

# Gibanje središta mase zrakoplova pri krstarenju na velikim udaljenostima

---

**Zubak, Jure**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:058911>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-28**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Jure Zubak

ZAGREB, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

GIBANJE SREDIŠTA MASE ZRAKOPLOVA PRI KRSTARENJU NA VELIKIM  
UDALJENOSTIMA

Mentor:  
prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Student:  
Jure Zubak

ZAGREB, 2019.

*Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Milanu  
Vrdoljaku na pomoći, savjetima i strpljenju  
pri izradi ovog rada.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, veljača 2019.

Jure Zubak



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**  
 Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
 Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Jure Zubak** Mat. br.: 0035199122

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Gibanje središta mase zrakoplova pri krstarenju na velikim udaljenostima**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Motion of the Aircraft's Center of Gravity on Long Range Cruise**

Opis zadatka:

Model gibanja središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu može se primijeniti za procjenu performansi zrakoplova. Za kraće udaljenosti uobičajeno se gibanje središta mase zrakoplova promatra u Kartezijevom koordinatnom sustavu vezanom za neku točku na Zemlji, no za analize krstarenja zrakoplova na većim udaljenostima potrebno je razmatrati zakrivljenost Zemlje, izračunom koordinata u geocentričnom koordinatnom sustavu, te rotaciju Zemlje. Kod takvih letova može biti od interesa analizirati i utjecaj konstantnog vjetrova na trajektoriju središta mase zrakoplova.

U završnom radu potrebno je:

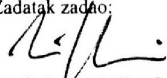
- prikupiti i prikazati sve potrebne podatke o promatranom zrakoplovu;
- odrediti potrebne značajke aerodinamike i pogona promatranog zrakoplova;
- definirati jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova uzimajući u obzir zakrivljenost Zemlje i njenu rotaciju;
- primijeniti opisane jednadžbe gibanja središta mase zrakoplova na primjeru krstarenja na većoj udaljenosti.

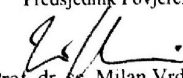
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
29. studenog 2018.

Rok predaje rada:  
**1. rok:** 22. veljače 2019.  
**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2019.  
**3. rok:** 20. rujna 2019.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 25.2. - 1.3. 2019.  
**2. rok (izvanredni):** 2.7. 2019.  
**3. rok:** 23.9. - 27.9. 2019.

Zadatak zadao:  
  
 Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Predsjednik Povjerenstva:  
  
 Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	vii
Popis tablica	viii
Popis oznaka	ix
Sažetak	xi
Summary	xii
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Koordinatni sustavi</b>	<b>3</b>
2.1. Matrice transformacije . . . . .	6
<b>3. Model gibanja središta mase za veće udaljenosti</b>	<b>10</b>
3.1. MATLAB kod . . . . .	12
3.2. Ortodroma . . . . .	13
<b>4. Prikupljeni podaci</b>	<b>14</b>
4.1. Podaci o zrakoplovu . . . . .	14
4.2. Podaci o ruti . . . . .	15
<b>5. Rezultati analize modela gibanja središta mase</b>	<b>17</b>

6. Zaključak



# Popis slika

2.1	Koordinate u geocentričnom koordinatnom sustavu . . . . .	4
2.2	Koordinate u nošenom koordinatnom sustavu . . . . .	5
2.3	Koordinate u lokalnom koordinatnom sustavu . . . . .	5
2.4	Koordinate u brzinskom koordinatnom sustavu . . . . .	6
5.1	Koeficijenti uzgona $C_L$ i otpora $C_D$ u ovisnosti o putu, bez Coriolisovog ubrzanja . . . . .	17
5.2	Koeficijenti uzgona $C_L$ i otpora $C_D$ u ovisnosti o putu, sa Coriolisovim ubrzanjem . . . . .	18
5.3	Kut penjanja $\gamma$ , kut skretanja $\chi$ , i kut valjanja $\varphi$ , bez Coriolisovog ubrzanja . . . . .	19
5.4	Kut penjanja $\gamma$ , kut skretanja $\chi$ , i kut valjanja $\varphi$ , sa Coriolisovim ubrzanjem . . . . .	19
5.5	Prikaz putanje zrakoplova u modelu bez Coriolisovog ubrzanja . . . . .	20
5.6	Prikaz putanje zrakoplova u modelu sa Coriolisovim ubrzanjem . . . . .	20

# Popis tablica

4.1	Podaci o zrakoplovu Boeing 747 . . . . .	14
4.2	Aerodinamički podaci o zrakoplovu Boeing 747 . . . . .	15
4.3	Geografske koordinate . . . . .	16
4.4	Geografske koordinate . . . . .	16

# Popis oznaka

$A_0$	azimut, [rad] . . . . .	9
$C_L$	koeficijent uzgona letjelice . . . . .	20
$C_m$	koeficijent momenta propinjanja . . . . .	20
$D$	Sila otpora [N] . . . . .	12
$L$	Sila uzgona [N] . . . . .	12
$T$	Sila potiska [N] . . . . .	12
$W$	Težina zrakoplova [N] . . . . .	12
$V_\infty$	brzina neporemećene struje, [m/s] . . . . .	12
$C_{l\alpha}$	gradijent koeficijenta sile uzgona po napadnom kutu . . . . .	15
$C_{l\delta}$	gradijent koeficijenta sile uzgona po kutu otklona kormila dubine . . . . .	15
$C_{m\alpha}$	gradijent koeficijenta momenta propinjanja po napadnom kutu . . . . .	15
$C_{m\delta}$	gradijent koeficijenta momenta propinjanja po kutu otklona kormila visine . . . . .	15
$b$	raspon krila, [m] . . . . .	15
$c$	duljina tetive krila, [m] . . . . .	15
$\alpha$	napadni kut, [rad] . . . . .	15
$\alpha_0$	napadni kut nultog uzgona profila, [rad] . . . . .	15
$\gamma$	kut penjanja, [rad] . . . . .	9
$\Theta$	kut propinjanja, [rad] . . . . .	9
$\Phi$	kut valjanja, [rad] . . . . .	9
$\chi$	kut skretanja, [rad] . . . . .	9
$\Psi$	kut zanosa, [rad] . . . . .	9

## Indeksi

$V$	brzinski koordinatni sustav . . . . .	12
$G$	geocentrični koordinatni sustav . . . . .	12
$0$	nošeni koordinatni sustav . . . . .	12
$\infty$	značajke neporemećene struje . . . . .	12

# Sažetak

Tema ovog rada jest analiza gibanja središta mase zrakoplova na većim udaljenostima te usporedba rezultata sa sličnim modelom koji ne uzima u obzir rotaciju te zakrivljenost Zemlje. Matematički model se sastoji do niza diferencijalnih jednadžbi koje opisuju gibanje središta mase. Nakon sastavljanja sustava diferencijalnih jednadžbi koji vrijede za bilo koji zrakoplov, prikupljeni su podaci za konkretan zrakoplov marke Boeing 747 kako bi se izračunale određene aerodinamičke značajke. Zatim je odabrana ruta na kojoj se očekuje primjetna razlika u rezultatima između dva modela. Naposljetku, dobijeni rezultati koeficijenta uzgona, otpora, kutevi penjanja, skretanja te valjanja, te putanja gibanja središta mase zrakoplova se grafički prikazuju.

**Ključne riječi:** Coriolisova sila, geografske koordinate, gibanje središta mase, ravnotežni let

# Summary

Topic of this final thesis is analysis of motion of center of mass of an airplane over larger distances in comparison with similar model which does not take into consideration roundness and rotation of Earth. Mathematical model consists of series of differential equations which describe motion of center of mass. After compiling system of equations that can be applied for any airplane, data for specific airplane, Boeing 747, has been gathered to calculate certain aerodynamic specifications. Afterwards, route on which there is noticeable difference between two models has been selected. Finally, obtained results for coefficients of lift and drag, flight path angle, heading angle and roll angle and trajectory of motion of center of mass of an airplane are graphically presented.

**Keywords:** Coriolis force, geographic coordinates, motion of point mass model, steady flight

# 1 | Uvod

Model gibanja središta mase zrakoplova u ravnotežnom letu primjenjuje se za procjenu performansi zrakoplova. Kod kraćih letova dovoljno je problem razmatrati u Kartezijevom koordinatnom sustavu vezanom za neku točku na Zemlji, ali za analize krstarenja zrakoplova na većim udaljenostima potrebno je uzeti u obzir i rotaciju kao i zakrivljenost Zemlje. To se postiže pomoću izračuna koordinata u geocentričnom koordinatnom sustavu te uključivanja Coriolisovog ubrzanja u jednadžbe gibanja.

Važnost ovakvih modela očituje se kroz pripremu zrakoplova za let. Kvalitetna priprema leta jedan je od najbitnijih faktora za uspješno obavljanje leta. Temeljni dio svake pripreme je navigacijska priprema. Ona obuhvaća određivanje navigacijskih točaka rute te izračun navigacijskih elemenata.

U većini slučajeva priprema traje duže od samog leta, gdje je navigacijska priprema samo jedan dio cjelokupne pripreme leta. Poželjno je zato taj sustav automatizirati te kako bi se što manje vremena odvajalo na taj rutinski postupak.

Kod postojećih automatiziranih sustava koji opisuju gibanja središte mase javlja se određena greška na dužim relacijama na kojima do izražaja dolaze rotacija te zakrivljenost Zemlje. Cilj ovog završnog rada je analizirati gibanje uz eliminaciju spomenutih grešaka uz zanemarivanje utjecaja vjetra.

Jedan od najbitnijih faktora za operatere zrakoplova predstavlja analiza troškova. Uvijek se teži smanjiti nepotrebne troškove te optimizirati performanse zrakoplova. Troškovi leta se računaju kao funkcija potrošnje goriva, vremena leta te fiksnih troškova (održavanje, pristojba) stoga je za precizne izračune troškova nekog leta potrebno što točnije poznavati elemente rute po etapama (visina leta, brzina leta) te navigacijske ele-

mente (kurs, vrijeme trajanja etape). Ovaj pristup omogućio bi operatorima fleksibilnost da lete prema svojim prioritetima kako bi ostvarili svoje ciljeve.

Kako bi ostvarili spomenute ciljeve koristit će se model temeljen na gibanju središta mase zrakoplova.



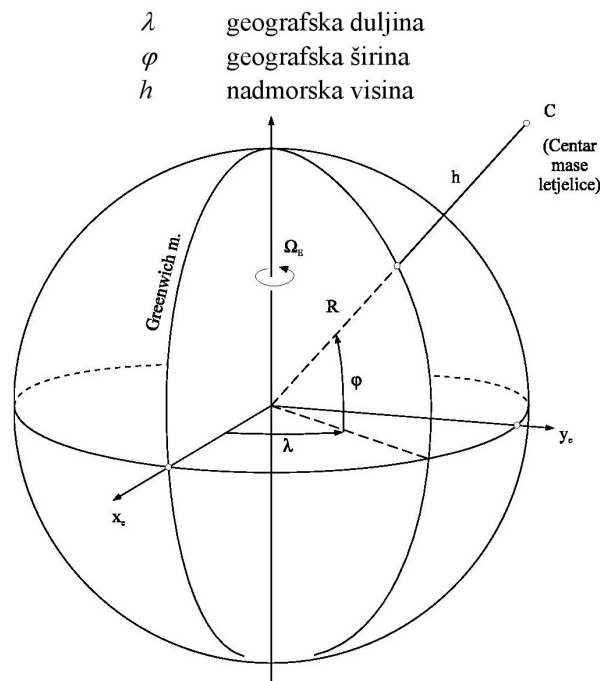
## 2 Koordinatni sustavi

Prije opisivanja samih jednadžbi potrebno je odabrati prikladan koordinatni sustav u kojem ćemo definirati jednadžbe. U mehanici leta zrakoplova koristi se nekoliko koordinatnih sustava [1].

Za prikaz putanje zrakoplova koristi se **geocentrični koordinatni sustav** [2]. Definiran na način da mu je ishodište u središtu Zemlje, os  $z_E$  je os rotacije Zemlje usmjerena prema sjeveru. Os  $x_E$  je u ravnini ekvatora kroz grinvički meridijan. Kutna brzina tog koordinatnog sustava je kutna brzina Zemlje a iznosi  $\Omega_E = 7.2710 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ . Položaj središta mase letjelice u ovom koordinatnom sustavu određuje se modificiranim koordinatama:  $\lambda$  geografska duljina,  $\varphi$  geografska širina te  $h$  nadmorska visina. Pri tome je pretpostavka da je udaljenost od središta Zemlje do njezine površine jednaka  $R = 6371$  km (slika 2.1).

Drugi sustav je **nošeni koordinatni sustav**. Ima ishodište u središtu mase letjelice koje ima geocentrične koordinate  $\lambda$  i  $\varphi$ , os  $x_0$  je u horizontalnoj ravnini, pod azimutom od  $A = \pi/2$ . Os  $z_0$  je vertikalna prema dolje, a os  $y_0$  se određuje kao za bilo koji desnokretni koordinatni sustav. (slika 2.2).

Sljedeći je sustav **koordinatni sustav letjelice**. Njega čine glavne osi tromosti zrakoplova. Ishodište koordinatnog sustava letjelice smješteno je u središtu mase, os  $x$  definirana je na način da se nalazi u ravnini simetrije zrakoplova duž tijela u smjeru leta, os  $z$  je usmjerena prema dolje, a koordinatna os  $y$  okomita je na ravninu simetrije



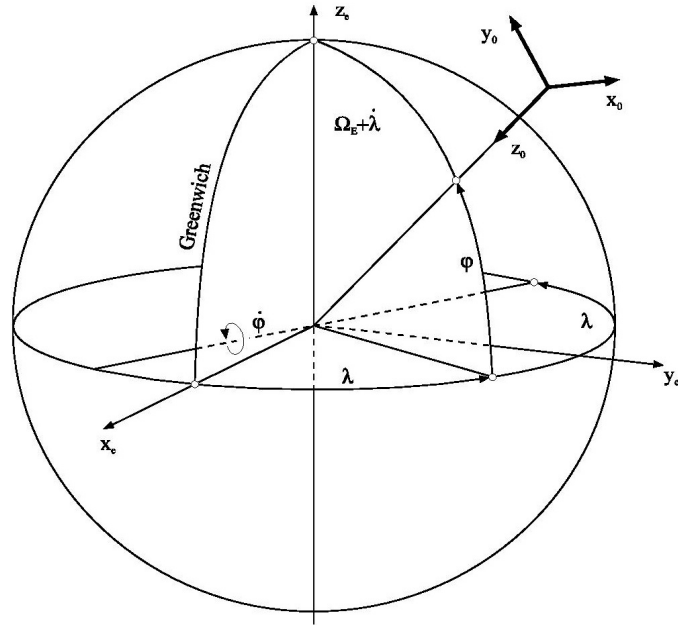
Slika 2.1: Koordinate u geocentričnom koordinatnom sustavu

zrakoplova. U odnosu na nošeni koordinatni sustav, koordinatni sustav letjelice definiran je preko tri kuta:

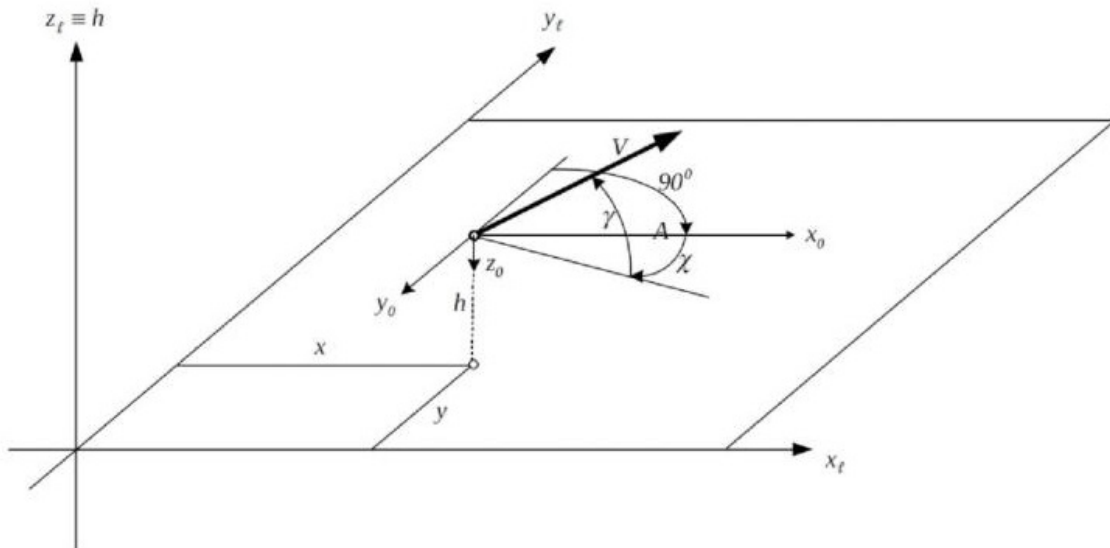
- kut zanosa  $\Psi$ , u horizontalnoj ravnini oko osi  $z_0$ ,
- kut propinjanja  $\Theta$  u vertikalnoj ravnini oko osi  $y_0$ ,
- kut valjanja letjelice  $\Phi$  oko osi  $x_0$ .

Za analizu i proračun performansi koristi se **lokalni koordinatni sustav**. Nije definiran ISO standardima pa se može proizvoljno odabrati. U ovom radu je definiran tako da mu je ishodište u polazišnoj točki rute, s osi  $x$  koja je orijentirana prema istoku, osi  $y$  koja je orijentirana prema sjeveru te osi  $z$  vertikalno prema gore (slika 2.3). U radu se koristi azimut lokalnog koordinatnog sustava  $A = \chi + \pi/2$

Naposljetku, definiran je **brzinski koordinatni sustav** koji ima koordinatnu os  $x_v$  u pravcu brzine leta, koordinatnu os  $z_v$  u vertikalnoj ravnini krzo brzinu leta prema dolje te os  $y$  po desnom pravilu.



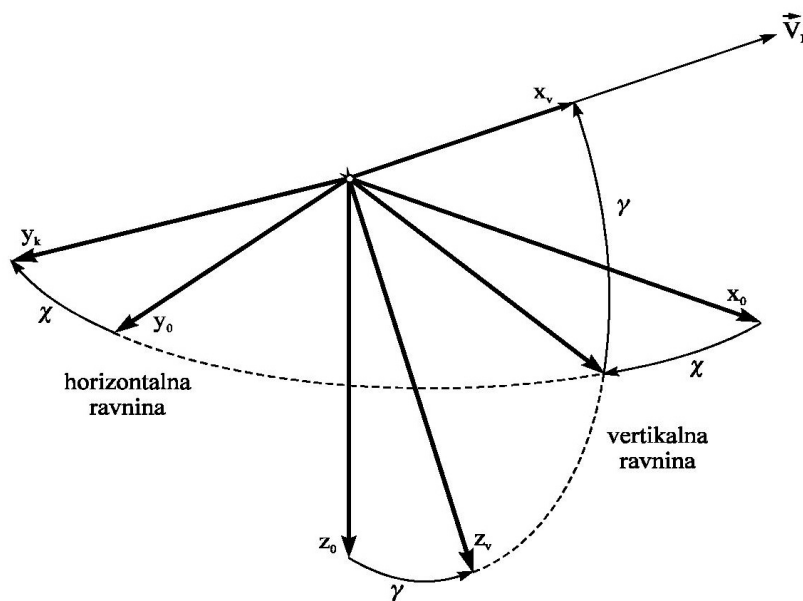
Slika 2.2: Koordinate u nošenom koordinatnom sustavu



Slika 2.3: Koordinate u lokalnom koordinatnom sustavu

Brzinu zrakoplova u odnosu na Zemlju nazivamo brzina leta. Njen smjer definiran je pomoću dva kuta u odnosu na nošeni:

- kut skretanja  $\chi$ , kut u horizontalnoj ravnini oko osi  $z_0$  od osi  $x_0$  do horizontalne projekcije brzine,
- kut penjanja  $\gamma$ , kut u vertikalnoj ravnini od horizontalne projekcije do brzine leta (slika 2.4).



Slika 2.4: Koordinate u brzinskom koordinatnom sustavu

## 2.1. Matrice transformacije

Zbog toga što su jednadžbe gibanja središta mase zadane u više različitih koordinatnih sustava, kao bitna stavka u proračunu javlja se mogućnost prebacivanja veličina i jednadžbi iz jednog koordinatnog sustava u drugi[3].

Da bismo mogli transformirati jednadžbe iz geocentričnog koordinatnog sustava u kojem su zadane koordinate središta mase zrakoplova u brzinski koordinatni sustav u kojem se računaju jednadžbe gibanja središta mase, potrebno je izvesti matricu transformacije iz geocentričnog u brzinski koordinatni sustav. U zapisu matrica funkcija sinus

zamijenjena je simbolom  $s$ , a funkcija kosinus simbolom  $c$  zbog jednostavnijeg zapisa te preglednosti.

Prvo je potrebno izvesti matricu transformacije iz geocentričnog koordinatnog sustava u nošeni. Ona je nastala preko tri rotacije:

- oko osi  $z$  za kut  $\lambda$
- oko osi  $y$  za kut  $-(\varphi + \pi/2)$
- oko osi  $z$  za kut  $A$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{OE} &= \begin{bmatrix} cA & sA & 0 \\ -sA & cA & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(-\varphi - \frac{\pi}{2}) & 0 & -s(-\varphi - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ s(-\varphi - \frac{\pi}{2}) & 0 & c(-\varphi - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\lambda & s\lambda & 0 \\ -s\lambda & c\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -s\lambda & c\lambda & 0 \\ c\lambda \cdot s\varphi & s\varphi \cdot s\lambda & -c\varphi \\ -c\varphi \cdot c\lambda & -c\varphi \cdot s\lambda & -s\varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sljedeći korak je izvod matrice transformacije iz nošenog u brzinski koordinatni sustav. To se izvodi preko dvije rotacije:

- oko osi  $z$  za kut  $\chi$
- oko osi  $y$  za kut  $\gamma$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{VO} &= \begin{bmatrix} c\gamma & 0 & -s\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ s\gamma & 0 & c\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\chi & s\chi & 0 \\ -s\chi & c\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\gamma \cdot c\chi & c\gamma \cdot s\chi & -s\gamma \\ -s\chi & c\chi & 0 \\ c\chi \cdot s\gamma & s\gamma \cdot s\chi & c\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Konačno se može izvesti matrica transformacija iz geocentričnog koordinatnog sustava u brzinski koordinatni sustav.

$$\mathbf{L}_{VE} = \mathbf{L}_{VO} \cdot \mathbf{L}_{OE} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{I}_{VE} = \begin{bmatrix} c\varphi \cdot c\lambda \cdot s\gamma - c\gamma \cdot c\chi \cdot s\lambda + c\gamma \cdot s\chi \cdot c\lambda \cdot s\varphi & c\gamma \cdot c\lambda \cdot c\chi + c\varphi \cdot s\gamma \cdot s\lambda + c\gamma \cdot s\chi \cdot s\varphi \cdot s\lambda & s\varphi \cdot s\gamma - c\varphi \cdot c\gamma \cdot s\chi \\ c\lambda \cdot s\varphi \cdot c\chi + s\chi \cdot s\lambda & s\chi \cdot c\lambda + s\varphi \cdot c\chi \cdot s\lambda & -c\varphi \cdot c\chi \\ -c\varphi \cdot c\gamma \cdot c\lambda - s\gamma \cdot c\chi \cdot s\lambda + s\chi \cdot c\lambda \cdot s\varphi \cdot s\gamma & c\lambda \cdot s\gamma \cdot c\chi - c\varphi \cdot c\gamma \cdot s\lambda + s\chi \cdot s\varphi \cdot s\gamma \cdot s\lambda & -c\varphi \cdot s\chi \cdot s\gamma - c\gamma \cdot s\varphi \end{bmatrix}$$

(2.4)



### 3 Model gibanja središta mase za veće udaljenosti

Nakon što su određene matrice transformacija, sljedeći korak je postavljanje matematičkog modela gibanja središta mase.

Za početak, definirat će se kutna brzina rotacije Zemlje u brzinskom koordinatnom sustavu. Kako bi dobili vrijednosti vektora kutne brzine rotacije Zemlje u brzinskom koordinatnom sustavu, potrebno je pomnožiti vektor kutne brzine u geocentričnom koordinatnom sustavu s odgovarajućom matricom transformacije.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Omega}_E^V &= \mathbf{L}_{VE} \cdot \boldsymbol{\Omega}_E^E \\
 \boldsymbol{\Omega}_E^E &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_E \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{\Omega}_E^V &= \begin{bmatrix} \Omega_E \cdot (s\varphi \cdot s\gamma + c\varphi \cdot c\gamma \cdot c\chi) \\ -\Omega_E \cdot c\varphi \cdot s\chi \\ -\Omega_E \cdot (c\gamma \cdot s\varphi - c\varphi \cdot c\chi \cdot s\gamma) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Uz poznate vrijednosti kutne brzine rotacije Zemlje u brzinskom koordinatnom sustavu moguće je izračunati iznos Coriolisovog ubrzanja u uvjetima bez vjetra.

$$\vec{a}_K = 2 \cdot \vec{\tilde{\Omega}}_E \times \vec{V} \tag{3.2}$$

ili u matričnom zapisu

$$\mathbf{a}_K^V = 2 \cdot \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_E^V \cdot \mathbf{V}^V, \tag{3.3}$$



gdje je vektor brzine u brzinskom koordinatnom sustavu jednak:

$$\mathbf{V}^V = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Konačno, izračun Coriolisovog ubrzanja:

$$\mathbf{a}_K^V = \begin{bmatrix} 0 \\ -2V \cdot \Omega_E \cdot (c\gamma \cdot s\varphi - c\varphi \cdot c\chi \cdot s\gamma) \\ 2 \cdot V \cdot \Omega_E \cdot c\varphi \cdot s\chi \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Nakon što je definirano Coriolisovo ubrzanje, sljedeći korak je postaviti diferencijalne jednadžbe gibanja središta mase. Ako se promotri rezultat Coriolisovog ubrzanja, da se zaključiti da se sastoji od tri komponente, to jest da ima tri projekcije po osima brzinskog koordinatnog sustava.

Kao polazišnu točku u izvodu diferencijalnih jednadžbi gibanja središta mase zrakoplova uzimaju se diferencijalne jednadžbe definirane za model u kojem je zanemarena zakrivljenost Zemlje te utjecaj Coriolisovog ubrzanja [4].

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{T - D}{m} - g \cdot \sin(\gamma) \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{L}{m \cdot V} - \frac{g \cdot \cos(\gamma)}{V} \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{L}{(m \cdot V \cdot \cos(\gamma))} \\ \frac{dx}{dt} &= V \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\chi) \\ \frac{dy}{dt} &= V \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\chi) \\ \frac{dh}{dt} &= V \cdot \sin(\gamma) \\ \frac{ds}{dt} &= V \cdot \cos(\gamma) \\ \frac{dm}{dt} &= -c_t \cdot T \end{aligned} \quad (3.6)$$

Gdje su  $L$ ,  $T$  i  $D$  redom sile uzgona, potiska te otpora u brzinskom koordinatnom sustavu. Koordinate  $x$ ,  $y$ , te  $h$  koordinate su središta mase zrakoplova u lokalnom koordinatnom sustavu. Veličine  $s$  i  $m$  mjere prijeđeni put odnosno potrošnju goriva.

Postojećem matematičkom modelu dodaju se komponente Coriolisovog ubrzanja te se jednačbe prilagođavaju geocentričnim koordinatama[5]. Kao konačan rezultat, matematički model gibanja središta mase uzimajući u obzir Coriolisov efekt te zakrivljenost Zemlje glasi:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \frac{T - D}{m} - g \cdot \sin(\gamma) - a_K^V(1) \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{L \cdot \cos(\varphi)}{m \cdot V} - \frac{g \cdot \cos(\gamma)}{V} - \frac{a_K^V}{V} \\
 \frac{d\chi}{dt} &= \frac{L \cdot \sin(\varphi)}{(m \cdot V \cdot \cos(\gamma))} - \frac{a_K^V(2)}{V \cdot \cos(\gamma)} \\
 \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{V \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\chi)}{(R + h) \cdot \cos(\varphi)} - \Omega_E \\
 \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\chi)}{(R + h)} \\
 \frac{dh}{dt} &= V \cdot \sin(\gamma) \\
 \frac{ds}{dt} &= V \cdot \cos(\gamma) \\
 \frac{dm}{dt} &= -c_t \cdot T
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Jednačbe su izvedene uz pretpostavku da je Zemlja sferičnog oblika. Prema toj pretpostavci vrijednost gravitacijskog ubrzanja uzeta je kao funkcija [7]:

$$\begin{aligned}
 g_0 &= 9.80616 \text{ m/s}^2 \\
 f &= 1 - 0.0026372 \cdot c(2 \cdot \varphi) + 0.0000059 \cdot (c(2 \cdot \varphi))^2 \\
 g &= \frac{g_0 \cdot f}{1 + \frac{h}{R}}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.1. MATLAB kod

U samom MATLAB kodu model je izveden na način da se u funkciji `start.m` zadaju određeni početni uvjeti. Iz pomoćne funkcije `isoatmos.m` određuju se standardni uvjeti atmosfere. Pomoću tih podataka u funkciji `aero_b747.m` se zatim određuju aerodinamičke karakteristike zrakoplova kao što su napadni kut te kut otklona horizontalnog stabilizatora preko osnovnih jednačbi ravnotežnog leta. Nakon što su svi podaci poznati, funkcija `horlet.s.m` definira parametre horizontalnog leta po ruti zadanoj u MATLAB funkciji `rutas.m`. Uz poznate podatke funkcija `difeq.s.m` izračunava diferencijalne

vrijednosti brzine, kuta penjanja, kuta skretanja, koordinata položaja, prijeđenog puta te potrošenog goriva. Te vrijednosti se u funkciji *rk.m* integriraju pomoću Runge-Kutta integratora četvrtog reda. Integrirane vrijednosti se u glavnoj skripti *mpmm.m* zapisuju u matični zapis kako bi se pomoću funkcije *crtanje.l.m* dobili vizualni rezultati.

## 3.2. Ortodroma

Ortodroma (engl. orthodrome, great circle) predstavlja najkraći put po površini sfere između dvije točke [5]. Kod prikaza rezultata korisno je prikazati najkraći put između dvije točke na Zemljinoj površini kako bi se kvalitetnije usporedili rezultati. Za dvije točke koordinata  $T_1(\lambda_1, \varphi_1)$  i  $T_2(\lambda_2, \varphi_2)$  ortodroma je opisana jednadžbama:

$$\tan\varphi = \begin{cases} \frac{\tan\varphi_1 \cdot \sin(\lambda - \lambda_1 + \beta)}{\sin(\beta)}, & \varphi_1 \neq 0 \\ \frac{\tan\varphi_2 \cdot \sin(\lambda - \lambda_1 + \beta)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}, & \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

gdje je

$$\cot\beta = \frac{\tan\varphi_2}{\tan\varphi_1 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (3.10)$$

## 4 Prikupljeni podaci

### 4.1. Podaci o zrakoplovu

Dosadašnji rad na analizi gibanja središta mase je općenit, te se može primijeniti na sve zrakoplove. Za potrebe detaljne analize te usporedbe rezultata, nužno je odabrati konkretan zrakoplov.

Za predmet analize odabran je zrakoplov Boeing 747 iz razloga što je to zrakoplov koji je već duže vrijeme prisutan u službi mnogih zrakoplovnih prijevoznika. Kroz godine službe se istaknuo kao pouzdan zrakoplov izvrsnih performansi. Prikazan je i u nekoliko filmova pa ne čudi što je jedan od najpopularnijih zrakoplova u povijesti zrakoplovstva. Zahvaljujući svojoj popularnosti i dugovječnosti, podaci o Boeing 747 su relativno lako dostupni, a dolet mu je dovoljno velik da zadovoljni rutu zahtjevanu u ovoj analizi.

Tablica 4.1: Podaci o zrakoplovu Boeing 747

$m$	2831757 kg
$S_{ref}$	510,97 m <sup>2</sup>
$c_a$	8,321 m
$h_{mc}$	0,25
$A$	7

Tablica 4.2 prikazuje vrijednosti redom; minimalnog koeficijenta otpora, koeficijenta uzgona pri nultom napadnom kutu, gradijenta koeficijenta uzgona po napadnom kutu, gradijenta koeficijenta uzgona pokutu otklona kormila visine, koeficijenta nultog momenta, gradijenta koeficijenta momenta propinjanja po napadnom kutu te gradijenta

Tablica 4.2: Aerodinamički podaci o zrakoplovu Boeing 747

$C_{Dmin}$	0,0305
$C_{L0}$	0,29
$C_{L\alpha}$	5,5
$C_{L\delta}$	0,3
$C_{m0}$	0
$C_{m\alpha}$	-1,6
$C_{m\delta}$	-1,2

koeficijenta momenta propinjanja po kutu otklona kormila visine. Navedeni podaci odnose se na krstarenje pri brzini od  $M = 0.9$  te visini od  $h = 11000$  m što upravo odgovara režimu leta koji se promatra u ovom radu.

Ukupni koeficijenti uzgona te momenta propinjanja računaju se kao:

$$C_L = 2 \cdot \frac{W}{\rho \cdot S_{ref} \cdot V^2} \quad (4.1)$$

$$C_D = C_{Dmin} + K \cdot (C_L - C_{LminD}^2)$$

prva jednadžba je izravna jednadžba kojom se definira koeficijent uzgona. Druga jednadžba se dobije iz jednadžbe polare zrakoplova. Kako se cijeli model temelji na ravnotežnom horizontalnom letu, valjda odrediti vrijednosti ravnotežnog napadnog kuta te potrebnog otklona kormila visine kako bi se ispunio uvjet ravnotežnog horizontalnog leta:

$$\begin{bmatrix} C_{l\alpha} & C_{l\delta_m} \\ C_{m\alpha} & C_{m\delta_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \delta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_L - C_{L0} \\ C_m \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

To jest:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \delta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{l\alpha} & C_{l\delta_m} \\ C_{m\alpha} & C_{m\delta_m} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C_L - C_{L0} \\ C_m \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

## 4.2. Podaci o ruti

Za rutu je odabrana relacija Zagreb-London kao relativno učestala relacija na kojoj lete brojni avioprijevoznici. Dodatan razlog je taj što ta ruta omogućuje let preko dovoljno velike udaljenosti na kojoj bi se Coriolisov učinak mogao jasno uočiti. Geografske koordinate Zagreba i Londona prikazane su u sljedećim tablicama

Tablica 4.3: Geografske koordinate

	Zagreb	London
Geografska dužina	15 58' 40" I	07' 5" Z
Geografska širina	45 48' 51" S	5130' 35" S

Nakon pretvorbe u geocentrični koordinatni sustav, koordinate u radijanima glase:

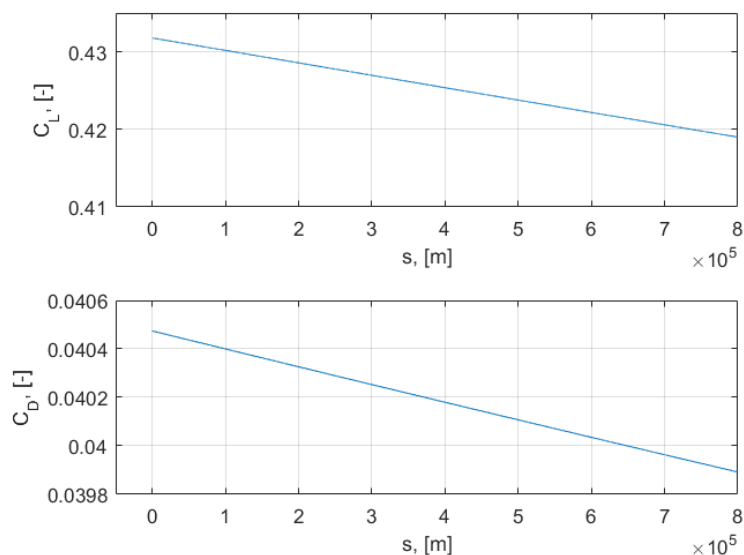
Tablica 4.4: Geografske koordinate

	Zagreb	London
Geografska dužina	0.280455	-0.008053
Geografska širina	0.798367	0.898452

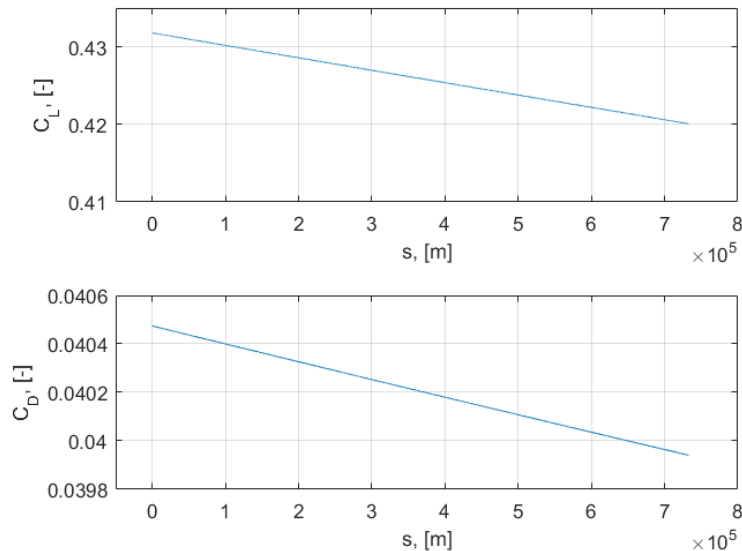
## 5 Rezultati analize modela gibanja središta mase

Dobijeni rezultati će se prikazati usporedno za model u kojem je u obzir uzeto Coriolisovo ubrzanje te za model u kojem je Coriolisovo ubrzanje zanemareno. Cilj je predočiti razliku između modela. Kako bi se razlika što lakše uočila, rezultati obje putanje će se prikazati u geocentričnom koordinatnom sustavu.

Prikazani su koeficijenti uzgona i otpora jer predstavljaju bitnu stavku u optimiziranju režima leta te smanjenju troškova zrakoplova.



Slika 5.1: Koeficijenti uzgona  $C_L$  i otpora  $C_D$  u ovisnosti o putu, bez Coriolisovog ubrzanja



Slika 5.2: Koeficijenti uzgona  $C_L$  i otpora  $C_D$  u ovisnosti o putu, sa Coriolisovim ubrzanjem

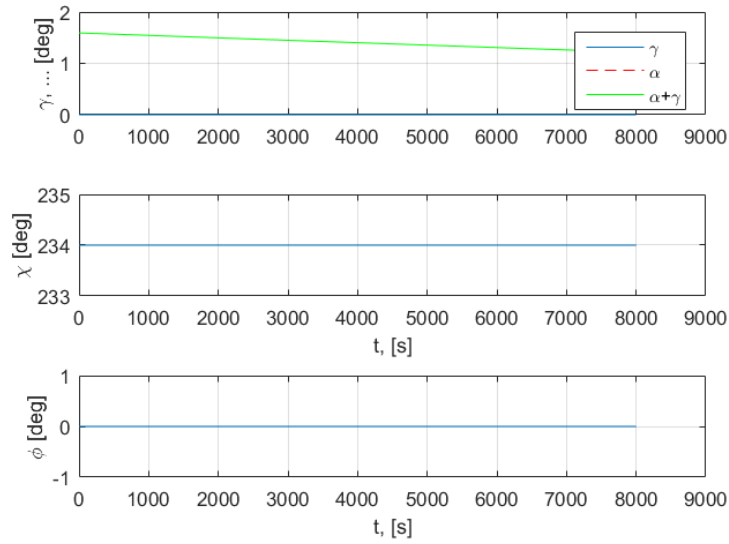
Iz prikazanih grafova da se zaključiti da je razlika nepostojeća, to jest da oba modela jednako dobro izračunavaju koeficijente otpora i uzgona. To je bilo za očekivati jer se glavne razlike između modela pojavljuju u diferencijalnim jednadžbama gibanja središta mase, a koeficijenti uzgona i otpora izračunavaju se preko jednadžbi koje su u potpunosti neovisne o tome u kojem se koordinatnom sustavu prikazuje položaj zrakoplova (slike 5.1 i 5.2).

Kao što je ranije spomenuto, diferencijalne jednadžbe gibanja su glavna razlika između dva navedena modela. To znači da će i veličine koje se izračunavaju izravno iz diferencijalnih jednadžbi imati najveću razliku između modela. To je posebice uočljivo kod kuta skretanja,  $\chi$  kod kojeg je učinak Coriolisovog ubrzanja najintenzivniji. Samim se time razlika između modela koji uzima u obzir Coriolisovo ubrzanje te onog koji ga zanemaruje, najlakše uočava na grafu (slike 5.3 i 5.4).

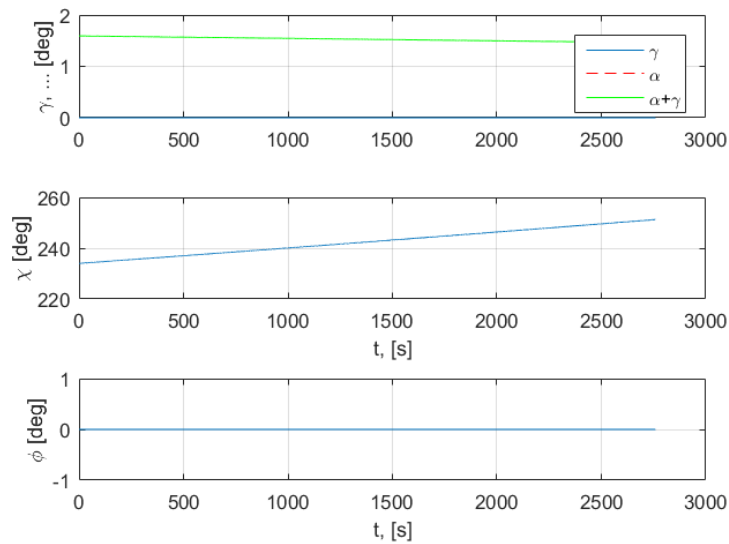
Konačno, prikazani su rezultati gibanja središta mase zrakoplova po zadanoj ruti. Na grafu je također označen *Great circle* kako bi se što bolje procijenilo odstupanje od idealne putanje zrakoplova.

Iz dobijenih rezultata vidljivo je da je model koji ne uzima u obzir Coriolisovo ubr-

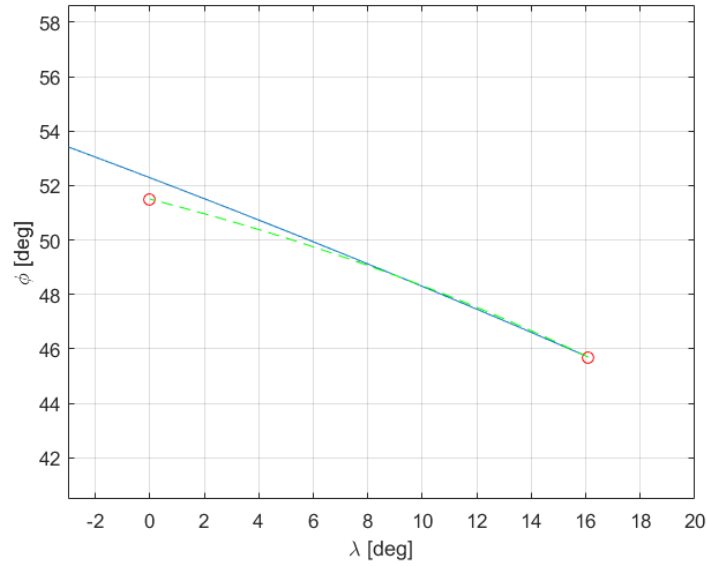




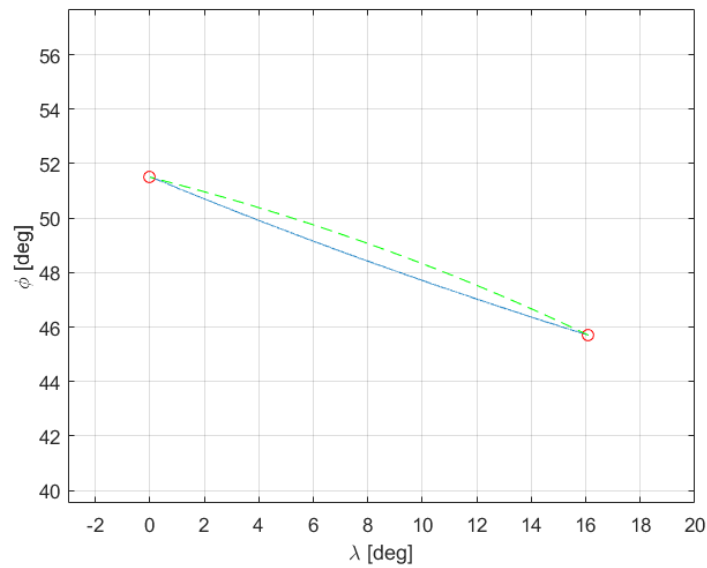
Slika 5.3: Kut penjanja  $\gamma$ , kut skretanja  $\chi$ , i kut valjanja  $\phi$ , bez Coriolisovog ubrzanja



Slika 5.4: Kut penjanja  $\gamma$ , kut skretanja  $\chi$ , i kut valjanja  $\phi$ , sa Coriolisovim ubrzanjem



Slika 5.5: Prikaz putanje zrakoplova u modelu bez Coriolisovog ubrzanja



Slika 5.6: Prikaz putanje zrakoplova u modelu sa Coriolisovim ubrzanjem

zanje za kratke i srednje daleke rute jako točan, no dolazi do razlike pri letovima na većim udaljenostima. Razlika nije toliko drastična, ali je uočljiva.

## 6 | Zaključak

Provedene su analize dva modela gibanja središta mase. Model na kojem se temeljio rad je bio zadan u Kartezijevom koordinatnom sustavu sa zanemarivanjem Coriolisovog ubrzanja i zakrivljenosti Zemlje. Za početak je bilo potrebno odabrati koordinatni sustav koji će na najlakši način omogućiti praćenje Zemljine površine. Uz pretpostavku da je Zemlja sfera, odnosno da se zanemaruje razlika promjera Zemlje oko ekvatora i oko polova, najviše smisla je imao sferni koordinatni sustav.

Sljedeći zadatak nakon odabira koordinatnog sustava bio je definiranje matrica transformacije. Za potrebe izvođenja matrica transformacije te veze između određenih jednadžbi gibanja uvedeni su određeni pomoćni koordinatni sustavi. Matrice transformacija su izvedene rotacijama oko osi spomenutih koordinatnih sustava.

Gotove matrice transformacije omogućile su slobodno prebacivanje jednadžbi gibanja iz jednog koordinatnog sustava u drugi, kao što je slučaj sa kutnom brzinom rotacije Zemlje koju je bilo potrebno prebaciti u brzinski koordinatni sustav. To je pak omogućilo izračunavanje Coriolisovog ubrzanja u brzinskom koordinatnom sustavu. Nakon što su diferencijalne jednadžbe prebačene u zapis koji odgovara geocentričnom sustavu jedino je preostalo zbrojiti komponente Coriolisovog ubrzanja s odgovarajućom diferencijalnom jednadžbom gibanja središta mase. Za potrebe drugog modela, nakon što je provedena transformacija u zapis koji odgovara koordinatama geocentričnog koordinatnog sustava, nije bilo potrebno dodavati Coriolisovo ubrzanje.

Uz gotove jednadžbe gibanja, bilo je potrebno odabrati konkretan zrakoplov kako bi se mogli proračunati aerodinamički koeficijenti. Nakon što je odabran zrakoplov Boeing 747 zbog svoje popularnosti te lako dostupnih informacija o samom zrakoplovu,

izračunati su aerodinamički koeficijenti.

Sljedeći korak je bilo izračunavanje uvjeta ravnotežnog leta, konkretno napadnog kuta te kuta otklona kormila visine. Nakon toga je zadana ruta koja će dovoljno zorno prikazati razliku između dva modela. Odabir rute je uvjetovao početne uvjete kao što su početne i krajnje koordinate, visina, brzina, kut skretanja.

Uz poznate sve potrebne informacije preostalo je samo integrirati diferencijalne jednadžbe za svaku točku putanje po ruti te dobivene rezultate pohraniti kako bi se mogli vizualno prikazati.

Rezultati su potvrdili početna očekivanja, oba modela su zadovoljavajuće točnosti te primjenjiva u stvarnim uvjetima. Prednost ovakvih modela je što skraćuju vrijeme potrebno za pripremu, odnosno planiranje leta uz zanemarive greške. Model koji ne uzima u obzir Coriolisovo ubrzanje počinje pokazivati greške tek na velikim udaljenostima, dok model koji uzima u obzir Coriolisovo ubrzanje nema problema s tom vrstom pogreške. Oba modela su dovoljno točna te primjenjiva za brzu pripremu leta uz odgovarajuću pogrešku koja se javlja zbog zanemarivanja utjecaja vjetra ili drugih faktora. Ubacivanje jednadžbi za Coriolisovo ubrzanje eliminira pogrešku koja se javlja zbog letova na dugim udaljenostima u smjeru koji uzrokuje velike promjene geografske širine što ustvari povećava raspon primjene ovog modela.

# Literatura

- [1] Janković, S. *Mehanika leta projektila*. FSB, Zagreb, 1998.
- [2] Janković, S., Vrdoljak, M. *Performanse zrakoplova – predavanja*. FSB, Zagreb, 2016.
- [3] Janković S. *Mehanika leta zrakoplova*. [https://www.fsb.unizg.hr/aero/meha\\_leta\\_knjiga.html](https://www.fsb.unizg.hr/aero/meha_leta_knjiga.html). FSB. Zagreb, 2001.
- [4] Zovak, J. *Planiranje leta borbenog aviona primjenom modela gibanja u ravnotežnom letu - magistarski rad*. FSB, Zagreb, 2011.
- [5] Tewari A. *Atmospheric and Space Flight Dynamics*, Birkhauser, Boston, 2007.
- [6] Vrdoljak, M., Zovak, I. Application of Steady State Model for Flight Path Planning of the Fighter Airplane Including Take-off and Landing. *Proceedings of 7th ICCSM International Congress of Croatian Society of Mechanics*. Studio HRG, 2012.
- [7] ISO 5878 Reference atmospheres for aerospace use. International Organization for Standardization. 1982.