

Validacija postupka sprezanja u analzi serijskih Bernoullijevih proizvodnih linija

Abdulaj, Filip

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:840674>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Filip Abdulaj

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Doc. dr. sc. Neven Hadžić,

Student:

Filip Abdulaj

Zagreb, 2019.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Posebno se zahvaljujem svom mentoru Dr.sc.Nevenu Hadžiću na iskazanom povjerenju i pomoći koju mi je pružao tijekom izrade završnog rada.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji na podršci i strpljenju koje mi pružaju.

Filip Abdulaj



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Filip Abdulaj** Mat. br.: 0035201754

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **VALIDACIJA POSTUPKA SPREZANJA U ANALIZI SERIJSKIH BERNOULLIJEVIH PROIZVODNIH LINIJA**
Naslov rada na engleskom jeziku: **VALIDATION OF THE AGGREGATION PROCEDURE IN THE ANALYSIS OF THE SERIAL BERNOULLI PRODUCTION LINES**

Opis zadatka:

Uobičajeni pristup analizi serijskih Bernoullijevih proizvodnih linija temelji se na postupku sprezanja. No, navedeni postupak u dosadašnjim istraživanjima nije u potpunosti validiran čime je smanjena pouzdanost njegove primjene, osobito u sklopu koncepta vitke proizvodnje (Lean manufacturing).

Stoga je u završnom radu potrebno:

1. Prikazati osnove približnih i analitičkih modela Bernoullijevih serijskih proizvodnih linija.
2. Razviti postupak sprezanja za Bernoullijevu serijsku liniju s proizvoljnim brojem strojeva i proizvoljnim kapacitetom međuskладиšta.
3. Validirati razvijeni postupak koristeći analitičko rješenje problema.
4. Provesti analizu tipične brodograđevne serijske proizvodne linije.

Tijekom izrade rada koristiti literaturu i računalnu potporu dostupnu na FSB-u.

Zadatak zadan:
29. studenog 2018.

Zadatak zadao:

Rok predaje rada:
1. rok: 22. veljače 2019.
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2019.
3. rok: 20. rujna 2019.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 25.2. - 1.3. 2019.
2. rok (izvanredni): 2.7. 2019.
3. rok: 23.9. - 27.9. 2019.

Doc. dr. sc. Neven Hadžić

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli

SADRŽAJ

POPIS SLIKA.....	III
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA.....	V
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY.....	VII
1. UVOD.....	1
2. SLUČAJNI DOGAĐAJI.....	2
2.1. Teorem vjerojatnosti.....	2
2.2. Uvjetovana vjerojatnost.....	4
2.3. Nezavisnost.....	5
2.4. Potpuna vjerojatnost.....	5
2.5. Bayes-ova formula.....	6
2.6. Stohastički procesi.....	6
2.6.1. Markovljevi procesi.....	7
2.6.2. Markovljevi lanci.....	7
3. ANALITIČKO RJEŠENJE USTALJENOG ODZIVA BERNOULLIJEVIH PROIZVODNIH LINIJA.....	11
3.1. Matematički model.....	11
3.2. Oblikovanje opće prijelazne matrice.....	12
3.3. Analitičko rješenje.....	13
3.4. Mjere učinkovitosti proizvodnog procesa.....	14
4. POLUANALITIČKA METODA SPREZANJA (AGREGACIJE).....	16
4.1. Linija s dva stroja.....	16
4.1.1. Matematički model.....	16
4.1.2. Formule mjera učinkovitosti linija s dva stroja.....	17
4.2. Matematički opis i pristup linije s $M > 2$	18
4.3. Agregacijski postupak i njegova svojstva.....	20
4.4. Formule mjera učinkovitosti proizvodnog procesa.....	21
5. USPOREDBA ANALITIČKOG I AGREGACISKOG POSTUPKA METODE SPREZANJA.....	22
5.1. Usporedba proizvodne linije s 2 stroja vjerojatnosti p_1, p_2 i kapaciteta međuskladišta N_1 ;.....	23
5.2. Usporedba proizvodne linije s 3 stroja vjerojatnosti p_1, p_2, p_3 i kapaciteta međuskladišta N_1, N_2 ;.....	29
5.3. Usporedba proizvodne linije s 4 stroja vjerojatnosti p_1, p_2, p_3, p_4 i kapaciteta međuskladišta N_1, N_2, N_3 ;.....	37
5.4. Usporedba proizvodne linije s 5 strojeva vjerojatnosti p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 i kapaciteta međuskladišta N_1, N_2, N_3, N_4 ;.....	49
5.5. Rezultat usporedbe.....	61
6. ANALIZA TIPIČNE BRODOGRAĐEVNE PROIZVODNE LINIJE.....	62

7. ZAKLJUČAK.....	65
LITERATURA.....	66
PRILOZI.....	67

POPIS SLIKA

Slika 1.	Ilustracija komplementa	3
Slika 2.	Ilustracija podskupa, A je podskup skupa B	4
Slika 3.	Ilustracija unije i presjecišta događaja A i B	4
Slika 4.	Particija skupa S	5
Slika 5.	Dijagram prijelaznih vrijednosti Markovljevog lanca.....	9
Slika 6.	Proizvodna linija $M > 2$ strojeva.	11
Slika 7.	Blok dijagram analize Bernoullijeve proizvodne linije.....	16
Slika 8.	Proizvodna linija dva stroja.	16
Slika 9.	Prikaz nazadne agregacije	19
Slika 10	Prikaz napredne agregacije.....	19
Slika 11.	Usporedni dijagrami linije s dva stroja za primjer 1.	24
Slika 12.	Usporedni dijagrami linije s dva stroja za primjer 2.	26
Slika 13.	Usporedni dijagrami linije s dva stroja za primjer 3	28
Slika 14.	Usporedni dijagrami linije s tri stroja za primjer 4.	30
Slika 15.	Usporedni dijagrami linije s tri stroja za primjer 5.	32
Slika 16.	Usporedni dijagrami linije s tri stroja za primjer 6.	34
Slika 17.	Usporedni dijagrami linije s tri stroja za primjer 7.	36
Slika 18.	Usporedni dijagrami linije s četiri stroja za primjer 8.....	39
Slika 19.	Usporedni dijagrami linije s četiri stroja za primjer 9.....	42
Slika 20.	Usporedni dijagrami linije s četiri stroja za primjer 10.....	45
Slika 21.	Usporedni dijagrami linije s četiri stroja za primjer 11.....	48
Slika 22.	Usporedni dijagrami linije s pet strojeva za primjer 12.	51
Slika 23.	Usporedni dijagrami linije s pet strojeva za primjer 13.	54
Slika 24.	Usporedni dijagrami linije s pet strojeva za primjer 14.	57
Slika 25.	Usporedni dijagrami linije s pet strojeva za primjer 15.	60
Slika 26.	Seriska linija predobrade limova	62

POPIS TABLICA

Tablica 1. Izlaznih rezultati za primjer 1.....	23
Tablica 2. Izlaznih rezultati za primjer 2.....	25
Tablica 3. Izlaznih rezultati za primjer 3.....	27
Tablica 4. Izlaznih rezultati za primjer 4.....	29
Tablica 5. Izlaznih rezultati za primjer 5.....	31
Tablica 6. Izlaznih rezultati za primjer 6.....	33
Tablica 7. Izlaznih rezultati za primjer 7.....	35
Tablica 8. Izlaznih rezultati za primjer 8.....	37
Tablica 9. Izlaznih rezultati za primjer 8.....	38
Tablica 10. Izlaznih rezultati za primjer 9.....	40
Tablica 11. Izlaznih rezultati za primjer 9.....	41
Tablica 12. Izlaznih rezultati za primjer 10.....	43
Tablica 13. Izlaznih rezultati za primjer 10.....	44
Tablica 14. Izlaznih rezultati za primjer 11.....	46
Tablica 15. Izlaznih rezultati za primjer 11.....	47
Tablica 16. Izlaznih rezultati za primjer 12.....	49
Tablica 17. Izlaznih rezultati za primjer 12.....	50
Tablica 18. Izlaznih rezultati za primjer 13.....	52
Tablica 19. Izlaznih rezultati za primjer 13.....	53
Tablica 20. Izlaznih rezultati za primjer 14.....	55
Tablica 21. Izlaznih rezultati za primjer 14.....	56
Tablica 22. Izlaznih rezultati za primjer 15.....	58
Tablica 23. Izlaznih rezultati za primjer 15.....	59
Tablica 24. Linija predobrade – deklarirani i stvarni kapacitet stroja.....	63
Tablica 25. Linija predobrade – kapaciteti međuskladišta.....	63
Tablica 26. Mjere učinkovitosti prema poluanalitičkoj metodi sprezanja.....	63

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
E	/	eksperiment
ζ_i	/	ishod i
A, B, C	/	dogadjaji
P	/	vjerojatnost da stroj radi
S	/	skup događaja
m_i	/	stroj i
b_i	/	međuskладиšte i
n	/	broj poluproizvoda na međuskладиštu i
$X(t)$	/	stohastički proces
t	s	vrijeme
$\{P\}$	/	svojstveni vektor
Ω_k	/	svojstvena vrijednost
PR	/	produktivnost
WIP_i	/	broj poluproizvoda
BL_i	/	zastoj stroja i
ST_i	/	prazan hod stroja i
P_{ijkl}	/	prijelazne vjerojatnosti
d	/	dimenzija matrice
h_i^n	/	stanje međuskладиšta u n -tom ciklusu
p_i^b	/	vjerojatnost da stroj radi u Bernoullijevoj proizvodnoj liniji pri nazadnoj agregaciji
p_i^f	/	vjerojatnost da stroj radi u Bernoullijevoj proizvodnoj liniji pri nazadnoj agregaciji
s	/	broj iteracije
L_i	/	proizvodna linija i

SAŽETAK

Brodograđevni proizvodni proces sadrži niz tehnoloških operacija čiji se matematički odnos može prikazati primjenom teorije vjerojatnosti, stohastičkih procesa i Markovljevih lanaca. Pri analizi seriskih Bernoulijevih proizvodnih linija oslanjamo se na postupak sprezanja koji nije u potpunosti validiran. U radu će se stoga usporediti parametri proizvodnosti određeni analitičkim rješenjem i poluanalitičkim postupkom kako bi se utvrdila vjerodostojnost približnog rješavanja problema ustaljenog odziva seriskih proizvodnih linija.

Ključne riječi: *Brodograđevni proizvodni proces, Bernoulijeva proizvodna linija, teorija vjerojatnosti, stohastički proces, Markovljevi lanci, analitička metoda sprezanja, poluanalitička metoda sprezanja (agregacije).*

SUMMARY

The shipbuilding production process contains a set of technological operations whose mathematical relationship can be described using probability theory, stochastic processes and Markov chains. When analyzing Bernoulli's production lines, we rely on a agregation procedure that is not fully validated. Therefore, in this paper, a comparison of the productivity parameters determined by the analytical solution and the semi-analytical procedure will be performed in order to determine the plausibility of solving the steady-state response of serial production lines.

Key words: Shipbuilding production process, serial Bernoulli line, probability theory, stochastic processes, Markov chain, analytical solution, semi-analytical solution.

1. UVOD

Kako u svjetskoj tako i u hrvatskoj brodograđevnoj industriji određeni dio proizvodnje čini linijska proizvodnja koja proizvodi određene dijelove ili opremu za brod. Npr. u svakom hrvatskom brodogradilištu postoji linija za predobradu limova. Svako brodogradilište kako bi zadržalo svoju proizvodnost i konkurentnost, te pri tome se istovremeno nosilo s novim izazovima i zahtjevima koji se pojavljuju na tržištu, mora raditi na održavanju i unapređivanju već postojeće proizvodnje.

U cilju osiguranja veće zarade uz minimalne gubitke prilikom proizvodnje u novije vrijeme pojavila se nova grana inženjersva pod nazivom inženjersvo proizvodnih sustava. Inženjersvo proizvodnih sustava kao svoj zadatak nalazi grupu osnovnih problema kao šta su projektiranje, analiza i usavršavanje proizvodnih sustava. Matematički modeli inženjersva proizvodnih sustava mogu se klasificirati u tri skupine; analitički, poluanalitički i numerički. Kao najbitniji model izdvaja se analitički, ali zbog njegove složenosti poznat je samo mali broj egzaktnih rješenja, odnosno opisuje se samo manji broj proizvodnih sustava. Proizodne linije koje bi se mogle opisati analitičkim modelom rijetko nalazimo u praksi.

U ovom radu bit će prikazani analitički i poluanalitički pristup izračunu parametara Bernoullijevih proizvodnih linija u čijem sastavu se nalaze više od dva stroja. Numerički model za oba pristupa napisan je u programskom jeziku Fortran. Vršit će se usporedba rezultata dobivenih već postojećim programskim kodom ShipProLab za izračun analitičke metode i koda MachineLines za izračun poluanalitičke metode sprezanja, a koji je ujedno i sastavni dio završnog rada.

2. SLUČAJNI DOGAĐAJI

Na ponašanje proizvodnih sustava veliki utjecaj imaju slučajni događaji [1], odnosno događaji slučajne naravi (npr. vjerojatnost da stroj radi ili je u kvaru). Takve vrste događaja vode do drugih pojava poput zastoja i praznog hoda stroja, promjenjive propusnosti, neispravnih dijelova, neispunjenje želja kupaca, itd.

Definicija slučajnih događaja temelji se na nekoliko pojmova:

- 1) Eksperiment E ili pokus je pojava koja može biti ponovljena proizvoljan broj puta pod naizgled jednakim okolnostima, a da se pritom dobiveni rezultati ne moraju podudarati. Npr. stanje stroja (radi ili je u kvaru) u unaprijed određeno vrijeme opažanja (npr. 9:30)..
- 2) Ishod ζ je rezultat eksperimenta. Npr. stroj radi (ili je u kvaru) u 9:30 promatranog dana.
- 3) Skup S obuhvaća područje svih mogućih ishoda eksperimenta. Npr. za liniju sa dva stroja: $S = \{\zeta_1 = (\text{radi}, \text{radi}), \zeta_2 = (\text{radi}, \text{u kvaru}), \zeta_3 = (\text{u kvaru}, \text{radi}), \zeta_4 = (\text{u kvaru}, \text{u kvaru})\}$.
- 4) Događaj (A, B, C, \dots) je podskup skupa S te sadrži jedan ili više ishoda. Npr. za proizvodnu liniju sa dva stroja: $A = \{\text{oba stroja su u istom stanju (radi ili je u kvaru)}\} = \{\zeta_1, \zeta_4\}$, $B = \{\text{barem jedan stroj radi}\} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$.
- 5) Vjerojatnost P predstavlja relativna učestalost različitih događaja. Npr. za duži period promatranja odedeno je da stroj radi 90% vremena stoga se pretpostavlja da je $P[\{\text{stroj radi}\}] = 0.9$.

2.1. Teorem vjerojatnosti

Dok se vjerojatnost nekih događaja može odrediti dužim periodom opažanja, vjerojatnost nekih drugih događaja nema tu mogućnost te se mora izračunati. Npr. vjerojatnost $P[\{\text{stroj radi}\}]$ može biti poznata, dok se vjerojatnost $P[\{\text{svi strojevi rade istovremeno}\}]$ mora odrediti računski. U određivanju vjerojatnosti računskim putem pomažu nam teoremi vjerojatnosti. Slijede kratki prikazi tri teorema koja možemo primjeniti za izračunavanje vjerojatnosti svih događaja za koje je pokazan određeni interes. Pri tome se kreće od slijedećih postavki:

- Vjerojatnost svakog događaja je veća od nule: $P[A] \geq 0$.
- Vjerojatnost skupa događaja je jednaka 1: $P[S] = 1$.
- Ako dva događaja nemaju zajednički ishod, odnosno njihov presjek glasi $A \cap B = \emptyset$, onda je $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

TEOREM I - ako je unija događaja A i B , skup S i pri tome se događaji međusobno isključuju, znači da je presjek događaja \emptyset ,

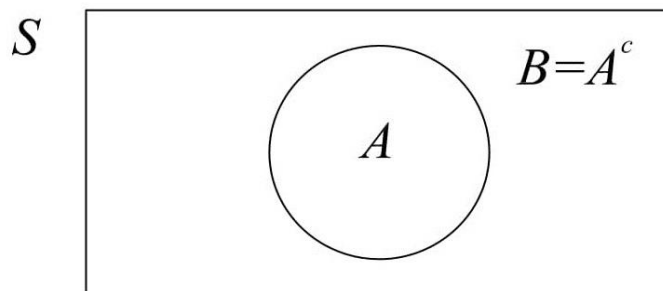
$$A \cup B = S, \quad (2.1)$$

$$A \cap B = \emptyset, \quad (2.2)$$

slijedi da je

$$P[B] = 1 - P[A]. \quad (2.3)$$

Skup B koji zadovoljava ove relacije naziva se komplement od A , a označava se kao A^C , [Slika 1].



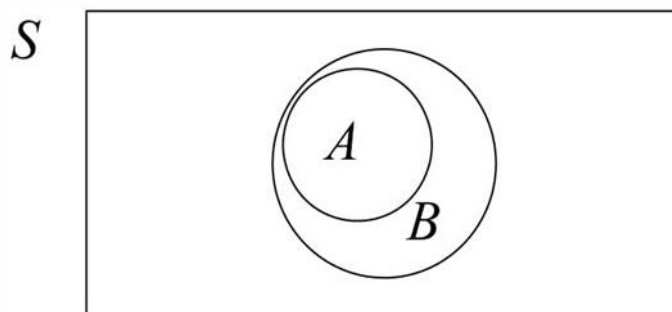
Slika 1. Ilustracija komplementa

TEOREM II - ako je događaj A unutar ili jednak događaju B , [Slika 2]

$$A \subseteq B, \quad (2.4)$$

tada je

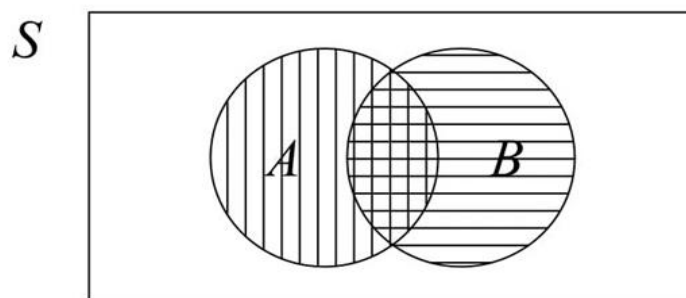
$$P[A] \leq P[B] \quad (2.5)$$



Slika 2. Ilustracija podskupa, A je podskup skupa B

TEOREM III -vjerojatnost unije dvaju događaja, A i B u skupu S je dana kao, [Slika 3].

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]. \quad (2.6)$$



Slika 3. Ilustracija unije i presjecišta događaja A i B

2.2. Uvjetovana vjerojatnost

Razmatrajući dva ili više događaja pri kojima je vjerojatnost pojavljivanja jednog događaja uvjetovana pojavljivanjem drugog naziva se uvjetna vjerojatnost. Npr. dva događaja A i B , [Slika 3], tada je vjerojatnost događaja B , ako se dogodi događaj A ,

$$P[B | A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}. \quad (2.7)$$

Također onda vrijedi

$$P[A \cap B] = P[B|A]P[A] = P[A|B]P[B]. \quad (2.8)$$

2.3. Nezavisnost

Nezavisnost je još jedno svojstvo koje definira odnose između događaja. Npr. dva događaja A i B u skupu S su nezavisni ako je:

$$P[B|A] = P[B], \quad (2.9)$$

pa nam slijedi

$$P[A \cap B] = P[A]P[B]. \quad (2.10)$$

Ako postoje tri događaja A_1 , A_2 i A_3 skupa S su nezavisna ako se uparuju na lijedeći način

$$\begin{aligned} P[A_1 \cap A_2] &= P[A_1]P[A_2], \\ P[A_1 \cap A_3] &= P[A_1]P[A_3], \\ P[A_2 \cap A_3] &= P[A_2]P[A_3], \\ P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] &= P[A_1]P[A_2]P[A_3]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Analogno tome, ako su za $n \geq 3$ događaji nezavisni onda je i $n - 1$ pripadni presjek nezavisni i vrijedi:

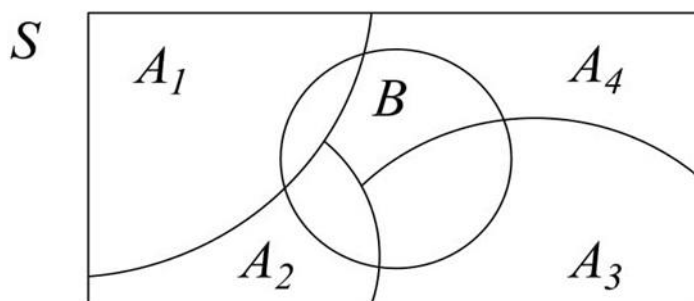
$$P[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = P[A_1]P[A_2] \dots P[A_n]. \quad (2.12)$$

2.4. Potpuna vjerojatnost

Razmatranjem seta događaja A_i u skupu S , $i = 1, \dots, n$, koji se međusobno isključuju, a njihova unija je S , tada je:

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= \emptyset, \quad \text{za } i \neq j, \\ \bigcup_{i=1}^n A_i &= S. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Iz očitog razloga, takav skup događaja naziva se particija skupa S , [Slika 4]



Slika 4. Particija skupa S

Neka B bude skup događaja u S . Onda je

$$\{B \cap A_1\} \cup \{B \cap A_2\} \cup \dots \cup \{B \cap A_n\} = B. \quad (2.14)$$

Stoga koristeći formulu za uniju vjerojatnosti nezavisnih događaja slijedi:

$$P[B] = P[B \cap A_1] + P[B \cap A_2] + \dots + P[B \cap A_n]. \quad (2.15)$$

Primjenom formule vjerojatnosti sjecišta dvaju događaja dobivamo:

$$\begin{aligned} P[B] &= P[B|A_1]P[A_1] + P[B|A_2]P[A_2] + \dots \\ &+ P[B|A_n]P[A_n] = \sum_{i=1}^n P[B|A_i]P[A_i]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Tu formulu nazivamo formulom potpune vjerojatnosti.

2.5. Bayes-ova formula

Ako je skup S prostor elementarnih događaja $A_i, i=1,2,\dots,n$, koji predstavljaju njegove disjunktne dijelove (događaji koji se međusobno isključuju) i pri tome imamo događaj F koji je definiran u istom skupu S i za njega vrijedi $P[F]>0$, tada za uvjetnu vjerojatnost svakog događaja $A_i, i=1,2,\dots,n$ vrijedi:

$$P[A_i|F] = \frac{P[A_i \cap F]}{P[F]}. \quad (2.17)$$

Uvrštavanjem formule za potpunu vjerojatnost u nazivnik prethodne formule dobivamo:

$$P[A_i|F] = \frac{P[F|A_i]P[A_i]}{P[F|A_1]P[A_1] + P[F|A_2]P[A_2] + \dots + P[F|A_n]P[A_n]}. \quad (2.18)$$

Taj izraz se odnosi na Bayes-ovu formulu i ujedno je peti najbitniji izraz teorije vjerojatnosti.

2.6. Stohastički procesi

Stohastički procesi $(X(t), Y(t), Z(t), \dots)$ definirani su kao slučajne varijable čiji ishod ovisi o vremenu.

$$X(\zeta, t) = x(t), \quad x \in S_x \subseteq \mathbb{R}, \zeta \in S, t \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Stohastički procesi najčešće se označavaju velikim slovom, a njihove realizacije, koje se još nazivaju i trajektorijama, označavaju se malim slovom [1]. Iz izraza (2.19) slijedi: ako je t stalan, stohastički proces je slučajna varijabla, odnosno skup slučajnih varijabli (parametriziran s t),

dok za fiksni ζ stohastički proces je funkcija od t odnosno skup funkcija od t . To znači:

$$X(\zeta, t = t^*) = X(\zeta), \quad (2.20)$$

$$X(\zeta = \zeta^*, t) = x(t). \quad (2.21)$$

Kao model za analizu stohastičkih procesa koriste se Markovljevi procesi.

2.6.1. Markovljevi procesi

Većina sustava i problema nastalih u proizvodnom inženjerstvu mogu se opisati slijedećim diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x), t \in [0, \infty); x \in R^n, \Phi: R^n \rightarrow R^n \quad (2.22)$$

$$x(n+1) = \Phi_1(x(n)), n = 0, 1, \dots; X \in R^n, \Phi_1: R^n \rightarrow R^n.$$

Prethodni izrazi dobro opisuju proces u slučaju da je on predvidljiv. Ako se u procesu dogode neki nepredvidivi učinci, opis se mora izmjeniti tako da uključuje obilježja slučajnosti:

$$\frac{dX}{dt} = \Phi(X, \xi(t)), t \in (0, \infty); X \in R^n, \xi \in R^m, \Phi: R^n \times R^m \rightarrow R^n, \quad (2.23)$$

$$X(n+1) = \Phi_1(X(n), \xi(n)), n = 0, 1, \dots; X \in R^n, \xi \in R^m, \Phi_1: R^n \times R^m \rightarrow R^n.$$

Pri tome su $\xi(t)$ i $\xi(n)$ kontinuirani i diskretni vremenski procesi. U ovom slučaju $X(t)$ i $X(n)$ su također stohastički procesi, stoga je ponašanje proizvodnog sustava također slučajno. Ove procese nazivamo Markovljevim procesima te oni imaju ključnu ulogu u analizi proizvodnih sustava.

2.6.2. Markovljevi lanci

Markovljev lanac $X(n)$, $n=1, 2, \dots$, definiran je kao skup diskretnih ishoda u diskretnom vremenu gdje se taj skup S_x sastoji od konačnog niza točaka $i=0, 1, 2, \dots, S$ te zadovoljava slijedeće izraze:

$$\begin{aligned} P[X(n+1) = i | X(n) = j, X(n-1) = r, \dots, X(n-l) = s] \\ = P[X(n+1) = i | X(n) = j] =: P_{ij}, \quad \forall i, j, r, \dots, s \in S_x. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Bez obzira na stanje u kojem se proces nalazi, uvjetna vjerojatnost nekog stanja procesa u trenutku $n+1$ ne ovisi o stanju $n-1, n-2, \dots$, nego ovisi samo o stanju u trenutku n . To znači kako prijelaz iz j do i ne ovisi o tome koliko je proces trajao do j . Stoga $X(n)$ možemo prozvati Markovljevim lancem ako pamti samo jedan korak. Stoga izraz:

$$X(n+1) = \Phi_1(X(n), \xi(n)), \quad (2.25)$$

gdje je $\xi(n), n=0, 1, 2, \dots$, niz nezavisnih slučajnih varijabli koje definiraju Markovljev proces, u slučaju da funkcija distribucije vjerojatnosti $\xi(n)$ ovisi o stanju procesa u trenutku n .

Vjerojatnost P_{ij} , naziva se prijelazna vjerojatnost:

$$P_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j,$$

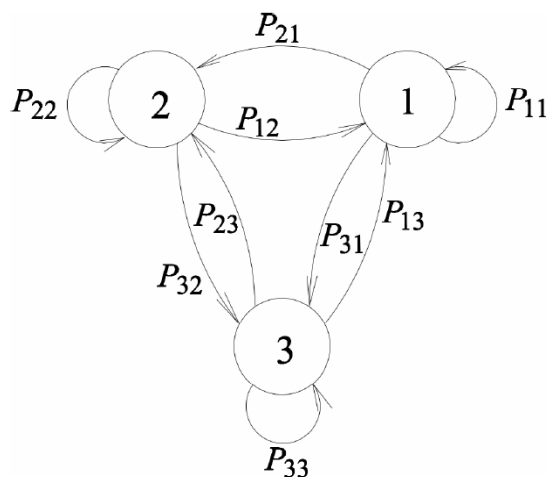
$$\sum_{i=1}^s P_{ij} = 1, \quad \forall j. \quad (2.26)$$

Prikladno bi bilo prijelazne vjerojatnosti zapisati u obliku kvadratne matrice:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1s} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{s1} & P_{s2} & \cdots & P_{ss} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Ovu matricu još nazivamo i matricom prijelaznih vrijednosti. Zbroj elemenata svakog stupca ove matrice iznosi 1, stoga se još zove i stohastička matrica.

Prijelazne vrijednosti jednako tako možemo prikazati kao veze u sljedećem dijagramu, [Slika 5].



Slika 5. Dijagram prijelaznih vrijednosti Markovljevog lanca

U dijagramu prijelaznih vrijednosti Markovljevog lanca postoji put iz svakog stanja u bilo koje drugo stanje. Radi toga analiza Markovljevog lanca zahtijeva izračun vjerojatnosti svakog stanja za svaki n . Koristeći izraz potpune vjerojatnosti, vjerojatnost i može biti izražena kao

$$P[X(n+1) = i] = \sum_{j=1}^S [X(n+1) = i | X(n) = j] P[X(n) = j], \quad i = 1, \dots, S. \quad (2.28)$$

Uvodeći notaciju

$$P_j(n) := P[X(n) = j], \quad (2.29)$$

i uzimajući u obzir uvjete vjerojatnosti kao prijelazne vrijednosti Markovljevog lanca (2.25), možemo ih pisati kao set linearnih vremenski diskretnih jednadžbi:

$$P_i(n+1) = \sum_{j=1}^S P_{ij} P_j(n), \quad i = 1, \dots, S. \quad (2.30)$$

Prethodni izraz ograničavamo s uvjetom:

$$\sum_{i=1}^S P_i(n) = 1. \quad (2.31)$$

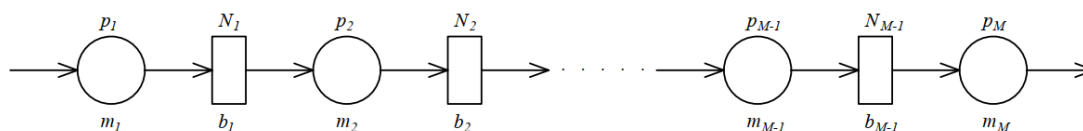
Rješavanjem jednadžbi (2.30) i (2.31) dobiva se potpuni oblik Markovljevog lanca. U većini slučajeva dovoljno je znati samo ustaljene vrijednosti prijelaznih vjerojatnosti, kao npr. $P_i := P_i(\infty)$. Ako su ove vjerojatnosti stvarne i jedinstvene (ne ovise o početnoj vjerojatnosti svakog stanja) određuju se sljedećim jednadžbama:

$$P_i = \sum_{j=1}^S P_{ij} P_j, \quad i = 1, \dots, S,$$
$$\sum_{i=1}^S P_i = 1. \tag{2.32}$$

Ove jednadžbe (2.32) nazivaju se jednadžbama ravnoteže. Njihovo rješenje daje ponašanje Markovljevog lanca. Ispostavlja se da su P_i , $i = 1, \dots, S$ komponente svojstvenog vektora matrice prijelaznih vrijednosti (2.27) s svojstvenom vrijednošću 1.

3. ANALITIČKO RJEŠENJE USTALJENOG ODZIVA BERNOULLIJEVIH PROIZVODNIH LINIJA

3.1. Matematički model



Slika 6. Proizvodna linija $M > 2$ strojeva

Razmatrajući serijsku Bernoullijevu proizvodnu liniju [Slika 6], sastavljenu od M strojeva m_i , $i = 1, 2, 3, \dots, M$ gdje svaki stroj ima vjerojatnost da radi p_i , odnosno da ne radi $1 - p_i$. Obradeni proizvodi su dodijeljeni jednom od $M - 1$ međuskladišta b_i , $i = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ koje je smješteno između dva stroja. Svako međuskladište je ograničeno svojim kapacitetom proizvoda koje može skladištiti N_i , $i = 1, 2, 3, \dots, M - 1$, gdje je $N_i \in \mathbb{N}_0$. Za izradu matematičkog modela koriste se sljedeće pretpostavke [2]:

- stanje svakog stroja je nezavisno u odnosu na druge,
- vremenska os je podijeljena na intervale, a strojevi započinju operacije na početku svakog vremenskog intervala,
- strojevi imaju jednake vremenske intervale,
- stanje svakog stroja i međuskladišta određuju se na početku svakog vremenskog intervala,
- prvi stroj nikada nije u praznom hodu, a zadnji nikada nije blokiran,
- promatrani objekt može ući u sustav samo kroz stroj m_1 , a izaći kroz stroj m_M .

S danim pretpostavkama, Bernoullijeva proizvodna linija može biti matematički formulirana kao Markovljev lanac, čije stanje definira stanje međuskladišta. Ustaljena vjerojatnost svake mogućnosti opisana je jednačbom ravnoteže (2.32) gdje su P_i i P_j ustaljene vjerojatnosti stanja i , odnosno j , dok je S sveukupni broj stanja, a P_{ij} izraz za matricu prijelaznih vrijednosti.

3.2. Oblikovanje opće prijelazne matrice

Oblikovanje prijelazne matrice za slučaj kada proizvodna linija sadrži više od dva stroja s različitim vjerojatnostima p_i i kapacitetima međuskладиšta većim od 2 može biti zahtjevno, jer dimenzije matrice $d \times d$ rastu eksponencijalno s brojem strojeva uključenih u liniju.

$$d = (N_1 + 1)(N_2 + 1) \dots (N_{M-1} + 1) = \prod_{i=1}^{M-1} (N_i + 1). \quad (3.1)$$

U slučaju da sva međuskладиšta imaju jednake kapacitete, izraz (3.1) možemo pisati kao

$$d = (N + 1)^{M-1}. \quad (3.2)$$

Kako je pravilno formuliranje prijelazne matrice najbitniji korak analitičke metode, formuliranje možemo bazirati na svojstvu matrice prijelaznih vrijednosti. Prvo i najbitnije svojstvo matrice prijelaznih vrijednosti je da suma elemenata matrice u stupcu mora biti jednaka 1,

$$\sum_{i=1}^s P_{ij} = 1. \quad (3.3)$$

U slučaju kada je proces homogen i ergodičan, svaka matrica prijelaznih vrijednosti može biti reducirana na set novih stohastičkih i nereducirajućih matrica,

$$[P(p_1, p_2, \dots, p_M)] = [P_1(p_1)][P_2(p_2)][P_3(p_3)] \dots [P_M(p_M)] = \prod_{i=1}^M [P_i(p_i)]. \quad (3.4)$$

Slično već poznatoj metodi separacije varijabli, formula (3.4) navodi da ukupna prijelazna matrica $[P]$ može biti prikazana kao skup od M stohastičkih i nereducirajućih sastavnih matrica koje ovise jedino o p_i . Struktura sastavne matrice $[P_i]$ može biti sastavljena zahvaljujući sljedećim uvjetima, ako za primjer uzmemo komponentu $(P_{ki})_i$ koja će poprimiti vrijednosti:

- 1) p_i u slučaju kada stroj i promjeni svoje stanje
- 2) $1 - p_i$ ako stanje sustava ostane nepromijenjeno prilikom kvara stroja
- 3) 1 ako se sustav ne može promijeniti prilikom praznog hoda ili zastoja stroja
- 4) 0 u slučaju kada proizvodnost stroja i ne doprinosi cijelom sustavu.

Ovisno o njihovom sastavu, sastavne matrice mogu biti lijeve i desne granične ili unutarnje matrice. Lijeve granična matrica $[P_l]$ je funkcija od p_l i jednaka je:

$$[P_1(p_1)] = \begin{cases} 1 - p_1 & \text{ako je } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^1 < N_1, \\ p_1 & \text{ako je } h_1^{n+1} = h_1^n + 1, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^1 < N_1, \\ 1 & \text{ako je } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^1 = N_1, \\ 0 & \text{za sve ostalo,} \end{cases} \quad (3.5)$$

gdje je h_i^n stanje međuskладиšta i u n -tom ciklusu, a h_i^{n+1} je stanje međuskладиšta u $n+1$ ciklusu. Unutarnje sastavne matrice $[P_i]$, $i = 2, 3, \dots, M-1$ su funkcije od p_i , $i = 2, 3, \dots, M-1$ i definirane su kao:

$$[P_i(p_i)] = \begin{cases} 1 - p_i & \text{ako je } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n > 0, h_i^n < N_i, \\ p_i & \text{ako je } \dots, h_{i-2}^{n+1} = h_{i-2}^n, h_{i-1}^{n+1} = h_{i-1}^n - 1, h_i^{n+1} = h_i^n + 1, h_{i+1}^{n+1} = h_{i+1}^n, \dots \\ & \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n > 0, N_1, h_i^n < N_i, \\ 1 & \text{ako je } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n = 0 \text{ ili } h_i^n = N_i, \\ 0 & \text{za sve ostalo,} \end{cases} \quad (3.6)$$

dok je desna granična matrica $[P_M]$ jednaka:

$$[P_M(p_M)] = \begin{cases} 1 - p_M & \text{ako je } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{M-1}^n > 0, \\ p_M & \text{ako je } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n - 1, h_{M-1}^n > 0, \\ 1 & \text{ako je } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{M-1}^n = 0, \\ 0 & \text{za sve ostalo.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Posebni slučaj prijelazne matrice je kada matrica sadrži međusobne odnose između stanja dva stroja gdje nema unutarnjih sastavnih matrica i stoga se jednadžbe (3.6) u tom slučaju moraju izostaviti.

3.3. Analitičko rješenje

Analitičko rješenje ustaljenih procesa serijskih Bernoullijevih proizvodnih linija se oslanja na svojstva prijelaznih matrica. U slučaju homogenih i ergodičkih procesa najveća svojstvena vrijednost matrice je 1 i povezana je sa svojstvenim vektorom sastavljenim od ustaljenih vjerojatnost P_i . Kako bi se dobilo analitičko rješenje ustaljenog odziva serijskih Bernoullijevih linija, kao problem postavlja se:

$$\det([P] - \Omega[I]) = 0, \quad (3.8)$$

gdje je Ω svojstvena vrijednost matrice, a $[I]$ jedinična matrica, dok rješenje linearnih sustava jednadžbi

$$([P] - \Omega_1[I])\{P_1\} = \{0\}, \quad (3.9)$$

daje nepoznati svojstveni vektor $\{P_1\}$ povezan s prvom svojstvenom vjednosti.

3.4. Mjere učinkovitosti proizvodnog procesa

Proizvodni proces opisujemo mjerama učinkovitosti koje obuhvaćaju ponašanje cijelog procesa, koristeći pritom izračunate vrijednosti ustaljenih vjerojatnosti. Mjere učinkovitosti koje obuhvaćaju proizvodni proces u slučaju kada linija ima M strojeva i $M-1$ međuskladišta:

- a) proizvodnost (PR) – prosječan broj proizvoda proizveden na posljednjem stroju proizvodne linije pri ustaljenom radu u pojedinom vremenskom intervalu, definirano je kao presjecište događaja $\{m_M \text{ radi}\}$ i $\{b_{M-1} \text{ nije prazno}\}$:

$$\begin{aligned} PR &= P[\{m_M \text{ radi}\} \cap \{b_{M-1} \text{ nije prazno}\}] \\ &= p_M \left(1 - \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-2}=0}^{N_{M-2}} P_{h_1 h_2 \dots h_{M-1}}\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

gdje je $P_{h_1 h_2 \dots h_{M-1}}$ je ustaljena vjerojatnost kada je stanje sistema $h_1 h_2 \dots h_{M-1}$.

- b) prosječan broj poluproizvoda (WIP) – prosječan broj poluproizvoda koje se nalazi u međuskladištu između dva stroja, ako je proces ustaljen. Broj poluproizvoda je potrebno definirati za svako međuskladište, a računa se kao:

$$WIP_i = \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 \dots h_{M-1}}, \quad (3.11)$$

dok ukupnu vrijednost poluproizvoda dobivamo sumiranjem prosječnih radova u nastanku procesa:

$$WIP = \sum_{i=1}^{M-1} WIP_i \quad (3.12)$$

- c) zastoj (BL_i) – vjerojatnost da stroj i radi, da je međuskladište i popunjeno i da stroj $i+1$ ne uzima poluproizvod iz međuskladišta i . Vjerojatnost zastoja BL_i strojeva m_i , $i=1, 2, \dots, M-1$ izražava se kao presjecište različitih događaja:

$$\begin{aligned} BL_{M-1} &= P[\{m_{M-1} \text{ radi}\} \cap \{b_{M-1} \text{ puno}\} \cap \{m_M \text{ ne radi}\}] \\ &= p_{M-1} (1 - p_m) \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-2}=0}^{N_{M-2}} P_{h_1 h_2 \dots h_{M-2} (h_{M-1}=N_{M-1})}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

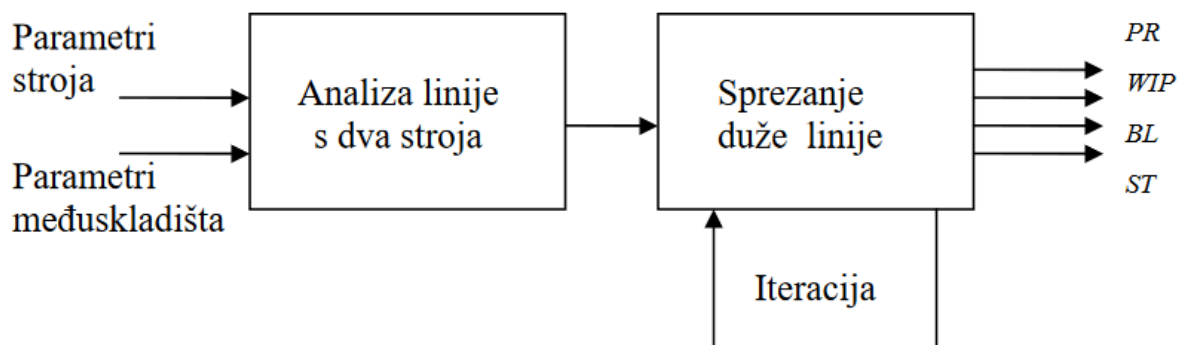
$$\begin{aligned}
BL_i &= P[\{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_i \text{ puno}\} \cap \{m_{i+1} \text{ ne radi}\} \cap \{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_i \text{ puno}\} \\
&\quad \cap \{b_{i+1} \text{ zastoj}\}] \\
&= p_i \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 \dots (h_{M-1}=N_{M-1}) \dots h_{M-1}} (1 - p_{i+1} + BL_{i+1}), \\
&\quad i = 1, 2, \dots, M - 2
\end{aligned} \tag{3.14}$$

d) prazni hod (ST_i) – vjerojatnost da stroj i radi i da je međuskладиште $i-1$ prazno, odnosno vjerojatnost praznog hoda ST_i strojeva m_i , $i = 2, 3, \dots, M$ je:

$$\begin{aligned}
ST_i &= P[\{b_{i-1} \text{ prazno}\} \cap \{m_i \text{ radi}\}] \\
&= p_i \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 \dots (h_{i-1}=0) \dots h_{M-1}}, i = 2, 3, \dots, M.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

4. POLUANALITIČKA METODA SPREZANJA (AGREGACIJE)

Pristup poluanalitičkoj metodi baziran je na analitičkom rješenju odziva linije s dva stroja. Prve analitičke formule za mjere učinkovitosti su izvedene, a druge agregacijske su razvijene tako da se duže linije reduciraju u setove linija s dva stroja [1].



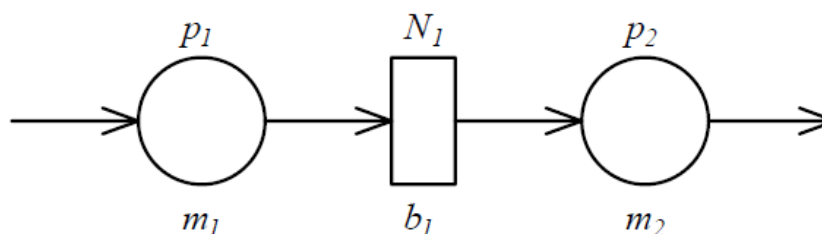
Slika 7. Blok dijagram analize Bernoullijeve proizvodne linije

Taj pristup [Slika 7] vodi do dovoljno točne vrijednosti mjera učinkovitosti PR , WIP_i , BL_i i ST_i .

4.1. Linija s dva stroja

4.1.1. Matematički model

Serijska Bernoullijeva proizvodna linija s dva stroja [Slika 8]. Strojevi m_1 i m_2 svaki u svojim vremenskim intervalima rade s vjerojatnošću p_1 i p_2 . Da bi postupak bio valjan kapacitet skladišta mora biti konačan $N < \infty$.



Slika 8. Proizvodna linija dva stroja

Pretpostavke koje ćemo koristiti u daljnjoj razradi iste su kao u poglavlju 3.1.

4.1.2. Formule mjera učinkovitosti linija s dva stroja

Iz razloga šta nam linija s dva stroja služi samo kao alat pri agregacijskom postupku bit će prikazane samo osnovne formule mjera učinkovitosti na kojima se bazira daljnji proračun poluanalitičke metode (detaljniji izvodi nalaze se u literaturi [1]):

- a) proizvodnost (PR) za prvi i drugi stroj

$$PR = p_1[1 - Q(p_2, p_1, N)], \quad (4.1)$$

$$PR = p_2[1 - Q(p_1, p_2, N)] \quad (4.2)$$

Q predstavlja funkciju koja igra značajnu ulogu u naknadnoj analizi, ona nam osigurava konvergenciju agregacijskog postupka u nadolazećoj analizi linija s više strojeva i za nju vrijedi sljedeće:

$$Q(p_1, p_2, N) = \begin{cases} \frac{(1 - p_1)(1 - \alpha(p_1, p_2))}{1 - \frac{p_1}{p_2} \alpha^N(p_1, p_2)}, & \text{ako je } p_1 \neq p_2 \\ \frac{1 - p}{N + 1 - p}, & \text{ako je } p_1 = p_2 = p. \end{cases} \quad (4.3)$$

uz supstituciju

$$\alpha = \frac{p_1(1 - p_2)}{p_2(1 - p_1)}. \quad (4.4)$$

- b) prosječan broj poluproizvoda (WIP)

$$WIP = \begin{cases} \left[\frac{p_1}{p_2 - p_1 \alpha^N(p_1, p_2)} \left[\frac{1 - \alpha^N(p_1, p_2)}{1 - \alpha(p_1, p_2)} - N \alpha^N(p_1, p_2) \right] \right], & \text{ako je } p_1 \neq p_2 \\ \frac{N(N + 1)}{2(N + 1 - p)}, & \text{ako je } p_1 = p_2 = p \end{cases} \quad (4.5)$$

c) blokada i prazni hod (BL_1 i ST_2)

$$BL_1 = p_1 - PR, \quad (4.6)$$

$$ST_2 = p_2 - PR. \quad (4.7)$$

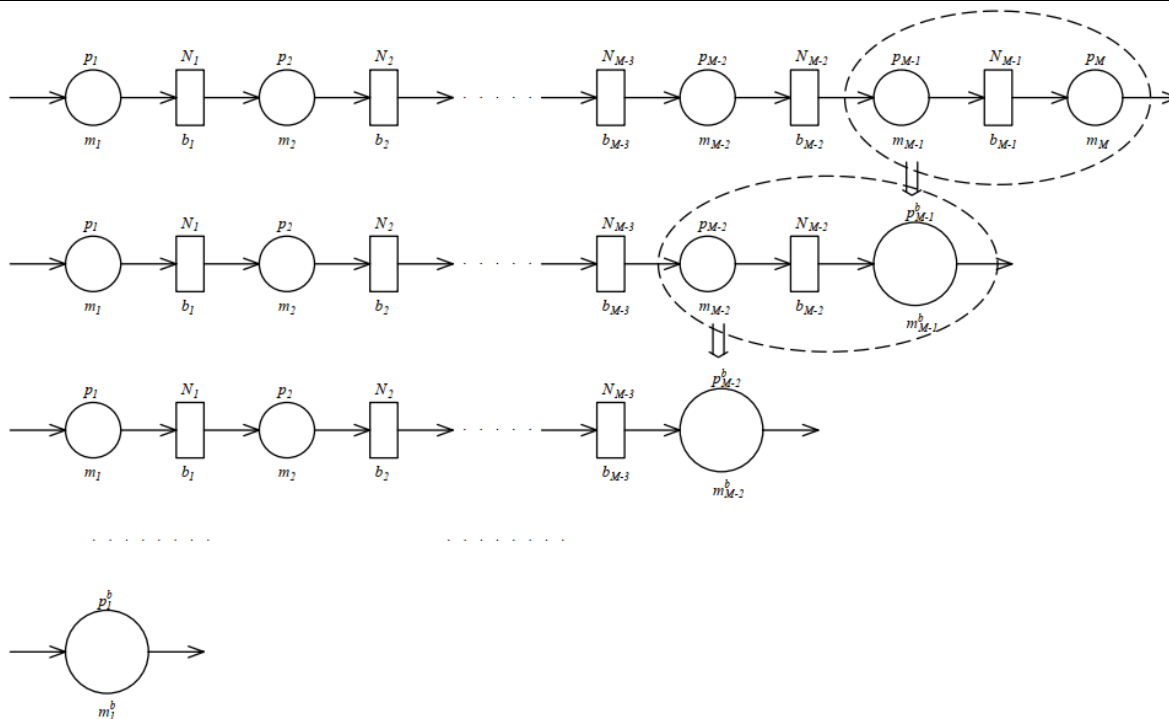
4.2. Matematički opis i pristup linije s $M > 2$

Proizvodni sustav koji sadrži više od dva stroja [Slika 6], [1]. Svaki stroj m_i , $i=1, 2, \dots, M-1$ u svome vremenskom intervalu radi s vjerojatnošću p_i , odnosno vjerojatnost da ne radi je $1-p_i$, $i=1, 2, \dots, M$. Kapacitet međuskladišta i je $N_i < \infty$, $i=1, 2, \dots, M-1$.

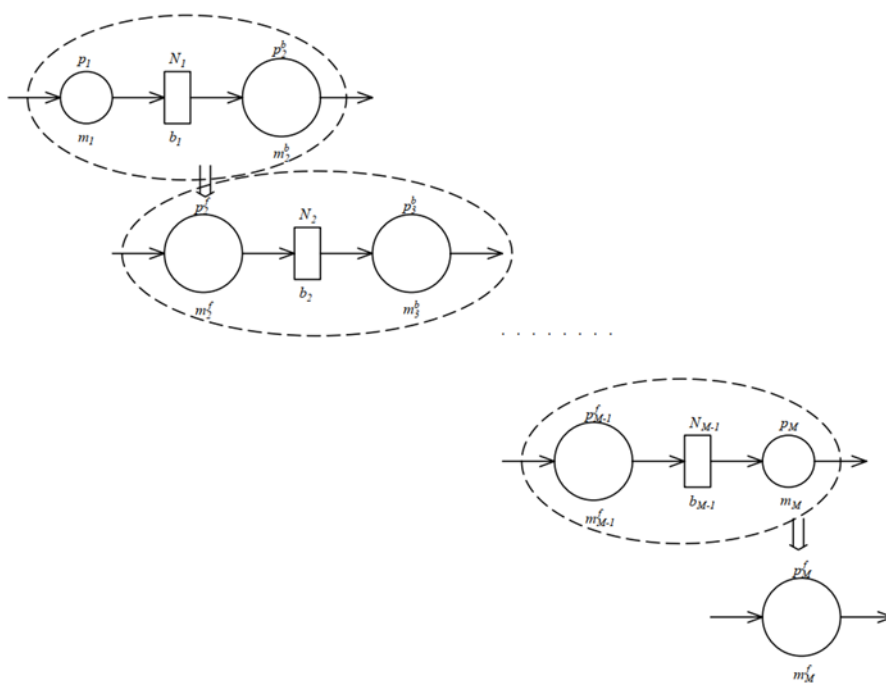
Pretpostavke koje ćemo koristiti u daljnjoj razradi iste su kao i u poglavlju 3.1.

Bernoullijevi strojevi su bezmemorijski, stoga je stanje sustava povezano sa stanjima međuskladišta. Kako i -to međuskladište ima N_i+1 stanja, sistem ima $(N_1+1)(N_2+1)\dots(N_{M-1}+1)$ stanja. Npr. ako je $N_i=9$ za svaki i , a linija se sastoji od $M=23$, broj dobivenih stanja je 10^{22} . Očito je da je direktna analiza tako velikog sistema gotovo nemoguća te je iz tog razloga potrebno pojednostavljeno. U tu svrhu koristimo agregacijski pristup.

Ideja agregacije svodi se na razmatranje M -strojne linije kojoj združujemo zadnja dva stroja, m_{M-1} i m_M u jedan stroj, označen kao m_{M-1}^b , gdje b označava da se radi o nazadnom združivanju. Bernoullijev parametar, p_{M-1}^b označava proizvodnost združenih strojeva u liniji, a računa se po prvom izrazu (4.1). Ponovno združujemo taj stroj m_{M-1}^b sa m_{M-2} te ih označavamo kao m_{M-2}^b . Taj proces se ponavlja sve dok strojevi nisu združeni u m_1^b , što označava kraj nazadne agregacije [Slika 9]. Proizlazi da Bernoullijev parametar od m_1^b može biti malo drugačiji od proizvodnosti strojne linije. Radi toga proizlazi napredna agregacija koja prvi stroj m_1 združuje sa združenom verzijom ostatka linije. Npr. m_2^b i označavamo je sa m_2^f gdje f označava naprednu agregaciju [Slika 10]. Bernoullijev parametar p_2^f označava proizvodnost združenih strojeva, a računa se po drugom izrazu (4.2). Radnju ponavljamo dok sve strojeve ne združimo u m_M^f čime završavamo naprednu agregaciju.



Slika 9. Prikaz nazadne agregacije



Slika 10. Prikaz napredne agregacije

Nakon nazadne agregacije Bernoullijev parametar m_M^f se opet može razlikovati od stvarne proizvodnosti linije, a da bi ublažili ovu razliku potrebno je provesti iteraciju između napredne i nazadne agregacije. Prethodnu nazadnu i naprednu agregaciju gleda se kao prva

iteracija $s = 1$. U drugoj iteraciji $s = 2$, m_{M-1}^f je združeno s m_M što rezultira u m_{M-1}^b za drugu iteraciju, te je ponovno združeno s m_{M-2}^f i tako sve dok druga nazadna iteracija ne bude gotova. Provedena druga iteracija popraćena je trećom, a treća je popraćena četvrtom te se redosljed nastavlja sve dok se ne zadovolji $p_M^f(s) = p_1^b$. Broj iteracija ovisi o složenosti sustava, međutim pokazalo se da konvergencija do ustaljenog procesa je izrazito nagla i obično zahtjeva manje od 10 iteracija.

4.3. Agregacijski postupak i njegova svojstva

Matematički prikaz ponavljajuće agregacije je sljedeći:

$$p_i^b(s+1) = p_i[1 - Q(p_{i+1}^b(s+1), p_i^f(s), N_i)], \quad i = 1, \dots, M-1, \quad (4.8)$$

$$p_i^f(s+1) = p_i[1 - Q(p_{i-1}^f(s+1), p_i^b(s+1), N_{i-1})]. \quad i = 2, \dots, M, \quad (4.9)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots,$$

uz početne uvjete

$$p_i^f(0) = p_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (4.10)$$

i rubne uvjete

$$p_1^f(s) = p_1, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.11)$$

$$p_M^b(s) = p_M, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

Vrijednost Q dobiva se na sljedeći način:

$$Q(x, y, N) = \begin{cases} \frac{(1-x)(1-\alpha)}{1 - \frac{x}{y}\alpha^N}, & \text{ako je } x \neq y, \\ \frac{1-x}{N+1-x}, & \text{ako je } x = y, \end{cases} \quad (4.13)$$

gdje je

$$\alpha = \frac{x(1-y)}{y(1-x)}. \quad (4.14)$$

Jednadžbe se rješavaju na sljedeći način:

- Kreće se od $i = M - 1$ te uz pomoć početnih i rubnih uvjeta slijedi da je vjerojatnost $p_{M-1}^f(0) = p_{M-1}$, a $p_M^b(s) = p_M$. Rješavanjem prve jednadžbe (4.8) proizlazi vrijednost $p_{M-1}^b(1)$. Nastavlja se s $i = M - 2$ te se dobiva $p_{M-2}^b(1)$ i tako sve dok se ne dobije vjerojatnost $p_1^b(1)$.

- Sljedeći korak je rješavanje druge jednadžbe (4.9) s $i = 2$ da se dobije $p_2^f(1)$. Zatim s $i = 3$ za dobivanje $p_3^f(1)$ i tako sve dok se ne dobije $p_M^f(1)$ te se time završava prva iteracija.
- Za drugu, treću i ostale iteracije se proces ponavlja iznova, uvrštavajući vrijednosti $p_{M-1}^f(1)$, $p_{M-1}^f(2)$, ..., u prvu jednadžbu (4.8).

4.4. Formule mjera učinkovitosti proizvodnog procesa

Temeljeno na jednadžbama i rubnim uvjetima za proizvodnu liniju s dva stroja [1].

- a) Proizvodnost bazirana je na (4.1), a definira se kao:

$$\begin{aligned} \widehat{PR} &= p_1^b = p_M^f, \\ &= p_{i+1}^b [1 - Q(p_i^f, p_{i+1}^b, N_i)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$= p_i^f [1 - Q(p_{i+1}^b, p_i^f, N_i)], \quad i = 1, \dots, M - 1. \quad (4.16)$$

- b) Broj poluproizvoda:

$$\widehat{WIP}_i = \begin{cases} \frac{p_i^f}{p_{i+1}^b - p_i^f \alpha^{N_i}(p_i^f, p_{i+1}^b)} \left[\frac{1 - \alpha^{N_i}(p_i^f, p_{i+1}^b)}{1 - \alpha(p_i^f, p_{i+1}^b)} - N_i \alpha^{N_i}(p_i^f, p_{i+1}^b) \right], & \text{ako je } p_i^f \neq p_{i+1}^b, \\ \frac{N_i(N_i + 1)}{2(N_i + 1 - p_i^f)}, & \text{ako je } p_i^f = p_{i+1}^b. \end{cases} \quad (4.17)$$

ukupnu vrijednost poluproizvoda dobijemo sumiranjem pojedinih

$$\widehat{WIP} = \sum_{i=1}^{M-1} \widehat{WIP}_i, \quad (4.18)$$

- c) Zastoj i prazni hod

$$\widehat{BL}_i = p_i Q(p_{i+1}^b, p_i^f, N_i), \quad i = 1, \dots, M - 1, \quad (4.19)$$

$$\widehat{ST}_i = p_i Q(p_{i-1}^f, p_i^b, N_{i-1}), \quad i = 2, \dots, M. \quad (4.20)$$

5. USPOREDBA ANALITIČKOG I AGREGACISKOG POSTUPKA METODE SPREZANJA

U cilju određivanja odstupanja između rezultata dobivenih agregacijskim i analitičkim postupkom izvršena je usporedba tih rezultata na primjerima proizvodnih linija s dva, tri, četiri i pet strojeva koji mogu biti jednakih ili raznih proizvodnosti, dok se kapacitet skladišta N kreće u rasponu od 1 do 21 jedinica obradka:

$$L_1: p=[0.8, 0.8], N_i=[N], i=1.$$

$$L_2: p=[0.8, 0.7], N_i=[N], i=1.$$

$$L_3: p=[0.7, 0.8], N_i=[N], i=1.$$

$$L_4: p=[0.8, 0.8, 0.8], N_i=[N, N], i=1,2.$$

$$L_5: p=[0.8, 0.75, 0.7], N_i=[N, 0.5N], i=1,2.$$

$$L_6: p=[0.7, 0.75, 0.8], N_i=[N, 0.5N], i=1,2.$$

$$L_7: p=[0.8, 0.7, 0.75], N_i=[N, 0.5N], i=1,2.$$

$$L_8: p=[0.8, 0.8, 0.8, 0.8], N_i=[N, N, N], i=1,2.$$

$$L_9: p=[0.8, 0.77, 0.75, 0.7], N_i=[N, 2/3N, 1/3N], i=1,2,3.$$

$$L_{10}: p=[0.7, 0.75, 0.77, 0.8], N_i=[N, 2/3N, 1/3N], i=1,2,3.$$

$$L_{11}: p=[0.8, 0.7, 0.77, 0.75], N_i=[N, 2/3N, 1/3N], i=1,2,3.$$

$$L_{12}: p=[0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8], N_i=[N, N, N, N], i=1,2,3,4.$$

$$L_{13}: p=[0.8, 0.77, 0.75, 0.72, 0.7], N_i=[N, 0.75N, 0.5N, 0.25N], i=1,2,3,4.$$

$$L_{14}: p=[0.7, 0.72, 0.75, 0.77, 0.8], N_i=[N, 0.75N, 0.5N, 0.25N], i=1,2,3,4.$$

$$L_{15}: p=[0.8, 0.75, 0.7, 0.72, 0.77], N_i=[N, 0.75N, 0.5N, 0.25N], i=1,2,3,4.$$

Usporedba bi trebala prikazati može li, i u kojim slučajevima agregacijska metoda zamjeniti analitičku. Prikazat će se vrijednosti PR, WIP, BL i ST u ovisnosti o N .

5.1. Usporedba proizvodne linije s 2 stroja vjerojatnosti p_1, p_2 i kapaciteta međuskladišta N_I ;

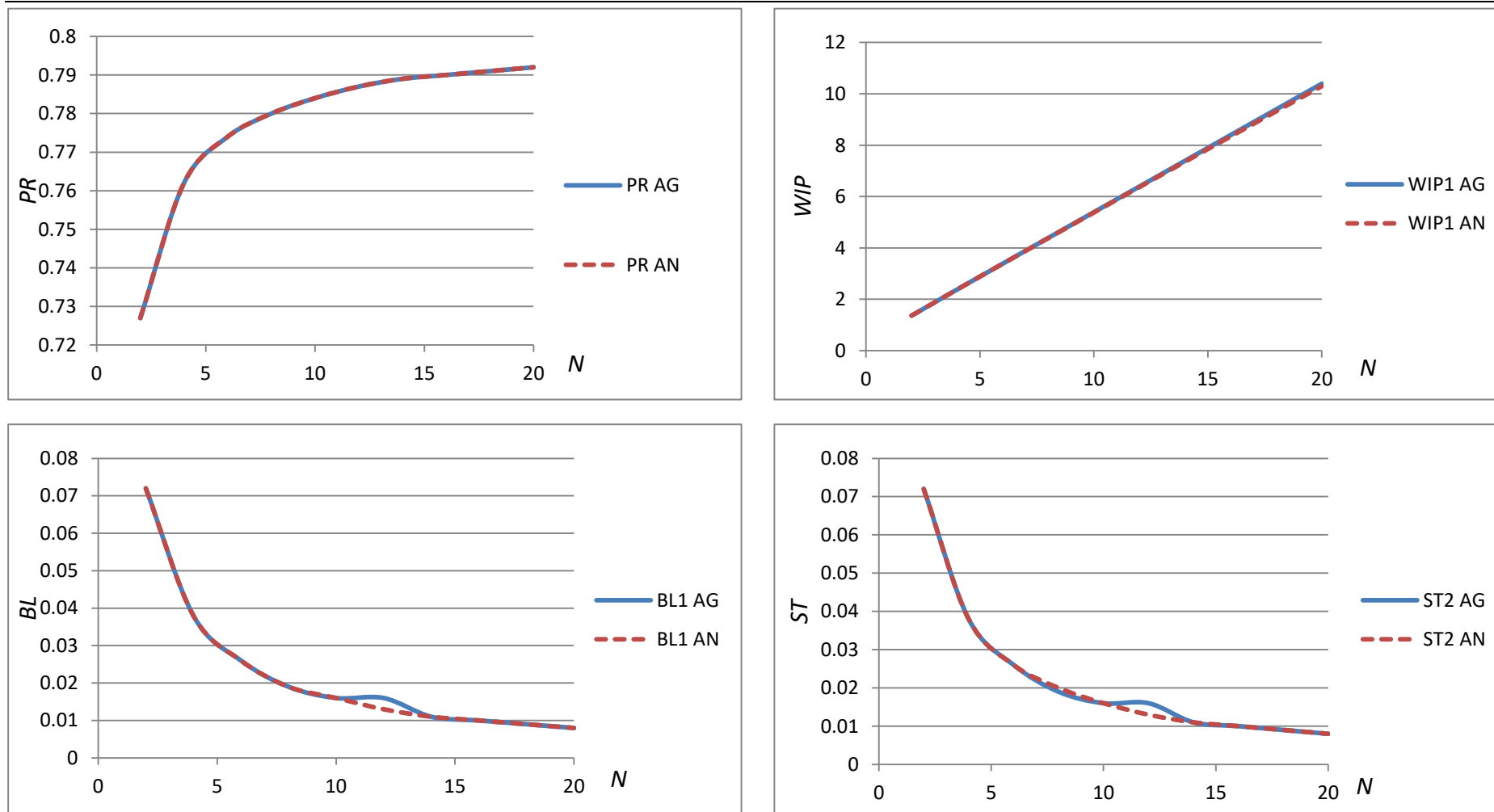
Primjer 1.

$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,8$$

Tablica 1. Izlaznih rezultati za primjer 1

N	PR		WIP ₁		WIP _{uk}		BL ₁		ST ₂	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
2	0,727	0,727	1,363	1,364	1,364	1,364	0,072	0,072	0,072	0,072
4	0,762	0,762	2,38	2,381	2,381	2,381	0,038	0,038	0,038	0,038
6	0,774	0,774	3,384	3,387	3,387	3,387	0,026	0,026	0,026	0,026
8	0,78	0,78	4,383	4,39	4,39	4,39	0,019	0,019	0,02	0,019
10	0,784	0,784	5,378	5,392	5,392	5,392	0,016	0,016	0,016	0,016
12	0,787	0,787	6,37	6,393	6,393	6,393	0,013	0,016	0,013	0,016
14	0,789	0,789	7,357	7,394	7,394	7,394	0,011	0,011	0,011	0,011
16	0,79	0,79	8,34	8,395	8,395	8,395	0,01	0,01	0,01	0,01
18	0,791	0,791	9,321	9,396	9,396	9,396	0,009	0,009	0,009	0,009
20	0,792	0,792	10,299	10,396	10,396	10,396	0,008	0,008	0,008	0,008



Slika 11. Usporedni dijagrami linije s dva stroja za primjer 1

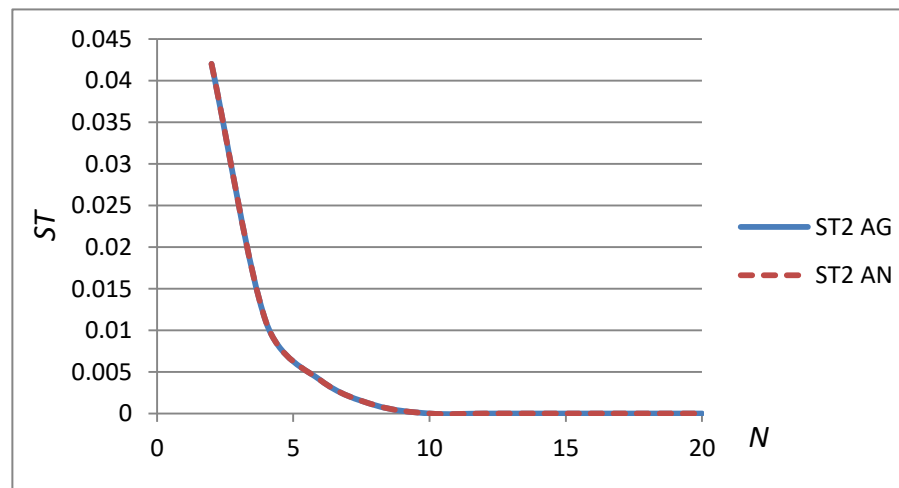
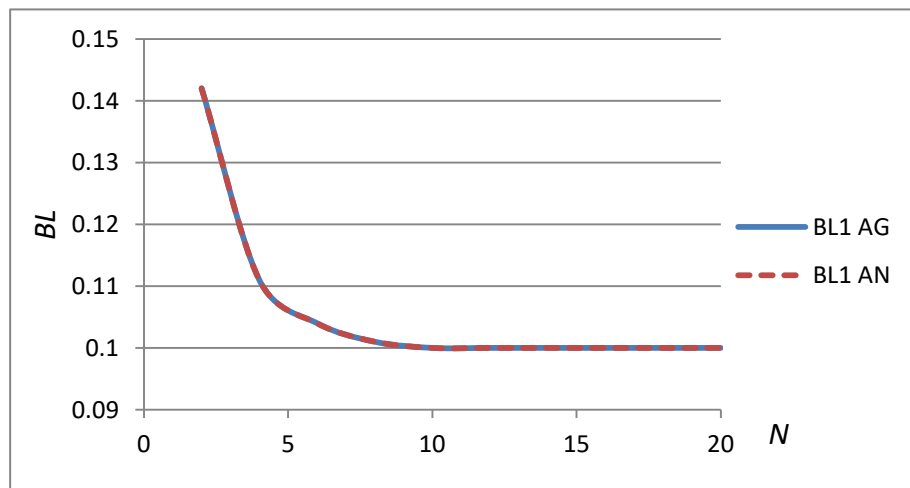
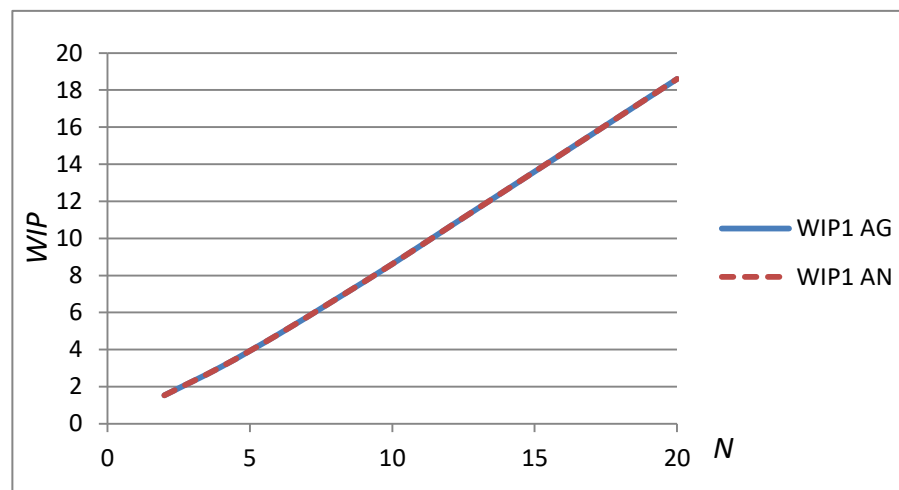
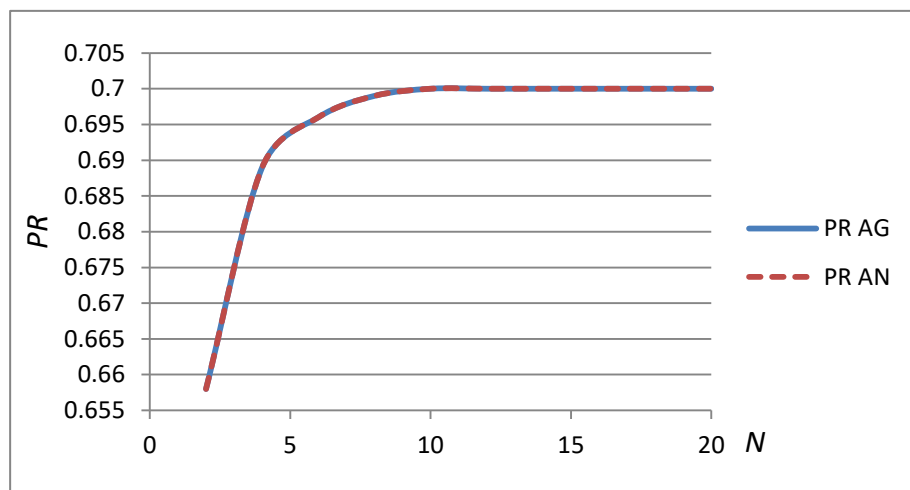
Primjer 2.

$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,7$$

Tablica 2. Izlaznih rezultati za primjer 2

N	PR		WIP ₁		WIP _{uk}		BL ₁		ST ₂	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
2	0,658	0,658	1,533	1,533	1,533	1,533	0,142	0,142	0,042	0,042
4	0,689	0,689	3,072	3,073	3,072	3,073	0,111	0,111	0,011	0,011
6	0,696	0,696	4,818	4,821	4,818	4,821	0,103	0,104	0,004	0,004
8	0,699	0,699	6,691	6,697	6,691	6,697	0,101	0,101	0,001	0,001
10	0,7	0,7	8,63	8,614	8,63	8,614	0,1	0,1	0	0
12	0,7	0,7	10,601	10,617	10,601	10,617	0,1	0,1	0	0
14	0,7	0,7	12,587	12,607	12,587	12,607	0,1	0,1	0	0
16	0,7	0,7	14,578	14,602	14,578	14,602	0,099	0,1	0	0
18	0,7	0,7	16,573	16,601	16,573	16,601	0,099	0,1	0	0
20	0,7	0,7	18,569	18,6	18,569	18,6	0,099	0,1	0	0



Slika 12. Usporedni dijagrami linije s dva stroja za primjer 2

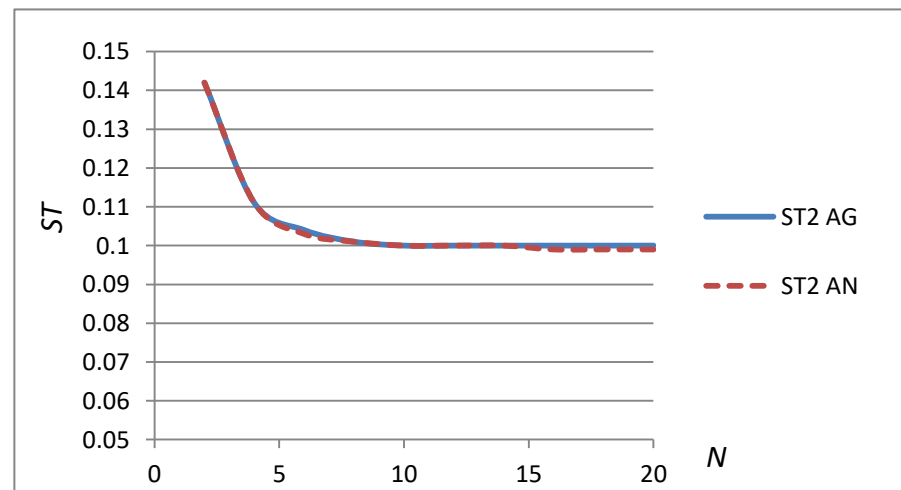
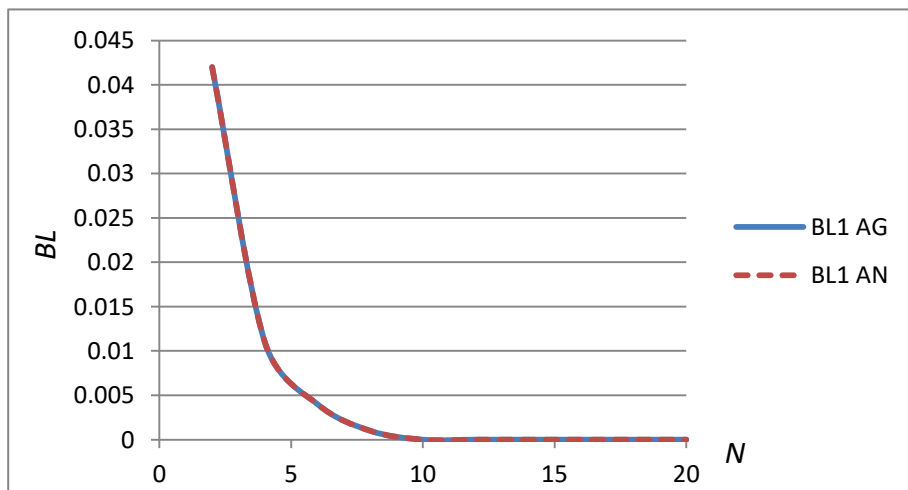
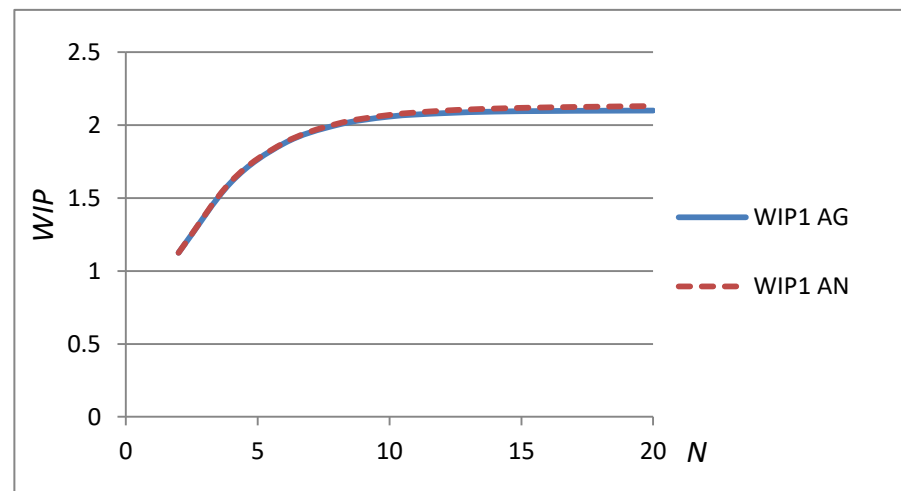
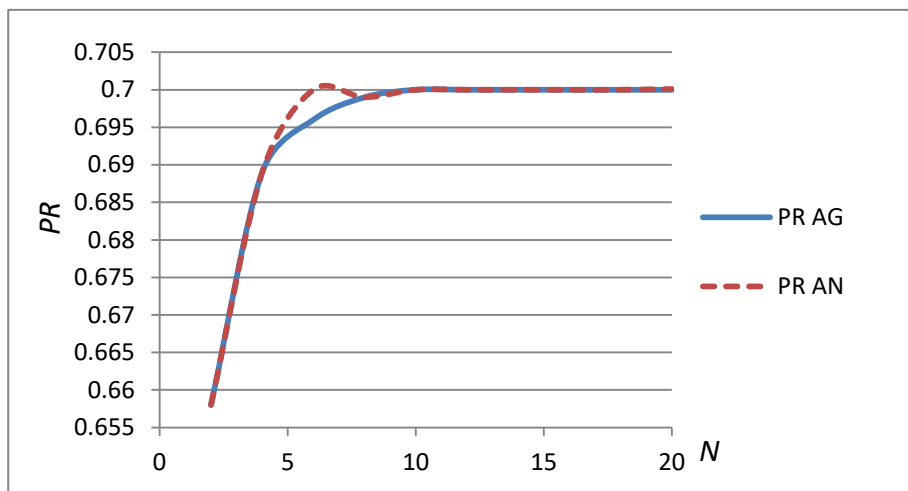
Primjer 3.

$$p_1 = 0,7 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,8$$

Tablica 3. Izlaznih rezultati za primjer 3

N	PR		WIP ₁		WIP _{uk}		BL ₁		ST ₂	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AN
2	0,658	0,658	1,125	1,125	1,125	1,125	0,042	0,042	0,142	0,142
4	0,689	0,689	1,616	1,61	1,616	1,61	0,011	0,011	0,111	0,111
6	0,7	0,696	1,879	1,875	1,879	1,875	0,004	0,004	0,103	0,104
8	0,699	0,699	2,009	2,001	2,009	2,001	0,001	0,001	0,101	0,101
10	0,7	0,7	2,07	2,059	2,07	2,059	0	0	0,1	0,1
12	0,7	0,7	2,099	2,082	2,099	2,082	0	0	0,1	0,1
14	0,7	0,7	2,114	2,093	2,114	2,093	0	0	0,1	0,1
16	0,7	0,7	2,122	2,097	2,122	2,097	0	0	0,099	0,1
18	0,7	0,7	2,127	2,099	2,127	2,099	0	0	0,099	0,1
20	0,7	0,7	2,131	2,1	2,131	2,1	0	0	0,099	0,1



Slika 13. Usporedni dijagrami linije s dva stroja za primjer 3

5.2. Usporedba proizvodne linije s 3 stroja vjerojatnosti p_1, p_2, p_3 i kapaciteta međuskладиšta N_1, N_2 ;

Primjer 4.

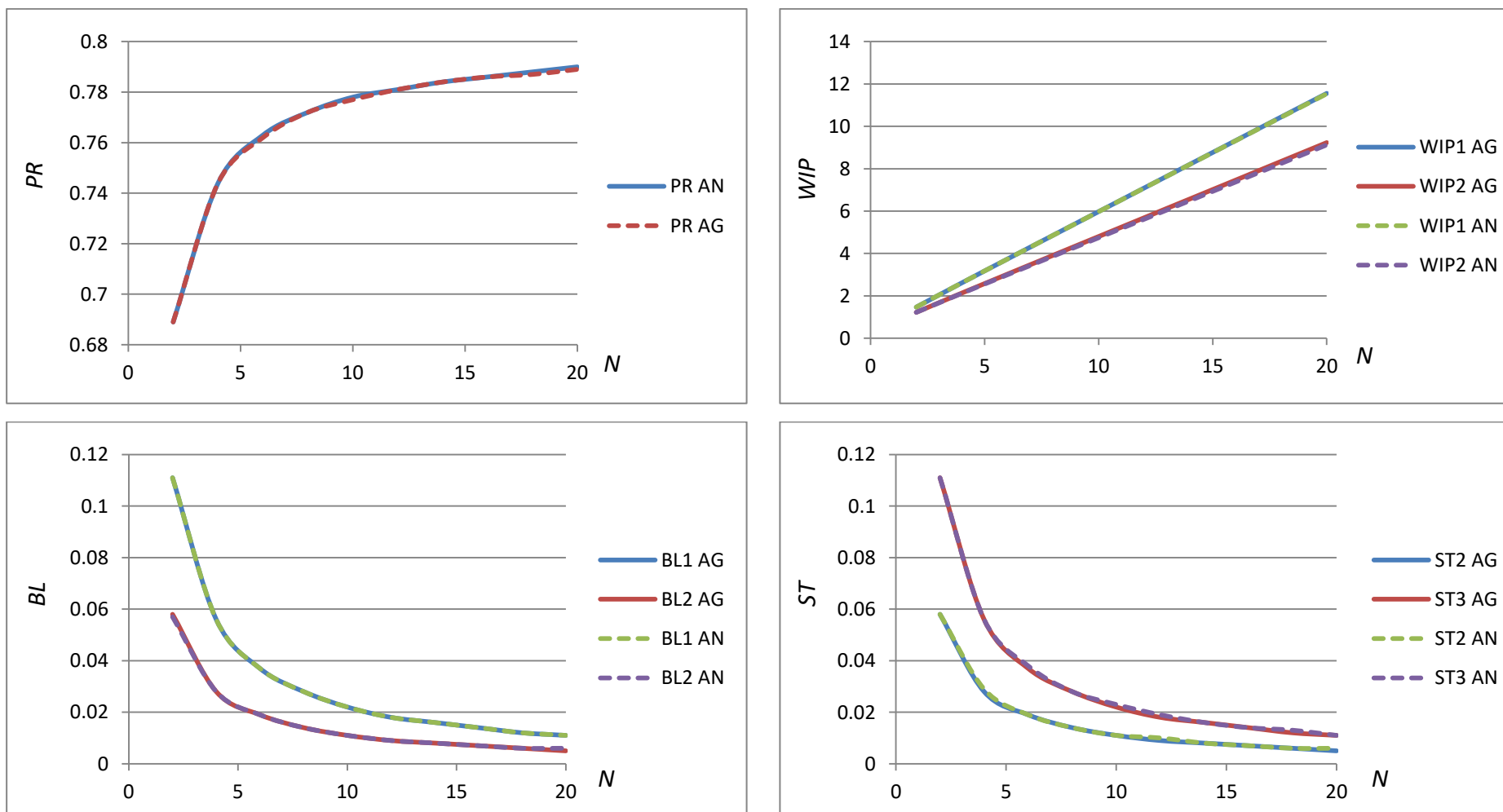
$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,8 \quad N_2 = N$$

$$p_3 = 0,8$$

Tablica 4. Izlaznih rezultati za primjer 4

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP _{uk}		BL ₁		BL ₂		ST ₂		ST ₃	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
2	0,689	0,689	1,467	1,467	1,22	1,221	2,687	2,688	0,111	0,111	0,057	0,058	0,058	0,058	0,111	0,111
4	0,744	0,744	2,613	2,613	2,117	2,131	4,73	4,744	0,056	0,056	0,028	0,028	0,029	0,028	0,056	0,056
6	0,762	0,763	3,737	3,739	2,995	3,024	6,732	6,763	0,037	0,037	0,019	0,019	0,019	0,019	0,038	0,037
8	0,772	0,772	4,857	4,859	3,87	3,913	8,727	8,772	0,028	0,028	0,014	0,014	0,014	0,014	0,028	0,028
10	0,777	0,778	5,974	5,977	4,744	4,801	10,718	10,778	0,022	0,022	0,011	0,011	0,011	0,011	0,023	0,022
12	0,781	0,781	7,09	7,093	5,619	5,688	12,709	12,781	0,018	0,018	0,009	0,009	0,01	0,009	0,019	0,018
14	0,784	0,784	8,204	8,21	6,494	6,574	14,698	14,784	0,016	0,016	0,008	0,008	0,008	0,008	0,016	0,016
16	0,786	0,786	9,317	9,326	7,37	7,46	16,687	16,786	0,014	0,014	0,007	0,007	0,007	0,007	0,014	0,014
18	0,787	0,788	10,428	10,441	8,248	8,346	18,676	18,787	0,012	0,012	0,006	0,006	0,006	0,006	0,013	0,012
20	0,789	0,79	11,537	11,556	9,127	9,232	20,664	20,788	0,011	0,011	0,006	0,005	0,006	0,005	0,011	0,011



Slika 14. Usporedni dijagrami linije s tri stroja za primjer 4

Primjer 5.

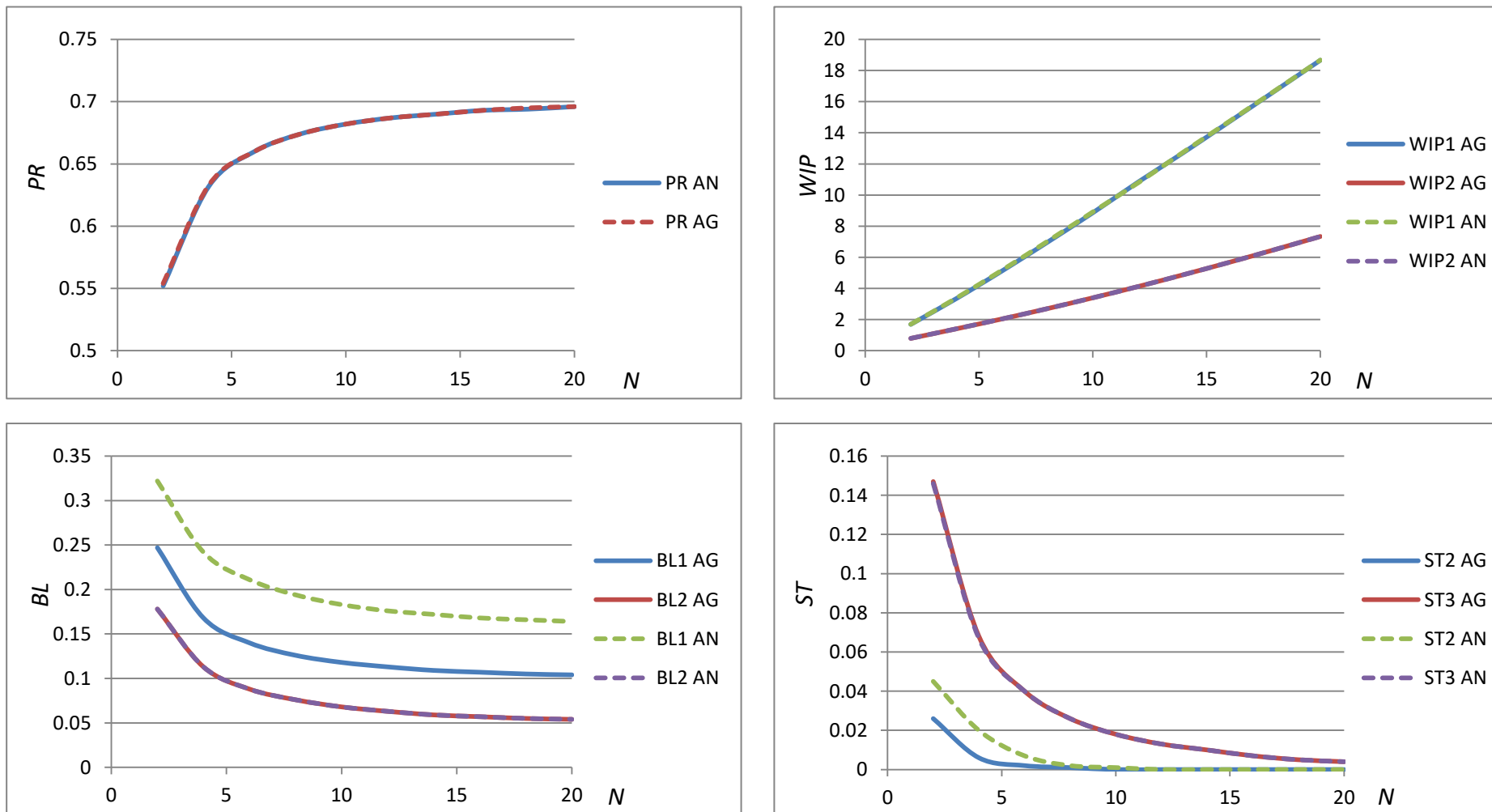
$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,75 \quad N_2 = 0,5N$$

$$p_3 = 0,7$$

Tablica 5. Izlaznih rezultati za primjer 5

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP _{uk}		BL ₁		BL ₂		ST ₂		ST ₃	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
2	0,554	0,552	1,698	1,689	0,791	0,789	2,489	2,478	0,322	0,247	0,178	0,178	0,045	0,026	0,146	0,147
4	0,633	0,632	3,378	3,345	1,406	1,404	4,784	4,749	0,242	0,168	0,113	0,113	0,02	0,006	0,067	0,068
6	0,66	0,66	5,164	5,114	2,038	2,036	7,202	7,15	0,211	0,14	0,088	0,088	0,007	0,002	0,04	0,04
8	0,674	0,674	7,019	6,962	2,701	2,7	9,72	9,662	0,194	0,126	0,076	0,076	0,002	0,001	0,026	0,026
10	0,682	0,682	8,915	8,861	3,397	3,397	12,312	12,258	0,183	0,118	0,068	0,068	0,001	0	0,018	0,018
12	0,687	0,687	10,791	10,839	4,126	4,126	14,917	14,965	0,176	0,113	0,063	0,063	0	0	0,013	0,013
14	0,69	0,69	12,781	12,743	4,887	4,888	17,668	17,631	0,172	0,109	0,059	0,059	0	0	0,01	0,01
16	0,693	0,693	14,735	14,708	5,678	5,678	20,413	20,386	0,168	0,107	0,057	0,057	0	0	0,007	0,007
18	0,695	0,694	16,7	16,682	6,495	6,496	23,195	23,178	0,166	0,105	0,055	0,055	0	0	0,005	0,005
20	0,696	0,696	18,671	18,663	7,337	7,338	26,008	26,001	0,164	0,104	0,054	0,054	0	0	0,004	0,004



Slika 15. Usporedni dijagrami linije s tri stroja za primjer 5

Primjer 6

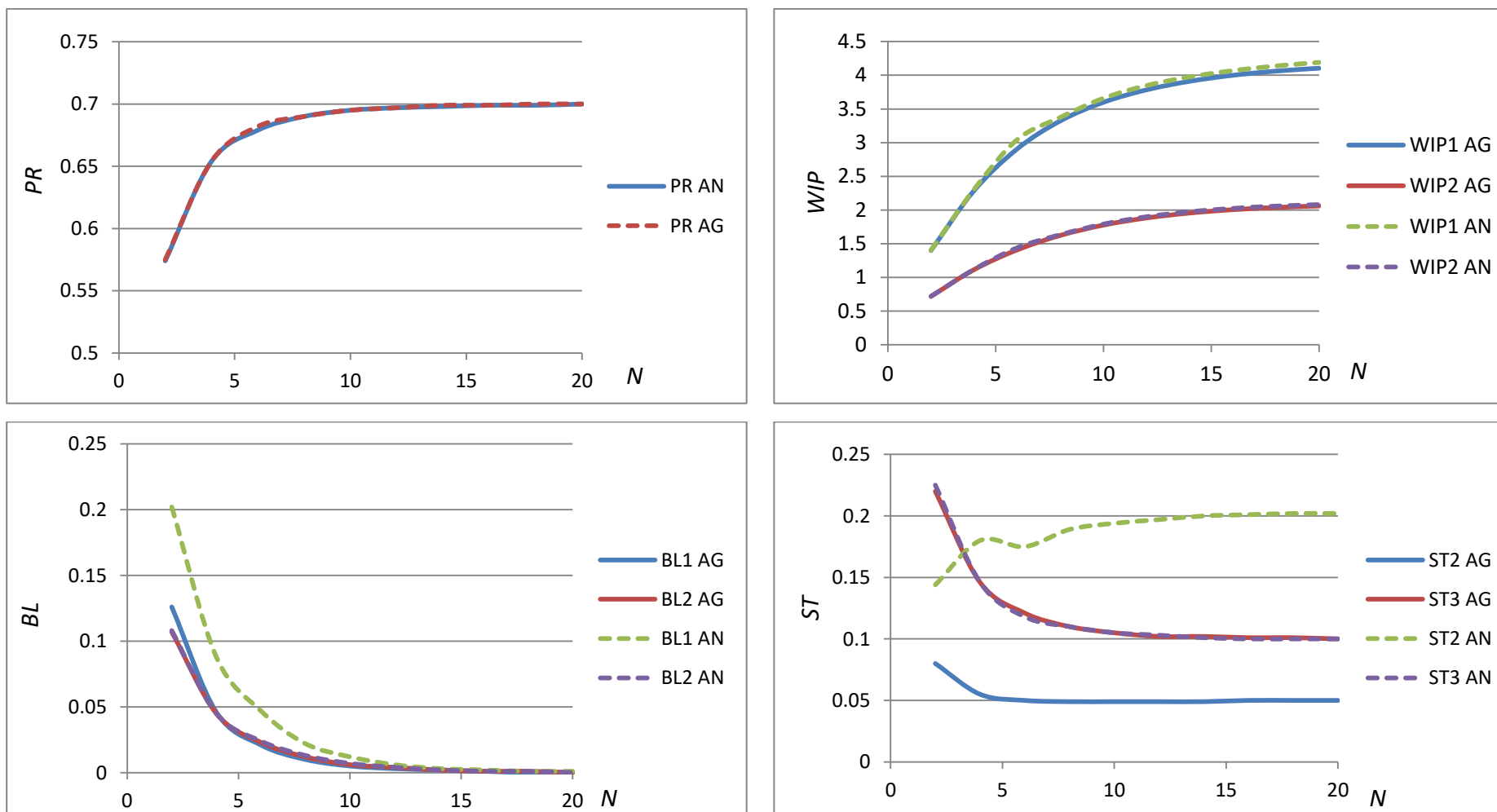
$$p_1 = 0,7 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,75 \quad N_2 = 0,5N$$

$$p_3 = 0,8$$

Tablica 6. Izlaznih rezultati za primjer 6

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP _{uk}		BL ₁		BL ₂		ST ₂		ST ₃	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
2	0,575	0,574	1,403	1,398	0,719	0,717	2,122	2,115	0,202	0,126	0,108	0,107	0,144	0,08	0,225	0,22
4	0,654	0,654	2,307	2,288	1,118	1,115	3,425	3,403	0,088	0,046	0,045	0,045	0,18	0,055	0,146	0,146
6	0,682	0,679	3,044	2,907	1,439	1,408	4,483	4,315	0,047	0,021	0,024	0,023	0,175	0,05	0,118	0,121
8	0,69	0,69	3,375	3,323	1,634	1,623	5,009	4,946	0,022	0,01	0,013	0,012	0,189	0,049	0,11	0,11
10	0,695	0,695	3,659	3,599	1,791	1,776	5,45	5,375	0,012	0,005	0,007	0,006	0,194	0,049	0,105	0,105
12	0,697	0,697	3,848	3,784	1,9	1,882	5,748	5,666	0,006	0,003	0,004	0,004	0,197	0,049	0,103	0,102
14	0,699	0,698	3,977	3,911	1,974	1,955	5,951	5,866	0,003	0,002	0,002	0,002	0,2	0,049	0,101	0,102
16	0,699	0,699	4,069	4	2,024	2,005	6,093	6,005	0,002	0,001	0,001	0,001	0,201	0,05	0,1	0,101
18	0,7	0,699	4,138	4,062	2,058	2,038	6,196	6,1	0,001	0	0,001	0,001	0,202	0,05	0,1	0,101
20	0,7	0,7	4,191	4,105	2,08	2,06	6,271	6,165	0,001	0	0	0	0,202	0,05	0,1	0,1



Slika 16. Usporedni dijagrami linije s tri stroja za primjer 6

Primjer 7.

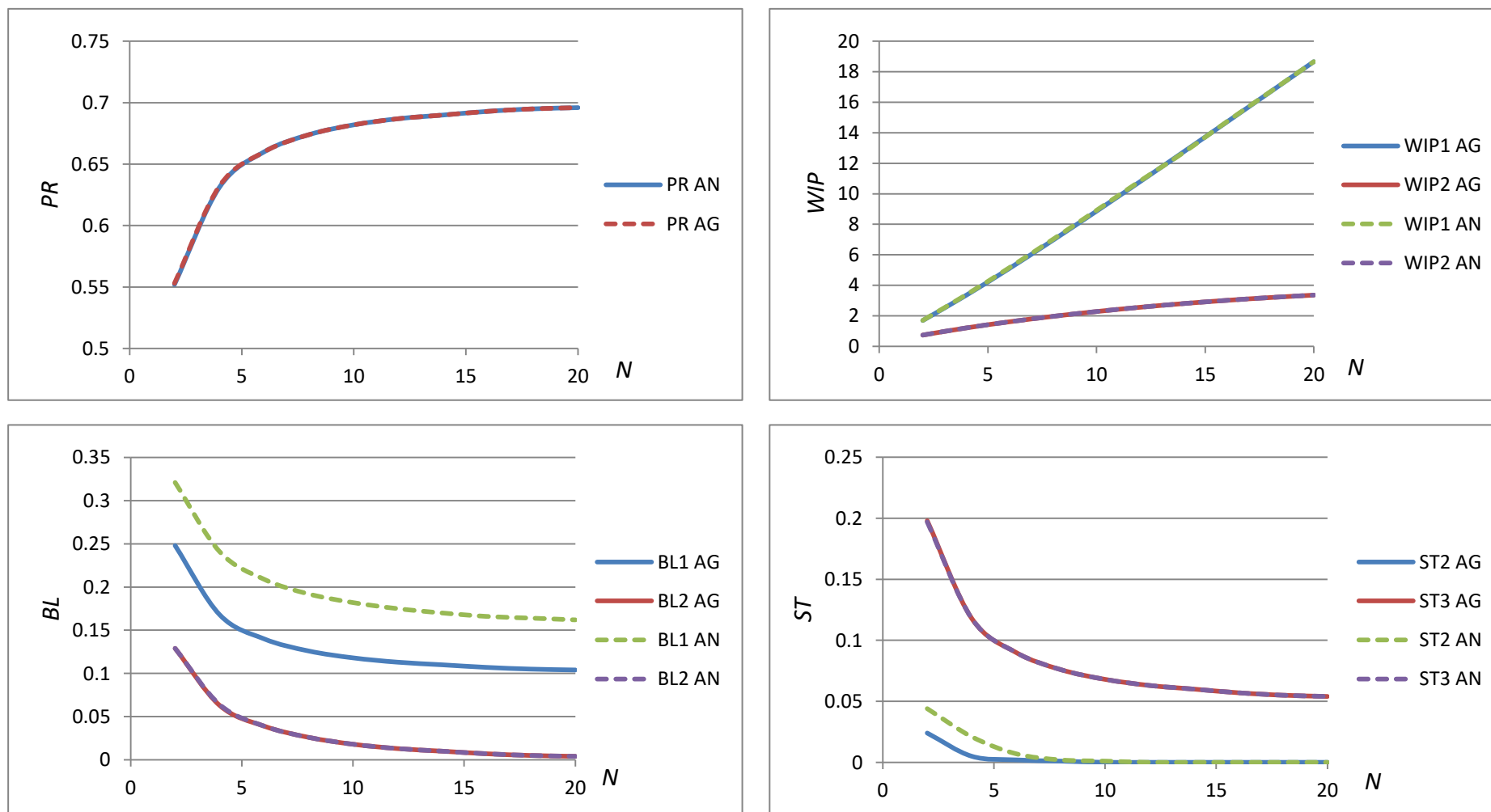
$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,7 \quad N_2 = 0,5N$$

$$p_3 = 0,75$$

Tablica 7. Izlaznih rezultati za primjer 7

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP _{uk}		BL ₁		BL ₂		ST ₂		ST ₃	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
2	0,553	0,552	1,701	1,69	0,737	0,735	2,438	2,425	0,321	0,248	0,129	0,129	0,044	0,024	0,197	0,198
4	0,632	0,631	3,382	3,348	1,207	1,205	4,589	4,553	0,241	0,168	0,064	0,063	0,021	0,005	0,118	0,118
6	0,66	0,66	5,168	5,117	1,61	1,609	6,778	6,726	0,209	0,14	0,039	0,039	0,007	0,002	0,09	0,09
8	0,674	0,674	7,021	6,964	1,966	1,965	8,987	8,929	0,192	0,126	0,026	0,026	0,002	0,001	0,076	0,076
10	0,682	0,682	8,916	8,861	2,281	2,28	11,197	11,141	0,182	0,118	0,018	0,018	0,001	0	0,068	0,068
12	0,687	0,687	10,837	10,792	2,558	2,558	13,395	13,35	0,175	0,113	0,013	0,013	0	0	0,063	0,063
14	0,69	0,69	12,7	12,743	2,802	2,802	15,502	15,545	0,17	0,11	0,01	0,01	0	0	0,06	0,06
16	0,693	0,693	14,731	14,708	3,014	3,014	17,745	17,722	0,166	0,107	0,007	0,007	0	0	0,057	0,057
18	0,695	0,695	16,693	16,682	3,199	3,198	19,892	19,88	0,164	0,105	0,005	0,005	0	0	0,055	0,055
20	0,696	0,696	18,664	18,663	3,358	3,357	22,022	22,02	0,162	0,104	0,004	0,004	0	0	0,054	0,054



Slika 17. Usporedni dijagrami linije s tri stroja za primjer 7

5.3. Usporedba proizvodne linije s 4 stroja vjerojatnosti p_1, p_2, p_3, p_4 i kapaciteta međuskладишта N_1, N_2, N_3 ;

Primjer 8.

$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,8 \quad N_2 = N$$

$$p_3 = 0,8 \quad N_3 = N$$

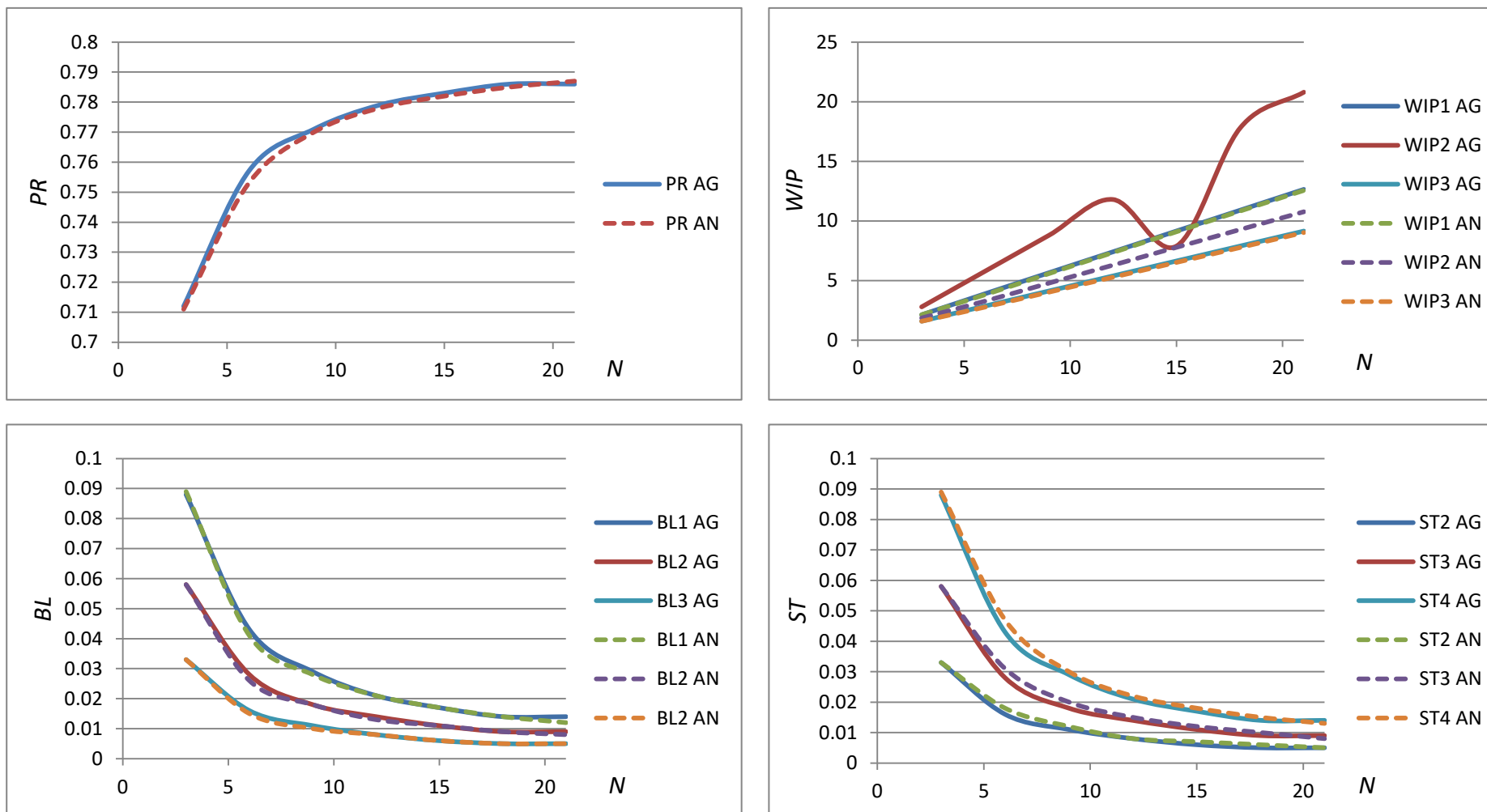
$$p_4 = 0,8$$

Tablica 8. Izlaznih rezultati za primjer 8

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP ₃		WIP _{uk}	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
3	0,711	0,712	2,128	2,123	1,854	2,784	1,58	1,588	5,562	6,495
6	0,753	0,757	3,813	3,895	3,274	5,791	2,775	2,861	9,862	12,547
9	0,77	0,771	5,581	5,65	4,783	8,794	4,025	4,121	14,389	18,565
12	0,778	0,779	7,34	7,4	6,284	11,796	5,27	5,378	18,894	24,574
15	0,782	0,783	9,089	9,149	7,781	7,885	6,516	6,634	23,386	23,668
18	0,785	0,786	10,828	10,896	9,274	17,797	7,767	7,889	27,869	36,582
21	0,787	0,786	12,558	12,643	10,766	20,797	9,024	9,144	32,348	42,584

Tablica 9. Izlaznih rezultati za primjer 8

N	BL ₁		BL ₂		BL ₃		ST ₂		ST ₃		ST ₄	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
3	0,089	0,088	0,058	0,058	0,033	0,033	0,033	0,033	0,058	0,058	0,089	0,088
6	0,041	0,043	0,026	0,028	0,015	0,016	0,018	0,016	0,031	0,028	0,047	0,043
9	0,028	0,029	0,018	0,018	0,01	0,011	0,012	0,011	0,02	0,018	0,03	0,029
12	0,021	0,021	0,013	0,014	0,008	0,008	0,008	0,008	0,015	0,014	0,022	0,021
15	0,017	0,017	0,011	0,011	0,006	0,006	0,007	0,006	0,012	0,011	0,018	0,017
18	0,014	0,014	0,009	0,009	0,005	0,005	0,006	0,005	0,01	0,009	0,015	0,014
21	0,012	0,014	0,008	0,009	0,005	0,005	0,005	0,005	0,008	0,009	0,013	0,014



Slika 18. Usporedni dijagrami linije s četiri stroja za primjer 8

Primjer 9.

$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,77 \quad N_2 = 2/3N$$

$$p_3 = 0,75 \quad N_3 = 1/3N$$

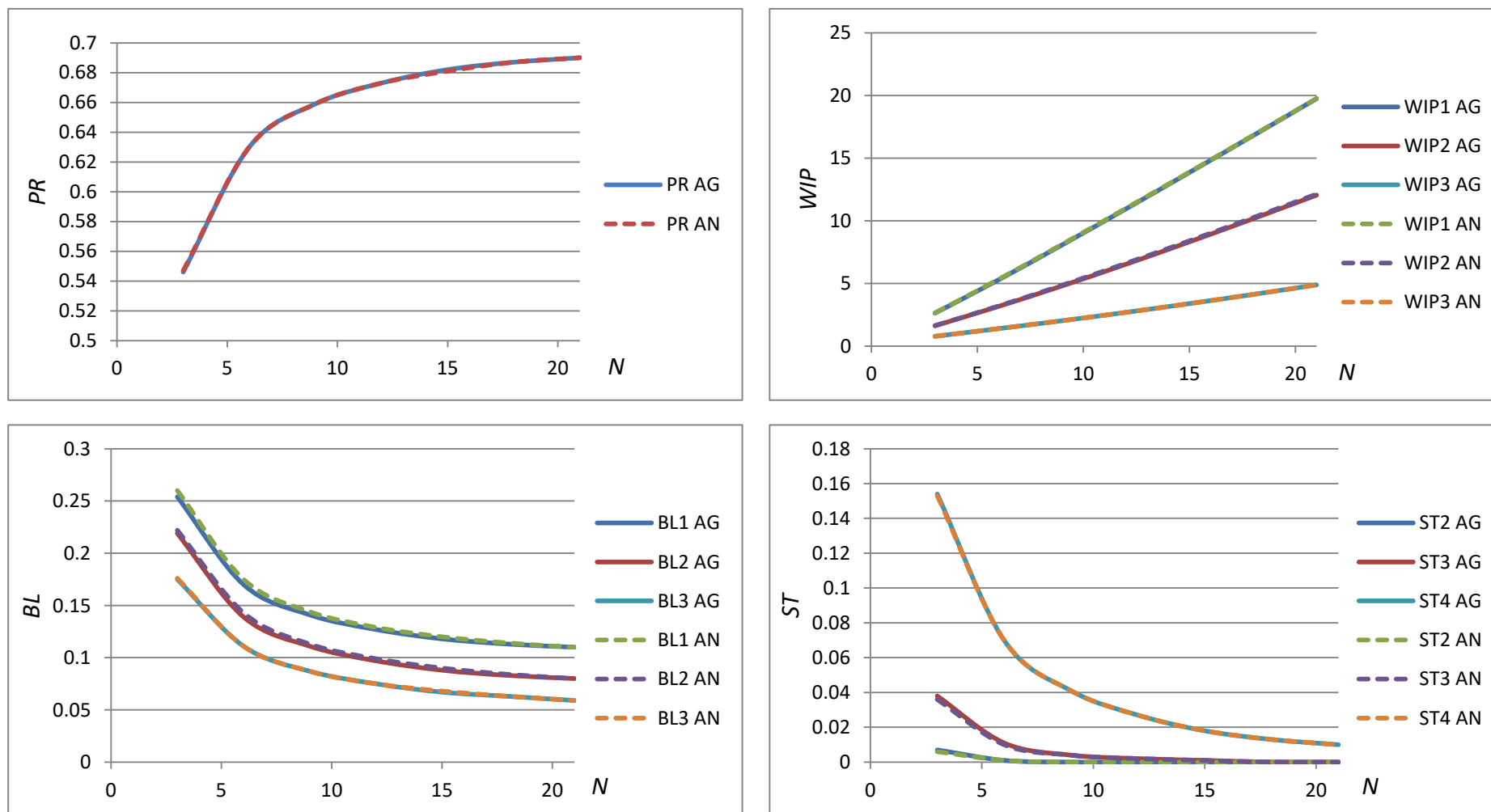
$$p_4 = 0,7$$

Tablica 10. Izlaznih rezultati za primjer 9

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP ₃		WIP _{uk}	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
3	0,547	0,546	2,643	2,627	1,63	1,619	0,782	0,78	5,055	5,026
6	0,63	0,63	5,328	5,285	3,199	3,166	1,395	1,393	9,922	9,844
9	0,659	0,659	8,123	8,075	4,859	4,803	2,026	2,024	15,008	14,902
12	0,673	0,673	10,984	10,94	6,597	6,524	2,69	2,689	20,271	20,153
15	0,681	0,682	13,884	13,85	8,397	8,315	3,389	3,388	25,67	25,553
18	0,687	0,687	16,811	16,786	10,244	10,159	4,12	4,12	31,175	31,065
21	0,69	0,69	19,755	19,741	12,126	12,043	4,883	4,883	36,764	36,667

Tablica 11. Izlaznih rezultati za primjer 9

N	BL ₁		BL ₂		BL ₃		ST ₂		ST ₃		ST ₄	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
3	0,26	0,254	0,222	0,219	0,176	0,175	0,006	0,007	0,036	0,038	0,153	0,154
6	0,175	0,17	0,143	0,139	0,111	0,111	0,001	0,001	0,01	0,011	0,07	0,07
9	0,144	0,141	0,113	0,111	0,087	0,087	0	0	0,004	0,004	0,041	0,041
12	0,129	0,127	0,099	0,097	0,075	0,075	0	0	0,002	0,002	0,027	0,027
15	0,12	0,118	0,09	0,088	0,068	0,067	0	0	0,001	0,001	0,018	0,018
18	0,114	0,113	0,084	0,083	0,063	0,063	0	0	0	0	0,013	0,013
21	0,11	0,11	0,08	0,08	0,059	0,059	0	0	0	0	0,01	0,01



Slika 19. Usporedni dijagrami linije s četiri stroja za primjer 9

Primjer 10.

$$p_1 = 0,7 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,75 \quad N_2 = 2/3N$$

$$p_3 = 0,77 \quad N_3 = 1/3N$$

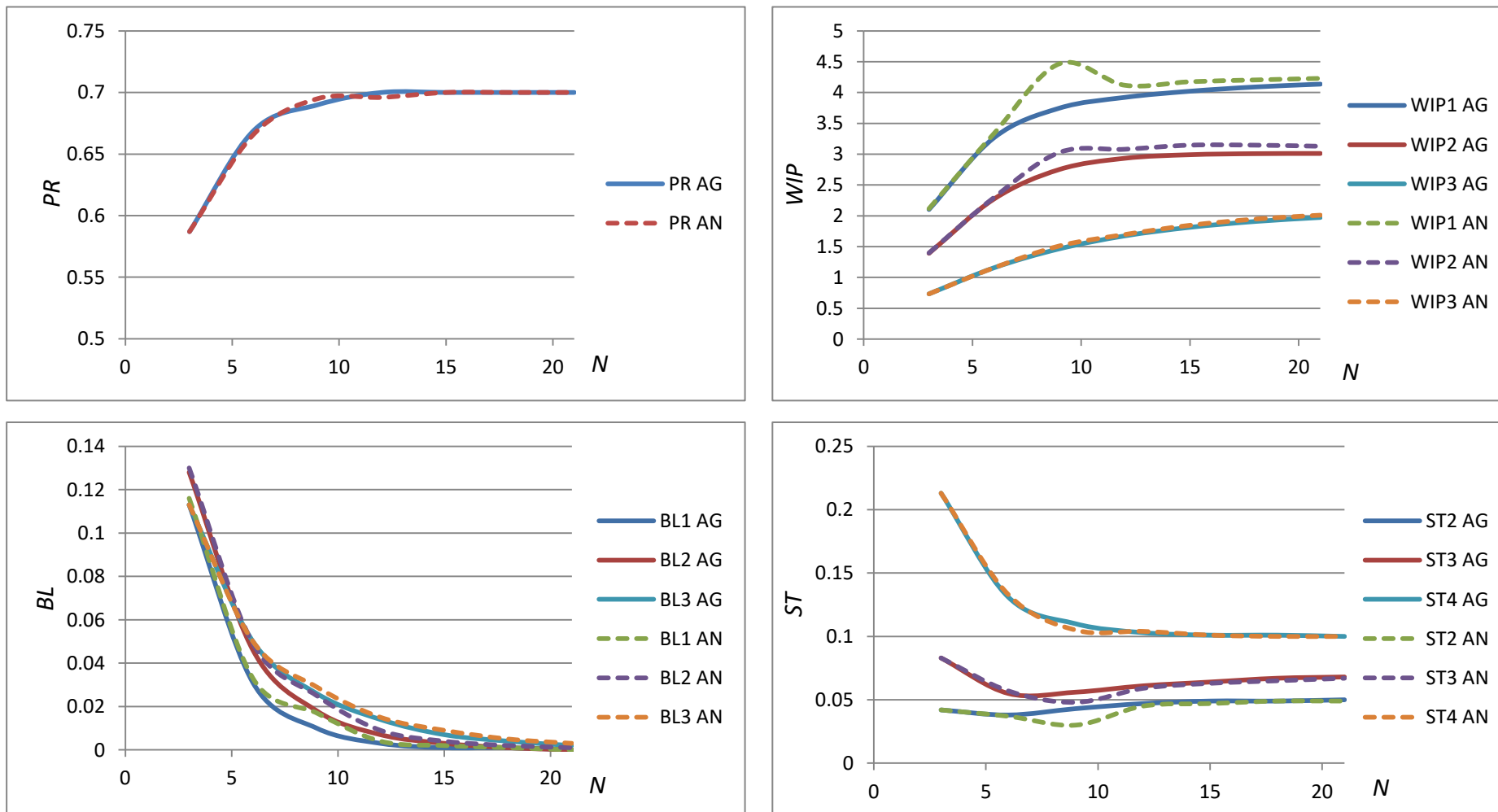
$$p_4 = 0,8$$

Tablica 12. Izlaznih rezultati za primjer 10

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP ₃		WIP _{uk}	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
3	0,587	0,587	2,116	2,102	1,397	1,391	0,733	0,733	4,246	4,226
6	0,666	0,669	3,339	3,269	2,3	2,275	1,158	1,158	6,797	6,702
9	0,695	0,69	4,467	3,747	3,028	2,752	1,511	1,465	9,006	7,964
12	0,696	0,7	4,118	3,921	3,079	2,933	1,696	1,674	8,893	8,528
15	0,7	0,7	4,175	4,021	3,146	2,991	1,846	1,813	9,167	8,825
18	0,7	0,7	4,204	4,09	3,146	3,008	1,946	1,908	9,296	9,006
21	0,7	0,7	4,229	4,136	3,128	3,011	2,01	1,973	9,367	9,12

Tablica 13. Izlaznih rezultati za primjer 10

N	BL ₁		BL ₂		BL ₃		ST ₂		ST ₃		ST ₄	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
3	0,116	0,113	0,13	0,128	0,113	0,113	0,042	0,042	0,083	0,083	0,213	0,213
6	0,033	0,031	0,049	0,046	0,05	0,05	0,037	0,038	0,057	0,055	0,133	0,131
9	0,017	0,01	0,025	0,018	0,029	0,026	0,03	0,043	0,048	0,056	0,105	0,11
12	0,004	0,003	0,009	0,007	0,015	0,014	0,045	0,047	0,059	0,061	0,104	0,103
15	0,002	0,001	0,004	0,003	0,009	0,007	0,047	0,049	0,063	0,064	0,101	0,101
18	0,001	0,001	0,002	0,001	0,005	0,004	0,049	0,049	0,065	0,067	0,1	0,101
21	0	0	0,001	0	0,003	0,002	0,049	0,05	0,067	0,068	0,1	0,1



Slika 20. Usporedni dijagrami linije s četiri stroja za primjer 10

Primjer 11.

$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,7 \quad N_2 = 2/3N$$

$$p_3 = 0,77 \quad N_3 = 1/3N$$

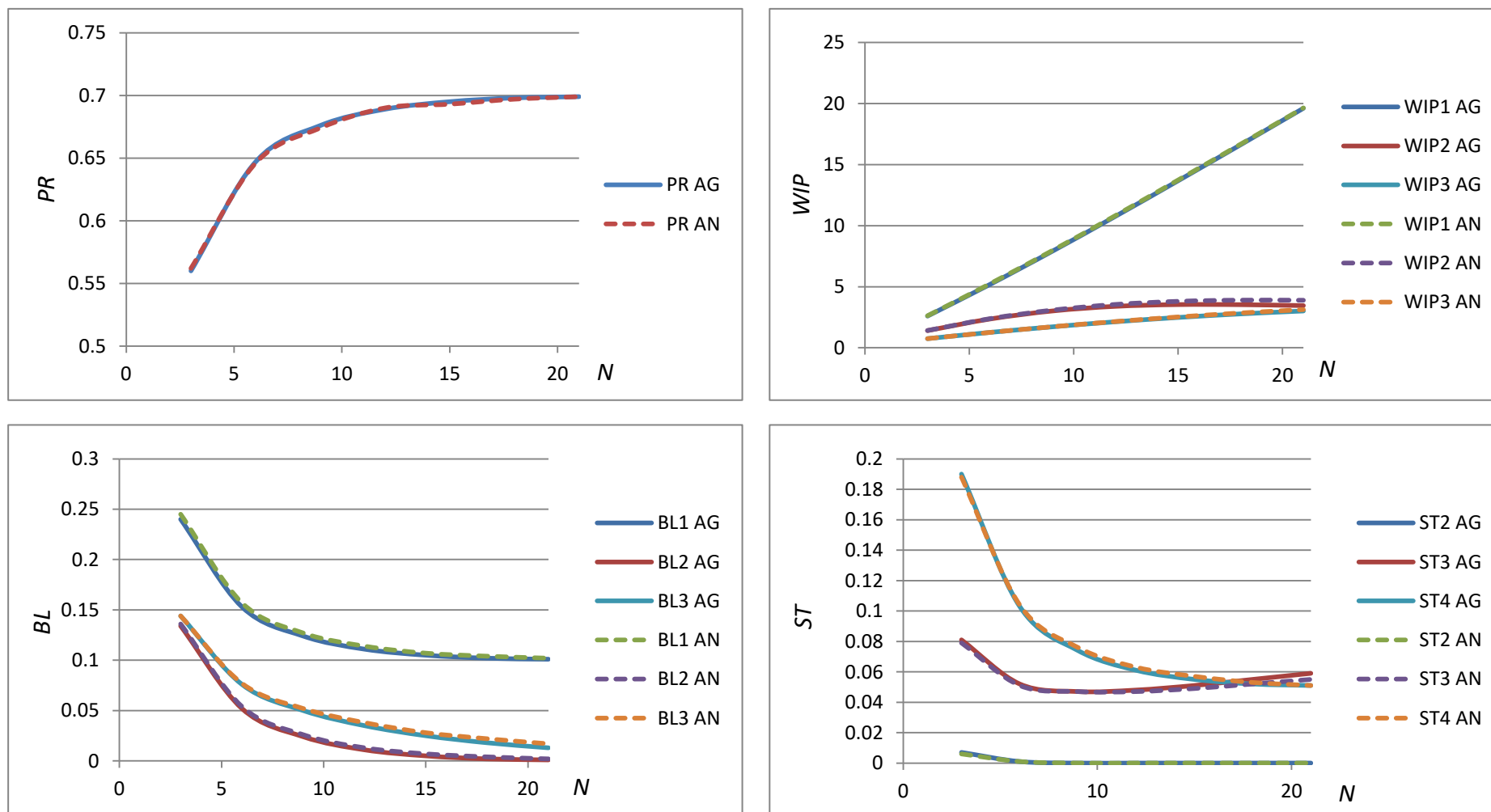
$$p_4 = 0,75$$

Tablica 14. Izlaznih rezultati za primjer 11

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP ₃		WIP _{uk}	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
3	0,562	0,56	2,622	2,597	1,416	1,407	0,749	0,747	4,787	4,751
6	0,646	0,647	5,249	5,194	2,388	2,359	1,26	1,259	8,897	8,812
9	0,674	0,676	7,983	7,928	3,087	3,018	1,727	1,719	12,797	12,665
12	0,69	0,689	10,828	10,767	3,549	3,394	2,149	2,131	16,526	16,292
15	0,693	0,695	13,737	13,679	3,804	3,537	2,525	2,483	20,066	19,699
18	0,697	0,698	16,68	16,635	3,902	3,53	2,85	2,776	23,432	22,941
21	0,699	0,699	19,646	19,615	3,893	3,455	3,125	3,015	26,664	26,085

Tablica 15. Izlaznih rezultati za primjer 11

N	BL ₁		BL ₂		BL ₃		ST ₂		ST ₃		ST ₄	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
3	0,245	0,24	0,136	0,134	0,144	0,144	0,006	0,007	0,079	0,081	0,188	0,19
6	0,157	0,153	0,054	0,052	0,077	0,076	0,001	0,001	0,051	0,052	0,104	0,103
9	0,127	0,124	0,026	0,024	0,052	0,05	0	0	0,047	0,047	0,076	0,074
12	0,114	0,111	0,013	0,011	0,038	0,035	0	0	0,047	0,048	0,063	0,061
15	0,107	0,105	0,007	0,005	0,028	0,025	0	0	0,049	0,051	0,057	0,055
18	0,104	0,102	0,004	0,002	0,022	0,018	0	0	0,052	0,055	0,053	0,052
21	0,102	0,101	0,002	0,001	0,017	0,013	0	0	0,055	0,059	0,051	0,051



Slika 21. Usporedni dijagrami linije s četiri stroja za primjer 11

5.4. Usporedba proizvodne linije s 5 strojeva vjerojatnosti p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 i kapaciteta međuskladišta N_1, N_2, N_3, N_4 ;

Primjer 12.

$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,8 \quad N_2 = N$$

$$p_3 = 0,8 \quad N_3 = N$$

$$p_4 = 0,8 \quad N_4 = N$$

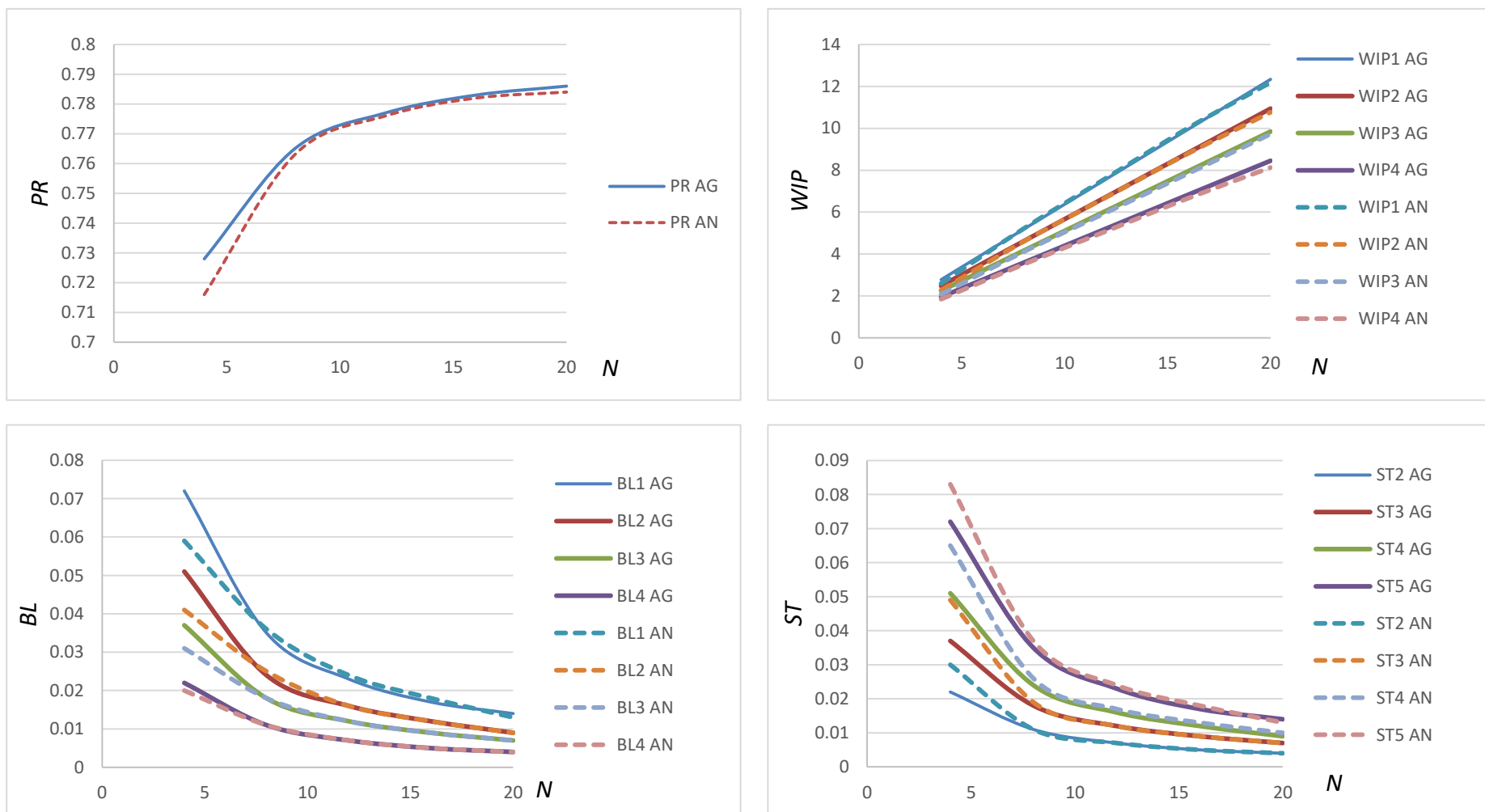
$$p_5 = 0,8$$

Tablica 16. Izlaznih rezultati za primjer 12

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP ₃		WIP ₄		WIP _{uk}	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
4	0,716	0,728	2,595	2,777	2,278	2,482	2,078	2,246	1,847	1,951	8,798	9,456
8	0,763	0,765	5,207	5,179	4,593	4,608	4,102	4,157	3,507	3,586	17,409	17,53
12	0,776	0,777	7,614	7,567	6,698	6,721	5,971	6,056	5,083	5,209	25,366	25,553
16	0,782	0,783	10,014	9,952	8,798	8,831	7,841	7,952	6,663	6,831	33,316	33,566
20	0,784	0,786	12,186	12,335	10,763	10,94	9,724	9,846	8,127	8,451	40,8	41,572

Tablica 17. Izlaznih rezultati za primjer 12

N	BL ₁		BL ₂		BL ₃		BL ₄		ST ₂		ST ₃		ST ₄		ST ₅	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
4	0,059	0,072	0,041	0,051	0,031	0,037	0,02	0,022	0,03	0,022	0,049	0,037	0,065	0,051	0,083	0,072
8	0,036	0,035	0,025	0,024	0,018	0,018	0,011	0,011	0,011	0,011	0,019	0,018	0,026	0,024	0,037	0,035
12	0,024	0,023	0,016	0,016	0,012	0,012	0,007	0,007	0,007	0,007	0,012	0,012	0,017	0,016	0,024	0,023
16	0,018	0,017	0,012	0,012	0,009	0,009	0,005	0,005	0,005	0,005	0,009	0,009	0,013	0,012	0,018	0,017
20	0,013	0,014	0,009	0,009	0,007	0,007	0,004	0,004	0,004	0,004	0,007	0,007	0,01	0,009	0,013	0,014



Slika 22. Usporedni dijagrami linije s pet strojeva za primjer 12

Primjer 13.

$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,77 \quad N_2 = 3/4N$$

$$p_3 = 0,75 \quad N_3 = 1/2N$$

$$p_4 = 0,72 \quad N_4 = 1/4N$$

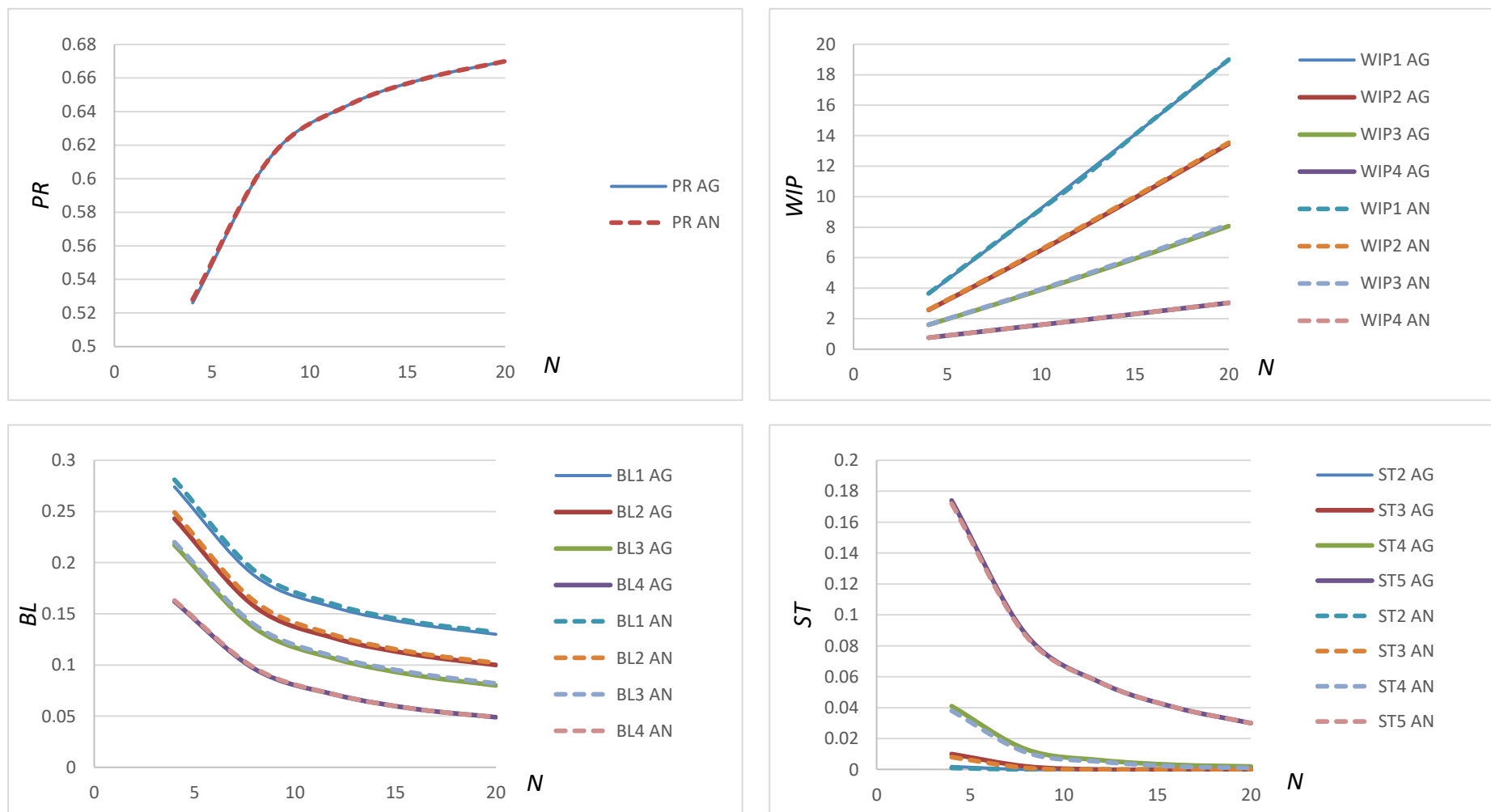
$$p_5 = 0,7$$

Tablica 18. Izlaznih rezultati za primjer 13

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP ₃		WIP ₄		WIP _{uk}	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
4	0,528	0,526	3,653	3,63	2,592	2,57	1,61	1,598	0,754	0,752	8,609	8,55
8	0,613	0,613	7,382	7,348	5,2	5,15	3,148	3,112	1,323	1,321	17,053	16,931
12	0,644	0,644	11,026	11,175	7,917	7,85	4,761	4,698	1,885	1,882	25,589	25,605
16	0,66	0,66	15,084	15,058	10,707	10,634	6,442	6,355	2,457	2,454	34,69	34,501
20	0,67	0,67	18,993	18,974	13,547	13,474	8,18	8,072	3,042	3,039	43,762	43,559

Tablica 19. Izlaznih rezultati za primjer 13

N	BL ₁		BL ₂		BL ₃		BL ₄		ST ₂		ST ₃		ST ₄		ST ₅	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
4	0,281	0,274	0,249	0,243	0,22	0,217	0,163	0,162	0,001	0,002	0,008	0,01	0,038	0,041	0,172	0,174
8	0,192	0,187	0,162	0,157	0,139	0,136	0,097	0,096	0	0	0,001	0,002	0,011	0,013	0,086	0,087
12	0,159	0,156	0,129	0,126	0,108	0,106	0,071	0,071	0	0	0	0	0,005	0,006	0,056	0,056
16	0,142	0,14	0,112	0,11	0,092	0,09	0,057	0,057	0	0	0	0	0,002	0,003	0,04	0,04
20	0,132	0,13	0,102	0,1	0,082	0,08	0,049	0,049	0	0	0	0	0,001	0,002	0,03	0,03



Slika 23. Usporedni dijagrami linije s pet strojeva za primjer 13.

Primjer 14.

$$p_1 = 0,7 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,72 \quad N_2 = 3/4N$$

$$p_3 = 0,75 \quad N_3 = 1/2N$$

$$p_4 = 0,77 \quad N_4 = 1/4N$$

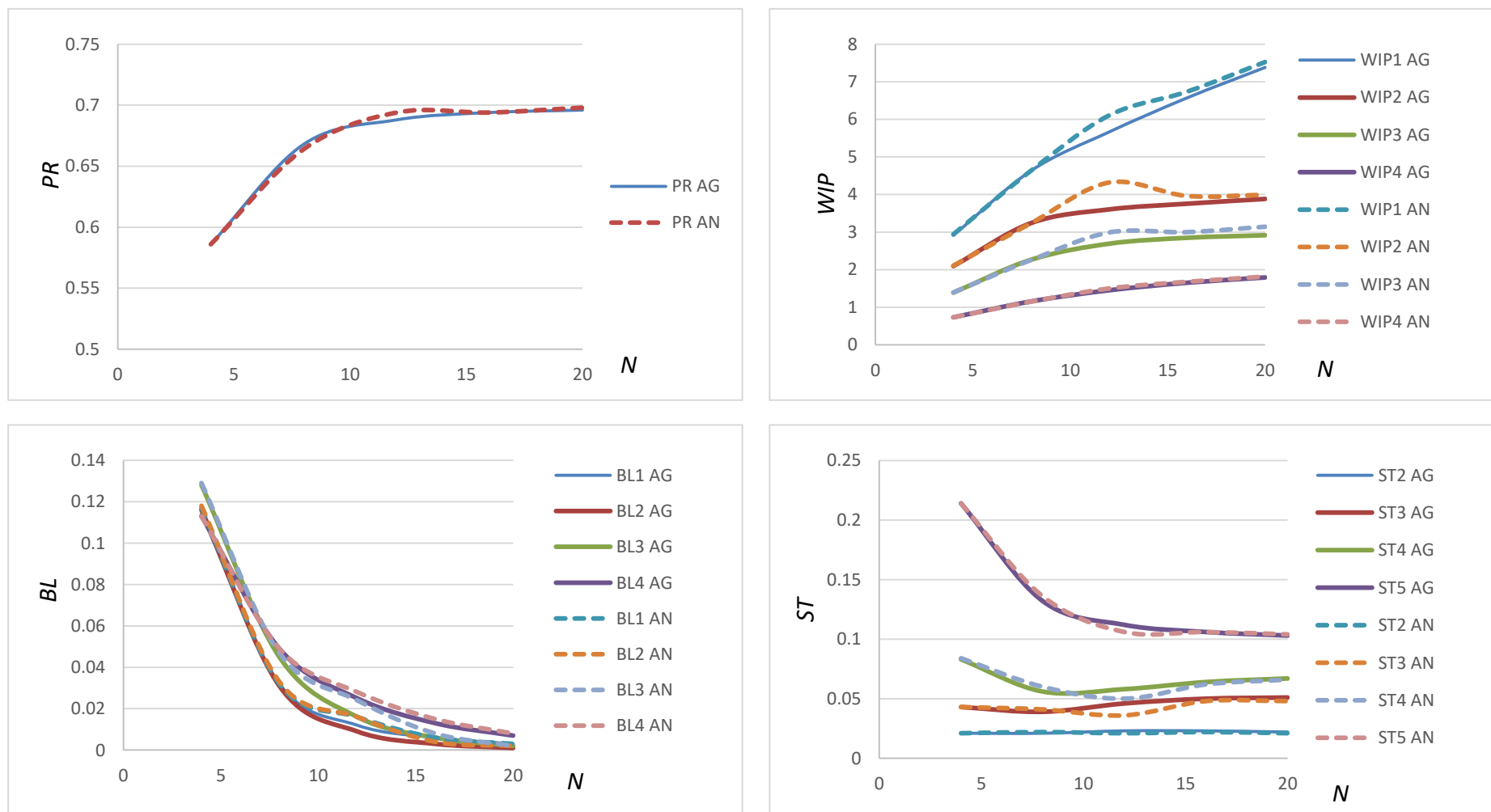
$$p_5 = 0,8$$

Tablica 20. Izlaznih rezultati za primjer 14

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP ₃		WIP ₄		WIP _{uk}	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
4	0,586	0,586	2,942	2,914	2,107	2,095	1,393	1,389	0,732	0,733	7,174	7,131
8	0,664	0,668	4,64	4,638	3,241	3,243	2,26	2,267	1,15	1,157	11,291	11,305
12	0,694	0,688	6,108	5,666	4,321	3,605	2,991	2,692	1,501	1,453	14,921	13,416
16	0,694	0,694	6,738	6,573	3,962	3,756	3	2,849	1,679	1,653	15,379	14,831
20	0,698	0,696	7,526	7,382	3,993	3,883	3,143	2,917	1,816	1,793	16,478	15,975

Tablica 21. Izlaznih rezultati za primjer 14

N	BL ₁		BL ₂		BL ₃		BL ₄		ST ₂		ST ₃		ST ₄		ST ₅	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
4	0,117	0,114	0,118	0,116	0,129	0,128	0,113	0,113	0,021	0,021	0,043	0,043	0,084	0,083	0,214	0,214
8	0,032	0,032	0,033	0,031	0,047	0,045	0,049	0,049	0,022	0,021	0,041	0,039	0,06	0,056	0,136	0,132
12	0,016	0,012	0,016	0,009	0,024	0,016	0,028	0,025	0,021	0,023	0,036	0,046	0,05	0,058	0,106	0,112
16	0,006	0,006	0,004	0,003	0,008	0,006	0,015	0,013	0,022	0,023	0,048	0,05	0,062	0,064	0,106	0,106
20	0,003	0,003	0,002	0,001	0,002	0,002	0,008	0,007	0,021	0,022	0,048	0,051	0,066	0,067	0,104	0,103



Slika 24. Usporedni dijagrami linije s pet strojeva za primjer 14

Primjer 15.

$$p_1 = 0,8 \quad N_1 = N$$

$$p_2 = 0,75 \quad N_2 = 3/4N$$

$$p_3 = 0,7 \quad N_3 = 1/2N$$

$$p_4 = 0,72 \quad N_4 = 1/4N$$

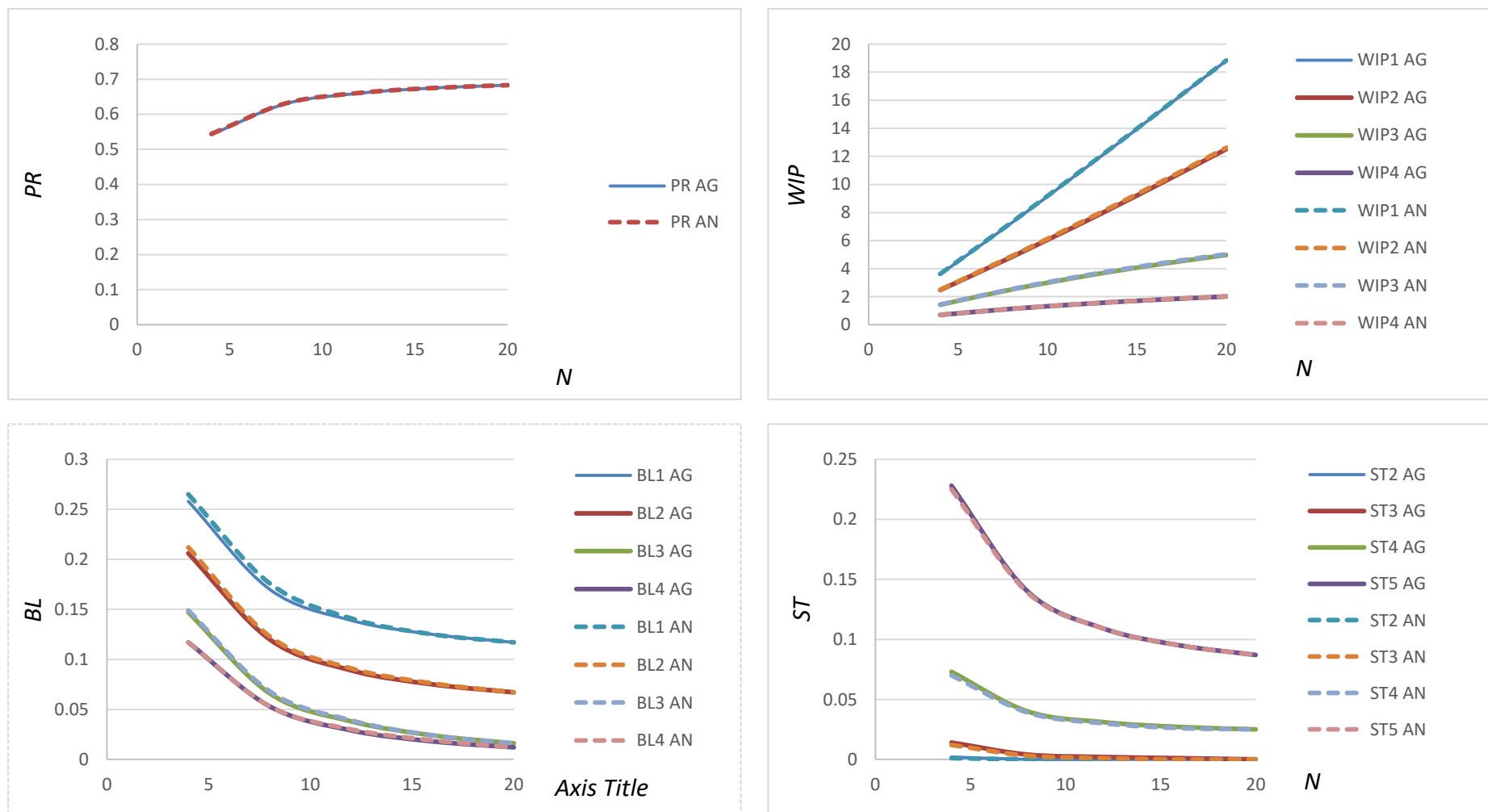
$$p_5 = 0,77$$

Tablica 22. Izlaznih rezultati za primjer 15

N	PR		WIP ₁		WIP ₂		WIP ₃		WIP ₄		WIP _{uk}	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
4	0,544	0,542	3,624	3,599	2,494	2,469	1,439	1,428	0,707	0,704	8,264	8,2
8	0,631	0,63	7,304	7,265	4,898	4,835	2,543	2,514	1,14	1,136	15,885	15,75
12	0,661	0,66	11,089	11,055	7,385	7,295	3,496	3,45	1,49	1,485	23,46	23,285
16	0,675	0,675	14,942	14,919	9,962	9,859	4,32	4,265	1,782	1,776	31,006	30,819
20	0,683	0,683	18,839	18,828	12,62	12,521	5,033	4,975	2,023	2,017	38,515	38,341

Tablica 23. Izlaznih rezultati za primjer 15

N	BL ₁		BL ₂		BL ₃		BL ₄		ST ₂		ST ₃		ST ₄		ST ₅	
	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG	AN	AG
4	0,265	0,258	0,212	0,206	0,149	0,147	0,117	0,117	0,001	0,002	0,012	0,014	0,07	0,073	0,225	0,228
8	0,176	0,17	0,123	0,12	0,068	0,066	0,053	0,053	0	0	0,003	0,004	0,039	0,04	0,139	0,14
12	0,141	0,139	0,091	0,089	0,039	0,038	0,03	0,029	0	0	0,001	0,002	0,03	0,031	0,109	0,109
16	0,125	0,125	0,076	0,075	0,024	0,024	0,019	0,018	0	0	0	0,001	0,026	0,027	0,095	0,095
20	0,117	0,117	0,067	0,067	0,016	0,016	0,012	0,012	0	0	0	0	0,025	0,025	0,087	0,087



Slika 25. Usporedni dijagrami linije s pet strojeva za primjer 15

5.5. Rezultat usporedbe

Iz rezultata analize proizvodnih linija s dva stroja, [Tablica 1, Tablica 2, Tablica 3], [Slika 11, Slika 12, Slika 13], može se vidjeti kako je odstupanje pri svim kapacitetima međuskladišta manje od 1%. U analizi linije s dva stroja to je i očekivani rezultat jer ona ne pruža puno prostora za pogrešku.

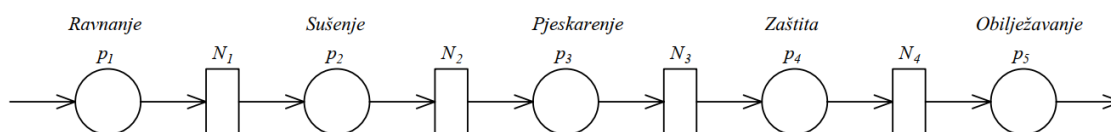
Primjeri linija koje sadrže tri stroja, [Tablica 4, Tablica 5, Tablica 6, Tablica 7] i [Slika 14, Slika 15, Slika 16, Slika 17], nailaze na prve turbulencije u svojim rezultatima. Uz prihvatljivo odstupanje rezultata 1 do 2%, problem se javlja u blokadi prvog stroja (BL_1) pri svim kapacitetima međuskladišta gdje rezultati imaju približno isto odstupanje čak i do 22%. Manja nepoklapanja se vide i kod praznog hoda drugog stroja (ST_2) pri manjim kapacitetima međuskladišta.

Linije koje sadrže četiri stroja [Tablica 8, Tablica 9, Tablica 10, Tablica 11, Tablica 12, Tablica 13, Tablica 14, Tablica 15] i [Slika 18, Slika 19, Slika 20, Slika 21], su linije koje prve pokazuju da analitička metoda kroz svoje rezultate prikazuje daleko realniju sliku proizvodne linije u odnosu na poluanalitičku metodu, npr. u primjeru 10, [Tablica 12, Tablica 13] rezultati analitičke metode, [Slika 20], prikazuju veći broj poluproizvoda i manji broj praznog hoda pri srednjim kapacitetima međuskladišta dok poluanalitička metoda to ne prepoznaje.

Iz linija s pet strojeva [Tablica 16, Tablica 17, Tablica 18, Tablica 19, Tablica 20, Tablica 21, Tablica 22, Tablica 23] i [Slika 22, Slika 23, Slika 24, Slika 25], može se lako uočiti da se poluanalitička metoda može primjenjivati kod linija koje posjeduju veći kapacitet međuskladišta. Dok se kod manjih kapaciteta međuskladišta rezultati razlikuju i do 15%, povećanjem kapaciteta međuskladišta rezultati se približavaju da bi se kod velikih kapaciteta gotovo izjednačili.

6. ANALIZA TIPIČNE BRODOGRAĐEVNE PROIZVODNE LINIJE

Kao primjer primjene poluanalitičke metode sprezanja razmatra se primjer tipične serijske linije predobrade brodograđevnih ploča koja je smještena na svakom početku procesa brodogradnje. Linija se sastoji od pet strojeva koji vrše postpke ravnjanja, sušenja, pjeskarenja, zaštite i obilježavanja, a međuskladišni prostor predstavlja linija konvejera koji transportiraju ploče iz jedne obrade u drugu [Slika 26].



Slika 26. Seriska linija predobrade limova

Ovaj primjer se može smatrati tipičnim primjerom Bernoullijeve serijske linije jer se sve obrade odvijaju u nizu jedna za drugom, odnosno svaka iduća obrada može početi tek kad je prethodna završena i pri tome nema dodatnih međuskladišta. Također, lim koj ulazi u proces predobrade ulazi u prvi stroj i završetkom predobrade izlazi iz zadnjeg stroja pa je time zadovoljen zakon očuvanja mase.

Za određivanje prethodno već navedenih mjera učinkovitosti ovog procesa predobrade prvo je potrebno odrediti ulazne podatke, a to su vjerojatnosti p_i za svaki stroj u procesu i kapacitet svakog međuskladišta N_i .

Ulazni podaci su preuzeti iz [2] i prikazani su u tablicama 24 i 25, [Tablica 24, Tablica 25]. Pri tome vjerojatnost svakog stroja predstavlja omjer između deklariranog i stvarnog kapaciteta stroja, dok se kapacitet međuskladišta određuje na temelju duljine transportera i pretpostavljene dimenzije ploče što daje broj ploča koji se može smjestiti između dva susjedna stroja.

Izlazni podaci koji predstavljaju mjere učinkovitosti procesa prikazani su u tablici 26, [Tablica 26].

Tablica 24. Linija predobrade – deklarirani i stvarni kapacitet stroja

Obrada	Deklaracija	Deklarirani kapacitet, [ploča/h] ^a	Stvarni kapacitet, [ploča/h]	Vjerojatnost <i>p</i>
Ravnanje	2 ploče/h	2	1,8	0,9
Sušenje	280 m ² /h	3,88	3,54	0,912
Pjeskarenje	185 m ² /h	2,6	2,3	0,885
Zaštita	400 m ² /h	5,55	4,45	0,801
Obilježavanje	4 ploče/h	4	3,82	0,955

^aza ploče dimenzija 12 x 3 m.

Tablica 25. Linija predobrade – kapaciteti međuskладиšta

Međuskладиšte	1	2	3	4
Duljina, [m]	20	25	20	25
N ^a	1	2	1	2

^aza ploče dimenzija 12 x 3 m.

Tablica 26. Mjere učinkovitosti prema poluanalitičkoj metodi sprezanja

p_1	N_1	p_2	N_2	p_3	N_3	p_4	N_4	p_5	PR
									0,697
	WIP_1		WIP_2		WIP_3		WIP_4		$\sum WIP_i$
	0,923		1,590		0,873		0,802		4,187
BL_1		BL_2		BL_3		BL_4			
0,203		0,157		0,156		0,003			
		ST_2		ST_3		ST_4		ST_5	
		0,071		0,039		0,102		0,258	

U prikazanom primjeru dobivena proizvodnost PR iznosi 0,697 i predstavlja prosječan broj ploča procesuiran kroz liniju predobrade. Propusnost linije predobrade rezultat je umnoška proizvodnosti i najmanjeg kapaciteta stroja u liniji [Tablica 24] i iznosi 1,349 ploče/h. Ukupni rad u nastanku proizvoda WIP predstavlja prosječan broj ploča koje se nalaze u svim međuskladištima i iznosi 4,187. Najveća vjerojatnost zastoja BL iznosi 0,203 dok je najveća vjerojatnost praznog hoda ST 0,258. Ove vrijednosti su značajne za upravljanje proizvodnim sustavom i analizu uskih grla u proizvodnoj liniji.

7. ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazani su postupci analitičkog i poluanalitičkog (agregacijskog) rješenja serijskih Bernoullijevih proizvodnih linija koje se mogu sastojati od M strojeva i $M-1$ međuskladišta. Prikazane teorije se temelje na teoriji vjerojatnosti, stohastičkim procesima i Markovljevim lancima.

Izvršenom usporedbom navedenih postupaka vidljivo je dobro poklapanje dobivenih proizvodnih parametara (PR , WIP , BL , ST). Znatna odstupanja u analizama mogu se vidjeti kod vjerojatnosti proizvodnih parametara blokade i praznog hoda stroja, međutim s povećanjem kapaciteta međuskladišta rezultati se daleko bolje podudaraju.

Iako je analitička metoda primarna metoda i trebalo bi se oslanjati na nju, ona ima svoj nedostatak, a to je vrijeme trajanja proračuna. U primjeru 12 kada nam kapacitet skladišta N iznosi 20 jedinica obradaka, vrijeme trajanja proračuna analitičkom metodom na jednom prosječnom računalu traje 3-4 tjedna. Metodom agregacije za isti primjer vrijeme proračuna je manje od 10 sekundi.

Uzevši u obzir sve navedeno može se zaključiti kako agregacijska metoda može znatno pomoći u slučajevima koji su ograničeni vremenom.

Kako vitku proizvodnju odlikuje sinkronizirani tok, fleksibilnost i prilagodljivost, a to su najčešće odlike kratkih linija sa manjim kapacitetom međuskladišta, poluanalitička metoda će rijetko naći primjenu u praksi.

Možemo zaključiti kako je analiza proizvodnih linija jedna od nezaobilaznih uloga u industriji, ona ne iziskuje velike troškove, a može imati veliku ulogu u optimizaciji proizvodnje i projektiranju proizvodnih linija. Proizvodna linija je ta koja će svojim operacijama u konačnici uvećati vrijednost obratka i učinit ga kvalitetnim proizvodom.

LITERATURA

- [1] Li, J. i Meerkov, Production System Engineering, Springer, New York, 2009.
- [2] Hadžić, N. Analytic Solution of the serial Bernoulli production line steady-state performance and its application in the shipbuilding process. International Journal of Production Research, 56,12, pp.1-14, 2018.
- [3] PSEToolbox (2016), www.productionssystemengineering.com
- [4] Pavlić, I. STATISTIČKA TEORIJA I PRIMJENA, Tehnička knjiga Zagreb, 1985.
- [5] Hadžić N, Tehnologija Brodogradnje II, FSB, 2019

PRILOZI

I. CD-R disc