaka. Takav pristup može produljiti trajanje liječenja, a samim time i troškove. Upravo ti nedostaci su glavni poticaj za primjenu softverskih paketa, koji omogućuju simulaciju ortodontske terapije za svakog pojedinog pacijenta. Prvi korak u razvoju takvih softvera je modeliranje ortodontskog pomaka jednoga zuba [1].

Slijed pojava koje rezultiraju ortodontskim pomakom zuba počinju mehaničkim djelovanjem ortodontske naprave. Sile i momenti, čiju pojavu potiče ortodontska naprava, razmještaju zube na predvidiv način te na način koji je moguće kontrolirati. Mijenjajući iznos i smjer sila te momenata koji djeluju na zub, ortodont je u mogućnosti regulirati pomak zuba, a upravo taj pomak je moguće simulirati pomoću softverskog paketa. Svaka ortodontska naprava može biti ispitana kako bi se utvrdila mehanička sila koju proizvodi. Nužno je poznavanje biomehaničkih principa i načina korištenja ortodontskih naprava kako bi se poboljšali softverski paketi, a posljedično tome obavilo efikasno i uspješno liječenje [2]. Za bolje razumijevanje rada, u idućim poglavljima prikazat će se nužne definicije i terminologija vezana uz geometriju i kretanje zuba.

## 2 Zubi

Zubi su kalcificirani organi, koji se nalaze u ustima većine kralježnjaka. Nalaze se na početku probavnog trakta, u usnoj šupljini, gdje su uloženi u alveolarne kosti gornje (maksile) i donje čeljusti (mandibule) te su obloženi gingivom. Na položaj i oblik zuba, u čeljusti, utječu: genetska determinanta, ravnoteža sila mišića obraza i jezika, temporomandibularni zglobovi, kosti čeljusti, sile žvakanja te različite sile koje djeluju tijekom rasta i razvoja. Postavljeni u gornjoj i donjoj čeljusti, zubi čine zubne lukove koje dijelimo na gornji zubni luk i donji zubni luk. Gornji zubni luk ima oblik elipse, dio je lubanje, a samim time je i nepokretan, s druge strane donji zubni luk ima oblik parabole i dio je pomične donje čeljusti. Svaki zubni luk ima šesnaest zubi, od toga: četiri sjekutića, dva očnjaka, četiri pretkutnjaka i šest kutnjaka.

### 2.1 Klasifikacija zuba

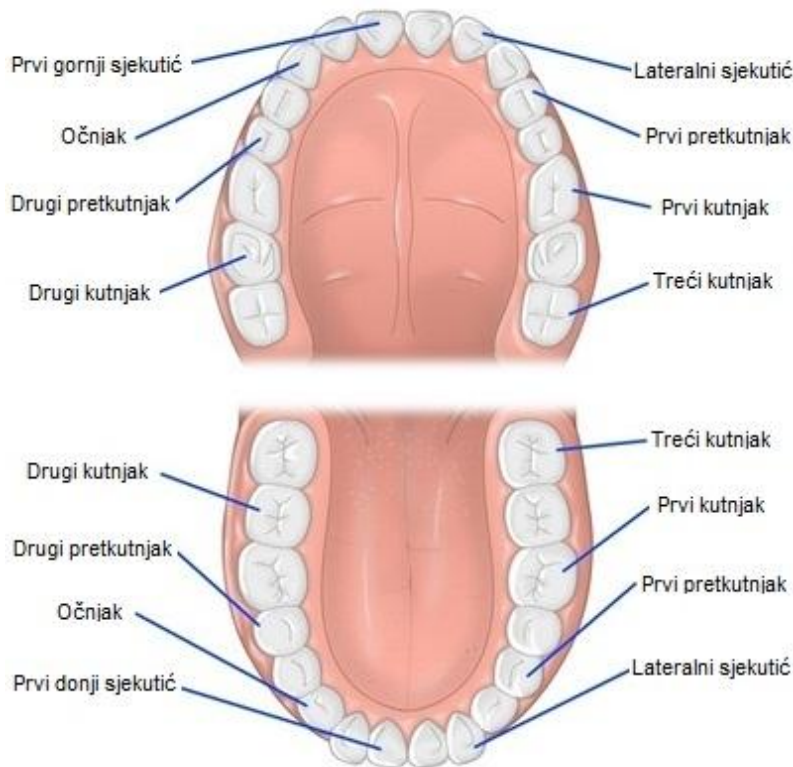
Zubi se mogu podijeliti prema: periodu nicanja, lokalizaciji u zubnom luku i morfološkom obliku. Posebno će biti prikazana morfologija zuba, kako bi se ukazalo na razlike među zubima jer će se modeliranje ortodontskog pomaka prikazati isključivo na primjeru jednokorijenskog zuba.

Gledajući period nicanja, čovjek tijekom svojeg životnog vijeka izmjeni dvije generacije zuba, mliječnu i trajnu denticiju. Mliječnu denticiju čini ukupno dvadeset zuba, a trajnu trideset i dva zuba. Period izmjene mliječne i trajne denticije naziva se mješovitom denticijom, a započinje nicanjem prvog trajnog zuba.

Prema mjestu u zubnom luku, zubi se dijele na: gornje i donje zube, desne i lijeve zube te prednje i bočne zube. Prednji zubi su sjekutići i očnjaci, dok su bočni zubi pretkutnjaci i kutnjaci.

### 2.2 Morfologija zuba

Prema morfološkim karakteristikama zubi se dijele na: sjekutiće, očnjake, pretkutnjake i kutnjake. Gornji zubni niz čine dva središnja sjekutića, dva lateralna sjekutića, par prvih i par drugih pretkutnjaka te prvi, drugi i treći para kutnjaka. Treći kutnjaci često mogu nedostajati. Ista zubna formula vrijedi i za donji zubni niz, kako je i prikazano na slici 2.1.



Slika 2.1 Morfologija zuba [3]

### 2.2.1 Sjekutići

Smješteni su sprijeda u zubnom luku, a ima ih osam, po četiri u svakoj čeljusti. Imaju jedan korijen, koji ima oblik konusa spljoštenog u lateralno – medijalnom smjeru i zato na njemu razlikujemo medijalnu i lateralnu površinu. Na sredinama tih površina, katkad, se nalazi jedna vrlo plitka brazda. Svi sjekutići su međusobno različiti [4].

### 2.2.2 Očnjaci

Duži su od sjekutića. Ima ih četiri, po dva u svakoj čeljusti. Na njihovoj kruni razlikujemo slobodan rub i četiri površine: *facies lingualis*, *labialis*, *medial* i *lateral*. Očnjaci imaju jedan koničan korijen, malo spljošten u stranu s obzirom na medio – sagitalnu ravninu, s uzdužnim žlijebom. Korijen je zavijen prema lateralnoj strani. Donji očnjak može imati dva korijena, ali su gornji očnjaci veći od donjih. Korijen gornjih očnjaka je tako dug da seže do razine dna nosne šupljine, ali kako je smješten nešto lateralno, ne dopire u nju [4].



### 2.2.3 Pretkutnjaci

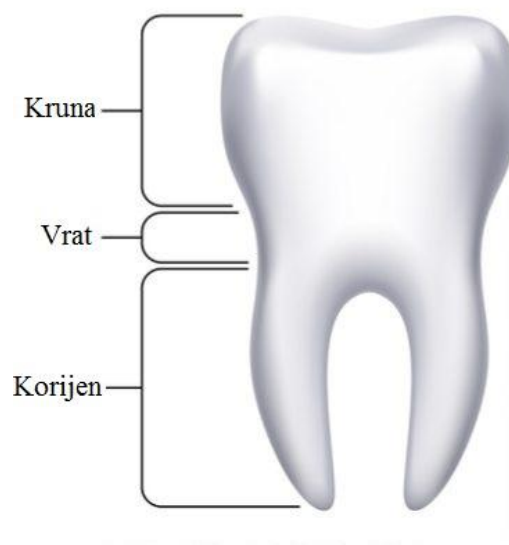
Pretkutnjaci su razvijeni samo u trajnom zubalu, kod mliječnog zubala ih nema, a na njihovom su mjestu kutnjaci. Ima ih osam, po četiri u svakoj čeljusti. Korijen je obično spljošten u smjeru naprijed – natrag, te ima žljebove na prednjoj i stražnjoj strani. Prvi gornji pretkutnjak obično ima dva korijena, jedan mu leži lateralno, a drugi medijalno. I drugi gornji pretkutnjak može imati dva korijena. Gornji pretkutnjaci veći su od donjih [4].

### 2.2.4 Kutnjaci

Kutnjaka ima dvanaest, po šest u svakoj čeljusti. Veličina kutnjaka se smanjuje od prvog prema trećem. Gornji kutnjaci su manji od donjih te imaju kruna u obliku romba, dok je donjima kruna kvadratična. Gornji zubi imaju smjer koso prema dolje i van, a donji prema gore i unutra [4].

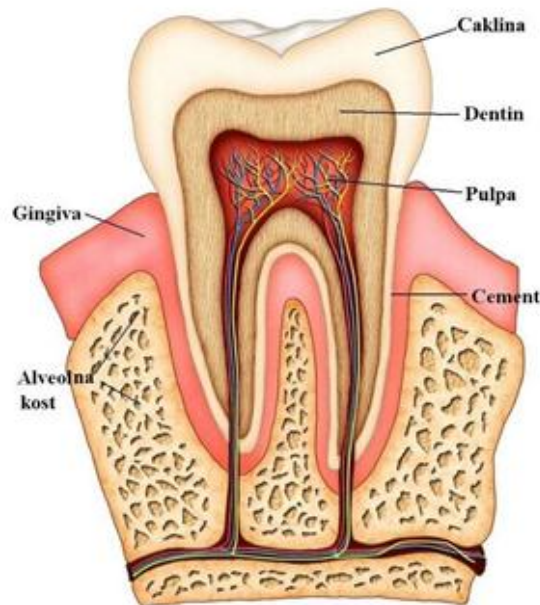
## 2.3 Građa zuba

Anatomski gledano, na svakom zubu se razlikuju tri osnovna dijela: kruna, vrat i korijen kako je i prikazano na slici 2.2. Dio zuba koji slobodno strši u usnu šupljinu je kruna zuba, a dio koji se nalazi u kosti je korijen zuba. Dio koji se nalazi između krune i korijena, a pokriven je sluznicom, naziva se vrat zuba. Zubni korijen završava šiljkom koji se naziva *apex radialis dentis*.



Slika 2.2 Anatomija zuba [5]

Strukturalna građa zuba prikazan je na slici 2.3. Svaki ljudski zub izgrađen je od tri kalcificirana tkiva: cakline, dentina i cementa te od posebnog vezivnog tkiva - zubne pulpe. Parodontni ligament, cement, alveolna kost i gingiva čine funkcijsku cjelinu potpornih tkiva zvanu parodont.



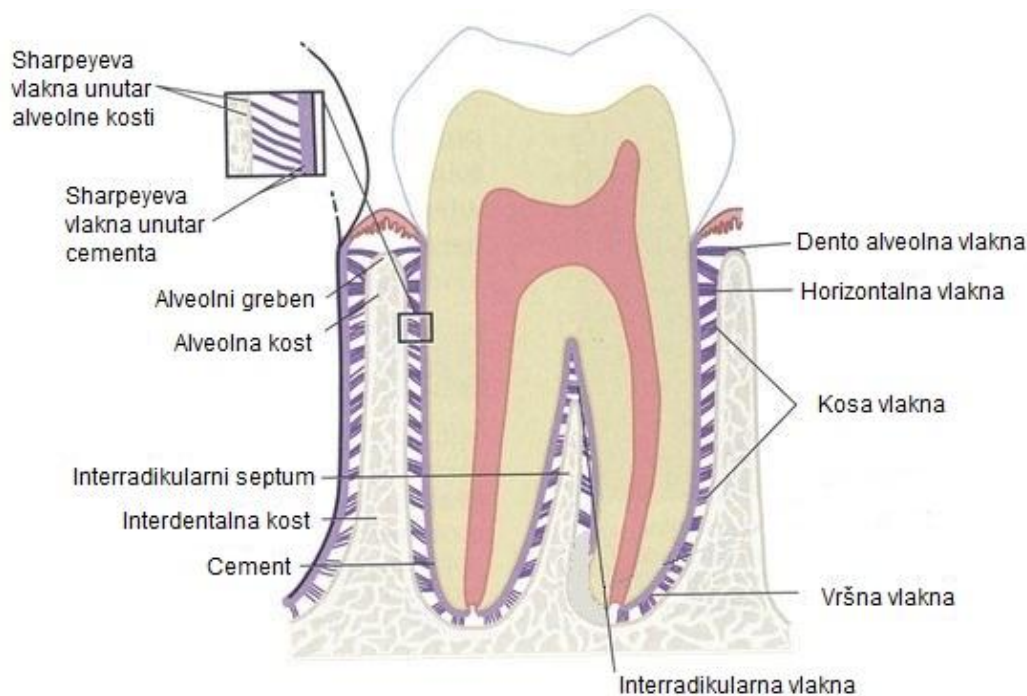
Slika 2.3 Građa zuba [6]

Caklina je najtvrdje tkivo u ljudskom organizmu, ona štiti strukturu zuba od jakih žvačnih sila te daje vanjski oblik kruni zuba. U predjelu krune prekriva dentin s kojim je u kontaktu na caklinsko – dentinskom spojištu (*CDS*). Dentin tvori najveći dio zuba, tvrdi je od kosti, a mekši od cakline. U korijenskom dijelu zuba prekriva ga cement. Cement je tanki sloj mineraliziranog tkiva koje prekriva vanjsku površinu korijena zuba. Ima funkciju vezivanja kolagenih vlakana parodontnog ligamenta za površinu dentina i omogućavanje funkcioniranja potpornog aparata zuba te održavanje odgovarajuće širine parodonta i dužine korijena koje su potrebne za savladavanje fizioloških i funkcionalnih opterećenja. Šupljina zuba ispunjena je mekom crvenkastom supstancijom, koja se naziva zubna pulpa, ona je odgovorna za produkciju dentina. Osnovni strukturni elementi pulpe su vezivno - tkivne stanice, koje su bogate krvnim žilama i živcima.

Posebno će biti prikazani dijelovi parodonta jer se pomoću njih osigurava ortodontski pomak zuba. Ti dijelovi imaju funkcije po kojima su sposobni prilagoditi se tijekom svog životnog vijeka. Primjerice, tijekom liječenja, pomak zuba ostvaruje se primjenom ortodontskih sila na zub. Pod utjecajem tih sila, u dijelu korijena zuba koji je tlačno opterećen pojavit će se resorpcija kosti čeljusti (alveolne kosti), dok će se kost formirati u dijelu na kojem djeluje vlačno opterećenje. Koordinacija ova dva procesa rezultira trajnim pomakom zuba u alveolnoj kosti [2].

### 2.3.1 Parodontni ligament

Parodontni ligament je gusto vezivno tkivo, koje kao dio parodonta osigurava vezivanje zuba putem cementa na okolnu alveolnu kost. Njegova zadaća je zadržati gingivu u pravilnom položaju spram zuba te amortizirati i prenositi okluzalne sile sa zuba na alveolnu kost. Građa parodontnog ligamenta prikazana je na slici 2.4, tvore ga: stanice, međustanične tvari i vlakna. U stanice parodontnog ligamenta spadaju: fibroblasti, osteoblasti, osteoklasti, cementoblasti te epitelne i obrambene stanice. Stanice parodontnog ligamenta sudjeluju u stvaranju i resorpciji tvrdih tkiva parodonta. Vlakna parodontnog ligamenta, mogu biti kolagena (90%, tip I i tip II), oksitalanska, retikulinska i elastična vlakna. Više vlakana poredanih paralelno formira kolageni snop, koji se vezan u cementu i alveolnoj kosti naziva Sharpeyev snop. Parodontni ligament je opskrbljen krvnim i limfnim žilama te živcima koji prolaze kroz vršni otvor i ulaze u pulpu. Krvne žile parodontnog ligamenta osiguravaju hranu stanicama parodontnog ligamenta te okolnim stanicama cementa i alveolne kosti. Živci parodontnog ligamenta su sastavni dio proprioceptivnog mehanizma zaduženog za prijenos osjeta boli, pritiska, dodira i sl.

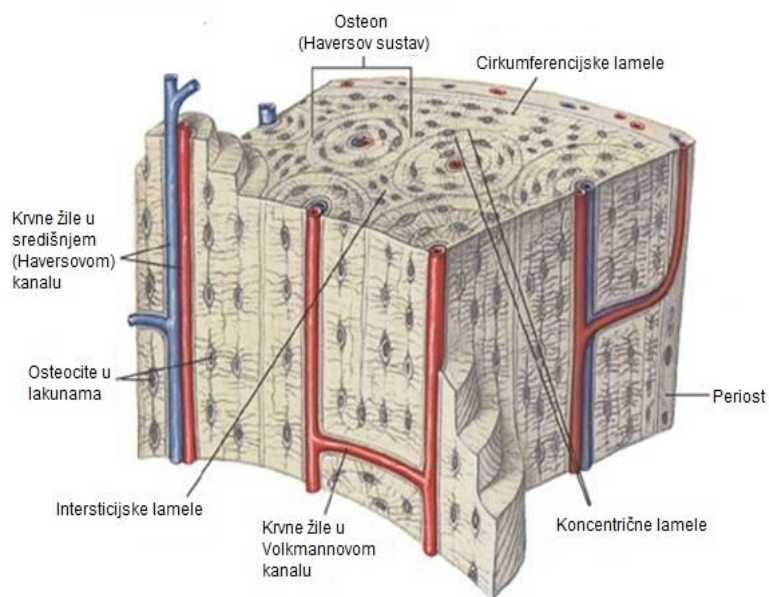


Slika 2.4 Građa parodontnog ligamenta i okolnih potpornih tkiva [7]

Debljina parodontnog ligamenta je oko 0,25 mm (varira od 0,2 do 0,4 mm). Parodontni ligament omogućuje da sile, izazvane žvakanjem i drugim dodirima zuba, budu raspodijeljene i resorbirane tijekom alveolnog procesa pregradnje kojeg omogućuju svojstva alveolne kosti. Također, omogućuje pomake zuba koji su određeni širinom, visinom i kvalitetom PDL-a [8].

### 2.3.2 Alveolna kost

Alveolna kost je koštano tkivo koje ima zadatak okružiti i učvrstiti zube. Izgrađuje alveolni nastavak koji predstavlja kontinuiranu cjelinu s bazalnim kostima maksile i mandibule. Alveolna kost se razvija tijekom nicanja zubi i resorbira se po njihovom gubitku. Ima dvije osnovne uloge: potpornu (sudjeluje u vezivanju parodontnih vlakana) i prijenosnu (preko nje se sile oslobodene tijekom žvakanja, gutanja, govora i sl. razlažu, prenose i amortiziraju). S obzirom na funkciju, alveolna kost se može podijeliti na dio kosti u koji se pripajaju vlakna parodontnog ligamenta i potporni dio kosti kojeg čine vanjska kompakta (zbita kost) i spongioza (spužvasta kost). Gledajući masene udjele, alveolna kost izgrađena je od neorganskog dijela koji zauzima 45% [hidroksiapatit (60%)], organskog dijela na koji otpada 35% [kolagen, (preko 90%)], dok preostalih 20% čini voda [9]. Histološka struktura alveolne kosti je slična strukturi koštanog tkiva u drugim dijelovima organizma, kako je prikazano na slici 2.5.



Slika 2.5 Histološka građa kosti [10]

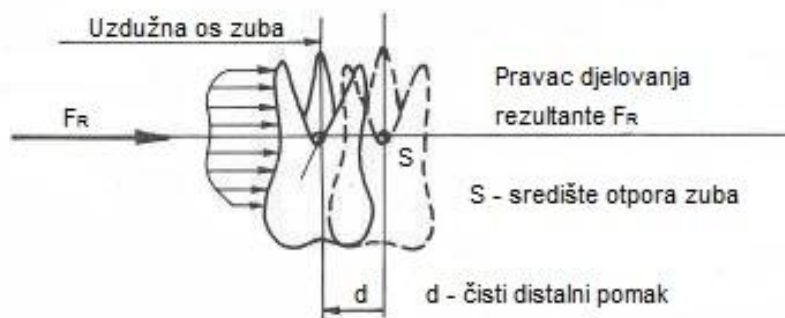
Alveolna kost je perforirana brojnim otvorima koji potječu od Volkmanovih kanala i kroz koje prolaze krvne i limfne žile te živčana vlakna. Kroz spongiozu prolaze nutritivni kanali sa arterijama, venama, limfnim žilama i živčanim vlaknima. Vanjska površina alveolnog nastavka je pokrivena periostom, čiji je fibrozni sloj srastao s kolagenim vlaknima iz gingive. Unutarnji dio alveolnog nastavka je prekriven osteoblastima, za koje se smatra da su dio parodontnog ligamenta. Za stvaranje i resorpciju alveolne kosti odgovorne su osteogenetske stanice i osteoklasti. Osteogenetske stanice stvaraju kost i ovisno o aktivnosti mogu biti preosteoblasti, osteoblasti (formativne stanice koje sintetiziraju proteine kolagenog i nekolagenog koštanog matriksa), osteociti (prenose signale kanalićima do stanične površine). Nasuprot tome nalaze se osteoklasti, stanice koje resorbiraju alveolnu kost [8].

### 3 Osnovni pojmovi ortodontske terapije

Ortodontsko liječenje temelji se na činjenici, da je primjenom odgovarajućih sila moguće premjestiti zube kroz alveolnu kost bez trajnog oštećenja zubi ili njihove vezanosti za kost. Za potpuno razumijevanje procesa ortodontskog pomaka zuba, potrebno je objasniti biomehaniku koja stoji iza pomaka zuba, kao i pojam središta otpora zuba (S).

#### 3.1 Središte otpora

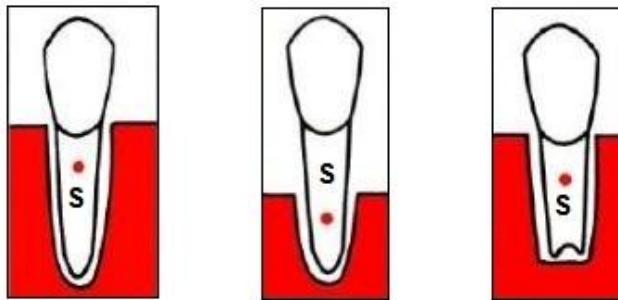
Središte otpora obično se definira kao točka u kojoj se postiže translacija. U toj točki pravac djelovanja rezultantne sile, koja djeluje na zub, okomito siječe uzdužnu os zuba. Ukoliko ortodontska sila djeluje u središtu otpora, dolazi do čiste translacije zuba kao što je prikazano na slici 3.1.



Slika 3.1 Središte otpora prilikom čiste translacije [11]

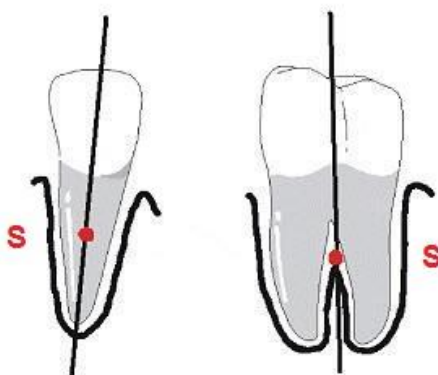
Na temelju slike 3.1, lako se može zaključiti kako trebaju biti konstruirane naprave za ortodontski pomak zuba. Najbolji rezultati se postižu ako pravac djelovanja sile koja djeluje na kukicu vanjskog luka ortodontske naprave bude okomit na uzdužnu os zuba te ako u sagitalnoj projekciji prolazi kroz središte otpora zuba (točka S) [11].

Položaj središta otpora zuba varirat će između različitih zuba, veliki utjecaj će imati sama anatomija zuba, kao i duljina korijena. Središte otpora također će se mijenjati s visinom alveolne kosti, tako da će biti drugačije kod djeteta u odnosu na odraslu osobu koja boluje od paradontne bolesti (središte otpora kod odraslih osoba koje gube koštanu masu pomiče se korijenu zuba). Različiti položaji središta otpora zuba u ovisnosti o duljini korijena i visine alveolne kosti prikazani su na slici 3.2.



Slika 3.2 Različiti položaji središta otpora [12]

Središte otpora u jednokorijenskom zubu, mjereno od grebena alveolne kosti po uzdužnoj osi zuba, nalazi se približno na  $\frac{1}{3}$  do  $\frac{1}{2}$  duljine korijena zuba, kako je i prikazano na lijevom dijelu slike 3.3. Središte otpora višekorijenskog zuba, mjereno po uzdužnoj osi zuba, nalazi se 1 – 2 mm niže od mjesta grananja korijena zuba, što se vidi na desnom dijelu slike 3.3.



Slika 3.3 Središte otpora jednokorijenskog i višekorijenskog zuba [13]

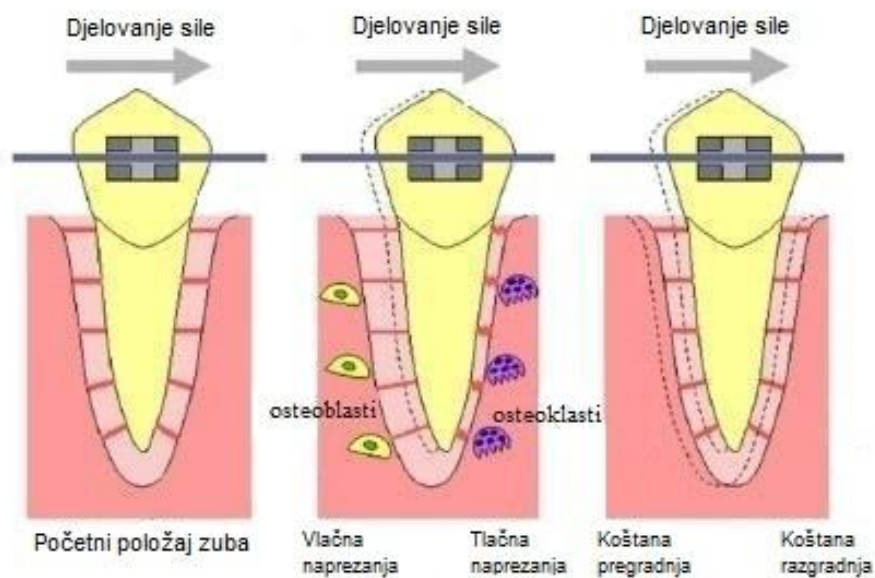
Prethodno spomenuto određivanje središta otpora zuba predstavlja način koji se temelji na iskustvu, do točnog položaja središta otpora zuba može se doći na analitički način, jednadžbom (1.1). Komponente sile  $F$  kojom se djeluje na zub, svode se samo na  $F_x$  jer se promatra slučaj čiste translacije. Zbog ravnoteže, moment vanjske sile  $F_x$  u odnosu na globalnu os  $Z$  treba biti poništen momentom reakcijske sile [14]. Iz te ravnoteže slijedi udaljenost središta otpora zuba od vrha korijena istog ( $Y_S$ ):

$$F_x \cdot Y_S = M_z \quad \rightarrow \quad Y_S = \frac{M_z}{F_x} . \quad (1.1)$$



### 3.2 Biomehanika pomaka

Ortodontski pomak zuba okarakteriziran je promjenama pregradnje dentalnih i parodontnih tkiva, što uključuje: pulpu, parodontni ligament, alveolnu kost i gingivu. Značajno se razlikuje od običnog fiziološkog zubnog pomaka, koji se odlikuje sporim kretanjem zuba u trabekularnu kost ili zbog rasta u kortikalnu kost. Nasuprot tome, ortodontsko kretanje zuba može se ostvariti jako brzo ili jako sporo ovisno o primijenjenoj sili te veličini i biološkom odgovoru parodontnog ligamenta. Sila se ostvaruje pomoću ortodontske naprave, te se prenosi na krunu zuba, pa sve do korijena te naposljetku do parodontnog ligamenta i alveolne kosti koji okružuju korijen zuba. Biomehanika ortodontskog pomaka prikazana je na slici 3.4.



Slika 3.4 Biomehanika ortodontskog pomaka [15]

Optimalna ortodontska sila učinkovito pomiče zub na željenu poziciju bez uzrokovanja neugode i oštećenja tkiva, nasuprot tome prevelika sila uništava parodont. U osnovi, najbolji pomak zuba se ostvaruje djelovanjem kontinuirane sile kroz duži vremenski period. Na površini zuba u smjeru njegova pomaka, parodontna membrana se skupi, što dovodi do tlačnih naprezanja u parodontnom ligamentu. Na površini kosti koja je u dodiru s parodontnom membranom, počinje resorpcija koju potiču osteoklasti svojim djelovanjem. Na površini korijena, u suprotnom smjeru od pomaka zuba, razvlači se parodontna membrana. Počinju djelovati osteoblasti koji stvaraju dijelove alveolne kosti u području gdje se nekada nalazio zub. Zbog toga zubi mogu, tijekom ortodontskog liječenja, biti labavi. Kada je pomak postignut, ligamenti se nalaze u neutralnom položaju, a kost se stvori i popuni prostor oko parodontnog ligamenta, istovremeno učvršćujući zub [16].

## 4 Analitički modeli

Potrebno je analitički odrediti naprezanja u parodontnom ligamentu koja se javljaju kod horizontalne translacije jednokorijenskog zuba. Analitičke formule izvedene su za prvi gornji sjekutić. Korijen zuba aproksimiran je pomoću dva modela, a to su paraboloid i eliptični paraboloid. Za oba analitička modela koristit će se isti koordinatni sustavi i pretpostavke pa će vrijediti i iste jednačbe za: matrice transformacije, pomake, deformacije i naprezanja. Uvedene su određene pretpostavke i ograničenja modela koja su navedena u idućem poglavlju.

### 4.1 Pretpostavke

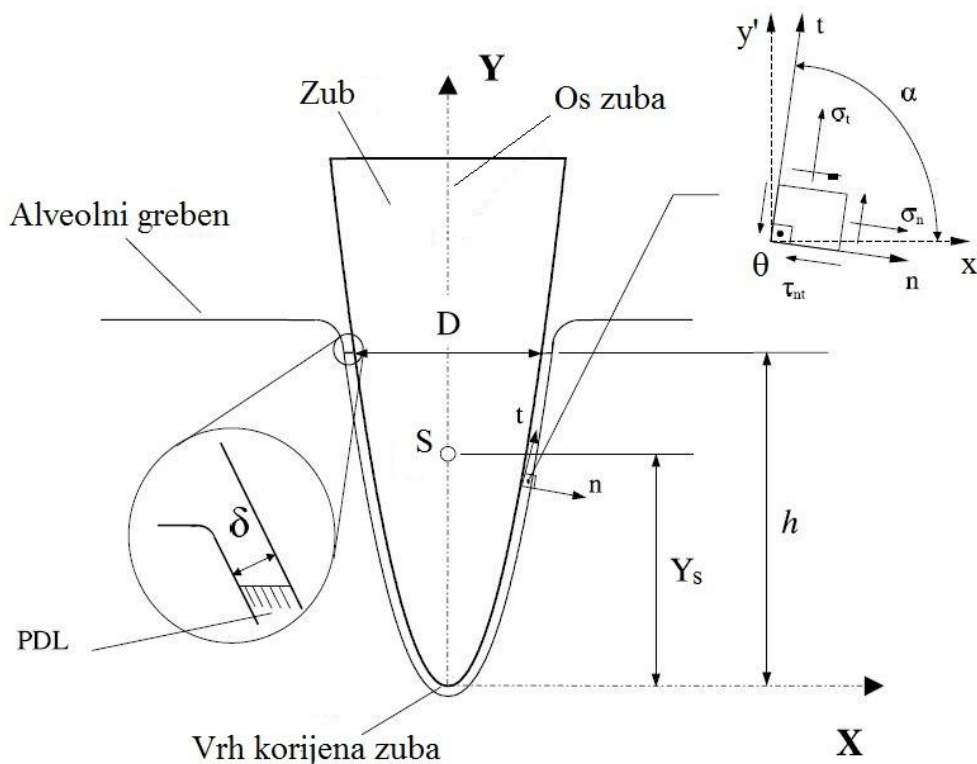
Analitičke formule pripadnih modela izvodit će se pomoću klasične teorije elastičnosti, a to posljedično podrazumijeva, da će pomaci ligamenta imati mali iznos. Nakon primjene sile na zub, ravnoteža u parodontnom ligamentu postiže se kroz nekoliko minuta, nasuprot tome remodeliranje alveolne kosti odvija se značajno duže. Također, sile koje se primjenjuju pri ortodontskoj terapiji maloga su iznosa, a kako alveolna kost i korijen zuba imaju Youngov modul elastičnosti mnogo veći od ligamenta, pretpostavlja se da su alveolna kost i korijen zuba kruta tijela. Usprkos tome što je parodontni ligament nelinearan i anizotropan materijal s vremenski ovisnim ponašanjem, u ovim modelima će biti pretpostavljen kao homogen, izotropan i linearno elastičan materijal [1]. Radi preglednosti, sve dodatne i prethodno navedene pretpostavke svrstane su u listu:

- 1) parodontni ligament ima jednoliku debljinu  $\delta$ ,
- 2) na cervikalnom rubu ligamenta naprezanja iznose 0, a cervikalni rub ima oblik pravilnog kružnog konusa kod paraboloida,
- 3) čašica, koja oblikuje vanjsku granicu modela, fiksna je i beskonačno kruta,
- 4) korijen zuba, koji oblikuje unutarnju granicu modela je pomičan i beskonačno krut,
- 5) parodontni ligament je homogen, izotropan i linearno elastičan materijal,
- 6) ortodontske sile, koje se primjenjuju, su male po iznosu, kao i pomaci zuba,
- 7) alveolni greben je horizontalan,
- 8) parodontni ligament gotovo je nestlačiv.



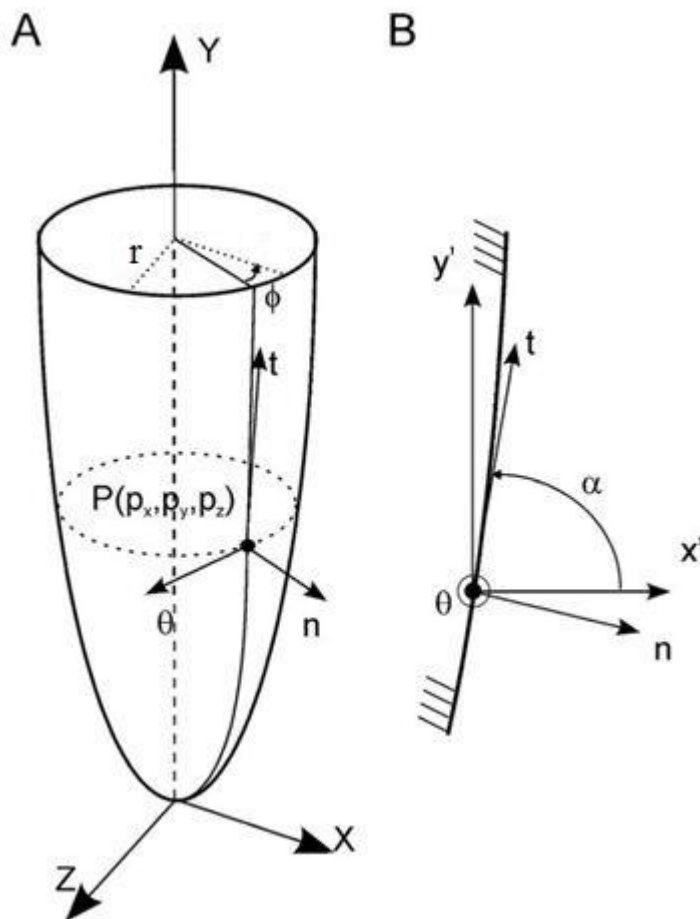
## 4.2 Geometrije modela

Korijen zuba okružen je parodontnim ligamentom debljine  $\delta$ , mjereno okomito na površinu korijena, kao što je prikazano na slici 4.1. Os zuba je vertikalna, te se pretpostavlja da je alveolni greben horizontalan. Duljina korijena  $h$  definira se kao udaljenost između vrha korijena zuba i početka parodontnog ligamenta mjereno duž osi zuba te predstavlja visinu parodontnog ligamenta. Promjer  $D$  mjeri se na alveolnom grebenu.



Slika 4.1 Osnovni pojmovi i geometrija modela [14]

Kako su geometrija paraboloida i eliptičnog paraboloida slične, a položaj koordinatnih sustava isti, na jednom modelu će se prikazati i objasniti položaj koordinatnih sustava. Na slici 4.2 prikazan je model paraboloida s pripadnim koordinatnim sustavima.



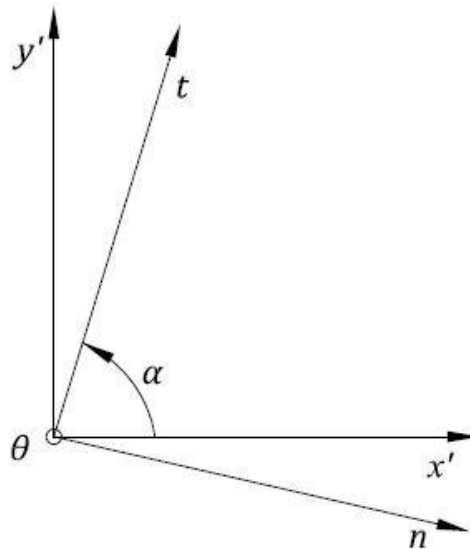
Slika 4.2 Položaj koordinatnih sustava [1]

Globalni trodimenzionalni koordinatni sustav  $(X, Y, Z)$  pridružen je zubu. Kao što je prikazano na slici 4.2 (A), ishodište leži u vrhu korijena zuba, a  $XZ$ -ravnina vodoravna je ravnina, paralelna s alveolnim grebenom. Osim globalnog koordinatnog sustava, za svaku točku korijena  $P(p_x, p_y, p_z)$  definiran je lokalni koordinatni sustav  $(n, t, \theta)$ . Os  $n$  predstavlja normalu na površinu zuba, a os  $\theta$  je vodoravna i tangencijalna na površinu. Kako bi se olakšala transformacija između globalnog i lokalnog koordinatnog sustava, definiran je još jedan lokalni koordinatni sustav  $(x', y', \theta)$ . Ovaj se sustav dobiva rotiranjem globalnog koordinatnog sustava oko  $Y$  osi i pomicanjem ishodišta u točku  $P$  [1]. Točna orijentacija ovih lokalnih osi prikazana je na slici 4.2 (B).

### 4.3 Matrice transformacije

Kako bi bilo moguće prikazati raspodjelu napreznja i deformacija u parodontnom ligamentu, potrebno je provesti transformacije iz lokalnog u globalni koordinatni sustav. U ovom slučaju provodit će se dvije transformacije jer model obuhvaća tri koordinatna sustava.

Prva transformacija iz lokalnog koordinatnog sustava  $(n, t, \theta)$  u pomoćni lokalni koordinatni sustav  $(x', y', \theta)$  je rotacija oko osi  $\theta$ , definirana kutem  $\alpha$ , kako je i prikazano na slici 5.3.



Slika 4.3 Transformacija iz  $(n, t, \theta)$  u  $(x', y', \theta)$

Navedena transformacija postiže se matricom transformacije  $\mathbf{T}^1$ , čiji su članovi kosinusi smjera osi u lokalnom koordinatnom sustavu  $(n, t, \theta)$  u odnosu na pomoćne lokalne koordinatne osi  $(x', y', \theta)$ . Izraz za matricu  $\mathbf{T}^1$  glasi:

$$\mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} \cos(n, x') & \cos(n, y') & \cos(n, \theta) \\ \cos(t, x') & \cos(t, y') & \cos(t, \theta) \\ \cos(\theta, x') & \cos(\theta, y') & \cos(\theta, \theta) \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Ako je kut između koordinatnih osi  $x'$  i  $t$  jednak  $\alpha$ , prema slici 4.3 vrijede sljedeće jednakosti:

$$\cos(n, x') = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha, \quad (1.3)$$

$$\cos(n, y') = \cos(90 + (90 - \alpha)) = -\cos \alpha, \quad (1.4)$$

$$\cos(t, x') = \cos \alpha, \quad (1.5)$$

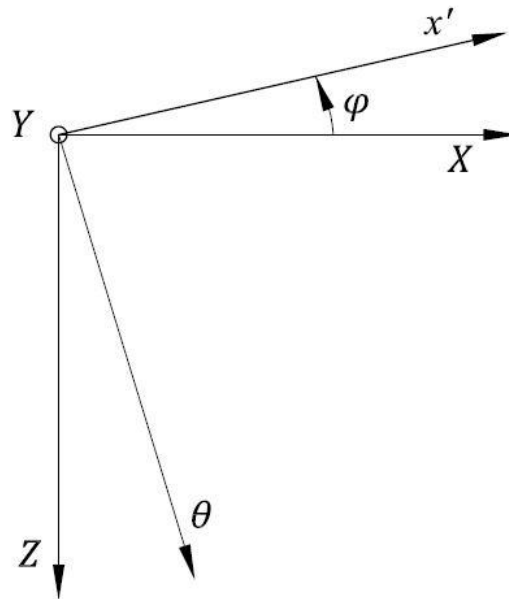
$$\cos(t, y') = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha. \quad (1.6)$$

Konačni oblik matrice transformacije  $\mathbf{T}^1$  dobiva se uvrštavanjem izraza (1.3), (1.4), (1.5) i (1.6) u matricu (1.2):

$$\mathbf{T}^1 = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Pri čemu se treći red i stupac odnose na kut zakreta.

Druga transformacija iz pomoćnog lokalnog koordinatnog sustava  $(x', y', \theta)$  u globalni koordinatni sustav  $(X, Y, Z)$  je rotacija oko osi  $Y$ , definirana kutem  $\varphi$ , kako je i prikazano na slici 5.4.



Slika 4.4 Transformacija iz  $(x', y', \theta)$  u  $(X, Y, Z)$

Navedena transformacija postiže se matricom transformacije  $\mathbf{T}^2$ , čiji su članovi kosinusi smjera osi u pomoćnom lokalnom koordinatnom sustavu  $(x', y', \theta)$  u odnosu na globalne koordinatne osi  $(X, Y, Z)$ . Izraz za matricu  $\mathbf{T}^2$  glasi:

$$\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} \cos(x', X) & \cos(x', Y) & \cos(x', Z) \\ \cos(y', X) & \cos(y', Y) & \cos(y', Z) \\ \cos(\theta, X) & \cos(\theta, Y) & \cos(\theta, Z) \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Ako je kut između koordinatnih osi  $x'$  i  $X$  jednak  $\varphi$ , prema slici 4.4 vrijede sljedeće jednakosti:

$$\cos(x', X) = \cos \varphi , \quad (1.9)$$

$$\cos(x', Z) = \cos(90 + \varphi) = -\sin \varphi , \quad (1.10)$$

$$\cos(\theta, X) = \cos(90 - \varphi) = \sin \varphi , \quad (1.11)$$

$$\cos(\theta, Z) = \cos \varphi . \quad (1.12)$$

Konačni oblik matrice transformacije  $\mathbf{T}^2$  dobiva se uvrštavanjem izraza (1.9), (1.10), (1.11) i (1.12) u matricu (1.8):

$$\mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} . \quad (1.13)$$

Pri čemu se drugi red i stupac odnose na kut zakreta.

## 4.4 Pomaci

Svako pomicanje korijena može se opisati kao kombinacija translacije vrha korijena ( $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ) i rotacije oko vrha korijena ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ). To rezultira pomakom točke P, odnosno tlačenjem i vlačnjem parodontnog ligamenta. Kako je PDL vrlo tanak i kako se direktni kontakt između korijena zuba i alveolne kosti u ortodontskoj terapiji izbjegava, vrijednosti rotacija ostaju vrlo male te se mogu zanemariti. Pošto se u zadatku prati horizontalna translacija jednokorijenskog zuba, ostaje samo jedan pomak:

$$u_y = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0 , \quad (1.14)$$

$$u_x = u . \quad (1.15)$$

Korištenjem matrica transformacije (1.7) i (1.13) svaki se pomak točke P na korijenu može prikazati u globalnom koordinatnom sustavu. Prvo se provodi transformacija pomaka ( $u_n$ ,  $u_t$ ,  $u_\theta$ ) iz lokalnog koordinatnog sustava u pomoćni lokalni koordinatni sustav. Za tu transformaciju se koristi prva matrica transformacije  $\mathbf{T}^1$ , a izraz glasi:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_t \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_\theta \end{bmatrix} . \quad (1.16)$$

Iz jednadžbe (1.16) proizlaze pomaci lokalnog koordinatnog sustava izraženi pomoću pomaka pomoćnog lokalnog koordinatnog sustava:

$$u_n = u_{x'} \sin \alpha - u_{y'} \cos \alpha , \quad (1.17)$$

$$u_t = u_{x'} \cos \alpha + u_{y'} \sin \alpha , \quad (1.18)$$

$$u_\theta = u_\theta . \quad (1.19)$$

Iduća transformacija pomaka koja se provodi jest transformacija pomaka  $(u_{x'}, u_{y'}, u_\theta)$  iz pomoćnog lokalnog koordinatnog sustava u globalni koordinatni sustav. Za tu transformaciju se koristi druga matrica transformacije  $\mathbf{T}^2$ , a izraz glasi:

$$\begin{bmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} . \quad (1.20)$$

Uzimajući u obzir da se prati čista translacija, odnosno izraze (1.14) i (1.15), iz jednadžbe (1.20) proizlaze pomaci pomoćnog lokalnog koordinatnog sustava izraženi pomoću pomaka globalnog koordinatnog sustava:

$$u_{x'} = u \cos \varphi , \quad (1.21)$$

$$u_{y'} = u_y = 0 , \quad (1.22)$$

$$u_\theta = u \sin \varphi . \quad (1.23)$$

Uvrštavanjem izraza (1.21), (1.22) i (1.23) u (1.17), (1.18) i (1.19) dobivaju se pomaci lokalnog koordinatnog sustava izraženi u globalnom koordinatnom sustavu:

$$u_n = u \cos \varphi \sin \alpha , \quad (1.24)$$

$$u_t = u \cos \varphi \cos \alpha , \quad (1.25)$$

$$u_\theta = u \sin \varphi . \quad (1.26)$$

## 4.5 Deformacije

Gledajući lokalni koordinatni sustav, debljina parodontnog ligamenta u smjeru osi  $n$  iznosi  $\delta$ . U ostalim smjerovima, debljina parodontnog ligamenta je puno veća od pomaka. Iz toga proizlazi, da deformacije u tim smjerovima imaju vrijednost približno nula, a izrazi za ostale deformacije lokalnog koordinatnog sustava glase:

$$\varepsilon_{nn} = -\frac{u_n}{\delta}, \quad (1.27)$$

$$\gamma_{n\theta} = -\frac{u_\theta}{\delta} \rightarrow \varepsilon_{n\theta} = \frac{1}{2}\gamma_{n\theta} = -\frac{u_\theta}{2\delta}, \quad (1.28)$$

$$\gamma_{nt} = -\frac{u_t}{\delta} \rightarrow \varepsilon_{nt} = \frac{1}{2}\gamma_{nt} = -\frac{u_t}{2\delta}, \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_{tt} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{t\theta} = \gamma_{t\theta} \approx 0. \quad (1.30)$$

Potrebno je naglasiti da ovi izrazi vrijede samo za male deformacije. Uvrštavanjem jednadžbi (1.24), (1.25) i (1.26) u izraze (1.27), (1.28) i (1.29) dobivaju se deformacije lokalnog koordinatnog sustava izražene pomoću pomaka u globalnom koordinatnom sustavu:

$$\varepsilon_{nn} = -\frac{u \cos \varphi \sin \alpha}{\delta}, \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_{n\theta} = -\frac{u \sin \varphi}{2\delta}, \quad (1.32)$$

$$\varepsilon_{nt} = -\frac{u \cos \varphi \cos \alpha}{2\delta}. \quad (1.33)$$

Deformacije u lokalnom koordinatnom sustavu potrebno je transformirati u globalni koordinatni sustav. To se postiže korištenjem matrica transformacije (1.7) i (1.13), pošto se ovdje deformacije u globalnom koordinatnom sustavu prikazuju preko deformacija iz lokalnog koordinatnog sustava, potrebno je navedene matrice transponirati. Posljedično, uzimajući u obzir izraz (1.30), proizlazi jednadžba transformacije deformacija:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} & \varepsilon_{nt} & \varepsilon_{n\theta} \\ \varepsilon_{tn} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\theta n} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_1^T \cdot \mathbf{T}_2^T. \quad (1.34)$$

Uvrštavanjem izraza (1.31), (1.32) i (1.33) u jednadžbu (1.34) dobivaju se deformacije globalnog koordinatnog sustava:

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{u \sin \alpha \cos \varphi}{\delta}, \quad (1.35)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{u \cos \alpha}{2\delta}, \quad (1.36)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{u \sin \alpha \sin \varphi}{2\delta}, \quad (1.37)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0. \quad (1.38)$$

Konačno, matrica deformacije u globalnom koordinatnom sustavu glasi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{u \sin \alpha \cos \varphi}{\delta} & \frac{u \cos \alpha}{2\delta} & \frac{u \sin \alpha \sin \varphi}{2\delta} \\ \frac{u \cos \alpha}{2\delta} & 0 & 0 \\ \frac{u \sin \alpha \sin \varphi}{2\delta} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

## 4.6 Naprezanja

Cilj je komponente naprezanja prikazati kao funkcije deformacije jer su izrazi za deformacije već poznati. Parodontni ligament promatra se kao linearno elastičan, homogen i izotropan materijal. Iz toga slijedi matrični prikaz veze između naprezanja i deformacije, odnosno Hookeov zakon:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.40)$$

pri čemu je  $\boldsymbol{\varepsilon}$  matrica deformacije u globalnom koordinatnom sustavu (1.39), a  $\mathbf{D}$  matrica elastičnosti za troosno stanje naprezanja kod linearno elastičnog, homogenog i izotropnog materijala [17]:



$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Uvrštavanjem matrice elastičnosti (1.41) u jednadžbu (1.40) proizlaze komponente tenzora naprezanja za troosno stanje naprezanja:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right], \quad (1.42)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right], \quad (1.43)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right], \quad (1.44)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}, \quad (1.45)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\gamma_{yz} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz}, \quad (1.46)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = G\gamma_{zx} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{zx}. \quad (1.47)$$

Konačno, uvrštavanjem izraza (1.35), (1.36), (1.37) i (1.38) u prethodno prikazane komponente tenzora naprezanja za troosno stanje naprezanja, dobivaju se komponente naprezanja u ovisnosti o pomacima u globalnom koordinatnom sustavu:

$$\sigma_{xx} = -\frac{E(1-\nu) \sin \alpha \cos \varphi}{\delta(1+\nu)(1-2\nu)} u, \quad (1.48)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{E\nu \sin \alpha \cos \varphi}{\delta(1+\nu)(1-2\nu)} u, \quad (1.49)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{E\nu \sin \alpha \cos \varphi}{\delta(1+\nu)(1-2\nu)} u, \quad (1.50)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E \cos \alpha}{2\delta(1+\nu)} u, \quad (1.51)$$

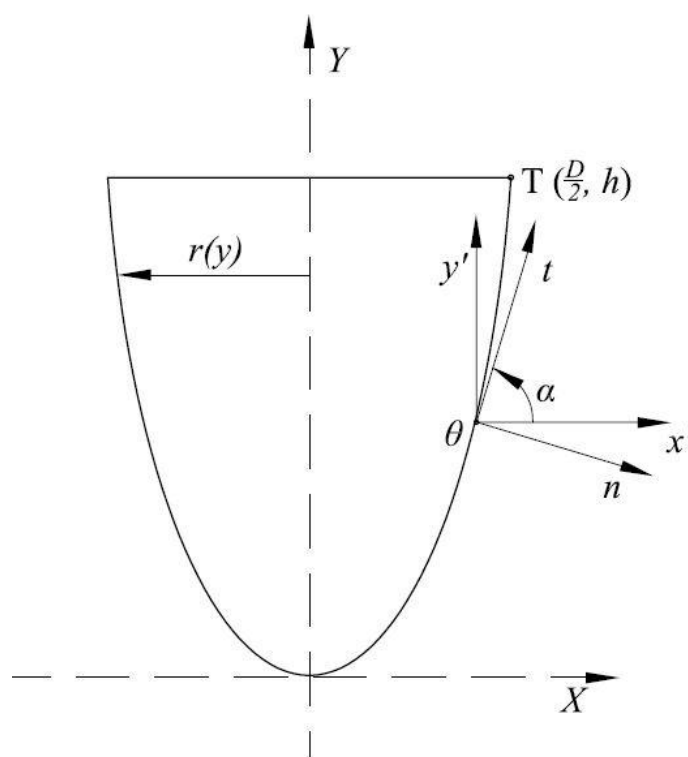
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \quad (1.52)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{E \sin \alpha \sin \varphi}{2\delta(1+\nu)} u. \quad (1.53)$$

## 4.7 Paraboloid

U ovome modelu, pretpostavljeno je, da korijen ima oblik paraboloida. To je ploha drugog reda s kružnim poprečnim presjecima u horizontalnoj ravnini i paraboličnim presjecima u vertikalnoj ravnini, koja ujedno sadrži i os zuba. Poznate su vrijednosti: debljine parodontnoga ligamenta ( $\delta$ ), promjera korijena ( $D$ ), visine korijena ( $h$ ) i pomaka ( $u$ ). Cilj je komponente napreznja prikazati upravo preko tih veličina. Iz izraza (1.48) – (1.53) vidljivo je da se trigonometrijske funkcije moraju prikazati pomoću poznatih geometrijskih veličina.

Prvo će se prikazati drugačiji zapis trigonometrijskih funkcija vezanih uz prvu transformaciju, odnosno kut  $\alpha$ . Paraboloid se siječe u vertikalnoj ravnini iz čega proizlazi parabolični presjek kako je prikazano na slici 4.5.



Slika 4.5 Parabolični presjek - Paraboloid

Kako je os  $t$  tangencijalna na parabolu u točki P, moguće je preko funkcije tangens doći do izraza za ostale trigonometrijske funkcije vezane uz prvu transformaciju, odnosno kut  $\alpha$ . Po svojoj definiciji, tangens predstavlja omjer sinusa i kosinusa nekog kuta, a to se može promatrati kao nagib pravca (osi  $t$ ) koji zatvara taj kut ( $\alpha$ ) s apscisom (os  $x'$ ). Prvo je potrebno zapisati parabolu uvrštavanjem poznate točke T ( $D/2, h$ ):

$$y = a_1 x^2 \rightarrow y = \frac{4h}{D^2} x^2 . \quad (1.54)$$

Potom je potrebno iz jednadžbe (1.54) izvesti  $x$  jer će naknadno trebati za definiranje tangensa:

$$x = \frac{D\sqrt{y}}{2\sqrt{h}} . \quad (1.55)$$

Definicija tangensa preko nagiba pravca za ovaj slučaj glasi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} , \quad (1.56)$$

uvrštanjem izraza (1.54) i (1.55) u jednadžbu (1.56) dolazi se do definicije tangensa preko poznati geometrijskih veličina:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\sqrt{h}}{D} \sqrt{y} . \quad (1.57)$$

Ako se tangens zapiše kao omjer sinusa i kosinusa te kvadrira:

$$\operatorname{tg}^2(y) = \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} , \quad (1.58)$$

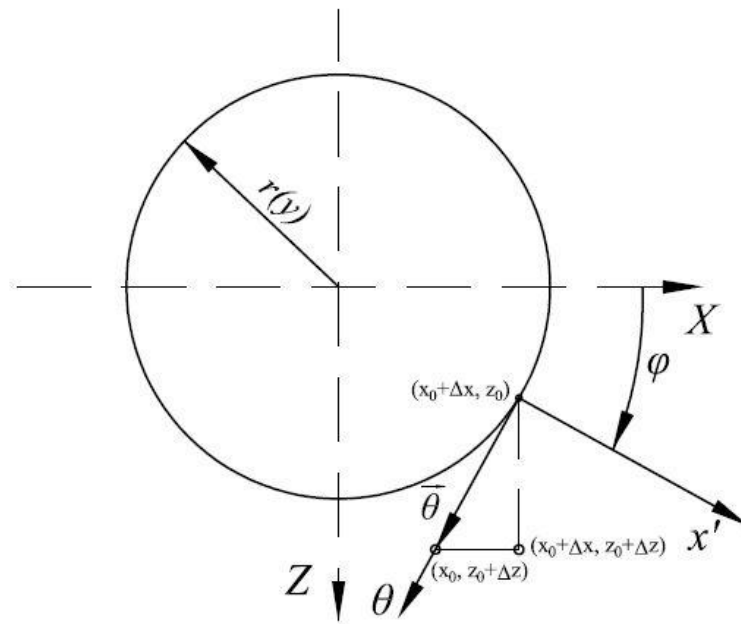
može se uvesti funkcija dvostrukog argumenta i izraz (1.54) iz čega slijedi funkcija kosinusa za kut  $\alpha$ , zapisana preko poznatih geometrijskih veličina:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16h}{D^2} y}} . \quad (1.59)$$

Pomoću omjera sinusa i kosinusa te funkcija (1.57) i (1.59), dolazi se do funkcije sinusa za kut  $\alpha$ , zapisane preko poznatih geometrijskih veličina:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\frac{16h}{D^2} y}{1 + \frac{16h}{D^2} y}} . \quad (1.60)$$

Potom je potrebno prikazati prilagođeni zapis trigonometrijskih funkcija vezanih uz drugu transformaciju, odnosno kut  $\varphi$ . U ovom slučaju paraboloid se siječe u horizontalnoj ravnini iz čega proizlazi kružni presjek kako je prikazano na slici 4.6.



Slika 4.6 Kružni presjek - Paraboloid

Kako bi bilo moguće prikazati trigonometrijske funkcije preko poznatih geometrijskih veličina, potrebno je uvesti jedinični vektor duž koordinatnih osi. Os  $\theta$  nalazi se u horizontalnoj ravnini i tangencijalna je na površinu korijena te se duž nje uvodi jedinični vektor  $\vec{\theta}^*$ . Taj jedinični vektor će biti tangencijalan na kružnicu i nalaziti će se na visini presjeka  $p_y$ . Prema slici 4.6 vektor  $\vec{\theta}$  glasi:

$$\vec{\theta} = (-\Delta x, 0, \Delta z) . \quad (1.61)$$

Također, za rješavanje ovog problema poslužit će trigonometrijska funkcija tangens. Prosječni nagib pravca između  $x_0$  i  $x_0 + \Delta x$  iznosi:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx} \rightarrow \Delta z = \frac{dz}{dx} \Delta x . \quad (1.62)$$

Jednadžba kružnice sa slike 4.6 glasi:

$$x^2 + z^2 = r^2(y) . \quad (1.63)$$

Implicitnim deriviranjem jednadžbe (1.63) dolazi se do izraza:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad (1.64)$$

koji se može uvrstiti u jednadžbu (1.62) kako bi se dobio izraz za  $\Delta z$ , sada vektor  $\vec{\theta}$  glasi:

$$\vec{\theta} = \left( -\Delta x, 0, -\frac{x}{z} \Delta x \right). \quad (1.65)$$

Ako se vektoru smjera promijeni duljina ili orijentacija to neće utjecati na pravac, što znači da se  $\Delta x$  smije izvući iz izraza (1.65), prema tome vektor  $\vec{\theta}$  iznosi:

$$\vec{\theta} = \left( -1, 0, -\frac{x}{z} \right). \quad (1.66)$$

Za dobivanje jediničnog vektora potrebno je postojeći vektor podijeliti s njegovom normom koja glasi:

$$|\vec{\theta}| = \sqrt{x^2 + z^2} = p_n, \quad (1.67)$$

također, ako se umjesto  $x$  i  $z$  uvrste koordinate točke P ( $p_x, p_y, p_z$ ) izraz za jedinični vektor  $\vec{\theta}^*$  jest:

$$\vec{\theta}^* = \left( \frac{p_z}{p_n}, 0, \frac{p_x}{p_n} \right). \quad (1.68)$$

Pomoću slike 4.6 i izraza (1.68) vidljivo je da funkcija kosinusa za kut  $\varphi$ , zapisana preko poznatih geometrijskih veličina iznosi:

$$\cos \varphi = \frac{p_x}{p_n}, \quad (1.69)$$

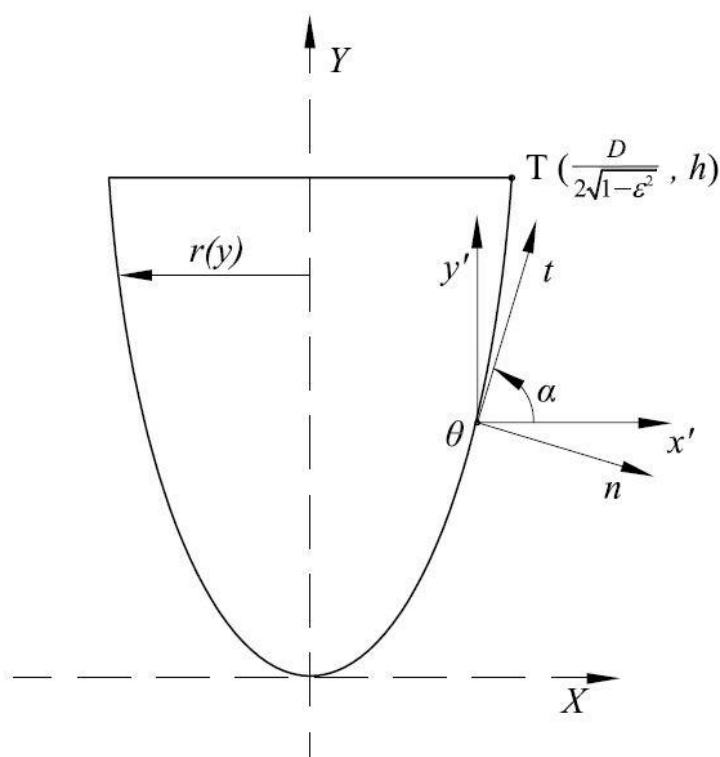
a funkcija sinusa za kut  $\varphi$ , zapisana preko poznatih geometrijskih veličina:

$$\sin \varphi = \frac{p_z}{p_n}. \quad (1.70)$$

## 4.8 Eliptični paraboloid

U ovome modelu, pretpostavljeno je da korijen ima oblik eliptičnog paraboloida. Baš kao i za paraboloid, isti postupak je potrebno provesti za eliptični paraboloid. To je ploha drugog reda s eliptičnim poprečnim presjecima u horizontalnoj ravnini i paraboličnim presjecima u vertikalnoj ravnini, koja ujedno sadrži i os zuba. Iz izraza (1.48) – (1.53) vidljivo je, da se trigonometrijske funkcije moraju prikazati pomoću poznatih geometrijskih veličina navedenih u prethodnom poglavlju.

Prvo će se prikazati drugačiji zapis trigonometrijskih funkcija vezanih uz prvu transformaciju, odnosno kut  $\alpha$ . Eliptični paraboloid se siječe u vertikalnoj ravnini iz čega proizlazi parabolični presjek kako je prikazano na slici 4.7.



Slika 4.7 Parabolični presjek - Eliptični paraboloid

Isti položaj koordinatnih sustava kao i kod paraboloida uvjetuje, da vrijede isti izrazi za dobivanje trigonometrijskih funkcija prve transformacije. Jedina razlika je u vezi  $y(x)$  jer ovdje neće vrijediti ista točka T. Kako se ovdje radi o eliptičnom paraboloidu, prilikom horizontalnog presjeka dobit će se elipsa, koja u  $XY$  ravnini na visini  $h$  ima vrijednost velike poluosi  $a$ . Vrijednost male poluosi  $b$  je poznata i iznosi  $D/2$  te se uz pomoć linearnog (1.71) i numeričkog ekscentriciteta (1.72):

$$e^2 = a^2 - b^2, \quad (1.71)$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a}, \quad (1.72)$$

može doći do točke T. Uvrštavanjem linearnog ekscentriciteta (1.71) u numerički ekscentricitet (1.72) i vrijednosti male poluosi  $b$  na visini  $h$ , dolazi se do vrijednosti velike poluosi  $a$  na visini  $h$ , koja glasi:

$$a = \frac{D}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \quad (1.73)$$

Iz navedenog proizlazi točka  $T\left(\frac{D}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, h\right)$ , koja se uvrštava u jednadžbu parabole:

$$y = a_2 x^2 \rightarrow y = \frac{4h(1-\varepsilon^2)}{D^2} x^2. \quad (1.74)$$

Potom je potrebno iz jednadžbe (1.74) izvesti  $x$  jer će naknadno trebati za definiranje tangensa:

$$x = \frac{D\sqrt{y}}{2\sqrt{h}\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \quad (1.75)$$

Definicija tangensa preko nagiba pravca za ovaj slučaj ista je kao kod paraboloida, uvrštavanjem izraza (1.74) i (1.75) u jednadžbu (1.56) dolazi se do definicije tangensa preko poznatih geometrijskih veličina:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\sqrt{h}\sqrt{1-\varepsilon^2}}{D} \sqrt{y}. \quad (1.77)$$

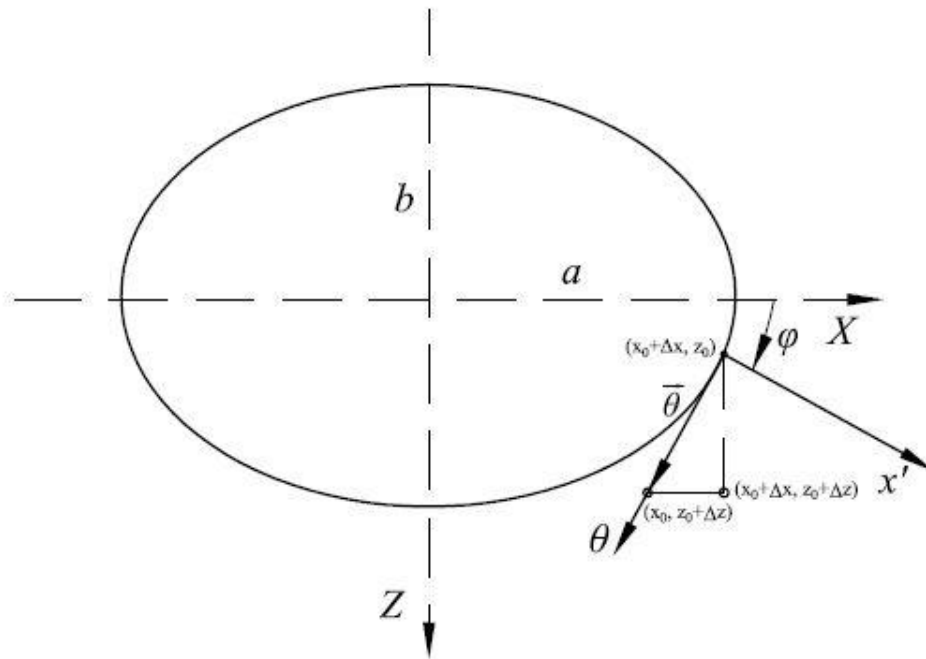
Korištenjem jednadžbe (1.58) i uvođenjem funkcije dvostrukog argumenta slijedi funkcija kosinusa za kut  $\alpha$ , zapisana preko poznatih geometrijskih veličina:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16h(1-\varepsilon^2)}{D^2} y}}. \quad (1.78)$$

Pomoću omjera sinusa i kosinusa te funkcija (1.77) i (1.78), dolazi se do funkcije sinusa za kut  $\alpha$ , zapisane preko poznatih geometrijskih veličina:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\frac{16h(1-\varepsilon^2)}{D^2} y}{1 + \frac{16h(1-\varepsilon^2)}{D^2} y}}. \quad (1.79)$$

Zatim je potrebno prikazati prilagođeni zapis trigonometrijskih funkcija vezanih uz drugu transformaciju, odnosno kut  $\varphi$ . U ovom slučaju eliptični paraboloid se siječe u horizontalnoj ravnini iz čega proizlazi eliptični presjek kako je prikazano na slici 4.8:



Slika 4.8 Eliptični presjek – Eliptični paraboloid

Isti položaj koordinatnih sustava kao i kod paraboloida uvjetuje da vrijede isti izrazi za dobivanje trigonometrijskih funkcija druge transformacije. Jedina razlika je u vezi  $z(x)$  jer se ovdje horizontalnim presjekom dobije elipsa, a ne kružnica. Kako bi bilo moguće prikazati trigonometrijske funkcije preko poznatih geometrijskih veličina, kao i kod paraboloida, potrebno je uvesti jedinični vektore duž koordinatne osi  $\theta$ . Jedinični vektor  $\vec{\theta}^*$  tangencijalan je na elipsu i nalazi se na visini presjeka  $p_y$ . Prema slici 4.8 vektor  $\vec{\theta}$  glasi:

$$\vec{\theta} = (-\Delta x, 0, \Delta z). \quad (1.80)$$



Također, za rješavanje ovog problema poslužit će trigonometrijska funkcija tangens. Prosječni nagib pravca između  $x_0$  i  $x_0 + \Delta x$  iznosi:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx} \rightarrow \Delta z = \frac{dz}{dx} \Delta x . \quad (1.81)$$

Za određivanje  $\frac{dz}{dx}$ , potrebna je veza  $z(x)$  koja se može dobiti pomoću linarnog i numeričkog ekscentriciteta ako se vrijednosti promijenjivih poluosi zamijene koordinatama:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \rightarrow \varepsilon^2 = 1 - \frac{z^2}{x^2} . \quad (1.82)$$

Implicitnim deriviranjem jednadžbe (1.82) dolazi se do izraza:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x(1 - \varepsilon^2)}{z} , \quad (1.83)$$

koji se može uvrstiti u jednadžbu (1.81) kako bi se dobio izraz za  $\Delta z$ , sada vektor  $\vec{\theta}$  glasi:

$$\vec{\theta} = \left( -\Delta x, 0, \frac{x(1 - \varepsilon^2)}{z} \Delta x \right) . \quad (1.84)$$

Ako se vektoru smjera promijeni duljina ili orijentacija to neće utjecati na pravac, što znači da se  $\Delta x$  smije izvući iz izraza (1.84), prema tome vektor  $\vec{\theta}$  iznosi:

$$\vec{\theta} = \left( -1, 0, \frac{x(1 - \varepsilon^2)}{z} \right) . \quad (1.85)$$

Za dobivanje jediničnog vektora potrebno je postojeći vektor podijeliti s njegovom normom koja glasi:

$$|\vec{\theta}| = \sqrt{z^2 + (x(1 - \varepsilon^2))^2} = p_n , \quad (1.86)$$

Konačno, ako se umjesto  $x$  i  $z$  uvrste koordinate točke P ( $p_x, p_y, p_z$ ) izraz za jedinični vektor  $\vec{\theta}^*$  jest:

$$\vec{\theta}^* = \left( -\frac{p_z}{p_n}, 0, \frac{p_x(1-\varepsilon^2)}{p_n} \right). \quad (1.87)$$

Pomoću slike 4.8 i izraza (1.87) vidljivo je da funkcija kosinusa za kut  $\varphi$ , zapisana preko poznatih geometrijskih veličina iznosi:

$$\cos \varphi = \frac{p_x(1-\varepsilon^2)}{p_n}, \quad (1.88)$$

a funkcija sinusa za kut  $\varphi$ , zapisana preko poznatih geometrijskih veličina:

$$\sin \varphi = -\frac{p_z}{p_n}. \quad (1.89)$$

## 5 Rezultati

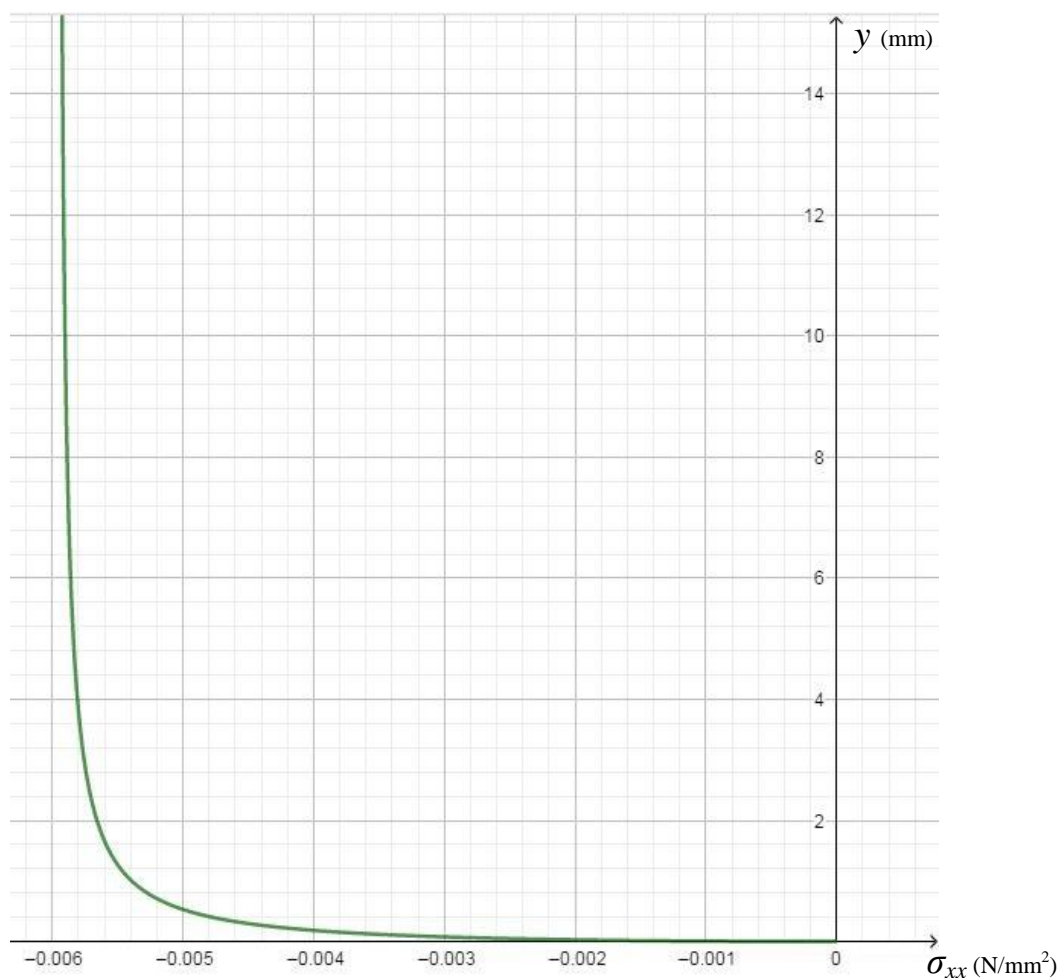
U ovom poglavlju prikazat će se vrijednosti napreznja. Za oba modela primijenit će se iste dimenzije i svojstva PDL-a, kako bi se dobiveni rezultati mogli međusobno usporediti. Modul elastičnosti i Poissonov faktor parodontnog ligamenta iznose:  $E = 0,68$  MPa i  $\nu = 0,49$ . Debljina parodontnog ligamenta je jednolika i iznosi  $\delta = 0,39$  mm, vrijednost visine je  $h = 12,48$  mm, a promjer iznosi  $D = 6,70$  mm. Kod eliptičnog paraboloida polumjer parodontnog ligamenta će predstavljati malu poluos odnosno:  $b = 3,35$  mm i  $a = 3,42$  mm. Napreznja se računaju za horizontalni pomak jednokorijenskog zuba  $u = 0,0002$  mm.

### 5.1 Grafički prikaz rješenja za paraboloid

U jednadžbe komponenti napreznja za troosno stanje (1.48) – (1.53) uvrštavaju se poznate vrijednosti parodontnog ligamenta i trigonometrijske funkcije zapisane preko geometrijskih veličina za prvu transformaciju (1.59) i (1.60) te za drugu transformaciju (1.69) i (1.70) kod paraboloida.

Jednadžbom (1.90) određena je raspodjela komponente naprezanja u smjeru osi  $X$  duž koordinate  $y$ , odnosno od vrha korijena zuba do alveolnog grebena. Raspodjela je dobivena uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (1.48), a prikazana je na slici 5.1.

$$\sigma_{xx} = -0,00596799174 \sqrt{\frac{4,448206728y}{1+4,448206728y}} \quad (1.90)$$



Slika 5.1 Raspodjela naprezanja u smjeru osi  $X$  za paraboloid

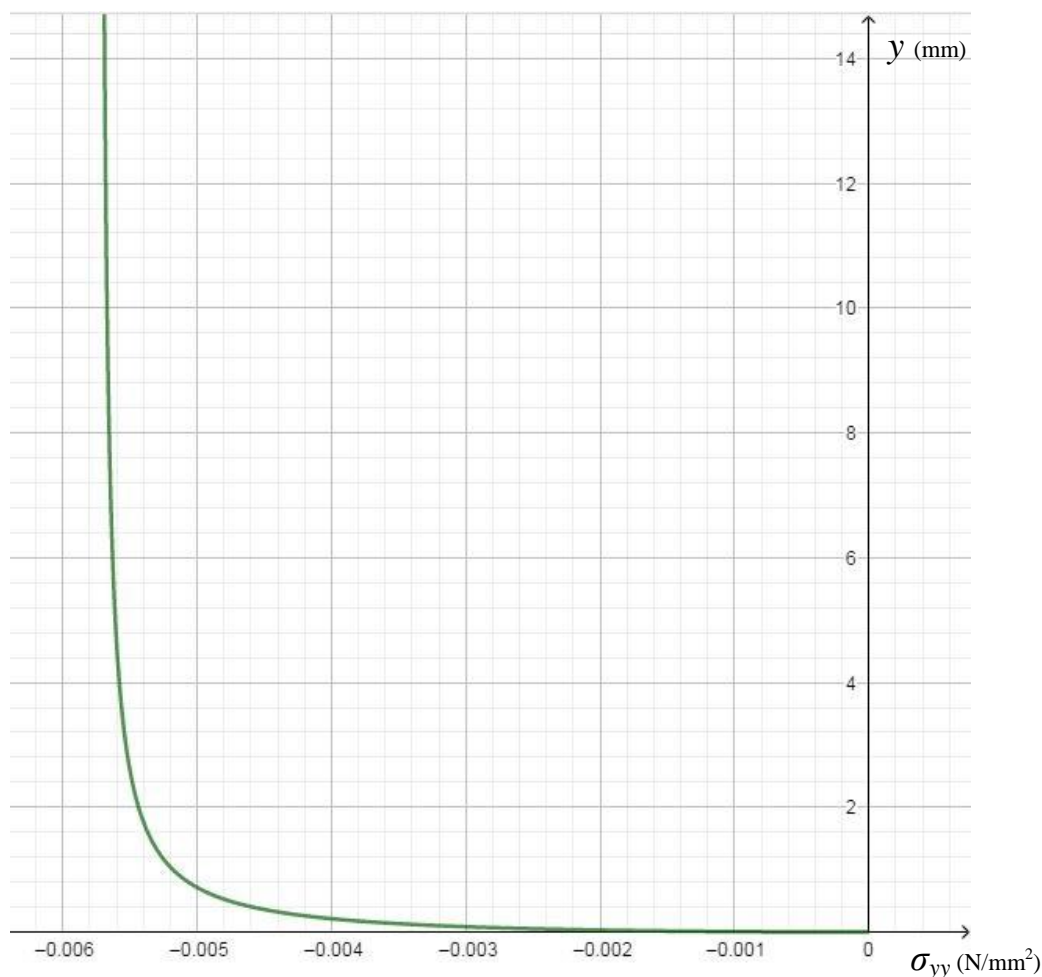
Iz dijagrama sa slike 5.1, navedene su neke karakteristične vrijednosti naprezanja u smjeru osi  $X$ , za paraboloid, u tablici 1.1.

Tablica 1.1 Karakteristične vrijednosti naprezanja u smjeru osi  $X$  za paraboloid

$y/\text{mm}$	0	6,24	12,48
$\sigma_{xx}/\text{N}/\text{mm}^2$	0	-0,00586331	-0,00591495

Jednadžbom (1.91) određena je raspodjela komponente napreznja u smjeru osi  $Y$  duž koordinate  $y$ , odnosno od vrha korijena zuba do alveolnog grebena. Raspodjela je dobivena uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (1.49), a prikazana je na slici 5.2.

$$\sigma_{yy} = -0,005733952848 \sqrt{\frac{4,448206728y}{1+4,448206728y}} \quad (1.91)$$



Slika 5.2 Raspodjela napreznja u smjeru osi  $Y$  za paraboloid

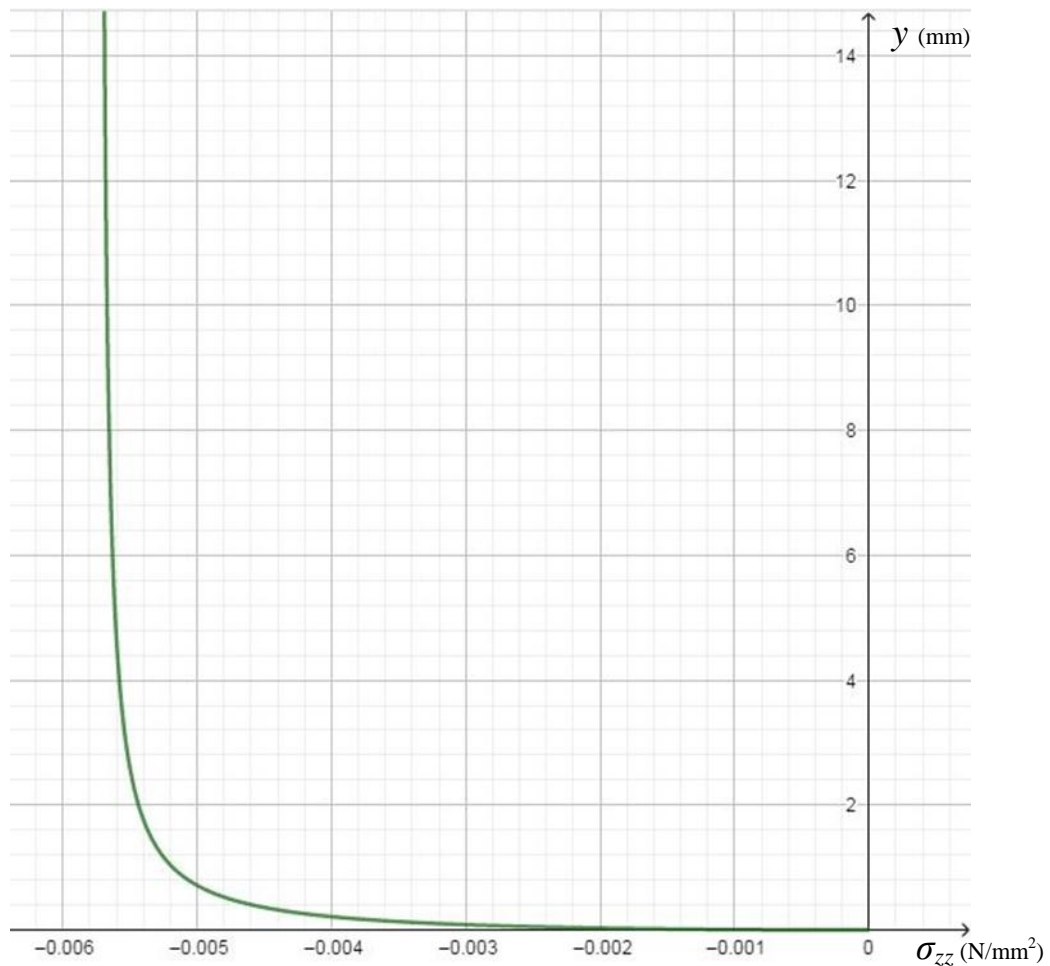
Iz dijagrama sa slike 5.2, navedene su neke karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi  $Y$ , za paraboloid, u tablici 1.2.

Tablica 1.2 Karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi  $Y$  za paraboloid

$y/\text{mm}$	0	6,24	12,48
$\sigma_{yy}/\text{N/mm}^2$	0	-0,0056333734	-0,0056829957

Jednadžbom (1.92) određena je raspodjela komponente napreznja u smjeru osi Z duž koordinate y, odnosno od vrha korijena zuba do alveolnog grebena. Raspodjela je dobivena uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (1.50), a prikazana je na slici 5.3.

$$\sigma_{zz} = -0,005733952848 \sqrt{\frac{4,448206728y}{1+4,448206728y}}. \quad (1.92)$$



Slika 5.3 Raspodjela napreznja u smjeru osi Z za paraboloid

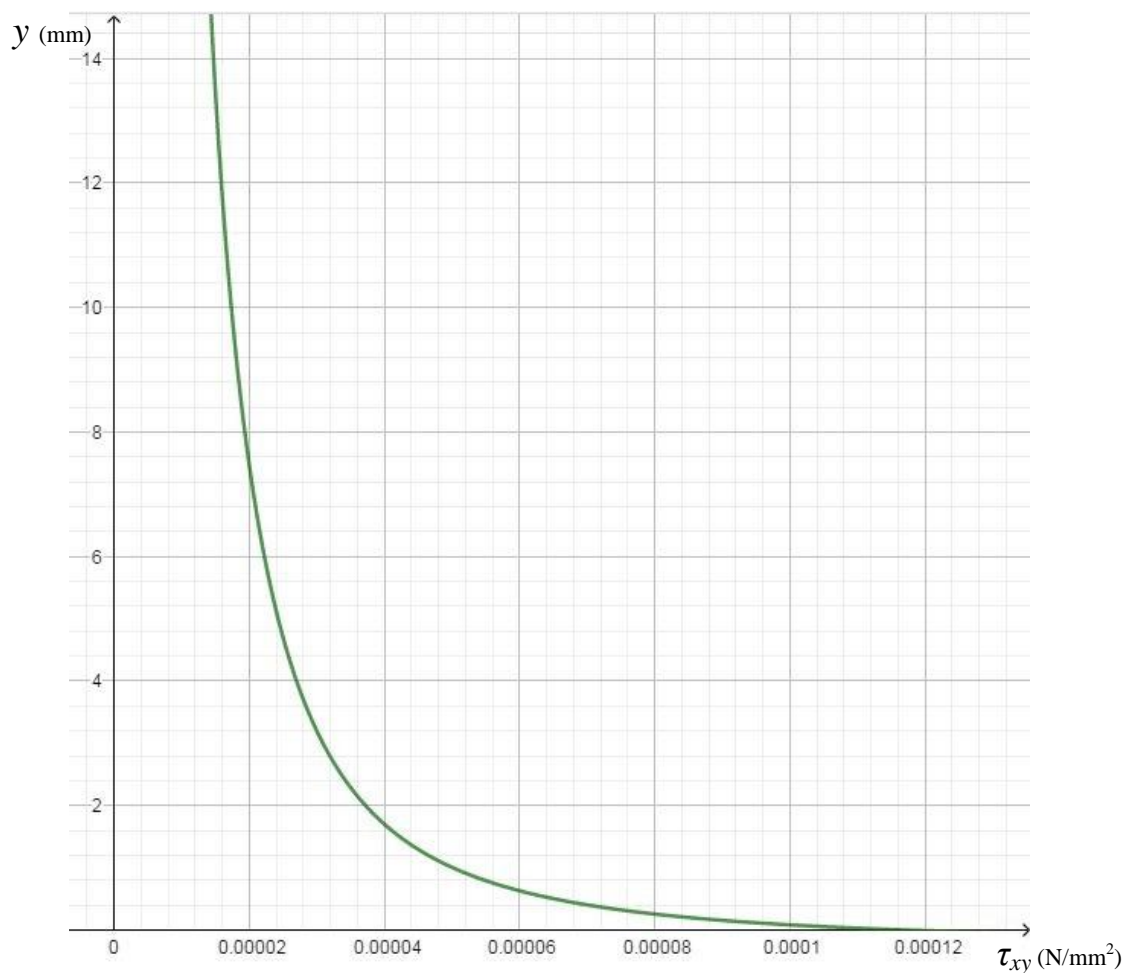
Iz dijagrama sa slike 5.3, navedene su neke karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi Z, za paraboloid, u tablici 1.3.

Tablica 1.3 Karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi Z za paraboloid

$y/\text{mm}$	0	6,24	12,48
$\sigma_{zz}/\text{N}/\text{mm}^2$	0	-0,0056333734	-0,0056829957

Jednadžbom (1.93) određena je raspodjela posmične komponente naprezanja duž koordinate  $y$ , odnosno od vrha korijena zuba do alveolnog grebena. Raspodjela je dobivena uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (1.51), a prikazana je na slici 5.4.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0,0001170194 \frac{1}{\sqrt{1 + 4.448206728y}} \quad (1.93)$$



Slika 5.4 Raspodjela posmičnog naprezanja za paraboloid

Iz dijagrama sa slike 5.4, navedene su neke karakteristične vrijednosti posmičnog naprezanja, za paraboloid, u tablici 1.4.

Tablica 1.4 Karakteristične vrijednosti posmičnog naprezanja za paraboloid

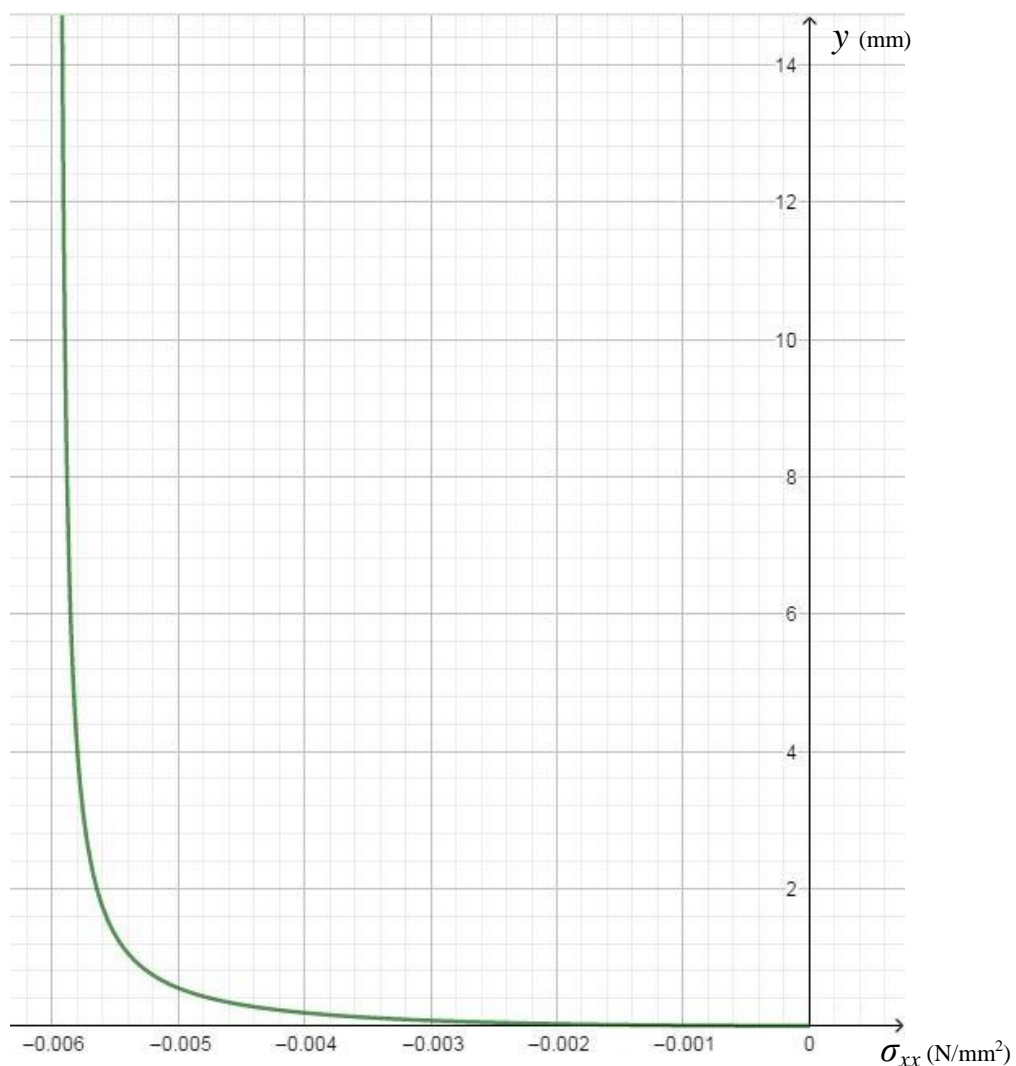
$y/\text{mm}$	0	6,24	12,48
$\tau_{xy}/\text{N}/\text{mm}^2$	0,0001170194	0,0000218216	0,0000155662

## 5.2 Grafički prikaz rješenja za eliptični paraboloid

U jednadžbe komponenti naprezanja za troosno stanje (1.48) – (1.53) uvrštavaju se poznate vrijednosti parodontnog ligamenta i trigonometrijske funkcije zapisane preko geometrijskih veličina za prvu transformaciju (1.78) i (1.79) te za drugu transformaciju (1.88) i (1.89) kod eliptičnog paraboloida.

Jednadžbom (1.94) određena je raspodjela komponente naprezanja u smjeru osi  $X$  duž koordinate  $y$ , odnosno od vrha korijena zuba do alveolnog grebena. Raspodjela je dobivena uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (1.48), a prikazana je na slici 5.5.

$$\sigma_{xx} = -0,00596799174 \sqrt{\frac{4,267979891y}{1 + 4,267979891y}}. \quad (1.94)$$



Slika 5.5 Raspodjela naprezanja u smjeru osi  $X$  za eliptični paraboloid

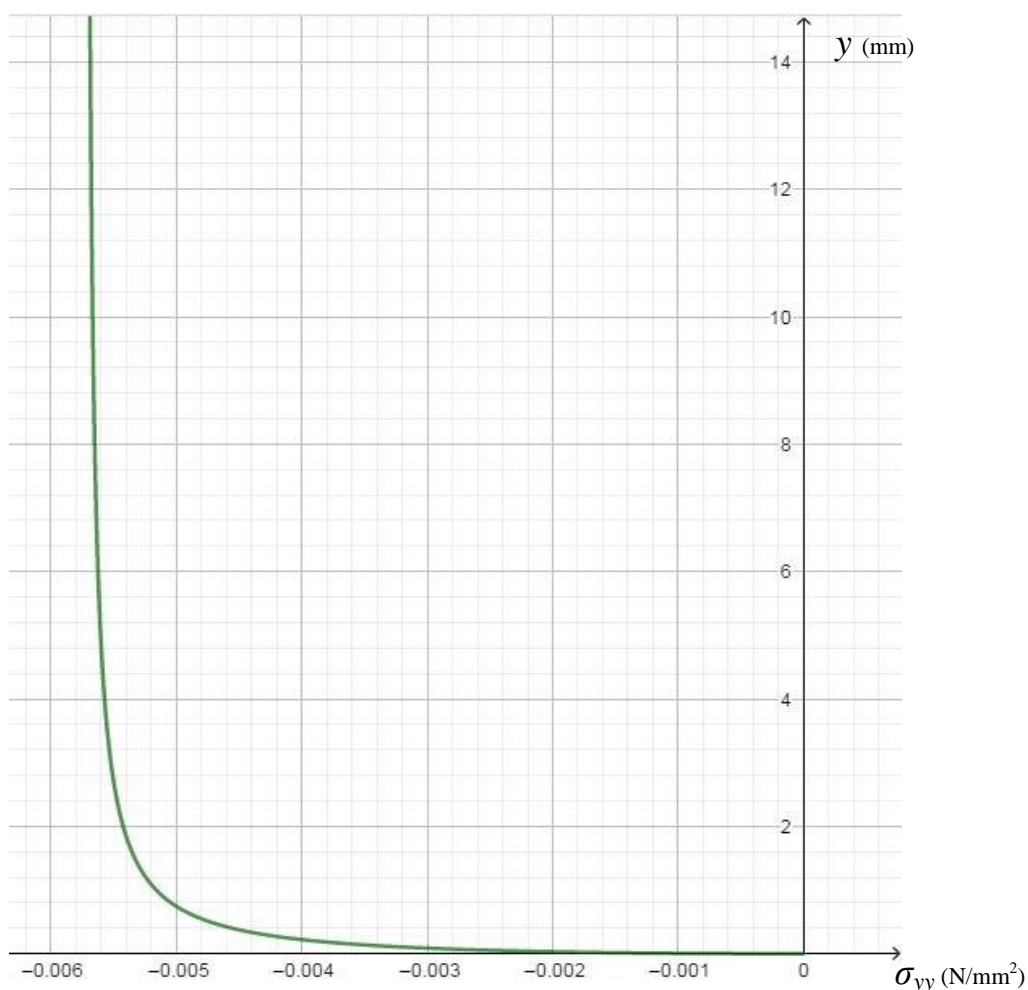
Iz dijagrama sa slike 5.5, navedene su neke karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi X, za eliptični paraboloid, u tablici 1.5.

**Tablica 1.5 Karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi X za eliptični paraboloid**

$y/\text{mm}$	0	6,24	12,48
$\sigma_{xx}/\text{N}/\text{mm}^2$	0	-0,0058590068	-0,0059127461

Jednadžbom (1.95) određena je raspodjela komponente napreznja u smjeru osi Y duž koordinate y, odnosno od vrha korijena zuba do alveolnog grebena. Raspodjela je dobivena uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (1.49), a prikazana je na slici 5.6.

$$\sigma_{yy} = -0,005733952848 \sqrt{\frac{4,267979891y}{1+4,267979891y}} \quad (1.95)$$



**Slika 5.6 Raspodjela napreznja u smjeru osi Y za eliptični paraboloid**



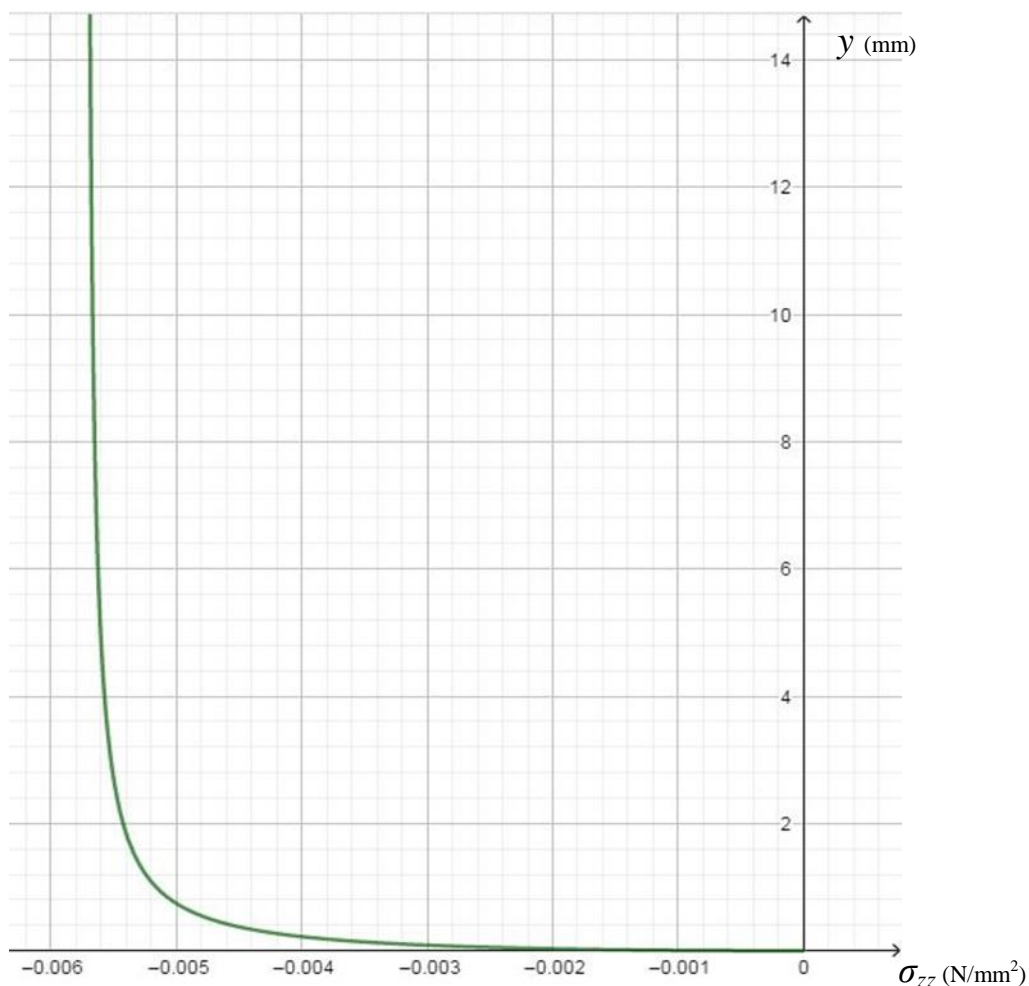
Iz dijagrama sa slike 5.6, navedene su neke karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi Y, za eliptični paraboloid, u tablici 1.6.

**Tablica 1.6 Karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi Y za eliptični paraboloid**

y/mm	0	6,24	12,48
$\sigma_{yy}/\text{N}/\text{mm}^2$	0	-0,0056292418	-0,0056808737

Jednadžbom (1.96) određena je raspodjela komponente napreznja u smjeru osi Z duž koordinate y, odnosno od vrha korijena zuba do alveolnog grebena. Raspodjela je dobivena uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (1.50), a prikazana je na slici 5.7.

$$\sigma_{zz} = -0,005733952848 \sqrt{\frac{4,267979891y}{1+4,267979891y}} \quad (1.96)$$



**Slika 5.7 Raspodjela napreznja u smjeru osi Z za eliptični paraboloid**

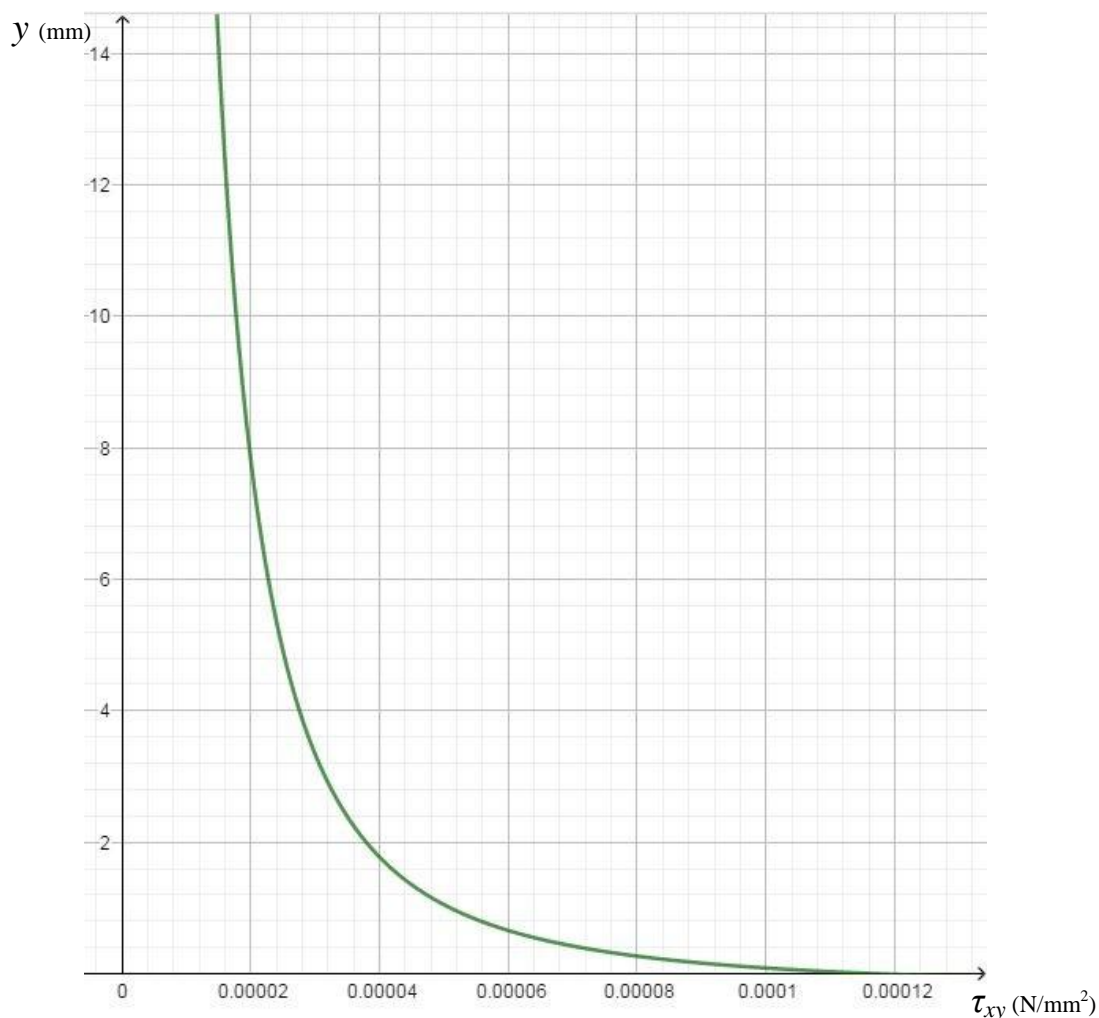
Iz dijagrama sa slike 5.7, navedene su neke karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi Z, za eliptični paraboloid, u tablici 1.7.

Tablica 1.7 Karakteristične vrijednosti napreznja u smjeru osi Z za eliptični paraboloid

$y/\text{mm}$	0	6,24	12,48
$\sigma_{zz}/\text{N}/\text{mm}^2$	0	-0,0056292418	-0,0056808737

Jednadžbom (1.97) određena je raspodjela posmične komponente napreznja duž koordinate  $y$ , odnosno od vrha korijena zuba do alveolnog grebena. Raspodjela je dobivena uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (1.51), a prikazana je na slici 5.8.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0,0001170194 \frac{1}{\sqrt{1 + 4.267979891y}} . \quad (1.97)$$



Slika 5.8 Raspodjela posmičnog napreznja za eliptični paraboloid

Iz dijagrama sa slike 5.8, navedene su neke karakteristične vrijednosti posmičnog naprezanja, za eliptični paraboloid, u tablici 1.8.

**Tablica 1.8 Karakteristične vrijednosti posmičnog naprezanja za eliptični paraboloid**

y/mm	0	6,24	12,48
$\tau_{xy}/\text{N}/\text{mm}^2$	0,0001170194	0,0000226128	0,0000158855

### 5.3 Usporedba analitičkih modela

Oblik parodontnog ligamenta pretpostavljen je pomoću paraboloida i eliptičnog paraboloida te su za ta dva modela dobiveni rezultati naprezanja. U tablici 1.9 prikazana su naprezanja za analitičke modele na visini  $y = 6,24$  mm, te je navedena njihova relativna razlika.

**Tablica 1.9 Usporedba naprezanja analitičkih modela na visini  $y = 6,24$  mm**

NAPREZANJA [ $\text{N}/\text{mm}^2$ ]	Paraboloid	Eliptični paraboloid	Relativna razlika, %
$\sigma_{xx}$	-0,00586331	-0,0058590068	0,07342
$\sigma_{yy}$	-0,0056333734	-0,0056292418	0,07337
$\sigma_{zz}$	-0,0056333734	-0,0056292418	0,07337
$\tau_{xy}$	0,0000218216	0,0000226128	3,5612

Sve relativne razlike izračunate su pomoću sljedećih izraza:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (1.98)$$

$$\Delta x = x_1 - x_2, \quad (1.99)$$

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad (1.100)$$

gdje su :

$x_1$  – vrijednosti naprezanja za paraboloid,

$x_2$  – vrijednosti naprezanja za eliptični paraboloid.

Iz tablice 1.9 vidljivo je, da su razlike u vrijednostima naprezanja izračunatih pomoću dva različita analitička modela izrazito male. Malo veća razlika u odnosu na ostale komponente naprezanja, gledajući relativnu razliku, javlja se tek kod posmične komponente naprezanja.

Razlog tome jesu izrazi za trigonometrijske funkcije prikazane pomoću poznatih geometrijskih veličina. Gledajući trigonometrijsku funkciju kosinus vezanu uz prvu transformaciju, tj. izraze (1.59) i (1.78), vidljivo je, da je jedina razlika u tim jednadžbama dodatak  $(1 - \varepsilon^2)$ , koji se nalazi u nazivniku kod eliptičnog paraboloida. Kako je linearni ekscentricitet (1.71) mali, a posljedično tome i numerički ekscentricitet (1.72) jasno je da će dodatak  $(1 - \varepsilon^2)$  težiti jedinici i samim time imati mali utjecaj na jednadžbu. Upravo zbog tako male vrijednosti numeričkog ekscentriciteta i vrijednosti naprezanja kod eliptičnog paraboloida su utoliko manje od onih kod paraboloida što je i vidljivo iz tablice 1.9.

Kako je vidljivo iz dijagrama sa slika (5.1) – (5.8), najveća naprezanja pojavljuju se na alveolnom grebenu, odnosno na visini  $y = h$ . Ako se pogledaju jednadžbe za komponente naprezanja (1.48) – (1.51) onda je jasno, da ti dijagrami u potpunosti odgovaraju analitičkim formulama. Trigonometrijska funkcija  $\sin(\alpha)$  pojavljuje se u brojniku u navedenim izrazima, pa samim time porastom  $\sin(\alpha)$  raste i naprezanje. Najveću vrijednost kut  $\alpha$  postiže kod alveolnog grebena gdje iznosi približno  $90^\circ$ , a s padom vrijednosti  $y$  tako se i smanjuje vrijednost kut  $\alpha$  sve do  $0^\circ$  na vrhu korijena zuba. Iako matematički ispravna, takva tvrdnja se kosi s rubnim uvjetom da naprezanja na cervikalnom rubu ligamenta iznose 0. Usprkos tome, analitički modeli su prihvatljivi zbog *Saint Venantovog* principa, koji kaže da je takva devijacija prisutna samo na površini blizu ravnine  $y = h$ .

Gledajući analitičke izraze za naprezanja (1.48) – (1.51) te izraze za trigonometrijske funkcije sinus i kosinus (1.69), (1.70), (1.78) i (1.79) može se uočiti, da za istu vrijednost naprezanja, uz povećanje promjera  $D$  i visine  $h$  parodontnog ligamenta, raste i horizontalni pomak  $u$ .

## 6 Zaključak

Poznavanje raspodjele napreznja i deformacije u parodontnom ligamentu, koristi se za predviđanje gibanja zubi kod ortodontske terapije te se na temelju toga razvijaju softverski paketi. Takvi softveri omogućuju simulaciju ortodontske terapije i samim time umanjuju troškove i potrebno vrijeme.

U radu su prikazana dva analitička modela za izračunavanje napreznja u parodontnom ligamentu uslijed čiste translacije jednokorijenskog zuba. Prvi analitički model opisuje geometriju parodontnog ligamenta pomoću paraboloida, a drugi pomoću eliptičnog paraboloida. Analitičke formule pripadnih modela dobivene su pomoću klasične teorije elastičnosti jer modeli imaju pojednostavljeni mehanički opis parodontnog ligamenta. Upravo to je velika prednost ovih modela u odnosu na ostale. Za izračun analitičkih izraza potrebne su samo geometrijske karakteristike ( $h$ ,  $D$ ,  $\delta$ ) i dva svojstva materijala (Poissonov faktor  $\nu$  i modul elastičnosti  $E$ ). U stvarnosti je parodontni ligament višestruko kompleksniji materijal koji je nelinearan, anizotropan i ima vremenski ovisno ponašanje. Nekoliko radova je pokušalo opisati ta svojstva i ponašanje parodontnoga ligamenta. Cattaneo je predstavio nelinearan izotropan model, Pietrzak je razvio nelinearni elastični zakon valjan za sve vrijednosti napreznja, a možda i najnapredniji model je napravio Zhurov koji je parodontni ligament opisao kao kompresibilno, poprečno izotropno visko – hiperelastično tkivo [1.]. Prema stvarnom ponašanju parodontnog ligamenta, jasno je da navedeni modeli puno preciznije opisuju parodontni ligament. Nedostatak točnih eksperimentalnih podataka i znanja o stvarnoj strukturi parodontnog ligamenta otežava stvaranje i interpretaciju takvih modela pa se prednost daje jednostavnijim modelima, koji daju zadovoljavajuće rezultate.

Najveća prednost prikazanih analitičkih modela je jednostavnost. Analitički modeli ne zahtijevaju stvaranje 3D modela i postavljanje mreže, već samo unos nekoliko geometrijskih parametara i svojstva materijala. To rezultira znatno kraćim vremenom računanja i omogućava automatizaciju procesa, a time i smanjenje troškova prilikom primjene u kliničkoj praksi. Nedostatak analitičkih modela je nemogućnost preciznog opisivanja stanja unutar parodontnog ligamenta, tj. ne uzimaju u obzir nelinearnu distribuciju pomaka. Međutim, ovi analitički modeli imaju praktičnu primjenu te se mogu koristiti kao nadopuna ili provjera FEM analize pri translacijskom pomaku zuba.

## Literatura

- [1.] An Van Schepdael, Lies Geris, Jos Vander Sloten, Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement
- [2.] Field,C., Ichim, I., Swain, M.V., etc.: Mechanical responses to orthodontic loading, A-3 dimensional finite element multi-tooth model, Am J Orthod Dentofacial Orthop, 2009.
- [3.] *The Five Types of Human Teeth & Their Function*, ACI Medical & Dental School, <https://aci.edu/five-types-human-teeth-function/> (26.03.2019.)
- [4.] Perović, D., Anatomija čovjeka I dio, Medicinska knjiga, 1966.
- [5.] *Tooth Anatomy*, Colgate-Palmolive Company, <https://www.colgate.com/en-us/oral-health/basics/mouth-and-teeth-anatomy/tooth-anatomy> (26.03.2019.)
- [6.] *Anatomy of a tooth*, <https://culpepperdds.wordpress.com/basic-tooth-anatomy/>, (26.03.2019.)
- [7.] *Dental Anatomy*, Pocket Dentistry, Fastest Clinical Dentistry Insight Engine, <https://pocketdentistry.com/4-dental-anatomy/> , (26.03.2019.)
- [8.] Lindhe, J., Lang, N.P., Karring, T.: *Clinical Periodontology and Implant Dentistry*, Munksgaard, Blackwell, 2008.
- [9.] Ash M.Jr., Nelson S.: *Wheeler's Dental Anatomy, Physiology, and Occlusion*, Philadelphia, Saunders, 2003.
- [10.] *Compact bone Anatomy* , <https://www.britannica.com/science/compact-bone>, (26.03.2019.)
- [11.] Poje,Z.: *Translacijsko distalno pomicanje gornjih kutnjaka headgearom*, Zavod za ortodontiju Stomatološkog fakulteta u Zagrebu, Zagreb, 1984
- [12.] Different location of center of resistance depending on the periodontal support, <http://www.dentalpedia.ca/biomechanics/physics-in-orthodontics/centers/>, (26.03.2019.)
- [13.] *Mechanics of tooth movement*, <https://www.slideshare.net/drkirtiagrawal7/mechanics-of-tooth-movement>, (26.3.2019.)

[14.] Provatidis CG. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation. *Int J Eng Sci* 2001;39:1361–81.

[15.] *How do teeth move?*, <https://www.blueridgeorthodontics.com/how-do-your-teeth-move/> Blue Ridge Orthodontics, (26.3.2019.)

[16.] Krishnan, V., & Davidovitch, Z. (2006). Cellular, molecular, and tissue-level reactions to orthodontic force. *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 129(4), 469.e1–469.e32.

[17.] Sorić, J., *Metoda konačnih elemenata*, Golden Marketing – Tehnička knjiga, Zagreb 2004.