

# Numerička integracija rotacijskih kvaterniona

---

**Pandža, Viktor**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:698090>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-12**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Viktor Pandža**

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# NUMERIČKA INTEGRACIJA ROTACIJSKIH KVATERNIONA

Mentori:

Prof. dr. sc. Zdravko Terze

Student:

Viktor Pandža

Zagreb, 2015.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Prije svega, najveću zahvalnost želim izraziti prof. dr. sc. Zdravku Terzeu na pruženoj prilici za rad u ovom području, svom prenesenom znanju te velikoj pomoći, podršci i izvrsnom vodstvu tijekom studiranja, a posebno za vrijeme izrade ovog rada.

Zahvaljujem se i dr. sc. Dariu Zlataru za utrošeno vrijeme i pomoć prilikom izrade numeričkih primjera.

Posebno se zahvaljujem svojoj djevojci na podršci tijekom cijelog studija i izrade ovog rada.

Veliko hvala i mojoj obitelji na podršci i razumijevanju.

Na kraju, hvala svima nespomenutima, a koji su mi na bilo koji način pomogli tijekom studija i izrade ovog rada.

Viktor Pandža



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **VIKTOR PANDŽA**

Mat. br.: 0035184112

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička integracija rotacijskih kvaterniona**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical integration of rotational quaternions**

Opis zadatka:

Kinematičko modeliranje rotacijskog gibanja objekata (npr. zračne i svemirske letjelice) i strojnih dijelova pomoću rotacijskih kvaterniona omogućava više računalnih prednosti u usporedbi s modeliranjem prostorne orijentacije klasičnom troosnom parametarizacijom: izbjegavaju se kinematički singulariteti velikih rotacijskih domena, unaprjeđuje numerička efikasnost te omogućava veća stabilnost integracijskih algoritama. Ipak, standardna upotreba kvaterniona podrazumijeva složeniji matematički model integracije rotacijske kinematike, a također je nužna i dodatna numerička stabilizacija rješavanjem eksplicitnog kinematičkog ograničenja norme jediničnih kvaterniona. U posljednje vrijeme navedene poteškoće pokušavaju se riješiti implementacijom kvaterniona unutar integracijskih algoritama koji ne operiraju u vektorskim prostorima, već izravno na rotacijskoj mnogostrukosti  $SO(3)$  rotirajućih objekata.

S obzirom na gornje rečeno, u radu je potrebno:

1. Dati prikaz matematičkih modela i integracijskih algoritama standardne implementacije jediničnih kvaterniona za opis prostornih orijentacija objekata u okviru numeričkih algoritama integracije rotacijske dinamike.
2. Prikazati jedinične kvaternione kao elemente grupe  $SU(2)$  s dvostrukim prekrivanjem rotacijske mnogostrukosti  $SO(3)$  te izvesti potrebne matematičke relacije s ciljem pripreme integracijskih algoritama na Lievoj rotacijskoj grupi  $SO(3)$ .
3. Opisati i implementirati novopredložene algoritme integracije rotacijskih kvaterniona koristeći lokalnu integraciju vektora rotacije kao elemente Lieve algebre  $so(3)$  uz preslikavanje integracijske točke na mnogostrukost jediničnih kvaterniona preko odgovarajuće eksponencijalne mape.
4. Ocijeniti numeričku efikasnost i stabilnost novopredloženih algoritama integracije kvaterniona na Lievoj grupi u usporedbi sa standardnim modelima integracije s primjenom u području dinamike letjelica ili strojnih dijelova.

U radu treba navesti literaturu i eventualno dobivenu pomoć tijekom izrade.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

24. rujna 2015.


26. studenog 2015.

2., 3. i 4. prosinca 2015.

Zadatak zadao:

Predsjednica Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Zdravko Terze

  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA .....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK .....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD .....	1
1.1. Transformacije krutih cijela .....	1
1.2. Rotacijsko gibanje krutih tijela .....	4
1.2.1. Svojstva matrice rotacije .....	5
1.2.2. Opis rotacije korištenjem eksponencijalnih koordinata .....	8
2. OPIS KINEMATIKE KRUTOG TIJELA U PROSTORU .....	11
2.1. Linearna i kutna brzina krutog tijela .....	12
2.2. Kvaternioni .....	13
2.3. Eulerovi parametri .....	20
3. METODE INTEGRACIJE KRUTOG TIJELA U PROSTORU KORIŠTENJEM ROTACIJSKIH KVATERNIONA .....	24
3.1. Kutna brzina i derivacija kutne brzina izražene korištenjem Eulerovih parametara ..	24
3.2. Standardne metode integracije na kvaterniona .....	26
3.2.1. Formulacija I .....	27
3.2.2. Formulacija II .....	29
3.3. Nova metoda integracije kvaterniona koja operira izravno na rotacijskoj mногоstrukosti $SO(3)$ .....	30
4. NUMERIČKI EKSPERIMENTI .....	34
4.1. Rotacija slobodnog krutog tijela oko osi bliske nestabilnoj .....	34
4.1.1. Stabilnost rotacije .....	34
4.1.2. Opis primjera i početnih uvjeta te prikaz rezultata .....	39
4.2. Rotacija krutog tijela s jednom uporišnom točkom .....	45
4.3. Rotacija satelita korištenjem reakcijskih diskova .....	51
5. ZAKLJUČAK .....	62
LITERATURA .....	64
PRILOZI .....	65

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Kruto tijelo zakrenuto oko točke s prikazom koordinatnog sustava $B$ vezanog za tijelo te inercijskog koordinatnog sustava $A$ .....	4
Slika 2.	Transformacija koordinatnog sustava vezanog za tijelo .....	11
Slika 3.	Geometrija slobodno rotirajućeg tijela .....	39
Slika 4.	Putanja točke $p$ prikazana u trodimenzionalnom dijagramu .....	40
Slika 5.	Položaj točke $p$ u ovisnosti o vremenu .....	41
Slika 6.	Ovisnost elemenata kvaterniona o vremenu.....	41
Slika 7.	Ovisnost komponenata kutne brzine o vremenu .....	42
Slika 8.	Konvergencija rezultata za tri različite metode .....	43
Slika 9.	Usporedba prosječnog procesorskog vremena za tri različite metode .....	44
Slika 10.	Geometrija krutog tijela s jednom uporišnom točkom .....	45
Slika 11.	Putanja težišta tijela u trodimenzionalnom dijagramu .....	47
Slika 12.	Položaj težišta tijela u ovisnosti o vremenu .....	47
Slika 13.	Ovisnost elemenata kvaterniona o vremenu.....	48
Slika 14.	Ovisnost komponenata kutne brzine o vremenu .....	48
Slika 15.	Konvergencija rezultata za tri različite metode .....	49
Slika 16.	Usporedba prosječnog procesorskog vremena za tri različite metode .....	50
Slika 17.	Shematski prikaz satelita s tri diska .....	51
Slika 18.	Konvergencija rezultata pri konstantnom momentu za tri različite metode.....	58
Slika 19.	Konvergencija rezultata pri varijabilnom momentu za tri različite metode .....	60
Slika 20.	Usporedba prosječnog procesorskog vremena za tri različite metode .....	61

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Geometrijske značajke tijela satelita i reakcijskog diska ..... 57



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$h$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$	Vektor kinetičkog momenta
${}_o h_{B/SC}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$	Kinetički moment tijela satelita u odnosu na centar mase, izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
${}_o h_{SC}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$	Ukupni kinetički moment satelita u odnosu na centar mase, izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
${}_o h_{W_i/C_i}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$	Kinetički moment $i$ -tog diska u odnosu na centar mase, izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
${}_o h_{W_i/SC}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$	Kinetički moment $i$ -tog diska u odnosu na centar mase tijela satelita, izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
$I$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Tenzor inercije tijela
$i, j, k$	-	Imaginarne jedinice
$I_1, I_2, I_3$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Glavni momenti inercije tijela
${}_B I_{B/SC}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Tenzor inercije tijela satelita u odnosu na centar mase, izražen u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo
${}_o I_{B/SC}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Tenzor inercije tijela satelita u odnosu na centar mase, izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
${}_B I_{W_i/C_i}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Tenzor inercije $i$ -tog diska u odnosu na centar mase, izražen u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo
${}_o I_{W_i/C_i}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Tenzor inercije $i$ -tog diska u odnosu na centar mase, izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
${}_B I_{W_i/SC}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Tenzor inercije $i$ -tog diska u odnosu na centar mase tijela satelita, izražen u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo
${}_o I_{W_i/SC}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Tenzor inercije $i$ -tog diska u odnosu na centar mase tijela satelita, izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
${}_{W_i} I_{W_i/SC}$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Tenzor inercije $i$ -tog diska u odnosu na centar mase tijela satelita, izražen u koordinatnom sustavu vezanom za $i$ -ti disk
${}_B M_i$	$\text{N}\cdot\text{m}$	Vektor momenata koji djeluju na $i$ -ti disk izražen u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo
${}_o M_i$	$\text{N}\cdot\text{m}$	Vektor momenata koji djeluju na $i$ -ti disk izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
$p, q$	-	Točke
$\mathbf{q}$	-	Vektorski (imaginarni) dio kvaterniona
$Q, P$	-	Kvaternioni
$q_0$	-	Skalarni dio kvaterniona
$R$	-	Matrica rotacije
$\mathbf{r}_C$	$\text{m}$	Vektor položaja težišta tijela
$T$	$\text{N}\cdot\text{m}$	Vektor momenata koji djeluju na tijelo
$t$	$\text{s}$	Vrijeme
$u$	-	Trenutni vektor rotacije
$v, w$	-	Vektori

$\alpha_i$	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$	Moment inercije $i$ -tog diska oko njegove osi rotacije
$\omega$	rad/s	Vektor kutne brzine izražen u inercijskom koordinatnom sustavu
$\omega'$	rad/s	Vektor kutne brzine izražen u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo
${}_B\omega_{B/O}$	rad/s	Kutna brzina tijela satelita u odnosu na inercijski koordinatni sustav, izražena u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo
${}_O\omega_{B/O}$	rad/s	Kutna brzina tijela satelita u odnosu na inercijski koordinatni sustav, izražena u inercijskom koordinatnom sustavu
${}_{W_i}\omega_{B/O}$	rad/s	Kutna brzina tijela satelita u odnosu na inercijski koordinatni sustav, izražena u koordinatnom sustavu vezanom za $i$ -ti disk
${}_{W_i}\omega_{W_i/B}$	rad/s	Relativna kutna brzina $i$ -tog diska u odnosu na tijelo, izražena u koordinatnom sustavu vezanom za $i$ -ti disk
${}_B\omega_{W_i/O}$	rad/s	Kutna brzina $i$ -tog diska u odnosu na inercijski koordinatni sustav, izražena u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo
${}_O\omega_{W_i/O}$	rad/s	Kutna brzina $i$ -tog diska u odnosu na inercijski koordinatni sustav, izražena u inercijskom koordinatnom sustavu
${}_{W_i}\omega_{W_i/O}$	rad/s	Kutna brzina $i$ -tog diska u odnosu na inercijski koordinatni sustav, izražena u koordinatnom sustavu vezanom za $i$ -ti disk

---

**SAŽETAK**

U ovom radu opisana je numerička integracija kvaterniona u svrhu opisivanja rotacije krutog tijela u prostoru. Nakon izvoda potrebnih matematičkih modela, prikazani su algoritmi standardnih metoda integracije koji operiraju u vektorskim prostorima te algoritam nove metode koja operira izravno na rotacijskoj grupi  $SO(3)$  krutog tijela. Dok je u standardnim metodama svojstvo jedinične norme rotacijskog kvaterniona zadovoljeno dodavanjem dodatne stabilizacijske jednadžbe, čime se dobiva diferencijalno-algebarski sustav jednadžbi, nova metoda, već svojom konstrukcijom, zadovoljava to svojstvo čime se u konačnici dobiva sustav običnih diferencijalnih jednadžbi. U svrhu usporedbe opisanih metoda integracije rotacijskih kvaterniona provedeni su numerički eksperimenti na primjerima nestabilne rotacije slobodnog krutog tijela, na rotaciji krutog tijela s jednom uporišnom točkom te na praktičnom primjeru rotacije svemirskog objekta pomoću tri reakcijska diska.

Ključne riječi: *kruto tijelo, rotacija u prostoru, jedinični kvaternioni, numerička integracija*

---

**SUMMARY**

Numerical integration of unit quaternions used for describing rigid body rotation is addressed in this thesis. After deriving necessary mathematical models, standard integration algorithms, which operate in vector space, are presented together with novel integration scheme, which operates on rotational group  $SO(3)$  of rigid body. While standard methods include additional equation for satisfying quaternion unit-length condition leading to a system of differential-algebraic equations (DAE), novel method inherently respects the unit-length condition leading to a system of ordinary differential equations (ODE). Described integration methods are compared on results of numerical experiments conducted on examples of unstable rigid body rotation, heavy top and on practical example of spacecraft rotation induced by using three reaction wheels.

Key words: *rigid body, spatial rotation, unit quaternions, numerical integration*

## 1. UVOD

Gibanje čestice u euklidskom prostoru u potpunosti je opisano položajem čestice (u odnosu na Kartezijev inercijski koordinatni sustav) u svakom vremenskom trenutku. Primjerice, položaj čestice može biti opisan s  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , pri čemu  $x, y$  i  $z$  predstavljaju projekcije položaja čestice na jednu od tri ortonormalne koordinatne osi. Pritom je putanja čestice opisana krivuljom  $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ . Ipak, za opisivanje gibanja stvarnih objekata često nije dovoljno opisivanje gibanje čestica, nego je potrebno opisati i gibanje krutih tijela.

### 1.1. Transformacije krutih cijela

Kruto tijelo definira se kao potpuno nedeformabilno tijelo, iz čega slijedi formalna definicija krutog tijela kao skupa čestica pri čemu udaljenost između bilo koje dvije čestice ostaje jednaka, neovisno o gibanju tijela i silama koje na tijelo djeluju.

Prema tome, ako se s  $p$  i  $q$  označe bilo koje dvije točke na krutom tijelu, za vrijeme gibanja tijela vrijedi

$$\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{konstanta} . \quad (1)$$

Općenito, gibanje krutog tijela sastoji se od linearnog pomaka i rotacije krutog tijela. Ako se kruto tijelo opiše kao podskup  $O$  od  $\mathbb{R}^3$ , gibanje krutog tijela opisano je kontinuiranim preslikavanjem  $g(t) : O \rightarrow \mathbb{R}^3$  koje opisuje gibanje svake točke krutog tijela u ovisnosti o vremenu, u odnosu na Kartezijev inercijski koordinatni sustav. Drugim riječima, za vrijeme gibanja krutog tijela po kontinuiranoj putanji  $g(t)$  preslikava koordinate točke krutog tijela u početnom vremenskom trenutku na koordinate te točke u vremenskom trenutku  $t$ .

Ako se definiraju dvije točke na krutom tijelu  $p, q \in O$ , vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  koji spaja  $p$  sa  $q$  definira se kao usmjerena linija od  $p$  prema  $q$ , tj. vektor  $v$  jednak je

$$v = q - p . \quad (2)$$

Iako, kako je vidljivo iz jednadžbe (2), vektore (kao i točke) opisujemo s tri broja, važno je naglasiti razliku između točke i vektora, pri čemu vektor ima smjer i veličinu. Pod pojmom veličina podrazumijeva se euklidska norma vektora

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} . \quad (3)$$

Važno je naglasiti da vektori, za razliku od točaka, nisu vezani uz tijelo, jer mogu postojati druge dvije točke na tijelu, primjerice  $r$  i  $s$ , tako da vrijedi

$$s - r = q - p, \quad (4)$$

pri čemu onda isti vektor  $v$  spaja  $r$  sa  $s$ . Vektor može biti pozicioniran bilo gdje u prostoru bez da se promijeni njegovo značenje.

Vektori se pri transformaciji krutih tijela transformiraju kao

$$g_*(v) = g(q) - g(p), \quad (5)$$

pri čemu je transformacijom vektora dobiven novi vektor, jer desna strana jednadžbe (5) predstavlja razliku dviju točaka.

Stoga je čuvanje udaljenosti između dviju točaka nužni uvjet preslikavanja  $g : O \rightarrow \mathbb{R}^3$  ukoliko ono opisuje gibanje krutog tijela. Ipak, taj uvjet nije dovoljan, jer dozvoljava refleksije tijela koje nisu fizički izvedive. Primjerice preslikavanje  $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$  čuva udaljenost, ali preslikava tijelo oko  $xy$  ravnine, što u općenitom slučaju nije fizički izvedivo. Kako bi se spriječila takva preslikavanja, kao dodatni uvjet uvodi se da je vektorski umnožak sačuvan transformacijama krutog tijela.

Stoga preslikavanje  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  predstavlja transformaciju krutog tijela ako zadovoljava sljedeća svojstva:

1. Očuvanje udaljenosti:  $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$ , za sve točke  $p, q \in \mathbb{R}^3$ .
2. Očuvanje vektorskog umnoška:  $g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$ , za sve vektore  $v, w \in \mathbb{R}^3$ .

Posljedica takve definicije jest očuvanje skalarnog umnoška vektora pri transformaciji krutog tijela. Kako bi se dokazalo očuvanje skalarnog umnoška potrebno je pokazati

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= (v + w)^T (v + w) = \\ &= v^T v + v^T w + w^T v + w^T w = \\ &= v^T v + 2v^T w + w^T w, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= (v - w)^T (v - w) = \\ &= v^T v - v^T w - w^T v + w^T w = \\ &= v^T v - 2v^T w + w^T w. \end{aligned} \quad (7)$$

Oduzimanjem jednadžbi (6) i (7) dobiva se jednadžba

$$\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 = 4v^T w, \quad (8)$$

iz čega se skalarni umnožak vektora može prikazati kao

$$v^T w = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2). \quad (9)$$

Vrijednosti norme mogu se zapisati kao

$$\|v + w\| = \|g_*(v) + g_*(w)\|, \quad (10)$$

$$\|v - w\| = \|g_*(v) - g_*(w)\|. \quad (11)$$

Uvrštavanjem izraza (10) i (11) u (9) dobiva se

$$v^T w = \frac{1}{4} (\|g_*(v) + g_*(w)\|^2 - \|g_*(v) - g_*(w)\|^2) = g_*(v)^T g_*(w), \quad (12)$$

čime je dokazano očuvanje skalarnog produkta pri transformaciji krutog tijela.

Iz svojstva očuvanja skalarnog umnoška vektora može se zaključiti da se ortogonalni vektori transformacijom preslikavaju na ortogonalne vektore, a uz dodatak svojstva očuvanja vektorskog umnoška da se ortonormalni koordinatni sustavi preslikavaju na ortonormalne koordinatne sustave.

U daljnjem razmatranju, svi koordinatni sustavi bit će desni, tj. ako su  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$  ortonormalni vektori koji definiraju koordinatni sustav onda vrijedi

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad (13)$$

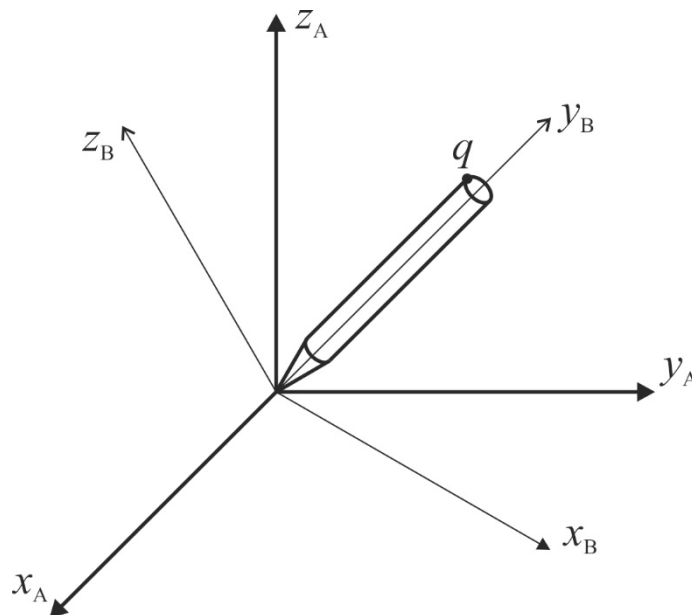
Također, zbog svojstva očuvanja vektorskog umnoška desni koordinatni sustavi transformiraju se na desne koordinatne sustave.

Činjenica da su udaljenosti između točaka, vektorski umnožak, a posljedično i skalarni umnožak vektora transformacijom krutog tijela sačuvani ne znači da se čestice ne mogu gibati jedna u odnosu na drugu, nego da se jedna u odnosu na drugu mogu isključivo rotirati, bez mogućnosti translacijskog pomaka. Stoga, za opisivanje gibanja krutog tijela u odnosu na inercijski koordinatni sustav dovoljno je pratiti gibanje jedne točke vezane za tijelo te rotaciju tijela oko te točke. U tu svrhu na tijelo se u određenoj točki veže Kartezijev koordinatni sustav te se prati pomak i zakret tog koordinatnog sustava u odnosu na inercijski Kartezijev koordinatni sustav.

Kako je praćenje translacijskog (linearnog) pomaka koordinatnog sustava trivijalno, pažnja u ostatku rada posvetit će se opisivanju rotacije koordinatnog sustava vezanog za tijelo u odnosu na inercijski.

## 1.2. Rotacijsko gibanje krutih tijela

Orijentacija tijela opisuje se orijentacijom koordinatnog sustava vezanog na tijelo u odnosu na inercijski koordinatni sustav. Na slici 1 prikazano je jednostavno kruto tijelo s koordinatnim sustavom  $B$  vezanim za tijelo, zakrenutim o odnosu na inercijski koordinatni sustav  $A$ .



Slika 1. Kruto tijelo zakrenuto oko točke s prikazom koordinatnog sustava  $B$  vezanog za tijelo te inercijskog koordinatnog sustava  $A$

Ako se s  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \in \mathbb{R}^3$  označi prikaz jediničnih vektora koordinatnog sustava vezanog za tijelo (u smjeru osi  $x_B, y_B, z_B$ ) u inercijskom koordinatnom sustavu, može se definirati matrica rotacije

$$R = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3]. \quad (14)$$

Pomoću matrice rotacije može se opisati rotacija svakog tijela u odnosu na inercijski koordinatni sustav. Također, matrica rotacije može se koristiti za transformaciju iz jednog koordinatnog sustava u drugi. Primjerice, ako se s  $q_B = (x_{qB}, y_{qB}, z_{qB})$  označi položaj točke  $q$  prikazan u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo ( $B$ ), onda se položaj točke  $q$  u inercijskom koordinatnom sustavu ( $A$ ) može prikazati kao

$$q_A = \mathbf{r}_{1AB} x_{qB} + \mathbf{r}_{2AB} y_{qB} + \mathbf{r}_{3AB} z_{qB}, \quad (15)$$

što se dalje može zapisati u obliku



$$q_A = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3] \begin{bmatrix} x_{qB} \\ y_{qB} \\ z_{qB} \end{bmatrix} = R_{AB} q_B. \quad (16)$$

Korištenjem jednadžbe (16) može se definirati djelovanje matrice rotacije na vektor. Ako se s  $v_B$  označi vektor u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo definiran izrazom

$$v_B = q_B - p_B, \quad (17)$$

transformirani vektor, tj. vektor prikazan u inercijskom koordinatnom sustavu može se prikazati kao

$$v_A = q_A - p_A = R_{AB} q_B - R_{AB} p_B = R_{AB} (q_B - p_B) = R_{AB} v_B, \quad (18)$$

iz čega je vidljivo da se osim položaja točaka, korištenjem matrice rotacije na isti način mogu transformirati i vektori.

Također, matrice rotacije mogu se množiti kako bi se dobila nova matrica rotacije. Primjerice, ako su poznati matrica rotacije iz koordinatnog sustava C u koordinatni sustav B ( $R_{BC}$ ) te matrica rotacije iz koordinatnog sustava B u koordinatni sustav A ( $R_{AB}$ ), matrica rotacije iz koordinatnog sustava C u koordinatni sustav A može se izračunati korištenjem izraza

$$R_{AC} = R_{AB} R_{BC}. \quad (19)$$

Prije samog dokaza da matrica rotacija predstavlja transformaciju krutog tijela, potrebno je pokazati neka svojstva same matrice.

### 1.2.1. Svojstva matrice rotacije

Kako su stupci matrice rotacije  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ , i  $\mathbf{r}_3$  nastali transformacijom ortonormalnih jediničnih vektora desnog koordinatnog sustava, i stupci matrice rotacije su ortonormalni, tj. vrijedi

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq j \\ 1, & \text{za } i = j \end{cases}, \quad (20)$$

iz čega se može zaključiti da je matrica rotacije ortogonalna, tj. da vrijedi

$$RR^T = R^T R = I. \quad (21)$$

Za sve ortogonalne matrice vrijedi da im determinanta iznosi  $\pm 1$ , tj. za matricu  $R$

$$\det(R) = \pm 1. \quad (22)$$

Određivanje točnog predznaka determinante matrice  $R$  moguće je iz izraza

$$\det(R) = \mathbf{r}_1^T (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3). \quad (23)$$

Za desni koordinatni sustav vrijedi

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1, \quad (24)$$

a korištenjem izraza (24), izraz (23) postaje

$$\det(R) = \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 = 1. \quad (25)$$

Skup svih ortogonalnih matrica dimenzije  $3 \times 3$  s determinantom iznosa  $+1$  označava se sa  $SO(3)$ , a prostor matrice rotacije može se definirati kao

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid RR^T = I, \det R = +1\}. \quad (26)$$

Prije nego se pokaže da je skup  $SO(3)$  ujedno i grupa, potrebno je definirati grupu. Prema [1] skup  $G$  je, uz binarnu operaciju  $\circ$  definiranu na elementima skupa  $G$ , grupa ukoliko zadovoljava sljedeće aksiome

1. *Zatvorenost*: Ako su  $g_1, g_2 \in G$ , onda vrijedi  $g_1 \circ g_2 \in G$ .
2. *Jedinični element*: Postoji jedinični element  $e$  tako da vrijedi  $g \circ e = e \circ g = g$  za svaki  $g \in G$ .
3. *Inverzni element*: Za svaki  $g \in G$  postoji jedinstveni inverzni element  $g^{-1} \in G$ , tako da vrijedi  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ .
4. *Asocijativnost*: Ako su  $g_1, g_2, g_3 \in G$ , onda vrijedi  $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ .

$SO(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$  je grupa zatvorena s operacijom umnoška matrica s jediničnom matricom  $I$  kao jediničnim elementom jer zadovoljava navedene aksiome

1. Ako su  $R_1, R_2 \in SO(3)$ , onda vrijedi  $R_1 R_2 \in SO(3)$  jer

$$R_1 R_2 (R_1 R_2)^T = R_1 R_2 R_2^T R_1^T = R_1 R_1^T = I,$$

$$\det(R_1 R_2) = \det(R_1) \det(R_2) = +1.$$

2. Jedinična matrica  $I$  je jedinični element.
3. Iz definicije ortogonalne matrice, tj. iz izraza (21) slijedi da je matrica  $R^T \in SO(3)$  inverz matrice  $R \in SO(3)$ .
4. Asocijativnost  $SO(3)$  grupe slijedi iz asocijativnosti umnoška matrica, tj. za  $R_1, R_2, R_3 \in SO(3)$ , vrijedi  $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$ .

Matrica rotacije predstavlja transformaciju krutog tijela prema definiciji, tj. zadovoljava svojstva očuvanja udaljenosti i vektorskog umnoška

1. Očuvanje udaljenosti:  $\|Rp - Rq\| = \|p - q\|$  za sve  $q, p \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \|Rp - Rq\| &= \sqrt{(Rp - Rq)^T (Rp - Rq)} = \sqrt{(R(p - q))^T (R(p - q))} = \\ &= \sqrt{(p - q)^T R^T R (p - q)} = \sqrt{(p - q)^T (p - q)} = \|p - q\|. \end{aligned}$$

2. Očuvanje vektorskog umnoška:  $R(v \times w) = R(v) \times R(w)$ .

Vektorski umnožak dvaju vektora  $v, w \in \mathbb{R}^3$  definiran je kao

$$v \times w = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

što se može zapisati kao

$$v \times w = \tilde{v} w, \quad (28)$$

uz definiciju

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Umnožak matrice rotacije s vektorskim umnoškom dvaju vektora može se zapisati kao

$$\begin{aligned} R(v \times w) &= [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3] \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{r}_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \mathbf{r}_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + \mathbf{r}_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1). \end{aligned} \quad (30)$$

Druuga strana jednadžbe može se zapisati kao

$$\begin{aligned} Rv \times Rw &= \left( [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right) \times \left( [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \right) = \\ &= (\mathbf{r}_1 v_1 + \mathbf{r}_2 v_2 + \mathbf{r}_3 v_3) \times (\mathbf{r}_1 w_1 + \mathbf{r}_2 w_2 + \mathbf{r}_3 w_3) = \\ &= (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_1) v_1 w_1 + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1) v_2 w_1 + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) v_3 w_1 + \\ &+ (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) v_1 w_2 + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_2) v_2 w_2 + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_2) v_3 w_2 + \\ &+ (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) v_1 w_3 + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) v_2 w_3 + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_3) v_3 w_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Vektorski umnožak vektora sa samim sobom jednak je nultom vektoru, dok za ostale vektore

matrice rotacije vezane uz desni koordinatni sustav vrijedi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_3, \\
 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1, \\
 \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2, \\
 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1 &= -\mathbf{r}_3, \\
 \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_2 &= -\mathbf{r}_1, \\
 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 &= -\mathbf{r}_2.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Korištenjem izraza pod (32) mogu se izrazi pod (31) napisati kao

$$\begin{aligned}
 &(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_1)v_1w_1 + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1)v_2w_1 + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1)v_3w_1 + \\
 &+ (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)v_1w_2 + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_2)v_2w_2 + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_2)v_3w_2 + \\
 &+ (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3)v_1w_3 + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)v_2w_3 + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_3)v_3w_3 = \\
 &= -\mathbf{r}_3v_2w_1 + \mathbf{r}_2v_3w_1 + \mathbf{r}_3v_1w_2 - \mathbf{r}_1v_3w_2 - \mathbf{r}_2v_1w_3 + \mathbf{r}_1v_2w_3 = \\
 &= \mathbf{r}_1(v_2w_3 - v_3w_2) + \mathbf{r}_2(v_3w_1 - v_1w_3) + \mathbf{r}_3(v_1w_2 - v_2w_1).
 \end{aligned} \tag{33}$$

Može se primijetiti da su izrazi pod (30) i (33) jednaki čime je dokazano očuvanje vektorskog produkta pri množenju matricom rotacije, tj. dokazano je da matrica rotacije predstavlja transformaciju krutog tijela.

### 1.2.2. Opis rotacije korištenjem eksponencijalnih koordinata

Ako se promatra rotacija krutog tijela jediničnom kutnom brzinom oko zadane osi  $u$ , brzina točke  $q$  može se (prema [1]) zapisati kao

$$\dot{q} = u \times q(t) = \tilde{u} q(t). \tag{34}$$

Nakon separacije varijabli i integracije diferencijalne jednadžbe (34) dobiva se izraz

$$q(t) = e^{\tilde{u}t} q(0), \tag{35}$$

pri čemu  $q(0)$  predstavlja položaj točke  $q$  u početnom trenutku, a  $e^{\tilde{u}t}$  predstavlja eksponencijalnu funkciju matrice koja se može izračunati razvojem u Taylorov red

$$e^{\tilde{u}t} = I + \tilde{u}t + \frac{(\tilde{u}t)^2}{2!} + \frac{(\tilde{u}t)^3}{3!} + \dots, \tag{36}$$

pri čemu je  $u$  jedinični vektor, tj.  $\|u\|=1$ , a  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  kososimetrična matrica, tj. vrijedi

$$\tilde{u}^T = -\tilde{u}, \quad (37)$$

Skup svih  $n \times n$  kososimetričnih matrica označava se sa  $so(n)$  i može se definirati kao

$$so(n) = \{S \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid S^T = -S\}. \quad (38)$$

Skup  $so(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$  je vektorski prostor, tj. ukoliko je  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a  $\tilde{u}, \tilde{v} \in so(3)$  vrijedi

$$\tilde{\mathbf{0}} \in S, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} + \tilde{v} &= \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(u_3 + v_3) & (u_2 + v_2) \\ (u_3 + v_3) & 0 & -(u_1 + v_1) \\ -(u_2 + v_2) & (u_1 + v_1) & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{(u+v)} \in S, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\alpha \tilde{u} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha u_3 & \alpha u_2 \\ \alpha u_3 & 0 & -\alpha u_1 \\ -\alpha u_2 & \alpha u_1 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{(\alpha u)} \in S. \quad (41)$$

Rotacija oko osi opisane jediničnim vektorom  $u$  za  $t$  vremenskih jedinica može se zapisati kao rotacija oko osi  $u$  za  $\|u\|$  vremenskih jedinica, čime izraz (36) postaje

$$\exp(\tilde{u}) = e^{\tilde{u}} = I + \tilde{u} + \frac{\tilde{u}^2}{2!} + \frac{\tilde{u}^3}{3!} + \dots \quad (42)$$

U svrhu preuređivanja izraza (42) u izraz koji je pogodan za računanje pokazuje se da vrijede sljedeće jednadžbe

$$\begin{aligned} \tilde{u}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -u_2^2 - u_3^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & -u_1^2 - u_3^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & -u_1^2 - u_2^2 \end{bmatrix} = \end{aligned} \quad (43)$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \|u\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|u\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|u\|^2 \end{bmatrix} = uu^T - \|u\|^2 I,$$

$$\tilde{u}^3 = \tilde{u}\tilde{u}^2 = \tilde{u}uu^T - \tilde{u}\|u\|^2 I = -\|u\|^2 \tilde{u}, \quad (44)$$

dok se više potencije matrice  $\tilde{u}$  mogu izračunati iz prikazanih izraza.

Korištenjem izraza (44) izraz (42) može se zapisati kao

$$\begin{aligned}
 \exp(\tilde{u}) &= I + \tilde{u} + \frac{\tilde{u}^2}{2!} - \frac{\|u\|^2}{3!} \tilde{u} - \frac{\|u\|^2}{4!} \tilde{u}^2 + \frac{\|u\|^4}{5!} \tilde{u} + \frac{\|u\|^4}{6!} \tilde{u}^2 + \dots, \\
 &= I + \left( I - \frac{\|u\|^2}{3!} + \frac{\|u\|^4}{5!} + \dots \right) \tilde{u} + \left( \frac{I}{2!} - \frac{\|u\|^2}{4!} + \frac{\|u\|^4}{6!} + \dots \right) \tilde{u}^2 = \\
 &= I + \left( \|u\| - \frac{\|u\|^3}{3!} + \frac{\|u\|^5}{5!} + \dots \right) \frac{\tilde{u}}{\|u\|} + \left( \frac{\|u\|^2}{2!} - \frac{\|u\|^4}{4!} + \frac{\|u\|^6}{6!} + \dots \right) \frac{\tilde{u}^2}{\|u\|^2} = \\
 &= I + \left( \|u\| - \frac{\|u\|^3}{3!} + \frac{\|u\|^5}{5!} + \dots \right) \frac{\tilde{u}}{\|u\|} + \left( 1 - \left( 1 - \frac{\|u\|^2}{2!} + \frac{\|u\|^4}{4!} - \frac{\|u\|^6}{6!} + \dots \right) \right) \frac{\tilde{u}^2}{\|u\|^2},
 \end{aligned} \tag{45}$$

iz čega se korištenjem Taylorovog razvoja za trigonometrijske funkcije dobiva konačan izraz

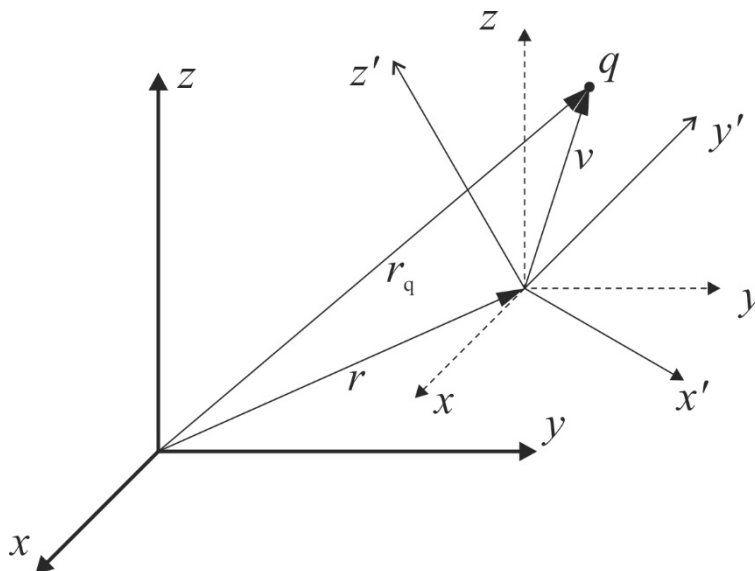
$$\exp(\tilde{u}) = I + \frac{\tilde{u}}{\|u\|} \sin(\|u\|) + \frac{\tilde{u}^2}{\|u\|^2} (1 - \cos(\|u\|)). \tag{46}$$

U [1] je dokazano da se svaka matrica rotacije može prikazati pomoću izraza (46), tj. dokazano je da izraz (46) predstavlja surjektivno eksponencijalno preslikavanje sa  $so(3)$  na  $SO(3)$ . Takav zaključak je u skladu s Eulerovim rotacijskim teoremom ([2]) u kojemu je pokazano da se svaka rotacija u trodimenzionalnom prostoru može prikazati kao rotacija oko fiksne osi za određeni kut, što u ovom slučaju predstavlja rotacija oko osi opisane vektorom  $u$  za kut  $\|u\|$ .

## 2. OPIS KINEMATIKE KRUTOG TIJELA U PROSTORU

U prethodnom poglavlju definiran je način transformacije između dva koordinatna sustava, pri čemu je jedan samo zakrenut u odnosu na drugi, korištenjem matrice rotacije. Kako se položaj i orijentacija tijela u prostoru u pravilu definiraju pomakom i rotacijom koordinatnog sustava vezanog za tijelo u odnosu na inercijski (nepomični) koordinatni sustav, važno je definirati transformaciju između koordinatnog sustava vezanog za tijelo proizvoljnog položaja i orijentacije (pomaknut i zakrenut u odnosu na inercijski koordinatni sustav).

Na slici 2 prikazana je točka  $q$  koja je u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo  $x' - y' - z'$  definirana s vektorom  $v'$ , a u inercijskom koordinatnom sustavu  $x - y - z$  definirana s  $r_q$ .



Slika 2. Transformacija koordinatnog sustava vezanog za tijelo

Položaj točke  $q$  se u inercijskom koordinatnom sustavu može prikazati kao

$$r_q = r + v. \quad (47)$$

Iz razloga što, kako je već opisano u poglavlju 1.1, vektori nemaju položaj, već samo smjer i veličinu vektor  $v'$  transformira se iz koordinatnog sustava vezanog za tijelo u inercijski, neovisno o njihovom međusobnom linearnom položaju pomoću izraza

$$v = R v', \quad (48)$$

nakon čega se izraz (47) može zapisati kao

$$r_q = r + R v'. \quad (49)$$

## 2.1. Linearna i kutna brzina krutog tijela

Kako je već prikazano, položaj točke  $q$  sa slike 2 u inercijskom koordinatnom sustavu određen je izrazom (49), a brzina točke dobiva se deriviranjem vektora položaja po vremenu

$$\dot{r}_q = \dot{r} + \dot{R} v', \quad (50)$$

pri čemu se  $\dot{r}$  označava derivacija po vremenu, a vektor  $v'$  je konstantan jer je izražen u koordinatnom sustavu vezanom za kruto tijelo.

Izrazom (48) definirano je kako transformirati vektor iz koordinatnog sustava vezanog za tijelo u inercijski, a ako se izraz s lijeve strane pomnoži s transponiranom rotacijskom matricom  $R^T$ , zbog ortogonalnosti rotacijske matrice dobiva se

$$R^T v = R^T R v' = v' \rightarrow v' = R^T v, \quad (51)$$

čime je definiran način transformacije iz inercijskog koordinatnog sustava u koordinatni sustav vezan za tijelo.

Ukoliko se svi vektori u izrazu (50), korištenjem izraza (51), prikažu u inercijskom koordinatnom sustavu dobiva se izraz

$$\dot{r}_q = \dot{r} + \dot{R} R^T v, \quad (52)$$

pri čemu se deriviranjem izraza (21) može dokazati da je  $\dot{R} R^T$  kososimetrična matrica

$$\begin{aligned} R R^T &= I \\ \dot{R} R^T + R \dot{R}^T &= 0 \\ \dot{R} R^T + (\dot{R} R^T)^T &= 0 \\ (\dot{R} R^T)^T &= -\dot{R} R^T, \end{aligned} \quad (53)$$

iz čega se može (prema [3]) definirati vektor kutne brzine krutog tijela  $\omega$  (izražen u inercijskom koordinatnom sustavu) kao

$$\tilde{\omega} = \dot{R} R^T. \quad (54)$$

Izraz (52) može se sada zapisati kao

$$\dot{r}_q = \dot{r} + \tilde{\omega} v, \quad (55)$$

što se u vektorskom zapisu, tj. korištenjem izraza (28) zapisuje kao

$$\dot{r}_q = \dot{r} + \omega \times v. \quad (56)$$

Izrazom (54) definiran je vektor kutne brzine u inercijskom koordinatnom sustavu, ali vrlo često pogodnije je vektor kutne brzine izraziti u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo. Za potrebe



izvoda vektora kutne brzine u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo koristan je izraz koji se dobiva iz svojstva očuvanja vektorskog umnoška

$$R(\omega') \times R(v') = R(\omega' \times v'), \quad (57)$$

iz čega se korištenjem matricnog zapisa, tj. izraza (28), te izraza (48) dobiva

$$\tilde{\omega} R v' = R \tilde{\omega}' v', \quad (58)$$

što mora vrijediti za svaki  $v'$  iz čega slijedi

$$\tilde{\omega} R = R \tilde{\omega}', \quad (59)$$

a nakon množenja s desne strane matricom  $R^T$  te korištenjem izraza (48) dobiva se

$$\widetilde{(R\omega')} = R \tilde{\omega}' R^T. \quad (60)$$

Ako se sada u izraz (54) uvrsti izraz (60) dobiva se

$$\begin{aligned} \widetilde{(R\omega')} &= \dot{R} R^T \\ R \tilde{\omega}' R^T &= \dot{R} R^T, \end{aligned} \quad (61)$$

iz čega se nakon množenja s matricom  $R^T$  s lijeve strane i matricom  $R$  s desne dobiva konačni izraz

$$\tilde{\omega}' = R^T \dot{R}. \quad (62)$$

## 2.2. Kvaternioni

Ideja o kvaternionima rođena je 16. listopada 1843. (dan koji se smatra jednim od najbolje dokumentiranih dana u povijesti matematike [4]) kada je, prema legendi, irski fizičar, astronom i matematičar William Rowan Hamilton za vrijeme šetnje prema Irskoj kraljevskoj akademiji dobio ideju o kompleksnom broju sa jednim realnim dijelom i tri imaginarna dijela. Oduševljen idejom, Hamilton je u kamen Broom Bridge mosta u Dublinu urezao jednadžbu

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (63)$$

Nakon definiranja pravila za množenje imaginarnih jedinica, Hamilton je formulirao broj kao

$$q = a + bi + cj + dk, \quad (64)$$

i nazvao ga kvaternion. Kvaternione je formalno Hamilton opisao u [5].

Gibbsovim otkrićem vektorske analize popularnost i upotreba kvaterniona postepeno opada, prvenstveno zbog pojednostavljenja i poboljšanja koje vektorska analiza donosi u usporedbi s kvaternionima [6]. Ipak, ponovna popularizacija kvaterniona potaknuta je razvojem simulatora

leta u zrakoplovnoj industriji, a potom i razvojem računalne grafike koja koristi kvaternione u svrhu opisivanja rotacija pomoću osi i kuta rotacije oko te osi.

Formalno, kvaternioni se mogu definirati kao proširenje skupa kompleksnih brojeva (hiperkompleksni brojevi), tj. kako je već opisano izrazom (64), umjesto standardnog oblika s jednom imaginarnom jedinicom za kompleksne brojeve, kvaternioni uz realni dio imaju tri imaginarna dijela  $i, j, k$ , a sva pravila njihovog međusobnog množenja su

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ ij &= k, & ji &= -k, \\ jk &= i, & kj &= -i, \\ ki &= j, & ik &= -j. \end{aligned} \tag{65}$$

Skup svih kvaterniona uobičajeno se označava s  $\mathbb{H}$  (od Hamilton).

Operacije zbrajanja kvaterniona i množenja kvaterniona sa skalarom su trivijalne, tj. ako su  $Q, P \in \mathbb{H}$  i definirani kao

$$\begin{aligned} Q &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \\ P &= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k, \end{aligned} \tag{66}$$

a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , onda vrijedi

$$\begin{aligned} Q + P &= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k, \\ \alpha Q &= \alpha q_0 + \alpha q_1 i + \alpha q_2 j + \alpha q_3 k. \end{aligned} \tag{67}$$

Množenje kvaterniona, označeno s  $\circ$  nešto je složenije

$$\begin{aligned} Q \circ P &= (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)(p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) = \\ &= q_0 p_0 + q_1 p_0 i + q_2 p_0 j + q_3 p_0 k + \\ &+ q_0 p_1 i + q_1 p_1 i i + q_2 p_1 j i + q_3 p_1 k i + \\ &+ q_0 p_2 j + q_1 p_2 i j + q_2 p_2 j j + q_3 p_2 k j + \\ &+ q_0 p_3 k + q_1 p_3 i k + q_2 p_3 j k + q_3 p_3 k k, \end{aligned} \tag{68}$$

što nakon primjene izraza (65) postaje

$$\begin{aligned} Q \circ P &= q_0 p_0 + q_1 p_0 i + q_2 p_0 j + q_3 p_0 k + \\ &+ q_0 p_1 i - q_1 p_1 - q_2 p_1 k + q_3 p_1 j + \\ &+ q_0 p_2 j + q_1 p_2 k - q_2 p_2 - q_3 p_2 i + \\ &+ q_0 p_3 k - q_1 p_3 j + q_2 p_3 i - q_3 p_3, \end{aligned} \tag{69}$$

iz čega se sređivanjem dobiva konačni izraz

$$\begin{aligned} Q \circ P &= q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 + \\ &+ (q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_3 p_2 + q_2 p_3) i + \\ &+ (q_2 p_0 + q_3 p_1 + q_0 p_2 - q_1 p_3) j + \\ &+ (q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2 + q_0 p_3) k. \end{aligned} \tag{70}$$

Važno je primijetiti kako množenje kvaterniona nije komutativno, tj. vrijedi

$$Q \circ P \neq P \circ Q. \quad (71)$$

Konjugirani kvaternion  $\bar{Q}$  definiran je kao

$$\bar{Q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k. \quad (72)$$

Konjugacija zbroja dvaju kvaterniona jednaka je zbroju konjugiranih kvaterniona, tj. vrijedi

$$\begin{aligned} \overline{(Q + P)} &= \overline{((q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k)} = \\ &= (q_0 + p_0) - (q_1 + p_1)i - (q_2 + p_2)j - (q_3 + p_3)k = \\ &= (q_0 - q_1i - q_2j - q_3k) + (p_0 - p_1i - p_2j - p_3k), \\ \overline{(Q + P)} &= \bar{Q} + \bar{P}. \end{aligned} \quad (73)$$

Konjugacija umnoška dvaju kvaterniona jednaka je umnošku konjugiranih kvaterniona u promijenjenom redoslijedu, tj. vrijedi

$$\begin{aligned} \overline{(Q \circ P)} &= q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3 - \\ &\quad - (q_1p_0 + q_0p_1 - q_3p_2 + q_2p_3)i - \\ &\quad - (q_2p_0 + q_3p_1 + q_0p_2 - q_1p_3)j - \\ &\quad - (q_3p_0 - q_2p_1 + q_1p_2 + q_0p_3)k = \\ &= p_0q_0 - (-p_1)(-q_1) - (-p_2)(-q_2) - (-p_3)(-q_3) + \\ &\quad + ((-p_1)q_0 + p_0(-q_1) - (-p_3)(-q_2) + (-p_2)(-q_3))i + \\ &\quad + ((-p_2)q_0 + (-p_3)(-q_1) + p_0(-q_2) - (-p_1)(-q_3))j + \\ &\quad + ((-p_3)q_0 - (-p_2)(-q_1) + (-p_1)(-q_2) + p_0(-q_3))k = \\ &= (p_0 - p_1i - p_2j - p_3k)(q_0 - q_1i - q_2j - q_3k), \\ \overline{(Q \circ P)} &= \bar{P} \circ \bar{Q}. \end{aligned} \quad (74)$$

Umnožak kvaterniona s njegovom konjugacijom jednak je

$$\begin{aligned} Q \circ \bar{Q} &= q_0q_0 - q_1(-q_1) - q_2(-q_2) - q_3(-q_3) + \\ &\quad + (q_1q_0 + q_0(-q_1) - q_3(-q_2) + q_2(-q_3))i + \\ &\quad + (q_2q_0 + q_3(-q_1) + q_0(-q_2) - q_1(-q_3))j + \\ &\quad + (q_3q_0 - q_2(-q_1) + q_1(-q_2) + q_0(-q_3))k = \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \\ &\quad + (q_1q_0 - q_1q_0 + q_3q_2 - q_3q_2)i + \\ &\quad + (q_2q_0 - q_3q_1 - q_2q_0 + q_3q_1)j + \\ &\quad + (q_3q_0 + q_2q_1 - q_2q_1 - q_3q_0)k = \\ Q \circ \bar{Q} &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \end{aligned} \quad (75)$$

Umnožak konjugacije kvaterniona sa samim kvaternionom jednak je

$$\begin{aligned}
\bar{Q} \circ Q &= q_0 q_0 - (-q_1)q_1 - (-q_2)q_2 - (-q_3)q_3 + \\
&+ ((-q_1)q_0 + q_0 q_1 - (-q_3)q_2 + (-q_2)q_3) \mathbf{i} + \\
&+ ((-q_2)q_0 + (-q_3)q_1 + q_0 q_2 - (-q_1)q_3) \mathbf{j} + \\
&+ ((-q_3)q_0 - (-q_2)q_1 + (-q_1)q_2 + q_0 q_3) \mathbf{k} = \\
&= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \\
&+ (-q_1 q_0 + q_1 q_0 + q_3 q_2 - q_3 q_2) \mathbf{i} + \\
&+ (-q_2 q_0 - q_3 q_1 + q_2 q_0 + q_3 q_1) \mathbf{j} + \\
&+ (-q_3 q_0 + q_2 q_1 - q_2 q_1 + q_3 q_0) \mathbf{k} = \\
\bar{Q} \circ Q &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2.
\end{aligned} \tag{76}$$

Iako općenito umnožak kvaterniona nije komutativan, umnožak kvaterniona i njegove konjugacije jest, tj. vrijedi (vidljivo usporedbom izraza (75) i (76))

$$Q \circ \bar{Q} = \bar{Q} \circ Q. \tag{77}$$

Norma kvaterniona definira se kao

$$\|Q\| = \sqrt{Q \circ \bar{Q}}. \tag{78}$$

Važno je svojstvo jednakost norme umnoška dvaju kvaterniona umnošku normi tih kvaterniona.

Norma umnoška dvaju kvaterniona prema izrazu (78) jednaka je

$$\|Q \circ P\| = \sqrt{(Q \circ P) \circ \overline{(Q \circ P)}}, \tag{79}$$

što korištenjem izraza (74) postaje

$$\|Q \circ P\| = \sqrt{Q \circ P \circ \bar{P} \circ \bar{Q}} = \sqrt{Q \circ \|P\|^2 \circ \bar{Q}}, \tag{80}$$

a kako je množenje skalarom komutativno slijedi

$$\begin{aligned}
\|Q \circ P\| &= \sqrt{Q \circ \bar{Q} \circ \|P\|^2} = \sqrt{\|Q\|^2 \circ \|P\|^2} = \|Q\| \|P\|, \\
\|Q \circ P\| &= \|Q\| \|P\|.
\end{aligned} \tag{81}$$

Inverz kvaterniona  $Q^{-1}$  definira se kao

$$Q \circ Q^{-1} = Q^{-1} \circ Q = 1, \tag{82}$$

a može se odrediti ako se upotrijebi izraz za normu kvaterniona (78)

$$\begin{aligned} Q \circ \bar{Q} &= \|Q\|^2, \\ Q \circ \frac{\bar{Q}}{\|Q\|^2} &= 1, \end{aligned} \tag{83}$$

iz čega slijedi da je inverz kvaterniona jednak

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{\|Q\|^2}. \tag{84}$$

Za opisivanje rotacije važni će biti jedinični kvaternioni, tj. kvaternioni koji zadovoljavaju svojstvo jedinične norme, tj. vrijedi

$$\|Q\| = 1, \tag{85}$$

a posljedica tog svojstva je da je inverz jediničnog kvaterniona jednak konjugiranom kvaternionu, tj. ako se izraz (85) uvrsti u (84) dobiva se

$$Q^{-1} = \bar{Q}. \tag{86}$$

Kvaternion se može zapisati u vektorskom zapisu kao  $Q \in \mathbb{R}^4$

$$Q = (q_0, \mathbf{q}), \tag{87}$$

pri čemu  $q_0 \in \mathbb{R}$  predstavlja skalarni dio a vektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  predstavlja imaginarni dio. Pritom se umnožak kvaterniona u vektorskom zapisu izvodi iz izraza (70) pri čemu je rezultat množenja u vektorskom zapisu jednak

$$Q \circ P = \left( q_0 p_0 - (q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3), \begin{bmatrix} q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_3 p_2 + q_2 p_3 \\ q_2 p_0 + q_3 p_1 + q_0 p_2 - q_1 p_3 \\ q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2 + q_0 p_3 \end{bmatrix} \right), \tag{88}$$

što preuređivanjem u vektorski zapis postaje

$$Q \circ P = \left( q_0 p_0 - \mathbf{q}^T \mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \begin{bmatrix} q_2 p_3 - q_3 p_2 \\ q_3 p_1 - q_1 p_3 \\ q_1 p_2 - q_2 p_1 \end{bmatrix} \right), \tag{89}$$

a korištenjem izraza (27) i (28) dobiva se konačni izraz

$$Q \circ P = (q_0 p_0 - \mathbf{q}^T \mathbf{p}, q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{p}), \tag{90}$$

Konjugirani kvaternion  $\bar{Q}$  u vektorskom zapisu prema izrazu (72) jednak je

$$\bar{Q} = (q_0, -\mathbf{q}). \tag{91}$$

Norma kvaterniona u vektorskom zapisu prema izrazu (78) jednaka je

$$\|Q\| = \sqrt{(q_0, \mathbf{q}) \circ (q_0, \mathbf{q})}, \quad (92)$$

što uvrštavanjem izraza (91) postaje

$$\|Q\| = \sqrt{(q_0, \mathbf{q}) \circ (q_0, -\mathbf{q})}, \quad (93)$$

što korištenjem pravila za množenje kvaterniona u vektorskom zapisu (90) postaje

$$\begin{aligned} \|Q\| &= \sqrt{(q_0 q_0 - \mathbf{q}^T (-\mathbf{q}), q_0 (-\mathbf{q}) + q_0 \mathbf{q} + \tilde{\mathbf{q}} (-\mathbf{q}))} = \\ &= \sqrt{(q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}, -q_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{q})} \end{aligned} \quad (94)$$

$$\|Q\| = \sqrt{(q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q}, 0)},$$

tj. imaginarni dio kvaterniona jednak je nuli i ostaje samo skalarni dio koji je jednak

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \quad (95)$$

što je jednako Euklidskoj normi vektora iz  $\mathbb{R}^4$ .

Stoga jedinični kvaternioni prikazani u vektorskom zapisu  $Q \in \mathbb{R}^4$  predstavljaju jediničnu sferu na  $\mathbb{R}^4$ , tj. tvore grupu

$$S^3 = \{Q \in \mathbb{R}^4 \mid \|Q\| = 1\}. \quad (96)$$

Potrebno je dokazati da skup  $S^3$  stvarno predstavlja grupu, tj. da zadovoljava potrebna svojstva prikazana u poglavlju 1.2.1

1. *Zatvorenost:* Ako su  $Q, P \in S^3$ , onda vrijedi  $Q \circ P \in S^3$  jer prema (81) vrijedi

$$\|Q \circ P\| = \|Q\| \|P\| = 1.$$

2. *Jedinični element:* Jedinični element je kvaternion  $Q = (1, \mathbf{0})$ .
3. *Inverzni element:* Inverzni element za svaki  $Q \in S^3$  prema (86) jest  $\bar{Q} \in S^3$ .
4. *Asocijativnost:* Ako su  $Q, P, R \in G$ , onda vrijedi  $(Q \circ P) \circ R = Q \circ (P \circ R)$ .

Kako bi se na pregledniji način dokazalo svojstvo asocijativnosti važno je primijetiti kako kvaternioni kao elementi grupe  $\mathbb{R}^4$  predstavljaju četveročlane vektore s bazom  $(1, i, j, k)$ . Da bi se dokazala asocijativnost množenja kvaterniona, zahvaljujući svojstvu distributivnosti množenja, dovoljno je pokazati asocijativnost svih mogućih kombinacija množenja baznih elemenata. Kako je poznato, množenje sa skalarom je asocijativno tako da se kombinacije koje

uključuju bazu 1 ne moraju provjeravati čime preostaje ukupno 27 mogućih kombinacija množenja elemenata (i, j, k) za koje vrijedi (poštujući pravila množenja pod (65))

$$\begin{aligned}
(ii)i &= -i = i(-1) = i(ii), \\
(ii)j &= -j = ik = i(k) = i(ij), \\
(ii)k &= -k = -ij = i(-j) = i(ik), \\
(ij)i &= ki = j = -ik = i(-k) = i(ji), \\
(ij)j &= kj = -i = i(-1) = i(jj), \\
(ij)k &= kk = -1 = ii = i(i) = i(jk), \\
(ik)i &= -ji = k = ij = i(j) = i(ki), \\
(ik)j &= -jj = 1 = i(-i) = i(kj), \\
(ik)k &= -jk = -i = i(-1) = i(kk), \\
(ji)i &= -ki = -j = j(-1) = j(ii), \\
(ji)j &= -kj = i = jk = j(k) = j(ij), \\
(ji)k &= -kk = 1 = -jj = j(-j) = j(ik), \\
(jj)i &= -i = -jk = j(-k) = j(ji), \\
(jj)j &= -j = j(-1) = j(jj), \\
(jj)k &= -k = ji = j(i) = j(jk), \\
(jk)i &= ii = -1 = jj = j(j) = j(ki), \\
(jk)j &= ij = k = -ji = j(-i) = j(kj), \\
(jk)k &= ik = -j = j(-1) = j(kk), \\
(ki)i &= ji = -k = k(-1) = k(ii), \\
(ki)j &= jj = -1 = kk = k(k) = k(ij), \\
(ki)k &= jk = i = -kj = k(-j) = k(ik), \\
(kj)i &= -ii = 1 = -kk = k(-k) = k(ji), \\
(kj)j &= -ij = -k = k(-1) = k(jj), \\
(kj)k &= -ik = j = ki = k(i) = k(jk), \\
(kk)i &= -i = kj = k(j) = k(ki), \\
(kk)j &= -j = -ki = k(-i) = k(kj), \\
(kk)k &= -k = k(-1) = k(kk),
\end{aligned} \tag{97}$$

Kako za svih mogućih 27 mogućih kombinacija množenja elemenata (i, j, k) vrijedi svojstvo asocijativnosti, uz svojstvo distributivnosti množenja, može se zaključiti da je množenje kvaterniona asocijativno, čime je dokazano da je skup  $S^3$  (definiran izrazom (96)) ujedno i grupa.

### 2.3. Eulerovi parametri

Izraz koji definira rotaciju korištenjem eksponencijalnih koordinata (46) može se preurediti korištenjem trigonometrijskih pravila

$$\begin{aligned}\sin(\|u\|) &= 2 \sin\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \cos\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right), \\ 1 - \cos(\|u\|) &= 2 \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right),\end{aligned}\tag{98}$$

iz čega slijedi

$$\exp(\tilde{u}) = I + 2 \sin\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \cos\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{\tilde{u}}{\|u\|} + 2 \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{\tilde{u}^2}{\|u\|^2}.\tag{99}$$

Ako se iskoristi izraz (43), izraz (99) može se zapisati kao

$$\begin{aligned}\exp(\tilde{u}) &= I + 2 \sin\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \cos\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{\tilde{u}}{\|u\|} + 2 \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{uu^T}{\|u\|^2} - 2 \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) I = \\ &= \left(1 - 2 \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right)\right) I + 2 \sin\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \cos\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{\tilde{u}}{\|u\|} + 2 \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{uu^T}{\|u\|^2} = \\ &= \left(2 \left(1 - \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right)\right) - 1\right) I + 2 \sin\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \cos\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{\tilde{u}}{\|u\|} + 2 \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{uu^T}{\|u\|^2},\end{aligned}\tag{100}$$

što korištenjem trigonometrijskog identiteta  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  postaje

$$\exp(\tilde{u}) = \left(2 \cos^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) - 1\right) I + 2 \sin\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \cos\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{\tilde{u}}{\|u\|} + 2 \sin^2\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right) \frac{uu^T}{\|u\|^2}.\tag{101}$$

Ako se uvedu Eulerovi parametri

$$\begin{aligned}q_0 &= \cos\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right), \\ \mathbf{q} &= \frac{u}{\|u\|} \sin\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right),\end{aligned}\tag{102}$$

izraz (101) može se zapisati kao

$$\exp(\tilde{u}) = (2q_0^2 - 1)I + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T.\tag{103}$$

Eulerovi parametri mogu se zapisati u obliku kvaterniona

$$Q = (q_0, \mathbf{q}) = \left(\cos\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right), \frac{u}{\|u\|} \sin\left(\left\|\frac{u}{2}\right\|\right)\right).\tag{104}$$

Norma takvog kvaterniona je (prema (94))



$$\begin{aligned}
\|Q\| &= q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = \cos^2 \left( \left\| \frac{\mathbf{u}}{2} \right\| \right) + \frac{\sin^2 \left( \left\| \frac{\mathbf{u}}{2} \right\| \right)}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \\
&= \cos^2 \left( \left\| \frac{\mathbf{u}}{2} \right\| \right) + \frac{\sin^2 \left( \left\| \frac{\mathbf{u}}{2} \right\| \right)}{\|\mathbf{u}\|^2} \|\mathbf{u}\|^2 = \cos^2 \left( \left\| \frac{\mathbf{u}}{2} \right\| \right) + \sin^2 \left( \left\| \frac{\mathbf{u}}{2} \right\| \right) = 1,
\end{aligned} \tag{105}$$

tj. kvaternion sa Eulerovim parametrima je jedinični.

Ako se izraz (103) zapiše u obliku matrice dobiva se matrica rotacije zapisana korištenjem Eulerovih parametara

$$\begin{aligned}
R &= (2q_0^2 - 1)I + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T = \\
&= \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_0^2 - 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -q_0q_3 & q_0q_2 \\ q_0q_3 & 0 & -q_0q_1 \\ -q_0q_2 & q_0q_1 & 0 \end{bmatrix} + \\
&+ 2 \begin{bmatrix} q_1^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_1q_2 & q_2^2 & q_2q_3 \\ q_1q_3 & q_2q_3 & q_3^2 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{106}$$

$$R = 2 \begin{bmatrix} 2q_0^2 + q_1^2 - \frac{1}{2} & q_1q_2 - q_0q_3 & q_1q_3 + q_0q_2 \\ q_1q_2 + q_0q_3 & 2q_0^2 + q_2^2 - \frac{1}{2} & q_2q_3 - q_0q_1 \\ q_1q_3 - q_0q_2 & q_2q_3 + q_0q_1 & 2q_0^2 + q_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Izraz (103) može se dalje preurediti i napisati kao

$$R = (2q_0^2 - 1)I + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T = 2q_0^2I - I + \mathbf{q}\mathbf{q}^T + \mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\tilde{\mathbf{q}}, \tag{107}$$

a ako se iskoristi izraz (44), izraz (107) postaje

$$R = 2q_0^2I - I + \tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}} + \|\mathbf{q}\|^2 I + \mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\tilde{\mathbf{q}}, \tag{108}$$

što daljnjim preuređivanjem i iskorištavanjem činjenice da je kvaternion  $Q$  jedinični, tj. izraza (105), izraz (108) postaje

$$\begin{aligned}
R &= (q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2 - 1)I + q_0^2I + \tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\tilde{\mathbf{q}}, \\
R &= q_0^2I + \tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\tilde{\mathbf{q}}, \\
R &= (-\mathbf{q})(-\mathbf{q}^T) + (q_0I + \tilde{\mathbf{q}})(q_0I + \tilde{\mathbf{q}}).
\end{aligned} \tag{109}$$

Ako se uvedu matrice  $E$  i  $G$  (čije će značenje postati jasnije u daljnjem izvodu) u svrhu jednostavnijeg opisivanja izraza kao

$$\begin{aligned} E &= [-\mathbf{q} \quad q_0 I + \tilde{\mathbf{q}}] = \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \\ L &= [-\mathbf{q} \quad q_0 I - \tilde{\mathbf{q}}] = \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (110)$$

izraz (109) može se zapisati u obliku umnoška matrica kao

$$\begin{aligned} R &= [-\mathbf{q} \quad q_0 I + \tilde{\mathbf{q}}] \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \\ (q_0 I + \tilde{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}, \\ R &= [-\mathbf{q} \quad q_0 I + \tilde{\mathbf{q}}] [-\mathbf{q} \quad q_0 I - \tilde{\mathbf{q}}]^T, \end{aligned} \quad (111)$$

što nakon uvrštavanja izraza (110) postaje

$$R = E L^T. \quad (112)$$

Može se pokazati da množenje matrice  $L^T$  i vektora predstavlja umnožak kvaterniona s vektorom, tj. kvaternionom čiji je skalarni dio jednak nuli (tzv. imaginarni kvaternion).

Umnožak kvaterniona  $Q$  i vektora  $\mathbf{v}$  jednak je (prema izrazu (90))

$$(q_0, \mathbf{q}) \circ (0, \mathbf{v}) = (-\mathbf{q}^T \mathbf{v}, q_0 \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{v}), \quad (113)$$

što se u matričnom obliku može prikazati kao

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \mathbf{v} \\ q_0 \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \\ q_0 I + \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \mathbf{v} = L^T \mathbf{v}, \quad (114)$$

iz čega se zaključuje

$$(q_0, \mathbf{q}) \circ (0, \mathbf{v}) = L^T \mathbf{v}. \quad (115)$$

Također može se pokazati da množenje matrice  $E$  i kvaterniona  $P$  predstavlja vektorski dio umnoška  $P \circ \bar{Q}$ . Ako se umnožak  $P \circ \bar{Q}$  napiše prema izrazu (90) kao

$$(p_0, \mathbf{p}) \circ (q_0, -\mathbf{q}) = (p_0 q_0 + \mathbf{p}^T \mathbf{q}, -p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{q}), \quad (116)$$

vektorski dio izraza može se u matričnom obliku napisati kao

$$-p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{q} = -\mathbf{q} p_0 + q_0 \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{p} = [-\mathbf{q} \quad q_0 I + \tilde{\mathbf{q}}] \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (117)$$

iz čega se može zaključiti da vrijedi

$$V(P \circ \bar{Q}) = E P, \quad (118)$$

pri čemu  $V(\cdot)$  predstavlja vektorski (imaginarni) dio kvaterniona.

Može se još i pokazati kako je skalarni dio umnoška  $Q \circ (0, \mathbf{v}) \circ \bar{Q}$  jednak nuli ako se umnožak zapiše prema izrazu (90) kao

$$\begin{aligned}
 S(Q \circ (0, \mathbf{v}) \circ \bar{Q}) &= S((q_0, \mathbf{q}) \circ (0, \mathbf{v}) \circ (q_0, -\mathbf{q})) = \\
 &= S((q_0, \mathbf{q}) \circ (\mathbf{v}^T \mathbf{q}, q_0 \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{q})) = \\
 &= q_0 \mathbf{v}^T \mathbf{q} - q_0 \mathbf{q}^T \mathbf{v} + \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{q} = \\
 &= q_0 \mathbf{v}^T \mathbf{q} - q_0 \mathbf{v}^T \mathbf{q}, \\
 S(Q \circ (0, \mathbf{v}) \circ \bar{Q}) &= 0,
 \end{aligned} \tag{119}$$

pri čemu  $S(\cdot)$  predstavlja skalarni (realni) dio kvaterniona.

Iz izraza (112), (115), (118) i (119) može se zaključiti da, ako je  $Q$  rotacijski kvaternion, tj. ako sadrži Eulerove parametre (prema (102)) je umnožak  $R\mathbf{v}$  jednak

$$R \mathbf{v} = EL^T \mathbf{v} = Q \circ (0, \mathbf{v}) \circ \bar{Q}, \tag{120}$$

pri čemu se operacija  $Q \circ (0, \mathbf{v}) \circ \bar{Q}$  često naziva konjugacija vektora  $\mathbf{v}$  kvaternionom  $Q$ .

### 3. METODE INTEGRACIJE KRUTOG TIJELA U PROSTORU KORIŠTENJEM ROTACIJSKIH KVATERNIONA

U prethodnom poglavlju prikazan je opis kinematike krutog tijela u prostoru korištenjem kvaterniona. Izvedeni su oblici operacija na kvaternionima u matričnom zapisu u svrhu lakšeg izvođenja jednadžbi i njihove lakše implementacije u algoritme za integraciju. Prije prikaza uobičajenih metoda integracije kvaterniona u vektorskom prostoru te opisivanja nove metode koja operira izravno na rotacijskoj mnogostrukosti  $SO(3)$  potrebno je izvesti izraze za kutnu brzinu i derivaciju kutne brzine izraženu pomoću Eulerovih parametara.

#### 3.1. Kutna brzina i derivacija kutne brzine izražene korištenjem Eulerovih parametara

U svrhu iskazivanja kutne brzine izražene u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo u ovisnosti o Eulerovim parametrima, prema izrazu (62), potrebno je prvo izvesti izraz da derivaciju rotacijske matrice tj. derivirati izraz (112) čime se dobiva

$$\dot{R} = \dot{E} L^T + E \dot{L}^T. \quad (121)$$

Može se, uvrštavanjem izraza (110), pokazati da su izrazi  $\dot{E} L^T$  i  $E \dot{L}^T$  jednaki

$$\begin{aligned} \dot{E} L^T &= E \dot{L}^T, \\ \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} & \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{q}_0 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \\ \tilde{\mathbf{q}} + q_0 I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{q} & \tilde{\mathbf{q}} + q_0 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}}^T \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{q}_0 I \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (122)$$

$$\dot{\mathbf{q}}\mathbf{q}^T + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{q}} + \dot{q}_0\tilde{\mathbf{q}} + q_0\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{q}_0q_0I = \mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}^T + \tilde{\mathbf{q}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + q_0\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{q}_0\tilde{\mathbf{q}} + q_0\dot{q}_0I,$$

iz čega je nakon kraćenja potrebno pokazati samo da vrijedi

$$\dot{\mathbf{q}}\mathbf{q}^T + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}^T + \tilde{\mathbf{q}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}. \quad (123)$$

Raspisivanjem izraza sa lijeve strane jednadžbe dobiva se matrica

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}\mathbf{q}^T + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1q_1 & \dot{q}_1q_2 & \dot{q}_1q_3 \\ \dot{q}_2q_1 & \dot{q}_2q_2 & \dot{q}_2q_3 \\ \dot{q}_3q_1 & \dot{q}_3q_2 & \dot{q}_3q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{q}_3q_3 - \dot{q}_2q_2 & \dot{q}_2q_1 & \dot{q}_3q_1 \\ \dot{q}_1q_2 & -\dot{q}_3q_3 - \dot{q}_1q_1 & \dot{q}_3q_2 \\ \dot{q}_1q_3 & \dot{q}_2q_3 & -\dot{q}_2q_2 - \dot{q}_1q_1 \end{bmatrix}, \\ \dot{\mathbf{q}}\mathbf{q}^T + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\tilde{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1q_1 - \dot{q}_3q_3 - \dot{q}_2q_2 & \dot{q}_1q_2 + \dot{q}_2q_1 & \dot{q}_1q_3 + \dot{q}_3q_1 \\ \dot{q}_2q_1 + \dot{q}_1q_2 & \dot{q}_2q_2 - \dot{q}_3q_3 - \dot{q}_1q_1 & \dot{q}_2q_3 + \dot{q}_3q_2 \\ \dot{q}_3q_1 + \dot{q}_1q_3 & \dot{q}_3q_2 + \dot{q}_2q_3 & \dot{q}_3q_3 - \dot{q}_2q_2 - \dot{q}_1q_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (124)$$

dok se raspisivanjem izraza s desne strane jednadžbe dobiva matrica

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}^T + \tilde{\mathbf{q}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \begin{bmatrix} q_1\dot{q}_1 & q_1\dot{q}_2 & q_1\dot{q}_3 \\ q_2\dot{q}_1 & q_2\dot{q}_2 & q_2\dot{q}_3 \\ q_3\dot{q}_1 & q_3\dot{q}_2 & q_3\dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q_3\dot{q}_3 - q_2\dot{q}_2 & q_2\dot{q}_1 & q_3\dot{q}_1 \\ q_1\dot{q}_2 & -q_3\dot{q}_3 - q_1\dot{q}_1 & q_3\dot{q}_2 \\ q_1\dot{q}_3 & q_2\dot{q}_3 & -q_2\dot{q}_2 - q_1\dot{q}_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}^T + \tilde{\mathbf{q}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \begin{bmatrix} q_1\dot{q}_1 - q_3\dot{q}_3 - q_2\dot{q}_2 & q_1\dot{q}_2 + q_2\dot{q}_1 & q_1\dot{q}_3 + q_3\dot{q}_1 \\ q_2\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2 & q_2\dot{q}_2 - q_3\dot{q}_3 - q_1\dot{q}_1 & q_2\dot{q}_3 + q_3\dot{q}_2 \\ q_3\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_3 & q_3\dot{q}_2 + q_2\dot{q}_3 & q_3\dot{q}_3 - q_2\dot{q}_2 - q_1\dot{q}_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (125)$$

čijom se usporedbom može zaključiti da izraz (122) vrijedi.

Primjenom izraza (122) može se derivacija rotacijske matrice zapisati kao

$$\dot{R} = 2 E \dot{L}^T. \quad (126)$$

Prema izrazima (62), (112) i (126) kutna brzina izražena u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo može se zapisati kao

$$\tilde{\omega}' = R^T \dot{R} = 2 (E L^T)^T E \dot{L}^T = 2 L E^T E \dot{L}^T. \quad (127)$$

Umnožak matrica  $E^T E$  jednak je

$$\begin{aligned} E^T E &= \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \\ q_0 I_3 - \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} [-\mathbf{q} \quad q_0 I_3 + \tilde{\mathbf{q}}], \\ E^T E &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{q} & -q_0 \mathbf{q}^T \\ -q_0 \mathbf{q} & q_0^2 I_3 - \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (128)$$

što se korištenjem izraza (43) može dalje preurediti

$$E^T E = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{q} & -q_0 \mathbf{q}^T \\ -q_0 \mathbf{q} & q_0^2 I_3 - \mathbf{q} \mathbf{q}^T + \|\mathbf{q}\|^2 I_3 \end{bmatrix}, \quad (129)$$

a primjenom činjenice da se radi o jediničnom kvaternionu, tj. primjenom izraza (105) dobiva se konačni izraz

$$E^T E = \begin{bmatrix} 1 - q_0^2 & -q_0 \mathbf{q}^T \\ -q_0 \mathbf{q} & I_3 - \mathbf{q} \mathbf{q}^T \end{bmatrix} = I_4 - Q Q^T. \quad (130)$$

Također, važno je pokazati da je umnožak matrice  $L$  i kvaterniona  $Q$  jednak

$$L Q = [-\mathbf{q} \quad q_0 I - \tilde{\mathbf{q}}] \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = -q_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{q} = 0. \quad (131)$$

Uvrštavanjem izraza (130) u izraz (127) dobiva se

$$\tilde{\omega}' = 2 L (I_4 - Q Q^T) \dot{L}^T = 2 L \dot{L}^T + 2 L Q Q^T \dot{L}^T, \quad (132)$$

iz čega se primjenom izraza (131) dobiva konačni izraz za kutnu brzinu izraženu u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo

$$\tilde{\omega}' = 2 L \dot{L}' . \quad (133)$$

Prema [3] vrijedi jednakost

$$L \dot{L}' = \widetilde{(L \dot{Q})} , \quad (134)$$

pomoću čega se izraz (133) može zapisati i kao

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}' &= 2 \widetilde{(L \dot{Q})} , \\ \omega' &= 2 L \dot{Q} . \end{aligned} \quad (135)$$

Derivacijom izraza (135) dobiva se

$$\dot{\omega}' = 2 \dot{L} \dot{Q} + 2 L \ddot{Q} . \quad (136)$$

Može se pokazati da vrijedi

$$\dot{L} \dot{Q} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} & \dot{q}_0 I - \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = -\dot{q}_0 \dot{\mathbf{q}} + \dot{q}_0 \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0 . \quad (137)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (137) u jednadžbu (136), dobiva se konačni izraz za derivaciju kutne brzine iskazanu u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo

$$\dot{\omega}' = 2 L \ddot{Q} . \quad (138)$$

### 3.2. Standardne metode integracije na kvaterniona

Dvije standardne metode integracije koje će biti prikazane u ovom radu opisane su u [7]. Prije samog prikaza metoda integracije, potrebno je opisati dinamičke jednadžbe rotacije krutog tijela, poznatije kao Eulerove jednadžbe. Eulerove jednadžbe mogu se (prema [8]) jednostavno prikazati kao

$${}_0 \dot{h} = {}_0 T , \quad (139)$$

pri čemu  $h$  predstavlja vektor ukupnog kinetičkog momenta, a  $T$  vektor vanjskih momenata koji djeluju na tijelo.

U daljnjem tekstu, u svrhu izbjegavanja moguće zabune, koristit će se notacija  ${}_0 X_i$  za definiranje veličine  $X_i$  iskazane u koordinatnom sustavu  $O$ , pri čemu  $O$  označava fiksni, inercijski koordinatni sustav.

Kinetički moment može se, također prema [8], još izraziti i kao

$$h = I \omega, \quad (140)$$

pri čemu  $I$  predstavlja tenzor inercije krutog tijela. Ako se izraz (140) uvrsti u (139) dobiva se

$$\frac{d}{dt}({}_o I {}_o \omega) = {}_o T. \quad (141)$$

Najčešće se Eulerova jednažba iskazuje u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo jer je u tom sustavu tenzor inercije konstantan što znatno olakšava računanje. Ako se vektor kinetičkog momenta i vektor vanjskih momenata prikažu (korištenjem izraza (48)) u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo (koordinatni sustav B) dobiva se izraz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}({}_B I {}_B \omega) &= {}_B T, \\ {}_B I {}_B \dot{\omega} + \dot{{}_B I} {}_B \omega &= {}_B T, \end{aligned} \quad (142)$$

a množenjem izraza s matricom  $R^T$  s lijeve strane te korištenjem svojstva ortogonalnosti matrice  $R$  i izraza za kutnu brzinu (62) dobiva se izraz

$$\begin{aligned} R^T {}_B I {}_B \dot{\omega} + R^T \dot{{}_B I} {}_B \omega &= R^T {}_B T, \\ {}_B I {}_B \dot{\omega} + {}_B \tilde{\omega} {}_B I {}_B \omega &= {}_B T. \end{aligned} \quad (143)$$

### 3.2.1. Formulacija I

Prva formulacija je u potpunosti definirana na kvaternionima, tj. dinamičke jednažbe (143) prebacuju se u kvaternione te se onda integracija provodi na uobičajeni način, korištenjem neke od dostupnih integracijskih metoda. Ako se u izraz (143) uvrste izrazi (133), (135) i (138) dobiva se

$$\begin{aligned} {}_B I 2L\ddot{Q} + 2L\dot{L}^T {}_B I 2L\dot{Q} &= {}_B T, \\ 2 {}_B I L\ddot{Q} + 4L\dot{L}^T {}_B I L\dot{Q} &= {}_B T. \end{aligned} \quad (144)$$

Izrazi u ovom obliku ne mogu se jednoznačno riješiti, jer su matrice  ${}_B I L$  i  $4L\dot{L}^T {}_B I L$  dimenzije 3x4 (potrebna je dodatna jednažba), što je posljedica činjenice da Eulerovi parametri nisu neovisni, tj. kvaternioni koji opisuju rotaciju moraju biti jedinični (izraz (105)) što se može izraziti i kao

$$Q^T Q = 1, \quad (145)$$

a derivacijom tog izraza dobiva se

$$\begin{aligned} \dot{Q}^T Q + Q^T \dot{Q} &= 0, \\ \dot{Q}^T Q = Q^T \dot{Q} &= 0, \end{aligned} \quad (146)$$

a ponovnim deriviranjem dobiva se izraz

$$Q^T \ddot{Q} + \dot{Q}^T \dot{Q} = 0, \quad (147)$$

koji se može upotrijebiti kao dodatna jednažba izrazu (144) čime se dobiva sustav jednažbi

$$\begin{bmatrix} 2 {}_B I L \\ Q^T \end{bmatrix} \ddot{Q} + \begin{bmatrix} 4 L \dot{L}^T {}_B I L \\ \dot{Q}^T \end{bmatrix} \dot{Q} = \begin{bmatrix} {}_B T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (148)$$

Kako je u ovom izrazu ograničenje kvaterniona zadano na razini ubrzanja potrebno je u svakom koraku dodatno stabilizirati kvaternione i njihove derivacije, tj. osigurati da zadovoljavaju ograničenja (145) i (146).

Stabilizacija izraza (145) za kvaternion  $Q^*$  provodi se korištenjem jednostavnog izraza

$$Q = \frac{Q^*}{\sqrt{Q^{*T} Q^*}}, \quad (149)$$

tj. dobiveni kvaternion se samo podijeli sa vlastitom normom čime se umjetnim putem postigne jedinični kvaternion.

Optimalna stabilizacija izraza (146) se (prema [7]) za kvaternion  $Q^*$  provodi korištenjem izraza

$$\dot{Q} = \dot{Q}^* - \dot{Q}^{*T} Q Q. \quad (150)$$

Iz svega navedenoga može se prikazati algoritam numeričke integracije za formulaciju I pri čemu je za numeričku integraciju korištena Runge-Kutta metoda četvrtog reda točnosti

$$\begin{aligned} & Q_0, \dot{Q}_0, \Delta t \\ & k_1 = \Delta t \cdot \dot{Q}_0 \\ & K_1 = \Delta t \cdot f(Q_0, \dot{Q}_0) \\ & k_2 = \Delta t \cdot \left( \dot{Q}_0 + \frac{1}{2} K_1 \right) \\ & K_2 = \Delta t \cdot f\left(Q_0 + \frac{1}{2} k_1, \dot{Q}_0 + \frac{1}{2} K_1\right) \\ & k_3 = \Delta t \cdot \left( \dot{Q}_0 + \frac{1}{2} K_2 \right) \\ & K_3 = \Delta t \cdot f\left(Q_0 + \frac{1}{2} k_2, \dot{Q}_0 + \frac{1}{2} K_2\right) \\ & k_4 = \Delta t \cdot \left( \dot{Q}_0 + K_3 \right) \\ & K_4 = \Delta t \cdot f\left(Q_0 + k_3, \dot{Q}_0 + K_3\right) \\ & Q_{\text{out}}^* = Q_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (151)$$



$$Q_{\text{out}} = \frac{Q_{\text{out}}^*}{\sqrt{Q_{\text{out}}^{*T} Q_{\text{out}}^*}}$$

$$\dot{Q}_{\text{out}}^* = \dot{Q}_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$\dot{Q}_{\text{out}} = \dot{Q}_{\text{out}}^* - \dot{Q}_{\text{out}}^* Q_{\text{out}} Q_{\text{out}}$$

pri čemu  $f(Q, \dot{Q})$  predstavlja izračunavanje druge derivacije kvaterniona  $\ddot{Q}$  iz dinamičke jednačbe (148).

### 3.2.2. Formulacija II

U drugoj formulaciji dinamičke jednačbe ostaju u obliku izraza (143), te se potom numeričkom integracijom dobiva  $\omega$ , nakon čega je potrebno iz  $\omega$  izračunati derivaciju kvaterniona  $\dot{Q}$ .

Ako se izraz (135) s lijeve strane pomnoži s  $L^T$  dobiva se

$$L^T {}_B \omega = 2 L^T L \dot{Q}, \quad (152)$$

a umnožak matrica  $L^T L$  može se prikazati kao

$$L^T L = \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \\ q_0 I_3 + \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} [-\mathbf{q} \quad q_0 I_3 - \tilde{\mathbf{q}}], \quad (153)$$

$$L^T L = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{q} & -q_0 \mathbf{q}^T \\ -q_0 \mathbf{q} & q_0^2 I_3 - \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix},$$

što se korištenjem izraza (43) može dalje preurediti

$$L^T L = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \mathbf{q} & -q_0 \mathbf{q}^T \\ -q_0 \mathbf{q} & q_0^2 I_3 - \mathbf{q} \mathbf{q}^T + \|\mathbf{q}\|^2 I_3 \end{bmatrix}, \quad (154)$$

a primjenom činjenice da se radi o jediničnom kvaternionu, tj. primjenom izraza (105) dobiva se konačni izraz

$$L^T L = \begin{bmatrix} 1 - q_0^2 & -q_0 \mathbf{q}^T \\ -q_0 \mathbf{q} & I_3 - \mathbf{q} \mathbf{q}^T \end{bmatrix} = I_4 - Q Q^T. \quad (155)$$

Ako se izraz (155) uvrsti u izraz (152) dobiva se

$$L^T {}_B \omega = 2 (I_4 - Q Q^T) \dot{Q} = 2 \dot{Q} - Q Q^T \dot{Q}, \quad (156)$$

a iz izraza (146) slijedi da su kvaternion i njegova derivacija ortogonalni nakon čega se derivacija kvaterniona može izračunati iz kutne brzine kao

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} L^T {}_B \omega. \quad (157)$$

Pritom je ograničenje (146) uključeno u sami algoritam i nije potrebna dodatna, eksplicitna stabilizacijska jednadžba, dok ograničenje (145) nije zadovoljeno i potrebno je u svakom vremenskom koraku provesti stabilizaciju (149).

Algoritam numeričke integracije za formulaciju II jest

$$\begin{aligned}
 & Q_0, \quad {}_B\omega_0, \quad \Delta t \\
 & k_1 = \frac{1}{2}\Delta t \cdot L(Q_0) \cdot {}_B\omega_0 \\
 & K_1 = \Delta t \cdot f(Q_0, {}_B\omega_0) \\
 & k_2 = \frac{1}{2}\Delta t \cdot L\left(Q_0 + \frac{1}{2}k_1\right) \cdot \left({}_B\omega_0 + \frac{1}{2}K_1\right) \\
 & K_2 = \Delta t \cdot f\left(Q_0 + \frac{1}{2}k_1, {}_B\omega_0 + \frac{1}{2}K_1\right) \\
 & k_3 = \frac{1}{2}\Delta t \cdot L\left(Q_0 + \frac{1}{2}k_2\right) \cdot \left({}_B\omega_0 + \frac{1}{2}K_2\right) \\
 & K_3 = \Delta t \cdot f\left(Q_0 + \frac{1}{2}k_2, {}_B\omega_0 + \frac{1}{2}K_2\right) \\
 & k_4 = \frac{1}{2}\Delta t \cdot L(Q_0 + k_3) \cdot ({}_B\omega_0 + K_3) \\
 & K_4 = \Delta t \cdot f(Q_0 + k_3, {}_B\omega_0 + K_3) \\
 & Q_{\text{out}}^* = Q_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 & Q_{\text{out}} = \frac{Q_{\text{out}}^*}{\sqrt{Q_{\text{out}}^* T Q_{\text{out}}^*}} \\
 & {}_B\omega_{\text{out}} = {}_B\omega_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
 \end{aligned} \tag{158}$$

pri čemu  $f(Q, {}_B\omega)$  predstavlja izračunavanje derivacije kutne brzine  ${}_B\dot{\omega}$  iz dinamičke jednadžbe (143).

### 3.3. Nova metoda integracije kvaterniona koja operira izravno na rotacijskoj mnogostrukosti $SO(3)$

Stabilizacijska jednadžba (149) prisutna u standardnim formulacijama (uz stabilizacijsku jednadžbu (150) prisutnu u nekim standardnim metodama) na umjetan način eksplicitnom jednadžbom pretvara kvaternion u jedinični čime se, zbog činjenice da takva jednadžba nema fizikalno značenje, nužno uvodi određena greška u rezultate koja u slučaju kada moment ovisi o orijentaciji tijela može propagirati i postajati sve veća s vremenom. Problemi sa rezultatima su stoga bili vidljivi prvenstveno kada su promatrane velike vremenske domene uz relativno velike vremenske korake. U svrhu rješavanja toga problema, u [9] predstavljena je nova metoda

koja operira izravno na rotacijskoj mnogostrukosti i kao takva čuva ograničenja kvaterniona bez ikakvih dodatnih (umjetnih) jednadžbi ograničenja.

U radu [9] pokazana je grupa jediničnih kvaterniona (96) koja je izomorfna simplektičkoj grupi  $Sp(1)$  i posebnoj unitarnoj grupi  $SU(2)$ . Brzine, tj. derivacije kvaterniona, mogu se prikazati u vektorskom prostoru  $sp(1)$

$$sp(1) = \{W \in \mathbb{R}^4 \mid W + \bar{W} = (0, \mathbf{0})\}, \quad (159)$$

tj. drugim riječima  $W$  predstavlja imaginarni kvaternion.

Nadalje,  $sp(1)$  je Lieva algebra od  $Sp(1)$ , koja je izomorfna Lijevoj algebri  $so(3)$ . Lieva algebra  $sp(1)$  je skup imaginarnih kvaterniona izomorfan skupu  $\mathbb{R}^3$ , tako da element  $W \in sp(1)$  može biti dodijeljen vektoru  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ . Kako bi se osiguralo da su  $sp(1)$ ,  $so(3)$  i  $\mathbb{R}^3$  izomorfne Lieve algebre, element  $W = \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right) \in sp(1)$  je povezan s vektorom  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  [9].

Također, prema [9] postoji eksponencijalno preslikavanje  $\exp_{S^3} : sp(1) \cong \mathbb{R}^3 \rightarrow Sp(1) \cong S^3$ , koje se razvojem u red može zapisati kao

$$\exp_{S^3}(W) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{W^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^{2k}}{(2k)!} + \frac{\left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\}. \quad (160)$$

Korištenjem pravila množenja kvaterniona (90) izračunava se

$$\left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right) \circ \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right) = \left(-\frac{1}{4}\mathbf{u}^T\mathbf{u}, \mathbf{0}\right) = -\left\|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right\|^2 (1, \mathbf{0}), \quad (161)$$

iz čega se može zaključiti da vrijedi

$$\left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^{2k} = (-1)^k \left\|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right\|^{2k} (1, \mathbf{0}), \quad (162)$$

dok drugi izraz iznosi

$$\begin{aligned} \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^{2k+1} &= \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^{2k} \circ \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right) = (-1)^k \left\|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right\|^{2k} (1, \mathbf{0}) \circ \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right), \\ \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}\right)^{2k+1} &= (-1)^k \frac{\left\|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right\|^{2k+1}}{\|\mathbf{u}\|} (0, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (163)$$

Uvrštavanjem izraza (162) i (163) u izraz (160) dobiva se

$$\exp_{S^3}(W) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left\| \frac{1}{2} \mathbf{u} \right\|^{2k}}{(2k)!} (1, \mathbf{0}) + \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left\| \frac{1}{2} \mathbf{u} \right\|^{2k+1}}{(2k+1)!} (0, \mathbf{u}), \quad (164)$$

iz čega se primjenom razvoja u Taylorov red trigonometrijskih funkcija dobiva konačan izraz

$$\exp_{S^3}(W) = \cos\left(\left\| \frac{1}{2} \mathbf{u} \right\|\right) (1, \mathbf{0}) + \frac{\sin\left(\left\| \frac{1}{2} \mathbf{u} \right\|\right)}{\|\mathbf{u}\|} (0, \mathbf{u}). \quad (165)$$

Prema [9] korak u numeričkoj integraciji kvaterniona može se zapisati kao

$$Q_{n+1} = Q_n \circ \exp_{S^3}\left(\left(0, \frac{1}{2} \mathbf{u}_n\right)\right), \quad (166)$$

pri čemu  $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^3$  predstavlja inkrementalni rotacijski vektor koji se izračunava iz diferencijalne jednadžbe

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_n = \text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}_n}^{-1}(\mathbf{B} \tilde{\omega}), \quad (167)$$

uz početni uvjet  $\tilde{\mathbf{u}}_{n_0} = \mathbf{0}$ .

Kako je diferencijalna jednadžba (167) obična diferencijalna jednadžba definirana na Lieovoj algebri koja je vektorski prostor, može se koristiti bilo koji standardni numerički integrator definiran na vektorskom prostoru. Pritom red točnosti cijelog algoritma ovisi isključivo o redu točnosti integratora primijenjenog za rješavanje diferencijalne jednadžbe (167) [9]. Operator u jednadžbi (167) izveden je u [9] kao

$$\text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}}^{-1}(\mathbf{B} \tilde{\omega}) = \mathbf{B} \tilde{\omega} + \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{B} \tilde{\omega}] + \frac{1}{12} [\tilde{\mathbf{u}}, [\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{B} \tilde{\omega}]] + \dots, \quad (168)$$

dok se taj operator prema [10] može zapisati kao

$$\text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}}^{-1} = I + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\|\mathbf{u}\| \cot\left(\frac{\|\mathbf{u}\|}{2}\right) - 2}{2\|\mathbf{u}\|^2} \tilde{\mathbf{u}}^2. \quad (169)$$

Time su definirani svi potrebni izrazi za numeričku integraciju korištenjem navedene metode, a algoritam je

$$\begin{aligned} & Q_0, \mathbf{B} \omega_0, \Delta t \\ & k_1 = \Delta t \cdot \text{dexp}(\mathbf{0}, \mathbf{B} \omega_0) \\ & K_1 = \Delta t \cdot f(Q_0, \mathbf{B} \omega_0) \\ & k_2 = \Delta t \cdot \text{dexp}\left(\frac{1}{2} k_1, \mathbf{B} \omega_0 + \frac{1}{2} K_1\right) \\ & K_2 = \Delta t \cdot f\left(Q_0 \circ \exp_{S^3}\left(\frac{1}{2} k_1\right), \mathbf{B} \omega_0 + \frac{1}{2} K_1\right) \end{aligned} \quad (170)$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= \Delta t \cdot \text{dexp} \left( \frac{1}{2} k_2, {}_B \omega_0 + \frac{1}{2} K_2 \right) \\
K_3 &= \Delta t \cdot f \left( Q_0 \circ \exp_{S^3} \left( \frac{1}{2} k_2 \right), {}_B \omega_0 + \frac{1}{2} K_2 \right) \\
k_4 &= \Delta t \cdot \text{dexp} (k_3, {}_B \omega_0 + K_3) \\
K_4 &= \Delta t \cdot f \left( Q_0 \circ \exp_{S^3} (k_3), {}_B \omega_0 + K_3 \right) \\
Q_{\text{out}} &= Q_0 \circ \exp_{S^3} \left( \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right) \\
{}_B \omega_{\text{out}} &= {}_B \omega_0 + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
\end{aligned}$$

pri čemu  $f(Q, {}_B \omega)$  predstavlja izračunavanje derivacije kutne brzine  ${}_B \dot{\omega}$  iz dinamičke jednadžbe (143).

## 4. NUMERIČKI EKSPERIMENTI

U ovom poglavlju prikazat će se usporedba rezultata dobivenih korištenjem metoda opisanih u poglavlju 3 za tri različita primjera. Prvo će se obraditi dva primjera koja su vrlo često korištena za ispitivanje svojstava numeričkih integratora (engl. *benchmark examples*): rotacija slobodnog krutog tijela oko osi bliske nestabilnoj te rotacija krutog tijela s jednom uporišnom točkom (engl. *Heavy top*). Potom je obrađen praktični primjer rotacije satelita korištenjem tri reakcijska diska.

### 4.1. Rotacija slobodnog krutog tijela oko osi bliske nestabilnoj

Ovaj primjer rotacije slobodnog krutog tijela prikazan je i u radu [11]. Bitno je pokazati kako svako kruto tijelo koje ima različite vrijednosti momenata tromosti oko glavnih osi ima dvije osi oko kojih je rotacija stabilna i jednu os oko koje je rotacija nestabilna.

#### 4.1.1. Stabilnost rotacije

Ako se Eulerove jednadžbe iskažu oko glavnih osi krutog tijela, matrica momenata tromosti je dijagonalna, a ako su glavni momenti tromosti zadani tako da vrijedi

$$I_1 > I_2 > I_3, \quad (171)$$

Eulerove jednadžbe (143) se za slobodno rotirajuće tijelo ( $T = 0$ ) mogu prikazati kao (sve veličine izražene su u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 0, \\ & \begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{bmatrix} = 0, \\ & \begin{bmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_2 \omega_2 \omega_3 + I_3 \omega_2 \omega_3 \\ I_1 \omega_1 \omega_3 - I_3 \omega_1 \omega_3 \\ -I_1 \omega_1 \omega_2 + I_2 \omega_1 \omega_2 \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (172)$$

što se može prikazati kao

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (173)$$

Ako se sada pretpostavi rotacija krutog tijela oko prve glavne osi, koja je uslijed vanjskih utjecaja blago perturbirana, mogu se komponente kutne brzine zapisati kao

$$\begin{aligned} \omega_1 &= konst., \\ \|\omega_2\| &\ll 1, \\ \|\omega_3\| &\ll 1. \end{aligned} \quad (174)$$

Iz prve jednadžbe sustava (173) može se derivacija kutne brzine oko prve glavne osi iskazati kao

$$\dot{\omega}_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2 \omega_3, \quad (175)$$

a kako su vrijednosti kutne brzine oko druge i treće glavne osi gotovo jednake nuli (prema (174)), može se vrijednost derivacije kutne brzine oko prve glavne osi zanemariti

$$\dot{\omega}_1 \approx 0. \quad (176)$$

Ako se potom druga jednadžba sustava (173) derivira i iskoristi izraz (176), dobiva se

$$\begin{aligned} I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \dot{\omega}_1 \omega_3 + (I_1 - I_3) \omega_1 \dot{\omega}_3 &= 0, \\ I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (177)$$

Ako se potom iz treće jednadžbe sustava (173) izrazi derivacija kutne brzine oko treće glavne osi, može se izraz (177) zapisati kao

$$\begin{aligned} I_2 \ddot{\omega}_2 + \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1^2 \omega_2 &= 0, \\ \ddot{\omega}_2 + \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (178)$$

Iz izraza (171) može se zaključiti da je

$$\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 > 0, \quad (179)$$

pa se stoga, uz pozitivnu konstantu  $C$ , može izraz (178) napisati kao

$$\ddot{\omega}_2 + C \omega_2 = 0, \quad (180)$$

što predstavlja stabilnu oscilaciju kutne brzine oko druge glavne osi.

Ako se na sličan način derivira treća jednažba sustava (173) i iskoristi izraz (176), dobiva se

$$\begin{aligned} I_3 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \dot{\omega}_2 + (I_2 - I_1) \dot{\omega}_1 \omega_2 &= 0, \\ I_3 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \dot{\omega}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (181)$$

Ako se potom iz druge jednažbe sustava (173) izrazi derivacija kutne brzine oko druge glavne osi, može se izraz (181) zapisati kao

$$\ddot{\omega}_3 + \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_2 I_3} \omega_1^2 \omega_3 = 0, \quad (182)$$

a iz izraza (171) može se zaključiti da je

$$\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_2 I_3} \omega_1^2 > 0, \quad (183)$$

pa se stoga, uz pozitivnu konstantu  $C$ , može izraz (182) napisati kao

$$\ddot{\omega}_3 + C \omega_3 = 0, \quad (184)$$

što predstavlja stabilnu oscilaciju kutne brzine oko treće glavne osi.

Kako su za ovaj slučaj oscilacije kutne brzine oko druge i treće glavne osi stabilne (izrazi (180) i (184)), može se zaključiti da je rotacija oko prve glavne osi stabilna.

Ako se sada, na sličan način, pretpostavi rotacija krutog tijela oko druge glavne osi, koja je uslijed vanjskih utjecaja blago perturbirana, mogu se komponente kutne brzine zapisati kao

$$\begin{aligned} \|\omega_1\| &\ll 1, \\ \omega_2 &= konst., \\ \|\omega_3\| &\ll 1. \end{aligned} \quad (185)$$

Iz druge jednažbe sustava (173) može se derivacija kutne brzine oko druge glavne osi iskazati kao

$$\dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_2}{I_2} \omega_1 \omega_3, \quad (186)$$

a kako su vrijednosti kutne brzine oko prve i treće glavne osi gotovo jednake nuli (prema (185)), može se vrijednost derivacije kutne brzine oko druge glavne osi zanemariti

$$\dot{\omega}_2 \approx 0. \quad (187)$$

Ako se potom prva jednažba sustava (173) derivira i iskoristi izraz (187), dobiva se

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \dot{\omega}_2 \omega_3 + (I_3 - I_2) \omega_2 \dot{\omega}_3 &= 0, \\ I_1 \ddot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (188)$$



Ako se potom iz treće jednadžbe sustava (173) izrazi derivacija kutne brzine oko treće glavne osi, može se izraz (188) zapisati kao

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\omega}_1 + \frac{(I_3 - I_2)(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_2^2 \omega_1 &= 0, \\ \ddot{\omega}_1 + \frac{(I_3 - I_2)(I_1 - I_2)}{I_1 I_3} \omega_2^2 \omega_1 &= 0. \end{aligned} \quad (189)$$

Iz izraza (171) može se zaključiti da je

$$\frac{(I_3 - I_2)(I_1 - I_2)}{I_1 I_3} \omega_2^2 < 0, \quad (190)$$

pa se stoga, uz pozitivnu konstantu  $C$ , može izraz (189) napisati kao

$$\ddot{\omega}_1 - C \omega_1 = 0, \quad (191)$$

što predstavlja nestabilnu oscilaciju kutne brzine oko prve glavne osi iz čega se odmah može zaključiti da je rotacija oko druge glavne osi nestabilna.

Konačno, ako se pretpostavi rotacija krutog tijela oko treće glavne osi, koja je uslijed vanjskih utjecaja blago perturbirana, mogu se komponente kutne brzine zapisati kao

$$\begin{aligned} \|\omega_1\| &\ll 1, \\ \|\omega_2\| &\ll 1, \\ \omega_3 &= \text{konst.} \end{aligned} \quad (192)$$

Iz treće jednadžbe sustava (173) može se derivacija kutne brzine oko treće glavne osi iskazati kao

$$\dot{\omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \omega_2, \quad (193)$$

a kako su vrijednosti kutne brzine oko prve i druge glavne osi gotovo jednake nuli (prema (192)), može se vrijednost derivacije kutne brzine oko treće glavne osi zanemariti

$$\dot{\omega}_3 \approx 0. \quad (194)$$

Ako se potom prva jednadžba sustava (173) derivira i iskoristi izraz (194), dobiva se

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \dot{\omega}_2 \omega_3 + (I_3 - I_2) \omega_2 \dot{\omega}_3 &= 0, \\ I_1 \ddot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \dot{\omega}_2 \omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (195)$$

Ako se potom iz treće jednačbe sustava (173) izrazi derivacija kutne brzine oko druge glavne osi, može se izraz (195) zapisati kao

$$I_1 \ddot{\omega}_1 + \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3^2 \omega_1 = 0, \quad (196)$$

$$\ddot{\omega}_1 + \frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \omega_3^2 \omega_1 = 0.$$

Iz izraza (171) može se zaključiti da je

$$\frac{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \omega_3^2 > 0, \quad (197)$$

pa se stoga, uz pozitivnu konstantu  $C$ , može izraz (196) napisati kao

$$\ddot{\omega}_1 + C \omega_1 = 0, \quad (198)$$

što predstavlja stabilnu oscilaciju kutne brzine oko prve glavne osi.

Ako se, konačno, derivira druga jednačba sustava (173) i iskoristi izraz (194), dobiva se

$$I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \dot{\omega}_1 \omega_3 + (I_1 - I_3) \omega_1 \dot{\omega}_3 = 0, \quad (199)$$

$$I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \dot{\omega}_1 \omega_3 = 0.$$

Ako se potom iz prve jednačbe sustava (173) izrazi derivacija kutne brzine oko prve glavne osi, može se izraz (199) zapisati kao

$$I_2 \ddot{\omega}_2 + \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_3^2 \omega_2 = 0, \quad (200)$$

$$\ddot{\omega}_2 + \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2} \omega_3^2 \omega_2 = 0,$$

a iz izraza (171) može se zaključiti da je

$$\frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2} \omega_3^2 > 0, \quad (201)$$

pa se stoga, uz pozitivnu konstantu  $C$ , može izraz (200) napisati kao

$$\ddot{\omega}_2 + C \omega_2 = 0, \quad (202)$$

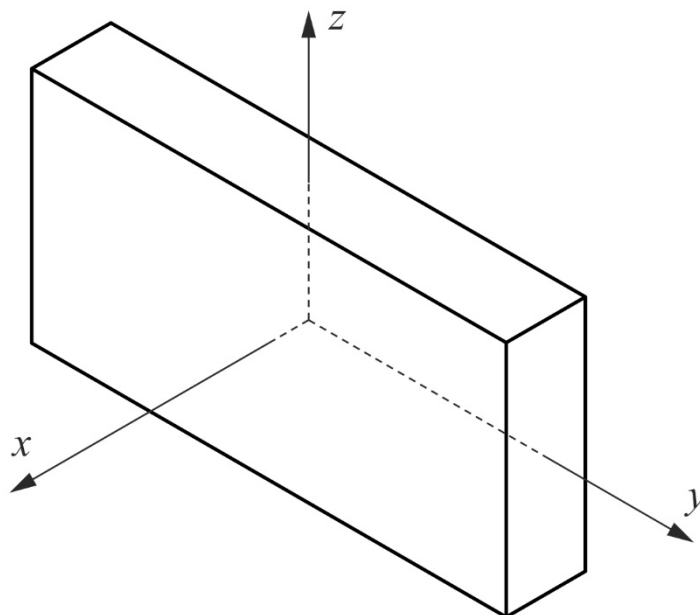
što predstavlja stabilnu oscilaciju kutne brzine oko druge glavne osi.

Kako su za ovaj slučaj oscilacije kutne brzine oko prve i druge glavne osi stabilne (izrazi (198) i (202)), može se zaključiti da je rotacija oko treće glavne osi stabilna.

Konačno se, iz svega opisanog, može zaključiti da su rotacije oko osi s najmanjom i najvećom vrijednosti glavnog momenta tromosti stabilne, dok je rotacija oko osi s srednjom vrijednosti glavnog momenta tromosti nestabilna.

#### 4.1.2. Opis primjera i početnih uvjeta te prikaz rezultata

Za geometriju krutog tijela izabran je kvadar s tri brida različitih duljina prema slici 3.



Slika 3. Geometrija slobodno rotirajućeg tijela

Tijelo je slobodno rotirajuće, tj. na njega ne djeluju nikakvi vanjski momenti, pa su stoga Eulerove jednadžbe jednake (prema (143))

$${}_B I_B \dot{\omega} = - {}_B \tilde{\omega} {}_B I_B \omega, \quad (203)$$

pri čemu je

$${}_B I = \begin{bmatrix} 5,2988 & 0 & 0 \\ 0 & 1,1775 & 0 \\ 0 & 0 & 4,3568 \end{bmatrix} \text{ kg m}^2 \quad (204)$$

tenzor tromosti preuzet iz [11] iz čega se vidi da je rotacija oko treće glavne osi nestabilna.

Početni vektor kutne brzine jednak je

$${}_B \omega_0 = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \text{ s}^{-1}, \quad (205)$$

što predstavlja rotaciju malo perturbiranu od treće glavne osi (nestabilna rotacija).

Početni kvaternion jednak je

$$Q_0 = (1, \mathbf{0}), \quad (206)$$

tj. u početnom trenutku se inercijski koordinatni sustav i koordinatni sustav vezan za tijelo poklapaju.

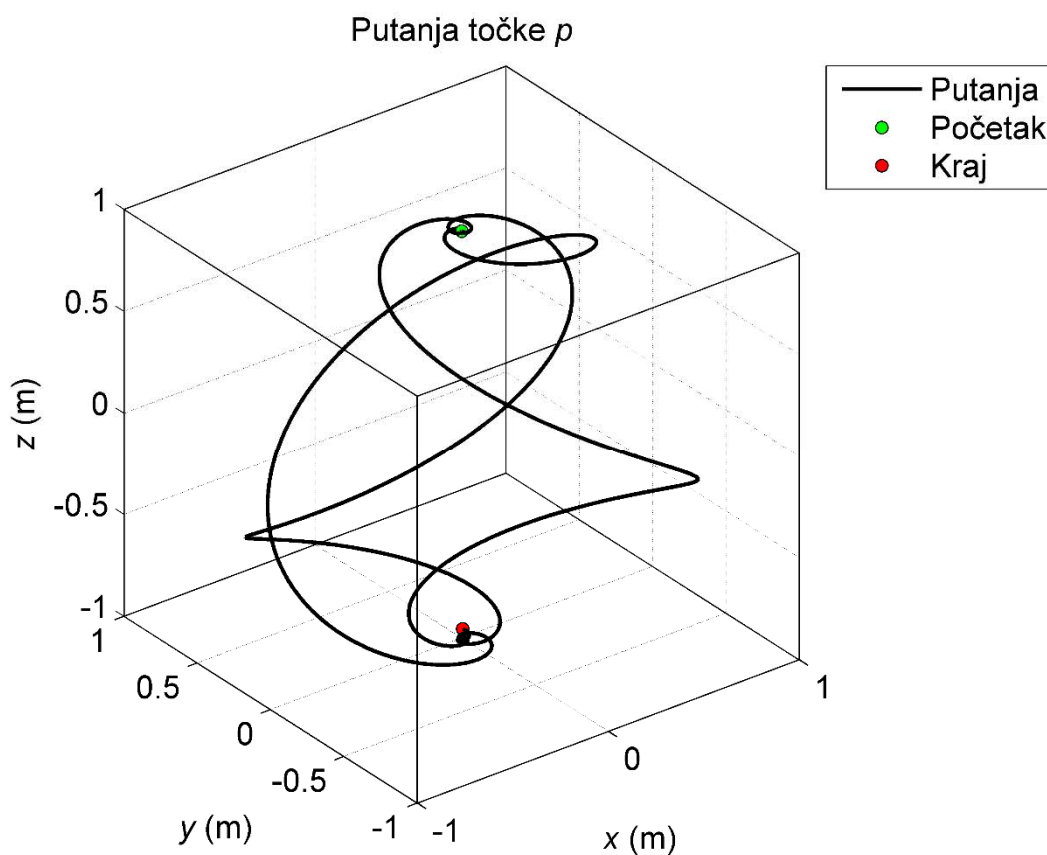
Simulacija je provedena za vremensku domenu od jedne sekunde, a sve tri metode konvergirale su prema istom rješenju (s razlikama gotovo na računalnoj točnosti) korištenjem vremenskog koraka  $\Delta t = 10^{-5}$  s. Kako bi se bolje mogli predočiti rezultati, postavljena je točka  $p$  s početnim koordinatama

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ m,} \quad (207)$$

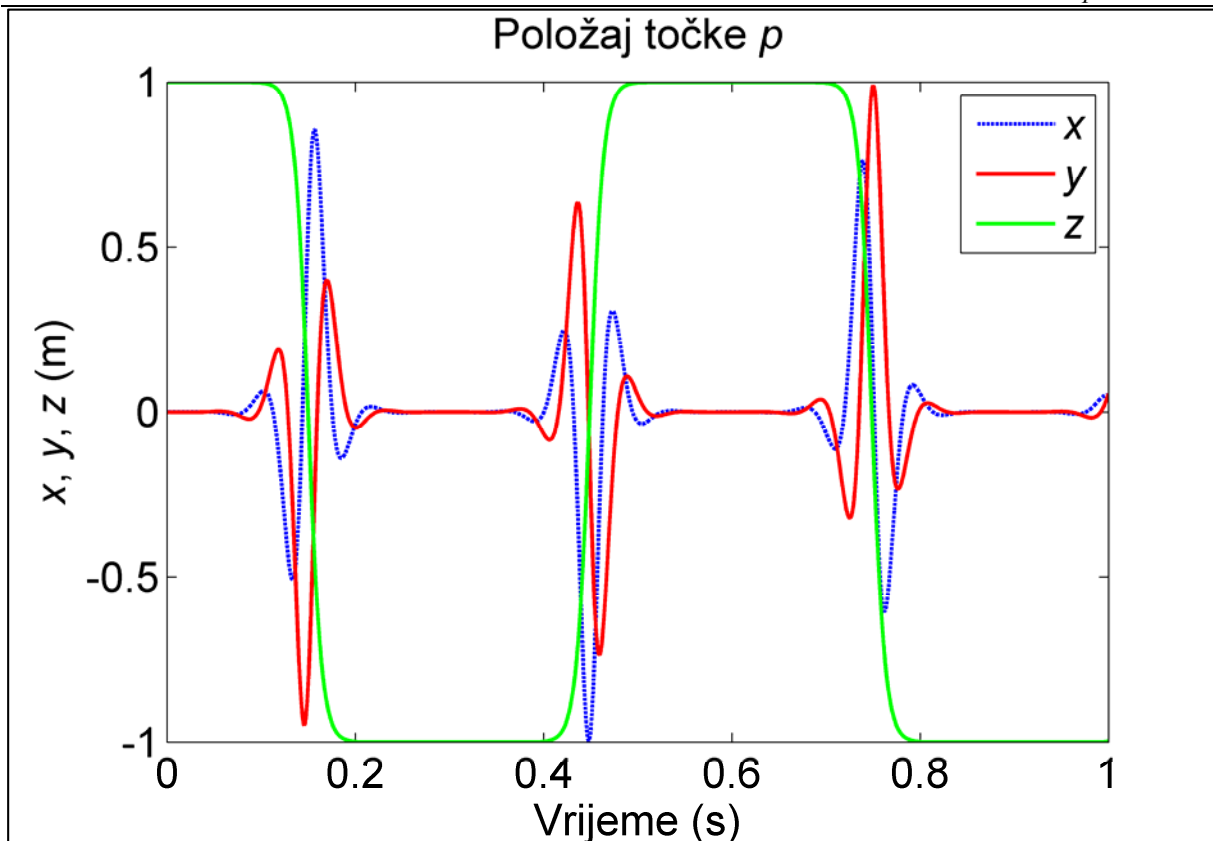
čiji se položaj pratio tijekom cijele simulacije.

Putanja točke  $p$  u inercijskom koordinatnom sustavu prikazana je trodimenzionalnim dijagramom na slici 4, a vrijednost svake od komponenata  $p_x$ ,  $p_y$  i  $p_z$  u ovisnosti o vremenu  $t$  prikazana je na slici 5.

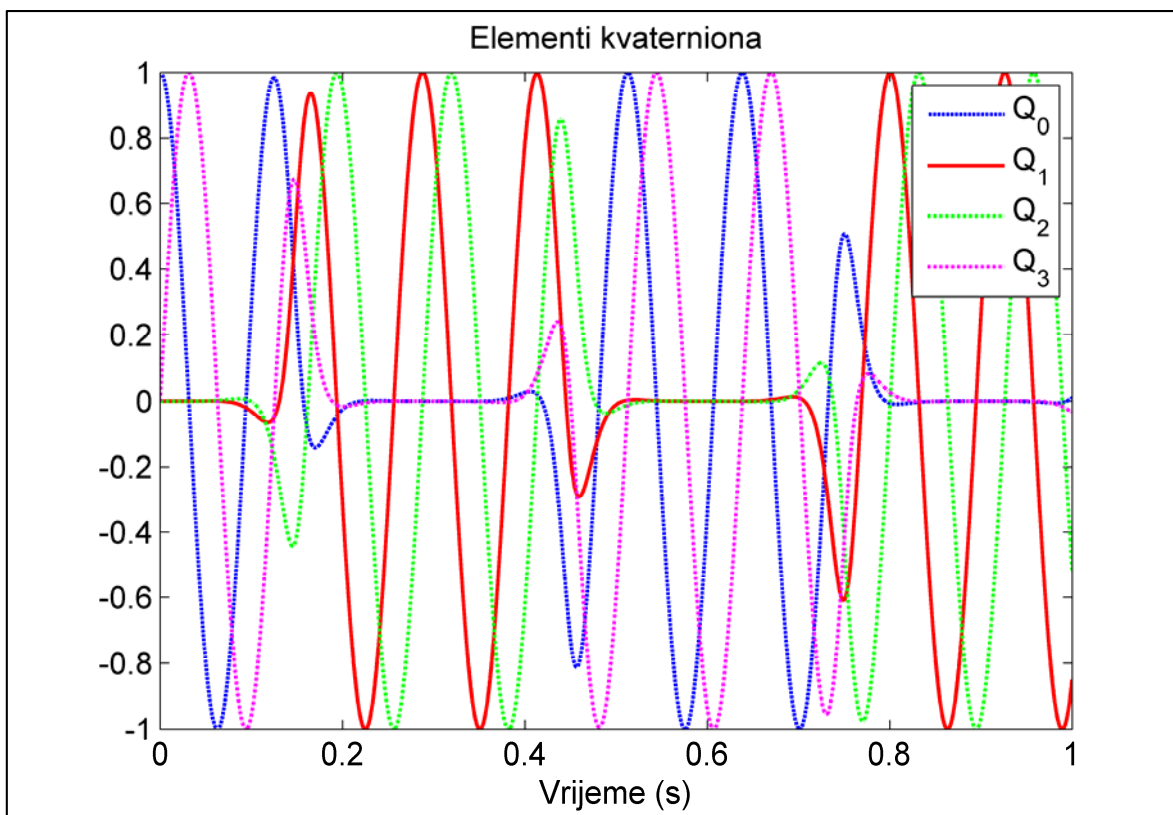
Na slici 6 prikazana je ovisnost elemenata kvaterniona, a na slici 7 komponenta kutne brzine, o vremenu  $t$ .



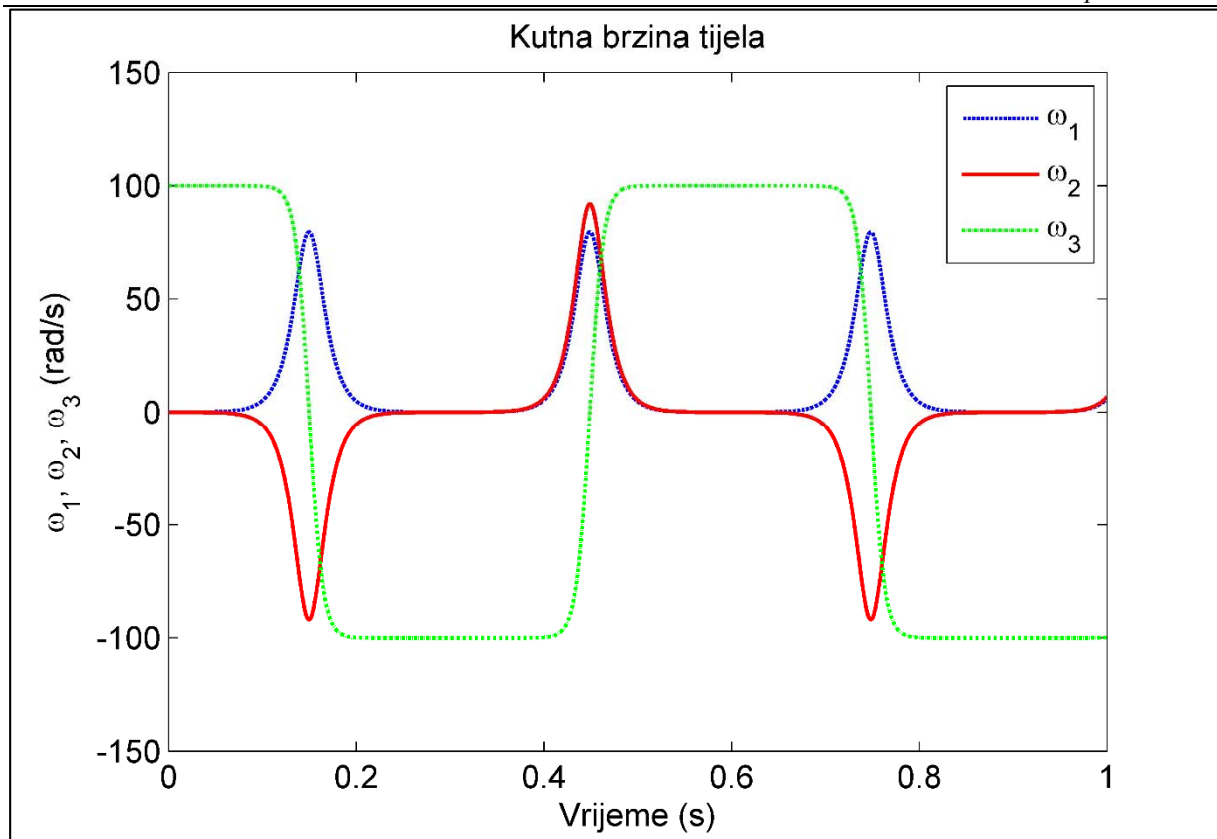
Slika 4. Putanja točke  $p$  prikazana u trodimenzionalnom dijagramu



Slika 5. Položaj točke  $p$  u ovisnosti o vremenu



Slika 6. Ovisnost elemenata kvaterniona o vremenu



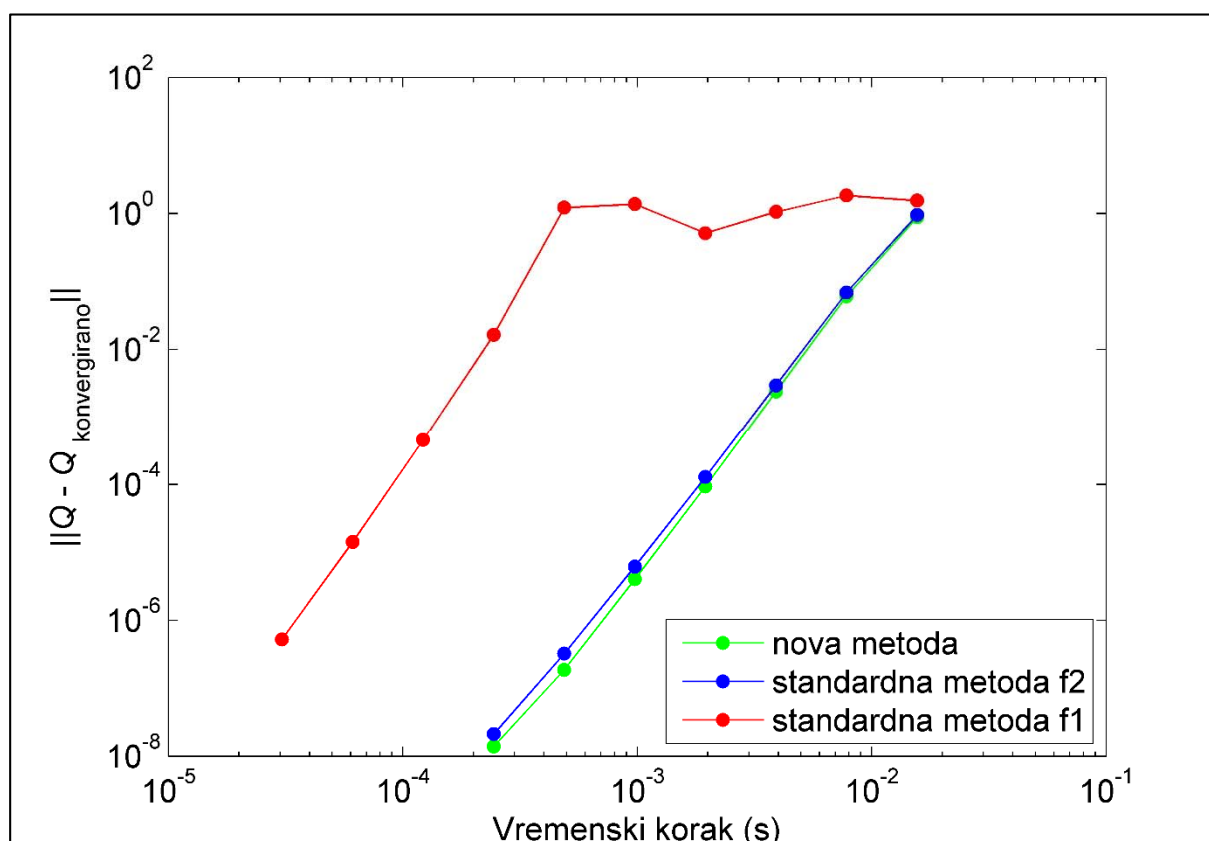
Slika 7. Ovisnost komponenata kutne brzine o vremenu

Na slikama 4, 5 i 7 može se primijetiti da je rotacija nestabilna kako je i očekivano, tj. može se primijetiti da se kruto tijelo nakon određenog vremena rotacije oko osi bliske osi  $z$  zaokrene, a točka  $p$  mijenja položaj između  $[0 \ 0 \ 1]^T$  i  $[0 \ 0 \ -1]^T$  nakon čega se nastavlja rotacija oko osi bliske osi  $z$ .

Također, na slici 6 važno je primijetiti da su sve krivulje ovisnosti elemenata kvaterniona o vremenu kontinuirane, tj. nema nikakvih diskontinuiteta, što je posljedica činjenice da se u opisu rotacija putem kvaterniona ne javljaju singulariteti koji su prisutni pri bilo kojoj parametrizaciji rotacija korištenjem tri koordinate. Svojstvo opisivanja rotacija bez kinematičkih singulariteta jest jedan od ključnih razloga korištenja kvaterniona pri opisivanju rotacija.

Potom su, u svrhu prikaza konvergencije i usporedbe rezultata za različite metode, provedene simulacije s vremenskim koracima  $\Delta t = \left( \frac{1}{64} \text{ s}, \frac{1}{128} \text{ s}, \frac{1}{256} \text{ s}, \frac{1}{512} \text{ s}, \frac{1}{1024} \text{ s}, \frac{1}{2048} \text{ s}, \frac{1}{4096} \text{ s} \right)$ , a rezultati su uspoređeni s vrijednošću  $Q_{\text{konvergirano}}$  dobivenom za  $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$ , koja se može smatrati referentnom, jer su sve metode konvergirale prema istom rješenju. Na slici 8 prikazan

je dijagram ovisnosti norme razlike izračunatog kvaterniona i referentnog (konvergiranog) kvaterniona  $\|Q - Q_{\text{konvergirano}}\|$  o vremenskom koraku  $\Delta t$  za tri različite metode. Dijagram je prikazan u logaritamskom mjerilu. Rezultati za manje vremenske korake (do  $\Delta t = \frac{1}{32768}$  s) prikazani su za prvu formulaciju standardne metode kako bi se pokazalo da za manje korake i ona konvergira prema rješenju.

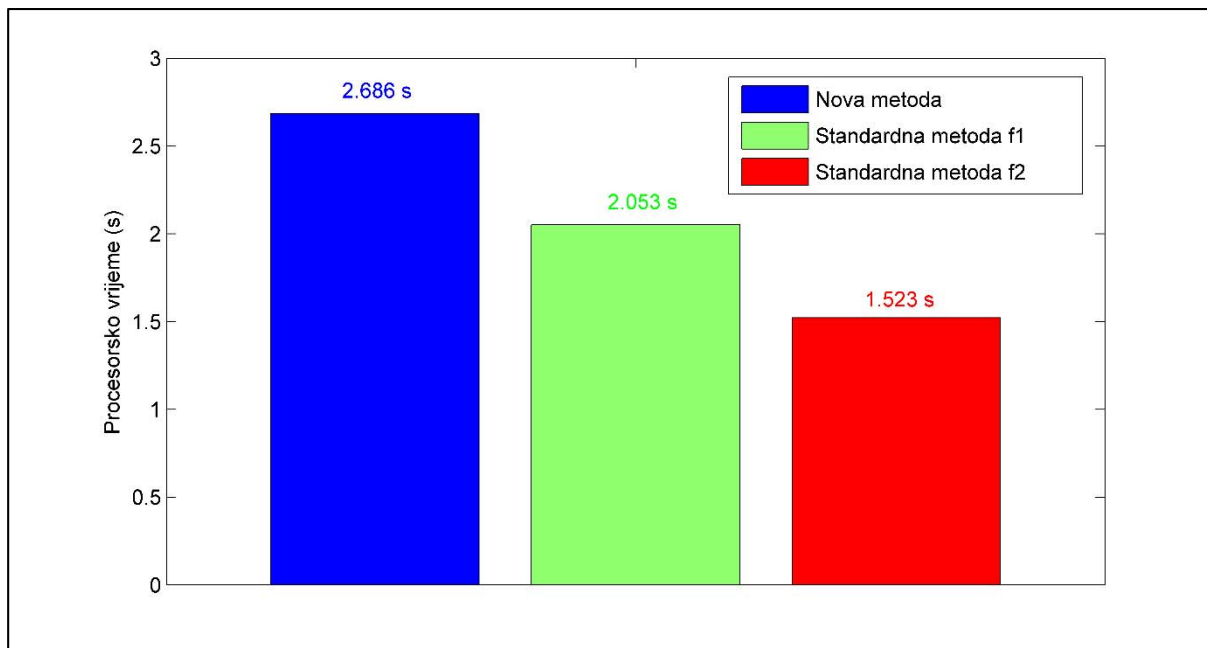


Slika 8. Konvergencija rezultata za tri različite metode

Kako je vidljivo na slici 8, prva formulacija standardne metode (poglavlje 3.2.1) u ovom primjeru pokazuje velike greške pri većim vremenskim koracima, dok tek za vremenske korake manje od  $\Delta t = \frac{1}{2048}$  s pokazuje standardnu konvergenciju rezultata. Druga formulacija standardne metode (poglavlje 3.2.2) i nova metoda (poglavlje 3.3) u ovom primjeru pokazuju vrlo slične rezultate, dok nova metoda ima nešto bržu konvergenciju prema točnom rješenju, uz malo veću točnost (najveća razlika u normi greški iznosi 0,0686).

Na posljepku, numerička efikasnost ispitana je usporedbom vremena potrebnog da se provede simulacija na istoj vremenskoj domeni, s istim vremenskim korakom korištenjem triju opisanih

metoda. Provedeno je po 50 mjerenja za svaku od metoda, a prosječni rezultati prikazani su na slici 9.



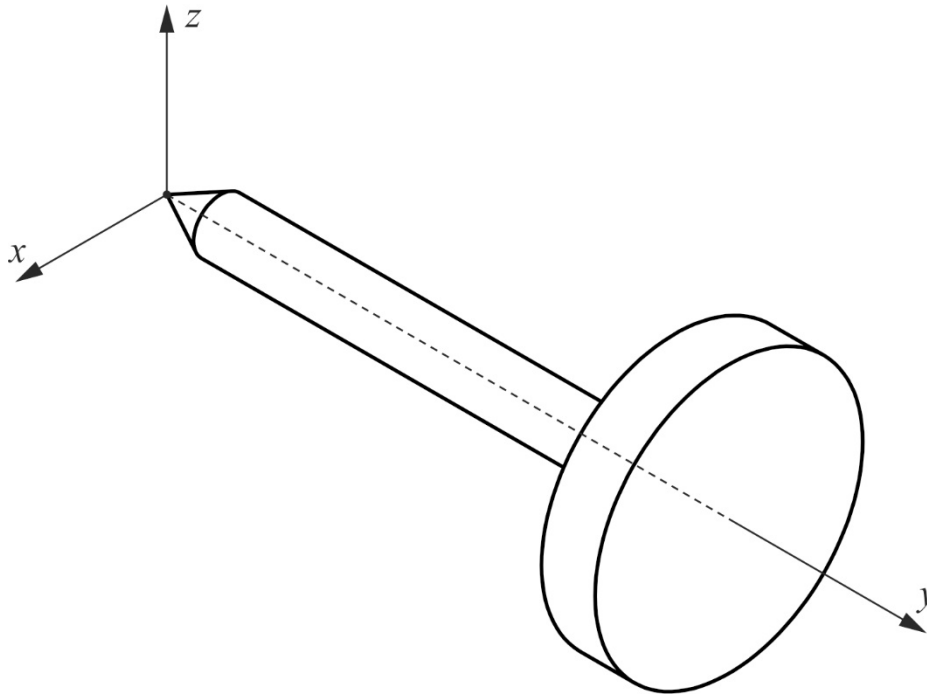
**Slika 9. Usporedba prosječnog procesorskog vremena za tri različite metode**

Iz rezultata se može primijetiti da nova metoda ima najnižu numeričku efikasnost, što je i očekivano, zbog izračunavanja trigonometrijskih funkcija koje se pri korištenju standardnih metoda ne računaju, dok je u usporedbi standardnih metoda efikasnija metoda po drugoj formulaciji, prvenstveno zbog jednostavnije formulacije Eulerovih jednadžbi i jedne stabilizacijske jednadžbe manje.



## 4.2. Rotacija krutog tijela s jednom uporišnom točkom

Ovaj primjer rotacije krutog tijela s jednom uporišnom točkom prikazan je i u radu [9]. Geometrija krutog tijela prikazana je na slici 10.



**Slika 10. Geometrija krutog tijela s jednom uporišnom točkom**

Ako se Eulerove jednadžbe postave za koordinatni sustav s ishodištem u uporišnoj točki, jedini vanjski moment koji djeluje na kruto tijelo je moment koji se javlja uslijed djelovanja gravitacije. Vektor sile uslijed djelovanja gravitacije može se, u inercijskom koordinatnom sustavu, izraziti kao

$${}_oF_g = {}_o(m \mathbf{g}), \quad (208)$$

pri čemu

$$m = 15 \text{ kg} \quad (209)$$

predstavlja masu, a  $\mathbf{g}$  predstavlja vektor gravitacijskog ubrzanja koji iznosi

$${}_o\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,81 \end{bmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (210)$$

Ako se vektor sile (208) prebaci u koordinatni sustav vezan za tijelo korištenjem izraza (51) može se moment oko uporišne točke uslijed djelovanja gravitacije u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo izraziti kao

$${}^B T_g = {}^B \tilde{\mathbf{r}}_C {}^B F_g = {}^B \tilde{\mathbf{r}}_C R^T_o (m \mathbf{g}), \quad (211)$$

pri čemu  ${}^B \mathbf{r}_C$  predstavlja vektor položaja težišta krutog tijela izražen u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo koji je zadan kao

$${}^B \mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad (212)$$

Potom se sustav dinamičkih jednadžbi može prikazati kao

$${}^B I {}^B \dot{\omega} = {}^B \tilde{\mathbf{r}}_C R^T_o (m \mathbf{g}) - {}^B \tilde{\omega} {}^B I {}^B \omega, \quad (213)$$

pri čemu je

$${}^B I = \begin{bmatrix} 15,2344 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4688 & 0 \\ 0 & 0 & 15,2344 \end{bmatrix} \text{ kg m}^2 \quad (214)$$

tenzor tromosti krutog tijela oko uporišne točke, iskazan u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo.

Početni vektor kutne brzine jednak je

$${}^B \omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \\ 4,61538 \end{bmatrix} \text{ s}^{-1}. \quad (215)$$

Početni kvaternion jednak je

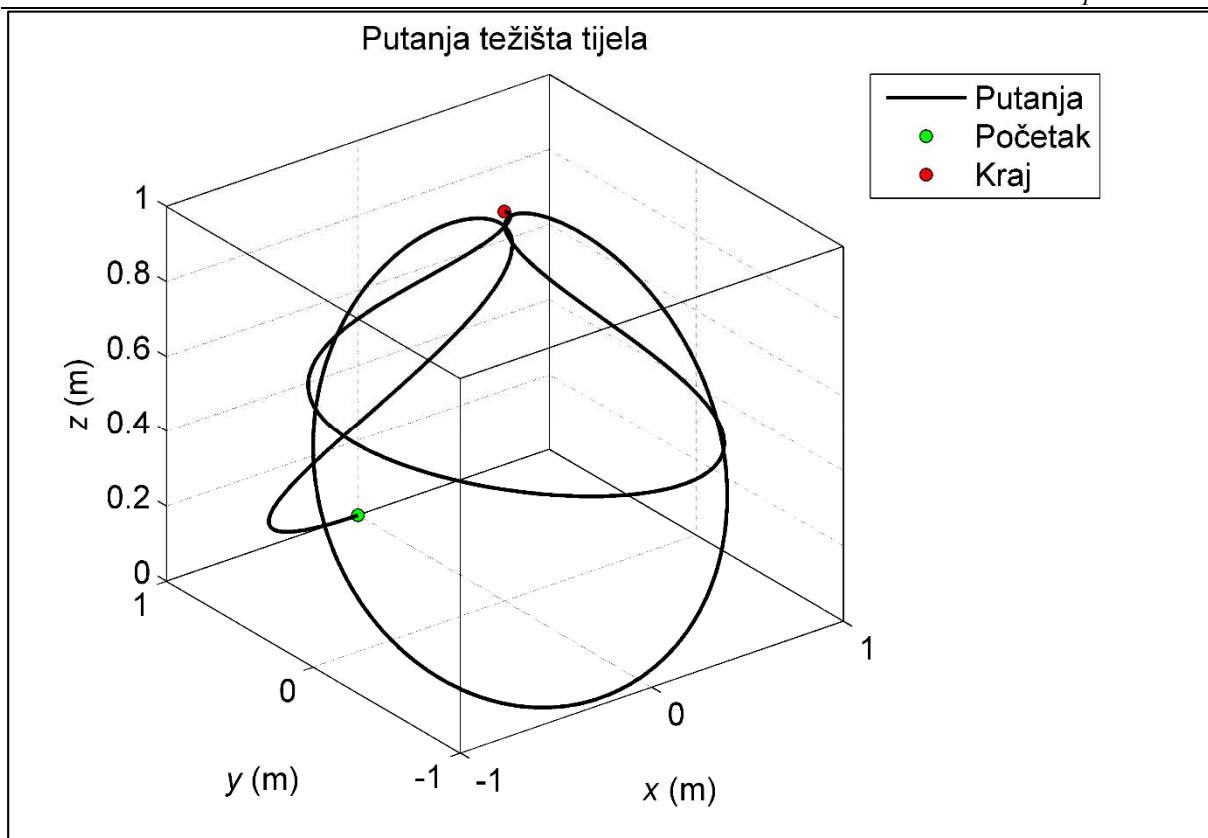
$$Q_0 = (1, \mathbf{0}), \quad (216)$$

tj. u početnom trenutku se inercijski koordinatni sustav i koordinatni sustav vezan za tijelo poklapaju.

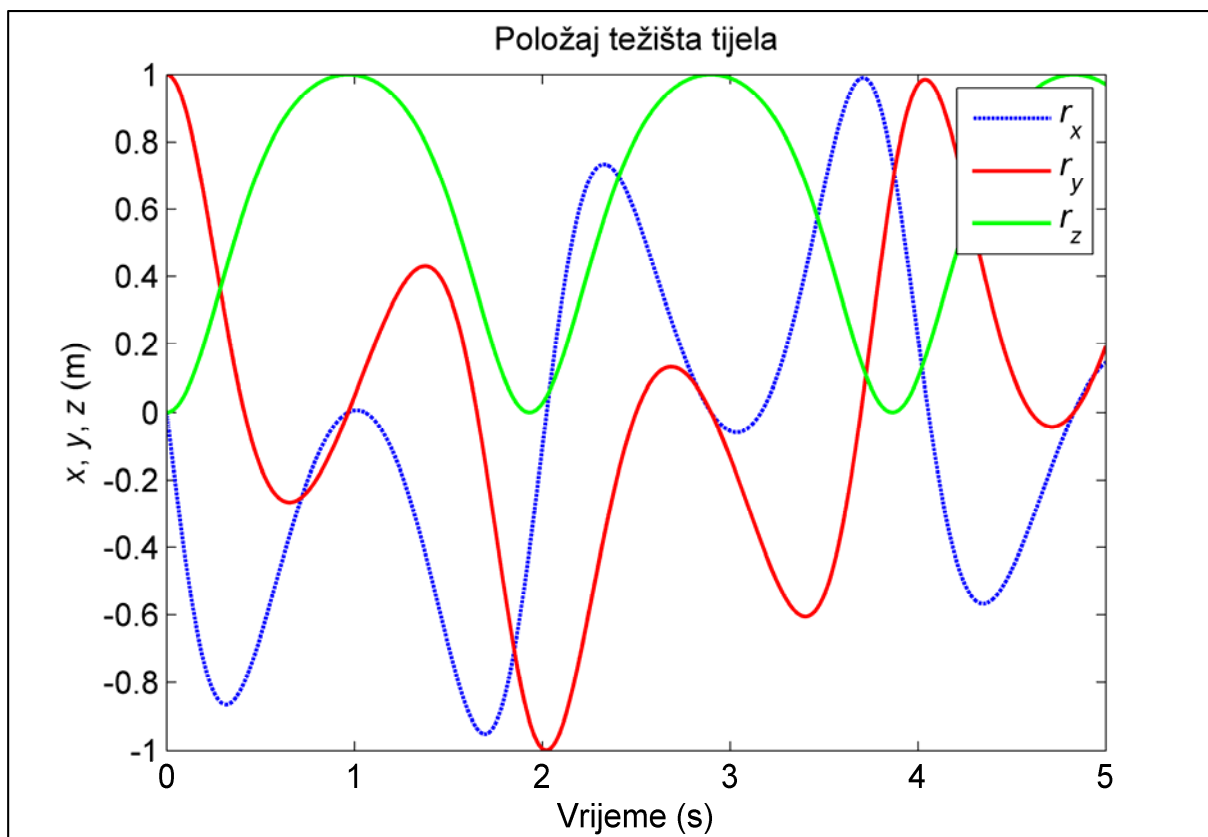
Simulacija je provedena za vremensku domenu od jedne sekunde, a sve tri metode konvergirale su prema istom rješenju (s razlikama gotovo na računalnoj točnosti) korištenjem vremenskog koraka  $\Delta t = 10^{-5}$  s.

Putanja težišta tijela u inercijskom koordinatnom sustavu prikazana je trodimenzionalnim dijagramom na slici 11, a vrijednost svake od komponenta  $r_x$ ,  $r_y$  i  $r_z$  u ovisnosti o vremenu  $t$  prikazana je na slici 12.

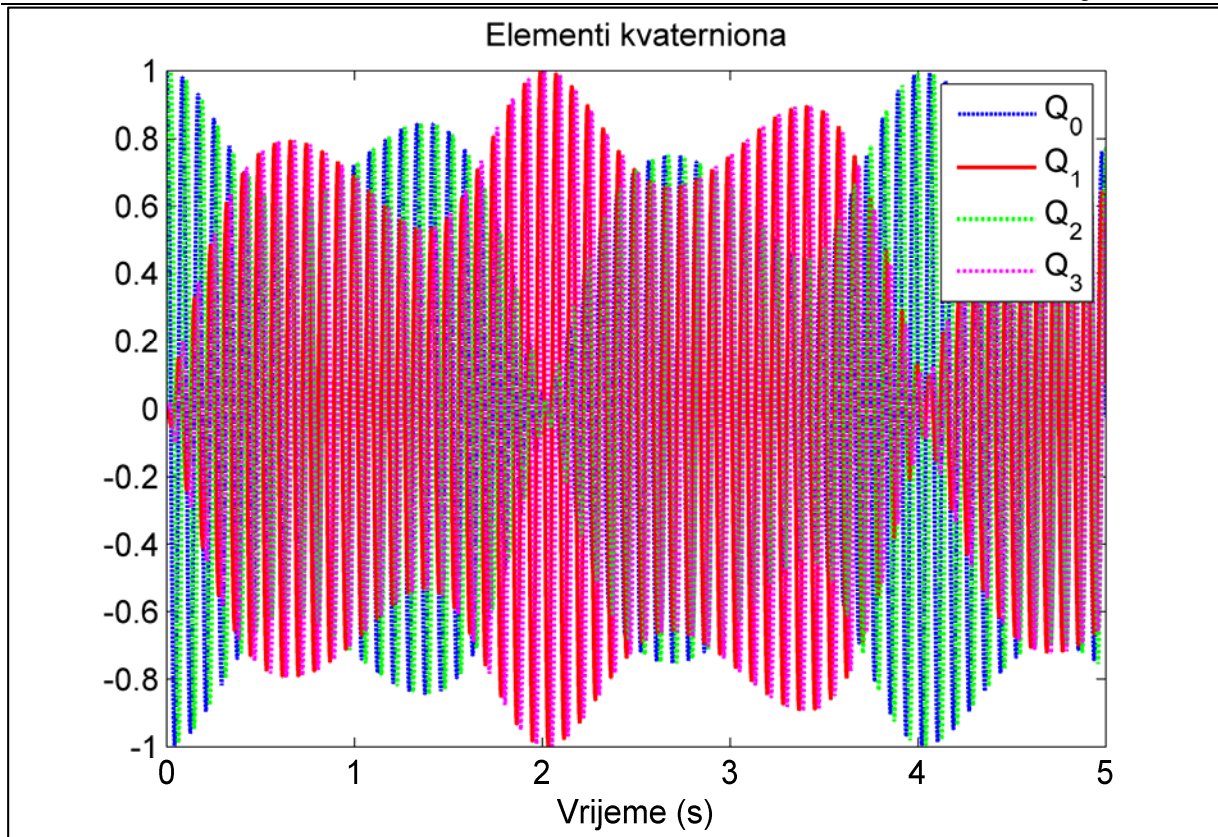
Na slici 13 prikazana je ovisnost elemenata kvaterniona, a na slici 14 komponenta kutne brzine, o vremenu  $t$ .



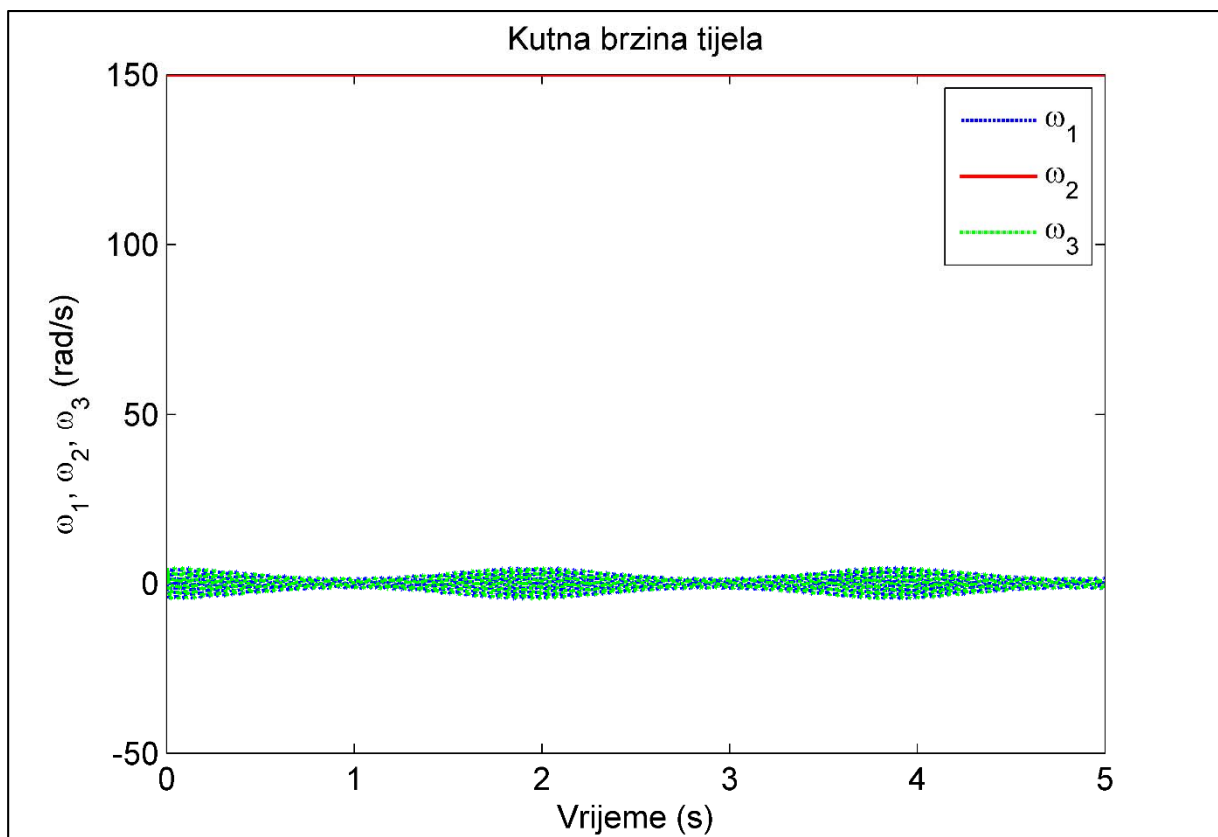
Slika 11. Putanja težišta tijela u trodimenzionalnom dijagramu



Slika 12. Položaj težišta tijela u ovisnosti o vremenu



Slika 13. Ovisnost elemenata kvaterniona o vremenu



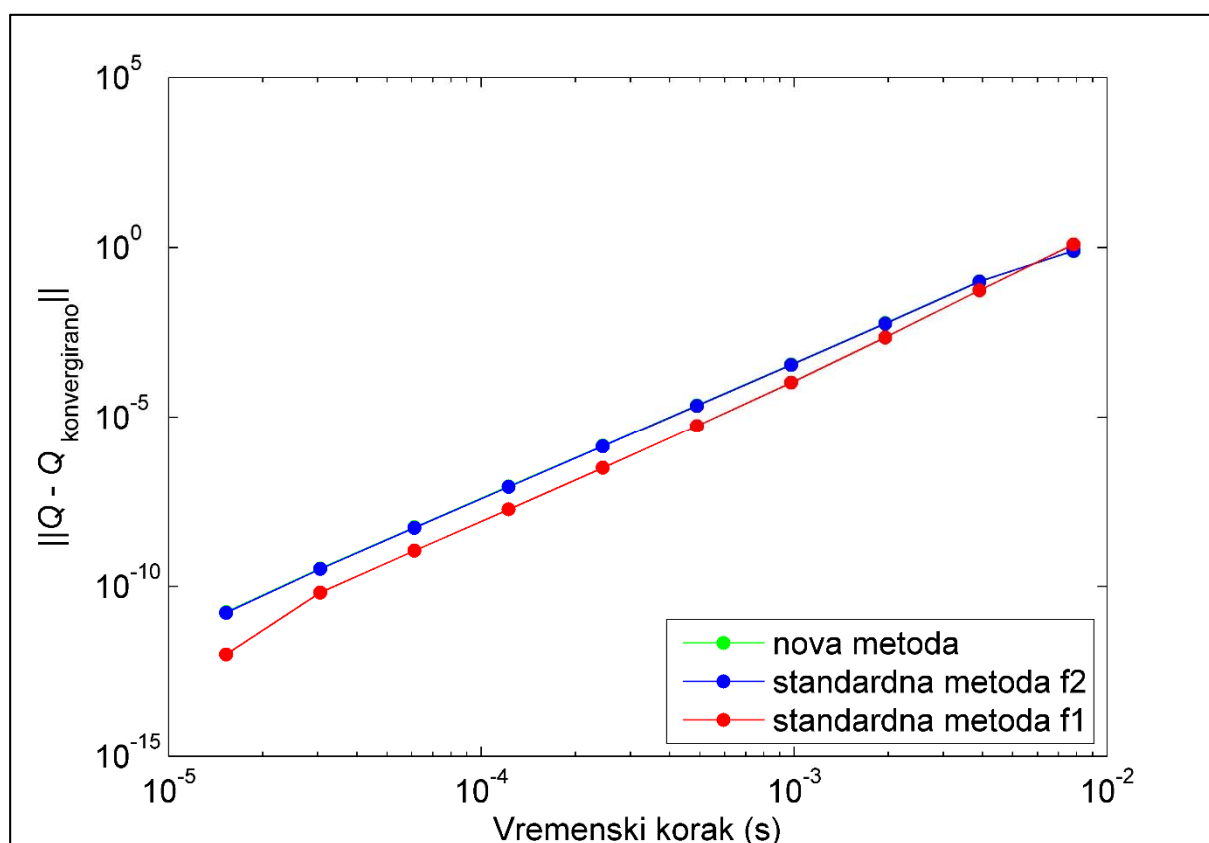
Slika 14. Ovisnost komponenta kutne brzine o vremenu

Ponovo se može primijetiti (slika 13) da su sve krivulje ovisnosti elemenata kvaterniona o vremenu kontinuirane i da se ni u ovom primjeru ne javljaju kinematički singulariteti pri opisivanju rotacije korištenjem kvaterniona.

Potom su, ponovno u svrhu prikaza konvergencije i usporedbe rezultata za različite metode, provedene simulacije na vremenskoj domeni od jedne sekunde s vremenskim koracima

$$\Delta t = \left( \frac{1}{128} \text{ s}, \frac{1}{256} \text{ s}, \frac{1}{512} \text{ s}, \frac{1}{1024} \text{ s}, \frac{1}{2048} \text{ s}, \frac{1}{4096} \text{ s}, \frac{1}{8192} \text{ s}, \frac{1}{16384} \text{ s}, \frac{1}{32768} \text{ s}, \frac{1}{65536} \text{ s} \right),$$
 a

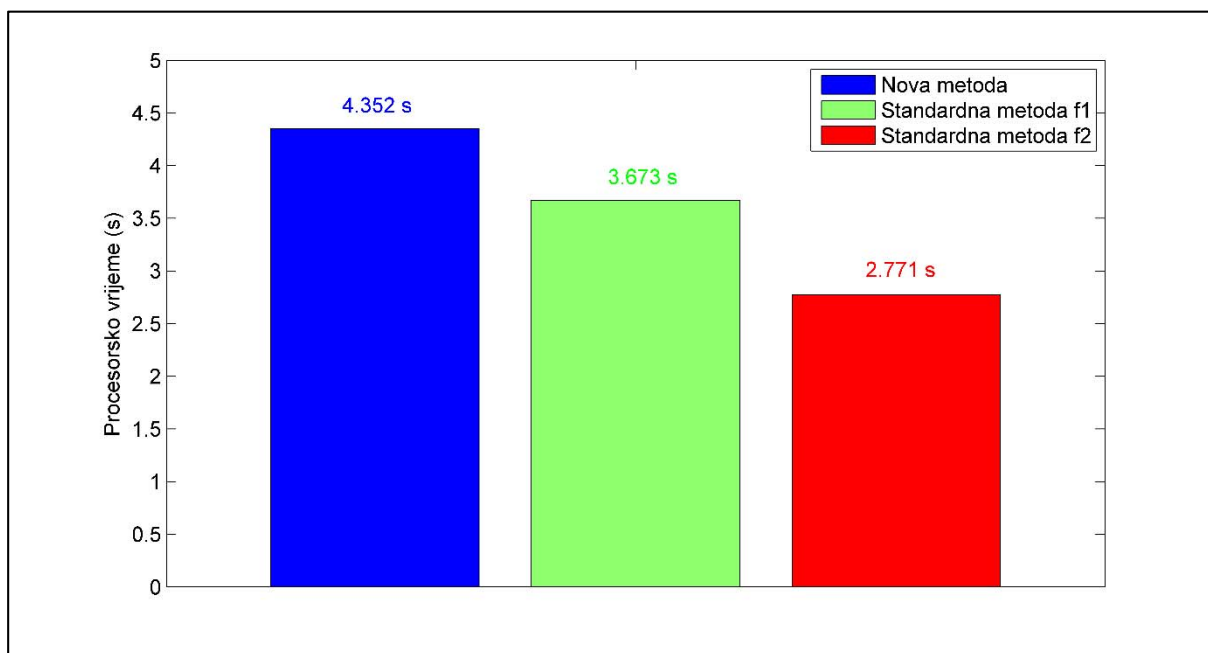
rezultati su uspoređeni s vrijednošću  $Q_{\text{konvergirano}}$  dobivenom za  $\Delta t = 10^{-5}$  s, koja se može smatrati referentnom, jer su sve metode konvergirale prema istom rješenju. Na slici 15 prikazan je dijagram ovisnosti norme razlike izračunatog kvaterniona i referentnog (konvergirano) kvaterniona  $\|Q - Q_{\text{konvergirano}}\|$  o vremenskom koraku  $\Delta t$  za tri različite metode. Dijagram je prikazan u logaritamskom mjerilu.



Slika 15. Konvergencija rezultata za tri različite metode

Važno je primijetiti da je u ovom primjeru, zbog izravne ovisnosti momenta o orijentaciji tijela koja se mijenja s velikom frekvencijom, potreban jako mali vremenski korak da bi se dobro opisale dinamičke jednadžbe i dobio približno dobar rezultat (potrebni su vremenski koraci

manji od  $\Delta t = 10^{-3}$  s da bi se u ovom primjeru dobili rezultati točni na četiri decimalne). Za tako male vremenske korake, greške uslijed stabilizacijskih jednadžbi su manje čak i od računalne točnosti, tj. točnosti zapisa decimalnih brojeva u računalu i same aritmetike računala. Uslijed toga, ne može se ni očekivati poboljšanje rezultata primjenom nove metode, čija osnovna ideja poboljšanja je neposjedovanje „umjetnih“ stabilizacijskih jednadžbi. Zbog svega opisanog, na rezultatima prikazanim na slici 15, linija rezultata dobivenih novom metodom (poglavlje 3.3) jedva je vidljiva, jer se rezultati gotovo u potpunosti poklapaju s rezultatima dobivenim drugom formulacijom standardne metode (poglavlje 3.2.2). Prva formulacija standardne metode (poglavlje 3.2.1) pokazuje drugačije rezultate (u ovom primjeru malo točnije pri čemu najveća razlika u normi greške iznosi 0,0461) zbog drugačijeg načina rješavanja dinamičkih jednadžbi. Kao i u prethodnom primjeru, numerička efikasnost ispitana je usporedbom vremena potrebnog da se provede simulacija na istoj vremenskoj domeni, s istim vremenskim korakom korištenjem triju opisanih metoda. Ponovno je provedeno po 50 mjerenja za svaku od metoda, a prosječni rezultati prikazani su na slici 16.

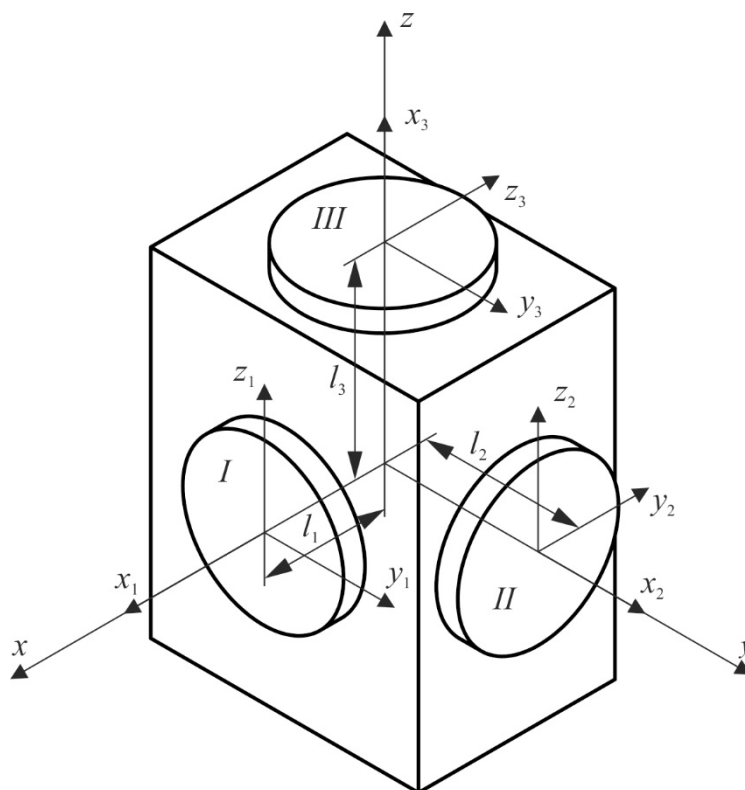


**Slika 16. Usporedba prosječnog procesorskog vremena za tri različite metode**

Dobiveni rezultati su ekvivalentni rezultatima iz prethodnog primjera, tj. nova metoda ima najnižu numeričku efikasnost, što je i očekivano, zbog izračunavanja trigonometrijskih funkcija koje standardne metode nemaju, dok je od standardnih metoda efikasnija metoda po drugoj formulaciji, prvenstveno zbog jednostavnije formulacije Eulerovih jednadžbi i jedne stabilizacijske jednadžbe manje.

### 4.3. Rotacija satelita korištenjem reakcijskih diskova

Često se orijentacija tijela u svemiru, poput primjerice satelita, izvodi korištenjem tri rotirajuća (reakcijska) diska uležištena na svemirskom tijelu. Jedan takav satelit s tri diska shematski je prikazan na slici 17.



Slika 17. Shematski prikaz satelita s tri diska

Umjesto modeliranja satelita i reakcijskih diskova kao zasebnih tijela povezanih kinematičkim ograničenjima, izvedene su Eulerove jednadžbe u obliku običnih diferencijalnih jednadžbi (bez ograničenja) pri čemu je utjecaj dinamike diskova na tijelo satelita modeliran kao vanjski moment koji djeluje na tijelo.

Važno je postaviti određene pretpostavke kako bi se jednadžbe mogle točno izvesti. Važna pretpostavka je simetričnost diskova oko njihovih osi rotacije. Također, masa diskova je izbalansirana u odnosu na centar mase tijela, pa se stoga posljedično centar mase cijelog sklopa poklapa s centrom mase tijela. Diskovi su postavljeni ortogonalno na način da se njihove rotacijske osi poklapaju s glavnim osima tijela. Također, satelit je modeliran bez djelovanja ikakvih vanjskih momenata, pa je stoga ukupni kinetički moment sustava očuvan.

Izvod dinamičkih jednadžbi počinje s definiranjem ukupnog kinetičkog momenta

$${}_O h_{SC} = {}_O h_{B/SC} + \sum_{i=1}^3 {}_O h_{W_i/SC}, \quad (217)$$

pri čemu  ${}_O h_{B/SC}$  predstavlja kinetički moment tijela u odnosu na centar mase, a  ${}_O h_{W_i/SC}$  kinetički moment  $i$ -tog diska u odnosu na centar mase tijela izraženi u inercijskom koordinatnom sustavu O. U svrhu skraćivanja izvoda, nadalje će se koristiti ista notacija (primjerice  ${}_O X_i$  za definiranje veličine  $X_i$  iskazane u koordinatnom sustavu O, pri čemu O označava fiksni, inercijski koordinatni sustav) bez detaljnog objašnjenja svake veličine.

$${}_O h_{SC} = {}_O (I_{B/SC} \omega_{B/O}) + \sum_{i=1}^3 {}_O (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}). \quad (218)$$

Kako je prikazano u izrazu (139), potrebna je derivacija ukupnog kinetičkog momenta koja je jednaka vanjskom momentu, tj. u ovom slučaju jednaka nuli. Deriviranjem izraza (218) dobiva se

$${}_O \dot{h}_{SC} = \frac{d}{dt} {}_O (I_{B/SC} \omega_{B/O}) + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} {}_O (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) = 0, \quad (219)$$

što se primjenom izraza (48) može zapisati kao

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (R_B (I_{B/SC} \omega_{B/O})) + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (R_B (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O})) &= 0, \\ \dot{R}_B (I_{B/SC} \omega_{B/O}) + R_B (I_{B/SC} \dot{\omega}_{B/O}) + \\ + \sum_{i=1}^3 \dot{R}_B (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) + \sum_{i=1}^3 R_B \frac{d}{dt} (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) &= 0, \end{aligned} \quad (220)$$

što množenjem s lijeve strane matricom  $R^T$  postaje

$$\begin{aligned} {}_B \tilde{\omega}_{B/O} (I_{B/SC} \omega_{B/O}) + {}_B (I_{B/SC} \dot{\omega}_{B/O}) + \\ + {}_B \tilde{\omega}_{B/O} \sum_{i=1}^3 {}_B (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} {}_B (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) &= 0. \end{aligned} \quad (221)$$

Posljednji član izraza može se raspisati kao

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} {}_B (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} R_{i W_i} (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{R}_{i W_i} (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) + \sum_{i=1}^3 R_{i W_i} (I_{W_i/SC} \dot{\omega}_{W_i/O}) = \\ &= \sum_{i=1}^3 R_i R_i^T \dot{R}_i (I_{W_i/SC} (\omega_{W_i/B} + \omega_{B/O})) + \sum_{i=1}^3 R_i R_i (I_{W_i/SC} (\dot{\omega}_{W_i/B} + \dot{\omega}_{B/O})) = \\ &= \sum_{i=1}^3 R_i R_i \tilde{\omega}_{W_i/B} (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/B}) + \sum_{i=1}^3 R_i \tilde{\omega}_{W_i/B} (I_{W_i/SC} \omega_{B/O}) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 R_i R_i (I_{W_i/SC} \dot{\omega}_{W_i/B}) + \sum_{i=1}^3 R_i R_i (I_{W_i/SC} \dot{\omega}_{B/O}). \end{aligned} \quad (222)$$



Tenzor inercije  $i$ -tog diska u koordinatnom u odnosu na ukupni centar mase (u skladu s pretpostavkama) može se zapisati kao

$${}_{w_i}I_{w_i/SC} = \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & \beta_i \end{bmatrix}. \quad (223)$$

Matrica  $R_i$  predstavlja matricu transformacije iz koordinatnog sustava vezanog za  $i$ -ti disk u koordinatni sustav vezan za tijelo. Matrice  $R_i$  za svaki od tri diska su

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) \\ 0 & \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{bmatrix}, \\ R_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix}, \\ R_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\varphi_3) & -\cos(\varphi_3) \\ 0 & \cos(\varphi_3) & -\sin(\varphi_3) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (224)$$

a  $\varphi_i$  je kut zakreta između diska i tijela.

Vektor  ${}_{w_i}\omega_{w_i/B}$  predstavlja relativnu kutnu brzinu između diska i tijela, a može se zapisati kao

$${}_{w_i}\omega_{w_i/B} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (225)$$

Sada se može pokazati da vrijede izrazi

$$\sum_{i=1}^3 R_i \tilde{\omega}_{w_i/B} {}_{w_i}I_{w_i/SC} \omega_{w_i/B} = \sum_{i=1}^3 R_i \tilde{\omega}_{w_i/B} {}_{w_i}I_{w_i/SC} (\alpha_i \omega_{w_i/B}) = \quad (226)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \alpha_i R_i \tilde{\omega}_{w_i/B} {}_{w_i}I_{w_i/SC} \omega_{w_i/B} = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 R_i {}_{w_i}I_{w_i/SC} \dot{\omega}_{B/O} &= \sum_{i=1}^3 R_i {}_{w_i}I_{w_i/SC} \frac{d}{dt} (R_i^T {}_B\omega_{B/O}) = \\ &= \sum_{i=1}^3 R_i {}_{w_i}I_{w_i/SC} (\dot{R}_i^T {}_B\omega_{B/O} + R_i^T \dot{\omega}_{B/O}) = \quad (227) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^3 R_i {}_{w_i}I_{w_i/SC} \left( -{}_{w_i}\tilde{\omega}_{w_i/B} R_i^T {}_B\omega_{B/O} + R_i^T \dot{\omega}_{B/O} \right) = \\ &= -\sum_{i=1}^3 R_i {}_{w_i}I_{w_i/SC} {}_{w_i}\tilde{\omega}_{w_i/B} {}_B\omega_{B/O} + \sum_{i=1}^3 {}_B(I_{w_i/SC} \dot{\omega}_{B/O}). \end{aligned}$$

Primjenom izraza (226) i (227) može se izraz (222) zapisati kao

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} {}_B (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) &= \sum_{i=1}^3 R_i {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} (I_{W_i/SC} \omega_{B/O}) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i R_i {}_{W_i} \dot{\omega}_{W_i/B} - \\ &- \sum_{i=1}^3 R_i {}_{W_i} I_{W_i/SC} {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} \omega_{B/O} + \sum_{i=1}^3 {}_B (I_{W_i/SC} \dot{\omega}_{B/O}), \end{aligned} \quad (228)$$

a ako se pokaže da vrijedi

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 R_i \left( {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} (I_{W_i/SC} \omega_{B/O} - I_{W_i/SC} {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} \omega_{B/O}) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 R_i {}_{W_i} \left( \tilde{\omega}_{W_i/B} I_{W_i/SC} - I_{W_i/SC} \tilde{\omega}_{W_i/B} \right) {}_{W_i} \omega_{B/O} = \\ &= \sum_{i=1}^3 R_i \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_i \dot{\phi}_i \\ 0 & \beta_i \dot{\phi}_i & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_i \dot{\phi}_i \\ 0 & \beta_i \dot{\phi}_i & 0 \end{bmatrix} \right) {}_{W_i} \omega_{B/O} = 0, \end{aligned} \quad (229)$$

dobiva se izraz

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} {}_B (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i R_i {}_{W_i} \dot{\omega}_{W_i/B} + \sum_{i=1}^3 {}_B (I_{W_i/SC} \dot{\omega}_{B/O}), \quad (230)$$

koji se sada može uvrstiti u izraz (221)

$$\begin{aligned} &{}_B \tilde{\omega}_{B/O} {}_B (I_{B/SC} \omega_{B/O}) + {}_B (I_{B/SC} \dot{\omega}_{B/O}) + {}_B \tilde{\omega}_{B/O} \sum_{i=1}^3 {}_B (I_{W_i/SC} \omega_{W_i/O}) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \alpha_i R_i {}_{W_i} \dot{\omega}_{W_i/B} + \sum_{i=1}^3 {}_B (I_{W_i/SC} \dot{\omega}_{B/O}) = 0, \\ &{}_B \left( I_{B/SC} + \sum_{i=1}^3 I_{W_i/SC} \right) {}_B \dot{\omega}_{B/O} + {}_B \tilde{\omega}_{B/O} {}_B (I_{B/SC} \omega_{B/O}) + \\ &+ {}_B \tilde{\omega}_{B/O} \sum_{i=1}^3 {}_B (I_{W_i/SC} (\omega_{W_i/B} + \omega_{B/O})) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i R_i {}_{W_i} \dot{\omega}_{W_i/B} = 0, \\ &{}_B \left( I_{B/SC} + \sum_{i=1}^3 I_{W_i/SC} \right) {}_B \dot{\omega}_{B/O} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i R_i {}_{W_i} \dot{\omega}_{W_i/B} + \\ &+ {}_B \tilde{\omega}_{B/O} \left( {}_B (I_{B/SC} \omega_{B/O} + \sum_{i=1}^3 I_{W_i/SC}) {}_B \omega_{B/O} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i R_i {}_{W_i} \omega_{W_i/B} \right) = 0. \end{aligned} \quad (231)$$

Na sličan način izvode se i Eulerove jednadžbe za  $i$ -ti disk, pri čemu je kinetički moment diska

$${}_O h_{W_i/C_i} = {}_O (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}), \quad (232)$$

a derivacija je jednaka

$$\begin{aligned} &{}_O \dot{h}_{W_i/C_i} = {}_O M_i, \\ &\frac{d}{dt} {}_O (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) = {}_O M_i, \\ &\frac{d}{dt} \left( {}_B (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) \right) = {}_O M_i, \\ &\dot{R}_B (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) + R_B \frac{d}{dt} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) = {}_O M_i, \end{aligned} \quad (233)$$

što množenjem s lijeve strane matricom  $R^T$  postaje

$${}_B \tilde{\omega}_{B/O} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) + \frac{d}{dt} {}_B (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) = {}_B M_i. \quad (234)$$

Posljednji član s lijeve strane jednadžbe može se raspisati kao

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}_B (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) &= \frac{d}{dt} (R_i {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O})) = \\ &= \dot{R}_i {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) + R_i {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \dot{\omega}_{W_i/O}) = \\ &= R_i {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) + R_i {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \dot{\omega}_{W_i/O}) = \\ &= R_i {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/B}) + R_i {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{B/O}) + \\ &\quad + R_i {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \dot{\omega}_{W_i/B}) + R_i {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \dot{\omega}_{B/O}). \end{aligned} \quad (235)$$

Na isti način kao i u izrazu (226) izračunava se

$$R_i {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/B}) = 0. \quad (236)$$

Na isti način kao i u izrazu (227) pokazuje se da vrijede izrazi

$$R_i {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \dot{\omega}_{B/O}) = -R_i {}_{W_i} I_{W_i/C_i} {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} \omega_{B/O} + R_i {}_{W_i} I_{W_i/C_i} R_i^T {}_B \dot{\omega}_{B/O}, \quad (237)$$

$$R_i ({}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{B/O}) - {}_{W_i} I_{W_i/C_i} {}_{W_i} \tilde{\omega}_{W_i/B} {}_{W_i} \omega_{B/O}) = 0, \quad (238)$$

nakon čega se izraz (235) zapisuje kao

$$\frac{d}{dt} {}_B (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) = \alpha_i R_i {}_{W_i} \dot{\omega}_{W_i/B} + R_i {}_{W_i} I_{W_i/C_i} R_i^T {}_B \dot{\omega}_{B/O}. \quad (239)$$

Primjenom izraza (239) te množenjem s lijeve strane matricom  $R_i^T$  može se izraz (234) zapisati kao

$${}_{W_i} \tilde{\omega}_{B/O} {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/O}) + \alpha_i {}_{W_i} \dot{\omega}_{W_i/B} + {}_{W_i} I_{W_i/C_i} R_i^T {}_B \dot{\omega}_{B/O} = {}_{W_i} M_i, \quad (240)$$

a kako su za opisivanje dinamike satelita, potrebni samo momenti koji djeluju oko osi rotacije diskova (nije potrebno izračunavati momente koji djeluju u ležajnim mjestima), cijela jednadžba se s lijeve strane množi s transponiranim jediničnim baznim vektorom  $e_1^T$ , pri čemu vrijede izrazi:

$$\begin{aligned}
e_1^T {}_{W_i} \tilde{\omega}_{B/O} {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{B/O}) &= [1 \ 0 \ 0] {}_{W_i} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{B/O}^3 & \omega_{B/O}^2 \\ \omega_{B/O}^3 & 0 & -\omega_{B/O}^1 \\ -\omega_{B/O}^2 & \omega_{B/O}^1 & 0 \end{bmatrix} {}_{W_i} \begin{bmatrix} \alpha_i \omega_{B/O}^1 \\ \beta_i \omega_{B/O}^2 \\ \beta_i \omega_{B/O}^3 \end{bmatrix} = \\
&= {}_{W_i} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{B/O}^3 & \omega_{B/O}^2 \end{bmatrix} {}_{W_i} \begin{bmatrix} \alpha_i \omega_{B/O}^1 \\ \beta_i \omega_{B/O}^2 \\ \beta_i \omega_{B/O}^3 \end{bmatrix} = 0, \\
e_1^T {}_{W_i} \tilde{\omega}_{B/O} {}_{W_i} (I_{W_i/C_i} \omega_{W_i/B}) &= [1 \ 0 \ 0] {}_{W_i} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{B/O}^3 & \omega_{B/O}^2 \\ \omega_{B/O}^3 & 0 & -\omega_{B/O}^1 \\ -\omega_{B/O}^2 & \omega_{B/O}^1 & 0 \end{bmatrix} {}_{W_i} \begin{bmatrix} \alpha_i \dot{\phi}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= {}_{W_i} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{B/O}^3 & \omega_{B/O}^2 \end{bmatrix} {}_{W_i} \begin{bmatrix} \alpha_i \dot{\phi}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{241}$$

nakon čega se dobiva konačan izraz

$$\begin{aligned}
\alpha_i e_1^T {}_{W_i} \dot{\omega}_{W_i/B} + e_1^T {}_{W_i} I_{W_i/C_i} R_i^T {}_B \dot{\omega}_{B/O} &= {}_{W_i} T_i, \\
\alpha_i \ddot{\phi}_i + [\alpha_i \ 0 \ 0] {}_B \dot{\omega}_{B/O} &= {}_{W_i} T_i.
\end{aligned} \tag{242}$$

U svrhu jednostavnijeg zapisa izraza (231) i (242) uvode se

$$\begin{aligned}
I_S &= \left( I_{B/SC} + \sum_{i=1}^3 I_{W_i/SC} \right), \quad I_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \\
\omega &= {}_B \omega_{B/O}, \quad v = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} {}_{W_1} T_1 \\ {}_{W_2} T_2 \\ {}_{W_3} T_3 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{243}$$

nakon čega se izraz (231) može zapisati kao

$$\begin{aligned}
I_S \dot{\omega} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \ddot{\phi}_1 \\ \alpha_2 \ddot{\phi}_2 \\ \alpha_3 \ddot{\phi}_3 \end{bmatrix} + \tilde{\omega} \left( I_S \omega + \begin{bmatrix} \alpha_1 \dot{\phi}_1 \\ \alpha_2 \dot{\phi}_2 \\ \alpha_3 \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \right) &= 0, \\
I_S \dot{\omega} + I_\alpha \dot{v} + \tilde{\omega} (I_S \omega + I_\alpha v) &= 0.
\end{aligned} \tag{244}$$

Izraz (242) može se sada zapisati za svaki od tri diska kao

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \ddot{\phi}_1 + \alpha_1 \omega_1 &= {}_{W_1} T_1, \\
\alpha_2 \ddot{\phi}_2 + \alpha_2 \omega_2 &= {}_{W_2} T_2, \\
\alpha_3 \ddot{\phi}_3 + \alpha_3 \omega_3 &= {}_{W_3} T_3,
\end{aligned} \tag{245}$$

što se u matičnom obliku može zapisati kao

$$I_\alpha \dot{v} + I_\alpha \omega = T, \quad (246)$$

što zajedno s jednačbom (244) predstavlja sustav diferencijalnih jednačbi koji se još može zapisati i u obliku pogodnijem za računanje kao

$$\begin{aligned} (I_s - I_\alpha) \dot{\omega} + \tilde{\omega} (I_s \omega + I_\alpha v) + T &= 0, \\ \dot{v} &= I_\alpha^{-1} T - \dot{\omega}. \end{aligned} \quad (247)$$

Geometrijske značajke prikazane na slici 17, kao i veličine potrebne za rješavanje dinamičkih jednačbi preuzete su iz [12] i prikazane u tablici 1. Također, pretpostavljeno je da satelit kreće iz stanja mirovanja pri čemu se koordinatni sustav vezan za tijelo i inercijski koordinatni sustav poklapaju.

**Tablica 1. Geometrijske značajke tijela satelita i reakcijskog diska**

Duljine $(l_1, l_2, l_3)$ [m]	(0,9167 , 1,25 , 1,5833)	
Matrica $I_\alpha$ [kgm <sup>2</sup> ]	diag(0,003 , 0,003 , 0,003)	
	Tijelo satelita	Reakcijski disk
Masa [kg]	10	1
Tenzor inercije [kgm <sup>2</sup> ]	diag(2,223 , 4,408 , 7,334)	diag(0,003 , 0,141 , 0,141)

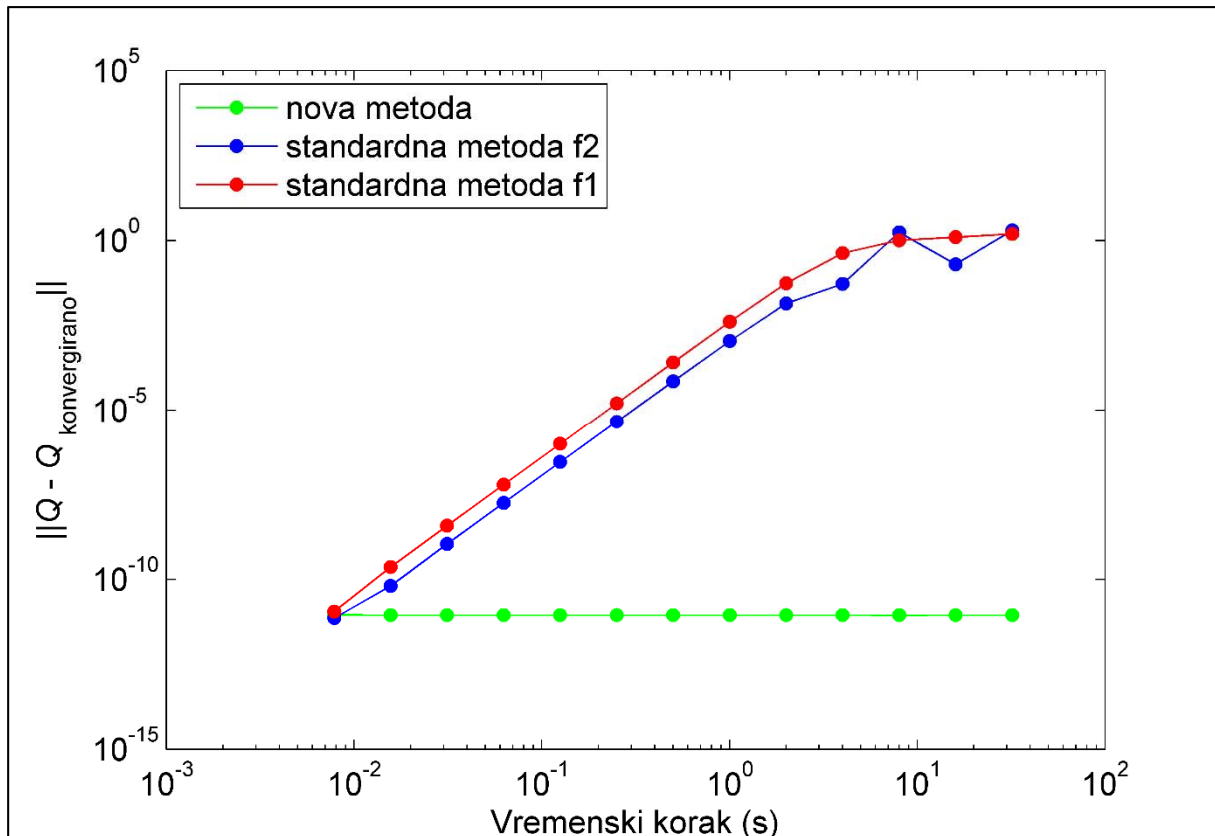
Simulacija je prvo provedena za vremensku domenu od 32 s, s konstantnim momentom koji djeluje između tijela satelita i diskova iznosa

$$T = \begin{bmatrix} 0,08 \\ 0,2 \\ 0,12 \end{bmatrix} \text{ Nm}, \quad (248)$$

a sve tri metode konvergirale su prema istom rješenju (s razlikama na računalnoj točnosti) korištenjem vremenskog koraka  $\Delta t = 10^{-3}$  s. Kako za ovaj primjer nema nekih zanimljivih dijagrama za putanju karakteristične točke tijela koji bi se mogli predočiti, prikazani su samo rezultati usporedbe točnosti i konvergencije (koji su jedini i bitni za ocjenu kvalitete različitih metoda integracije).

Provedene su simulacije s opisanim početnim uvjetima te vremenskim koracima iznosa  $\Delta t = \left( 32 \text{ s}, 16 \text{ s}, 8 \text{ s}, 4 \text{ s}, 2 \text{ s}, 1 \text{ s}, \frac{1}{2} \text{ s}, \frac{1}{4} \text{ s}, \frac{1}{8} \text{ s}, \frac{1}{16} \text{ s}, \frac{1}{32} \text{ s}, \frac{1}{64} \text{ s}, \frac{1}{128} \text{ s} \right)$ , a rezultati su uspoređeni s vrijednošću konvergirano kvaterniona  $Q_{\text{konvergirano}}$  koja se može smatrati

referentnom, jer su sve metode konvergirale prema istom rješenju. Na slici 18 prikazan je dijagram ovisnosti norme razlike izračunatog kvaterniona i referentnog (konvergiranog) kvaterniona  $\|Q - Q_{\text{konvergirano}}\|$  o vremenskom koraku  $\Delta t$  za tri različite metode. Dijagram je prikazan u logaritamskom mjerilu.



Slika 18. Konvergencija rezultata pri konstantnom momentu za tri različite metode

Vrlo važna činjenica vidljiva na slici 18 jest da su rezultati dobiveni novom metodom (poglavlje 3.3) točni (na računalnu točnost) za sve vremenske korake, dok se u rezultatima dobivenim standardnim metodama vidi uobičajena konvergencija prema točnom rješenju, pri čemu je druga formulacija (poglavlje 3.2.2) nešto malo točnija, uz iznimku rezultata za vremenski korak od 8 s. Može se zaključiti da je za ovaj slučaj najveći mogući vremenski korak od 32 s dovoljan za točnu (na računalnu točnost) integraciju dinamičkih jednadžbi pri čemu nova metoda ne unosi nikakvu grešku prilikom integriranja kinematičkih jednadžbi, dok standardne metode unose veliku grešku za velike vremenske korake, tj. rješenja nisu ni približno dobra.

Važno je još napomenuti da, u ovom primjeru, rezultati dobiveni standardnim metodama počinju biti vidno lošiji kada greška jedinične norme kvaterniona prije stabilizacijske jednadžbe postane reda veličine  $10^{-15}$ . Primjerice za vremenski korak  $1/64$  s (vidljivo značajno odstupanje standardnih metoda od nove) greška jedinične norme kvaterniona prije stabilizacije iznosi u nekim koracima do  $2,7 \cdot 10^{-15}$  za drugu formulaciju standardne metode te do  $1,2 \cdot 10^{-13}$  za prvu formulaciju standardne metode.

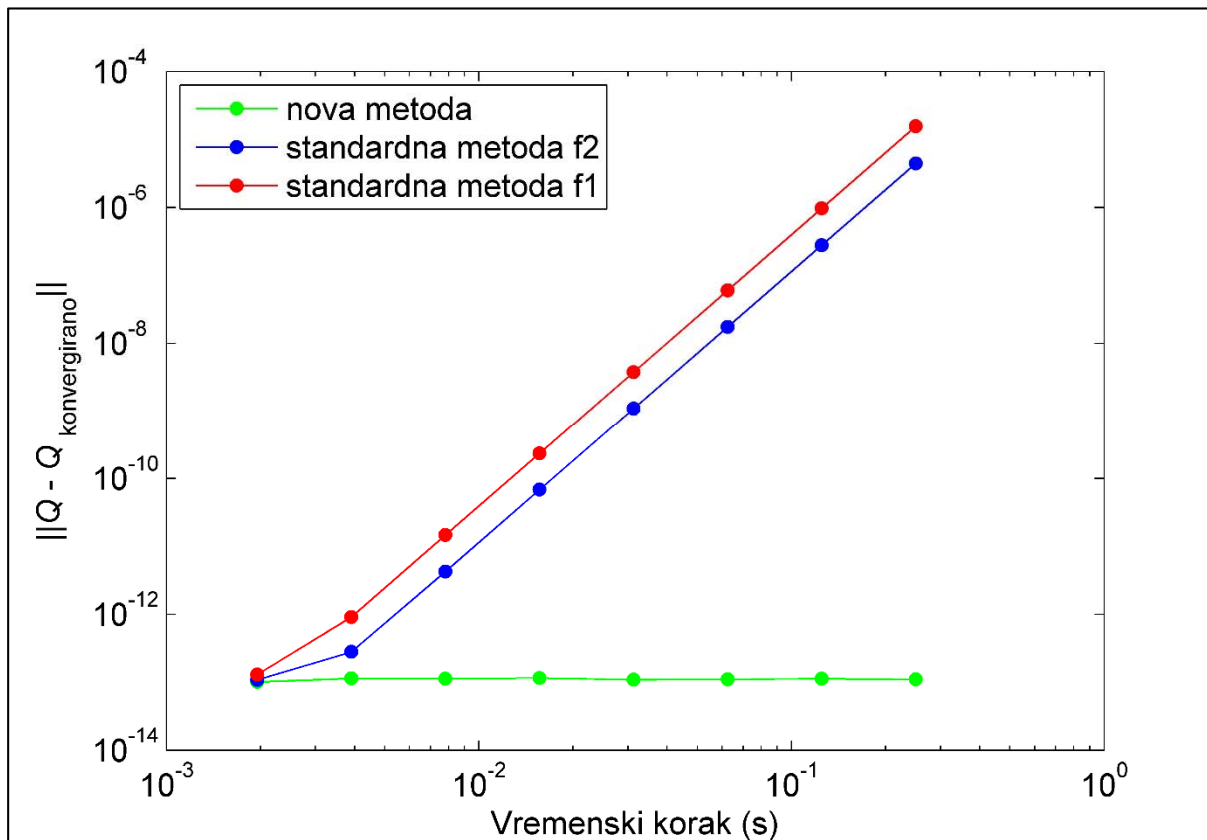
Iako su ovakvi rezultati simulacije s konstantnim momentom izvrsni sa teoretskog stajališta, njihova praktična važnost je manja zbog činjenice da je konstantni moment koji djeluje na satelit na vremenskoj domeni od 32 s nerealan, pa je stoga provedena druga simulacija s varijabilnim momentom kako bi se potvrdio značaj nove metode i poboljšanje u odnosu na standardne metode. Moment je zadan kao

$$T = \begin{bmatrix} 0,08 \cos\left(\frac{\pi t}{640}\right) \\ 0,2 \cos\left(\frac{\pi t}{640}\right) \\ 0,12 \cos\left(\frac{\pi t}{640}\right) \end{bmatrix} \text{ Nm}, \quad (249)$$

pri čemu su periodi trigonometrijskih funkcija izabrani tako da relativno veliki vremenski korak od  $1/4$  s ponovno točno (na računalnu točnost) integrira dinamičke jednadžbe. Simulacije su provedene s vremenskim koracima  $\Delta t = \left(\frac{1}{4} \text{ s}, \frac{1}{8} \text{ s}, \frac{1}{16} \text{ s}, \frac{1}{32} \text{ s}, \frac{1}{64} \text{ s}, \frac{1}{128} \text{ s}, \frac{1}{256} \text{ s}, \frac{1}{512} \text{ s}\right)$ , a rezultati su ponovno uspoređeni s vrijednošću konvergirano kvaterniona  $Q_{\text{konvergirano}}$  koja se može smatrati referentnom, jer su sve metode konvergirale prema istom rješenju. Na slici 19 prikazan je dijagram ovisnosti norme razlike izračunatog kvaterniona i referentnog (konvergirano) kvaterniona  $\|Q - Q_{\text{konvergirano}}\|$  o vremenskom koraku  $\Delta t$  za tri različite metode. Dijagram je prikazan u logaritamskom mjerilu.

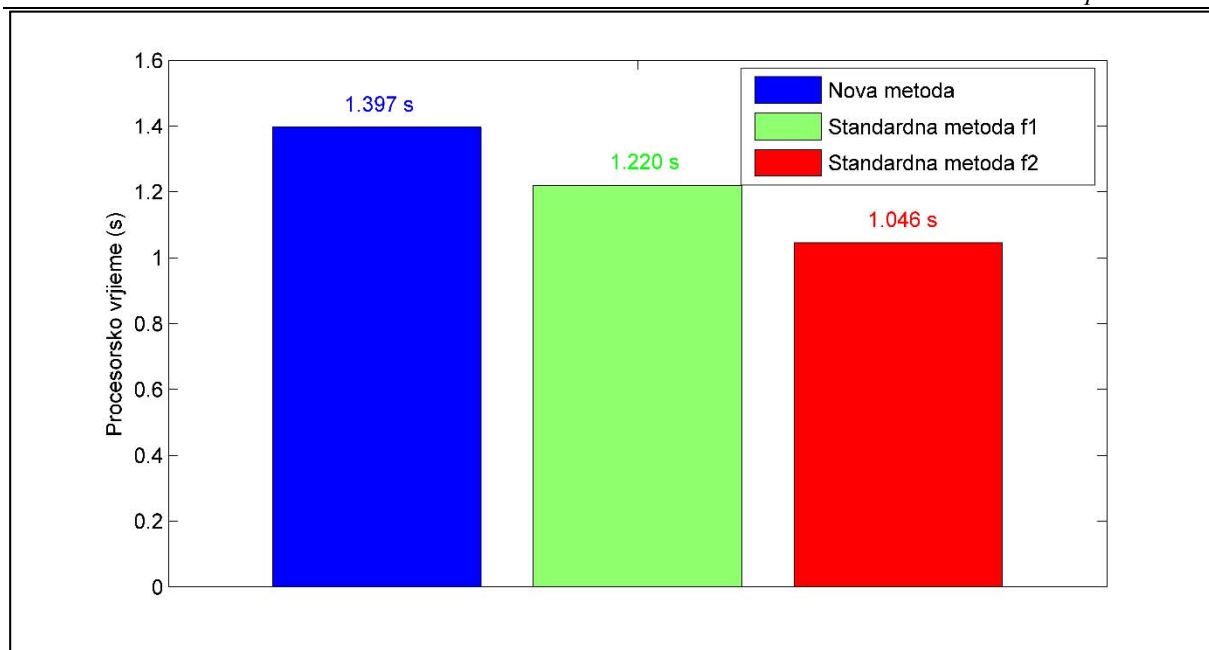
U rezultatima je ponovno vidljiva ista pojava, tj. nova metoda ponovno ne unosi nikakvu grešku prilikom integriranja kinematičkih jednadžbi, za razliku od obje standardne metode. Iz ovih rezultata se može izvući zaključak kako je nova metoda neusporedivo bolja za integriranje sustava čije se dinamičke jednadžbe mogu dovoljno točno integrirati korištenjem velikih vremenskih koraka, dok pri korištenju standardnih metoda treba biti jako oprezan, jer za velike vremenske korake mogu unijeti velike greške pri integriranju kinematičkih jednadžbi.

Kao i u prethodnim primjerima, numerička efikasnost ispitana je usporedbom vremena potrebnog da se provede simulacija na istoj vremenskoj domeni, s istim vremenskim korakom korištenjem triju opisanih metoda. Ponovno je provedeno po 50 mjerenja za svaku od metoda, a prosječni rezultati prikazani su na slici 20.



Slika 19. Konvergencija rezultata pri varijabilnom momentu za tri različite metode





**Slika 20. Usporedba prosječnog procesorskog vremena za tri različite metode**

Dobiveni rezultati su ekvivalentni rezultatima iz prethodnog primjera, tj. nova metoda ima najnižu numeričku efikasnost, što je i očekivano, zbog izračunavanja trigonometrijskih funkcija koje standardne metode nemaju, dok je od standardnih metoda efikasnija metoda po drugoj formulaciji, prvenstveno zbog jednostavnije formulacije Eulerovih jednadžbi i jedne stabilizacijske jednadžbe manje.

## 5. ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazana je numerička integracija rotacijskih kvaterniona pri čemu je prikazana usporedba dviju standardnih metoda integracije koje operiraju na vektorskim prostorima s novom metodom integracije koja operira izravno na rotacijskoj mnogostrukosti  $SO(3)$  krutog tijela. Dok sve standardne metode moraju imati barem jednu stabilizacijsku jednadžbu, nova metoda već svojom konstrukcijom, bez potrebe za ikakvom stabilizacijom, čuva svojstva kvaterniona poput jedinične norme te ortogonalnosti kvaterniona i njegove derivacije.

U prvom poglavlju opisano je kruto tijelo te je prikazana definicija transformacije krutog tijela. Potom je definirana matrica rotacije te je dokazano da množenje s matricom rotacije predstavlja transformaciju krutog tijela. Na posljepku, prikazan je opis rotacije korištenjem eksponencijalnih koordinata.

U drugom poglavlju opisana je kinematika krutog tijela u prostoru s naglaskom na rotaciju. Opisani su kvaternioni te svojstva osnovnih operacija definiranih na njihovom skupu. Potom su opisani jedinični kvaternioni koji sadrže Eulerove parametre (rotacijski kvaternioni). Prikazana je izravna povezanost između matrice rotacije i rotacijskih kvaterniona.

U trećem poglavlju opisani su matematički modeli i algoritmi standardnih metoda integracije na jediničnim kvaternionima. Prikazani su jedinični kvaternioni kao elementi grupe  $SU(2)$  s dvostrukim prekrivanjem rotacijske mnogostrukosti  $SO(3)$ , uz opis eksponencijalnog preslikavanja s Lieve algebre  $so(3)$  na grupu jediničnih kvaterniona. Prikazan je i algoritam integracije koji koristi ta svojstva, tj. operira izravno na rotacijskoj mnogostrukosti, za razliku od standardnih koji operiraju na vektorskom prostoru.

Na posljepku su, korištenjem svih triju opisanih metoda, obrađena tri numerička primjera rotacije krutih tijela. Prvi primjer bila je rotacija slobodnog krutog tijela u prostoru oko osi bliske nestabilnoj osi rotacije. Pokazalo se da je na ovom primjeru prva formulacija standardne metode izrazito nestabilna, tj. pokazuje velike greške, bez uobičajene konvergencije, pri većim vremenskim koracima, dok konvergencija prema točnom rješenju počinje tek sa znatno manjim vremenskim koracima. Druga formulacija standardne metode i nova metoda integracije pokazale su vrlo slično ponašanje po pitanju stabilnosti, uz sličnu konvergenciju prema točnom rješenju, dok je nova metoda pritom bila malo točnija. Kao drugi numerički primjer korištena je rotacija krutog tijela s jednom uporišnom točkom. U ovom primjeru su sve tri metode pokazale sličnu stabilnost, pri čemu su druga formulacija standardne metode i nova metoda

integracije pokazale gotovo u potpunosti identično ponašanje, dok je prva formulacija standardne metode pokazala nešto bržu konvergencije prema točnom rješenju s malo većom točnošću. Razlog tome je činjenica da je u ovom primjeru, zbog izravne ovisnosti momenta o orijentaciji tijela koja se mijenja s velikom frekvencijom, potreban jako mali vremenski korak da bi se dobro opisale dinamičke jednadžbe i dobio približno dobar rezultat, dok su za tako male vremenske korake, greške uslijed stabilizacijskih jednadžbi manje čak i od računalne točnosti, tj. točnosti zapisa decimalnih brojeva u računalu i same aritmetike računala. Uslijed toga, ne može se ni očekivati poboljšanje rezultata primjenom nove metode, čija osnovna ideja poboljšanja jest neposjedovanje „umjetnih“ stabilizacijskih jednadžbi. Kao treći numerički primjer obrađena je rotacija satelita u svemiru korištenjem reakcijskih diskova. Izvedene su dinamičke jednadžbe u obliku običnih diferencijalnih jednadžbi, bez kinematičkih ograničenja. Korištenjem nove integracijske metode s vremenskim koracima koji točno (na računalnu točnost) integriraju dinamičke jednadžbe, dobivena su točna (na računalnu točnost) rješenja, bez ikakve konvergencije smanjivanjem vremenskog koraka, dok su korištenjem standardnih metoda dobiveni rezultati uobičajene konvergencije prema točnom rješenju smanjivanjem vremenskog koraka. Razlog tome je što nova integracijska metoda nije unijela dodatne greške prilikom integriranja kinematičkih jednadžbi, dok su korištenjem standardnih metoda s većim vremenskim koracima dobiveni potpuno pogrešni rezultati. Takva pojava vrlo je bitna s praktičnog stajališta, jer za novu metodu točni rezultati integracije dinamičkih jednadžbi znače i točne sveukupne rezultate, dok kod standardnih metoda to ne vrijedi i treba biti vrlo oprezan pri korištenju većih vremenskih koraka zbog mogućnosti dobivanja potpuno pogrešnog rješenja.

Na svim primjerima ispitana je numerička efikasnost usporedbom vremena potrebnog da se provede simulacija na istoj vremenskoj domeni, s istim vremenskim korakom, korištenjem triju opisanih metoda. Provedeno je po 50 mjerenja za svaku od metoda, a iz prosječnih rezultata može se primijetiti da nova integracijska metoda ima najnižu numeričku efikasnost, što je i očekivano, zbog izračunavanja trigonometrijskih funkcija koje standardne metode nemaju, dok je od standardnih metoda efikasnija metoda po drugoj formulaciji, prvenstveno zbog jednostavnije formulacije Eulerovih jednadžbi i jedne stabilizacijske jednadžbe manje.

Iz svega prikazanog, može se zaključiti da nova integracijska metoda pokazuje veliko poboljšanje kod primjera čija se dinamika može integrirati s relativno velikim vremenskim koracima, dok sustavi čija dinamika zahtjeva relativno mali vremenski korak, ni nemaju veliku grešku pri integriranju kinematike, pa stoga upotreba nove metode ne predstavlja poboljšanje.

---

**LITERATURA**

- [1] Murray, R. M., Li, Z., Sastry, S. S.: A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press, 1994.
- [2] Euler, L.: Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 20, 189-207, 1776.
- [3] Haug, E. J.: Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems, Volume I: Basic methods, Allyn and Bacon, 1989.
- [4] Altman, S. L.: Rotations, Quaternions, and Double Groups, Oxford University Press, 1986.
- [5] Hamilton, W. R.: Lectures on quaternions, Hodges and Smith, Dublin, 1853.
- [6] Ben-Menahem, A.: Historical Encyclopedia of Natural and Mathematical Sciences, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [7] Nikravesh, P. E.: Computer-aided analysis of mechanical systems, Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, 1988.
- [8] Goldstein, H., Poole, C., Safko, J.: Classical mechanics, Addison-Wesley, 2001.
- [9] Terze, Z., Müller, A., Zlatar, D.: Singularity-free time integration of rotational quaternions using non-redundant ordinary differential equations, Multibody System Dynamics (u tisku).
- [10] Park, J., Chung, W. K.: Geometric Integration on Euclidean Group With Application to Articulated Multibody Systems, IEEE Transactions on Robotics 21(5), 2005.
- [11] Müller, A.: Approximation of finite rigid body motions from velocity fields, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 90, 514-521, 2010.
- [12] Becker, C., Betsch, P.: Application of a gyrostatic rigid body formulation in the context of a direct transcription method for optimal control in multibody dynamics, U: Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications, Series: Computational Methods in Applied Sciences, Terze, Z. (ur.), 35 (str. 237-254), Springer Verlag, 2014.

---

**PRILOZI**

I. CD-R disc