

# Upravljanje autonomnim letjelicama primjenom adaptivnih Laguerreovih filtera

---

**Kantolić, Dario**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:698657>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-05**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Dario Kantolić

ZAGREB, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Mentor:  
prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:  
Dario Kantolić

ZAGREB, 2019.

*Najveću zahvalnost upućujem svojem mentoru, prof. dr. sc. Josipu Kasaću, na dodijeljenoj temi ovog rada te što mi je pružao korisne savjete i uvijek imao strpljenja za moje upite.*

*Posebno se zahvaljujem svojim roditeljima Damiru i Božici te sestri Adrijani kao i ostaloj obitelji na pruženoj potpori i razumijevanju tijekom studiranja.*

*Ovaj rad posvećujem ocu Damiru.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, srpanj 2019.

Dario Kantolić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **DARIO KANTOLIĆ** Mat. br.: 0035198578

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Upravljanje autonomnim letjelicama primjenom adaptivnih Laguerreovih filtera**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Control of unmanned aerial vehicles by using adaptive Laguerre filters**

Opis zadatka:

Upravljanje dinamičkim sustavima nepoznate dinamike s djelomično mjerljivim varijablama stanja u prisustvu vanjskih poremećaja, još uvijek je veliki izazov suvremene teorije upravljanja. Prilikom upravljanja autonomnim letjelicama prisutnost nepoznatih vanjskih poremećaja poput vjetrova problem je koji se ne može ignorirati ako želimo visoku točnost slijeđenja referentne trajektorije. Također, kod autonomnih letjelica uobičajeno je mjerenje pozicije ili akceleracije, dok se brzine moraju estimirati. U ovom radu razmatraju se performanse adaptivnih Laguerreovih filtera za estimaciju vanjskih poremećaja i derivacija mjerljivih pozicija kvadrokoptera.

U radu je potrebno:

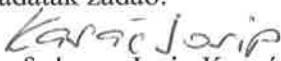
1. Izvesti adaptivne zakone podešavanja parametara Laguerreovih filtera za estimaciju poremećaja dinamičkih sustava drugog reda primjenom Lyapunovljeve metode.
2. Izvesti adaptivne zakone podešavanja parametara Laguerreovih filtera za estimaciju derivacija ulaznog signala primjenom Lyapunovljeve metode.
3. Implementirati izvedene algoritme u Matlabu i testirati ih na problemu estimacije vanjskog poremećaja sustava drugog reda, kao i estimacije brzine na temelju mjerene pozicije.
4. Izvesti i implementirati dinamički model kvadrokoptera te provesti sintezu regulatora za problem slijeđenja referentne trajektorije, uz pretpostavku mjerljivih stanja letjelice i bez prisustva vanjskih poremećaja.
5. Provesti sintezu regulatora primjenom adaptivnih Laguerreovih filtera za problem slijeđenja referentne trajektorije, uz pretpostavku mjerljivosti pozicije letjelice kao i prisustva vanjskih poremećaja.
6. Usporediti performanse upravljanja konvencionalnog regulatora i regulatora s adaptivnim Laguerreovim filterom u slučaju prisustva vanjskih poremećaja.

Zadatak zadan:  
02. svibnja 2019.

Rok predaje rada:  
04. srpnja 2019.

Predviđeni datum obrane:  
10. srpnja 2019.  
11. srpnja 2019.  
12. srpnja 2019.

Zadatak zadao:

  
prof. dr. sc. Josip Kasac

Predsjednica Povjerenstva:

  
prof. dr. sc. Biserka Runje

# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	viii
Popis tablica	xi
Popis oznaka	xii
Sažetak	xviii
Summary	xix
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Laguerreovi filteri</b>	<b>3</b>
2.1. Laguerreovi filteri kao ortogonalne funkcije . . . . .	3
2.2. Definicija i realizacija Laguerreovih funkcija . . . . .	5
<b>3. Adaptivno upravljanje primjenom Laguerreovih filtera</b>	<b>9</b>
3.1. Adaptivno upravljanje MDS sustava . . . . .	9
3.2. Adaptivna estimacija poremećaja . . . . .	14
3.2.1. Slučaj 1 - Stabilizacija sustava bez poremećaja . . . . .	14
3.2.2. Slučaj 2 - Sustav s poremećajem bez kompenzacije poremećaja . .	15
3.2.3. Slučaj 3 - Sustav s poremećajem i adaptivnom kompenzacijom poremećaja . . . . .	17

3.2.4.	Neoptimalno podešeni parametri sustava . . . . .	18
3.2.5.	Optimalno podešeni parametri sustava . . . . .	19
<b>4.</b>	<b>Estimacija derivacije signala primjenom Laguerreovih filtera</b>	<b>21</b>
4.1.	Adaptivna estimacija brzine sustava . . . . .	21
4.2.	Implementacija estimacije poremećaja i brzine na adaptivno upravljanje MDS sustava . . . . .	26
4.2.1.	Slučaj 1 - Slijeđenje referentne trajektorije $x_d = 0$ s optimalnim parametrima . . . . .	26
4.2.2.	Slučaj 2 - Slijeđenje referentne trajektorije $x_d = 0$ s promjenom optimalnih parametra . . . . .	29
4.2.3.	Slučaj 3 - Slijeđenje referentne trajektorije $x_{d1}$ s promjenom optimalnih parametra . . . . .	32
4.3.	Implementacija estimacije poremećaja na adaptivno upravljanje MDS sustava s mjerljivom pozicijom i brzinom . . . . .	35
<b>5.</b>	<b>Dinamički model kvadkoptera</b>	<b>39</b>
5.1.	Uvod i motivacija primjene kvadkoptera . . . . .	39
5.2.	Povijest multirotora . . . . .	40
5.3.	Osnovni koncepti kvadkoptera . . . . .	42
5.4.	Kinematika . . . . .	47
5.5.	Dinamika . . . . .	52
5.6.	Newton-Euler-ov model . . . . .	53
5.7.	Linearizacija modela . . . . .	61
<b>6.</b>	<b>Upravljanje kvadkopterom</b>	<b>63</b>
6.1.	Sinteza linearnog regulatora . . . . .	63
6.2.	Adaptivno upravljanje s Laguerreovim filterima . . . . .	69
6.2.1.	Upravljanje kvadkopterom bez poremećaja i s mjerljivim varijablama stanja . . . . .	70
6.2.2.	Upravljanje kvadkopterom s poremećajem i s mjerljivim varijablama stanja . . . . .	71



6.2.3. Upravljanje kvadkopterom s poremećajem i s mjerljivim varijablama stanja bez i sa kompenzacijom poremećaja . . . . .	75
6.2.4. Upravljanje kvadkopterom bez poremećaja i s estimiranim varijablama stanja . . . . .	77
6.2.5. Upravljanje kvadkopterom s poremećajem i s estimiranim varijablama stanja . . . . .	86
6.3. Usporedba performansi regulatora . . . . .	87
<b>7. Zaključak</b>	<b>89</b>
<b>Literatura</b>	<b>90</b>
<b>A. Prilog</b>	<b>92</b>

# Popis slika

2.1	Prikaz Laguerreovih funkcija do stupnja $N = 9$ . . . . .	8
3.1	Dinamički sustav drugog reda (MDS sustav) [4] . . . . .	9
3.2	Stabilizacija sustava bez poremećaja s početnim uvjetom pozicije . . . . .	15
3.3	Sustav s poremećajem bez kompenzatora i estimacija ukupnog poremećaja . . . . .	16
3.4	Adaptivna kompenzacija poremećaja . . . . .	17
3.5	Neoptimalni odziv sustava s pojavom <i>pickinga</i> . . . . .	18
3.6	Optimalni odziv sustava bez pojave <i>pickinga</i> . . . . .	20
4.1	Odziv sustava te prikaz ulaznog signala i njegove derivacije . . . . .	24
4.2	Estimacija pozicije i pogreška estimacije . . . . .	25
4.3	Estimacija brzine i pogreška estimacije . . . . .	25
4.4	Odziv sustava s PD regulatorom sa i bez adaptivne kompenzacije . . . . .	27
4.5	Estimacija poremećaja i njegove derivacije s prikazom pogreške . . . . .	28
4.6	Estimacija pozicije i brzine s prikazom pogreške . . . . .	28
4.7	Odziv sustava s PD regulatorom sa i bez adaptivne kompenzacije koristeći promijenjene parametre adaptivnog regulatora . . . . .	30
4.8	Estimacija poremećaja i njegove derivacije s prikazom pogreške koristeći promijenjene parametre adaptivnog regulatora . . . . .	31
4.9	Estimacija pozicije i brzine s prikazom pogreške koristeći promijenjene parametre adaptivnog regulatora . . . . .	32
4.10	Odziv sustava sa PD regulatorom sa i bez adaptivne kompenzacije za referentnu trajektoriju $x_{d1}$ . . . . .	33

4.11	Estimacija poremećaja i njegove derivacije s prikazom pogreške za referentnu trajektoriju $x_{d1}$ . . . . .	34
4.12	Estimacija pozicije i brzine s prikazom pogreške za referentnu trajektoriju $x_{d1}$ . . . . .	35
4.13	Odziv sustava sa PD regulatorom sa i bez adaptivne kompenzacije za referentnu trajektoriju $x_{d1}$ s mjerljivom pozicijom i brzinom . . . . .	36
4.14	Estimacija poremećaja i njegove derivacije s prikazom pogreške za referentnu trajektoriju $x_{d1}$ s mjerljivom pozicijom i brzinom . . . . .	37
4.15	Estimacija pozicije i brzine s prikazom pogreške za referentnu trajektoriju $x_{d1}$ s mjerljivom pozicijom i brzinom . . . . .	38
5.1	Oemichen 2 kvadkopter [6] . . . . .	40
5.2	de Bothezat kvadkopter [6] . . . . .	41
5.3	Moderni komercijalni kvadkopter za snimanje sadržaja u visokoj kvaliteti [7] . . . . .	42
5.4	Smjerovi vrtnje propelera kvadkoptera [9] . . . . .	43
5.5	Pokret uzdizanja ili spuštanja [11] . . . . .	44
5.6	Pokret valjanja [11] . . . . .	45
5.7	Pokret poniranja [11] . . . . .	45
5.8	Pokret skretanja [11] . . . . .	46
5.9	Veza između Zemljinog i koordinatnog sustava kvadkoptera [10] . . . . .	48
5.10	Rotacija kuta $\psi$ oko osi $z_E$ [10] . . . . .	48
5.11	Rotacija kuta $\theta$ oko osi $y_1$ [10] . . . . .	49
5.12	Rotacija kuta $\phi$ oko osi $x_2$ [10] . . . . .	49
6.1	Praćenje referentnih trajektorija primjenom linearnog regulatora s mjerljivim stanjima sustava i bez prisustva poremećaja . . . . .	66
6.2	Pogreške slijeđenja referentnih trajektorija primjenom linearnog regulatora . . . . .	67
6.3	Upravljačke varijable kvadkoptera prilikom slijeđenja referentnih trajektorija primjenom linearnog regulatora . . . . .	68
6.4	Praćenje referentne trajektorije u 3D prikazu primjenom linearnog regulatora s mjerljivim stanjima sustava i bez prisustva poremećaja . . . . .	69
6.5	Praćenje referentne trajektorije bez djelovanja vanjskih poremećaja i s mjerljivim varijablama stanja . . . . .	70

6.6	Praćenje referentne trajektorije s djelovanjem oba vanjska poremećaja bez kompenzacije poremećaja . . . . .	74
6.7	Upravljanje kvadkopterom bez kompenzacije poremećaja $d_{02}$ i s mjerljivim varijablama stanja . . . . .	75
6.8	Upravljanje kvadkopterom s kompenzacijom poremećaja $d_{02}$ i s mjerljivim varijablama stanja . . . . .	76
6.9	Upravljanje kvadkopterom s kompenzacijom kumulativnog poremećaja i s mjerljivim varijablama stanja . . . . .	77
6.10	Estimacija pozicije i prve derivacije dinamičkog sustava četvrtog reda bez poremećaja pri slijeđenju referentne trajektorije $x_d = \sin(t)$ . . . . .	81
6.11	Estimacija druge i treće derivacije pozicije dinamičkog sustava četvrtog reda bez poremećaja pri slijeđenju referentne trajektorije $x_d = \sin(t)$ . . .	81
6.12	Estimacija pozicije i prve derivacije dinamičkog sustava četvrtog reda bez poremećaja pri slijeđenju referentne trajektorije $\bar{x}_d = (1 - e^{-0.45t})^{6.5} \sin(t)$	83
6.13	Estimacija druge i treće derivacije pozicije dinamičkog sustava četvrtog reda bez poremećaja pri slijeđenju referentne trajektorije $\bar{x}_d = (1 - e^{-0.45t})^{6.5} \sin(t)$ . . . . .	84
6.14	Upravljanje kvadkopterom bez poremećaja s estimiranim varijablama stanja i modificiranom referentnom trajektorijom $\bar{x}_d = (1 - e^{-0.45t})^{6.5} \cos(0.5t)$	85
6.15	Upravljanje kvadkopterom s kombinacijom estimacije poremećaja i varijabli stanja . . . . .	86
6.16	Komparativna analiza linearnog regulatora s adaptivnim Laguerreovim filterima za estimaciju i kompenzaciju poremećaja te estimaciju stanja . .	87

# Popis tablica

3.1	Parametri neoptimalno podešenog sustava . . . . .	18
3.2	Parametri optimalno podešenog sustava . . . . .	19
4.1	Promijenjeni parametri optimalno podešenog sustava . . . . .	29

# Popis oznaka

$D$	Koeficijent prigušnice [N s m <sup>-1</sup> ] . . . . .	10
$F_z$	Sila kojom se upravlja kvadkopter po osi $z$ [N] . . . . .	68
$I_{xx}$	Moment inercije oko $x$ osi [N m s <sup>2</sup> ] . . . . .	57
$I_{yy}$	Moment inercije oko $y$ osi [N m s <sup>2</sup> ] . . . . .	57
$I_{zz}$	Moment inercije oko $z$ osi [N m s <sup>2</sup> ] . . . . .	57
$J_{TP}$	Ukupni moment inercije propelera [N m s <sup>2</sup> ] . . . . .	55
$J$	Funkcija cilja za određivanje koeficijenata Laguerreovih funkcija . . . . .	8
$K_i$	Pojačanja upravljačke varijable kvadkoptera . . . . .	72
$K_p$	Proporcionalno pojačanje regulatora . . . . .	11
$K$	Konstanta opruge [N m <sup>-1</sup> ] . . . . .	10
$L_i(t)$	Laguerreove funkcije . . . . .	6
$N$	Red ortogonalne funkcije . . . . .	5
$U_1$	Vertikalni potisak u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N] . . . . .	44
$U_2$	Moment valjanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N m] . . . . .	45
$U_3$	Moment poniranja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N m] . . . . .	46
$U_4$	Moment skretanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N m] . . . . .	46
$X$	Linearna pozicija kvadkoptera po osi $x_E$ [m] . . . . .	50
$Y$	Linearna pozicija kvadkoptera po osi $y_E$ [m] . . . . .	50
$Z$	Linearna pozicija kvadkoptera po osi $z_E$ [m] . . . . .	50
$\Delta_A$	Inkrementalno povećanje brzine prvog propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	44
$\Delta_B$	Inkrementalno povećanje brzine drugog propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	45
$\Omega_1$	Brzina vrtnje prednjeg propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	56

$\Omega_2$	Brzina vrtnje desnog propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	56
$\Omega_3$	Brzina vrtnje stražnjeg propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	56
$\Omega_4$	Brzina vrtnje lijevog propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	56
$\Omega_H$	Brzina propelera tijekom lebdjenja [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	44
$\Omega$	Ukupna brzina vrtnje propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	56
$\alpha_i$	Pomoćni koeficijenti za određivanje Laguerreovih koeficijenata kod kvadkoptera 73	
$\beta_i$	Slobodni parametar adaptacije kod kvadkoptera . . . . .	73
$\mathbf{\Omega}$	Vektor brzine propelera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	55
$\dot{\zeta}$	Generalizirani vektor ubrzanja u odnosu na hibridni koordinatni sustav [m s <sup>-2</sup> ] 58	
$\dot{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\eta})$	Derivacija rotacijske matrice . . . . .	53
$\dot{\mathbf{\Omega}}$	Vektor ubrzanja propelera [rad s <sup>-2</sup> ] . . . . .	56
$\dot{\mathbf{v}}$	Vektor linearnog ubrzanja kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	53
$\mathbf{A}_p$	Toeplitzova matrica korištena za implementaciju Laguerreovih filtera . . . . .	6
$\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})$	Coriolisova centripetalna matrica u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera 54	
$\mathbf{C}_H(\zeta)$	Coriolisova centripetalna matrica u odnosu na hibridni koordinatni sustav .	58
$\mathbf{E}_B(\boldsymbol{\xi})$	Matrica gibanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera . . . . .	56
$\mathbf{E}_H(\zeta)$	Matrica gibanja u odnosu na hibridni koordinatni sustav . . . . .	58
$\mathbf{F}$	Vektor sila kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N] . .	47
$\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi})$	Gravitacijski vektor u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera . . . . .	55
$\mathbf{G}_H(\zeta)$	Gravitacijski vektor u odnosu na hibridni koordinatni sustav . . . . .	58
$\mathbf{I}_B$	Inercijska matrica tijela [N m s <sup>2</sup> ] . . . . .	52
$\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$	Generalizirana matrica transformacija . . . . .	51
$\mathbf{L}(0)$	Vektor stanja početnih uvjeta Laguerreovih funkcija . . . . .	6
$\mathbf{L}$	Vektor stanja Laguerreovih funkcija . . . . .	6
$\mathbf{M}_B$	Inercijska matrica sustava u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera . . .	54
$\mathbf{M}_H$	Inercijska matrica sustava u odnosu na hibridni koordinatni sustav . . . . .	58
$\mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})$	Matrica žiroskopskog utjecaja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera	55
$\mathbf{O}_H(\zeta)$	Matrica žiroskopskog utjecaja u odnosu na hibridni koordinatni sustav . . .	58

$\mathbf{R}(\phi, x)$	Rotacijska matrica koja opisuje zakret kuta $\phi$ oko $x_2$ [rad] . . . . .	50
$\mathbf{R}(\psi, z)$	Rotacijska matrica koja opisuje zakret kuta $\psi$ oko $z_E$ [rad] . . . . .	49
$\mathbf{R}(\theta, y)$	Rotacijska matrica koja opisuje zakret kuta $\theta$ oko $y_1$ [rad] . . . . .	49
$\mathbf{R}$	Rotacijska matrica . . . . .	48
$\mathbf{S}$	Matrica antisimetričnog operatora . . . . .	54
$\mathbf{T}(\eta)$	Matrica transformacija . . . . .	51
$\mathbf{U}_B(\Omega)$	Vektor gibanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera . . . . .	56
$\Gamma$	Matrica parametara adaptacije kod estimirane brzine sustava drugog reda . . . . .	23
$\Lambda$	Generalizirani vektor sila [N] . . . . .	53
$\Upsilon$	Vektor linearne pozicije kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m] 47	
$\ddot{\Upsilon}$	Vektor linearnog ubrzanja kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	53
$\ddot{\eta}$	Vektor kutnog ubrzanja u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	53
$\dot{\Upsilon}$	Vektor linearne brzine kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	50
$\dot{\nu}$	Generalizirani vektor ubrzanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	54
$\dot{\eta}$	Vektor kutne brzine kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [m s <sup>-1</sup> ] 51	
$\dot{\omega}$	Vektor kutnog ubrzanja u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	53
$\dot{\xi}$	Generalizirani vektor brzine u Zemljinom koordinatnom sustavu [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	51
$\eta$	Vektor kutne pozicije kvadkoptera u odnosu na Zemljin koordinatni sustav [rad] 47	
$\nu$	Generalizirani vektor brzine u koordinatnom sustavu kvadkoptera [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	50
$\omega$	Vektor kutne brzine kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	47
$\tau$	Vektor momenata kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [N m] . . . . .	47
$\xi$	Generalizirani vektor položaja u Zemljinom koordinatnom sustavu [m] . . . . .	50
$\zeta$	Generalizirani vektor brzine u odnosu na hibridni koordinatni sustav [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	58
$k$	Generički vektor antisimetrične matrice . . . . .	54
$v^E$	Vektor linearne brzine kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav Zemlje [m	



	$s^{-1}$ . . . . .	50
$\mathbf{v}$	Vektor linearne brzine kvadkoptera u odnosu na koordinatni sustav kvadkoptera [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	47
$\ddot{X}$	Linearno ubrzanje kvadkoptera po osi $x_E$ [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	60
$\ddot{Y}$	Linearno ubrzanje kvadkoptera po osi $y_E$ [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	60
$\ddot{Z}$	Linearno ubrzanje kvadkoptera po osi $z_E$ [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	60
$\delta$	Slobodni parametar kod slijeđenja referentne trajektorije koji određuje točnost slijeđenja . . . . .	82
$\dot{X}$	Linearna brzina kvadkoptera po osi $x_E$ [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	58
$\dot{Y}$	Linearna brzina kvadkoptera po osi $y_E$ [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	58
$\dot{Z}$	Linearna brzina kvadkoptera po osi $z_E$ [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	58
$\dot{\phi}$	Kutna brzina kvadkoptera oko osi $x_2$ [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	51
$\dot{\psi}$	Kutna brzina kvadkoptera oko osi $z_E$ [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	51
$\dot{\theta}$	Kutna brzina kvadkoptera oko osi $y_1$ [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	51
$\dot{p}$	Kutno ubrzanje kvadkoptera oko osi $x_B$ [rad s <sup>-2</sup> ] . . . . .	57
$\dot{q}$	Kutno ubrzanje kvadkoptera oko osi $y_B$ [rad s <sup>-2</sup> ] . . . . .	57
$\dot{r}$	Kutno ubrzanje kvadkoptera oko osi $z_B$ [rad s <sup>-2</sup> ] . . . . .	57
$\ddot{u}$	Linearno ubrzanje kvadkoptera oko osi $x_B$ [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	57
$\ddot{v}$	Linearno ubrzanje kvadkoptera oko osi $y_B$ [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	57
$\ddot{w}$	Linearno ubrzanje kvadkoptera oko osi $z_B$ [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	57
$\epsilon$	Operator određivanja konačnosti ortogonalnih funkcija . . . . .	5
$\eta_i$	Slobodni parametar adaptacije kod estimacije brzine sustava drugog reda . . . . .	22
$\gamma_i$	Slobodni parametar adaptacije kod adaptivnog upravljanja . . . . .	12
$\hat{a}_i$	Estimirani koeficijenti Laguerreovih funkcija kod sustava drugog reda . . . . .	11
$\hat{b}_i$	Estimirani koeficijenti Laguerreovih funkcija pri estimaciji brzine sustava drugog reda . . . . .	22
$\hat{d}_0$	Estimirani ukupni poremećaj koji djeluje na kvadkopter [N] . . . . .	72
$\hat{k}_i$	Estimirani koeficijenti Laguerreovih funkcija ukupnog poremećaja kvadkoptera	73
$\hat{x}^{(1)}$	Estimirana brzina sustava drugog reda [m/s] . . . . .	23
$\hat{x}$	Estimirana pozicija sustava drugog reda [m] . . . . .	22
$\kappa$	Slobodni parametar kod slijeđenja referentne trajektorije i eliminacije <i>picking-a</i>	82

$\lambda$	Slobodni parametar kod određivanja sliding površine . . . . .	10
$\mu$	Slobodan parametar za estimaciju brzine sustava drugog reda . . . . .	21
$\phi$	Eulerov kut, valjanje [rad] . . . . .	48
$\psi$	Eulerov kut, skretanje [rad] . . . . .	48
$\tau_1$	Moment kojim se upravlja kvadkopter po osi $y$ [N m] . . . . .	68
$\tau_2$	Moment kojim se upravlja kvadkopter po osi $x$ [N m] . . . . .	68
$\tau_3$	Moment kojim se upravlja skretanjem kvadkoptera [N m] . . . . .	68
$\theta$	Eulerov kut, poniranje [rad] . . . . .	48
$\tilde{a}_i$	Pogreška estimacije Laguerreovih koeficijenata kod sustava drugog reda . . .	12
$\tilde{b}_i$	Pogreška estimacije koeficijenata Laguerreovih funkcija pri estimaciji brzine sustava drugog reda . . . . .	22
$\tilde{x}$	Pogreška vođenja [m] . . . . .	10
$a_i$	Koeficijenti Laguerreovih funkcija kod sustava drugog reda . . . . .	11
$b_{en}$	Koeficijenti Laguerreovih funkcija pri estimaciji viših derivacija pozicije kvadkoptera . . . . .	80
$b_i$	Koeficijenti Laguerreovih funkcija pri estimaciji brzine sustava drugog reda .	21
$b$	Faktor potiska [N s <sup>2</sup> ] . . . . .	56
$c_i$	Koeficijenti razvoja Laguerreovih funkcija . . . . .	4
$d(t)$	Totalni poremećaj [N] . . . . .	11
$d_{01}, d_{02}$	Eksterni poremećaji kod implementacije estimacije poremećaja i brzine na sustav drugog reda [N] . . . . .	26
$d_{01}, d_{02}$	Vanjski poremećaji kvadkoptera [N] . . . . .	71
$d_0$	Ukupni poremećaj koji djeluje na kvadkopter [N] . . . . .	70
$d_1, d_2$	Vanjski poremećaji sustava drugog reda [N] . . . . .	15
$d_{ext}(t)$	Vanjski poremećaj sustava drugog reda [N] . . . . .	10
$d_{int}(t)$	Interni poremećaj sustava drugog reda . . . . .	11
$d$	Faktor otpora [N m s <sup>2</sup> ] . . . . .	56
$e_x$	Pogreška slijeđenja referentne trajektorije kvadkoptera oko $x$ osi [m] . . . . .	70
$f(t)$	Funkcija dekomponirana Laguerreovim funkcijama . . . . .	4
$g$	Gravitacijska sila ubrzanja [m s <sup>-2</sup> ] . . . . .	55
$h(t)$	Funkcija odziva . . . . .	7
$k_i$	Koeficijenti Laguerreovih funkcija ukupnog poremećaja kvadkoptera . . . . .	72

$l_i(t)$	Niz ortogonalnih funkcija . . . . .	4
$l$	Udaljenost između centra mase kvadkoptera i središta propelera [m] . . . . .	56
$m$	Masa dinamičkog sustava drugog reda [kg] . . . . .	10
$m$	Masa kvadkoptera [kg] . . . . .	53
$p$	Kutna brzina kvadkoptera oko osi $x_B$ [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	50
$p$	Pol Laguerreovih fultera ili faktor vremenskog skaliranja . . . . .	5
$q_1$	Slobodni parametar kod estimacije viših derivacija kvadkoptera . . . . .	80
$q_2$	Slobodni parametar kod estimacije viših derivacija kvadkoptera Laguerreovim funkcijama . . . . .	80
$q$	Kutna brzina kvadkoptera oko osi $y_B$ [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	50
$r$	Kutna brzina kvadkoptera oko osi $z_B$ [rad s <sup>-1</sup> ] . . . . .	50
$r$	Sliding varijabla sustava drugog reda . . . . .	10
$s$	Sliding varijabla kod kvadkoptera . . . . .	72
$u_n$	Estimirana vrijednost viših derivacija pozicije kvadkoptera . . . . .	80
$u$	Linearna brzina kvadkoptera oko osi $x_B$ [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	50
$v$	Linearna brzina kvadkoptera oko osi $y_B$ [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	50
$w$	Linearna brzina kvadkoptera oko osi $z_B$ [m s <sup>-1</sup> ] . . . . .	50
$x(t)$	Pozicija sustava drugog reda [m] . . . . .	21
$x_{0d}$	Referentna trajektorija kvadkoptera [m] . . . . .	70
$x_{d1}$	Referentna trajektorija kod promjene optimalnih parametara [m] . . . . .	33
$x_d$	Referentna trajektorija [m] . . . . .	10
$z_n$	Varijabla stanja filtera za estimaciju viših derivacija pozicije kvadkoptera . . . . .	80
$z$	Varijabla stanja filtera za estimaciju brzine sustava drugog reda . . . . .	21

# Sažetak

Kroz ovaj diplomski rad razmatrani su adaptivni Laguerreovi filteri te njihova primjena na upravljanje kvadkopterom uz pretpostavku prisutnosti vanjskih poremećaja poput vjetra, kao i uz pretpostavku mjerljivosti samo pozicija kvadkoptera. Svojstvo ortogonalnosti Laguerreovih funkcija koristi se za reprezentaciju proizvoljnih signala poput vanjskih poremećaja ili derivacija pozicija kvadkoptera. Parametri linearne superpozicije Laguerreovih funkcija određuju se primjenom metode adaptivnog upravljanja, zasnovane na Lyapunovljevoj analizi stabilnosti dinamičkih sustava. Provedena je usporedba performansi upravljanja konvencionalnog linearnog regulatora s adaptivnim Laguerreovim filterom u slučaju prisustva vanjskih poremećaja.

**Ključne riječi:** Laguerreovi filteri; Adaptivno upravljanje; Dinamika krutog tijela; Kvadkopter

# Summary

The topic of this master thesis are adaptive Laguerre filters and their application on quadcopter control, where external disturbances like wind are present and under presumption that only quadcopter position is observable. The orthogonality property of Laguerre filters was used to represent any arbitrary signal like external disturbances or quadcopter position derivatives. Linear superposition parameters were determined by adaptive control method, based on Lyapunov stability analysis of dynamic systems. Finally, comparative analysis of the performance of linear controller and adaptive Laguerre filter with presence of external disturbance was carried out.

**Keywords:** Laguerre filters; Adaptive control; Rigid-body dynamics; Quadcopter

# 1 | Uvod

Razvoj i implementacija novih algoritama upravljanja dinamičkih sustava sve se više javlja u današnjoj tehnici zbog velikih izazova koje moderna industrija pruža. Jedan od takvih izazova jest upravo upravljanje autonomnim letjelicama koji su multivarijabilni nelinearni dinamički sustavi. Prilikom upravljanja takvim sustavima veliki problem je pojava vanjskih poremećaja poput vjetra koji za posljedicu imaju smanjenje točnosti slijeđenja referentne trajektorije. Isto tako autonomne letjelice su izvedene na način da se vrši mjerenje pozicija ili akceleracija pojedinih stupnjeva slobode gibanja, pri čemu se brzine moraju estimirati.

Kroz ovaj diplomski rad se razmatra noviji pristup estimaciji i eliminaciji poremećaja prilikom slijeđenja referentnih trajektorija kao i istodobne derivacije mjerljivih pozicija sustava koristeći adaptivne Laguerreove filtere [1]. S matematičkog stanovišta, Laguerreove funkcije pripadaju grupi ortogonalnih funkcija koje su posebno zanimljive u obradi signala i analizi sustava gdje se koriste za dekompoziciju signala. Glavni razlog zašto su Laguerreove funkcije zanimljive sa stanovišta teorije upravljanja je činjenica da je njihov Laplaceov transformat konačnodimenzionalna racionalna funkcija u kompleksnoj domeni. To omogućuje njihovu konačnodimenzionalnu realizaciju u prostoru stanja, koja u obliku filtera omogućuje primjene u realnom vremenu. Adaptivni Laguerreovi filteri su prvo testirani kod estimacije poremećaja dinamičkih sustava drugog reda (MDS sustav) i istodobne estimacije brzine sustava (estimacija derivacije ulaznog signala). Nakon toga izvode se kinematski i dinamički zakoni kvadkoptera, te na osnovi lineariziranog modela implementirani su adaptivni Laguerreovi filteri. Kako na kvadkopter u realnim uporabama često djeluju neki poremećaj poput vjetra, estimiraju se takvi poremećaji i

u konačnici eliminiraju. Želi se i izbjeći zahtjev na dodatne senzore kojim bi se mjerila brzina, kut zakreta i slične veličine pa se istim filterima vrši estimacija varijabli stanja na temelju ulazne pozicije kvadkoptera.

### **Pregled po poglavljima**

U drugom poglavlju definirani su Laguerreovi filteri. Navedeni su odgovarajući matematički izvodi koji su potrebni za implementaciju u *Matlabu*.

U trećem poglavlju izvedeni su adaptivni zakoni podešavanja parametara Laguerreovih filtera za estimaciju poremećaja dinamičkih sustava drugog reda primjenom Lyapunovljeve metode. Potom su ti zakoni primijenjeni na upravljanje MDS sustava za kompenzaciju poremećaja.

Kroz četvrto poglavlje izvedeni su zakoni podešavanja parametara za estimaciju derivacije signala (brzine) koristeći Lyapunovljevu metodu. Također na jednostavnim primjerima sustava drugog reda prikazane su performanse takvog filtera. Konačno, vršeno je upravljanje sustavom sa istodobnom estimacijom poremećaja i brzine.

U petom poglavlju je izveden kinematički model kvadkoptera primjenom Euler-ovih kuteva te je pomoću Newton-Eulero-ove formulacije izveden dinamički model kvadkoptera. Nakon toga je izvršena linearizacija dinamičkog modela kako bi se implementirali Laguerreovi filteri za estimaciju poremećaja i estimacije brzine.

Šesto poglavlje se bavi implementacijom linearnog regulatora na upravljanje kvadkopterom. Potom se koristeći Laguerreovim filterima vrši isto upravljanje kvadkopterom. Konačno uspoređene su performanse oba regulatora i dani prijedlozi primjene svakoga.

## 2 Laguerreovi filteri

### 2.1. Laguerreovi filteri kao ortogonalne funkcije

Ortogonalne funkcije su jedne od raširenijih klasa funkcija kad je u pitanju dekompozicija signala. Jedna od najviše korištenih metoda za dekomponiranje signala su tzv. Fourierovi redovi kod kojih se kao ortogonalne funkcije koriste sinus i cosinus [1]. Osim Fouriera, koriste se još i Lagrangeove, Hermiteove, Besselove i ostale funkcije. Jedna od posebno zanimljivih funkcija koje se koriste u automatici su upravo Laguerreove funkcije. Koristeći Laguerreove funkcije (filtere), bilo koja funkcija ili signal se može opisati kao beskonačna suma ortogonalnih funkcija. Najveća prednost u odnosu na ostale ortogonalne funkcije je upravo ta što je Laplaceov transformat racionalna funkcija koja je sama po sebi konačnog reda. Ako bi se uzela neka druga od prethodno navedenih ortogonalnih funkcija poput Lagrangeovih, Hermiteovih ili Besselovih funkcija, njihov Laplaceov transformat bi bila neka transcendentna funkcija. To bi uzrokovalo u konačnici da bi tako realiziran filter bio beskonačne dimenzije. Isto tako polovi kod takvih transcendentnih funkcija su konjugirano kompleksni par koji se nalaze isključivo na imaginarnoj osi, dok kod Laguerrea se radi o jednom višestruko negativnom polu. Laguerreov filter se zapravo tvori od mreže serijski i paralelno spojenih P1 članova, čija je implementacija vrlo jednostavna zbog toga što je filter konačne dimenzije [2]. Laguerreove funkcije su zapravo neka vrsta univerzalnih aproksimatora zadanih signala ili parametara dinamičkih sustava. Naravno što je red filtera veći, tj. što se uzima veći broj ortogonalnih funkcija u sumu Laguerrovih filtera, točnost je veća [3]. Te sve značajke i prednosti takvog filtera direktno pobuđuju veliki interes u automatici, pošto se sve funkcije koje su u tom području od važnosti, mogu prikazati Laguerrovim funkcijama.



Sam niz realnih funkcija  $l_i(t), i = 1, 2, \dots$  tvori set ortogonalnih funkcija na intervalu  $[0, \infty]$  ako imaju svojstvo

$$\int_0^{\infty} l_i(t)^2 dt = 1 \quad (2.1)$$

i

$$\int_0^{\infty} l_i(t)l_j(t)dt = 0 \quad i \neq j. \quad (2.2)$$

Isto tako niz ortogonalnih funkcija  $l_i(t)$  je konačan ako relacija

$$\int_0^{\infty} f(t)l_i(t)dt = 0 \quad (2.3)$$

vrijedi za sve vrijednosti  $i$  uz to da kvadrat  $f(t)$  zadovoljava

$$\int_0^{\infty} f(t)^2 dt = 0. \quad (2.4)$$

Set funkcija  $l_i(t), i = 1, 2, \dots$  koje su ortogonalne i konačne na intervalu  $[0, \infty]$ , analogne su razvoju po Fourierovim redovima. Pa se isto tako koriste u numeričkim analizama za aproksimaciju rješenja diferencijalnih jednadžbi. U kontekstu takvih aproksimacija, neka funkcija  $f(t)$  se može zapisati kao

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i l_i(t) \quad (2.5)$$

pri čemu su  $c_i, i = 1, 2, \dots$  koeficijenti razvoja funkcije i definirani su kao

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{\infty} l_1(t)f(t)dt, \\ c_2 &= \int_0^{\infty} l_2(t)f(t)dt, \\ &\vdots \\ c_i &= \int_0^{\infty} l_i(t)f(t)dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dekompozicija funkcije (2.5) općenito ima beskonačan broj koeficijenata. No pretpostavlja se konačnost seta ortogonalnih funkcija koja osigurava da za svaku konačnu funkciju  $f(t)$  vrijedi

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt < \infty. \quad (2.7)$$

Isto tako ako se uzme neki  $\epsilon > 0$ , tada postoji konačni broj takvih ortogonalnih funkcija prema

$$\int_0^{\infty} (f(t) - \sum_{i=1}^N c_i l_i(t))^2 dt < \epsilon. \quad (2.8)$$

Na taj način se može izvršiti aproksimacija neke funkcije  $f(t)$  prema  $\sum_{i=1}^N c_i l_i(t)$  gdje će se sama točnost te aproksimacije povećati s većim brojem ortogonalnih funkcija, tj. većim  $N$ .

## 2.2. Definicija i realizacija Laguerreovih funkcija

Laguerreovim funkcijama se smatraju one koje čine set ortogonalnih funkcija koje zadovoljavaju svojstva ortogonalnosti i konačnosti prema (2.1) i (2.4). Neki skup Laguerreovih funkcija je definiran za svaki  $p > 0$  kao

$$\begin{aligned} l_1(t) &= \sqrt{2p} e^{-pt}, \\ l_2(t) &= \sqrt{2p} (-2pt + 1) e^{-pt}, \\ &\vdots \\ l_i(t) &= \sqrt{2p} \frac{e^{pt}}{(i-i)!} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} [t^{i-1} e^{-2pt}]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

U literaturi se još parametar  $p$  naziva i faktor vremenskog skaliranja kod Laguerreovih funkcija. Taj faktor skaliranja ima važnu ulogu kod same primjene tih funkcija, jer on određuje brzinu eksponencijalnog raspada tih funkcija. On se zapravo koristi kao parametar kojeg se može modificirati prilikom analize nekog signala, pa tako i dinamičkog sustava.

Kao što je već spomenuto, jedna od većih prednosti Laguerreovih funkcija jest što je prijenosna funkcija, tj. Laplaceova transformacija, zapravo racionalna funkcija. Tada skup tih funkcija tvore tzv. Laguerreovu mrežu  $L_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  pri čemu su

$$\begin{aligned}
L_1(s) &= \int_0^\infty l_1(t)e^{-st} dt = \frac{\sqrt{2p}}{(s+p)}, \\
L_2(s) &= \int_0^\infty l_2(t)e^{-st} dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)}{(s+p)^2}, \\
&\vdots \\
L_i(s) &= \int_0^\infty l_i(t)e^{-st} dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)^{i-1}}{(s+p)^i}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Svaka funkcija  $L_i(t)$  se može nazvati Laguerreovim filterom. Kao što se može iz racionalnih funkcija (2.10) vidjeti polovi su zapravo jednostruki i nalaze se na istome mjestu poluravnine.

Za generiranje Laguerreovih funkcija u programskom paketu *Matlab* potrebno ih je reprezentirati u prostoru stanja (*state-space* formi). Prvo je potrebno definirati vektor stanja  $\mathbf{L}(t) = [l_1(t) \ l_2(t) \dots \ l_n(t)]^T$ . Isto tako potrebno je pretpostaviti vektor stanja početnih uvjeta  $\mathbf{L}(0) = \sqrt{2p}[1 \ 1 \dots \ 1]^T$ .

Tada Laguerreove funkcije zadovoljavaju sljedeću jednakost zapisanu u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{l}_1(t) \\ \dot{l}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{l}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \cdots & 0 \\ -2p & -p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2p & \cdots & -2p & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ \vdots \\ l_N(t) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

koja se još jednostavnije može zapisati u obliku matrične jednadžbe

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{L}(t). \tag{2.12}$$

Rješenja diferencijalnih jednadžbi (2.11) daju set Laguerreovih funkcija prema

$$\mathbf{L}(t) = e^{\mathbf{A}_p t} \mathbf{L}(0), \tag{2.13}$$

pri čemu je  $\mathbf{A}_p$

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} -p & 0 & \cdots & 0 \\ -2p & -p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2p & \cdots & -2p & -p \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Takav kompaktni zapis Laguerreovih funkcija u prostoru stanja je od iznimne važnosti kod upravljanja dinamičkih sustava. Može se primijetiti da je matrica  $\mathbf{A}_p$  zapravo donje trokutasta matrica, što vodi do jednostavnih rješenja prilikom zapisa takve matrice. Pa se tako kod zapisa takve matrice u programskom paketu *Matlab* koristi Toeplitzova matrica.

Sljedeća bitna stavka kod implementacije Laguerreovih filtera jest koji stupanj, tj. koliko ortogonalnih funkcija je potrebno za zadovoljavajuću aproksimaciju neke funkcije. Ako se uzme neka funkcija odziva  $h(t)$  koja se može prikazati kao

$$h(t) = c_1 l_1(t) + c_2 l_2(t) + \cdots + c_i l_i(t) + \cdots \quad (2.15)$$

tada se ona može približno aproksimirati to bolje što se uzima veći stupanj tog filtra, odnosno veći broj ortogonalnih funkcija. Naravno ta konvergencija vrijedi samo uz uvjet da je faktor skaliranja  $p > 0$ . Isto tako ako je funkcija  $h(t)$  poznata, tada se optimalni koeficijenti  $c_i, i = 1, 2, \dots, N$  mogu odrediti minimiziranjem funkcije cilja

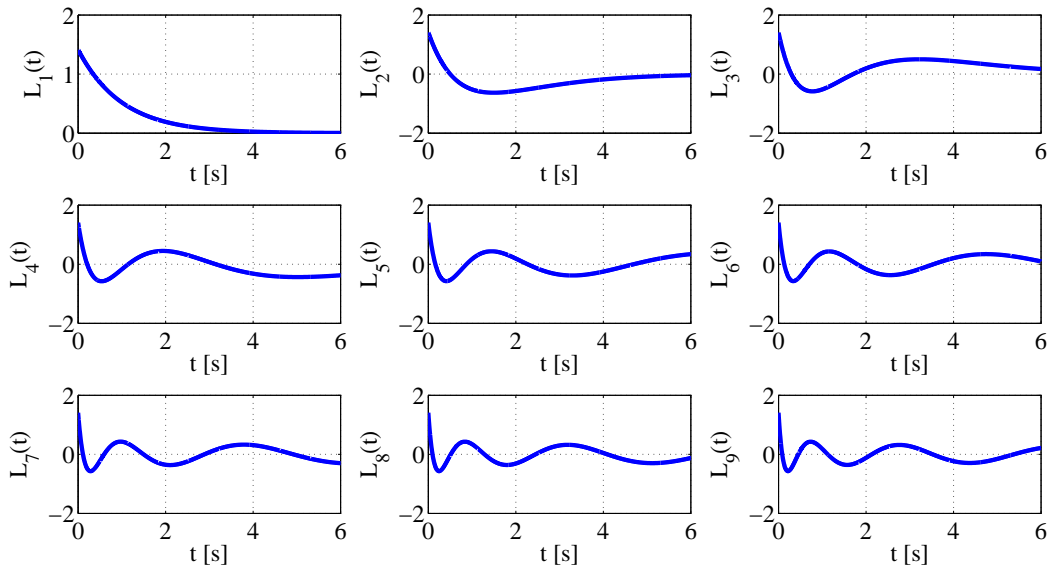
$$J = \int_0^\infty (h(t) - \sum_{i=1}^N c_i l_i(t))^2 dt. \quad (2.16)$$

U ostalim slučajevima gdje neka funkcija odziva nije eksplicitno zadana, koriste se neke druge metode za određivanje koeficijenata  $c_i$ . Time se bavi područje prediktivnog upravljanja koristeći Laguerreove funkcije.

Za konačan broj  $N$  i faktor skaliranja  $p > 0$ , integral kvadrata pogreške između funkcije  $h(t)$  i Laguerreovih funkcija koje je aproksimiraju je definiran kao

$$\int_0^\infty (h(t) - \sum_{i=1}^N c_i l_i(t))^2 dt = \sum_{i=N+1}^\infty c_i^2. \quad (2.17)$$

Za određeni broj ortogonalnih funkcija  $N$ , faktor skaliranja  $p$  se može optimizirati u odnosu na integral kvadrat greške tako da se maksimizira  $\sum_{i=1}^N c_i^2$ . Na sljedećoj slici prikazane su Laguerreove funkcije do devetog stupnja. Naravno što bi se veći stupanj uzimao u obzir, to bi i reprezentacija signala bila preciznija.

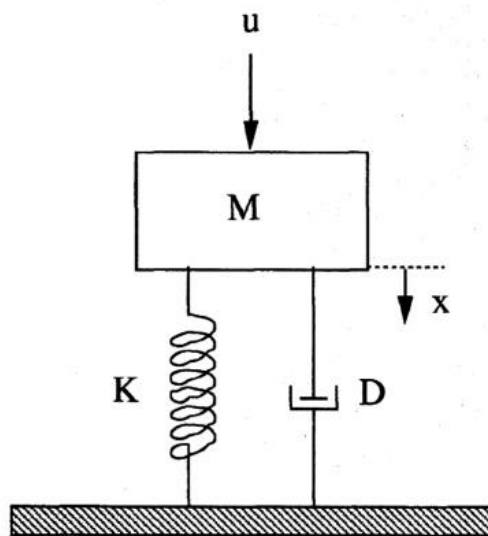


Slika 2.1: Prikaz Laguerreovih funkcija do stupnja  $N = 9$

# 3 | Adaptivno upravljanje primjenom Laguerreovih filtera

## 3.1. Adaptivno upravljanje MDS sustava

Klasično adaptivno upravljanje podrazumijeva asimptotsko praćenje vremenski promjenjivog referentnog signala, uz pretpostavku nepoznatih parametara modela. Za razmatranje MDS sustava unutar ovog rada pretpostavit će se da su svi parametri modela poznati, dok se jedino vrši estimacija koeficijenata nekog vanjskog poremećaja.



Slika 3.1: Dinamički sustav drugog reda (MDS sustav) [4]

U većini dinamičkih sustava ti poremećaji su zapravo neke periodičke funkcije poput

sinusa i cosinusa pa se može primijeniti *repetitive control* ili ortogonalne funkcije beskonačnih dimenzija. Postavlja se pitanje kako se pak onda eliminira neki konačni poremećaj poput Gaussiana. Upravo u toj situaciji se koriste Laguerreove funkcije čija je suma ortogonalnih funkcija konačna i koje savršeno interpretiraju takve signale. Za neki vanjski poremećaj uzeti će se neka Gaussian funkcija, a isto tako u drugome slučaju za poremećaj će se uzeti neka funkcija koja je zapravo superpozicija po Laguerreovim funkcijama sa proizvoljnim koeficijentima. Naravno dekompozicija obje te funkcije vršiti će se po Laguerreovim funkcijama.

Izvod zakona adaptacije MDS sustava uz poznate parametre sustava kako slijedi [5]. Dinamika MDS sustava se zapisuje kao

$$m\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = u(t) + d_{ext}(t) \quad (3.1)$$

gdje su:

- $m$  - masa
- $D$  - koeficijent prigušnice
- $K$  - konstanta opruge
- $u(t)$  - upravljačka varijabla
- $d_{ext}(t)$  - vanjski poremećaj.

Da bi se izveo adaptivni zakon vođenja, prvo se mora dinamički model drugog reda transformirati u ekvivalentni model prvog reda. Najprije se izvode standardne jednadžbe pogreške. Pogreška vođenja definirana je s  $\tilde{x} = x - x_d$ , tako da vrijedi  $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_d$  i  $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d$ . Ako se iz navedenih jednadžbi izluči  $\dot{x} = \dot{\tilde{x}} + \dot{x}_d$  i  $\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d$  te uvrsti u (3.1), dobiva se

$$m\ddot{\tilde{x}} + m\ddot{x}_d + D\dot{x} + Kx = u + d_{ext}. \quad (3.2)$$

Uvodi se nova, tzv. sliding varijabla

$$r = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x} \quad (3.3)$$

tako da vrijedi  $\dot{r} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda\dot{\tilde{x}}$ . Ako se iz toga tada izluči  $\ddot{\tilde{x}} = \dot{r} - \lambda\dot{\tilde{x}}$  te uvede supstitucija

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}_d) = m\ddot{x}_d - m\lambda\dot{\tilde{x}}_d + D\dot{x} + Kx \quad (3.4)$$

tada se uvrsti u (3.2) i dobiva

$$m\dot{r} + f(x, \dot{x}, \ddot{x}_d) = u + d_{ext}. \quad (3.5)$$

Supstitucija (3.4) je uvedena zbog toga jer su nam parametri sustava poznati, pa nije potrebno vršiti njihovu estimaciju. Isto tako uvodi se zbog kompaktnosti zapisa. Potom se može uvesti i totalni poremećaj kod kojeg se osim vanjskog poremećaja, u obzir uzima i interni poremećaj. Pošto su parametri sustava poznati, kao interni poremećaj se zapravo uzima interna dinamika sustava prema

$$d_{int}(t) = -f(x, \dot{x}, \ddot{x}_d) \quad (3.6)$$

pri čemu se tada može ukupni ili totalni poremećaj zapisati kao zbroj internog i eksternog poremećaja

$$d(t) = d_{ext}(t) + d_{int}(t). \quad (3.7)$$

Totalni poremećaj se reprezentira u obliku sume Laguerrovih funkcija

$$d(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i L_i(t). \quad (3.8)$$

Potom se vrši uvrštavanje ukupnog poremećaja u (3.5) pa se dobiva

$$m\dot{r} = u(t) + d(t). \quad (3.9)$$

Nakon definiranja ukupnog poremećaja, izabire se zakon upravljanja  $u$

$$u = -K_p r - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i L_i(t) \quad (3.10)$$



gdje su:

- $K_p$  - pojačanje regulatora
- $\hat{a}_i$  - estimirani koeficijenti Laguerreovih funkcija
- $L_i(t)$  - Laguerreove funkcije.

Još se također uvodi i pogreška estimacije koeficijenata Laguerreovih funkcija  $\tilde{a}_i = a_i - \hat{a}_i$ . Pa se tako nakon uvrštavanja zakona upravljanja (3.10) i ukupnog poremećaja (3.8) u samu dinamiku sustava (3.9) dobiva sljedeće

$$m\dot{r} = -K_p r + \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i L_i(t). \quad (3.11)$$

Sljedeći korak je konačno određivanje adaptivnog zakona podešavanja parametara koji će omogućiti asimptotsku stabilizaciju dinamičkog sustava (3.1). Navedeni zakon podešavanja parametara odrediti će se na temelju Lyapunovljeve analize stabilnosti. Ako se izabere sljedeća Lyapunovljeva funkcija

$$V = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{2} \sum \gamma_i \tilde{a}_i^2 \quad (3.12)$$

pri čemu je  $\gamma_i$  parametar adaptacije koji uvelike utječe na asimptotsku stabilnost odziva sustava što će se moći vidjeti kasnije u simulacijskim rezultatima.

Deriviranjem navedene Lyapunovljeve funkcije dobiva se

$$\dot{V}(r, \tilde{a}_i) = m r \dot{r} + \sum_{i=1}^N \gamma_i \tilde{a}_i \dot{\tilde{a}}_i. \quad (3.13)$$

Ako je poznato da je  $a_i = \text{const.}$  tada je  $\dot{\tilde{a}}_i = -\dot{\hat{a}}_i$ . Uzimajući to u obzir te daljnim sređivanjem dobiva se

$$\dot{V}(r, \tilde{a}_i) = -K_p r + \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i L_i(t) - \sum_{i=1}^N \dot{\hat{a}}_i \tilde{a}_i \gamma_i. \quad (3.14)$$

Daljnijim množenjem i sređivanjem se dobiva

$$\begin{aligned}\dot{V}(r, \tilde{a}_i) &= -K_p r^2 + \sum_{i=1}^N \left( \tilde{a}_i L_i(t) r - \gamma_i \dot{\tilde{a}}_i \tilde{a}_i \right) \\ &= -K_p r^2 + \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i \left( L_i(t) r - \gamma_i \dot{\tilde{a}}_i \right).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Kako bi se prema Lyapunovu odredila stabilnost sustava, prema definiciji je potrebno da njegova derivacija bude negativno definitna  $\dot{V} \leq 0$ . Pa tako mora vrijediti

$$-K_p r^2 \leq 0\tag{3.16}$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{a}_i \left( L_i(t) r - \gamma_i \dot{\tilde{a}}_i \right) \leq 0.\tag{3.17}$$

Iz (3.15) se može zaključiti da za pojačanje regulatora mora vrijediti  $K_p \geq 0$ , dok se sređivanjem (3.16) dobiva

$$L_i(t) r - \gamma_i \dot{\tilde{a}}_i = 0\tag{3.18}$$

iz čega konačno slijedi zakon adaptacije

$$\dot{\tilde{a}}_i = \frac{1}{\gamma_i} L_i(t) r,\tag{3.19}$$

pri čemu su:

- $\dot{\tilde{a}}_i$  - derivacija estimiranog Laguerreovog koeficijenta
- $\gamma_i$  - slobodan parametar adaptacije
- $L_i(t)$  - Laguerreove funkcije
- $r$  - pomoćna "sliding" varijabla.

Kako bi se konačno vršila implementacija sustava i algoritma upravljanja u *Matlabu* se definiraju:

Laguerreove funkcije za koje vrijedi jednakost:

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{L}(t)$$

gdje je vektor stanja  $\mathbf{L}(t) = [l_1(t) \ l_2(t) \ \dots \ l_n(t)]^T$  i vektor početnih uvjeta  $\mathbf{L}(0) = \sqrt{2}[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ . Isto tako potrebno je definirati matricu  $\mathbf{A}_p$  prema (2.14). Nakon toga vrši se implementacija MDS sustava

$$m\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = u(t) + d_{ext}(t).$$

Potom se definira zakon upravljanja

$$u = -K_p r - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i L_i(t)$$

i u konačnici implementira se zakon adaptivnog podešavanja parametra

$$\dot{\hat{a}}_i = \frac{1}{\gamma_i} L_i(t) r$$

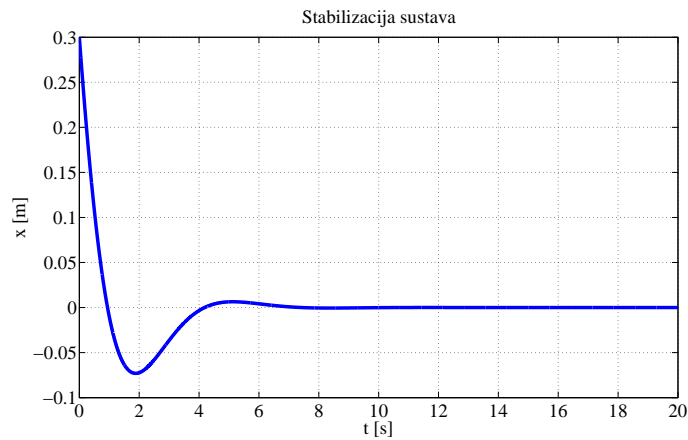
pri čemu su  $r = \ddot{x} + \lambda\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} = x - x_d$  i  $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_d$ .

## 3.2. Adaptivna estimacija poremećaja

Nakon što je određen zakon adaptacije, slijedi implementacija istog koristeći Laguerreove funkcije na MDS sustav. Korištene vrijednosti kod implementacije sustava u *Matlab* su  $m = 2$  kg,  $D = 3$  Ns/m i  $K = 3$  N/m. Na sljedećim slikama biti će prikazani odzivi sustava u odnosu na upravljačku varijablu kao i poremećaj. Mijenjajući neke parametre kako MDS sustava, pa tako i parametera adaptacije, pojačanja regulatora, pola Laguerreovog filtera i sličnih ostalih parametara moći će se uvidjeti korisnost primjene Laguerreovih filtera.

### 3.2.1. Slučaj 1 - Stabilizacija sustava bez poremećaja

Kao što se iz slike 3.2 može vidjeti ako na sustav ne djeluje nikakav eksterni poremećaj te ako također nemamo nikakvu upravljačku varijablu, on će se ustabiliti tj. stabilizirati kroz neko vrijeme. U ovome slučaju postavljen je početni uvjet pozicije  $x = 0.3$  m. Dakle radi se o slučaju bez poremećaja ( $d = 0$ ), sa ciljem stabilizacije oko nule dakle  $x_d = 0$ . Isto tako graf služi kako bi se provjerila ispravnost implementacije MDS sustava.

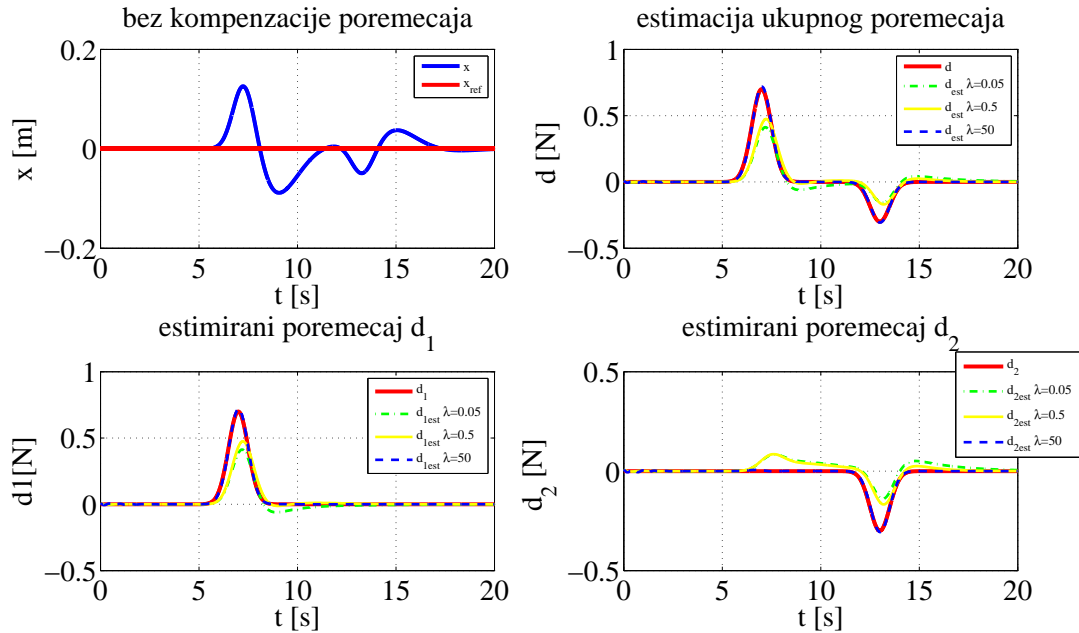


Slika 3.2: Stabilizacija sustava bez poremećaja s početnim uvjetom pozicije

### 3.2.2. Slučaj 2 - Sustav s poremećajem bez kompenzacije poremećaja

U ovome slučaju pokazati će se kako poremećaj utječe na sam MDS sustav ukoliko nema nikakvog mehanizma za kompenzaciju poremećaja (upravljačke varijable). Promatrani poremećaji su zamišljeni kao neki vanjski utjecaji koji su dani Gausovim funkcijama oblika:

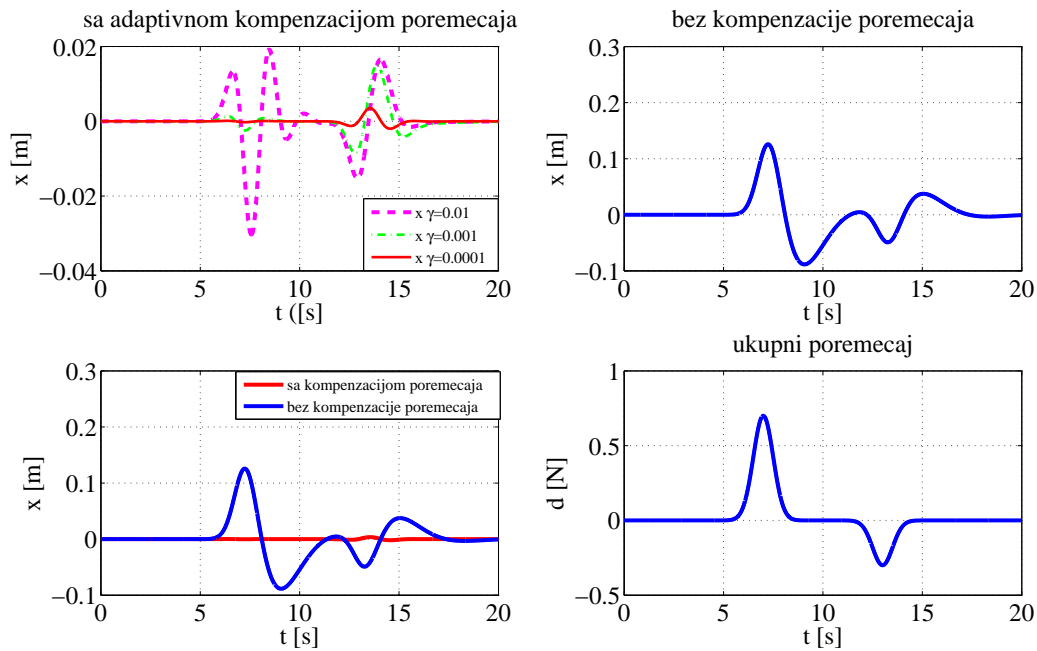
$$\begin{aligned} d_1 &= 0.7e^{-2(t-7)^2}, \\ d_2 &= -0.3e^{-2(t-13)^2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$



Slika 3.3: Sustav s poremećajem bez kompenzatora i estimacija ukupnog poremećaja

Na slici 3.3 prikazano je djelovanje poremećaja na sustav koji se bez kompenzatora stabilizira nakon nekog vremena uz nešto veće oscilacije. Isto tako može se vidjeti kako se vrši *on-line* estimacija oba poremećaja. Na samu estimaciju pojedinačnih poremećaja, pa tako i na kumulativni poremećaj, utječe više faktora i parametara. Parametar koji najviše utječe na estimaciju jest  $\lambda$  koji se nalazi uz sliding parametar  $r$ . Na slici se može vidjeti estimacija poremećaja za tri vrijednosti  $\lambda$ . Za  $\lambda = 0.05$  i  $\lambda = 0.5$  razlika estimiranog i stvarnog poremećaja je nešto veća, dok se za  $\lambda = 50$  estimirani poremećaj poklapa sa stvarnim poremećajem. Najbolja estimacija poremećaja kao i u konačnici odziv sustava sa kompenzatorom biti će prikazani nešto kasnije.

### 3.2.3. Slučaj 3 - Sustav s poremećajem i adaptivnom kompenzacijom poremećaja



Slika 3.4: Adaptivna kompenzacija poremećaja

Kada se kompenzacija poremećaja uzme u obzir, tada se može reći da se vrši upravljanje sustava. U ovome slučaju adaptivnim upravljanjem se poništava djelovanje ukupnog poremećaja. Na slici 3.4 se vidi da prilikom početka djelovanja poremećaja počinje djelovati upravljačka varijabla koja ga poništava. Brzina adaptacije, odnosno točnost kojom se poništava poremećaj najviše ovisi o parametru adaptacije  $\gamma_i$ . Za primjer su uzete tri vrijednosti parametra  $\gamma_i$ . Može se vidjeti da za vrijednost  $\gamma_i = 0.01$  i  $\gamma_i = 0.001$  eliminacija poremećaja je vrlo dobra, no za daljnje razmatranje i kompenzaciju poremećaja najbolje je uzeti  $\gamma_i = 0.0001$ . Lako se može zaključiti da je za čim manji  $\gamma_i$  kompenzacija poremećaja točnija i brža, jer je  $\frac{1}{\gamma_i}$  veći prema (3.13).

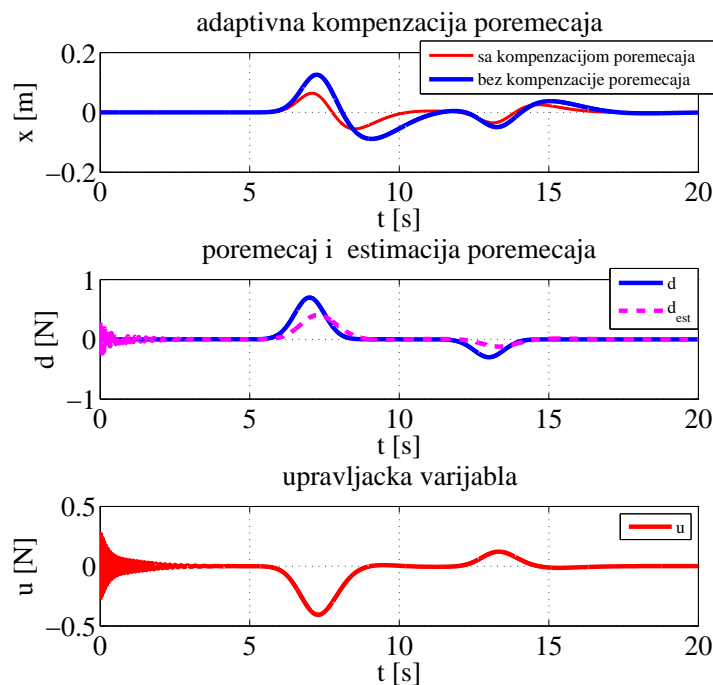
### 3.2.4. Neoptimalno podešeni parametri sustava

Sljedeće se može prikazati kako je sustav osjetljiv na neke loše postavljene parametre koji mogu rezultirati slabijom kompenzacijom poremećaja i pojavom *picking-a*. Loša optimizacija sustava za zadane poremećaje se dobiva ako su postavljeni sljedeći parametri

Tablica 3.1: Parametri neoptimalno podešenog sustava

Parametri sustava			Parametri regulatora			
$m$	$D$	$K$	$n$	$\lambda$	$K_p$	$\gamma_i$
2	3	3	2	1	2	0.1

Osim prethodno navedenih parametara, također je važno napomenuti da su postavljeni početni uvjeti Laguerreovih filtera sa polom  $p = 1$  na način  $\mathbf{L}(0) = \sqrt{2}[1 \ 1 \dots \ 1]^T$ . Isto tako vektor početnih uvjeta kod određivanja estimiranih parametra adaptacije je  $\hat{\mathbf{a}}_i(0) = 0.001[1 \ 1 \dots \ 1]$ . Na slici 3.5 je prikazan odziv tako podešenog sustava kao i estimacija poremećaja.



Slika 3.5: Neoptimalni odziv sustava s pojavom *pickinga*

Adaptivna kompenzacija poremećaja nije tako trenutna kako ćemo vidjeti u optimalno podešenom sustavu. Razlog tome je upravo nešto veći  $\gamma_i$  pa posebnu pozornost kod modeliranja adaptivnog upravljanja treba obratiti na njega. Također broj Laguerreovih filtera  $n$  je nešto manji pa dekompozicija poremećaja nije toliko precizna. Isto tako pojačanje proporcionalnog regulatora  $K_p$  ima važnu ulogu kod modeliranja.

Kod upravljačke varijable se može vidjeti kako dolazi do nešto većih oscilacija u prvih nekoliko sekundi koje se tada postupno stabiliziraju. Taj fenomen kod upravljanja i regulacije se naziva još i *picking*. Generalno se taj fenomen javlja kod svih dinamičkih regulatora uključujući i observe stanja. To je zapravo posljedica početne razlike početnih uvjeta. Ovdje je za ilustraciju upravo to demonstrirano tako da su uvelike promijenjeni početni uvjeti kod integracije zakona adaptacije i Laguerreovih filtera.

### 3.2.5. Optimalno podešeni parametri sustava

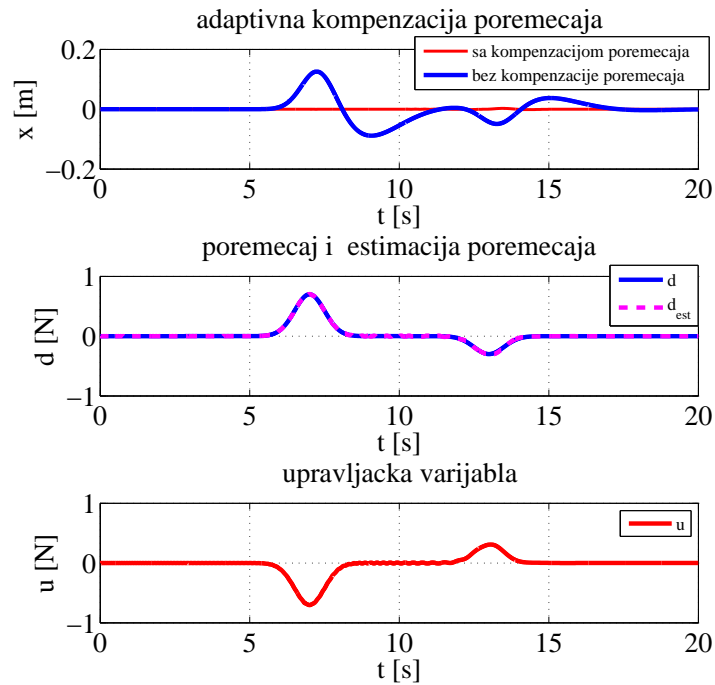
Za razliku od prethodnog slučaja, ovdje se iskazuje koji su idealni parametri kako bi se dobio čim bolji odziv pozicije MDS sustava kao i najbolja estimacija poremećaja. Optimiziran sustav za zadane poremećaje se dobiva ako su postavljeni sljedeći parametri

Tablica 3.2: Parametri optimalno podešenog sustava

Parametri sustava			Parametri regulatora			
$m$	$D$	$K$	$n$	$\lambda$	$K_p$	$\gamma_i$
2	3	3	10	8	5	0.001

Također isto kao i u prošlom slučaju zadani su početni uvjeti  $\mathbf{L}(0) = \sqrt{2}[1 \ 1 \dots \ 1]^T$  i  $\hat{\mathbf{a}}_i(0) = 0.1[1 \ 1 \dots \ 1]$ . Na slici 3.6 je prikazan odziv tako podešenog sustava kao i estimacija poremećaja.



Slika 3.6: Optimalni odziv sustava bez pojave *pickinga*

Kompenzacija poremećaja je skoro pa trenutna za što je uzrok smanjenje iznosa parametra adaptacije. Estimacija poremećaja se poklapa sa samim poremećajem, jer su podešeni idealni parametri pojačanja regulatora  $K_p$  kao i povećanje reda Laguerreovih filtera. Samim time dekompozicija poremećaja je bolja i preciznija. Jedna od naizgled najvećih promjena kod optimalnog sustava jest i eliminacija *pickinga* koja se dobila izjednačavanjem početnih uvjeta.

# 4 | Estimacija derivacije signala primjenom Laguerreovih filtera

## 4.1. Adaptivna estimacija brzine sustava

Kod estimacije poremećaja uzeto je obzir da je brzina mjerljiva, što u većini realnih dinamičkih sustava nije moguće. Najčešće se brzina dobiva indirektno, deriviranjem pozicije sustava u vremenu. Za to postoje i koriste se razni algoritmi i estimatori brzine. Ovdje je zanimljivo što se istovremeno za estimiranje poremećaja, mogu koristiti Laguerreovi filteri za estimaciju brzine. Princip za implementaciju je sličan kao i kod estimacije poremećaja.

Kako bi se implementirao filter za estimaciju brzine, prvo se definira neki sustav prvog reda

$$\dot{z} + \mu z = x(t) + w(t) \quad (4.1)$$

pri čemu je  $\mu$  parametar sustava, a  $w(t)$  neka pomoćna upravljavčka varijabla i  $x(t)$  pozicija sustava koja je u ovom slučaju ekvivalentna vanjskom poremećaju iz prethodnog poglavlja

$$x(t) = d_{ext}(t). \quad (4.2)$$

Također, pošto se svaki signal može prikazati preko Laguerreovih funkcija, pa tako se onda i pozicija  $x(t)$  može dekomponirati na taj način

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i L_i(t). \quad (4.3)$$

Ako je poznato da vrijedi  $\tilde{b}_i = b_i - \hat{b}_i$  iz čega slijedi da je  $\dot{\tilde{b}}_i = -\dot{\hat{b}}_i$  tada se pomoćna upravljačka varijabla prikazuje kao

$$w = - \sum_{i=1}^N \hat{b}_i L_i(t) \equiv -\hat{x}. \quad (4.4)$$

Može se lako zaključiti da je pomoćna upravljačka varijabla ekvivalentna negativnoj estimiranoj poziciji što će se uzeti u obzir kod određivanja estimirane brzine. Daljnjim uvrštavanjem (4.3) i (4.4) u (4.1) se dobiva

$$\dot{z} = -\mu z + \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i L_i(t). \quad (4.5)$$

Potom se određuje adaptivni zakon podešavanja parametara pomoćnog sustava. Slično kao i kod (3.19) određivanje tog parametra se vrši koristeći Lyapunovljevu analizu stabilnosti. Izabire se sljedeća Lyapunovljeva funkcija

$$V = \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \eta_i \tilde{b}_i^2 \quad (4.6)$$

pri čemu je  $\eta_i$  pomoćni parametar adaptacije. Deriviranjem Lyapunovljeve funkcije dobiva se

$$\dot{V}(z, \tilde{b}_i) = z\dot{z} - \sum_{i=1}^N \eta_i \tilde{b}_i \dot{\tilde{b}}_i. \quad (4.7)$$

Daljnjim sređivanjem i uvrštavanjem u (4.5) dobiva se

$$\begin{aligned} \dot{V}(z, \tilde{b}_i) &= z \left( -\mu z + \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i L_i(t) \right) - \sum_{i=1}^N \eta_i \tilde{b}_i \dot{\tilde{b}}_i \\ &= -\mu z^2 + \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i \left( z L_i(t) - \eta_i \dot{\tilde{b}}_i \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Kako bi se prema Lyapunovu odredila stabilnost sustava, prema definiciji je potrebno da njegova derivacija bude negativno definitna  $\dot{V} \leq 0$ . Pa tako mora vrijediti

$$-\mu z^2 \leq 0 \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{b}_i \left( z L_i(t) - \eta_i \dot{\tilde{b}}_i \right) \leq 0. \quad (4.10)$$

Iz (4.9) se može zaključiti da mora vrijediti  $\mu \geq 0$ , dok se sređivanjem (4.10) dobiva

$$zL_i(t) - \eta_i \dot{\hat{b}}_i = 0 \quad (4.11)$$

iz čega konačno slijedi pomoćni zakon adaptacije

$$\dot{\hat{b}}_i = \frac{1}{\eta_i} L_i(t) z \quad (4.12)$$

pri čemu su:

- $\dot{\hat{b}}_i$  - derivacija estimiranog Laguerreovog koeficijenta kod estimacije brzine
- $\eta_i$  - slobodan parametar adaptacije
- $L_i(t)$  - Laguerreove funkcije.

Ako se (4.4) i (4.12) prikažu u matričnom obliku kao

$$\hat{x} = \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{L} \quad (4.13)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{L} z \quad (4.14)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{b}} = [\hat{b}_1 \ \hat{b}_2 \ \cdots \ \hat{b}_N]^T$ , a matrica  $\mathbf{\Gamma}$  je oblika

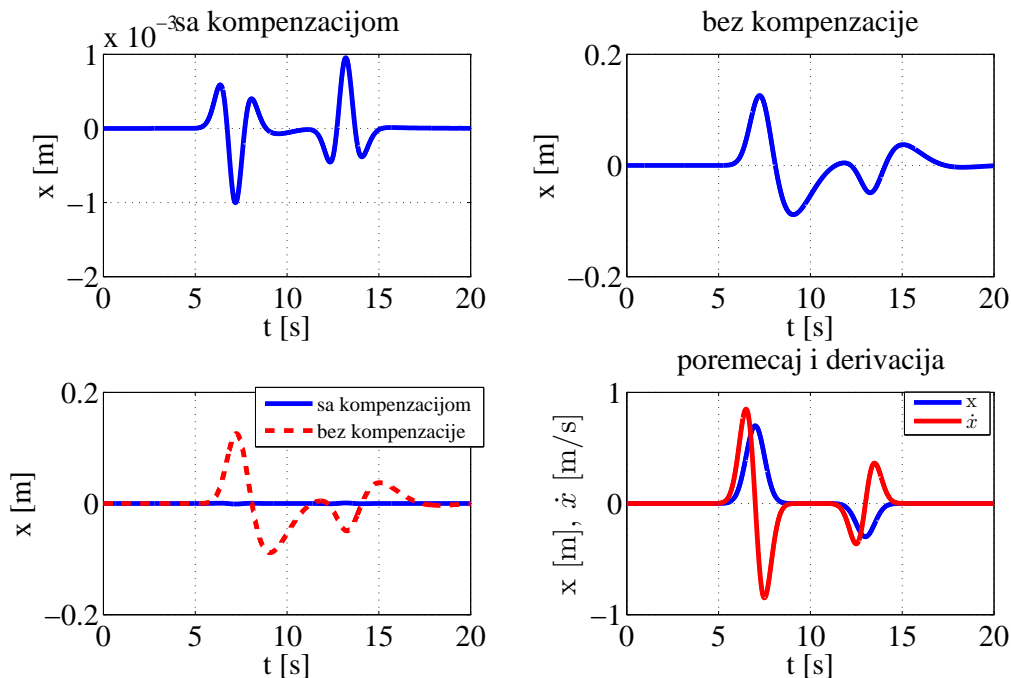
$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\eta_i} \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}^T, \quad (4.15)$$

tada se deriviranjem (4.13) može odrediti estimacija brzine

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)} &= \dot{\hat{\mathbf{b}}}^T \mathbf{L} + \hat{\mathbf{b}}^T \dot{\mathbf{L}} \\ &= z(\mathbf{\Gamma} \mathbf{L})^T \mathbf{L} + \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{A}_p \mathbf{L} \\ &= z \mathbf{L}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{L} + \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{A}_p \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

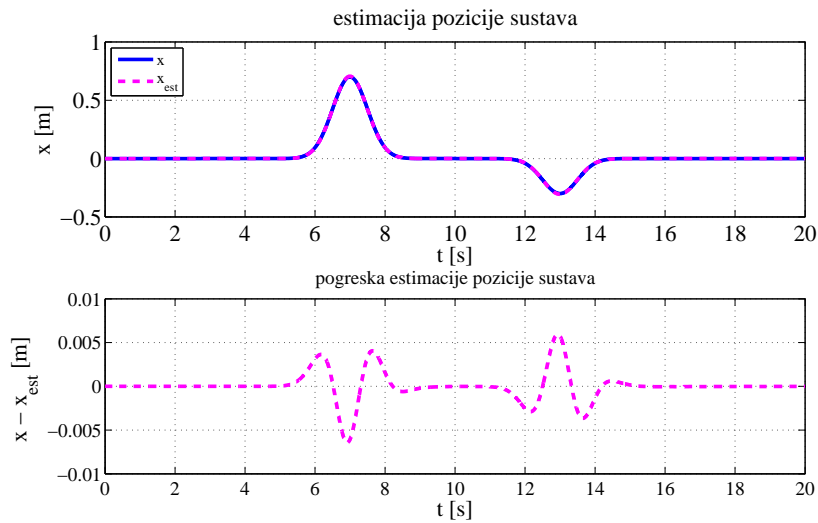
Nakon što je dobivena estimirana brzina ona se direktno implementira u sliding varijablu  $r = \hat{x}^{(1)} + \lambda \hat{x}$  pri čemu je bila poznata samo pozicija sustava. Dakle kao što je i u realnim dinamičkim sustavima slučaj, brzina nije mjerljiva već se estimira na temelju samo poznate pozicije.

Implementirajući izvod za estimaciju brzine, vrši se njezina estimacija. Za razliku od prethodnog poglavlja gdje je prikazana dobra i loša optimizacija sustava, ovdje će se prikazati samo dobra optimizacija za već navedene optimalne parametre regulatora. Pa tako odgovarajući odzivi slijede na slici 4.1.



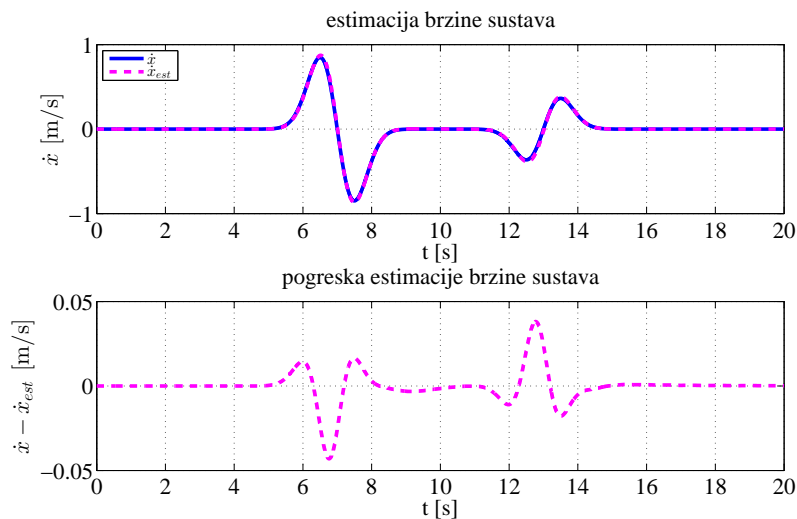
Slika 4.1: Odziv sustava te prikaz ulaznog signala i njegove derivacije

Pošto je za poremećaj uzeta nešto veća amplituda može se vidjeti da stabilizacija sustava bez kompenzatora nešto dulja i sa većim amplitudama. Međutim primjenjujući kompenzator sa navedenim parametrima, može se vidjeti da je eliminacija poremećaja skoro pa trenutna. Također, prikazan je ulazni signal  $x(t)$  kao pozicija te njegova derivacija koja zapravo služi za dekompoziciju preko Laguerreovih funkcija kako bi se estimirala brzina.



Slika 4.2: Estimacija pozicije i pogreška estimacije

Prema slici 4.2 zaključuje se da je estimacija ulaznog signala ili pozicije vrlo precizna za navedene parametre. Također iznos greške je i više nego zadovoljavajući u odnosu na zadani ulazni signal. Kao što je već prije rečeno, loše podešeni parametri i različitost početnih uvjeta mogu doprinijeti lošoj estimaciji i pojavi *pickinga*.



Slika 4.3: Estimacija brzine i pogreška estimacije

Isto kao i za sam ulazni signal, estimacija derivacije tog signala odnosno brzina je isto zadovoljavajuća. Greška je također minimalna u odnosu na amplitudu.

## 4.2. Implementacija estimacije poremećaja i brzine na adaptivno upravljanje MDS sustava

Nakon što se pokazalo da su estimacije poremećaja kao i estimacija brzine uz samo poznatu poziciju vrlo precizne kod mehaničkih sustava zasebno, slijedi njihova zajednička implementacija na adaptivno upravljanje takvim sustavima. Prvo će se prikazati odziv sustava kojemu je zadaća stabilizacija sustava, dakle referentna trajektorija jest  $x_d = 0$ . Isto tako dodana će biti i PD regulacija kako bi se mogla vidjeti prednost korištenja Laguerreovih filtera. Nakon toga će za bolju ilustraciju biti prikazan i odziv na neku periodičku referentnu trajektoriju poput sinus funkcije. Također biti će promijenjeni i poremećaji u smislu da će se povećati amplitude kako bi se lakše moglo vidjeti koji se problemi mogu javiti kod takvog upravljanja.

### 4.2.1. Slučaj 1 - Slijeđenje referentne trajektorije $x_d = 0$ s optimalnim parametrima

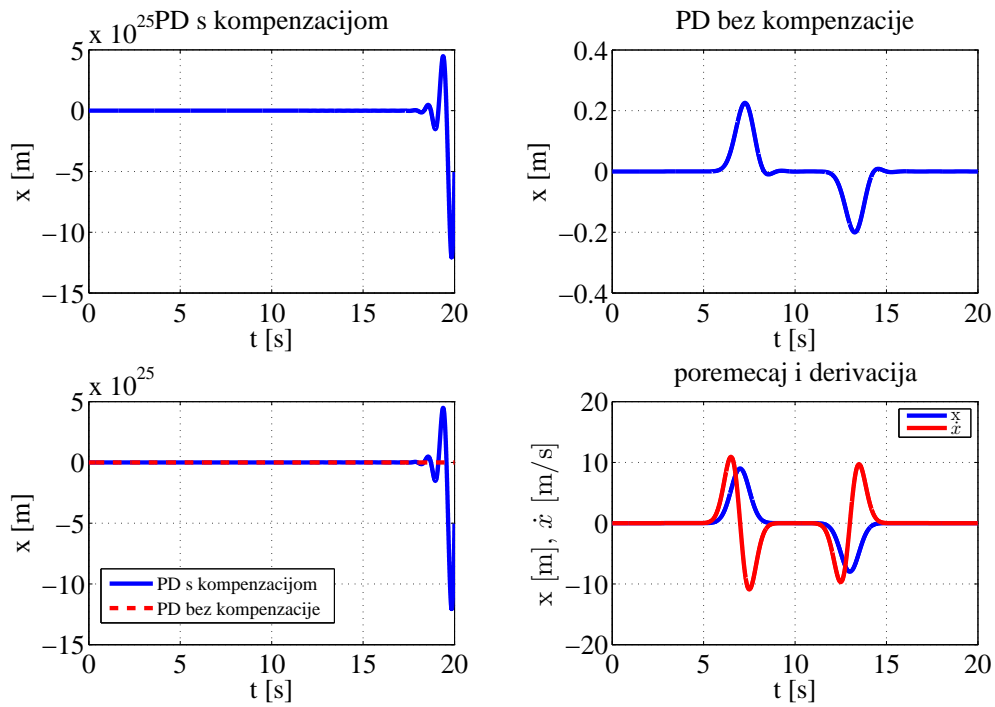
Parametri sustava kao i adaptivnog regulatora koji se koriste su iz tablice 3.2. Isto tako potrebno je osim osnovnih implementacija algoritama estimacije i upravljanja definirati sliding varijablu  $r$  kod koje se uzima u obzir da je pozicija mjerljiva, a brzina estimirana pa vrijedi

$$r = \hat{x}^{(1)} + \lambda x. \quad (4.17)$$

Također kako bi se kasnije mogle lakše uvidjeti neke razlike u samim grafovima, povećane su amplitude poremećaja

$$\begin{aligned} d_{01} &= 9e^{-2(t-7)^2} \\ d_{02} &= -8e^{-2(t-13)^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

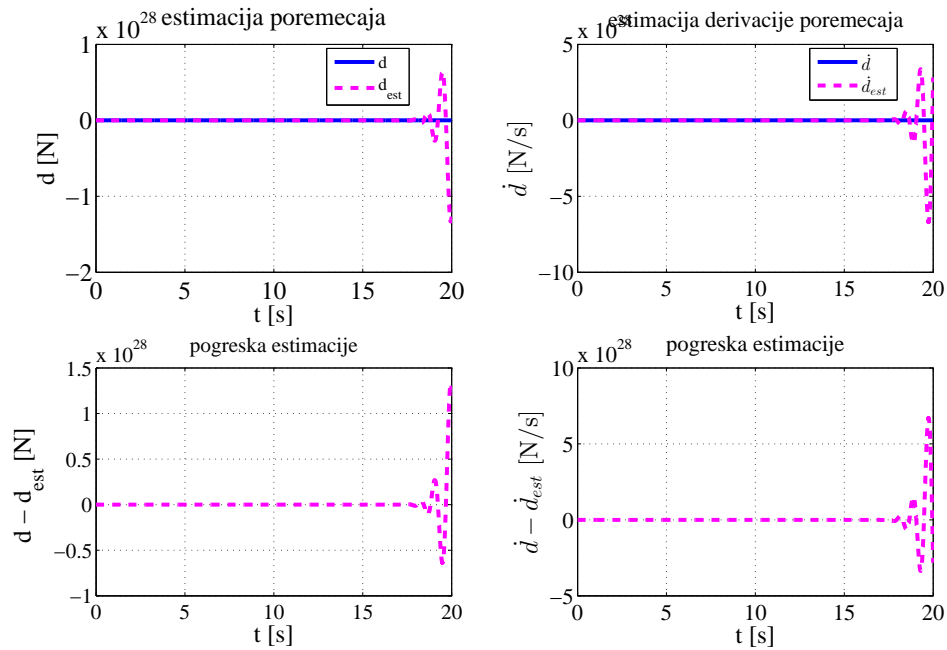
Na sljedećim slikama može se vidjeti kakva je razlika odziva mehaničkog sustava sa samim PD regulatorom te ako se uključi adaptivno upravljanje. Isto tako prikazane su estimacije poremećaja i brzine kao i njihove greške.



Slika 4.4: Odziv sustava s PD regulatorom sa i bez adaptivne kompenzacije

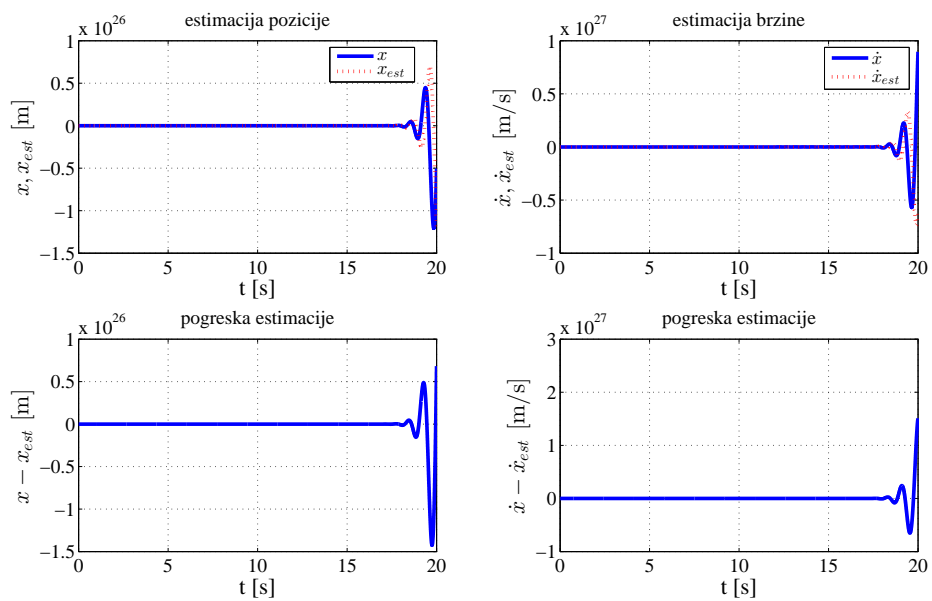
Odziv sustava bez adaptivne kompenzacije je zadovoljavajući, dakle očekivani za PD regulaciju. No ako se primjeni adaptivno upravljanje odziv sustava je iznimno nezadovoljavajući pri čemu poprima ekstremne vrijednosti nekarakteristične za navedeni model MDS sustava.





Slika 4.5: Estimacija poremećaja i njegove derivacije s prikazom pogreške

Što se tiče estimacije poremećaja i derivacije poremećaja, nezadovoljavajuće je u odnosu na sliku 3.6 za iste vrijednosti parametara sustava i regulatora.



Slika 4.6: Estimacija pozicije i brzine s prikazom pogreške

Slično kao i kod poremećaja, estimacija pozicije i brzine je vrlo loša u odnosu na sliku 4.2 i sliku 4.3 kod kojih je estimacija iznimno precizna. Vrijednosti odziva sa dodanim adaptivnim upravljanjem pa i estimacije poremećaja i brzine odstupaju u tolikoj mjeri da se čak može reći da je poptuno promašena implementacija algoritama upravljanja ili MDS sustava. Općenito je slučaj da je adaptivno upravljanje osjetljivo na permutaciju regresijske matrice. To obično ima za uzrok neku veću regulacijsku pogrešku (odstupanje), no u ovom slučaju dolazi do osjetne destabilizacije sustava. U sljedećem slučaju će biti prikazano kako utječe promjena parametara na odziv i estimaciju.

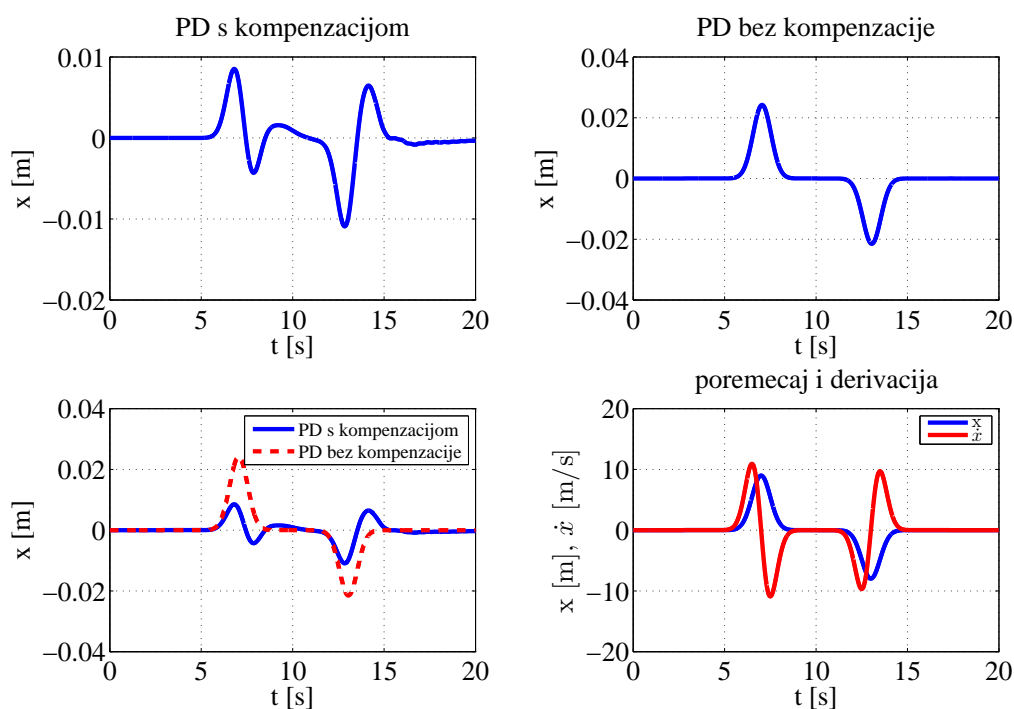
#### 4.2.2. Slučaj 2 - Slijeđenje referentne trajektorije $x_d = 0$ s promjenom optimalnih parametara

Kako je adaptivno upravljanje vrlo osjetljivo, sljedeće će se prikazati kako utječe promjena parametara koji su kod zasebne estimacije poremećaja i brzine pa i odziva sustava bili optimalni. Što se tiče parametara sustava oni su ostali nepromijenjeni, dok se vršila promjena parametara adaptivnog regulatora. Za razliku od prethodnog slučaja, ovdje se iskazuje koji su idealni parametri kako bi se dobio čim bolji odziv pozicije MDS sustava kao i najbolja estimacija poremećaja. Optimiziran sustav za zadane poremećaje se dobiva ako su postavljeni sljedeći parametri

Tablica 4.1: Promijenjeni parametri optimalno podešenog sustava

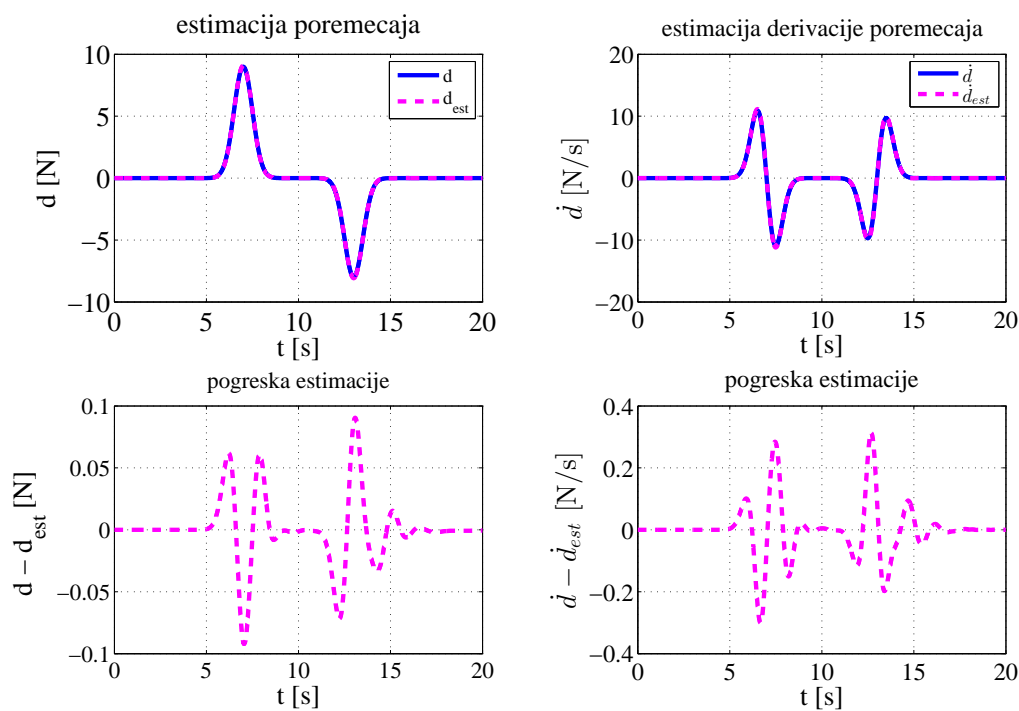
Parametri sustava			Parametri regulatora				
$m$	$D$	$K$	$n$	$\lambda$	$K_p$	$\gamma_i$	$\mu$
2	3	3	10	25	15	0.01	0.5

Nakon iteracije sa različitim parametrima regulatora za navedene su postignuti najbolji rezultati.



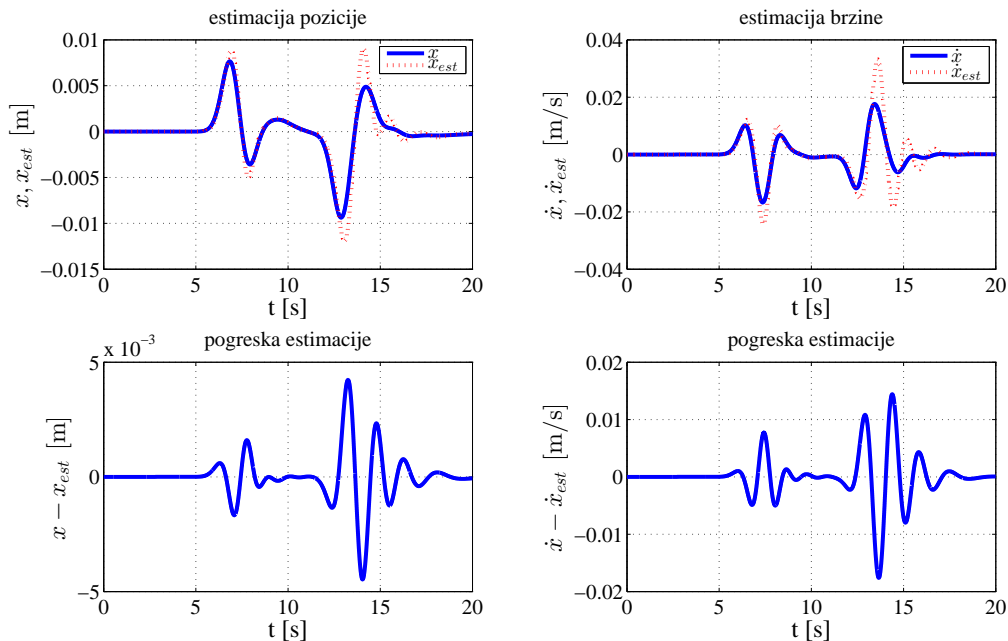
Slika 4.7: Odziv sustava s PD regulatorom sa i bez adaptivne kompenzacije koristeći promijenjene parametre adaptivnog regulatora

Na slici 4.7 je vidljivo kako se promjenom parametra adaptivnog regulatora dobiva zadovoljavajući odziv. Također, ako bi se povećalo proporcionalno pojačanje regulatora  $K_p$  odziv bi bio još i bolji no tada se ne bi vidjela razlika u korištenju Laguerreovih filtera u odnosu na PD regulaciju. Isto tako smanjivanjem parametra  $\gamma_i$  dobila bi se veća točnost koristeći adaptivno upravljanje, no zbog njegove osjetljivosti dolazi do destabilizacije sustava.



Slika 4.8: Estimacija poremećaja i njegove derivacije s prikazom pogreške koristeći promijenjene parametre adaptivnog regulatora

Estimacija poremećaja i njegove derivacije je vrlo precizna, upravo kao i kod istih estimacija koje su se vršile zasebno od estimacije pozicije i brzine. Greške su vrlo malene pa nije potrebno dodatno mjenjati parametre kako bi se smanjile.



Slika 4.9: Estimacija pozicije i brzine s prikazom pogreške koristeći promijenjene parametre adaptivnog regulatora

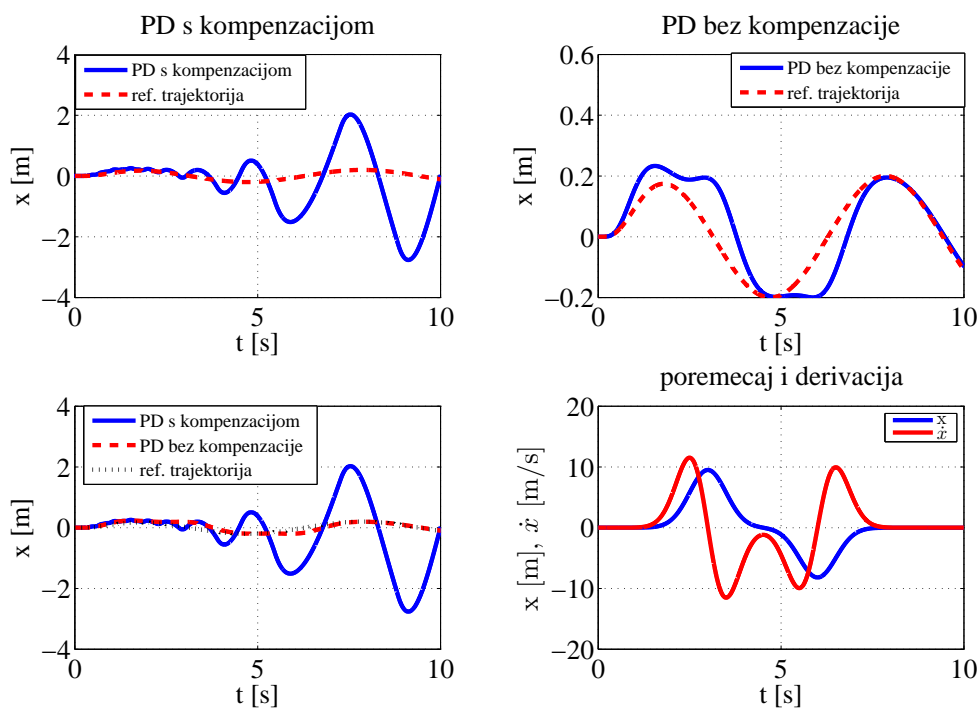
Estimacije pozicije i brzine možda nisu toliko precizne kao estimacija poremećaja, ali se nalaze u zadovoljavajućim okvirima. Bolja estimacija bi se postigla smanjivanjem parametra  $\gamma_i$  no to bi dovelo do destabilizacije sustava. Isto tako kroz iteraciju parametra je ustanovljeno da vrijednost parametra sliding površine  $r$  mora biti manja od 15 kako bi rezultati bili zadovoljavajući. Važno je napomenuti da navedeni parametri vrijede samo za navedeni MDS sustav i zadani poremećaj, dok bi se kod promjene istih morale višiti nove iteracije.

### 4.2.3. Slučaj 3 - Slijeđenje referentne trajektorije $x_{d1}$ s promjenom optimalnih parametra

U ovome slučaju uzima se referentna trajektorija koja garantira nul-vrijednosti u  $t = 0$  do druge derivacije što ima za posljedicu da se ne javlja *picking* kod upravljačke varijable. Ako bi se uzela neka klasična step pobuda, to bi značilo da bi derivacija u  $t = 0$  bila beskonačna pa bi upravljačka varijabla isto tako poprimala visoke vrijednosti.

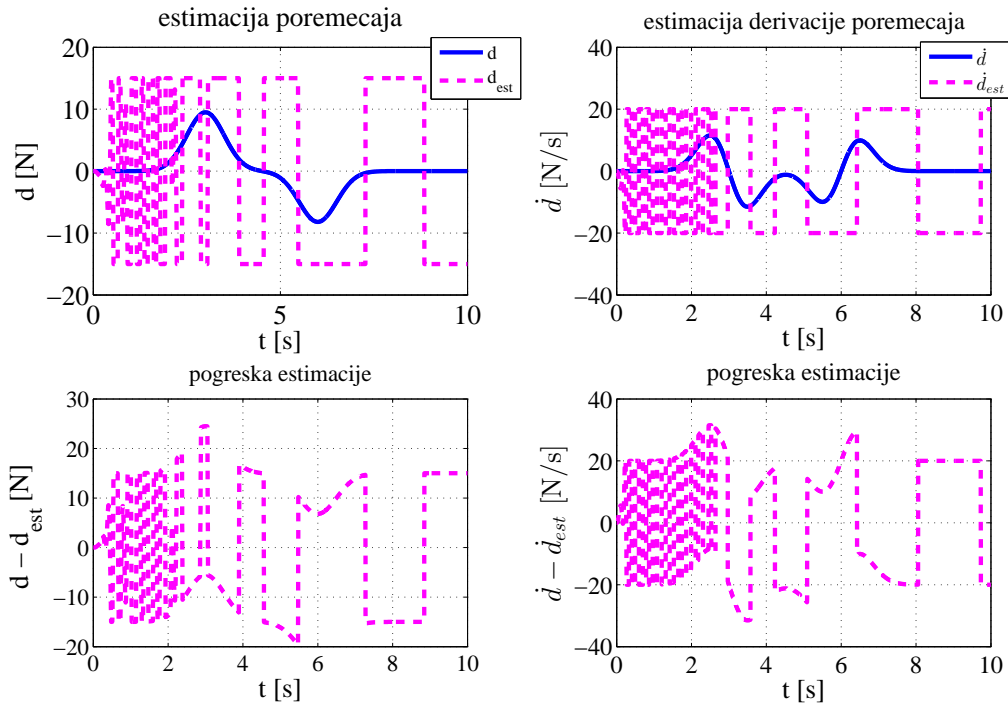
To posebno može biti veoma štetno kod korištenja nekih aktuatora poput elektromotora. Vrijednosti parametra regulatora korištene su iz tablice 3.2. jer nema većih razlika u odzivu i estimaciji ako se promijene. Konkretna referentna trajektorija jest

$$x_{d1} = 0.2 \sin(t)(1 - e^{-2t^4}) \quad (4.19)$$



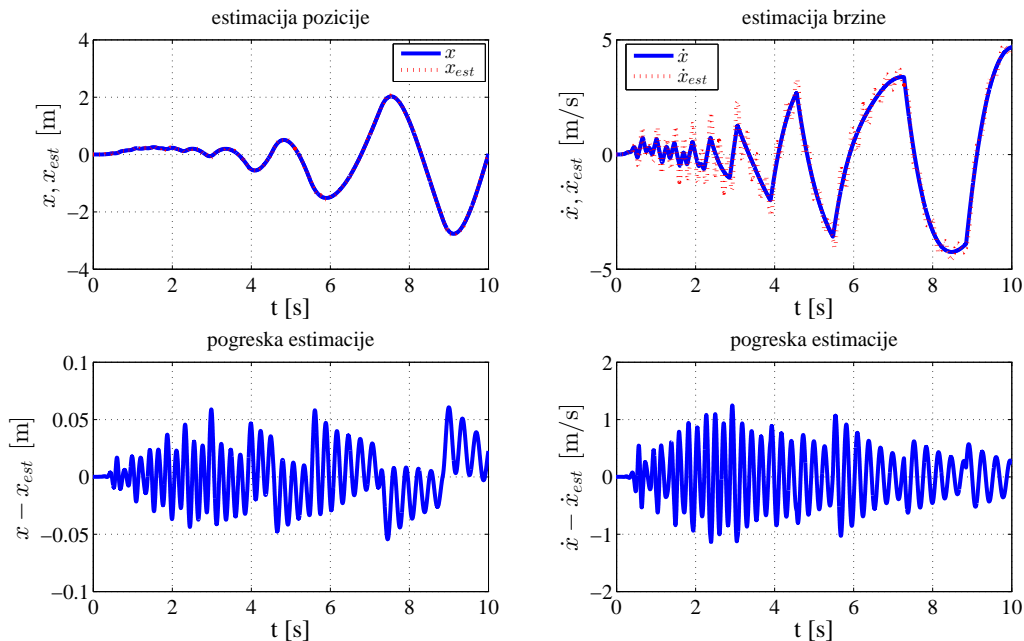
Slika 4.10: Odziv sustava sa PD regulatorom sa i bez adaptivne kompenzacije za referentnu trajektoriju  $x_{d1}$

Prema slici 4.10 može se vidjeti da je PD regulacija vrlo uspješna u slijeđenju referentne trajektorije. Dodavanjem adaptivnog upravljanja dolazi do velikog odstupanja od slijeđenja. To već daje naslutiti da kombinacija adaptivnog upravljanja te estimacije poremećaja i brzine nikako ne daje uspješne rezultate.



Slika 4.11: Estimacija poremećaja i njegove derivacije s prikazom pogreške za referentnu trajektoriju  $x_{d1}$

Estimacija poremećaja i njegove derivacije je totalno promašena, a za ilustraciju je uvedena i saturacija varijable estimiranog poremećaja. Stvarne vrijednosti su daleko veće što se tiče samog odstupanja nego kad je uvedena saturacija.



Slika 4.12: Estimacija pozicije i brzine s prikazom pogreške za referentnu trajektoriju  $x_{d1}$

Što se tiče estimacije pozicije i brzine ona je za razliku od poremećaja vrlo zadovoljavajuća. Referentna trajektorija na neki način služi kao *smoothing* filter koji omogućuje da je derivacija pozicije (brzina) u  $t = 0$  jednaka nuli. To upravo sprječava pojavu *pickinga* bez korištenja funkcije saturacije.

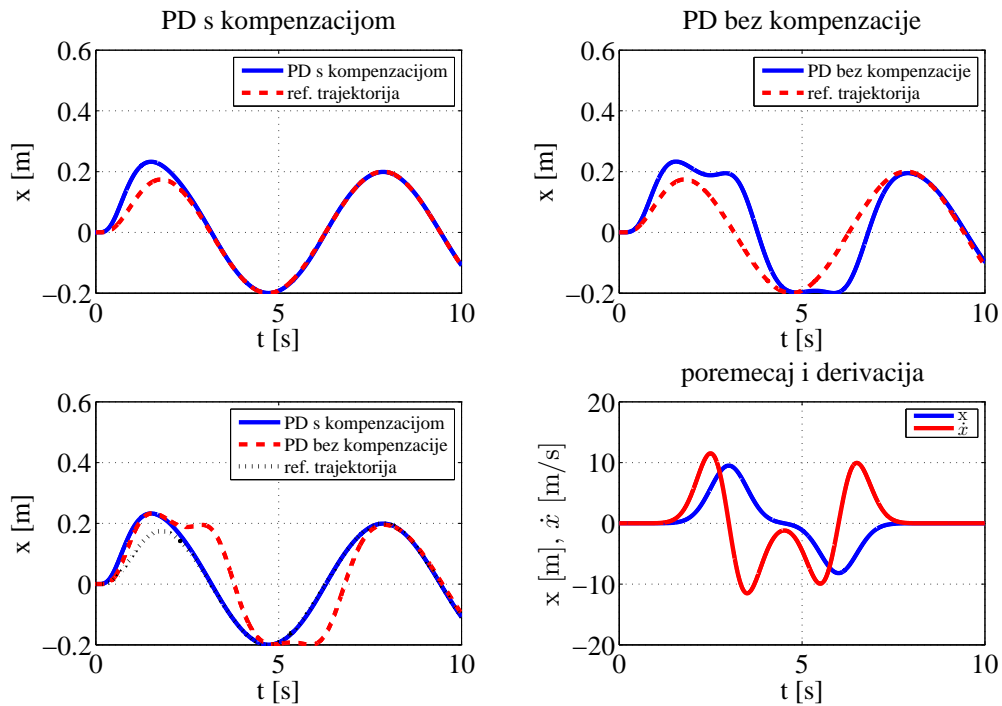
Iz navedenih slika jasno je da kombinacija estimacije poremećaja i brzine ne funkcionira sa adaptivnim Laguerreovim filterima upravo zbog osjetljivosti adaptivnog upravljanja. Zbog toga će se dalje razmatrati da su pozicija i brzina sustava mjerljivi.

### 4.3. Implementacija estimacije poremećaja na adaptivno upravljanje MDS sustava s mjerljivom pozicijom i brzinom

Kako se iz prethodnog poglavlja moglo vidjeti, kombinacija estimirane brzine te poremećaja sa adaptivnim upravljanjem ne daje dobre rezultate. Ako se sada uzme u

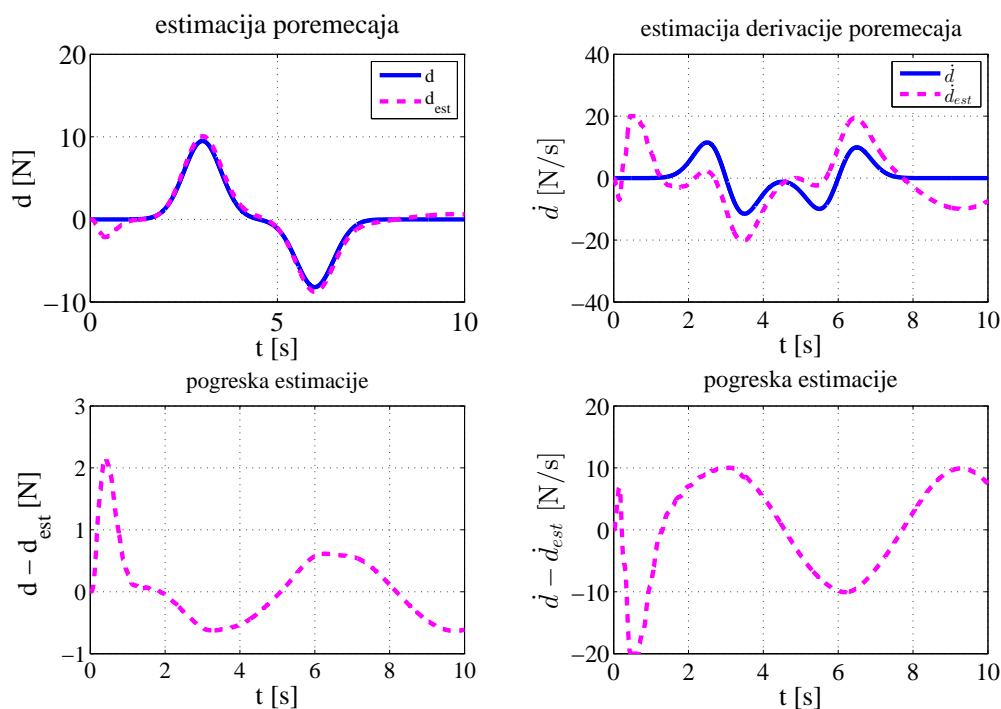


obzir da je uz poziciju mjerljiva i brzina, potrebno je ponovno definirati sliding varijblu  $r$  kao  $r = x^{(1)} + \lambda x$ . Pa tako se u sljedećem slučaju može vidjeti odziv sustava te pripadne estimacije poremećaja, pozicije i brzine za referentnu trajektoriju  $x_{d1}$ .



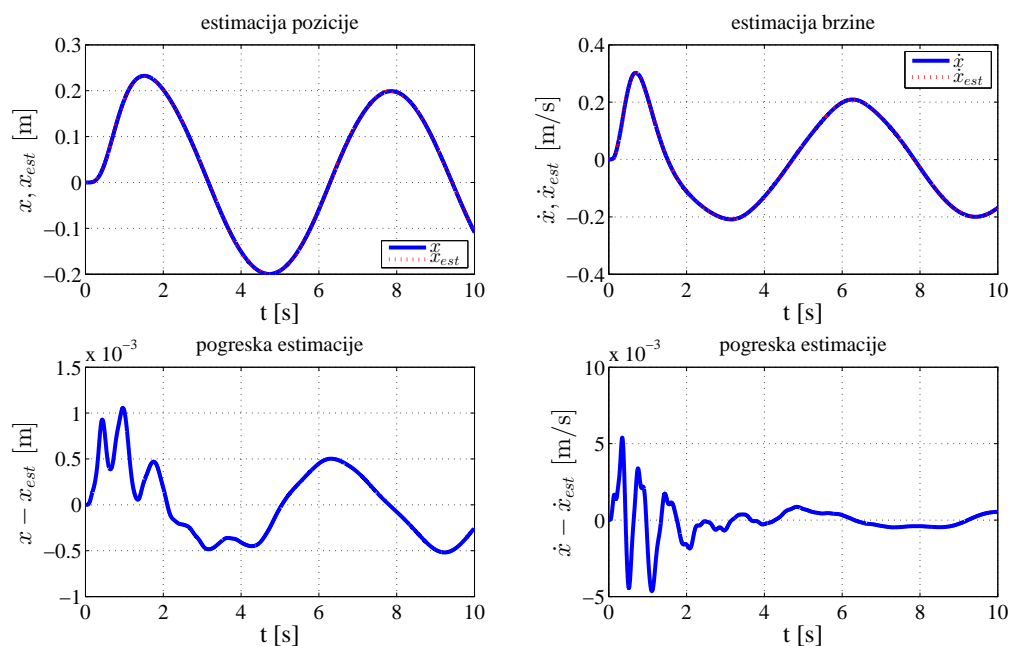
Slika 4.13: Odziv sustava sa PD regulatorom sa i bez adaptivne kompenzacije za referentnu trajektoriju  $x_{d1}$  s mjerljivom pozicijom i brzinom

Na slici 4.13 može se vidjeti kako PD regulacija sa adaptivnom kompenzacijom uhvati referentnu trajektoriju na samome početku i vrši precizno slijeđenje. Sama PD regulacija je na tragu takvog slijeđenja, ali ni približno toliko precizna.



Slika 4.14: Estimacija poremećaja i njegove derivacije s prikazom pogreške za referentnu trajektoriju  $x_{d1}$  s mjerljivom pozicijom i brzinom

Što se same estimacije poremećaja tiče, može se vidjeti da je vrlo precizna uz izuzetak na sam početni dio. To se lako može riješiti namještanjem parametra, no ta razlika u grešci nije tolika da bi to bilo potrebno. Što se pak tiče estimacije derivacije poremećaja, pogreške u estimacije su nešto veće. Upravo zbog toga se stavlja saturacija na varijablu estimacije, jer kod većih amplituda poremećaja može poprimiti velike vrijednosti.



Slika 4.15: Estimacija pozicije i brzine s prikazom pogreške za referentnu trajektoriju  $x_{d1}$  s mjerljivom pozicijom i brzinom

Estimacija pozicije i brzine je iznimna, te su pogreške zanemarivo male.

Ukupno gledajući, pristup kod kojeg su mjerljivi pozicija i brzina u kombinaciji s adaptivnim Laguerreovim filterima daje bolje rezultate i ne utječe na osjetljivost adaptivnog upravljanja u tolikoj mjeri kao u prethodnim slučajevima.

# 5 | Dinamički model kvadkoptera

## 5.1. Uvod i motivacija primjene kvadkoptera

Napredak tehnologije posljednjih godina pridonio je velikom razvoju na području senzorike i mikroracunala. Također, kroz to vrijeme razvijeni su mnogi algoritmi za upravljanje tzv. bespilotnih letjelica (UAV) čime je uporaba od zapravo neke ideje postala svakodnevnica. Mala veličina, nešto niža cijena što se tiče tehnologije koju koriste i lako upravljanje takvih letjelica čine ih pogodnim za široku primjenu. Koriste se za mapiranje prostora, nadzor područja, u poljoprivredi, snimanje u visokoj rezoluciji, dostavi manjih paketa i ostalim raznim primjenama. Ipak, njihov nešto manji dizajn može predstavljati veliki izazov. To se najviše odnosi na dio koji zahvaća elektroniku, pogotovo senzore. Kompaktna struktura tih letjelica može lako biti izložena vremenskim nepravilnostima, pošto se najviše primjenjuju u otvorenom prostoru.

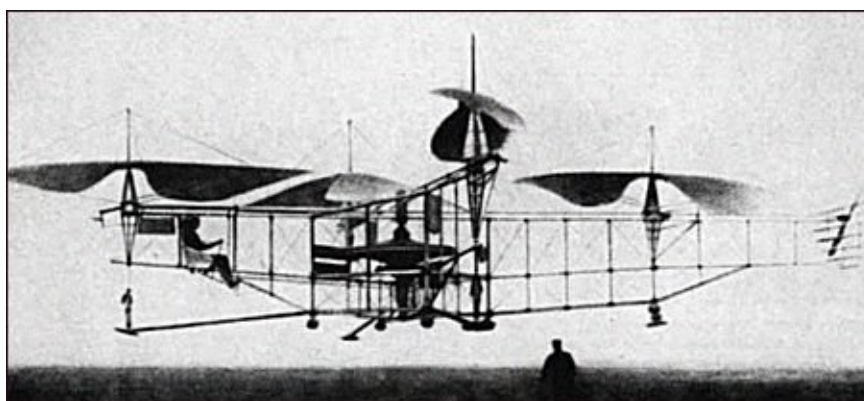
Fundamentalni problem kvadkoptera ili dronova jest taj što se zbog malog raspona krila u pitanje dovodi pouzdano upravljanje, robustnost letjelice te krivo intepretiranje signala zbog njegove zašumljenosti. Upravo je zbog tih problema velika motivacija na razvijanju i unaprijeđenju algoritama za upravljanje kako bi se sa minimalnom greškom mogla slijediti neka trajektorija.

Kako se povećava spektar primjene i kompleksnost tih operacija, tehnike upravljanja se moraju razvijati paralelno s tim. Kroz sam začetak upravljanja, korišteni su jednostavni linearni regulatori koji su zahtijevali minimum procesorske snage. No kako se postavlja zahtjev za čim bržim odzivom na sve složenije dinamičke modele sustava, uobičajene su nelinearne tehnike upravljanja. Kroz ovaj rad se implementiraju i testiraju Laguerreovi filteri u kombinaciji sa nekim konvencionalnim algoritmima upravljanja.

## 5.2. Povijest multirotora

Kvadrokopteri zapravo pripadaju klasi letjelica koje su sposobne uzlijetati i slijetati okomito (VTOL) u odnosu na površinu. Isto tako sastoje se od četiri propelera ili rotora kao pogonskog dijela. Općenitiji izraz bio bi multirotor zbog toga jer u tu klasu letjelica ne pripadaju samo kvadrokopteri već i trikopteri, heksakopteri, oktokopteri i ostale vrste multirotora koje sadrže više od dva rotora.

Ideja za let multirotora formirala se početkom 20. stoljeća pri čemu se razmatralo kako bi logičnije bilo koristiti više rotora da bi se riješio problem leta VTOL-a. Prvi eksperimentalni let provela su braća Jacques i Louis Breguet 1907. godine sa vlastito izrađenim Gyroplane 1 kvadrokopterom. Uspješno su poletjeli, no ipak se pokazalo da je dizajn letjelice bio veoma nestabilan i nepraktičan. Nakon toga, 1924. godine, francuski inženjer Étienne Oemichen je izvršio let od 360 m te pritom postavio svjetski rekord.



Slika 5.1: Oemichen 2 kvadrokopter [6]

Istih je godina George de Bothezat dizajnirao i izgradio svoj model kvadrokoptera po nalogu američke vojske. Ipak nakon mnogo izvršenih testiranja i neuspješnih letova na veće daljine, nije se podržao daljnji razvoj.



Slika 5.2: de Bothezat kvadkopter [6]

Razlog eksperimentiranja sa kvadkopterima je upravo taj što je alternativa korištenje jednog glavnog rotora sa stražnjim rotorom na repu letjelice koji poništava moment stvoren glavnim rotorom i stabilizira cjelokupnu strukturu. Taj dizajn je smatran kompleksnim i neefikasnim jer je glavni rotor koristio 10 do 15% snage motora pri čemu se ta snaga nije koristila ni za uzlijetanje, a ni za potisak prema naprijed. Također lopatice rotora su 4 m minimalne dužine što stvara veliki problem sa stanovišta mase i u današnjem konstruiranju takvih letjelica (helikoptera). Ipak, u vrijeme kad računala i električni motori nisu bili toliko razvijeni, letjelice sa jednim glavnim rotorom imale su dvije velike prednosti:

- Stabilnost je bila robusna, jer se po prirodi teret koji visi sa jedne fiksne točke ispravlja u slučaju nepoželjnih nagiba uzrokovanih vanjskim silama.
- Pošto je postojao samo jedan glavni rotor, spajanje između njega i pogonskog motora je bilo skoro pa direktno, bez nekih dodatnih spojeva i konektora.

Početni dizajni kvadkoptera su tipično imali glavni motor smješten centralno u trupu letjelice, pri čemu su se rotori pogonili preko vratila ili remenskog prijenosa. Jedan od većih problema je bio taj što su se vratila i remeni lako istrošili i naposljetku lomili. Kako su četiri rotora sama po sebi bila dovoljna za lebdjenje kvadkoptera, oni nisu mogli pružiti stabilan let. U biti upravljanja kvadkoptera zapravo jest konstantna stabilizacija. Kako u vrijeme začetka kvadkoptera nije bilo računala, stabilizacija se održavala sa

strane pilota što se pokazalo kao preveliki zadatak u ono vrijeme. Pa se tako kroz većinu 20. stoljeća posvetilo razvoju letjelica sa jednim glavnim rotorom (helikopter) ili u nekim prilikama kad su se koristili za transport, dva rotora.

S napretkom električnih motora i posebno računarstva te mikroročunala, postalo je jasno da se mogu izraditi pouzdani i efikasni multirotori. Moderni multikopteri imaju električne motore spojene na svaki rotor zasebno. Računalo koje kontrolira let u svakom trenutku u realnom vremenu mjenjajući broj okretaja rotora ispravlja putanju i eliminira ostale nepoželjne čimbenike. Za razliku od npr. helikoptera, nagib motora se ne mijenja ni u jednom trenutku. Takav dizajn fiksnog nagiba je puno jednostavniji od kompleksne izvedbe klasičnih letjelica sa jednim rotorom. Upravo su zbog toga zadnjih nekoliko godina kvadkopteri najuspješniji i najupotrebljaniji VTOL dronovi [6].



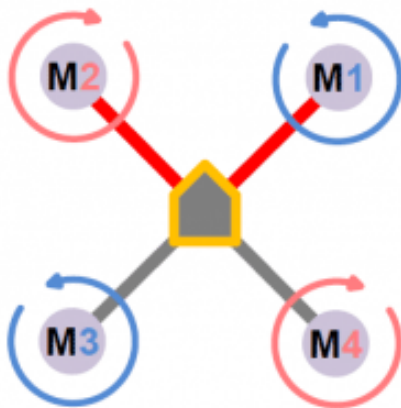
Slika 5.3: Moderni komercijalni kvadkopteri za snimanje sadržaja u visokoj kvaliteti [7]

### 5.3. Osnovni koncepti kvadkoptera

Kad se govori o upravljanju kvadkoptera podrazumijevaju se dvije stvari: pozicioniranje letjelice i upravljanje visinom letjelice. Kako bi se dobile željene vrijednosti, mijenjaju se brzine okretaja na sva četiri motora. Sile i momenti koji djeluju na kvadkopteri su: potisak ili uzdizanje uzrokovan rotacijom krila motora, moment poniranja i valjanja uzrokovan razlikom potiska sva četiri motora, gravitacijska sila, žiroskopski efekt i moment skretanja. Žiroskopski efekt se javlja samo kod lakih konstrukcija kvad-

koptera. Moment skretanja se lako poništi ako dva rotora rotiraju u suprotnome smjeru. Upravo zbog toga propeleri se dijele u dvije grupe. U svakoj se nalaze dva dijametralno suprotna motora koji se lako mogu zamijetiti zbog njihova smjera vrtnje [8]. Iz slike 5.4 mogu se uočiti:

- prednji i stražnji propeler sa pripadnim motorima M1 i M3 koji rotiraju suprotno od kazaljke na satu,
- lijevi i desni propeler sa pripadnim motorima M2 i M4 koji rotiraju u smjeru kazaljke na satu.



Slika 5.4: Smjerovi vrtnje propelera kvadrokoptera [9]

Kretanje krutog tijela letjelice poput kvadrokoptera se opisuje pomoću šest stupnjeva slobode gibanja koje su mu omogućene. Pa tako postoje tri translacije oko glavnih osi i tri rotacije oko istih osi ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Upravljanje tim stupnjevima slobode gibanja se vrši, kao što je već navedeno, podešavanjem brzine vrtnje elektromotora. Pomaci koje kvadrokopter može ostvariti na taj način su pomicanje naprijed i unazad, lateralni ili bočni pomaci, vertikalni pomak (uzdizanje i spuštanje) te pomaci kojima se ostvaruje valjanje, ponižavanje i skretanje. Ukoliko su sva četiri rotora jednake brzine vrtnje, reaktivni momenti koji se tada javljaju poništavaju se i letjelica lebdi tj. održava svoj položaj. Ako pak je samo jedan od motora u disbalansu što se tiče brzine vrtnje neće se poništiti reaktivni momenti te će se kvadrokopter početi nekontrolirano gibati.

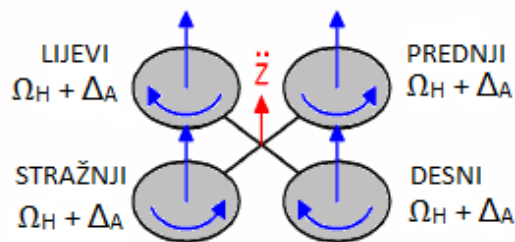
Kako zapravo postoje četiri ulaza ili upravljačke varijable kojima se djeluje na dinamički sustav kvadrokoptera od šest varijabli stanja, može se reći da se radi o podaktuiranom



nelinearnom sustavu. Da bi pak se provelo upravljanje, vrijede neke pretpostavke: kvadrokopter je kruto tijelo sa stanovišta mehanike, njegova struktura je simetrična i zanemaruju se učinak tla pri uzdizanju [10]. Ovisno o brzini rotacije pojedinih propelera, karakteristične su četiri vrste osnovnih gibanja kvadrokoptera.

- Uzdizanje ili spuštanje ( $U_1$ )

Omogućuje uzdizanje ili spuštanje kvadrokoptera na način da se istodobno povećava ili smanjuje brzina vrtnje svih propelera. Ako se kvadrokopter nalazi u horizontalnom položaju, tada se okomiti smjer inercijalnog koordinatnog sustava podudara sa koordinatnim sustavom kvadrokoptera. U drugome slučaju uzgon se ostvaruje kombinacijom vertikalnih i horizontalnih ubrzanja u inercijalnom koordinatnom sustavu.

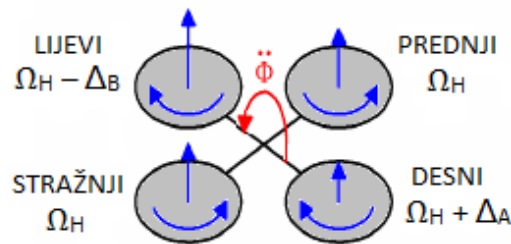


Slika 5.5: Pokret uzdizanja ili spuštanja [11]

Sa slike 5.5 se može vidjeti naredba uzdizanja na skici kvadrokoptera. Plavom bojom su označene brzine koje su ovom slučaju svaka pojedinačno jednake  $\Omega_H + \Delta_A$ .  $\Delta_A$  je pozitivna varijabla koja označava mali pomak u odnosu na konstantnu vrijednost zakreta  $\Omega_H$ .  $\Delta_A$  ne smije imati veliku vrijednost zbog toga jer bi u konačnici na model mogle djelovati značajne nelinearne sile.

- Valjanje ( $U_2$ )

Valjanje je omogućeno povećanjem ili smanjivanjem brzine vrtnje lijevog propelera i smanjivanjem ili povećanjem brzine vrtnje desnog propelera. To pobuđuje moment kojim se u odnosu na  $x$  os kvadrokoptera vrši pokret valjanja. Ukupni vertikalni potisak je jednak kao i u stanju lebdjenja, stoga dolazi samo do povećanja ili smanjenja ubrzanja valjanja.

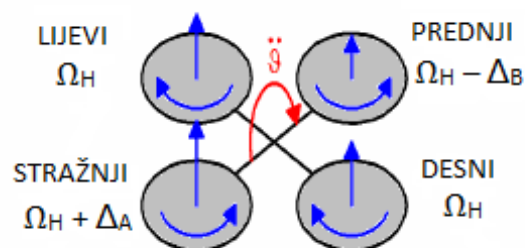


Slika 5.6: Pokret valjanja [11]

Sa slike 5.6 se može vidjeti naredba valjanja na skici kvadrokoptera. Pozitivne varijable  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$  su odabrane kako bi vertikalni potisak ostao nepromijenjen. Lako se može dokazati da za male vrijednosti  $\Delta_A$  vrijedi  $\Delta_B \approx \Delta_A$ . Kao i kod uzdizanja, prevelike vrijednosti bi imale za posljedicu djelovanje značajnih nelinearnih sila ili dolaska u zasićenje.

- Poniranje ( $U_3$ )

Slično kao i kod valjanja, poniranje se postiže povećanjem ili smanjivanjem brzine vrtnje stražnjeg propelera i smanjivanjem ili povećavanjem brzine vrtnje prednjeg propelera. To uzrokuje moment poniranja kojim se u odnosu na  $y$  os kvadrokoptera vrši poniranje. Ukupni vertikalni potisak je jednak kao i kod lebdjenja letjelice, stoga dolazi samo do povećanja ili smanjenja ubrzanja poniranja.



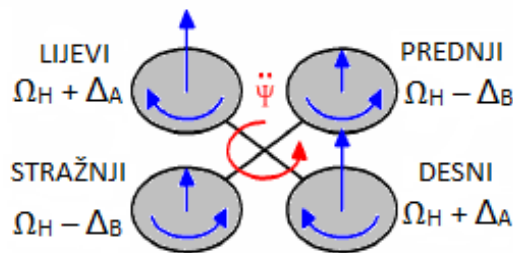
Slika 5.7: Pokret poniranja [11]

Sa slike 5.7 se može vidjeti naredba poniranja na skici kvadrokoptera. Isto kao i u prethodnom slučaju, odabrane su pozitivne varijable  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$  kako ne bi došlo do

promjene verikalnog potiska i isto tako njihove vrijednosti ne smiju biti prevelike. Nadalje za male vrijednosti  $\Delta_A$  vrijedi  $\Delta_B \approx \Delta_A$ .

- Skretanje ( $U_4$ )

Naredba skretanja kvadrokoptera se ostvaruje povećavanjem ili smanjivanjem brzine vrtnje prednjeg i stražnjeg propelera te smanjivanjem ili povećavanjem lijevog i desnog para propelera. To dovodi do uzbude momenta skretanja te se u odnosu na  $z$  os koordinatnog sustava kvadrokoptera vrši skretanje. Pokret skretanja je omogućen zahvaljavući činjenici da se desni i lijevi propeleri rotiraju u smjeru kazaljke na satu, dok se prednji i stražnji rotiraju obrnuto smjeru kazaljke na satu. Iz tog razloga ako bi u nekom slučaju došlo do disbalansa momenta skretanja, kvadrokopter bi vršio nepoželjno skretanje oko  $z$  osi. Isto kao i za prethodne slučajeve, ukupni vertikalni potisak je jednak kao i u stanju lebdjenja, stoga dolazi samo do povećanja ili smanjenja ubrzanja skretanja.



Slika 5.8: Pokret skretanja [11]

Sa slike 5.8 se može vidjeti naredba skretanja kvadrokoptera. Isto kao i u prethodnim slučajevima, odabrane su pozitivne varijable  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$  kako ne bi došlo do promjene verikalnog potiska i isto tako njihove vrijednosti ne smiju biti prevelike. Nadalje za male vrijednosti  $\Delta_A$  vrijedi  $\Delta_B \approx \Delta_A$ .

Za potpuni izvod Newton-Eulero-ovog modela potrebno je prvo opisati kinematiku i dinamiku kvadrokoptera prema [8] i [10]. Također kako bi se uopće pristupilo tome treba definirati sve koordinatne sustave koji se pritom pojavljuju.

## 5.4. Kinematika

Kinematika je jedna od osnovnih grana mehanike koja se bavi gibanjem tijela ili sustava tijela bez utjecaja sila i momenata koji djeluju. Za opisivanje gibanja tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja potrebno je definirati dva koordinatna sustava [12]:

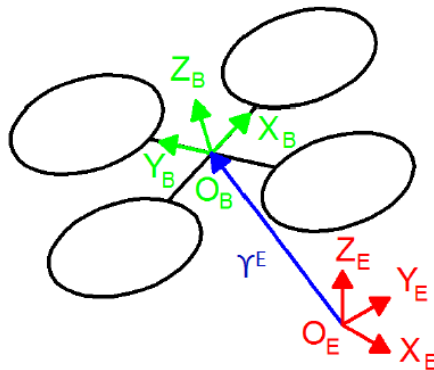
- Zemljin koordinatni sustav,
- Koordinatni sustav tijela kvadkoptera.

Zemljin koordinatni sustav  $(o_E, x_E, y_E, z_E)$  se podudara sa desnokretnim inercijskim sustavom.  $x_E$  pokazuje u smjeru sjevera,  $y_E$  u smjeru zapada,  $z_E$  u smjeru prema gore u odnosu na Zemlju dok je  $o_E$  ishodište koordinatnog sustava. Ovaj koordinatni sustav se koristi kako bi se što lakše definirala linearna  $(\mathbf{Y})$  i kutna pozicija  $(\boldsymbol{\eta})$  kvadkoptera. Koordinatni sustav kvadkoptera  $(o_B, x_B, y_B, z_B)$  vezan je uz samo tijelo tj. trup letjelice.  $x_B$  pokazuje u prednjem smjeru kvadkoptera,  $y_B$  pokazuje u lijevu stranu,  $z_B$  u smjeru prema gore te je  $o_B$  ishodište koordinatnog sustava. Isto tako ishodište  $o_B$  je odabrano tako da prolazi kroz središte križno-simetrične strukture kvadkoptera. Također, radi se o desnokretnom koordinatnom sustavu. Veličine koje se definiraju pomoću navedenog koordinatnog sustava su linearna brzina  $(\mathbf{v})$ , kutna brzina  $(\boldsymbol{\omega})$ , sile  $(\mathbf{F})$  i momenti  $(\boldsymbol{\tau})$ .

Linearna pozicija  $\mathbf{Y}$  kvadkoptera je određena koordinatama vektora između ishodišta Zemljinog koordinatnog sustava i koordinatnog sustava kvadkoptera prema zapisu (5.1).

$$\mathbf{Y} = [X \ Y \ Z]^T. \quad (5.1)$$

Na slici 5.9 se mogu vidjeti navedeni koordinatni sustavi te njihova veza.



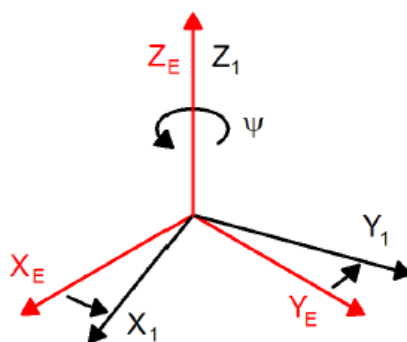
Slika 5.9: Veza između Zemljinog i koordinatnog sustava kvadrokoptera [10]

Kutna pozicija  $\boldsymbol{\eta}$  kvadrokoptera se definira orijentacijom koordinatnog sustava kvadrokoptera u odnosu na Zemljin te su zadane tri rotacije oko glavnih osi. Koriste se tzv. Eulerovi kutevi gdje su redom označeni valjanje, poniranje i skretanje sa  $\phi$ ,  $\theta$  i  $\psi$ . To se može još zapisati kao

$$\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T. \quad (5.2)$$

Rotacijska matrica  $\mathbf{R}$  se dobiva množenjem sljedećih matrica rotacija;

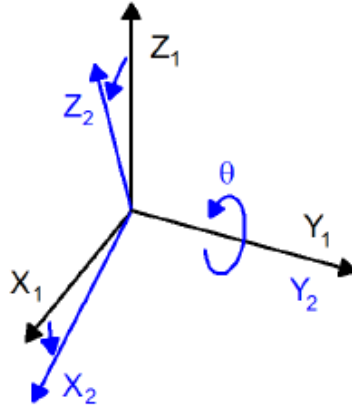
- Rotacija kuta  $\psi$  (skretanje) oko osi  $z_E$  opisana je matricom  $\mathbf{R}(\psi, z)$ .



Slika 5.10: Rotacija kuta  $\psi$  oko osi  $z_E$  [10]

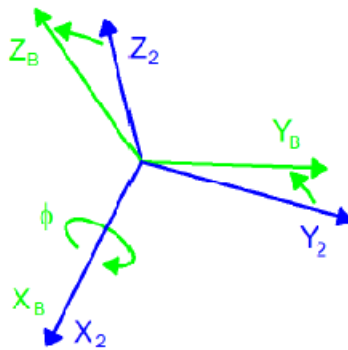
$$\mathbf{R}(\psi, z) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

- Rotacija kuta  $\theta$  (poniranje) oko osi  $y_1$  opisana je matricom  $\mathbf{R}(\theta, y)$ .

Slika 5.11: Rotacija kuta  $\theta$  oko osi  $y_1$  [10]

$$\mathbf{R}(\theta, y) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

- Rotacija kuta  $\phi$  (valjanje) oko osi  $x_2$  opisana je matricom  $\mathbf{R}(\phi, x)$ .

Slika 5.12: Rotacija kuta  $\phi$  oko osi  $x_2$  [10]

$$\mathbf{R}(\phi, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Kroz prethodne tri matrice, a i kroz sljedeći dio rada, korištena je notacija prema kojoj vrijedi:  $c_k = \cos(k)$ ,  $s_k = \sin(k)$  i  $t_k = \tan(k)$ . Zapis (5.6) prikazuje ukupnu rotacijsku matricu kao umnožak prethodno navedenih matrica.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\psi, z) \mathbf{R}(\theta, y) \mathbf{R}(\phi, x) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\phi + c_\psi s_\theta s_\phi & s_\psi s_\phi + c_\psi s_\theta c_\phi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\phi + s_\psi s_\theta s_\phi & -c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Kao što je već rečeno, linearne ( $\mathbf{v}$ ) i kutne ( $\boldsymbol{\omega}$ ) brzine izražene su u koordinatnom sustavu kvadrokoptera. Isto tako još se mogu izraziti preko (5.7) i (5.8).

$$\mathbf{v} = [u \quad v \quad w]^T, \quad (5.7)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [p \quad q \quad r]^T. \quad (5.8)$$

Moguće je kombinacijom linearnih i kutnih položaja i brzina napraviti prikaz tijela u prostoru. Pa se tako definiraju dva vektora, generalizirani vektor položaja ( $\boldsymbol{\xi}$ ) i generalizirani vektor brzine ( $\boldsymbol{\nu}$ ).

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\Upsilon} \quad \boldsymbol{\eta}]^T = [X \quad Y \quad Z \quad \phi \quad \theta \quad \psi]^T, \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{v} \quad \boldsymbol{\omega}]^T = [u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r]^T. \quad (5.10)$$

Veza između linearne brzine u koordinatnom sustavu kvadrokoptera  $\mathbf{v}$  i brzine koja se izražava u koordinatnom sustavu Zemlje  $\mathbf{v}^E$  (ili  $\dot{\mathbf{Y}}$ ) uključuje rotacijsku matricu  $\mathbf{R}$  te se prikazuje kao

$$\mathbf{v}^E = \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}. \quad (5.11)$$

Što se tiče linearne brzine, isto tako je moguće povezati kutnu brzinu kvadrokoptera u koordinatnom sustavu Zemlje ( $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ ) sa koordinatnim sustavom kvadrokoptera ( $\boldsymbol{\omega}$ ) zahvaljujući matrici transformacija  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})$ . To je prikazano u jednadžbama (5.12) i (5.13).

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})^{-1}\dot{\boldsymbol{\eta}}. \quad (5.12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\omega}. \quad (5.13)$$

Matrica transformacija  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})$  se određuje rješavanjem Eulerovih odnosa  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  u koordinatnom sustavu kvadrokoptera, što je prikazano kroz jednadžbu (5.14) te matrice (5.15) i (5.16).

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\phi, x)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}(\phi, x)^{-1}\mathbf{R}(\theta, y)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Jednadžbe (5.11) i (5.13) je moguće opisati pomoću samo jedne jednakosti koja se odnosi na derivaciju generaliziranog vektora položaja u Zemljinom koordinatnom sustavu  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ , u odnosu na generalizirani vektor brzina u koordinatnom sustavu kvadrokoptera  $\boldsymbol{\nu}$ . Ta transformacija je moguća zahvaljujući generaliziranoj matrici transformacija  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$ . U sljedećem zapisu (5.18), notacija  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  znači da se radi o matrici sa tri redaka i tri stupca u kojoj su svi nul-članovi. Prethodno navedene jednakosti se zapisuju kao

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu}. \quad (5.17)$$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$



## 5.5. Dinamika

Dinamika je grana mehanike koja proučava posljedice djelovanja sila i momenata na kruto tijelo ili više tijela u gibanju. Postoji više tehnika pristupa opisivanja dinamičkog sustava krutog dijela sa šest stupnjeva slobode gibanja. Kroz ovaj rad je korištena Newton-Euler-ova formulacija [12].

Isto tako formulacija je odabrana zbog toga što se takvim zapisom jednadžbama gibanja dobivaju neka pojednostavljenja:

- Inercijska matrica je vremenski invarijantna.
- Jednadžbe se pojednostavljaju ukoliko se radi o simetričnom tijelu.
- Mjerenja u realnom vremenu se lako prebacuju u koordinatni sustav tijela (kvadrokoptera).
- Upravljačke sile su u većini slučajeva dane u koordinatnom sustavu kvadrokoptera.

No kako odluka da se jednadžbe gibanja opisuju u koordinatnom sustavu kvadrokoptera pojednostavljuje izraze sila, isto tako povećava složenost izraza ubrzanja. Kod ovog pristupa su uzete dvije pretpostavke u obzir:

- Prva navodi da se ishodište koordinatnog sustava kvadrokoptera  $o_B$  poklapa sa centrom mase kvadrokoptera. Ako to ne bi bio slučaj, uvelike bi se komplicirale jednadžbe gibanja.
- Druga pretpostavka govori da se osi koordinatnog sustava kvadrokoptera poklapaju sa inercijskim koordinatnim sustavom. U tom slučaju inercijska matrica  $\mathbf{I}_B$  je dijagonalna što isto pojednostavljuje izraz jednadžbi gibanja.

Prema Euler-ovom prvom postulatu i drugome Newton-ovome zakonu slijedi derivacija linearnih komponenata gibanja, prema jednadžbi (5.19)

$$\begin{aligned}
 m \ddot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{F} \\
 m \widehat{\mathbf{R}\mathbf{V}^B} &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{F} \\
 m (\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{F} \\
 m \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})(\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{F} \\
 m (\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{F},
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

pri čemu je  $m$  masa kvadkoptera,  $\ddot{\mathbf{Y}}$  predstavlja vektor linearnih ubrzanja,  $\dot{\mathbf{v}}$  označava vektor linearnih ubrzanja kvadkoptera dok je  $\dot{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\eta})$  derivacija rotacijske matrice.

Na sličan način je izvedena i formirana jednačba (5.20) koja predstavlja kutne komponente gibanja tijela koristeći Euler-ov drugi postulat i također drugi Newton-ov zakon.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_B \ddot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{I}_B \dot{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\tau} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\tau},$$

pri čemu je  $\mathbf{I}_B$  inercijska matrica kvadkoptera,  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}$  predstavlja vektor kutnog ubrzanja u Zemljinom koordinatnom sustavu dok je  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  vektor kutnog ubrzanja u koordinatnom sustavu kvadkoptera.

Spajanjem jednačbi (5.19) i (5.20), moguće je opisati gibanje kvadkoptera (krutog tijela) sa šest stupnjeva slobode gibanja. To je prikazano sljedećom matričnom formulacijom

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{v}) \\ \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

Notacija  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  označava jediničnu matricu sa tri redaka i stupaca. Isto tako lako je vidjeti iz (5.21) da se radi o dijagonalnoj matrici sa konstantnim vrijednostima. Takav matrični zapis je potpuno generički i vrijedi za sve vrste krutih tijela ako su zadovoljene sve pretpostavke dane na početku.

## 5.6. Newton-Euler-ov model

Na temelju prethodno izvedenih izraza kinematike i dinamike kvadkoptera dobiti će se set jednačbi koji će u potpunosti opisati dinamiku gibanja kvadkoptera. Prvi korak je definiranje generaliziranog vektora sila  $\boldsymbol{\Lambda}$

$$\boldsymbol{\Lambda} = [\mathbf{F} \ \boldsymbol{\tau}]^T = [F_x \ F_y \ F_z \ \tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T, \tag{5.22}$$

pa je stoga moguće jednačbu (5.21) zapisati u obliku

$$\mathbf{M}_B \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\Lambda}. \quad (5.23)$$

$\dot{\boldsymbol{\nu}}$  predstavlja generalizirani vektor ubrzanja u koordinatnom sustavu kvadrokoptera dok je  $\mathbf{M}_B$  inercijska matrica sustava. Također, još se i javlja  $\mathbf{C}_B$  koja označava Coriolisovu centripetalnu matricu u koordinatnom sustavu kvadrokoptera. Zapis inercijske matrice je prema (5.24)

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Lako je uočiti da se radi o dijagonalnoj matrici sa konstantnim vrijednostima zahvaljujući prethodno danim pretpostavkama. Prikaz Coriolisove centripetalne matrice dan je prema (5.25)

$$\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -m\mathbf{S}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{I}_B\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & mw & -mv \\ 0 & 0 & 0 & -mw & 0 & mu \\ 0 & 0 & 0 & mv & -mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ}r & -I_{YY}q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ZZ}r & 0 & I_{XX}p \\ 0 & 0 & 0 & I_{YY}q & -I_{XX}p & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

U prethodnoj jednadžbi usvojen je antisimetrični operator  $\mathbf{S}$ . Za bilo koji vektor  $\mathbf{k}$  s tri članova antisimetrična matrica  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{S}(\mathbf{k})$ ) se definira prema sljedećem izrazu

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}) = -\mathbf{S}^T(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_1 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Jednadžba (5.23) je poopćena što znači da vrijedi za sva kruta tijela prema navedenim pretpostavkama.  $\mathbf{\Lambda}$  se može podijeliti na tri komponente.

Prvi doprinos čini gravitacijski vektor  $\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi})$  uzrokovan ubrzanjem sila teže ili gravitacijske sile  $g$ . On utječe samo na linearne komponente sadržane u jednadžbama pošto se radi o sili, a ne o momentu. Transformacija za dobivanje navedene matrice je kako slijedi u (5.27)

$$\mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})^{-1} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgs_\theta \\ -mgc_\theta s_\phi \\ -mgc_\theta s_\phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

gdje je  $\mathbf{F}_G$  gravitacijski vektor u koordinatnom sustavu kvadrokoptera.  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})$  označava normiranu ortogonalnu matricu pri čemu je inverz  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})^{-1}$  jednak transponiranoj matrici  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})^T$ .

Drugi doprinos koji se uzima u obzir jest žiroskopski efekt koji nastaje zbog vrtnje propelera kvadrokoptera. Pošto se jedan par vrti u smjeru kazaljke na satu, a drugi par obrnuto, dolazi do toga da ukupna suma brzina propelera nije jednaka nuli. Ako je i uz to slučaj da brzine valjanja i poniranja nisu jednake nuli, tada se javljaju dodatni momenti opisani u (5.28)

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\Omega} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\sum_{k=1}^4 J_{TP} \left( \boldsymbol{\omega} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) (-1)^k \Omega_k \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ J_{TP} \begin{bmatrix} -q \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} = J_{TP} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & -q & q & -q \\ -p & p & -p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

gdje je  $\mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})$  matrica žiroskopskih efekta propelera i  $J_{TP}$  ukupni moment inercije propelera. Lako je vidjeti u konačnom izrazu (5.28) da žiroskopski efekt ima utjecaja samo na jednadžbe koje opisuju kutna gibanja.

Prema jednadžbi (5.29) definira se ukupna brzina propelera  $\Omega$  kao i vektor ukupne brzine  $\boldsymbol{\Omega}$  korišten u jednadžbi (5.28)

$$\Omega = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

gdje je  $\Omega_1$  brzina vrtnje prednjeg propelera,  $\Omega_2$  desnog propelera,  $\Omega_3$  stražnjeg propelera i  $\Omega_4$  lijevog propelera.

Treći doprinos koji se uzima u obzir su sile i momenti koji direktno djeluju na upravljanje kvadrokoptera. S aerodinamičkog razmatranja, slijedi da su sile i momenti proporcionalni kvadratu brzini vrtnja propelera. Pa tako  $\mathbf{E}_B$  predstavlja matricu gibanja koja se množi sa kvadratom brzina ( $\boldsymbol{\Omega}^2$ ) kako bi se dobio vektor gibanja  $\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\Omega})$ . Taj izraz je prikazan prema (5.30)

$$\mathbf{U}_B(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{E}_B \boldsymbol{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

gdje je  $l$  udaljenost između centra mase kvadrokoptera i središta propelera.  $U_1, U_2, U_3, U_4$  su komponente vektora gibanja koje su navedene u prethodnim poglavljima. Njihova povezanost s brzinom vrtnje propelera dolazi iz aerodinamičkih zakona. Izraz za moment koji je uzrokovan djelovanjem  $U_4$  je pojednostavljen jer se  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  ne uzima u obzir. Pa su tako svi izrazi za gibanje slični i zbog toga se lakše implementiraju u algoritme upravljanja. Prethodno navedena matrica  $\mathbf{E}_B$  je prikazana izrazom (5.31)

$$\mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ -bl & 0 & bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Uzimajući u obzir sva tri navedena doprinosa, jednađžba (5.23) se može proširiti na način

$$\mathbf{M}_B \dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_B\boldsymbol{\Omega}^2. \quad (5.32)$$

Ako se prethodna jednađžba preformulira tako da se izrazi kroz generalizirani vektor brzine  $\dot{\boldsymbol{\nu}}$  tada se dobiva

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{M}_B^{-1}(-\mathbf{C}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{G}_B(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{O}_B(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_B\boldsymbol{\Omega}^2). \quad (5.33)$$

Ako se sad matrični izraz (5.33) prevede u sustav jednađžbi, dobiva se

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (vr - wq) + gs_\theta, \\ \dot{v} &= (wp - ur) - gc_\theta s\phi, \\ \dot{w} &= (uq - vp) - gc_\theta s\phi + \frac{U_1}{m}, \\ \dot{p} &= \frac{I_{YY} - I_{ZZ}}{I_{XX}}qr - \frac{J_{TP}}{I_{XX}}q\Omega + \frac{U_2}{I_{XX}}, \\ \dot{q} &= \frac{I_{ZZ} - I_{XX}}{I_{YY}}pr + \frac{J_{TP}}{I_{YY}}p\Omega + \frac{U_3}{I_{YY}}, \\ \dot{r} &= \frac{I_{XX} - I_{YY}}{I_{ZZ}}pq + \frac{U_4}{I_{ZZ}}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

dok se brzine propelera izražavaju kao

$$\begin{aligned}
U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \\
U_2 &= bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2), \\
U_3 &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2), \\
U_4 &= d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2), \\
\Omega &= -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Dinamički sustav kvadkoptera zapisan u jednadžbama (5.34) je u koordinatnom sustavu kvadkoptera. U većini slučajeva kod krutih tijela sa šest stupnjeva slobode gibanja koristi se takav koordinatni sustav. Međutim ovdje će se uvesti hibridni koordinatni sustav kao kombinacija Zemljinog i koordinatnog sustava kvadkoptera. Hibridni koordinatni sustav se koristi jer je njime lakše izraziti dinamiku sustava u kombinaciji s upravljanjem tog sustava. Pa se tako prema izrazu (5.36) uvodi generalizirani vektor brzine

$$\zeta = [\dot{\Upsilon} \ \omega]^T = [\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z} \ p \ q \ r]^T. \tag{5.36}$$

Dinamika sustava u hibridnom koordinatnom sustavu u matricnoj formi se zapisuje prema (5.37)

$$\mathbf{M}_H \dot{\zeta} + \mathbf{C}_H(\zeta)\zeta = \mathbf{G}_H + \mathbf{O}_H(\zeta)\Omega + \mathbf{E}_H(\xi)\Omega^2, \tag{5.37}$$

gdje je  $\dot{\zeta}$  generalizirani vektor ubrzanja u hibridnom koordinatnom sustavu. Isto tako sve matrice koje su definirane u koordinatnom sustavu kvadkoptera biti će sada prevedene u hibridni. Prvo se definira inercijska matrica  $\mathbf{M}_H$  koja je jednaka kao i  $\mathbf{M}_B$  (5.24).

S druge strane Coriolisova centripetalna matrica  $\mathbf{C}_H(\zeta)$  nije jednaka onoj u koordinatnom sustavu kvadkoptera te se izražava kao

$$\mathbf{C}_H(\zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ZZ}r & -I_{YY}q \\ 0 & 0 & 0 & -I_{ZZ}r & 0 & I_{XX}p \\ 0 & 0 & 0 & I_{YY}q & -I_{XX}p & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Gravitacijski vektor u hibridnom koordinatnom sustavu  $\mathbf{G}_H(\zeta)$  definiran je prema (5.39) i također je promijenjen.

$$\mathbf{G}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Žiroskopski efekt koji nastaje vrtnjom propelera se ne mijenja zbog toga jer on ima utjecaj samo na kutne jednadžbe sustava u koordinatnom sustavu kvadrokoptera. Kako je  $\mathbf{O}_B(\xi)$  jednako  $\mathbf{O}_H(\zeta)$  tada vrijedi izraz (5.28).

Matrica gibanja  $\mathbf{E}_H(\zeta)$  u hibridnom koordinatnom sustavu se razlikuje zbog toga jer komponenta  $U_1$  utječe na sve tri linearne jednadžbe kroz rotacijsku matricu  $\mathbf{R}(\eta)$ . Promijenjena matrica je prikazana u izrazu (5.40)

$$\mathbf{E}_H(\xi)\Omega^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{E}_B\Omega^2 = \begin{bmatrix} (s_\psi s_\phi + c_\psi s_\theta c_\phi)U_1 \\ (-c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi)U_1 \\ (c_\theta c_\phi)U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Slično kao i u koordinatnom sustavu kvadrokoptera, ako se jednadžba (5.37) izrazi preko generaliziranog vektora brzine  $\dot{\zeta}$  u hibridnom koordinatnom sustavu kako slijedi



$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{M}_H^{-1}(-\mathbf{C}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{G}_H + \mathbf{O}_H(\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{E}_H(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\Omega}^2), \quad (5.41)$$

tada se može ta ista matricna forma prevesti u sustav jednažbi kako slijedi prema (5.42)

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= (\cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\phi)) \frac{U_1}{m}, \\ \ddot{Y} &= (\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi)) \frac{U_1}{m}, \\ \ddot{Z} &= -g + (\cos(\phi) \cos(\theta)) \frac{U_1}{m}, \\ \dot{p} &= \frac{I_{YY} - I_{ZZ}}{I_{XX}} qr - \frac{J_{TP}}{I_{XX}} q\Omega + \frac{U_2}{I_{XX}}, \\ \dot{q} &= \frac{I_{ZZ} - I_{XX}}{I_{YY}} pr + \frac{J_{TP}}{I_{YY}} p\Omega + \frac{U_3}{I_{YY}}, \\ \dot{r} &= \frac{I_{XX} - I_{YY}}{I_{ZZ}} pq + \frac{U_4}{I_{ZZ}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Izrazi brzina propelera su jednaki kao i u (5.35).

## 5.7. Linearizacija modela

Linearizacija modela kvadrokoptera provest će se prema izrazima danima u [13] i [14]. Prethodno izvedene diferencijalne jednačbe (5.42) mogu se prikazati na sljedeći način

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= (\cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\phi))u_1, \\
 m\ddot{y} &= (\sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\psi) \sin(\phi))u_1, \\
 m\ddot{z} &= -mg + \cos(\phi) \cos(\theta)u_1, \\
 I_{XX}\ddot{\phi} &= (I_{YY} - I_{ZZ})\dot{\theta}\dot{\psi} + u_2, \\
 I_{YY}\ddot{\theta} &= (I_{ZZ} - I_{XX})\dot{\phi}\dot{\psi} + u_3, \\
 I_{ZZ}\ddot{\psi} &= (I_{XX} - I_{YY})\dot{\phi}\dot{\theta} + u_4,
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

gdje se pojavljuju Eulerovi kutevi  $\phi$ ,  $\theta$  i  $\psi$  te položaji centra mase kvadrokoptera u inercijalnom koordinatnom sustavu  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Također  $u_1$  predstavlja okomitu silu u sustavu krutog tijela (kvadrokoptera), dok su  $u_2$ ,  $u_3$  i  $u_4$  momenti oko glavnih osi kvadrokoptera. Daljnja linearizacija se provodi ako se u obzir uzme pretpostavka malih kuteva

$$\begin{aligned}
 \cos(w) &\sim 1, \\
 \sin(w) &\sim w.
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Koristeći pretpostavke (5.44) te uvrštavajući ih u sustav diferencijalnih jednačbi (5.43) dobiva se

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= (\theta + \psi\phi)u_1, \\
 m\ddot{y} &= (\psi\theta + \phi)u_1, \\
 m\ddot{z} &= -mg + u_1, \\
 I_{XX}\ddot{\phi} &= (I_{YY} - I_{ZZ})\dot{\theta}\dot{\psi} + u_2, \\
 I_{YY}\ddot{\theta} &= (I_{ZZ} - I_{XX})\dot{\phi}\dot{\psi} + u_3, \\
 I_{ZZ}\ddot{\psi} &= (I_{XX} - I_{YY})\dot{\phi}\dot{\theta} + u_4.
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Ako se još zanemare kvadratični članovi malih kuteva i brzina, dobiva se

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \theta u_1, \\
 m\ddot{y} &= \phi u_1, \\
 m\ddot{z} &= -mg + u_1, \\
 I_{XX}\ddot{\phi} &= u_2, \\
 I_{YY}\ddot{\theta} &= u_3, \\
 I_{ZZ}\ddot{\psi} &= u_4.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Nakon toga eliminira se konstantni član  $-mg$  iz jednadžbe  $m\ddot{z} = -mg + u_1$ . Za tu eliminaciju potrebno je koristiti unaprijednu kompenzaciju  $u_1 = mg + \tilde{u}_1$  pa se dobiva

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= mg\theta - \theta\tilde{u}_1, \\
 m\ddot{y} &= -mg\phi - \phi\tilde{u}_1, \\
 m\ddot{z} &= \tilde{u}_1,
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

gdje su  $\theta\tilde{u}_1 \simeq 0$  i  $\phi\tilde{u}_1 \simeq 0$ . Tada se konačno dobiva sustav diferencijalnih jednadžbi potpuno lineariziranog modela kvadrokoptera

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= g\theta, \\
 \ddot{y} &= -g\phi, \\
 \ddot{z} &= \frac{1}{m}\tilde{u}_1, \\
 \ddot{\phi} &= \frac{1}{I_{XX}}u_2, \\
 \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_{YY}}u_3, \\
 \ddot{\psi} &= \frac{1}{I_{ZZ}}u_4.
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

# 6 Upravljanje kvadkopterom

## 6.1. Sinteza linearnog regulatora

Kako je provedena linearizacija modela kvadkoptera potrebno je provesti sintezu linearnog regulatora. Koristeći jednadžbe (5.48) lineariziranog modela prema [13] definiraju se četiri podsustava u kojima se javljaju upravljačke varijable. Pa je tako podsustav 1 definiran prema

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}\tilde{u}_1, \quad (6.1)$$

a podsustav 2 prema

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{ZZ}}u_4. \quad (6.2)$$

Izvod upravljačkih varijabli  $u_1$  i  $u_4$  je identičan pa će se prikazati samo za podsustav 1, dok će za podsustav 2 biti dan samo konačni izraz.

Ako se uzme jednadžba (6.3) uzimajući u obzir regulacijsko odstupanje

$$\tilde{u}_1 = m(\ddot{z}_d - K_P\tilde{z} - K_D\dot{\tilde{z}}), \quad (6.3)$$

tada se jednadžba pogreške zapisuje prema

$$\ddot{\tilde{z}} + K_D\dot{\tilde{z}} + K_P\tilde{z} = 0, \quad (6.4)$$

gdje vrijedi  $K_D, K_P > 0$ . Navedena pojačanja se određuju metodom podešavanja polova i redom iznose  $K_P = 9$  te  $K_D = 6$ . Konačno, dobiva se upravljačka jednačba prema (6.5)

$$u_1 = mg + m(\ddot{z}_d - K_D(\dot{z} - \dot{z}_d) - K_P(z - z_d)). \quad (6.5)$$

Analogno tome, upravljačka varijabla podsustava 2  $u_4$  jednaka je

$$u_4 = I_{ZZ}(\ddot{\psi}_d - K_D(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) - K_P(\psi - \psi_d)). \quad (6.6)$$

Nakon određivanja prva dva podsustava i definiranja njihovih upravljački varijabli, definiraju se podsustavi 3 i 4. Kod podsustava 3 u ožbir se uzimaju sljedeće jednačbe iz lineariziranog modela

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g\theta, \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_{YY}}u_3, \end{aligned} \quad (6.7)$$

pa se nakon deriviranja dobiva

$$x^{(4)} = \frac{g}{I_{YY}}u_3. \quad (6.8)$$

Slično se definira i podsustav 4

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -g\theta, \\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{I_{XX}}u_2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

pa se nakon deriviranja dobiva

$$y^{(4)} = -\frac{g}{I_{XX}}u_2. \quad (6.10)$$

Izvod upravljačkih varijabli  $u_3$  i  $u_2$  je identičan pa će se prikazati samo za podsustav 3,

dok će za podsustav 4 biti dan samo konačni izraz.

Ako se uzme jednažba (6.11) uzimajući u obzir regulacijsko odstupanje

$$u_3 = \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3\ddot{\tilde{x}} - K_2\dot{\tilde{x}} - K_1\tilde{x} - K_0\tilde{x}) \quad (6.11)$$

tada se jednažba pogreške zapisuje prema

$$\tilde{x}_d^{(4)} + K_3\ddot{\tilde{x}} + K_2\dot{\tilde{x}} + K_1\tilde{x} + K_0\tilde{x} = 0. \quad (6.12)$$

Navedena pojačanja se određuju metodom podešavanja polova i redom iznose  $K_3 = 15$ ,  $K_2 = 83$ ,  $K_1 = 201$  te  $K_0 = 180$ . Konačno, dobiva se upravljačka jednažba prema (6.13)

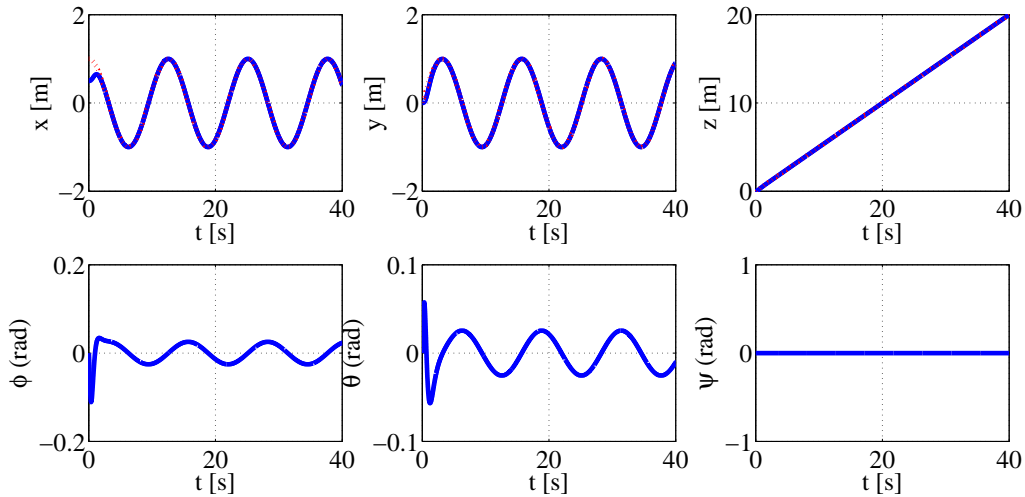
$$u_3 = \frac{I_{YY}}{g}(x_d^{(4)} - K_3(g\dot{\theta} - \ddot{x}_d) - K_2(g\theta - \dot{x}_d) - K_1(\dot{x} - \dot{x}_d) - K_0(x - x_d)). \quad (6.13)$$

Slično tome, upravljačka varijabla podsustava 4  $u_2$  jednaka je

$$u_2 = -\frac{I_{XX}}{g}(y_d^{(4)} - K_3(-g\dot{\phi} - \ddot{y}_d) - K_2(-g\phi - \dot{y}_d) - K_1(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_0(y - y_d)). \quad (6.14)$$

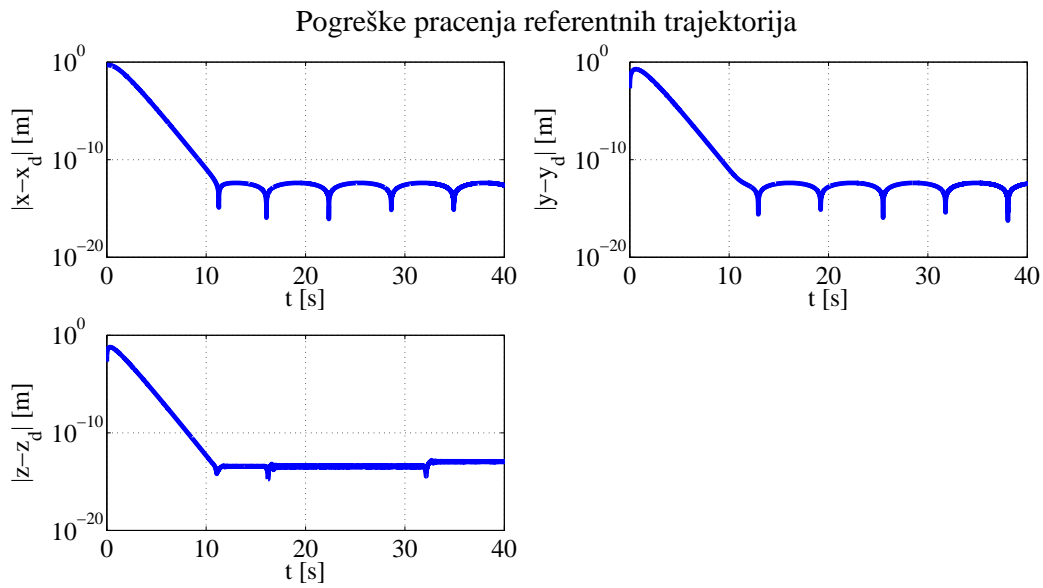
Nakon provedbe sinteze linearnog regulatora, prikazati će se njegove performanse. Može se vidjeti praćenje referentne trajektorije bez djelovanja poremećaja. Korišteni parametri modela kvadrokoptera su  $m = 1$  kg,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>,  $I_{XX} = 0.62$  m<sup>4</sup>,  $I_{YY} = 0.62$  m<sup>4</sup>,  $I_{ZZ} = 1.24$  m<sup>4</sup>. Referentne trajektorije koje kvadrokopter prati po određenim osima su  $x_d = \cos(0.5t)$ ,  $y_d = \sin(0.5t)$  i  $z_d = 0.5t$ . Početni uvjet pozicije u odnosu na  $x$  os je  $x_0 = 0.5$  m, dok su ostali početni uvjeti jednaki nuli. Na sljedećim slikama može se vidjeti praćenje pojedinih referentnih trajektorija te njihovo odstupanje. Isto tako vidljivo je slijeđenje referentnih trajektorija u 3D prostoru kao i djelovanje upravljačkih varijabli koje stabiliziraju cjelokupni dinamički sustav kvadrokoptera.

Praćenje referentnih trajektorija



Slika 6.1: Praćenje referentnih trajektorija primjenom linearnog regulatora s mjerljivim stanjima sustava i bez prisustva poremećaja

Slijedenje referentnih trajektorija je gotovo idealno, pa se tek malo odstupanje može vidjeti kod slijedenja oko  $x$  osi. Naime, pošto je zadan početni uvjet upravo oko te osi, potrebno je nekoliko sekundi kako bi kvadkopter u potpunosti slijedio zadanu trajektoriju. To isto tako ima za posljedicu da je malo odstupanje oko ostalih osi na početku, no nakon tih početnih nekoliko sekundi, praćenje je gotovo identično s referentnim trajektorijama.

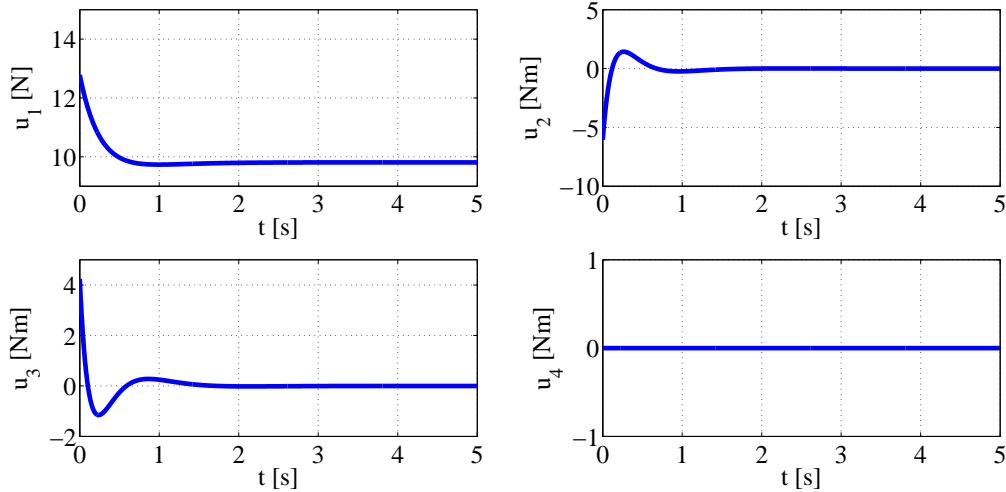


Slika 6.2: Pogreške slijeđenja referentnih trajektorija primjenom linearnog regulatora

Pogreške praćenja su i više nego zadovoljavajuće gdje se može vidjeti kako je prilikom početka praćenja odstupanje najveće. Kao što je i bilo za očekivati, zbog početnog uvjeta  $x_0$  dolazi do malog odstupanja. Kroz daljnje praćenje trajektorija, pogreške su numerički malog reda.

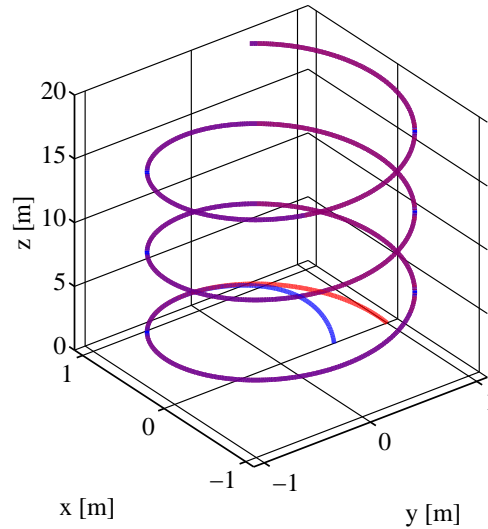


## Upravljačke varijable kvadkoptera



Slika 6.3: Upravljačke varijable kvadkoptera prilikom slijeđenja referentnih trajektorija primjenom linearnog regulatora

Upravljačke varijable, tj. sile i momenti, na slici 6.3 djeluju prema uvjetima slijeđenja koji su dodijeljeni. Pa tako se može vidjeti da u početnih nekoliko sekundi dolazi do djelovanja momenata  $\tau_1$  i  $\tau_2$  odnosno upravljačkih varijabli  $u_2$  i  $u_3$  koje stabiliziraju početno odstupanje koje se javlja zbog početnog uvjeta. Kako nema skretanja kvadkoptera ( $\psi = 0$ ), ne djeluje ni moment  $\tau_3$ . Najveća očiglednost je kod upravljačke varijable  $u_1$  ili sile  $F_z$  koja služi za podizanje kvadkoptera kako bi slijedio zadanu referencu. Nakon toga vrijednost te sile nešto pada, ali mora biti prisutna zbog samog održavanja letjelice.



Slika 6.4: Praćenje referentne trajektorije u 3D prikazu primjenom linearnog regulatora s mjerljivim stanjima sustava i bez prisustva poremećaja

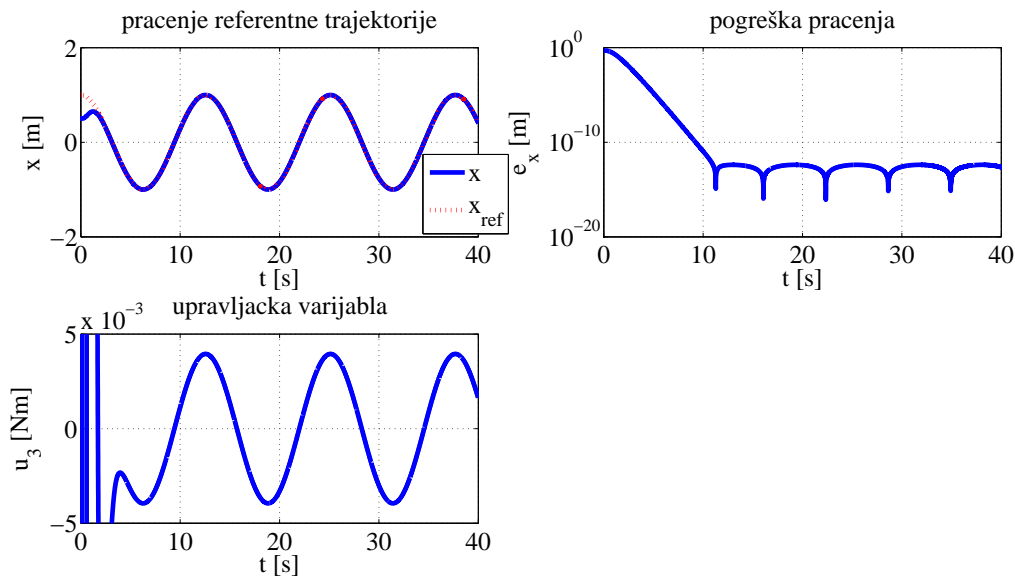
Kako bi se što vjernije prikazalo slijeđenje referentnih trajektorija, uvodi se i 3D prikaz. Sa njega se može očitati da kvadkopter zapravo prati neku spiralnu trajektoriju pri kojoj jedino dolazi do odstupanja prilikom početka slijeđenja, za što je uzrok već navedeni početni uvjet oko  $x$  osi.

## 6.2. Adaptivno upravljanje s Laguerreovim filterima

Kao i kod MDS sustava, ovdje će biti prikazana estimacija poremećaja te estimacija brzine gdje je poznata samo pozicija kvadkoptera. Potom će biti prikazano kakvo je ponašanje sustava u slučaju kad se vrši istovremena estimacija poremećaja i brzine. Kod sljedećih primjera implementacije observera poremećaja i slijeđenja referentne trajektorije neće se koristiti puni model kvadkoptera, već će se samo promatrati njegovo ponašanje u odnosu na  $x$  os.

### 6.2.1. Upravljanje kvadkopterom bez poremećaja i s mjerljivim varijablama stanja

Bez djelovanja nekih realnih poremećaja ( $d_0 = 0$ ) na slici 6.5 može se vidjeti kako kvadkopter prati neku referentnu trajektoriju. Isto tako to služi kao neka provjera pravilne implementacije lineariziranog dinamičkog sustava kvadkoptera. Korištene vrijednosti modela kvadkoptera su  $m = 1$  kg,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> i  $I_{YY} = 0.62$  m<sup>4</sup>. Referentna trajektorija koju kvadkopter prati je izražena preko  $x_{0d} = \cos(0.5t)$  gdje je početni uvjet pozicije u odnosu na  $x$  os  $x_0 = 0.5$  m. Svi ostali početni uvjeti jednaki su nuli.



Slika 6.5: Praćenje referentne trajektorije bez djelovanja vanjskih poremećaja i s mjerljivim varijablama stanja

Na slici 6.5 je vidljivo da je praćenje referentne trajektorije vrlo precizno. U početne dvije sekunde ne slijedi precizno jer tek onda "hvata" referentnu trajektoriju. Pogreška praćenja je i više nego iznimna. Kod upravljačke varijable se mogu isto tako vidjeti neke oscilacije na početku slijeđenja što se lako može riješiti nekim limitiranjem poput saturacijske funkcije.

### 6.2.2. Upravljanje kvadkopterom s poremećajem i s mjerljivim varijablama stanja

Kad bi se dodao neki vanjski poremećaj poput vjetra na kvadkopter, diferencijalne jednažbe koje bi opisivale takvu dinamiku su

$$\ddot{x} = g\theta + \frac{1}{m}d_{01}, \quad (6.15)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{YY}}u_3 + \frac{1}{I_{YY}}d_{02}. \quad (6.16)$$

Cilj upravljanja upravo jest slijeđenje referentne trajektorije  $x_{0d}(t)$  pa se tako definira greška slijeđenja

$$\tilde{x} = x - x_{0d}(t). \quad (6.17)$$

Iz jednažbi (5.48) vidljivo je da se greška slijeđenja  $\tilde{x}$  stabilizira upravljačkom varijablom  $u_3$ , jer jednažba (6.15) ovisi samo o  $\theta$ . Jednažba pogreške drugog reda definira se kao

$$\ddot{\tilde{x}} = -\ddot{x}_{0d} + g\theta + \frac{1}{m}d_{01}. \quad (6.18)$$

Ako se sad prethodno navedena jednažba derivira dva puta, eksplicitno se pojavljuje upravljačka varijabla  $u_3$ .

$$\tilde{x}^{(4)} = -x_{0d}^{(4)} + g\ddot{\theta} + \frac{1}{m}\ddot{d}_{01}. \quad (6.19)$$

Daljnijim uvrštavanjem (6.16) u (6.19) dobiva se

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(4)} &= -x_{0d}^{(4)} + \frac{g}{I_{YY}}(u_3 + d_{02}) + \frac{1}{m}\ddot{d}_{01} \\ &= -x_{0d}^{(4)} + \frac{g}{I_{YY}}u_3 + d_0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Zbrajanjem poremećaja dobiva se tzv. kumulativni poremećaj prema (6.21)

$$d_0 = \frac{g}{I_{YY}}d_{02} + \frac{1}{m}\ddot{d}_{01}. \quad (6.21)$$

Pošto se u (6.20) javlja upravljačka varijabla  $u_3$ , sljedeći korak je njen izbor

$$u_3 = \frac{I_{YY}}{g} \left( x_{0d}^{(4)} - K_3 \ddot{\tilde{x}} - K_2 \dot{\tilde{x}} - K_1 \tilde{\dot{x}} - K_0 \tilde{x} - \hat{d}_0 \right), \quad (6.22)$$

gdje  $\hat{d}_0$  predstavlja estimaciju kumulativnog poremećaja. Konačna dinamika pogreške je

$$\tilde{x}^{(4)} + K_3 \ddot{\tilde{x}} + K_2 \dot{\tilde{x}} + K_1 \tilde{\dot{x}} + K_0 \tilde{x} = \tilde{d}_0, \quad (6.23)$$

pri čemu je  $\tilde{d}_0 = d_0 - \hat{d}_0$ . Konačni izraz nakon uvrštavanja  $\tilde{x} = x - x_{0d}$ ,  $\tilde{\dot{x}} = \dot{x} - \dot{x}_{0d}$ ,  $\tilde{\ddot{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_{0d}$ ,  $\tilde{\ddot{\tilde{x}}} = \ddot{\tilde{x}} - \ddot{\tilde{x}}_{0d}$  u (6.23) dobiva se u obliku

$$u_3 = \frac{I_{YY}}{g} \left( x_{0d}^{(4)} - K_3 (\ddot{\tilde{x}} - \ddot{\tilde{x}}_{0d}) - K_2 (\dot{\tilde{x}} - \dot{\tilde{x}}_{0d}) - K_1 (\tilde{\dot{x}} - \tilde{\dot{x}}_{0d}) - K_0 (\tilde{x} - \tilde{x}_{0d}) - \hat{d}_0 \right). \quad (6.24)$$

U ovome slučaju pretpostavlja se da su mjerljive sve veličine stanja kvadrokoptera pošto se razmatra samo kako poremećaj utječe na cjelokupnu dinamiku.

Ukupni poremećaj i estimacija poremećaja reprezentiraju se preko Laguerreovih filtera kao i kod dinamičkog sustava drugog reda opisanog u drugome poglavlju,

$$d_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i L_i(t), \quad (6.25)$$

$$\hat{d}_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{k}_i L_i(t). \quad (6.26)$$

Potrebno je i definirati sliding varijablu  $s$ , pošto se radi o adaptivnom upravljanju. Pa ako se uzme u obzir sljedeći izraz

$$\tilde{x}^{(4)} + K_3 \ddot{\tilde{x}} + K_2 \dot{\tilde{x}} + K_1 \tilde{x} + K_0 \tilde{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{k}_i L_i(t), \quad (6.27)$$

gdje vrijedi da je  $\tilde{k}_i = k_i - \hat{k}_i$ . Također definira se sliding varijabla kao

$$s = \ddot{\tilde{x}} + \alpha_2 \dot{\tilde{x}} + \alpha_1 \tilde{x} + \alpha_0 \tilde{x}, \quad (6.28)$$

tada se jednadžba (6.27) zapisuje kao

$$\dot{s} + \lambda s = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{k}_i L_i(t). \quad (6.29)$$

Deriviranjem i uvrštavanjem (6.28) u (6.29) konačno se dobiva

$$\tilde{x}^{(4)} + (\alpha_2 + \lambda) \ddot{\tilde{x}} + (\alpha_1 + \lambda \alpha_2) \dot{\tilde{x}} + (\alpha_0 + \lambda \alpha_1) \tilde{x} + \alpha_0 \lambda \tilde{x} = \sum_{i=1}^N \tilde{k}_i L_i(t), \quad (6.30)$$

gdje se uzima konačna suma s obzirom da za poremećaje konačne energije poput kratkotrajnih udara vjetra, Laguerreovi redovi konvergiraju relativno brzo. Koeficijenti  $\alpha_i$  se određuju metodom podešavanja polova te redom iznose  $\alpha_0 = 6$ ,  $\alpha_1 = 11$  i  $\alpha_2 = 6$ . Tada se pojačanja mogu direktno izračunati za slobodno odabrani parametar  $\lambda = 5$ , dok je red Laguerreovog filtera  $n = 15$ . Iz jednadžbe (6.30) vidljivo je da se pojačanja određuju preko relacija

$$\begin{aligned} K_3 &= \alpha_2 + \lambda, \\ K_2 &= \alpha_1 + \lambda \alpha_2, \\ K_1 &= \alpha_0 + \lambda \alpha_1, \\ K_0 &= \alpha_0 \lambda, \end{aligned} \quad (6.31)$$

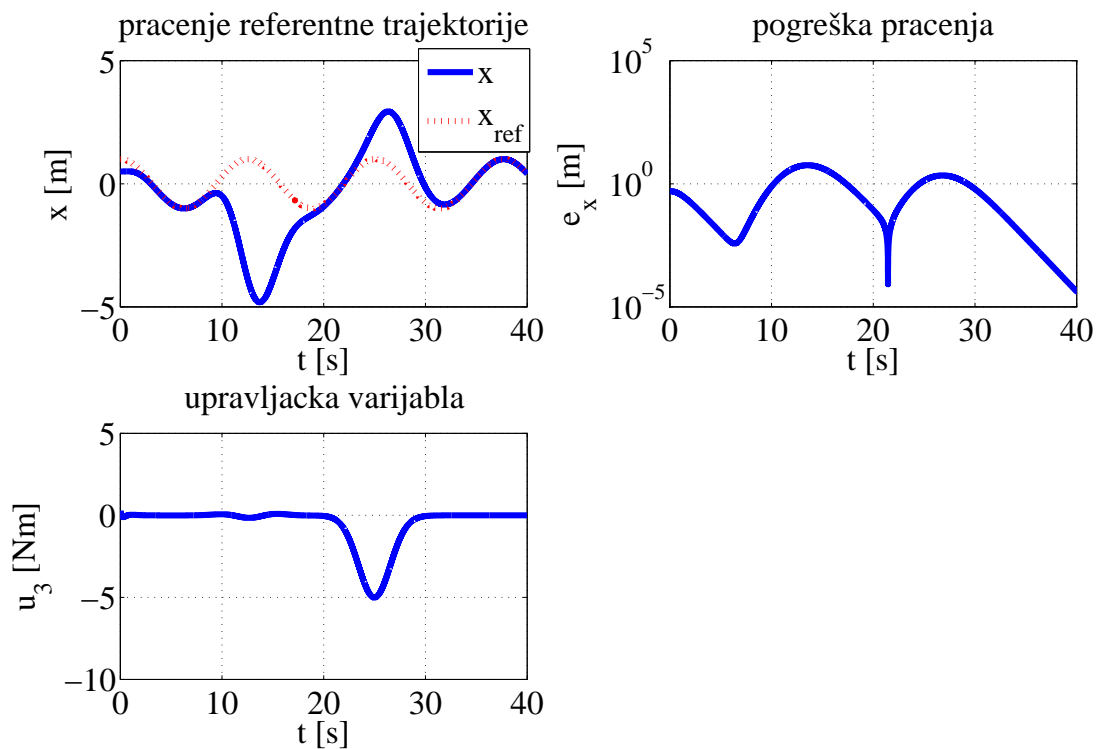
te redom iznose  $K_3 = 11$ ,  $K_2 = 41$ ,  $K_1 = 36$  i  $K_0 = 30$ . Konačno primjenom Lyapunovljeve analize stabilnosti kao i kroz jednadžbe (3.12) do (3.19), dobiva se zakon adaptacije

$$\dot{\hat{k}}_i = \frac{1}{\beta_i} L_i(t) s. \quad (6.32)$$

Poremećaji koji djeluju na kvadkopter su prikazani Gausovim funkcijama oblika i predstavljaju neke realne nalete vjetra. Radi se o sljedećim poremećajima

$$\begin{aligned} d_{01} &= 5e^{-0.2(t-15)^2}, \\ d_{02} &= -5e^{-0.2(t-30)^2}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Na slici 6.6 prikazano je slijeđenje referentne trajektorije s djelovanjem vanjskih poremećaja  $d_{01}$  i  $d_{02}$  bez kompenzacije tih poremećaja.



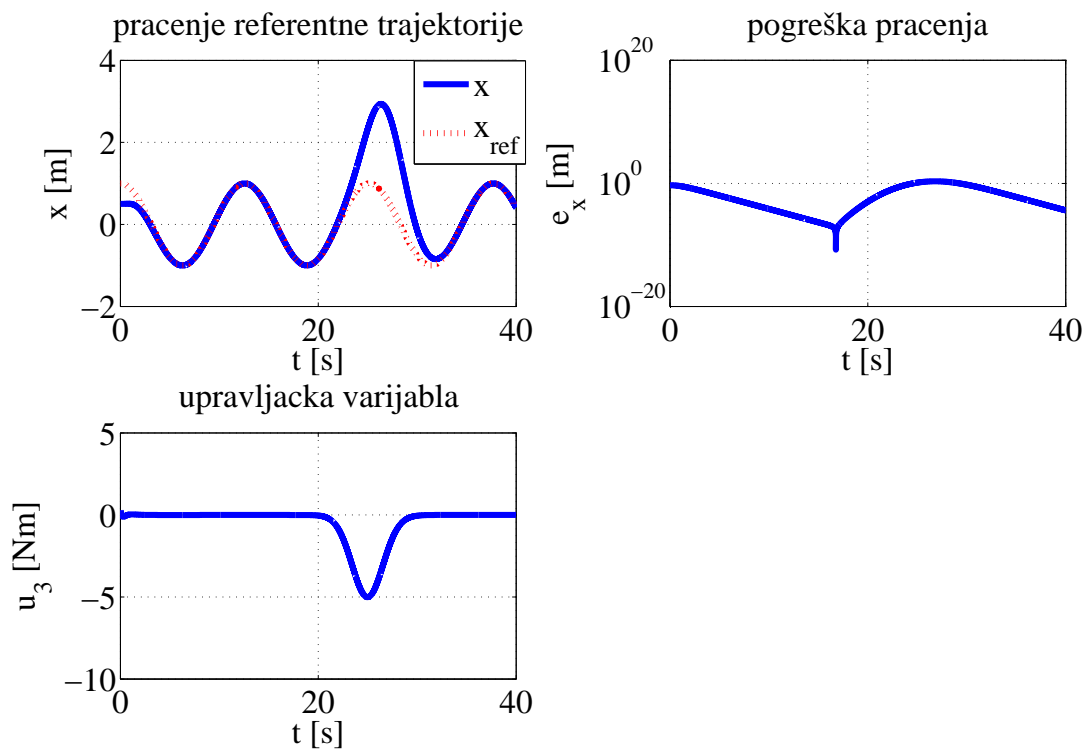
Slika 6.6: Praćenje referentne trajektorije s djelovanjem oba vanjska poremećaja bez kompenzacije poremećaja

Na slici se jasno vidi kako poremećaji utječu na slijeđenje trajektorije tako da u trenutku njihova djelovanja dolazi najvećeg odstupanja od slijeđenja. Iz pogreške praćenja se može uočiti da je pogreška nešto izraženija u određenim trenucima. Naravno radi

se o početku slijeđenja dok se ne "uhvati" referentna trajektorija i u trenucima djelovanja poremećaja. Također, vrijednosti upravljačke varijable su nešto veće kako bi se stabiliziralo slijeđenje nakon djelovanja poremećaja.

### 6.2.3. Upravljanje kvadrokopterom s poremećajem i s mjerljivim varijablama stanja bez i sa kompenzacijom poremećaja

Kako se kod kumulativnog poremećaja prema (6.21) javlja poremećaj  $d_{02}$  te druga derivacija poremećaja  $d_{01}$ , prvo će se promotriti djelovanje poremećaja  $d_{02}$ .

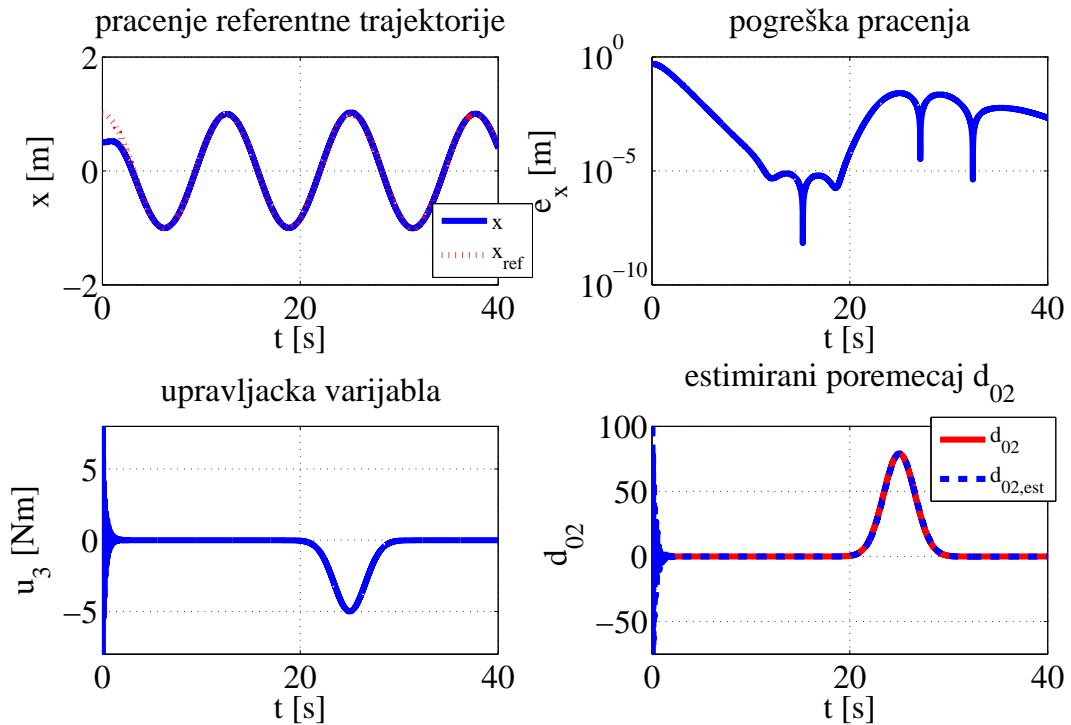


Slika 6.7: Upravljanje kvadrokopterom bez kompenzacije poremećaja  $d_{02}$  i s mjerljivim varijablama stanja

Kao što je vidljivo, osim na početku slijeđenja, prilikom djelovanja poremećaja  $d_{02}$  dolazi do najvećeg odstupanja pa je i pogreška u tim trenucima najveća. Sukladno amplitudi

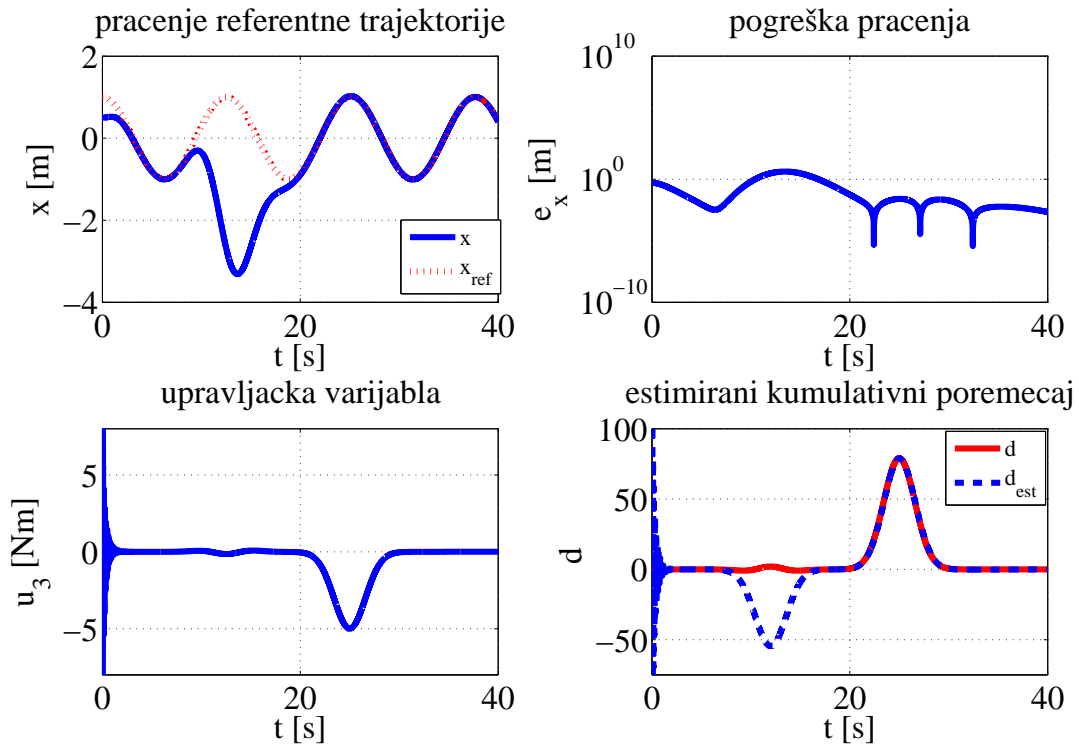


poremećaja, djeluje odgovarajuća upravljačka varijabla za stabilizaciju.



Slika 6.8: Upravljanje kvadkopterom s kompenzacijom poremećaja  $d_{02}$  i s mjerljivim varijablama stanja

Za estimaciju poremećaja  $d_{02}$  u obzir će se uzeti parametar adaptacije  $\beta_i = 0.001$  za kojeg je estimacija poremećaja bila najbolja. Primjenjujući kompenzaciju poremećaja, slijeđenje referentne trajektorije je iznimno precizno. Pogreška praćenja je iznimno mala, osim na početku slijeđenja. Također malo poraste nakon djelovanja poremećaja, što je očekivano, no sa stanovišta upravljanja to povećanje je zanemarivo. Što se tiče momenta upravljanja, tj. upravljačke varijable, na početku djelovanja javlja se *picking* što je posljedica estimacije samog poremećaja. Ukoliko bi se javila veća amplituda poremećaja potrebno je smanjiti parametar adaptacije  $\beta_i$ , dok u drugome slučaju se može povećati. Nakon što se pojedinačno estimirao poremećaj  $d_{02}$ , slijedi estimacija kumulativnog poremećaja kod kojeg se uzima u obzir djelovanje poremećaja  $d_{01}$ . U ovome slučaju to je njegova druga derivacija prema (6.21).



Slika 6.9: Upravljanje kvadkopterom s kompenzacijom kumulativnog poremećaja i s mjerljivim varijablama stanja

Kod estimacije kumulativnog poremećaja vidljivo je da nije moguće estimirati poremećaj  $d_{01}$  na isti način kao i  $d_{02}$ . Naime estimirana je njegova prava vrijednost, dok se kod kumulativnog poremećaja javlja druga derivacija poremećaja  $d_{01}$ . Stoga bi bilo potrebno koristiti estimacije viših derivacija stanja kvadkoptera kako bi se estimirao i kompenzirao taj poremećaj.

#### 6.2.4. Upravljanje kvadkopterom bez poremećaja i s estimiranim varijablama stanja

U većini slučajeva primjene kvadkoptera poznata je samo njegova pozicija po određenoj osi u prostoru. Kako bi se dalje moglo upravljati njime, potrebno je estimirati ostale varijable stanja koje su zapravo derivacije pozicije. Kako je već rečeno da se ovdje promatra upravljanje po  $x$  osi, osim poznate pozicije potrebno je odrediti  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x} = g\theta$  te

$\ddot{x} = g\theta$ . Tada se te estimirane vrijednosti uvrštavaju umjesto pretpostavljenih mjerljivih veličina u (6.13). Za to je prvo potrebno definirati filter koji će pomoću Laguerreovih filtera estimirati navedene veličine. Ako se pretpostavi inicijalni oblik filtera

$$\dot{z}_1 = -q_1(z_1 - x(t)) + u_1, \quad (6.34)$$

gdje je  $z_1$  varijabla stanja filtera,  $x(t)$  je ulazni signal čija se derivacija estimira,  $q_1$  je pozitivno pojačanje filtera, dok je  $u_1$  pomoćna upravljačka funkcija koja se određuje iz uvjeta da odstupanje  $\tilde{z}_1 = z_1 - x$  konvergira prema nuli. S obzirom da je  $\dot{\tilde{z}}_1 = \dot{z}_1 - \dot{x}$  tada vrijedi

$$\dot{\tilde{z}}_1 = -\dot{x} - q_1\tilde{z}_1 + u_1. \quad (6.35)$$

Da bi  $\tilde{z}_1 \rightarrow 0$ , isto tako treba  $u_1 \rightarrow \dot{x}$  kako bi dinamika pogreške bila

$$\dot{\tilde{z}}_1 = -q_1\tilde{z}_1. \quad (6.36)$$

Pretpostavka je da je signal  $\dot{x}$  reprezentiran Laguerreovim funkcijama

$$\dot{x} = \mathbf{b}_{e1}^T \mathbf{L}(t), \quad (6.37)$$

te da se s pomoćnom varijablom

$$u_1 = \hat{\mathbf{b}}_{e1}^T \mathbf{L}(t) \quad (6.38)$$

želi estimirati  $\dot{x}$ . Uvrštavanjem prethodnih izraza u (6.35) dobiva se

$$\dot{\tilde{z}}_1 = -q_1\tilde{z}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_{e1}^T \mathbf{L}(t), \quad (6.39)$$

gdje je  $\tilde{\mathbf{b}}_{e1} = \hat{\mathbf{b}}_{e1} - \mathbf{b}_{e1}$  odstupanje estimiranih parametara  $\hat{\mathbf{b}}_{e1}$  od realnih konstantnih

parametara  $\mathbf{b}_{e1}$ .

Nakon toga formira se Lyapunovljeva funkcija oblika

$$V(\tilde{z}_1, \tilde{\mathbf{b}}_{e1}) = \frac{1}{2}\tilde{z}_1^2 + \frac{1}{2}q_2\tilde{\mathbf{b}}_{e1}^T\tilde{\mathbf{b}}_{e1}, \quad (6.40)$$

te se nakon deriviranja sličnim postupkom kao i u (3.12) do (3.14) dobiva

$$\dot{V}(\tilde{z}_1, \tilde{\mathbf{b}}_{e1}) = -q_1\tilde{z}_1^2 + \tilde{\mathbf{b}}_{e1}^T \left( \tilde{z}_1\mathbf{L}(t) + q_2\dot{\tilde{\mathbf{b}}}_{e1} \right). \quad (6.41)$$

Da bi derivacija Lyapunovljeve funkcije bila negativno semidefinitna  $\dot{V} = -q_1\tilde{z}_1^2$ , izraz u zagradi mora biti jednak nuli, odnosno mora vrijediti

$$\dot{\tilde{\mathbf{b}}}_{e1} = -\frac{1}{q_2}\tilde{z}_1\mathbf{L}(t), \quad (6.42)$$

što je adaptivni zakon podešavanja parametara. Dakle,  $u_1 = \hat{\mathbf{b}}_{e1}^T\mathbf{L}(t)$  predstavlja estimaciju prve derivacije signala  $x(t)$ .

Ukoliko se želi estimirati druga derivacija, umjesto varijable  $x(t)$  kao ulaznog signala, ubacuje se estimirana prva derivacija, odnosno

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -q_1(z_2 - u_1) + u_2, \\ u_2 &= \hat{\mathbf{b}}_{e2}^T\mathbf{L}(t), \\ \dot{\hat{\mathbf{b}}}_{e2} &= -\frac{1}{q_2}\tilde{z}_2\mathbf{L}(t), \end{aligned} \quad (6.43)$$

pri čemu je  $\tilde{z}_2 = z_2 - u_1$ , dok je  $u_2$  estimacija druge derivacije signala  $x(t)$ .

Poopćenjem prethodno navedenih izraza može se dobiti filter za estimaciju prvih  $n$  derivacija ulaznog signala  $x(t)$ .

Pa se tako poopćena forma filtera za estimaciju derivacija može zapisati kao

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -q_1(z_1 - x) + u_1, \\ \dot{z}_2 &= -q_1(z_2 - u_1) + u_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= -q_1(z_n - u_{n-1}) + u_n. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Estimacija pozicije  $x$  i njegovih derivacija  $u_n$  reprezentiraju se Laguerreovim funkcijama

$$\dot{x} = \mathbf{b}_{e1}^T \mathbf{L}(t), \quad (6.45)$$

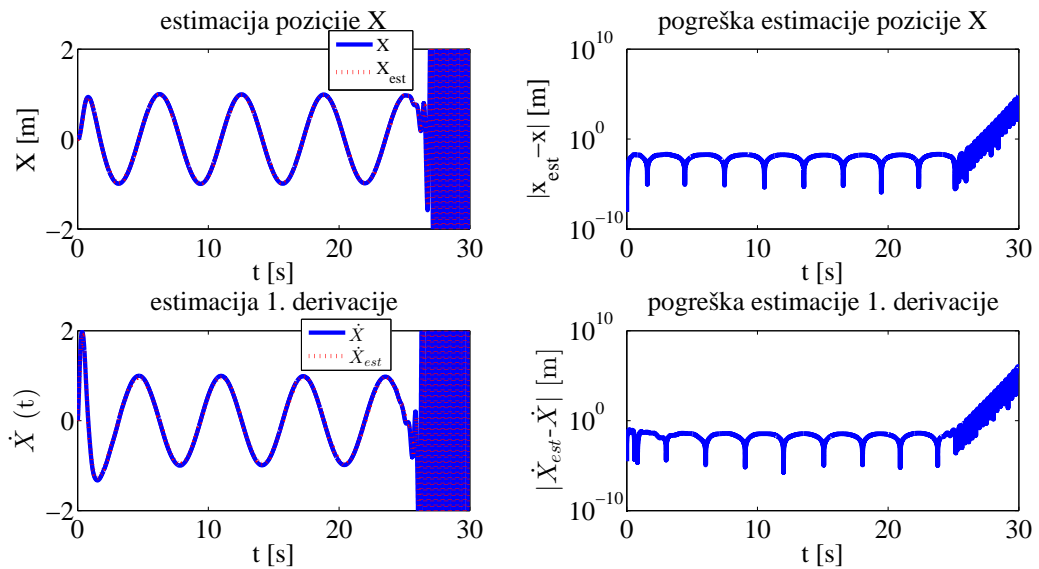
te

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{\mathbf{b}}_{e1}^T \mathbf{L}(t), \\ u_2 &= \hat{\mathbf{b}}_{e2}^T \mathbf{L}(t), \\ &\vdots \\ u_n &= \hat{\mathbf{b}}_{en}^T \mathbf{L}(t). \end{aligned} \quad (6.46)$$

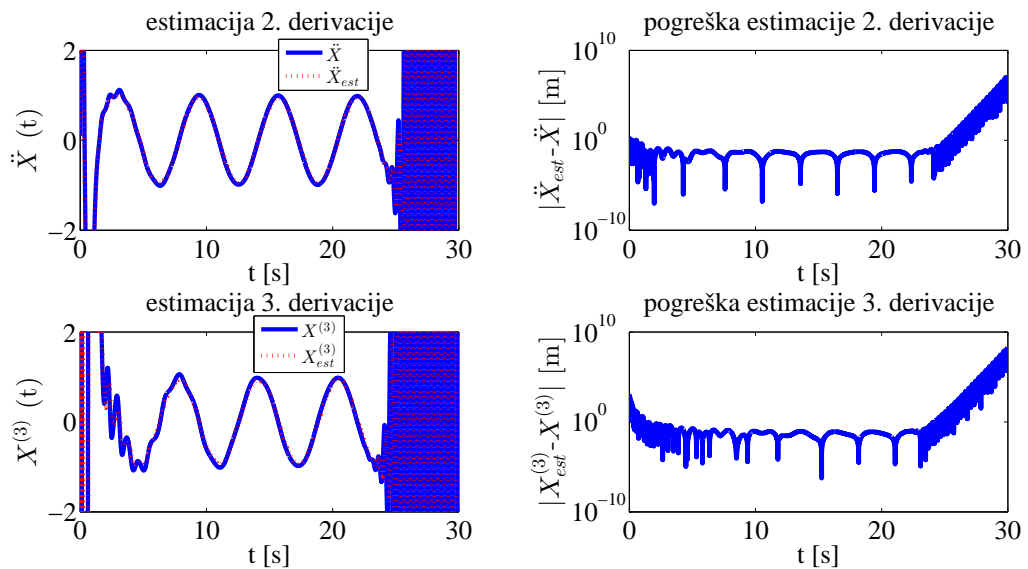
Konačno, za implementaciju filtera za estimaciju derivacija poopćeni oblik koeficijenta Laguerreovih funkcija  $b_{en}$  jest.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_{e1} &= \frac{1}{q_2} \tilde{z}_1 \mathbf{L}(t), \\ \hat{\mathbf{b}}_{e2} &= \frac{1}{q_2} \tilde{z}_2 \mathbf{L}(t), \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_{en} &= \frac{1}{q_2} \tilde{z}_n \mathbf{L}(t), \end{aligned} \quad (6.47)$$

pri čemu vrijedi da je  $\tilde{z}_n = z_n - u_{n-1}$ . Kako je potrebno estimirati do treće derivacije pozicije, prvo je za primjer uzet dinamički sustav četvrtog reda bez poremećaja kako bi se čim jednostavnije provjerila implementacija filtera. Pa se tako na sljedećim slikama može vidjeti kakve su estimacije tih derivacija u slučaju slijeđenja referentne trajektorije  $x_d = \sin(t)$ . Isto tako navedeni su i slučajevi u kojima ne dolazi do dobre estimacije, te koji su razlozi tome. Na kraju prikazano je upravljanje kvadkopterom bez poremećaja gdje se koristi estimacija varijabli stanja.



Slika 6.10: Estimacija pozicije i prve derivacije dinamičkog sustava četvrtog reda bez poremećaja pri slijeđenju referentne trajektorije  $x_d = \sin(t)$



Slika 6.11: Estimacija druge i treće derivacije pozicije dinamičkog sustava četvrtog reda bez poremećaja pri slijeđenju referentne trajektorije  $x_d = \sin(t)$

Na slikama 6.10 i 6.11 prikazana je estimacija viših derivacija pozicije pri slijeđenju periodičke trajektorije  $x_d = \sin(t)$ . Slijeđenje referentnih trajektorija kao i pogreške slijeđenja su vrlo precizne osim na početku slijeđenja te nakon nekih 25 sekundi. Isto tako, to predstavlja dva problema koja nije moguće riješiti direktnim podešavanjem parametara regulatora kao ni mjenjanjem parametra Laguerreovih filtera.

Prvi problem koji se može uočiti jest da nakon 25 sekundi simulacije slijeđenja referentne trajektorije dolazi do destabilizacije. Razlog tome je što nakon nekog vremena aproksimacija funkcije preko Laguerreovih funkcija gubi na točnosti. Kako bi se riješio taj problem, trebalo bi uvesti periodičko resetiranje u intervalima prije nego što aproksimacija tj. slijeđenje izgubi značajnije na točnosti. Pa bi se tako uvela dva ista estimatora koji bi u tim intervalima (u ovome slučaju 25 sekundi) radili u tzv. modu preklapanja ili "switching" modu. To zapravo znači da bi se naizmjenično tijekom isteka navedenog vremena prebacivali estimatori koji zapravo imaju istu funkciju. U konačnici time bi se izbjeglo naglo povećanje amplitude i izbjeglo uvođenje šuma signala. Isto tako točnost bi ostala ista i ne bi dolazilo do diskontinuiteta u slijeđenju signala [15].

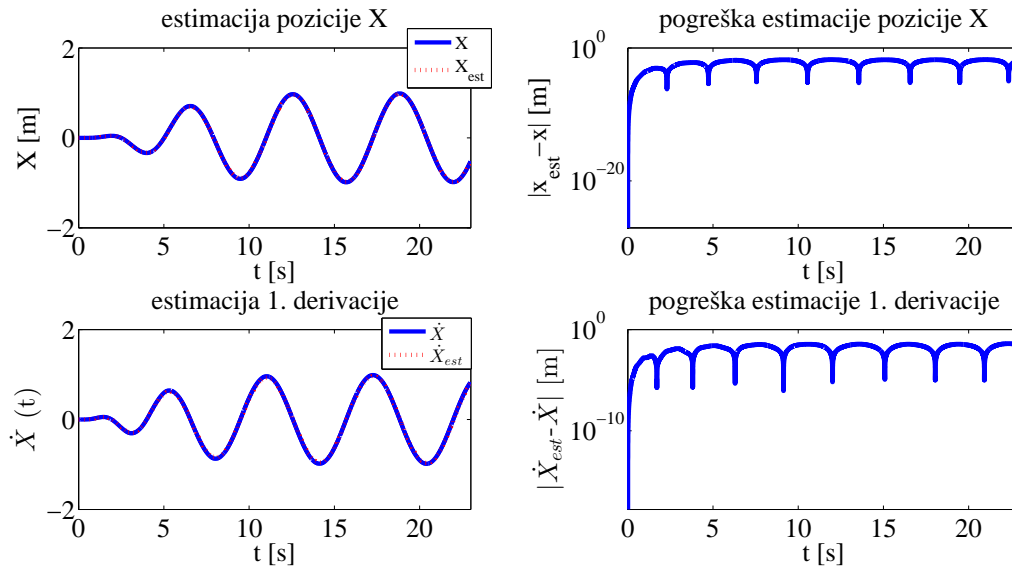
Drugi problem koji se javlja jest naglo povećanje signala na početku slijeđenja. Na slici 6.10 se može vidjeti da kod 1. derivacije dolazi do manje izraženog povećanja signala, dok na slici 6.11 2. i 3. derivacija već poprimaju veće vrijednosti na početku slijeđenja. To se može riješiti uvođenjem saturacijske funkcije u kojoj se navodi maksimalna gornja i donja vrijednost amplitude koja tada ograničava navedene estimacije na te vrijednosti. Elegantnije rješenje bi bilo da se referentnoj trajektoriji dodijeli funkcija koja bi garantirala da viši stupnjevi njezinih derivacija u  $t = 0$  budu jednaki nuli. Upravo se i zbog toga javlja "picking", jer slijeđenje samo referentne trajektorije  $x_d = \sin(t)$  ima za posljedicu da što se radi o višim njenim derivacijama, to će sve brže težiti u beskonačnost u  $t = 0$ . Zbog toga će se za daljnje razmatranje referentna trajektorija zapisati u obliku

$$\bar{x}_d = (1 - e^{-\kappa t})^\delta x_d(t), \quad (6.48)$$

pri čemu faktor  $\delta$  određuje točnost i brzinu slijeđenja dok je  $\kappa$  slobodni parametar pri estimaciji derivacija. Dakle čim je  $\delta$  veći to će slijeđenje biti bolje i preciznije. Ovisno o stupnju estimacije derivacije i referentnoj trajektoriji, namještanjem tih dvaju parametara dobivaju se najbolji rezultati.

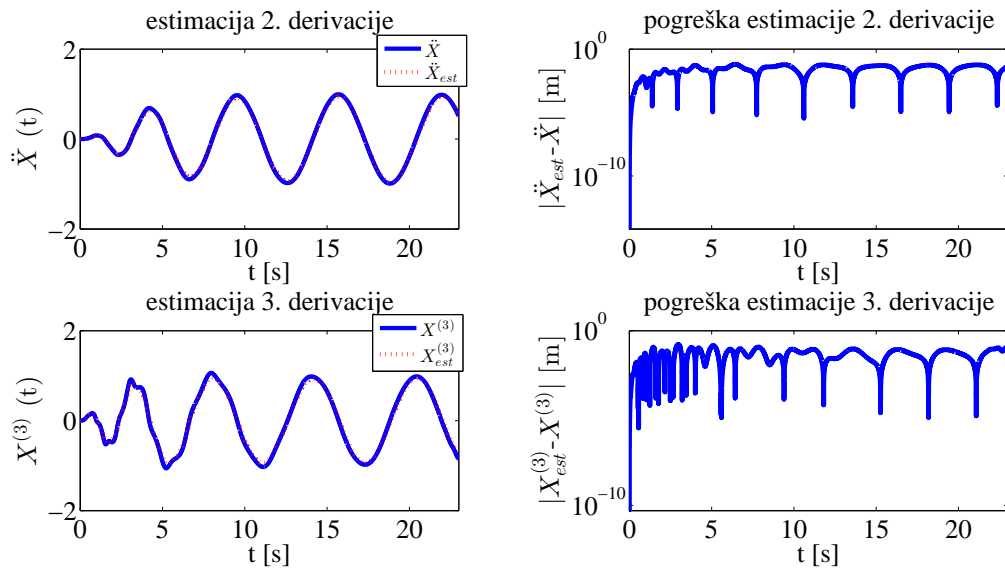
Sljedeće slike upravo prikazuju estimaciju za modificiranu referentnu trajektoriju (6.48)

kao i trajanje simulacije od 25 sekundi (mod rada jednog estimatora čiji se modovi ciklički prebacuju).



Slika 6.12: Estimacija pozicije i prve derivacije dinamičkog sustava četvrtog reda bez poremećaja pri slijeđenju referentne trajektorije  $\bar{x}_d = (1 - e^{-0.45t})^{6.5} \sin(t)$

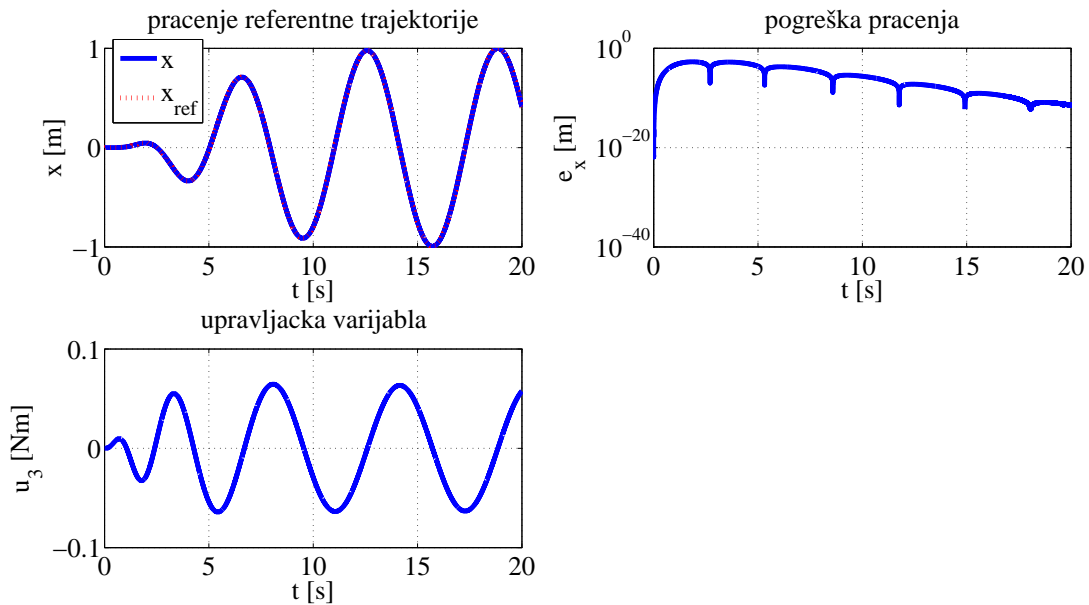




Slika 6.13: Estimacija druge i treće derivacije pozicije dinamičkog sustava četvrtog reda bez poremećaja pri slijeđenju referentne trajektorije  $\bar{x}_d = (1 - e^{-0.45t})^{6.5} \sin(t)$

Na slikama 6.12 i 6.13 estimacija pozicije kao i pripadne derivacije su veoma precizne. Također greške u estimaciji su vrlo malene, u zadovoljavajućim okvirima. Važno je napomenuti da vrijeme između prebacivanja modova estimatora te parametri  $\kappa$  i  $\delta$  ovise od sustava do sustava. Najčešće se te vrijednosti povećavaju, odnosno vrijeme smanjuje, kako se radi o sustavu većeg reda. Upravo se tada estimiraju derivacije viših redova pa se zahtijeva iterativnim putem optimizacija tih parametara.

Konačno na slici 6.14 prikazano je slijeđenje referentne trajektorije kvadkoptera modificirane na prethodno prikazani način.

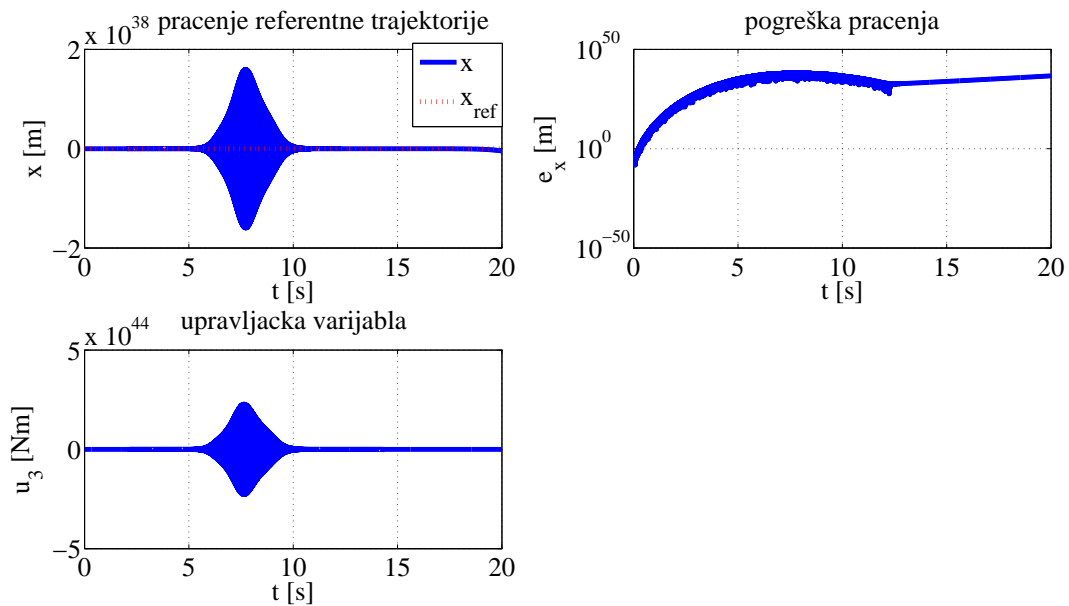


Slika 6.14: Upravljanje kvadkopterom bez poremećaja s estimiranim varijablama stanja i modificiranom referentnom trajektorijom  $\bar{x}_d = (1 - e^{-0.45t})^{6.5} \cos(0.5t)$

Pošto je linearizirani dinamički sustav kvadkoptera zapravo sustav četvrtog reda, očekivano je ponašanje sustava kao na slici 6.14. Osim što je modificirana referentna trajektorija na način da bi se osigurale točnije estimacije viših derivacija, potrebno je bilo napraviti još neke prilagodbe. Na samu estimaciju destabilizirajuće djelovanje je uzrokovao početni uvjet kod slijeđenja. Naime što je početni uvjet pozicije po  $x$  osi veći, to se javlja veći *picking* na početku slijeđenja. Iz tog razloga parametri regulatora i Laguerreovih filtera za koje je slijeđenje izvršeno su za početnu poziciju  $x_0 = 0.1$  m. Isto tako preklapanje modova estimatora koje je prije spomenuto, potrebno je izvršavati nakon svakih 20 sekundi.

### 6.2.5. Upravljanje kvadkopterom s poremećajem i s estimiranim varijablama stanja

Pošto je kombinacija estimacije brzine i poremećaja istodobno bila neuspješna u smislu slijeđenja kod dinamičkog sustava drugog reda (poglavlje 4), ne očekuje se ni bolji rezultat kod kvadkoptera koji je sustav četvrtog reda.



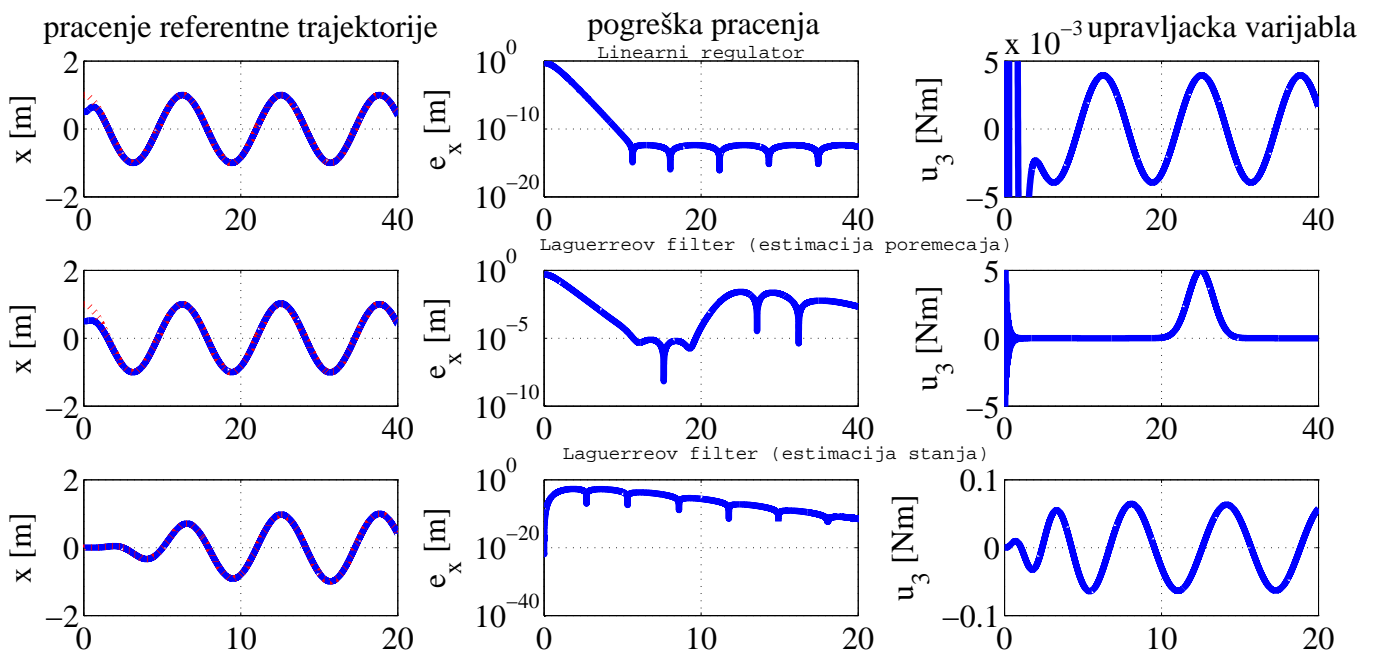
Slika 6.15: Upravljanje kvadkopterom s kombinacijom estimacije poremećaja i varijabli stanja

Prethodna pretpostavka je opravdana, jer je vidljivo da se prilikom slijeđenja referentne trajektorije poprimaju ekstremne vrijednosti u trenutku djelovanja prvog poremećaja. Isto vrijedi i za upravljačku varijablu. Što se tiče pogreške praćenja, vrijednosti su također neprihvatljive osim kroz prve dvije sekunde, a isto tako je vidljivo da nakon prestanka djelovanja prvog poremećaja ona pada. Nakon djelovanja drugog poremećaja, greška opet neprihvatljivo raste. Iz tog se upravo daje naslutiti kako bi bez estimacije poremećaja slijeđenje bilo uspješno samo s estimiranim varijablama stanja, a vrijedilo bi i obratno. U svakome slučaju kombinacija takvog upravljanja je pogubna. Razlog tome je adaptivno upravljanje koje je osjetljivo na permutaciju regresijske matrice što

obično ima za posljedicu malo povećanje regulacijske pogreške. U ovome slučaju dolazi do osjetne destabilizacije sustava.

### 6.3. Usporedba performansi regulatora

Kako bi se usporedile performanse korištenog regulatora i filtera, usporediti će se njihovo praćenje referentnih trajektorija, pogreška praćenja i upravljačka varijabla.



Slika 6.16: Komparativna analiza linearnog regulatora s adaptivnim Laguerreovim filterima za estimaciju i kompenzaciju poremećaja te estimaciju stanja

Na slici 6.16 redom su prikazani odnosi slijeđenja referentnih trajektorija, pogreška slijeđenja i upravljačkih varijabli. Kroz prvi redak se može vidjeti linearni regulator, drugi se odnosi na adaptivni Laguerreov filter s estimacijom i kompenzacijom poremećaja te treći redak isti Laguerreov filter ali s estimacijom varijabli stanja.

Što se tiče samog slijeđenja trajektorija, sva tri regulatora su vrlo precizna, uz iznimku da se kod Laguerreovog filtera s estimacijom varijabli stanja modificira referentna trajektorija. Isto tako kod tog regulatora potrebno je izvršavati "switching" istih estimatora

nakon određenog vremena, pa je ovdje prikazano slijeđenje za jedan period od 20 sekundi.

Što se pak pogreške praćenja tiče, sva tri regulatora zadovoljavaju. Kod linearnog regulatora i Laguerreovog filtera za estimaciju poremećaja pogreške su najmanje osim na početku slijeđenja za što je uzrok početni uvjet pozicije. Kod filtera za estimaciju stanja ta pogreška je nešto veća u odnosu na druga dva regulatora, makar to je zanemarivo.

Upravljačka varijabla kod linearnog regulatora je očekivano najmanjeg iznosa, no na početku slijeđenja zbog početnog uvjeta javljaju se oscilacije koje se potom stabiliziraju. Pri adaptivnom Laguerreovm filteru s estimacijom stanja upravljačka varijabla je reda veličine veća, ali zbog smanjenja vrijednosti početnog uvjeta pozicije nema velikih oscilacija na početku. Očekivano najveće vrijednosti poprima upravljačka varijabla kod Laguerreovog filtera za estimaciju poremećaja, jer upravo ona kompenzira poremećaj.

## 7 | Zaključak

Kroz ovaj rad obrađeni su Laguerreovi filteri i njihova primjena na MDS sustavu koji predstavlja dinamički sustav drugog reda, te lineariziranom modelu kvadkoptera koji predstavlja dinamički sustav četvrtog reda. Nakon matematičkog izvoda Laguerreovih funkcija i primjene istih filtera na dinamički sustav drugog reda, objašnjen je princip rada kvadkoptera te su izvedeni pripadni dinamički i kinematički modeli. Na osnovu lineariziranog modela provedena je sinteza linearnog regulatora. Također, implementacijom adaptivnih Laguerreovih filtera cilj je bio na osnovu poznatog samo položaja letjelice vršiti upravljanje. Isto tako djelovanjem nekih realnih poremećaja poput vjetra, višena je estimacija istih i kompenzacija za uspješno upravljanje. Jedina prepreka koja se javlja kod adaptivnih Laguerreovih filtera jest osjetljivost na permutaciju regresijske matrice. To uzrokuje da prilikom istodobne estimacije stanja i poremećaja dolazi do destabilizacije sustava. U kombinaciji sa sliding-mode regulacijom ili RISE regulatorom te ostalim sličnim regulatorima, to ne bi predstavljalo problem.

Kombinacija adaptivnog pa i ostalih vrsta upravljanja s Laguerreovim filterima je veoma pogodna zbog toga što se smatraju univerzalnim aproksimatorima pri reprezentaciji nekog signala. Koristeći ih u estimaciji i kompenzaciji poremećaja dobivaju se iznimne performanse regulatora. Na isti način ako se služe kao estimatori stanja pravilnim odabirom parametra mogu se smatrati jednim od boljih estimatora. No možda jedna od najvećih prednosti jest upravo relativna jednostavnost implementacije u smislu poznavanja dinamičkog sustava na koji se primjenjuju.

# Literatura

- [1] Bo Wahlberg. Laguerre and Kautz models. Third IFAC System Identification, Copenhagen, Danska, 1994.
- [2] Liuping Wang. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using Matlab*. Springer-Verlag, 2009.
- [3] Lhoussain El Bahir. Continuous-time Generalized Predictive Control based on Poisson-Laguerre models. *Second World Conference on Complex Systems (WCCS)*, 2(1):317–322, 2014.
- [4] Wameedh Abdul-Adheem and Ibraheem Kasim Ibraheem. From PID to Nonlinear State Error Feedback Controller. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 8(1):312–322, 2017.
- [5] Josip Kasać. *Vođenje tehničkih sustava-materijali za predavanja i vježbe*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2007.
- [6] Krossblade Aerospace Systems. History of Quadcopters and Multirotors. <http://www.krossblade.com/history-of-quadcopters-and-multirotors/>. Dostupno: 29.05.2019.
- [7] Wired. Professional Quadcopter for Video Capturing. <http://www.wired.com/2015/06/review-dji-phantom-3-professional-drone/>. Dostupno: 29.05.2019.

- [8] Francesco Sabatino. Quadrotor Control: Modelling, Nonlinear Control Design, and Simulation. Master's thesis, School of Electrical Engineering and Computer Science, Stockholm University, 2015.
- [9] Drona Aviation. Propulsion and Vertical Motion. <http://www.dronaaviation.com/learn-module-5-propulsion-and-vertical-motion/>. Dostupno: 30.05.2019.
- [10] Tommaso Bresciani. Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter. Master's thesis, Department of Automatic Control, Lund University, 2008.
- [11] Sergio Ronaldo Barros dos Santos, Cairo L. Nascimento Jr., and Sidney Givigi. Design of Attitude and Path Tracking Controllers for Quadrotor Robots Using Reinforcement Learning. IEEE Aerospace Conference Proceedings, São Paulo, Brazil, 2012.
- [12] T. Perez. *Ship Motion Control: Course Kepping and Roll Stabilisation using Rudder and Fins*. Springer-Verlag, 2005.
- [13] Dubravko Majetić, Josip Kasać, and Danko Brezak. *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja-Viševarijabilni sustavi*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.
- [14] Josip Kasać, Stojan Stevanović, Tihomir Žilić, and Josip Stepanić. Robust output tracking control of a quadrotor in the presence of external disturbances. *Transactions of Famena*, 37(4):29–42, 2013.
- [15] Josip Kasać, Dubravko Majetić, and Danko Brezak. An algebraic approach to on-line signal denoising and derivatives estimation. *Journal of the Franklin Institute*, 355(15):7799–7825, 2018.



# A | Prilog

1. CD-R disk