

# Analiza efikasnosti eliptičnog krila paraboličnom nosećom linijom

---

**Uroda, Anamaria**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:304791>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-25**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Anamaria Uroda

ZAGREB, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

ANALIZA ELIPTIČNG KRILA PARABOLIČNOM NOSEĆOM LINIJOM

Mentor:

Doc. dr.sc. Dubravko Matijašević

Student:

Anamaria Uroda

ZAGREB, 2018.

*Mami i braci*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, rujan 2018.

Anamaria Uroda





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE  
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija zrakoplovstva



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Anamaria Uroda**

Mat. br.: **0035198097**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza efikasnosti eliptičnog krila s paraboličnom nosećom linijom**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Elliptic planform parabolic lifting line wing aerodynamic efficiency analysis**

Opis zadatka:

Nakon više desetaka miliona godina evolucije, priroda je kod određenih tipova prirodnih letača usvojila zakrivljena (srpasta) krila za stvaranje uzgona. Tipičan primjer su ptice selice, prirodni letači koji značajan dio života provedu u zraku te posljedično imaju visoko aerodinamički optimirana krila. Stoga se inženjerima nameće motiv za proučavanjem srpastih krila u navedenom kontekstu.

U radu je potrebno usvojiti proširenu metodu noseće linije, koja omogućuje uvid u aerodinamiku krila srpaste geometrije u stacionarnom potencijalnom toku fluida. Usvojenu metodu primijeniti na tehnički problem. Konkretno, metodu ograničiti na promatranje nevitoperenih krila s eliptičnim tlocrtom i paraboličnom nosećom linijom. Za promatranu klasu krila u potencijalnom toku u radu je potrebno, pomoću usvojene metode, dobiti uvid u korelaciju uzdužnog pomaka vrhova krila i finese. Obzirom da je promatrani tok fluida potencijalan, u ovom radu potrebno je definirati finesu kao omjer uzgona i induciranog otpora krila.

U okviru rada potrebno je prezentirati problem i korištene metode, komentirati dobivene rezultate te navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

26. travnja 2018.

Datum predaje rada:

**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2018.


**3. rok:** 21. rujna 2018.

Predvideni datumi obrane:

**2. rok (izvanredni):** 2.7. 2018.

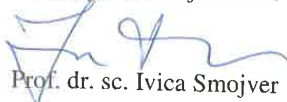
**3. rok:** 24.9. - 28.9. 2018.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr.sc. Dubravko Matijašević

v

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Ilica Smojver

# Sadržaj

Sadržaj	vi
Popis slika	vii
Popis oznaka	viii
Sažetak	ix
Summary	x
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Teorija</b>	<b>3</b>
2.1. Aerodinamička analiza problema . . . . .	3
2.1.1. Koncept cirkulacije . . . . .	3
2.1.2. Metoda noseće linije . . . . .	10
2.2. Matematička analiza problema . . . . .	17
2.3. Numerička analiza problema . . . . .	22
2.3.1. Čebiševljevi polinomi druge vrste . . . . .	22
2.3.2. Razrada problema . . . . .	30
<b>3. Rezultati</b>	<b>34</b>
<b>4. Zaključak</b>	<b>43</b>
Literatura	44



# Popis slika

2.1	<i>Promjena iznosa cirkulacije obzirom na promjenu krivulje . . . . .</i>	5
2.2	<i>Polje brzine uzrokovano beskonačnom pravocrtnom vrtložnom niti . . . . .</i>	8
2.3	<i>Konačan dio pravocrtne vrtložne niti . . . . .</i>	9
2.4	<i>Referentni koordinatni sustav, prva i treća četvrtina tetive . . . . .</i>	13
2.5	<i>(a) Shematski prikaz vezanog vrtloga, (b) Shematski prikaz slobodnog vrtloga . . . . .</i>	15
2.6	<i>Nultočke Čebiševljevog polinoma . . . . .</i>	24
3.1	<i>Prvih pet Čebiševljevih polinoma druge vrste . . . . .</i>	35
3.2	<i>Utjecaj stupnja Čebiševljevih polinoma na rješenje . . . . .</i>	35
3.3	<i>Geometrija krila . . . . .</i>	36
3.4	<i>Ovisnost cirkulacije po rasponu za longitudinalni pomak vrha krila <math>A</math> . . . . .</i>	36
3.5	<i>Lilientala krila . . . . .</i>	37
3.6	<i>Ovisnost cirkulacije po rasponu za longitudinalni pomak vrha krila <math>A</math>, u usporedbi sa Prandltovim rješenjem za eliptično krilo . . . . .</i>	37
3.7	<i>Omjer uzgona predmetne metode i Prandltove noseće linije . . . . .</i>	38
3.8	<i>Usporedba uzgona za manje <math>\mathcal{R}</math> . . . . .</i>	38
3.9	<i>Relativni koeficijent uzgona . . . . .</i>	39
3.10	<i>Relativni koeficijent otpora . . . . .</i>	40
3.11	<i>Relativna finesa . . . . .</i>	40
3.12	<i>Relativni koeficijent lilientale . . . . .</i>	41
3.13	<i>Relativni koeficijent momenta . . . . .</i>	41
3.14	<i>Tri konfiguracije krila za <math>A \in [0, 0.1]</math> . . . . .</i>	42
3.15	<i>Usporedba matematičke elipse i parametra <math>A</math> za optimalnu finesu . . . . .</i>	42

# Popis oznaka

$\alpha$	Napadni kut . . . . .	10
$\mathcal{R}$	Vitkost krila . . . . .	33
$\Gamma$	Cirkulacija . . . . .	4
$\Omega$	Vektor vrtložnosti . . . . .	4
$A$	Longitudinalni pomak vrha krila . . . . .	12
$c_L$	Aerodinamički koeficinet uzgona . . . . .	33
$c_M$	Aerodinamički koeficient momenta . . . . .	33
$c_{Di}$	Aerodinamički koeficient otpora . . . . .	33
$L_0$	Duljina korjenske tetive . . . . .	12
$L_e$	Duljina vršne tetive . . . . .	12
$w$	Inducirana brzina . . . . .	8
$x$	Smjer sile uzgona . . . . .	3
$x$	Smjer strujanja iz beskonačnosti . . . . .	3
$x'$	Koordinata točaka na 1/4 tetive . . . . .	12
$x''$	Koordinata točaka na 3/4 tetive . . . . .	12
$y$	Smjer razmaha krila . . . . .	3
$y_0$	Poluraspon krila . . . . .	12

# Sažetak

U radu je provedena analiza jedne klase krila srpaste geometrije, konkretno eliptičnih krila sa paraboličnom nosećom linijom. Metoda korištena za analizu je temeljena na Prandltovoj teoriji noseće linije koja je proširena Pistolesi-Weissingerovim uvjetom. U korištenoj metodi se javlja singularna integrodiferencijalna jednačba Prandltovog tipa, u kojoj se singularitet otklanja konačnom Hilbertovom transformacijom funkcije cirkulacije. Numerički se nepoznata cirkulacija aproksimira Čebiševljenim polinomima druge vrste prointegriranih Gauss-Čebiševljevom kvadraturnom formulom.

**Ključne riječi:** Noseća linija, Pistolesi-Weissinger, Prandlt, eliptično krilo, Hilbert, Gauss-Čebiševljeva kvadratrna formula

# Summary

A class of crescent moon wings was analysed in this thesis, in specific, an elliptic planform wing with parabolic lifting line. Applied method is based on Prandtl's lifting line theory extended with Pistoiesi-Weissinger condition. In the method integrodifferential equation of Prandtl's type appears, where finite Hilbert transform of circulation is used to remove singularity. Numerically, unknown circulation function is approximated by Chebishev polynomials of second kind which are then integrated by Gauss-Chebishev quadrature formula.

**Keywords:** Lifting line, Pistoiesi-Weissinger, Prandtl, elliptic wing palanform, Hilbert, Gauss-Chebishev quadrature method

# Poglavlje 1.

## Uvod

Kako postoji veliki broj različitih vrsta ptica, tako se mogu pronaći i različiti načini leta. Intenzivno lepršanje malenog kolibrića i jedrenje opjevanog albatrosa samo su neki od načina leta u prirodi. Evolucijski je svaka ptica usavršila svoj režim leta, a kako se uvijek može dodatno naučiti iz prirode, proučavanje istih, može poslužiti inženjerima za modeliranje optimalnih letjelica. Iako ptice nemaju rep ekvivalentan onom na zrakoplovima, i dalje imaju izvrsnu mogućnost manevriranja. Upravo ta činjenica je tehnička motivacija ovog rada, to jest proučavanje leta bez repa obzirom da sam rep u njegov nosač stvaraju dodatnu oplahivanu površinu koja u ralnom fluidu za sobom povlači i dodatni otpor

Ukoliko želimo aerodinamički razumjeti let trebamo započeti razmatranje krila od geometrije. U prirodi je geometrija krila mahom različita od one koju čovjek koristi za izradu zrakoplova. Naime, ptice tipično imaju kontinuirano zakrivljenu geometriju krila, nalik na srp ili mladi mjesec. Upravo je takva geometrija krila bila povod za ovaj rad. Nekolicina znanstvenika je razmatrala ovakva krila. Munk [12] je izračunao da se minimalni inducirani otpor može dobiti eliptičnom raspodjelom tetive po rasponu, kasnije u radu će se na taj rezultat referirati kao Prandltovo rješenje za eliptično krilo. C.P. van Dam [11] je u svom istraživanju naračunao da srpasta krila imaju smanjenje inducirano otpora od 8%, prilikom horizontalnog leta, uspoređujući sa nezakrivljenim eliptičnim krilom istog aspektnog odnosa.

. U ovom radu analizirano je eliptično krilo parabolične noseće linije po metodi Prossdorf i Tordelle [1]. Metoda je temeljena na Prandltovoj teoriji noseće linije gdje je krilo prikazano nosećom linijom smještenom na liniji jedne četvrtine tetive. Kako bi se

geometriju krila uzela u obzir koristi se Pitoles-Weissingerov uvjet koji kaže da brzina treba biti tangencijalna na ravninu krila u točkama na liniji tri četvrtine tetive. Pitolesiev uvjet dovodi do singularnog integrodiferencijalnog problema Prandltovog tipa, a singularitet se otklanja konačnom Hilbertovom transformacijom  $\Gamma$ , gdje je  $\Gamma$  raspodjela cirkulacije. Rubni uvjeti su proizašli iz činjenice da funkcija cirkulacije mora ići u nulu na krajnjim točkama noseće linije. Za numeričko rješenje problema primjenjuje se Gaussova kvadratura metoda na Čebiševljeve polinome druge vrste.

# Poglavlje 2.

## Teorija

### 2.1. Aerodinamička analiza problema

U radu se koristi desni koordinatni sustav gdje je os  $x$  smjer strujanja iz beskonačnosti. Kao posljedica, os  $x$  je ujedno smjer otpora koji se pojavljuje na krilu. Pozitivna os  $z$  je smjer sile uzgona dok je os  $y$  normala na  $x - z$  ravninu.

#### 2.1.1. Koncept cirkulacije

**Teorem 2.1.1.1** (Stokes). *Linijski integral tangencijalne komponente od  $F$  duž ruba površine  $S$  ( $\partial S$ ) je jednak površinskom integralu normalne komponente rotora od  $F$ .*

$$\oint_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S \text{rot} F \cdot ndS$$

gdje je  $S$  pozitivno orijentirana po dijelovima glatka ploha kojoj je rub zatvorena pozitivno orijentiranana po dijelovima glatka zatvorena krivulja  $\partial S$ .  $F$  je vektorsko polje čije komponente imaju neprekidnu parcijalnu derivaciju na otvorenom području  $R^3$  koje sadrži  $S$ .

Stokesov teorem je koristan jer povezuje linijski i površinski integral. Ako se pretpostavi da je  $C$  orijentirana zatvorena krivulja ( $\partial S$ ), a da  $\mathbf{v}$  predstavlja vektorsko polje brzine strujanja fluida tada uzimajući u obzir linijski integral:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds$$

te ako je  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$  komponenta brzine  $\mathbf{v}$  u smjeru jediničnog tangencijalnog vektora  $\mathbf{T}$ , slijedi mjera tendencije gibanja fluida po rubu od  $S$  ( $\partial S$ ):

$$\Gamma = \oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

što se naziva cirkulacija i ima fizikalno značenje jačine vrtloga obuhvaćenog  $\partial S$ .

Ako je  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  točka fluida, a  $S_a$  dovoljno mali disk sa radijusom  $a$  i centrom u  $P_0$ , onda je:

$$\text{rot}(\mathbf{F})(P) \approx \text{rot}(\mathbf{F})(P_0)$$

za sve točke  $P$  na  $S_a$  zato što je  $\text{rot}\mathbf{F}$  konstantan. Nadalje, Stokesov teorem daje sljedeću aproksimaciju cirkulacije po rubu kruga  $\partial S_a$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_a} \text{rot}\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_{\partial S_a} \text{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\ &\approx \iint_{S_a} \text{rot}\mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) dS \\ &= \text{rot}\mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2 \end{aligned}$$

Aproksimacija postaje točnija kada  $a \rightarrow 0$ , te slijedi:

$$\text{rot}\mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\partial S_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Ova posljednja jednačba daje vezu između rotora i cirkulacije. Točnije, pokazuje da je  $\text{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  mjera efekta rotiranja fluida oko osi  $\mathbf{n}$ . Efekt rotacije je najveći oko osi koja je kolinearna sa vektorom vrtložnosti,  $\mathbf{\Omega} = \text{rot}\mathbf{v}$ .

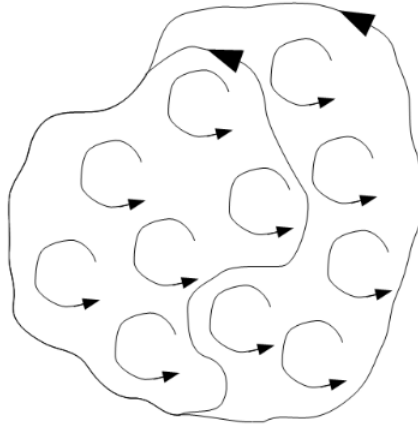
Pomoću Stokesovog teorema mogu se izraziti dvije ekvivalentne definicije cirkulacije:

**Definicija 2.1.1..1.** *Cirkulacija je linijski integral, tangencijalne komponente brzine duž zatvorene pozitivno orijentirane glatke krivulje.*

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$

gdje je  $\mathbf{V}$  brzina fluida u promatranoj točki definirane krivulje, a  $d\mathbf{l}$  je infinitezimalan element krivulje.





Slika 2.1: Promjena iznosa cirkulacije obzirom na promjenu krivulje

**Definicija 2.1.1..2.** Cirkulacija je protok vrtložnosti  $\Omega$  kroz plohu  $S$ .

$$\Gamma = \iint_S \Omega \cdot d\mathbf{S}$$

Nadalje, primjenom Stokesovog teorema dobije se:

$$\Gamma = \oint_{\partial S} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \Omega \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \Omega \cdot \mathbf{n} dS$$

Može se zaključiti da Stokesov teorem daje geometrijsku relaciju koja nije vezana ni za jednu materijalnu krivulju. Obzirom na definiciju jačine vrtloga slijedi da za prostor ispunjen sa proizvoljnim vrtložnim nitima, izvedeno iz Stokesovog teorema, cirkulacija oko bilo koje pozitivno orijentirane zatvorene krivulje je jednaka algebarskoj sumi jačina vrtložnih niti koje presjecaju plohu čiji je rub zatvorena pozitivno orijentirana krivulja. Ako je ova krivulja u bilo kojem smislu kontinuirano promjenjena, a niti time isključene, očigledno je da će se cirkulacija promjeniti za iznos koji je jednak sumi jačina izbačenih vrtložnih niti (slika). Time, možemo zaključiti da se cirkulacija oko orijentirane zatvorene krivulje zbog određenog pomaka mijenja za konačan iznos, te će oduzeta biti ona količina jačine vrtloga koja odgovara toj promjeni, drugim riječima, kroz površinu koja obuhvaća područje unutar izmjenjene pozitivno orijentirane krivulje prolaze vrtložne niti one jačine koja je algebarski jednaka sumi promjene cirkulacije. Drugim riječima, Stokesov teorem je geometrijska relacija te krivulja  $C$  nije vezana ni za jednu materijalnu krivulju.

Polje vrtložnosti je vektorsko polje  $\Omega$  definirano kao rotor vektora brzine strujanja. Ono

opisuje lokalno rotacijsko gibanje u blizini neke točke. Konkretno, ako se definira vektor kutne brzine kao:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{V}$$

onda će se u blizini neke točke fluid rotirati kutnom brzinom  $\boldsymbol{\omega}$ .

Slijede relevantni rezultati za materijalne krivulje i plohe.

**Teorem 2.1.1..2** (Kelvin). *Cirkulacija brzine po zatvorenoj materijalnoj krivulji  $C_M$  je konstantna, to jest vrijedi:*

$$\Gamma_M = \oint_{C_M} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \text{konst.}$$

Ekvivalentni iskaz teorema je:

$$\frac{d\Gamma_M}{dt} = 0$$

za materijalnu krivulju  $C_M$ . Dokaz teorema se može pronaći u [13].

**Korolar 2.1.1..1.** *Protok (fluks) vrtložnosti kroz materijalnu plohu  $S_M$  s rubom  $\partial S_M$  je konstantan, to jest vrijedi:*

$$\int_{S_M} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = \text{konst.}$$

Dokaz kolorala se može pronaći u [13].

**Teorem 2.1.1..3.** *Vrtložna krivulja, odnosno ploha se transportira, to jest ako je vrtložna u jednom (npr. početnom) trenutku, onda je vrtložna u svakom trenutku.*

Dokaz kolorala se može pronaći u [13].

**Vrtložna cijev** Kao što se polje brzine fluida može prikazati strujnicama isto tako se polje vrtložnosti može prikazati vrtložnicama. Vrtložnica je krivulja kojoj je tangenta kolinearna sa vektorom vrtložnosti. Ako se svakom točkom krivulje  $C$  provuče vrtložnica dobije se vrtložna površina kroz koju nema protoka vrtložnosti. Nadalje, ako se krivulja  $C$  zatvori dobije se vrtložna cijev.

Nadalje, uvesti će se Helmholtzovi teoremi koji će biti od pomoći u daljnjem proračunu. Ovi teoremi su dani za neviskozne fluide.

**Teorem 2.1.1..4** (Helmholtz I). *Protok vrtložnosti kroz presjek vrtložne cijevi ne ovisi o presjeku (ni o vremenu), to jest za svaki presjek  $S_M$  cijevi vrijedi:*

$$\int_{S_M} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \text{konst.}$$

**Teorem 2.1.1.5** (Helmholtz II). *Vrtložna cijev ne može završiti u fluidu; mora se prostirati do granice fluida ili formirati zatvorenu putanju.*

**Teorem 2.1.1.6** (Helmholtz III - Lagrange). *Ako je brzina bezvrtložna u nekom (npr. početnom) trenutku, onda je gibanje bezvrtložno.*

Kod neviskozno optjecanja aerodinamičkog tijela generator vrtložnosti, pa tako i cirkulacije, je Kuttin uvjet. Naime, Kuttin uvjet je posuđen iz teorije viskozno strujanja koji kaže da jedna točka fluida ne može imati dvije različite brzine te se koristi se da cirkulacija oko aerodinamičkog tijela odredi na jedinstven način. Opstrujavanjem aeroprofila na izlaznom se bridu pojavljuje beskonačan gradijent brzine koji generira vrtložnost.

Sažimanjem vrtložne cijevi u njenu centralnu os dobiva se vrtložna nit. Uzimajući u obzir da je presijek vrtložne niti infinitezimalan može se smatrati da je vektor vrtložnosti na njoj konstantan i okomit na nju.

Teoremi koji se odnose na vrtložno gibanje su posebno važni zato što je često lakše izvesti zaključak iz konteksta vrtložnih niti nego iz konteksta strujnih linija, te zato što postoji način računanja po kojemu se brzine perturbacija u bilo kojoj točki prostora može odrediti ako je poznata raspodjela vrtloga. Formula koja se koristi za taj račun će biti pokazana u nastavku. Ako je  $\Gamma$  jačina tanke vrtložne niti i  $ds$  element njene središnje linije, te ako je  $r$  udaljenost točke  $P$ , u kojoj se računa brzina, od vrtložne niti i ako je  $\alpha$  kut između  $ds$  i  $r$  onda je iznos brzine induciran dijelom vrtložnom niti:

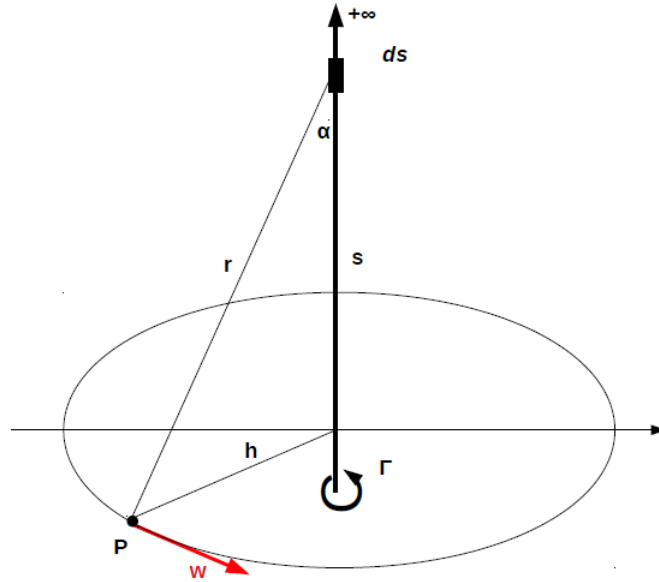
$$d\mathbf{w} = \frac{\Gamma \sin \alpha}{4\pi r^2} d\mathbf{s} \quad (2.1)$$

smjer ove brzine je okomit na ravninu  $ds - r$ . Ukupna brzina u točki  $P$  se dobije ako sumiramo utjecaje svih vrtložnih elemenata koji postoje u prostoru. Ovaj zakon se naziva Biot-Savartov zakon.

Kao primjer možemo razmotriti beskonačno duge pravocrtne vrtložne niti. Utjecaji na brzinu u točki  $P$  su svi u istom smjeru, a ukupna brzina se može odrediti jednostavnim integriranjem jednadžbe(2.1):

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{r^2} ds$$

kao što se vidi na slici,  $s = h \operatorname{ctg} \alpha$ , a njegova derivacija,  $ds = \frac{h}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ . Nadalje,  $r = \frac{h}{\sin \alpha}$ ,



Slika 2.2: Polje brzine uzrokovano beskonačnom pravocrtnom vrtložnom niti

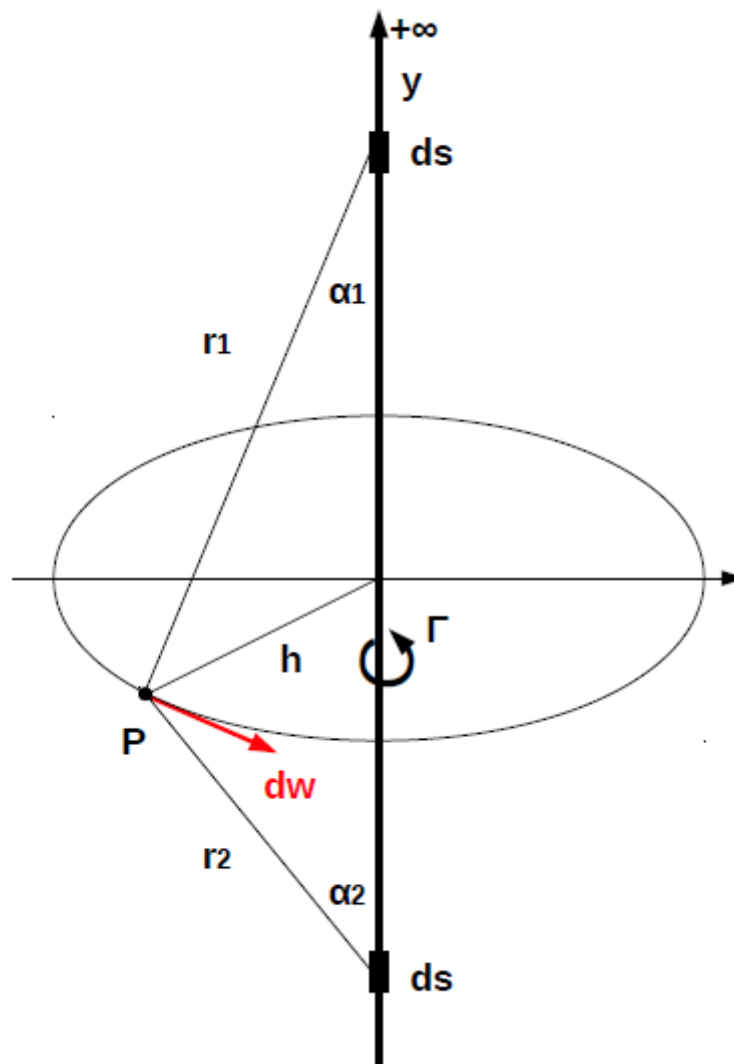
tako da:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha$$

$$w = -\frac{\Gamma}{4\pi h} [\cos \alpha]_0^{\pi}$$

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi h}$$

Ovaj rezultat može se izvesti i na jednostavniji način iz koncepta cirkulacije, ako koristimo već dokazani teorem, da cirkulacija brzine oko bilo koje zatvorene orijentirane krivulje koincidira sa jačinom svih vrtložnih niti koje su obuhvaćene njome. Cirkulacija za svaku zatvorenu krivulju koja prolazi oko jedne niti mora biti jednaka jačini niti. Ako je brzina u točki koja se nalazi na kružnici radijusa  $h$  oko ravne niti iznosa  $v$  onda ova cirkulacija ima iznos "put pomnožen sa komponentom brzine" =  $2\pi h \cdot w$  što automatski znači da je ta komponenta brzine  $w = \frac{\Gamma}{2\pi h}$ . Detaljnije razmatranje polja ove brzine kazuje da je za svaku točku izvan niti (formula se odnosi samo na takve točke) rotor jednak nuli. Slijedi da je ovo slučaj raspodjele brzine u kojem postoji rotor brzine samo u osi, u bilo kojoj drugoj točki polje je bezvrtložno. Za konačan dio pravocrtne



Slika 2.3: *Konačan dio pravocrtne vrtložne niti*

virtložne niti predhodni izračun na daje vrijednost<sup>1</sup>: <sup>2</sup>

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi h}(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

Uvažavajući Helmholtzove teoreme ova formula se može primjeniti samo za niz elemenata virtložne niti koji zajedno daju beskonačanu ili zatvorenu liniju.

### 2.1.2. Metoda noseće linije

Prandltova teorija noseće linije je matematički model koji predviđa raspodjelu uzgona duž raspona trodimenzionalnog krila obzirom na njegovu geometriju. Naime, kod realnog krila konačne geometrije lokalni uzgon ovisi o količini uzgona generiranog na susjednim djelovima krila. Teorija noseće linije obuhvaća koncept cirkulacije i teorem Kutte-Žukovskog, te kazuje da funkcija raspodjele uzgona postaje funkcija raspodjele cirkulacije preko cijelog raspona,  $\Gamma(y)$ . Modelirajući nepoznati lokalni uzgon sa, također nepoznatom cirkulacijom, moguće je uračunati utjecaj svakog dijela krila na ostale. Drugim riječima, iz teorema Kutte-Žukovskog slijedi da svaka promjena uzgona po rasponu dovodi do jednake promjene cirkulacije po rasponu. Po Helmholtzovom teoremu, virtložna nit ne može početi niti se prekinuti u prostoru. Što znači da se svaka promjena uzgona duž raspona treba modelirati kao otkidanje virtložnih niti nizstrujno, iza krila. Jačina ovih otkinutih virtložnih niti je jednaka promjeni lokalne (nepoznate) raspodjele cirkulacije te je za djelove simetričnog krila, na koje je nastrojavanje simetrično, simetrična obzirom na os  $z$ . Ako je poznata promjena uzgona za zadani dio krila, moguće je predvidjeti kako taj dio slobodnih otkinutih vrtloga utječe na uzgon za ostale dijelove krila. Naime, kod krila konačnog raspona dolazi do prestrujavanja zraka preko vrhova krila, zbog nemogućnosti da se na vrhovima krila održi konačna razlika u tlakovima na donjaci i gornjaci, a posljedično i do skretanja strujnica te generiranja inducirane brzine koja je sada okomita na raspon beskonačno tankog krila i strujanje iz beskonačnosti (obzirom na uvedeni koordinatni sustav, slobodni vrtlozi induciraju brzinu u smjeru negativne osi  $z$ ). Ta inducirana brzina se može razmatrati u kontekstu raspodjele brzine u vrtlogu i povezati sa promjenom efektivnog napadnog kuta svakoe sekcije krila. U matematičkom smislu, lokalna inducirana promjena napadnog kuta  $\alpha_i$ , za zadanu sekciju krila, se može kvantificirati kao integral brzina, u toj sekciji, induciranih otkinutim virtložnim nitima.

---

<sup>2</sup>U obzir se uzima kut  $\alpha_2$  koji je u jednadžbi(2.1.1.) pozitivan jer je  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

**Teorem 2.1.2.1** (Kutta-Žukovski). *Ako je  $\Gamma(y)$  cirkulacija brzine oko sekcije  $y$ , uzgon sekcije krila zadan je kao:*

$$L(y) = \rho V_\infty \Gamma(y)$$

Slijedi da je za krilo uzgon jednak:

$$L = \rho V_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy$$

gdje je  $\Gamma(y)$  u ovom radu izračunat iz jednadžbe za krilo Prandltovog tipa, geometrije i napadnog kuta. Ovo krilo sada ima jedan vrtlog vezan za krilo, koji se prostire po rasponu, i slobodne vrtloge koji polaze iz vezanog vrtloga, prolaze kroz kontrolnu točku na  $3/4$  tetive, u kojoj po idućem teoremu računamo induciranu brzinu  $w$ , te se preko izlaznog brida, u prvoj aprokcimaciji, prostiru u beskonačnost. Slobodni vrtlozi tvore vrtložni trag i vezani su za iste materijalne čestice fluida.

Pozicija kontrolne točke određena je sljedećim teoremom:

**Teorem 2.1.2.2** (Pistolessi). *Ako se cirkulacija oko ravne ploče zamjeni sa diskretnim vezanim vrtlogom koji ako je smješten na poziciji  $1/4$  tetive, taj će diskretni vrtlog inducirati brzinu na  $3/4$  tetive takvu da zbrojena sa strujanjem iz beskonačnosti generira uvjet nepropsnosti ravne ploče.*

*Dokaz.* Razmatra se dvodimenzionalna sekcija, kojoj je cijela cirkulacija zamjenjena s jednim diskretnim vrtlogom  $\Gamma$  smještenim u jednoj četvrtini tetive i jednom kontrolnom točkom smještenoj na udaljenosti  $h$  iza diskretnog vrtloga.

Ako se pretpostavi da je napadni kut mali, jednadžba (2.1) je reducirana na:

$$\frac{\Gamma}{2\pi h} = V\alpha$$

te je  $\Gamma = 2\pi wh\alpha$ . Slijedi da je uzgon sekcije:

$$L = \rho V \Gamma = 2\pi \rho V^2 h \alpha \quad (2.2)$$

Međutim, uzgon sekcije jedinične širine je po definiciji jednak:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 c C_l$$

gdje, se uvrsti teorijski nagib krivulje uzgona dvodimenzionalne sekcije kao  $C_l = 2\pi\alpha$ , slijedi:

$$L = \pi\rho V^2 c\alpha \quad (2.3)$$

Uspoređujući formule (2.2) i (2.3) proizlazi da je udaljenost  $h = \frac{c}{2}$ , to jest da kontrolna točka mora biti smještena na udaljenosti polovine tetive iza ishodišta diskretnog vrtloga.  $\square$

Naime, teorem kaže da će baš na udaljenosti 3/4 tetive, mjereno od napadnog brida, inducirana brzina biti jednaka normalnoj komponenti brzine u beskonačnosti, odnosno nametnut je uvjet nepropusnosti stijenke:

$$w = -V_\infty \sin \alpha_i$$

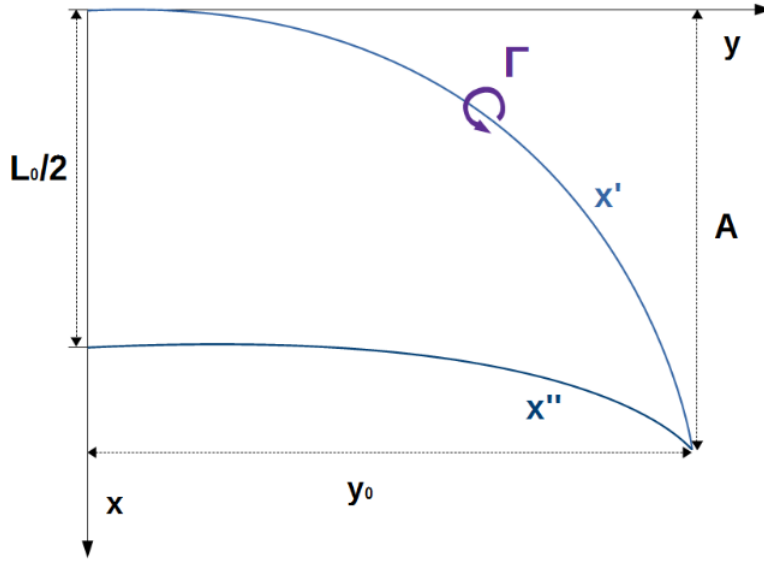
taj uvjet će biti ispunjen ako se računa jačina vezanog vrtloga za koju je u kontrolnoj točki strujanje tangencijalno na površinu krila. Međutim, rješenje za  $a_0 = 2\pi$  (faktor proporcionalnosti koeficijenta uzgona i napadnog kota) vrijedi samo za dvodimenzionalnu ravnu ploču u neviskoznom fluidu. Za dvodimenzionalne aeroprofile sa debljinom u viskoznom fluidu,  $a = a_0 = k(1 + \epsilon)2\pi$ , gdje  $\epsilon$  uzima u obzir debljinu aeroprofila te se može aproksimirati sa  $\epsilon = 0.8t/c$ .  $k$  mjeri smanjenje uzgona zbog graničnog sloja.  $k = 0.92$  za *RAE101* sekciju  $t/c = 0.1$  za Reynoldsove brojeve oko  $2 \cdot 10^6$  za nulti uzgon [14].

U modelu je pretpostavljena longitudinalno zakrivljena noseća linija u obliku  $x' = x'(y)$  postavljena na prvaj četvrtini tetive aeroprofila. Krilo je pretpostavljeno kao planarno bez debljine 2.4. Noseću liniju matematički se opisuje polinomnom funkcijom stupnja  $n$  sa početkom u ishodištu referentnog koordinatnog sustava, kojoj su vrhovi krila točke  $(y_0, A)$  i  $(-y, A)$ , gdje je  $y_0$  poluraspon, a  $A$  prednji/zadnji longitudinalni pomak vrhova krila. To daje formulu:

$$x' = A \left( \frac{y}{y_0} \right)^n \quad (2.4)$$

Površina krila se računa iz funkcije koja opisuje raspodjelu tetive po rasponu. Za geometrijsko mjesto 3/4 tetive (kontrolne točke) biramo analitički izraz  $x'' = x''(y)$ . Razlika između  $x'(y)$  i  $x''(y)$  će onda biti jednaka polovini raspodjele tetive po nosećoj liniji  $L(y)$ . Funkciju  $L(y)$  je izabrana kao dovoljno općenita, kako bi mogla opisati različite vrste krila: pravokutno, trokutasto, trapezno, eliptično i ostale. Ova funkcija





Slika 2.4: Referentni koordinatni sustav, prva i treća četvrtina tetive

mora zadovoljiti dva uvijeta:

$$x''(0) = \frac{L_0}{2} x''(y_0) = x'(y_0) + \frac{L_e}{2} \quad (2.5)$$

gdje  $L_0$  predstavlja duljinu korjenske tetive, a  $L_e$  duljinu vršne tetive.<sup>3</sup>

Funkcija koja zadovoljava zadane uvjete(2.5):

$$x'' - x' = L(y)$$

$$L(y) = \frac{L_0}{2} \left[ 1 + \left( \frac{L_e}{L_0} |y| \right)^{1/q} - |y|^p \right]^q \quad (2.6)$$

uz parametre  $p = 2$  i  $q = 0.5$  za eliptično krilo.

U prvoj aproksimaciji, sustav vrtloga u vrtložnom tragu je aproksimiran sa sustavom slobodnih vrtloga koji leže u  $x - y$  ravnini te su paralelni sa osi  $x$  na način da slobodni vrtlozi izlaze iz noseće linije  $x'$  te se prostiru nizstrujno u beskonačnost.

U točki  $Q(\bar{x}, \bar{y})$  razmatra se utjecaj elemenata krila na induciranu brzinu i to od vezanog vrtloga i od slobodnih vrtloga. Ovi utjecaji se određuju Biot-Savartovom formulom za svaki pojedini slobodni vrtlog. U bilo kojoj točki  $Q(\bar{x}, \bar{y})$  vrtložnog traga, infinitezimalan element  $\Gamma(y)ds$  pozicioniran u generičkoj točki  $P(x, y)$  noseće linije inducira brzinu:

$$dw_{\bar{x}, \bar{y}} = \frac{\Gamma(y)h}{4\pi r^3} ds \quad (2.7)$$

<sup>3</sup>Vrijednost  $L_e$  je implementirana u programski kod kao 0

Gdje je  $\Gamma(y)$  je funkcija cirkulacije u  $P$ ,  $h$  je tangenta na liniju  $x'$  u  $P$ ,  $r$  je udaljenost između  $Q$  i  $P$ , a  $s$  je krivolinijska koordinata po  $x'$ . Koristeći referentne koordinate, utjecaj vezanog vrtloga se može izraziti kao:

$$dw_{\bar{x},\bar{y}} = \frac{\Gamma(y)}{4\pi} \frac{\bar{x} - x'(y) + \left(\frac{dx'}{dy}\right)_y (y - \bar{y})}{(\sqrt{(\bar{x} - x'(y))^2 + (\bar{y} - y)^2})^3}$$

Nadalje, u bilo kojoj točki  $Q$  sustav slobodnih vrtloga inducira brzinu :

$$dw_{\bar{x},\bar{y}} = \frac{d\Gamma(y)}{4\pi h} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

ako uzmemo u obzir da  $\theta_2 \rightarrow 0$  što nam daje  $\cos \theta_2 = 1$  i  $h = \bar{y} - y$  dobijemo:

$$dw_{\bar{x},\bar{y}} = \frac{d\Gamma(y)}{4\pi(\bar{y} - y)} \left( 1 + \frac{\bar{x} - x'(y)}{\sqrt{(\bar{x} - x'(y))^2 + (\bar{y} - y)^2}} \right)$$

Ukoliko se ova dva utjecaja integriraju i zbroje, dobije se inducirana brzina u generičkoj točki  $Q$ .

$$w_{\bar{x},\bar{y}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-y_0}^{y_0} \Gamma(y) \frac{\bar{x} - x'(y) + \left(\frac{dx'}{dy}\right)_y (y - \bar{y})}{(\sqrt{(\bar{x} - x'(y))^2 + (\bar{y} - y)^2})^3} dy +$$

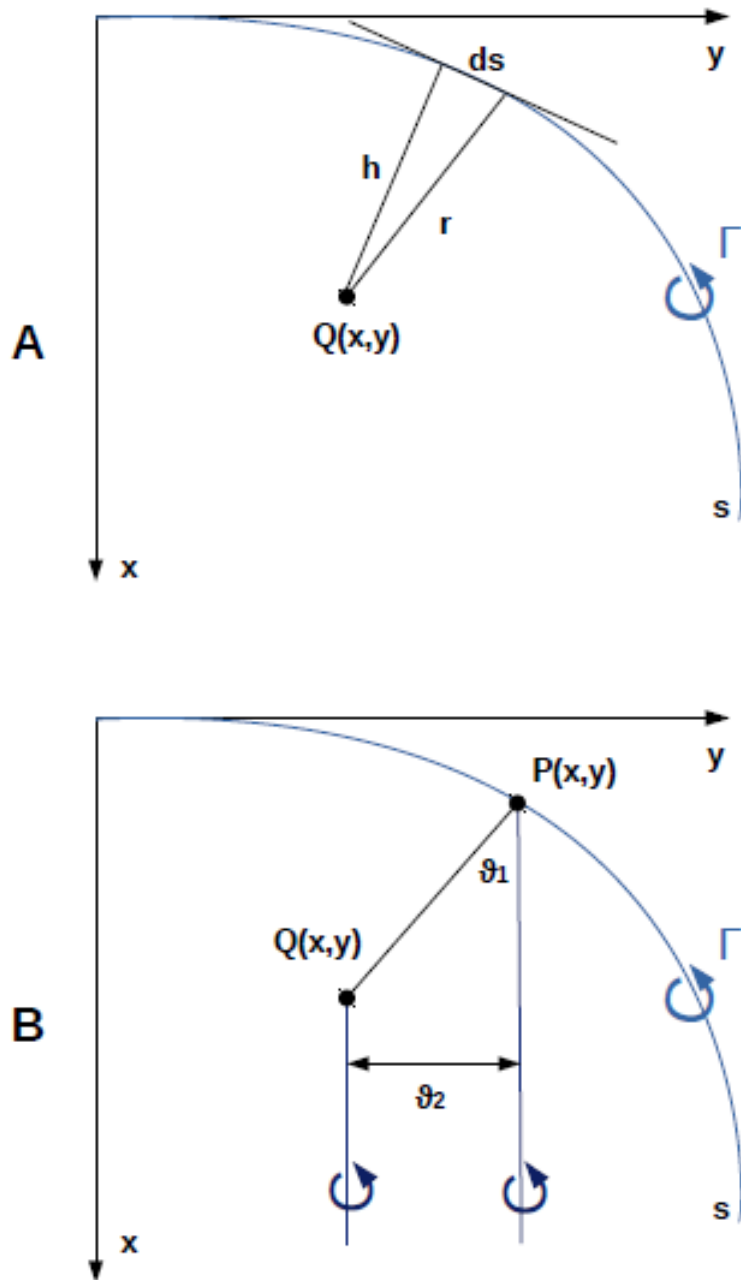
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-y_0}^{y_0} \frac{d\Gamma(y)}{\bar{y} - y} \left( 1 + \frac{\bar{x} - x'(y)}{\sqrt{(\bar{x} - x'(y))^2 + (\bar{y} - y)^2}} \right) dy \quad (2.8)$$

Kako bi se olakšao daljnji izračun, uvedene su bezdimenzijske varijable:

$$\begin{aligned} \frac{L}{y_0} &= l & \frac{y}{y_0} &= t & \frac{x'}{y_0} &= \xi' \\ \frac{L_0}{y_0} &= l_0 & \frac{\bar{y}}{y_0} &= s & \frac{x''}{y_0} &= \xi'' \\ \frac{A}{y_0} &= a & \frac{\Gamma}{U_\infty y_0} &= \Gamma & \frac{\Gamma'}{U_\infty} &= \Gamma' \end{aligned}$$

Bezdimenzijska inducirana brzina je  $w_i = \frac{W_i}{U_\infty} = \sin \alpha_i$ , gdje je  $\alpha_i$  lokalni kut između rezultante brzine i smjera strujanja u beskonačnosti.

Po Pitolesi-Weissingеровом uvjetu, nameće se da svaka točka  $(x''(y), y) = (\xi''(s), s)$  na tri četvrtine tetive bude jednaka geometrijskom postavnom kutu krila  $\alpha$ .



Slika 2.5: (a) Shematski prikaz vezanog vrtloga, (b) Shematski prikaz slobodnog vrtloga

Nadalje, za problem eliptičnog krila sa parabolikom nosećom linijom ( $n = 2$ ), te uvođenjem bezdimenzijskih varijabli, slijedi:

$$l(s) = \frac{l_0}{2} \left[ 1 + \left( \frac{l_e}{l_0} |s| \right)^{1/q} - |s|^p \right]^q \quad (2.9)$$

Ukoliko se svi navedeni uvjeti primjene na jednadžbu (2.8), dobije se:

$$\begin{aligned} 4\pi\alpha = \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{s-t} \left( 1 + \frac{as^n + l(s) - at^n}{\sqrt{(as^n + l(s) - at^n)^2 + (s-t)^2}} \right) dt + \\ + \int_{-1}^1 \Gamma(t) \frac{as^n + l(s) - at^n + nat^{n-1}(t-s)}{(\sqrt{(as^n + l(s) - at^n)^2 + (s-t)^2})^3} dt \\ -1 \leq s \leq 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

što je zapravo integrodiferencijalna jednadžba Prandt-ovog tipa sa konačnom Hilbertovom transformacijom nepoznate funkcije cirkulacije  $\Gamma(t)$ , gdje su  $a$ ,  $n$ ,  $\alpha$ ,  $l_0$ ,  $l_e$ ,  $p$  i  $q$  zadane konstante. Nepoznata funkcija cirkulacije mora zadovoljiti rubne uvjete:

$$\Gamma(-1) = \Gamma(1) = 0$$

## 2.2. Matematička analiza problema

Obzirom na predhodno usvojeni koordinatni sustav i bezdimenzijske parametre geometrije krila, predstavljeni problem može se matematički interpretirati u kontekstu matričnog računa <sup>4</sup>. Uvodi se sljedeća notacija:

Matrica  $\mathbf{b}$  je funkcija parametara  $s$  i  $t$ , a posljednično i parametara  $p$ ,  $q$ ,  $l_0$  i  $l_e$ . Te u integrodiferencijalnoj jednadžbi(2.18) predstavlja brojnik drugog pribrojnika prvog integrala.

$$\mathbf{b}(s, t) = a(s^n - t^n) + l(s)$$

Matrica  $\mathbf{l}$  predstavlja cijeli drugi pribrojnik prvog integrala.

$$\mathbf{l}(s, t) = \frac{\mathbf{b}(s, t)}{\sqrt{\mathbf{b}^2(s, t) + (s - t)^2}}$$

Matrica  $\mathbf{h}$  predstavlja brojnik drugog integrala integrodiferencijalne jednadžbe.

$$\mathbf{h}(s, t) = \frac{\mathbf{b}(s, t) + nat^{n-1}(t - s)}{\left(\sqrt{\mathbf{b}^2(s, t) + (s - t)^2}\right)^3}$$

Matrica  $\mathbf{m}$  je algebarski izraz za prvi integral koji nam pomaže u daljnjem proračunu.

$$\mathbf{m}(s, t) = \frac{\mathbf{l}(s, t) - 1}{s - t}$$

Kao što se može primjetiti sve gore navedene matrice su funkcije geometrijskih bezdimenzijskih koordinata, odnosno parametra  $t$  koji je vezan za 1/4 tetive (noseću liniju) i parametra  $s$  koji je vezan za 3/4 tetive (kontrolnu točku).

Nadalje, integrodiferencijalna jednadžba (??) može se zapisati pomoću gore navedenih matrica:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma'(t) \left\{ \frac{2}{s - t} + \mathbf{m}(s, t) \right\} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(t) \mathbf{h}(s, t) dt = 4\alpha \quad (2.11)$$

gdje  $\Gamma$  mora zadovoljiti uvjete:

$$\Gamma(-1) = \Gamma(1) = 0$$

Ako se prvi integral u jednadžbi (??) integrira po dijelovima i uzmu u obzir rubni uvjeti, jednadžbu (??) se može zapisati u obliku:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{s - t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(t) \mathbf{T} dt = 2\alpha \quad (2.12)$$

---

<sup>4</sup>Matrični račun je uveden u svrhu direktne impemetacije programskog koda.

gdje je:

$$\mathbf{T}(s, t) = \frac{1}{2}\mathbf{h}(s, t) + \frac{1}{2}m_t(s, t) \quad (2.13)$$

i matrica  $m_t(s, t)$  je derivacija matrice  $\mathbf{m}(s, t)$  po  $t$ .

Ako se gore navedene matrice uvrste u formulu (2.13) elementi matrice  $\mathbf{T}(s, t)$  su:

$$\mathbf{T}(s, t) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b}^2(s, t) + (s - t)^2} \left[ \mathbf{b}(s, t) + \sqrt{\mathbf{b}^2(s, t) + (s - t)^2} \right]} \quad (2.14)$$

Zbog prirode jednadžbi koje su izvedene uvodi se pojam Hilbertovog prostora. Naime, Hilbertov prostor je generalizirani oblik Euklidskog prostora <sup>5</sup>, odnosno prošireni Euklidski prostor.

Hilbertov prostor je beskonačno dimenzionalan vektorski prostor koji posjeduje strukturu unutarnjeg produkta. Unutarnji produkt je opći oblik skalarnog produkta, odnosno definira pojmove kao što su duljina vektora, kut između vektora i ortogonalnost. Svaki unutarnji produkt paru dva vektora dodjeljuje skalarnu vrijednost. Nadalje, takav produkt je induciran p-normom. P-norma vektora je funkcija koja određuje pozitivnu vrijednost duljine svakom vektoru u vektorskom prostoru. Hilbertov prostor je p-norme 2, odnosno vrijedi da su funkcije kvadratno-integrabilne, točnije, da imaju konačan integral kvadata apsolutne funkcije obzirom na težinsku funkciju.

**Definicija 2.2.0..1.** *Hilbertovog prostor definiramo kao:*

$$L_w^2(-1, 1) = \left\{ f : \int_{-1}^1 |f(t)|^2 w(t) dt < +\infty \right\}$$

gdje je  $w(t) = \sqrt{1 - t^2}$  težinska funkcija prostora.

Definicija ovog prostora te sam prijelaz u prostor je potreban da se numerički riješi problem. U nastavku je odabrano riješiti problem sa ortogonalnim polinomima koji su

---

<sup>5</sup>Euklidski prostor je intuitivan prostor u kojem tipično razmišljamo. Unutarnji produkt je definiran kao:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Rezultat je uvijek realan broj. Norma (udaljenost) i kut su definirani kao:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \quad \theta = \left( \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right)$$

ortogonalni na težinsku funkciju  $w(t) = \sqrt{1-t^2}$ . Ovaj odabir nije nužno proizvoljan već za tu težinsku funkciju postoji egzakto rješenje integrodiferencijalne jednadžbe u ograničenom  $L_w^2(-1, 1)$  prostoru.

Nadalje, uvodi se pojam Hilbertove transformacije. Hilbertova transformacija se prirodno javlja u ovakvom tipu jednadžbi, ona je ograničeni integralni operator na prostoru  $L_w^2(-1, 1)$ . U kontekstu funkcija, od realne funkcije (koje su često prekomplikirane da bi se koristile u proračunu) radi analitičku funkciju. Kako je jednadžba (2.12) singularna za  $s-t=0$ , mora se modificirati ukoliko se provodi numerička analiza.

Očito da se jednadžba (2.12) uz rubne uvjete (2.19) može zapisati u obliku:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{s-t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(t) \mathbf{N}(s, t) dt = 2\alpha \quad (2.15)$$

gdje je:

$$\mathbf{N}(s, t) = \frac{1}{2} \mathbf{m}(s, t) + \frac{1}{2} \int_t^1 \mathbf{h}(s, \tau) d\tau \quad (2.16)$$

Primjetimo da su jednadžbe (2.15) i (2.16) singularne integrodiferencijalne jednadžbe Prandtl-ovog tipa gdje je integral:

$$Hf(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{s-t} dt$$

Cauchyev integral prvotne vrijednosti, te se naziva konačna Hilbertova transformacija funkcije  $f$  [6].

Sa činjenicom da su  $\langle f, g \rangle$  realne kvadratno-integrabilne funkcije (po definiciji Hilbertovog prostora) može se definirati i skalarni produkt u težinskom prostoru  $L_w^2(-1, 1)$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)w(t)dt$$

Nadalje, Hilbertova transformacija ima svojstvo linearosti, odnosno:

$$\langle Hf, Hg \rangle = \langle f, g \rangle - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t)dt \int_{-1}^1 g(t)dt$$

Operator  $H$  je izometričan na potprostoru:

$$L_{w,0}^2(-1, 1) = \left\{ f \in L_w^2(-1, 1) : \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$$

što znači da operator očuva udaljenosti prilikom transformacije na ovako definiranom potprostoru. Dodatno, inverz  $H$  u potprostoru  $L_{w,0}^2(-1, 1)$  je definirano kao[6]:

$$H^{-1}g(s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{w(s)} \int_{-1}^1 \frac{w(t)g(t)}{t-s} dt$$

Drugo svojstvo Hilbertove transformacije koje se koristili slijedi u nastavku:

**Teorem 2.2.0..1.** *Hilbertova transformacija derivacije funkcije je jednaka derivaciji Hilbertove transformacije funkcije.*

$$Hf'(t) \iff \frac{d}{dt}Hf(t) \tag{2.17}$$

*Dokaz.* Iz definicije Hilbertove transformacije:

$$Hf(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{s-t} dt$$

ako se  $t$  zamjeni sa  $s - \tau$ :

$$Hf(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(s-\tau)}{\tau} d\tau$$

zatim deriviraju obje strane jednađbe:

$$\frac{d}{ds}Hf(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(s-\tau)}{\tau} d\tau$$

te vrati zamjena  $\tau = s - t$ , dobije se:

$$\frac{d}{ds}Hf(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(t)}{s-t} dt$$

□



Obzirom na uvedene zakonitosti prostora u kojem se rješava problem poznato je da homogeni problem koji je predstavljen jednadžbom (intdif) ima jedinstveno fizikalno rješenje. Odnosno kada je  $\alpha = 0$ , to jest kada je postavni kut neporemećene struje fluida s obzirom na ravninu krila nula, raspodjela cirkulacije  $\Gamma(t)$  mora biti konstantno jednaka nuli. Tako da problem (intdif) ima konstantno rješenje  $\Gamma$  takvo da je  $\Gamma' \in L_{w,0}^2(-1, 1)$  ako je integralni operator  $\mathbf{N}$  sa kernel funkcijom:

$$\mathbf{N}f(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{N}(s, t)f(t)dt$$

kompaktan na  $L_w^2(-1, 1)$  i ako je predviđeno da je:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^2(s, t) \frac{w(s)}{w(t)} ds dt < +\infty$$

Ovaj posljednji uvjet je zadovoljen kada je  $l_e \neq 0$ .

Analitički možemo prijeći problem ako jednadžbu(2.18) pomnožimo sa  $H^{-1}$  te time dolazimo do Fredholm-ove integralne jednadžbe druge vrste[6]:

$$\Gamma' + H^{-1}\mathbf{N}\Gamma' = 2\alpha H^{-1}1$$

sa:

$$\begin{aligned} H^{-1}\mathbf{N}\Gamma' &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{w(x)} \int_{-1}^1 w(s) \frac{ds}{s-x} \int_{-1}^1 \mathbf{N}(s, t)\Gamma' dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{L}(x, t)\Gamma' dt \end{aligned}$$

gdje je:

$$\mathbf{L}(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{w(x)} \int_{-1}^1 w(s) \mathbf{N}(s, t) \frac{ds}{s-x}$$

Primjetimo također da je:

$$\begin{aligned} H^{-1}1 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{w(s)} \int_{-1}^1 \frac{w(t)}{t-s} dt \\ &= -\frac{s}{w(s)} \end{aligned}$$

Međutim, određivanje eksplicitnog izraza za kernel funkciju  $\mathbf{L}(x, t)$  je prezahtjevno za opseg ovog rada[5].

## 2.3. Numerička analiza problema

Procedura za numeričku analizu problema temelji se na singularnoj integrodiferencijalnoj jednadžbi:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{s-t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{T}(s,t)\Gamma(t)dt = 2\alpha \quad (2.18)$$

gdje  $\Gamma$  mora zadovoljiti uvjete:

$$\Gamma(-1) = \Gamma(1) = 0 \quad (2.19)$$

Rješenje jednadžbe (2.18) tražimo u približnom obliku:

$$\Gamma_N(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{j=1}^N \xi_{jN} \frac{U_N(t)}{(t-t_{jN})U'_N(t_{jN})} \quad (2.20)$$

gdje su  $U_N(t)$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) Čebiševljevi polinomi druge vrste.<sup>6</sup>

### 2.3.1. Čebiševljevi polinomi druge vrste

#### Osnovna svojstva Čebiševljevih polinoma 2.vrste

**Definicija 2.3.1.1.** Čebiševljev polinom druge vrste  $U_n(x)$  je polinom stupnja  $n$  od  $x$  definiran kao:

$$U_n(x) = \frac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta} \quad \text{za } x = \cos\theta \quad (2.21)$$

ako je varijabla  $x$  definirana na intervalu  $[-1, 1]$ , odgovarajući interval varijable  $\theta$  je  $[0, \pi]$  s time da granica za  $x = -1$  odgovara granici za varijablu  $\theta = \pi$ , a  $x = 1$  za granicu  $\theta = 0$ .

Elementarne trigonometrijske formule nam daju[8]:

$$\begin{aligned} \sin 1\theta &= \sin \theta \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin 3\theta &= \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \\ \sin 4\theta &= \sin \theta (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta) \dots \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Formule su zapisane u matričnom obliku jer su kao takve korištene u izradi programskog koda.

Ako se gori navedeno uvrsti u formulu (2.21) očito je da omjer sinusa daje polinome  $U_n(x)$  za  $x = \cos \theta$ :

$$\begin{aligned}U_0(x) &= 1 \\U_1(x) &= 2x \\U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\U_3(x) &= 8x^3 - 4x \dots\end{aligned}$$

Kombinirajući trigonometrijski identitet :

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \cos \theta \sin n\theta$$

sa Definicijom 1.1, vidimo da  $U_n(x)$  zadovoljava rekurzivnu relaciju:

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

koja s početnim uvjetima :

$$\begin{aligned}U_0(x) &= 1 \\U_1(x) &= 2x\end{aligned}$$

daje efektivnu metodu generiranja polinoma  $n$ -tog stupnja <sup>7</sup>.

Čebiševljevi polinomi stupnja  $n > 0$  imaju točno  $n$  nultočaka i  $n+1$  lokalnih ekstrema na intervalu  $[-1, 1]$ .

Nultočke polinoma  $U_n(x)$  su:

$$x = y_k = \cos \frac{k\pi}{(n+1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.23)$$

ili u prirodnom redosljedu:

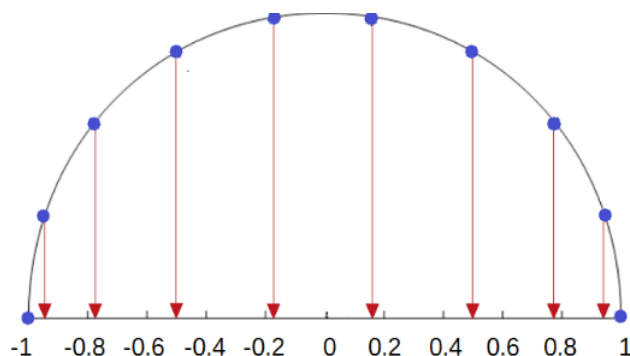
$$x = \cos \frac{(n-k+1)\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.24)$$

---

<sup>7</sup>Čebiševljeva metoda za generiranje  $n$ -tih višestrukih kuteva:

$$\begin{aligned}\cos nx &= 2 \cos(n-1)x - \cos(n-2)x \\ \sin nx &= 2 \sin(n-1)x - \sin(n-2)x \\ \tan nx &= \frac{H+K}{K-H} \quad \text{gdje je} \quad \frac{H}{K} = \tan(n-1)x\end{aligned}$$

*david*



Slika 2.6: Nultočke Čebiševljevog polinoma

### Ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

**Definicija 2.3.1..2.** Za dvije funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$  u  $L_2[a, b]$  kažemo da su ortogonalne na intervalu  $[a, b]$  s obzirom na zadanu neprekidnu i ne negativnu težinsku funkciju  $w(x)$  ako je:

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx = 0 \quad (2.25)$$

ili ako se koristi notacija skalarnog produkta:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \quad (2.26)$$

gdje su funkcije  $w, f$  i  $g$  funkcije od  $x$  na intervalu  $[a, b]$ , onda se može reći da je uvjet ortogonalnosti iz (1.1.2) ekvivalentan tome da je  $f$  ortogonalna na  $g$  ako je :

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Formalna definicija skalarnog produkta u kontekstu realnih funkcija realnih varijabli slijedi :

**Definicija 2.3.1..3.** Skalarni produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  je bilinearna funkcija elemenata  $f, g, h, \dots$  koja u vektorskom prostoru mora zadovoljiti sljedeće aksiome:

1.  $\langle f, f \rangle \geq 0$  što je jednako 0 ako i samo ako  $f \equiv 0$

2.  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

$$3. \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

$$4. \langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle \quad \text{za svaki skalar } \alpha$$

Skalarni produkt je induciran  $L_2$  normom:

$$\|f\| = \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (2.27)$$

Ako se skalarni produkt definira sa težinskom funkcijom  $w(x)$  na intervalu  $[a, b]$ :

$$w(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad [a, b] = [-1, 1] \quad (2.28)$$

tada Čebiševljevi polinomi druge vrste zadovoljavaju jednakost [8]:

$$\begin{aligned} \langle U_i, U_j \rangle &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} U_i(x) U_j(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \sqrt{1 - x^2} U_i(x) \sqrt{1 - x^2} U_j(x) dx \\ &= \int_0^\pi \sin(i + 1)\theta \sin(j + 1)\theta d\theta \end{aligned}$$

uz jednakost iz (2.20):

$$\sin \theta U_i(x) = \sin(i + 1)\theta$$

dobije se:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(i - j)\theta - \cos(i + j + 2)\theta] d\theta \\ &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

## Gauss-Čebiševljeva integracija

Čebiševljevi polinomi i njihova osnovna svojstva mogu predstavljati ključnu ulogu u numeričkoj integraciji. Gaussova metoda kvadrature procjenjuje integral kombinirajući vrijednosti integranda u nultočkama ortogonalnih polinoma. Ovdje se razmatra

specijalan slučaj Gauss-Čebiševljeve kvadrature, za jednostavne težinske funkcije. Također, integral se može aproksimirati na način da podintegralnu funkciju razvijemo u red te se potom integrira parcijalna suma reda. Upravo na taj način se aproksimira sa metodom aproksimacije prikazanom u nastavku.

Pretpostavimo sada da želimo izračunati određeni integral od  $f(x)$  sa težinskom funkcijom  $w(x)$ :

$$I = \int_a^b f(x)w(x)dx \quad (2.29)$$

Također pretpostavimo da  $I$  mora biti aproksimiran u formi :

$$I \simeq \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (2.30)$$

gdje je  $A_k$  neki koeficijent, a  $x_k$  neka apcisa na intervalu  $[a, b]$ . Ideja Gaussove kvadrature je pronaći takvu formulu (2.30) koja daje egzaktno rješenje za polinome najvećeg stupnja.

Ako je  $J_{n-1}f(x)$  polinom stupnja  $n - 1$  koji interpolira  $f(x)$  u svim  $n$  točkama sa poznatom vrijednosti funkcije  $x_1, \dots, x_n$ , onda je :

$$J_{n-1}f(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)l_k(x) \quad (2.31)$$

gdje je  $l_k$  Lagrangeov polinom:

$$l_k(x) = \prod_{r=1, r \neq k}^n \left( \frac{x - x_r}{x_k - x_r} \right) \quad (2.32)$$

Polinom  $J_{n-1}f(x)$  ima integral:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b J_{n-1}f(x)w(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b w(x)l_k(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \end{aligned}$$

Zaključujemo da se koeficijenti  $A_k$  moraju izabrati kao:

$$A_k = \int_a^b w(x)l_k(x)dx \quad (2.33)$$

sa  $n$  točaka za koje znamo vrijednost funkcije na apcisi i sa ovakvim izborom koeficijenata formula zaista daje egzaktno rješenje kada je funkcija  $f(x)$  stupnja  $n - 1$  ili manjeg.

**Teorem 2.3.1.1.** *Ako su  $x_k (k = 1, \dots, n)$  nultočke  $\phi_n(x)$ , a  $i\{\phi_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$  je sustav polinoma,  $\phi_k$  ima stupanj polinoma  $k$ , te je ortogonalan obzirom na  $w(x)$  na intervalu  $[a, b]$ , onda 2.30 sa koeficijentima 2.33 daje egzaktan rezultat bilo da je  $f(x)$  stupnja  $2n - 1$  ili manjeg. Također, svi koeficijenti  $A_k$  su u ovom slučaju pozitivni.*

*Dokaz.* Kako je  $\phi_n(x)$  polinom stupnja  $n$ , bilo koji polinom  $f(x)$  stupnja  $2n - 1$  se može zapisati kao:

$$f(x) = \phi_n(x)Q(x) + J_{n-1}f(x)$$

gdje su  $Q(x)$  i  $J_{n-1}f(x)$  polinomi stupnja najviše  $n - 1$ . Onda je:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b \phi_n(x)Q(x)w(x)dx + \int_a^b J_{n-1}f(x)w(x)dx \quad (2.34)$$

. Nadalje,  $\phi_n(x)$  je ortogonalan na sve polinome stupnja manjeg od  $n$ , tako da prvi integral sa desne strane u jednadžbi(2.34) iščezne. Tako da:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x)dx &= \int_a^b J_{n-1}f(x)w(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n A_k J_{n-1}f(x_k) \end{aligned}$$

. Kako su koeficijenti izabrani da daju egzaktno rješenje za polinome stupnja manjeg od  $n$ . Ali sada je:

$$f(x_k) = \Phi_n(x_k)Q(x_k) + J_{n-1}f(x_k) = J_{n-1}f(x_k)$$

zato što je  $x_k$  nultočka  $\phi_n$ . Stoga

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (2.35)$$

te vidimo da 2.35 daje egzaktno rješenje za  $f(x)$ . □

Kada je interval  $[a, b]$  sa granicama  $[-1, 1]$  te su ortogonalni polinomi  $\phi_n$  jedni od četiri vrste Čebiševljevih polinoma, onda su težinske funkcije  $w(x)$  :

1. Čebiševljev polinom 1. vrste  $w(x) = (\sqrt{1-x^2})^{-1}$
2. Čebiševljev polinom 2. vrste  $w(x) = \sqrt{1-x^2}$
3. Čebiševljev polinom 3. vrste  $w(x) = \sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^{-1}$
4. Čebiševljev polinom 4. vrste  $w(x) = \sqrt{1-x}(\sqrt{1+x})^{-1}$

te su nultočke  $x_k$  polinoma eksplicitno zadane. Preostaje samo odrediti koeficijente  $A_k$ , što se može učiniti koristeći sljedeću lemu.

**Lema 2.3.1..1.**

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \phi}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin \theta}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = -\pi \cos n\phi$$

za svaki  $\phi$  u intervalu  $[0, \pi]$ , te  $n = 1, 2, 3, \dots$

Ova lema je iskazana u kontekstu Chauchyevog integrala prvotne vrijednosti, stoga se može dozvoliti da  $\phi$  zaprimi proizvoljnu vrijednost, integranti imaju ne integrabilan singularitet u točki  $\theta = \phi$ . Međutim, ako se želi primjeniti ova lema u kontekstu Gauss-Čebiševljeve integracije,  $\theta = \phi$  će uvijek postati nula numeratora, tako da će singularitet biti uklonjiv, a integrali prvotne vrijednosti će biti ekvivalentni integralima u općem smislu.

*Dokaz.* Lema se može indukcijski dokazati na  $n$ , ako prvo ustanovimo slučaj  $n = 0$  prvog rezultata:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = 0$$



Kako je  $\cos \theta$  parna funkcija, imamo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - e^{i\phi})(e^{i\theta} - e^{-i\phi})} d\theta \\
 &= \int_{z=1} \frac{-i}{(z - e^{i\phi})(z - e^{-i\phi})} dz \\
 &= \frac{-i}{e^{i\phi} - e^{-i\phi}} \left[ \int_{z=1} \frac{dz}{z - e^{i\phi}} - \int_{z=1} \frac{dz}{z - e^{-i\phi}} \right] \\
 &= \frac{-1}{2 \sin \phi} [i\pi - i\pi] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Sada možemo prikazati određivanje koeficijenata  $A_k$ .

**Lema 2.3.1.2.** *Ako su  $x_1, \dots, x_{n+1}$  nultočke polinoma  $\phi_{n+1}(x)$ , onda se Lagrangeovi polinomi mogu pisati u formi:*

$$l_i(x) = \frac{\phi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\phi'_{n+1}(x_i)}$$

gdje je  $\phi'_{n+1}$  prva derivacija funkcije  $\phi_{n+1}$

**Korolar 2.3.1.1.** *Za polinomnu interpolaciju u nultočkama Čebiševljevog polinoma  $U_n(x)$ , Lagrangeovi polinomi su:*

$$l_i(x) = \frac{U_n(x)}{(x - x_i) \frac{(n+1)T_{n+1}(x_i) - x_i U_n(x_i)}{x^2 - 1}}$$

ili u trigonometrijskom obliku:

$$l_i(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta \sin^3 \theta_i}{\sin \theta (\cos \theta - \cos \theta_i) (n+1) \cos(n+1)\theta - \cos \theta \sin(n+1)\theta}$$

**Teorem 2.3.1..2.** U Gauss-Čebiševljevoj formuli:

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx \simeq \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

gdje su  $x_k$  odgovarajuće  $n$  nultočke polinoma  $\phi_n(x)$ , koeficijenti  $A_k$  su sljedeći:

Za  $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $\phi_n(x) = U_n(x)$ :

$$A_k = \frac{\pi}{n+1}(1-x_k^2) \quad (2.36)$$

*Dokaz.* Za dokazivanje teorema koristimo korolar 2.3.1.1 i leme 2.3.1.2 i 2.3.1.1.

$$\begin{aligned} A_k &= \int_{-1}^1 \frac{U_n(x)}{(x-x_k)U_n'(x_k)} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}}{(\cos\theta - \cos\theta_k) \frac{-(n+1)\sin\theta_k \cos(n+1)\theta_k + \cos\theta_k \sin(n+1)\theta_k}{\sin^3\theta_k}} (-\sin^2\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\theta(-\sin^2\theta)}{\sin\theta(\cos\theta - \cos\theta_k) \frac{-(n+1)\sin\theta_k \cos(n+1)\theta_k + \cos\theta_k \sin(n+1)\theta_k}{\sin^3\theta_k}} d\theta \end{aligned}$$

Primjenimo lemu ??lem:112) te dobijemo:

$$A_k = \frac{\pi \cos(n+1)\theta_k}{\frac{-(n+1)\sin\theta_k \cos(n+1)\theta_k + \cos\theta_k \sin(n+1)\theta_k}{\sin^3\theta_k}}$$

te osnovnim trigonometrijskim identitima dođemo do izraza:

$$A_k = \frac{\pi}{n+1}(1-x_k^2)$$

□

## 2.3.2. Razrada problema

Prvi problem u formuli (2.18) je pronaći vrijednost vektora  $\xi_{jN}$ . Ta matrica predstavlja težinski faktor za svaki od izabranih Čebiševljevih polinoma. Težinski faktor

---

<sup>7</sup>Prikazat će se dokaz teorema samo za Čebiševljeve polinome 2. vrste

računa se na način da se na formulu (2.18) primjeni razvoj funkcije po Čebiševljevim polinomima te Gauss-Čebiševljeva integracija.

Ako se na prvi integral iz formule (2.18) primjeni gore navedeni postupak, dobije se:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_N(t)}{t_{kN} - t} dt = \sum_{j=1}^N a_{kj} \xi_{jN} \quad (2.37)$$

Gdje član  $a_{kj}$  predstavlja Hilbertovu matricu :

$$H \left( \frac{d\Gamma}{dt} \right) \simeq H(\Gamma'_N) \simeq \sum_{j=1}^N a_{kj} \xi_{jN}$$

te je:

$$a_{kj} = \begin{cases} \frac{N+1}{2} & za & k = j \\ 0 & za & |k - j| \text{ parno} \\ \frac{\sin y_{jN}}{2(N+1) \sin y_{kN}} \left( \frac{1}{\tan^2 \left( \frac{y_{jN} + y_{kN}}{2} \right)} - \frac{1}{\tan^2 \left( \frac{y_{jN} - y_{kN}}{2} \right)} \right) & za & |k - j| \text{ neparno} \end{cases}$$

Ako na drugi integral u formuli (2.18) primjenimo Gauss-Čebiševljevu integraciju,  $\xi_{jN}$  slijedi iz linearnog sustava:

$$\sum_{j=1}^N (a_{kj} + b_{kj}) \xi_{jN} = 2\alpha \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.38)$$

s tim da je:

$$b_{kj} = \frac{\sin^2(y_{jN})}{N+1} \mathbf{T}(t_{kN}, t_{jN}) \quad (2.39)$$

Član  $\mathbf{T}(t_{kN}, t_{jN})$  je geometrijska matrica koja sadrži točke na nosećoj liniji i na 3/4 noseće linije.

Vrijednost vektora  $\xi_{jN}$  se dobije rješavajući linearni sustav (2.38), a cirkulacija po formuli (2.20) .

Kako je sada poznata raspodjela cirkulacije po rasponu krila može se provesti daljnja aerodinamička analiza. Naime, aerodinamičke koeficijente uzgona i induciranog otpora

možemo prikazati na način:

$$c_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}$$

$$c_{Di} = \frac{D_i}{\frac{1}{2}\rho 2_\infty^2}$$

Uzgon  $L$  zadan po formuli:

$$L = \rho V_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy$$

te ako se primjeni Gauss-Čebiševljeva integracija, dobije se formula za normirani koeficijent uzgona:

$$c_L \simeq \frac{\mathcal{R}}{2} \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=1}^N (1 - t_{jN}^2) \xi_{jN}$$

Zbog ograničenja ove metode gdje inducirani otpor predstavlja kinetičku energiju vrtložne plahte najbolje ga je računati u Trefftzovoj ravnini gdje je raspodjela normiranih induciranih kuteva jednaka:

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{s-t} dt \quad (2.40)$$

te je formula prikazana u kontekstu uvedenih bezdimenzijskih parametara. Nadalje, možemo primjetiti da integral u jednadžbi 2.40 zapravo predstavlja umnožak Hilbertove matrice  $a_{kj}$  i vrijednosti funkcije  $\xi_{jN}$ , odnosno prvi član u linearnom sustavu(2.38). Normirani koeficijent induciranih otpora se dobije po formuli:

$$c_{Di} = \frac{\mathcal{R}}{2} \int_{-1}^1 \Gamma(t) dt \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{s-t} dt$$

ili ako primjenimo Gauss-Čebiševljevu integraciju:

$$c_{Di} = \frac{\mathcal{R}}{8} \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=1}^N (1 - t_{jN}^2) a_{kj} \xi_{jN}$$

Nadalje, normirani aerodinamički koeficijent momenta<sup>8</sup> oko linije jedne četvrtine tetive se u kontekstu uvedenih bezdimenzijskih koordinata može izračunati po formuli:

$$c_M = \frac{A\mathbf{R}}{2} \frac{\pi}{N+1} \sum_{j=1}^N (1 - t_j N^2) \xi_{jN} \frac{x'(t_{jN})}{c_{MAC}}$$

gdje se referentna tetiva  $c_{MAC}$  računa sa formulom:

$$c_{MAC} = \frac{2}{S} \int_0^{y_0} c^2(y) dy$$

---

<sup>8</sup>Koeficijent momenta prikazan u rezultatima je normiran sa iznosom dobivenim iz rješenja za Prandltovo eliptično krilo, nakon smještanja vezanog vrtloga na veliku polos. Takav izbor je pokazao dobro slaganje sa ostalim rezultatima.

## Poglavlje 3.

### Rezultati

Kada se matematički interpretira zadani problem javlja se nužna potreba za korištenjem Čebiševljevih polinoma druge vrste kao aproksimaciju rješenja.

Na slici 3. se može vidjeti da se Čebiševljevi polinomi ponašaju na način da što je veći stupanj polinoma to mu je utjecaj na rješenje manji.

Slijede rezultati za različite geometrijske i aerodinamičke karakteristike.

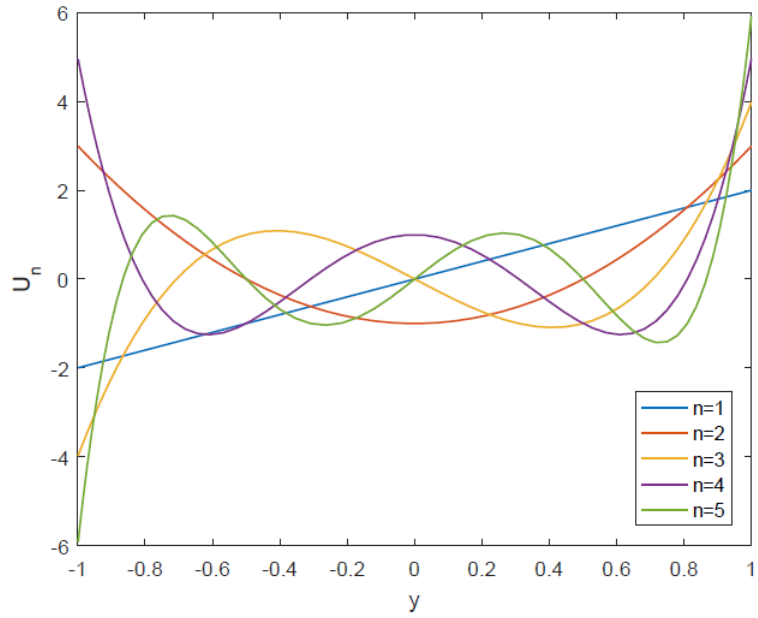
Na slici 3.3 su prikazana tri krila različitih longitudinalnih pomaka. Sva tri krila imaju  $\mathcal{R} = 10$ . Smjer leta je kolinearan sa pozitivnim smjerom osi  $x$ .

Nadalje, prikazan je primjer 3.4 rješenja za  $\Gamma_N$  sa  $N = 64$  za osamnaest konfiguracija eliptičnog krila variranjem  $A \in [-0.7, 1]$  dok su parametri  $n = 2, \alpha = 3^\circ$  i  $\mathcal{R} = 10$  održani konstantni prilikom analize.

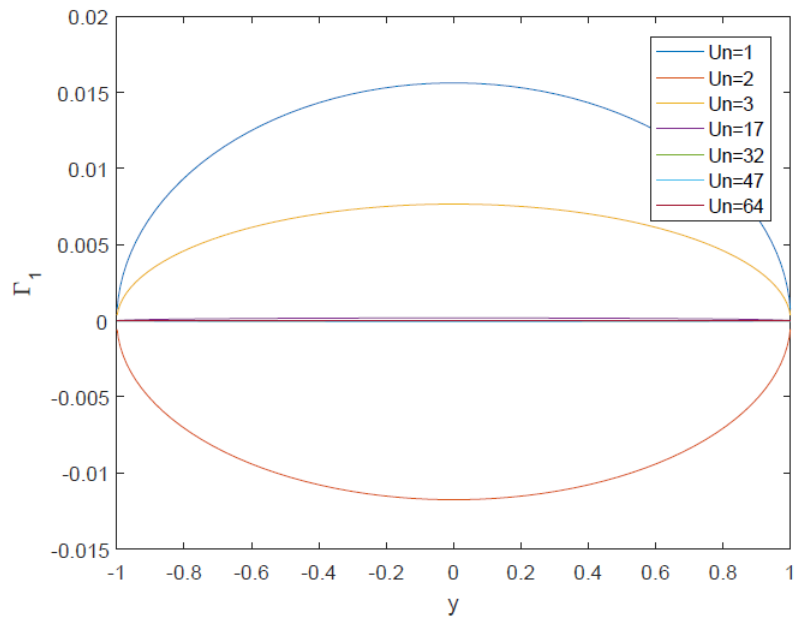
Longitudinalni pomak  $A$  na slici 3.6 je variran u rasponu  $[-0.7, 0.7]$  sa konstantnim  $\mathcal{R} = 10$  i  $\alpha = 3$ . Na grafu se može primjetiti da je i dalje nagib Prandltove raspodjele cirkulacije pri vrhu krila najveći.

Na slici 3.8 je prikazan omjer uzgona predmetne metode i Prandltove noseće linije, za  $\mathcal{R}$ u kojem Prandltova metoda više nije pozdana. Radi usporedbe, prikazani su i rezultati Weissingerove F-metode za pravokutno i Helmboltovo rješenje za eliptično krilo[3].

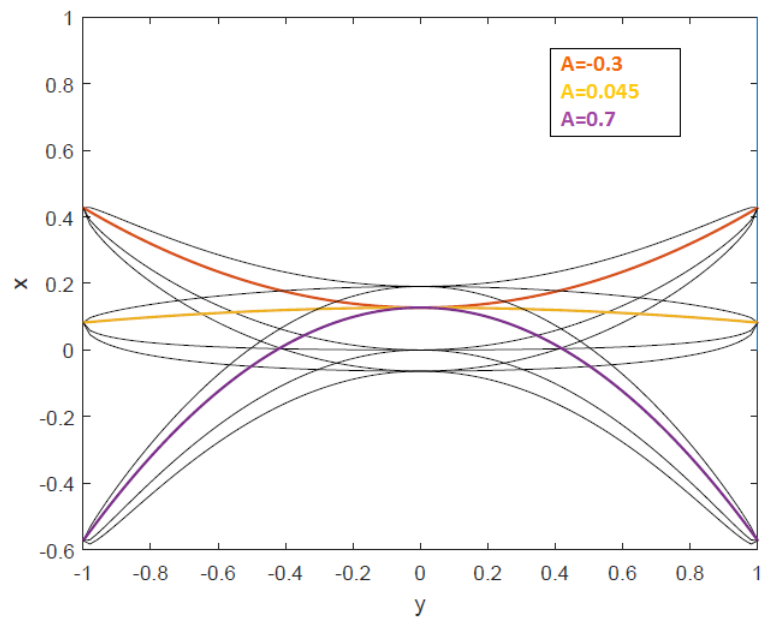
Slike 3.9,3.10,3.11,3.12 i 3.13 prikazuju vrijednosti odgovarajućih aerodinamičkih veličina, u funkciji longitudinalnog pomaka  $A$  i napadnog kuta  $\alpha$  normirane sa odgovarajućom aerodinamičkom veličinom Prandltovog eliptičnog krila u funkciji  $\alpha$ . Na svakoj od slika konture padnu u jednu konturu za svaki napadni kut. Sve slike se odnose na  $\mathcal{R} = 10$ .



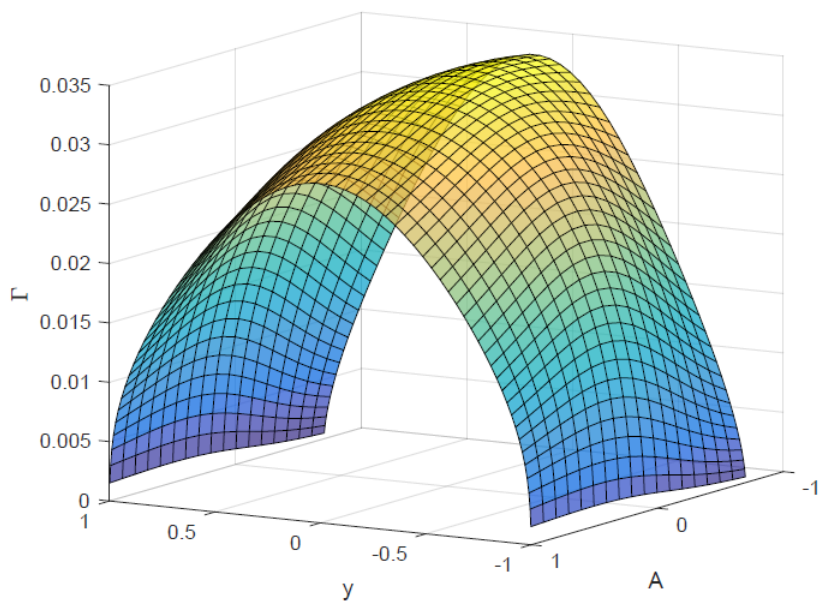
Slika 3.1: Prvih pet Čebiševljevih polinoma druge vrste



Slika 3.2: Utjecaj stupnja Čebiševljevih polinoma na rješenje

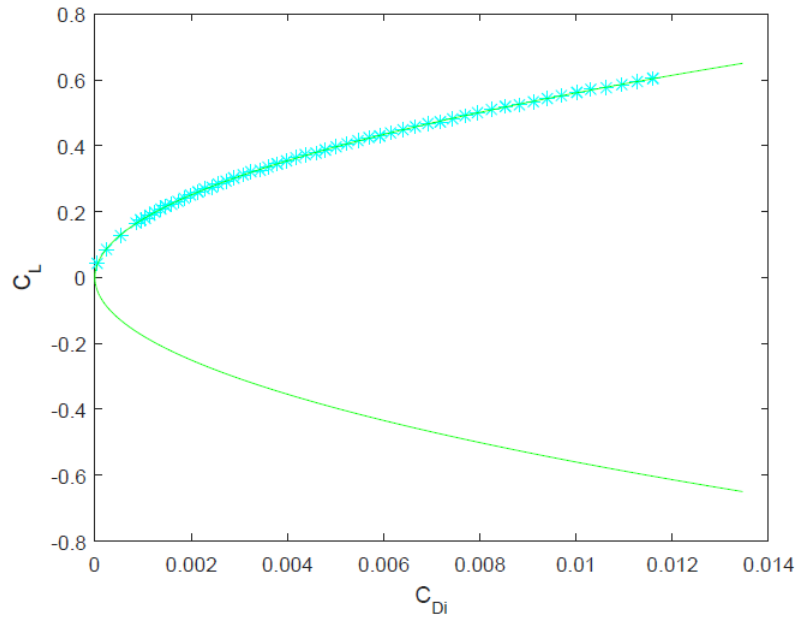


Slika 3.3: Geometrija krila

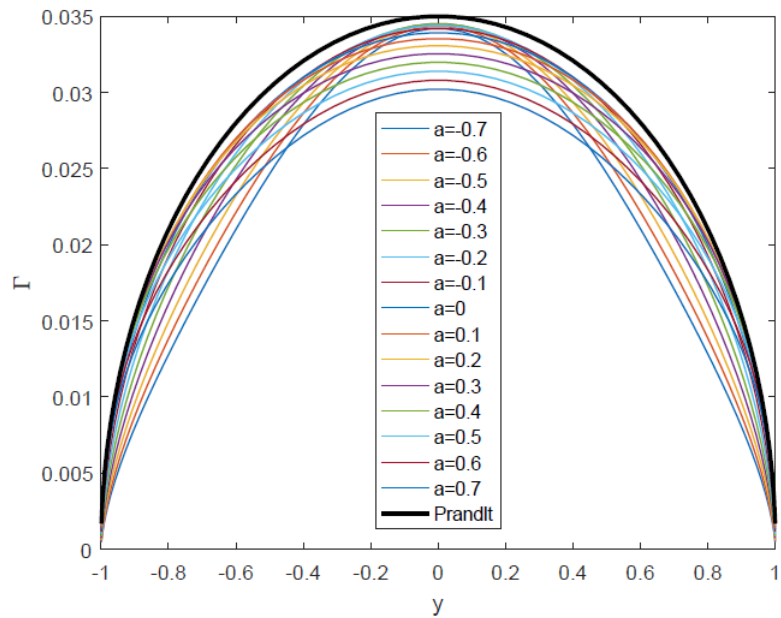


Slika 3.4: Ovisnost cirkulacije po rasponu za longitudinalni pomak vrha krila  $A$

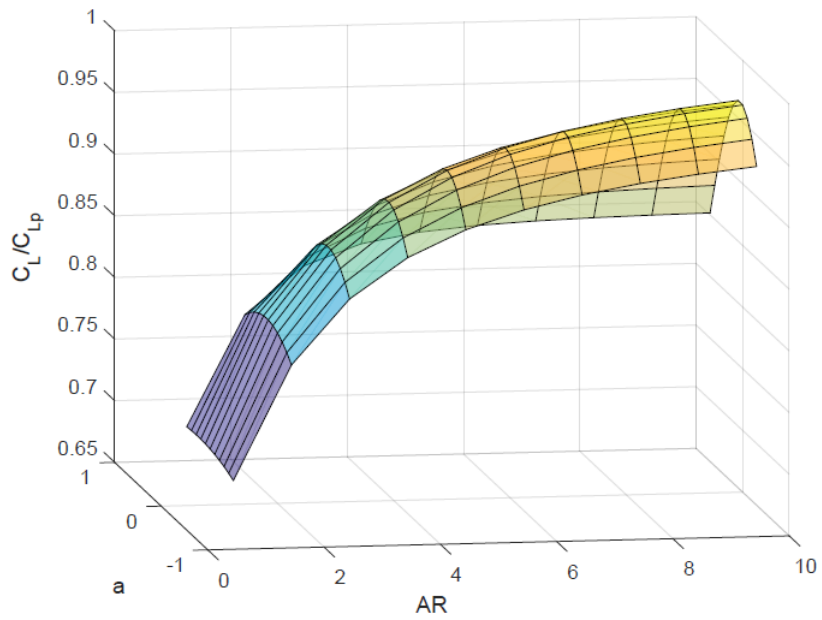




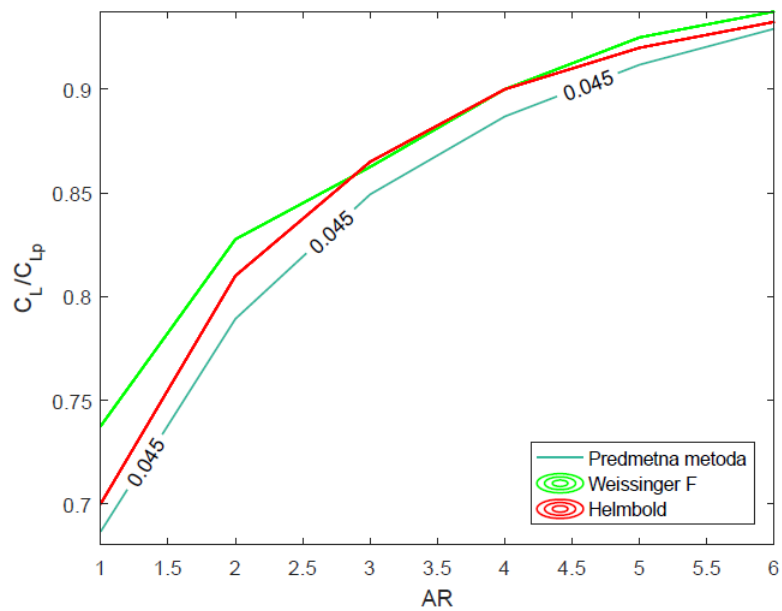
Slika 3.5: *Lilientala krila*



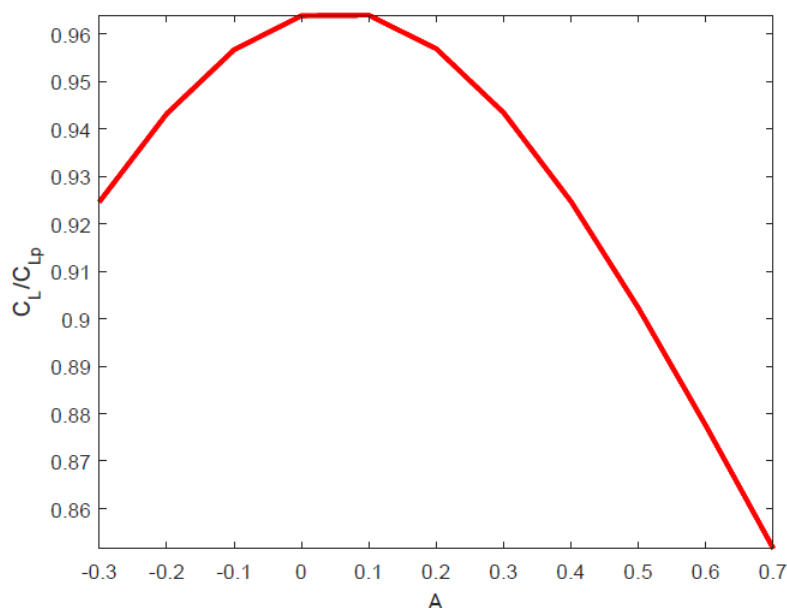
Slika 3.6: *Ovisnost cirkulacije po rasponu za longitudinalni pomak vrha krila A, u usporedbi sa Prandltovim rješenjem za eliptično krilo*



Slika 3.7: Omjer uzgona predmetne metode i Prandltove noseće linije



Slika 3.8: Usporedba uzgona za manje  $AR$



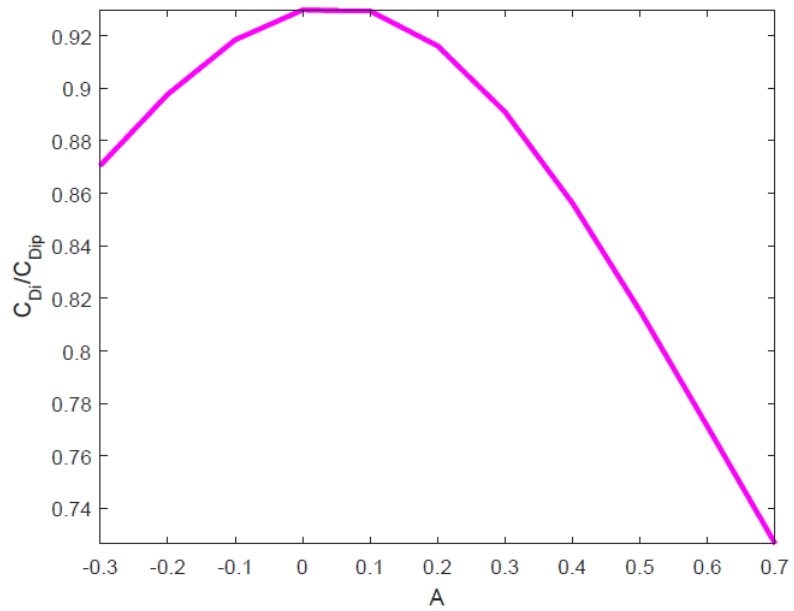
Slika 3.9: *Relativni koeficijent uzgona*

Slike 3.9 i 3.10 prikazuju relativni uzgon i relativni otpor te se sa njih vidi da je rješenje najbližije Prandltovom unutar intervala  $A \in [0, 0.1]$ .

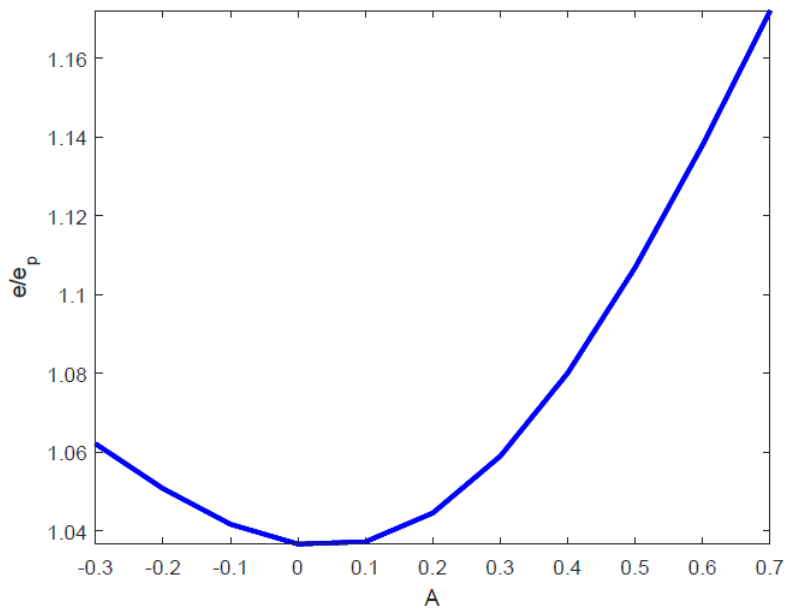
Za potpuniji uvid na slikama 3.11 i 3.12 prikazane su relativna finesa i relativni koeficijent lilitale. Grafovi također impliciraju da je rješenje najbližije Prandltovom u istom intervalu  $A \in [0, 0.1]$ . Na grafu relativne finese se vidi da finesa raste dok se ne trimano krilo longitudinalno deformira, što motivira tražiti povećanje finese odmućući se od intervala u kojoj je finesa najbližija Prandltovom rješenju iste. No, kako se vidi sa grafa 3.13 svako odmicanje od  $A = 0$  stvara moment koji treba trimati. Rezultati prikazani na slici 3.11 upućuju da je najveća finesa trimane letjelice za  $A$  malo ispod nule. Slično, optimalna točka na grafu 3.12 će biti pomaknuta prema nuli za trimanu letjelicu.

Na slici 3.13 prikazan je relativni moment te se vidi da je za  $A = 0$  relativni moment propinjanja oko osi koja leži na jednoj četvrtini korjenske tetive jednak nuli. Nadalje, vidi se da je za relativni moment jednak 1 također unutar intervala  $A \in [0, 0.1]$ . Na slici je relativni moment pozitivan u matematičkom smislu, to jest ima tendenciju podizanja nosa.

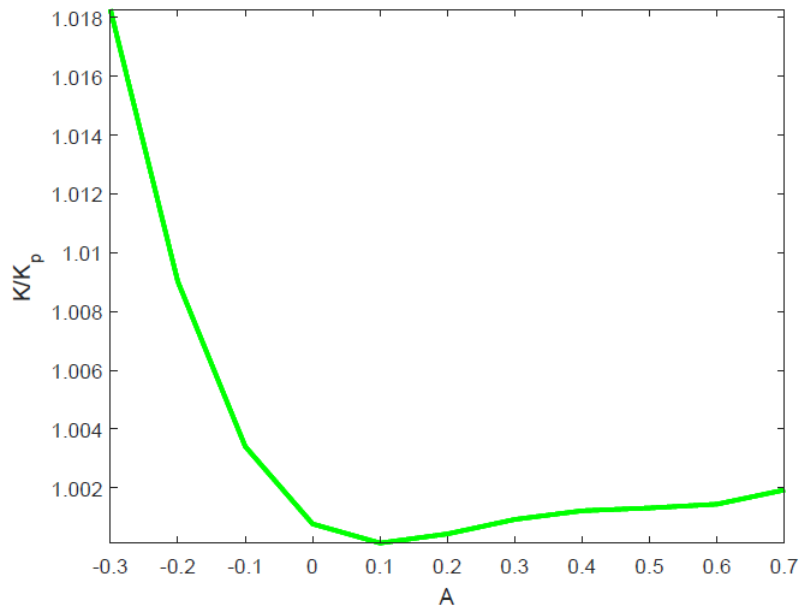
Radi ilustracije izgleda geometrije krila kojemu je longitudinalni pomak unutar spominjanog intervala, slijede slike 3.15 i 3.14.



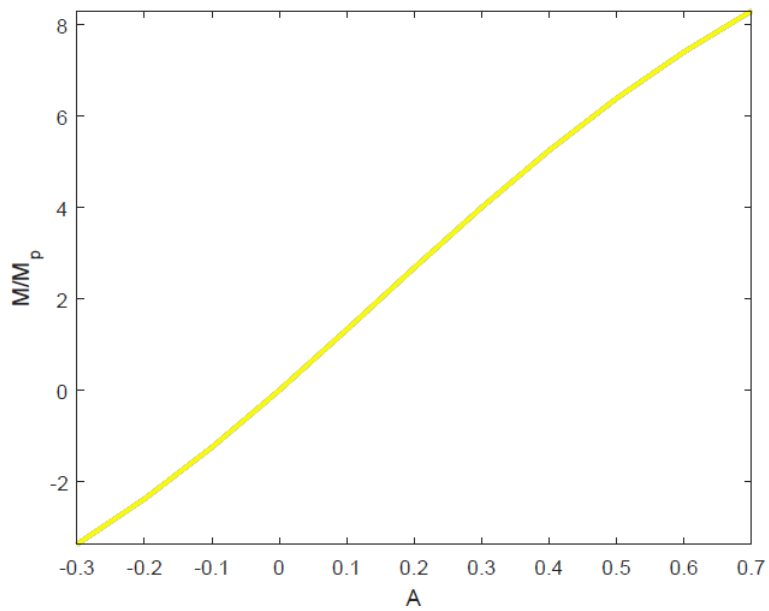
Slika 3.10: *Relativni koeficijent otpora*



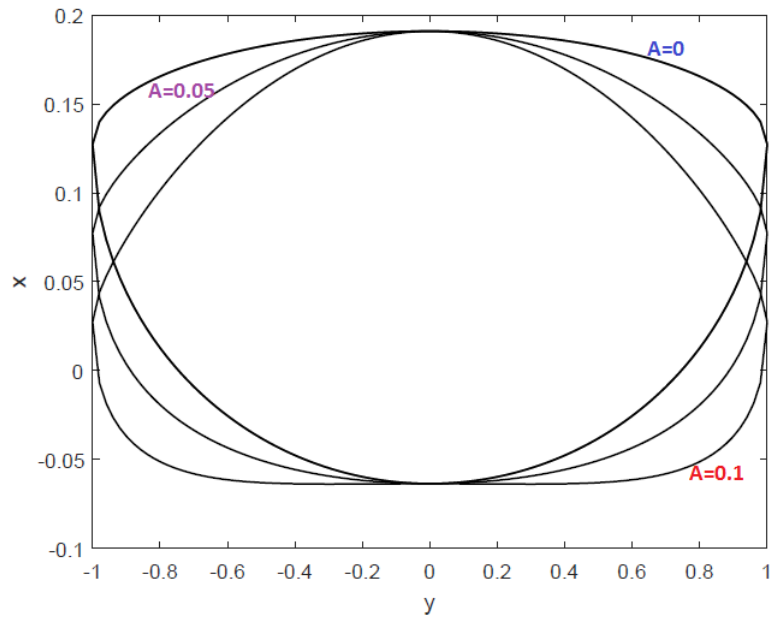
Slika 3.11: *Relativna finesa*



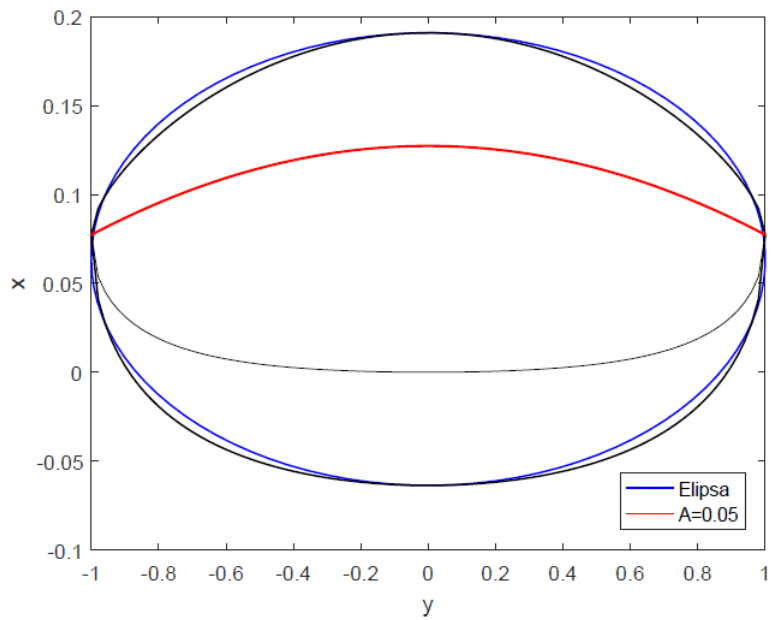
Slika 3.12: *Relativni koeficijent lilitale*



Slika 3.13: *Relativni koeficijent momenta*



Slika 3.14: Tri konfiguracije krila za  $A \in [0, 0.1]$



Slika 3.15: Usporedba matematičke elipse i parametra  $A$  za optimalnu finesu

primjetite, obzirom na definiciju tlocrta krila i  $c_{MAC}$ , za isti  $\mathcal{R}$  i  $y_0$  će  $c_{MAC}$  biti isti za običnu i deformiranu elipsu.

## Poglavlje 4.

# Zaključak

U radu je implementirana metoda analize krila po Prossdorf i Tordelli [1] za planarno krilo generalne srpaste geometije. Metoda je korištena za računanje aerodinamičkih karakteristika eliptičnog krila sa parabolichnom nosećom linijom.

Za promatranu klasu krila metoda daje rezultate najslinije Prandltovom rezultatu za eliptično krilo kada je  $A \in [0, 0.1]$ , odnosno kada je tlocrt krila najsliniji matematičkoj elipsi.

Obzirom da je tehnički motiv rada promatranje leta bez korištenja repa, zanimljivo je područje longitudinalnih pomaka koji stvaraju mali ili ne stvaraju moment uopće. Dakle oko  $A = 0$ . Rezultati sugeriraju da je optimalna finesa za  $A$  blago negativan no, za detaljniji uvid u finesu letjelice model je potrebno modificirati tako da je uzima u obzir trim.



# Literatura

- [1] S. Prossdorf, D. Tordella: *On an extension of Prandtl's lifting line theory to curved wings*, Impact Comp. Sc. Eng, Vol.3, pp. 192-212, 1991.
- [2] L. Prandtl: *Applications of modern hydrodynamics to aeronautics*, Report No.116, Zur. f. Ang. Mat. u. Mech., Berlin, 1923.
- [3] J. Weissinger: *The lift distribution on swept-back wings*, Forsch. Ber. d. Zentr. f. wiss. Berichtswesen 1553, Berlin-Adlershof, 1942.
- [4] W.M. Balduino, G.C.R. Bodstein: *Comparative analysis of the extended lifting-line theory to the classical lifting-line theory for finite wings*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecanica, 2004.
- [5] S.G. Mikhlin, S. Prossdorf: *Singular integral operators*, Springer Verlag, Berlin, New York, Tokyo, 1986.
- [6] F.G. Tricomi: *Integral equations*, Interscience, New York, 1957
- [7] G. Szego: *Ortogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol.23, Ams Providence, R.I., 1957
- [8] J.C. Mason, D.C. Handscomb: *Chebyshev Polynomials*, Chapman Hall-CRC, Boca Raton Florida, 2003.
- [9] S. Singer, Z. Drmač, M. Marušić, S. Singer, V. Hari, M. Rogina: *Numerička matematika*, Predavanja i vježbe, Sveučilište u Zagrebu, PMF Matematički odsjek, Zagreb, 2008.
- [10] M. Johansson: *The Hilbert transform*, Master Thesis, Supervisor: Borje Nilsson, Applied Mathematics Vaxjo University.

- [11] C.P. van Dam: *Induced drag characteristics of crescent moon shaped wings*, Vol.24, Number 2, University of California, Davis, 1987
- [12] M.M. Munk: *The minimum induced drag of airfoils*, NACA Report 121, 1921
- [13] I. Aganović: *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Manualia universitatis studiorum zagrebiensis, Element, Zagreb, 2003
- [14] D. Kuchemann: *Some methods of determining the effect of the boundary layer on the lift slope of straight and swept wings*, R.A.E Tech. Note Aero. 2167. A.R.C. 15245, 1952