

# Metoda vrtložne rešetke za noseću površinu jednostavne geometrije

---

**Mačak, Jelena**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:029629>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Jelena Mačak**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Milan Vrdoljak, dipl. ing.

Student:

Jelena Mačak

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Milanu Vrdoljaku na stručnoj pomoći i savjetima.

Jelena Mačak



|  |
|--|
| Sveučilište u Zagrebu<br>Fakultet strojarstva i brodogradnje |
| Datum 25-02-2016. Prilog                                     |
| Klasa: 602-04/16-6/3   |
| Ur.broj: 15-1703-16-145                                      |

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Jelena Mačak**

Mat. br.: 0035189694

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Metoda vrtložne rešetke za noseću površinu jednostavne geometrije**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Vortex lattice method for the lifting surface with simple geometry**

Opis zadatka:

U modeliranju optjecanja, a time i u aerodinamičkoj analizi, jedan od pristupa je primjena metode singulariteta koja koristi polje brzina vrtloga ili drugih diskretnih elemenata raspodijeljenih u ograničenom području u polju optjecanja, uobičajeno na konturi promatranog objekta. Za slučaj analize noseće površine u potencijalnom optjecanju, metoda noseće linije s diskretizacijom vrtloga po rasponu krila predstavlja najjednostavniji model. Uvođenjem diskretizacije i po tetivi moguće je razmatrati zakrivljeni profil noseće površine. Takva metoda koja koristi diskretizaciju po rasponu i po tetivi noseće površine primjenom vrtloga, odnosno vrtložnih niti naziva se metoda vrtložne rešetke (engl. vortex lattice method).

U završnom radu potrebno je:

- napraviti računalnu implementaciju za metodu vrtložne rešetke u MATLAB-u s ciljem određivanja koeficijenta aerodinamičke sile uzgona;
- usporediti rezultate promatrane metode s metodom noseće linije i drugim dostupnim rezultatima;
- napraviti analizu koeficijenata aerodinamičke sile uzgona za odabranu noseću površinu jednostavne geometrije.

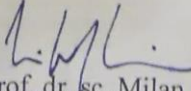
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
25. studenog 2015.

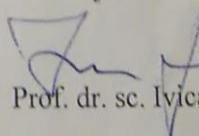
Rok predaje rada:  
**1. rok:** 25. veljače 2016.  
**2. rok (izvanredni):** 20. lipnja 2016.  
**3. rok:** 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 29.2., 02. i 03.03. 2016.  
**2. rok (izvanredni):** 30. 06. 2016.  
**3. rok:** 19., 20. i 21. 09. 2016.

Zadatak zadao:

  
Izv. prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Ivica Smojver

## SADRŽAJ

|   |      |
|---|------|
| SADRŽAJ .....   | I    |
| POPIS SLIKA .....                                       | III  |
| POPIS TABLICA.....                                      | IV   |
| POPIS OZNAKA .....                                      | V    |
| SAŽETAK.....  | VII  |
| SUMMARY .....   | VIII |
| 1. UVOD.....  | 1    |
| 2. TEORIJSKA FORMULACIJA PROBLEMA .....                 | 2    |
| 2.1. Fizikalna slika optjecanja krila .....             | 2    |
| 2.2. Matematička formulacija problema .....             | 3    |
| 2.2.1. Potencijalno strujanje.....                      | 3    |
| 2.2.2. Odabir tipa singularnog rješenja .....           | 4    |
| 2.2.2.1. Biot-Savartov zakon.....                       | 4    |
| 2.2.2.2. Helmholtzovi teoremi .....                     | 5    |
| 2.2.2.3. Teorem Kutta-Žukovski.....                     | 6    |
| 2.2.2.4. Potkovičasti vrtlog .....                      | 6    |
| 2.2.2.5. Prstenasti vrtlog .....                        | 7    |
| 2.2.3. Rubni uvjeti.....                                | 7    |
| 2.2.4. Vrtložni trag .....                              | 8    |
| 2.2.5. Diskretizacija modela.....                       | 9    |
| 3. NUMERIČKI MODELI .....                               | 11   |
| 3.1. Model noseće linije .....                          | 11   |
| 3.2. Metode vrtložne rešetke .....                      | 12   |
| 3.2.1. Diskretizacija geometrije .....                  | 13   |
| 3.2.2. Temeljna jednadžba noseće površine.....          | 13   |
| 3.2.3. Aerodinamički koeficijenti sila.....             | 14   |
| 4. PROGRAM VLM.....                                     | 16   |
| 4.1. Opis programa.....                                 | 16   |
| 4.1.1. Funkcija profil.....                             | 18   |
| 4.1.2. Funkcija crtanje_profil.....                     | 19   |
| 4.1.3. Funkcija geometrija .....                        | 19   |
| 4.1.4. Funkcija crtanje_krilo .....                     | 21   |
| 4.1.5. Funkcije vrtlog1 i vrtlog2 .....                 | 21   |
| 4.1.6. Funkcije BS0, BS1 i BS2.....                     | 21   |
| 4.1.7. Funkcija koef .....                              | 22   |
| 4.2. Validacija programa .....                          | 23   |
| 4.2.1. Usporedba s teorijskim rješenjem .....           | 23   |
| 4.2.2. Usporedba s eksperimentalnim podacima .....      | 24   |
| 4.2.3. Usporedba s programom Tornado .....              | 26   |
| 5. ANALIZA KOEFICIJENTA AERODINAMIČKE SILE UZGONA ..... | 28   |

---

|                   |    |
|-------------------|----|
| 6. ZAKLJUČAK..... | 30 |
| LITERATURA.....   | 31 |

**POPIS SLIKA**

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Slika 1.  | Optjecanje krila, [1].....   | 2  |
| Slika 2.  | Vrtložni trag s vrhova krila, [1].....   | 3  |
| Slika 3.  | Ilustracija Biot-Savartovog zakona, [1].....   | 4  |
| Slika 4.  | Ilustracija Biot-Savartovog zakona za brzinu induciranu uslijed segmenta AB<br>ravne vrtložne niti, [4]..... | 5  |
| Slika 5.  | Potkovičasti vrtlog, [1].....  | 6  |
| Slika 6.  | Prstenasti vrtlog, [2].....  | 7  |
| Slika 7.  | Kutta uvjet na izlaznom rubu krila, [2].....   | 8  |
| Slika 8.  | Različiti oblici vrtložnog traga, [2].....   | 9  |
| Slika 9.  | Primjer diskretizacije površine krila i vrtložnog traga, [2].....  | 10 |
| Slika 10. | Prandtllov klasični model noseće linije, [1].....  | 11 |
| Slika 11. | Modificirani model noseće linije, [2].....   | 12 |
| Slika 12. | Primjer modela vrtložne rešetke s prstenastim vrtlozima, [2].....  | 12 |
| Slika 13. | Primjer odziva funkcije crtanje_ profil, za profil NACA4415.....   | 19 |
| Slika 14. | Primjer izlaza funkcije crtanje_krilo, za zakrivljeno krilo s uvijanjem.....                                 | 21 |
| Slika 15. | Geometrija krila, [4].....   | 23 |
| Slika 16. | Usporedba VLM s eksperimentalnim rezultatima datim u [4].....  | 24 |
| Slika 17. | Konvergencija rezultata za koeficijent sile uzgona krila.....  | 25 |
| Slika 18. | Usporedba rezultata VLM s eksperimentalnim podacima.....   | 25 |
| Slika 20. | Koeficijent opterećenja krila po polurasponu.....  | 28 |
| Slika 21. | Koeficijent opterećenja krila po polurasponu krila.....  | 29 |



**POPIS TABLICA**

|  |    |
|--|----|
| Tablica 1. Pregled pomoćnih funkcija programa VLM .....                              | 16 |
| Tablica 2. Geometrijski ulazni parametri .....                                       | 17 |
| Tablica 3. Ulazni parametri stanja neporemećene struje zraka .....                   | 17 |
| Tablica 4. Ulazni parametri diskretizacije površine .....                            | 17 |
| Tablica 5. Definiranje parametara profila .....                                      | 18 |
| Tablica 6. Usporedba rezultata s Tornadom, za različite oblike vrtložnog traga ..... | 26 |

## POPIS OZNAKA

| Oznaka             | Jedinica          | Opis   |
|--------------------|-------------------|--|
| $a_{i,j}$          | m/s               | uplivni koeficijent                            |
| $AR$               | -                 | vitkost krila                                  |
| $B$                | m                 | raspon krila                                   |
| $C$                | m                 | tetiva krila                                   |
| $C_{Di}$           | -                 | koeficijent induciranog otpora                 |
| $C_L$              | -                 | koeficijent sile uzgona                        |
| $C_{La}$           | -                 | gradijent koeficijenta sile uzgona             |
| $c_{sred}$         | m                 | srednja tetiva                                 |
| $c_r$              | m                 | korjena tetiva                                 |
| $c_t$              | m                 | vršna tetiva                                   |
| $D$                | N                 | sila induciranog otpora                        |
| $i$                | -                 | koordinata po tetivi                           |
| $j$                | -                 | koordinata po polurasponu                      |
| $k$                | -                 | koordinata kontrolne točke                     |
| $l$                | -                 | koordinata vrtloga                             |
| $L$                | N                 | sila uzgona                                    |
| $L'$               | N/m               | sila uzgona u presjeku krila                   |
| $M$                | -                 | broj panela po polurasponu                     |
| $N$                | -                 | broj panela po tetivi                          |
| $\mathbf{n}$       | -                 | vektor normale                                 |
| $q_\infty$         | N/m               | dinamički tlak                                 |
| $\mathbf{r}$       | -                 | radij vektor                                   |
| $s_{i,j}$          | m <sup>2</sup>    | površina panela                                |
| $S_{ref}$          | m <sup>2</sup>    | površina krila                                 |
| $\mathbf{V}$       | m/s               | vektor brzine                                  |
| $\mathbf{v}_{ind}$ | m/s               | vektor inducirane brzine                       |
| $V_\infty$         | m/s               | neporemećena brzina                            |
| $\mathbf{w}$       | m/s               | vektor normalnih komponenti induciranih brzina |
| $x,y,z$            | m                 | osi koordinatnog sustava krila                 |
| $\alpha$           | rad               | napadni kut                                    |
| $\alpha_w$         | rad               | kut uvijanja krila                             |
| $\Gamma$           | m <sup>2</sup> /s | intenzitet vrtloga                             |
| $\mathbf{\Gamma}$  | m <sup>2</sup> /s | vektor intenziteta vrtloga                     |
| $\Delta D$         | N                 | doprinos sili induciranog otpora               |
| $\Delta L$         | N                 | doprinos sili uzgon                            |
| $\Delta p$         | N/m <sup>2</sup>  | razlika tlaka po panelu                        |

---

|               |                   |                                      |
|---------------|-------------------|--------------------------------------|
| $\Delta y$    | m                 | širina panela                        |
| $\delta_k$    | rad               | lokalni nagib zakrivljenosti profila |
| $\Lambda_0$   | rad               | kut strijele napadnog ruba           |
| $\lambda$     | -                 | suženje krila                        |
| $\rho_\infty$ | kg/m <sup>3</sup> | gustoća zraka                        |
| $\Phi$        | m <sup>2</sup> /s | potencijal brzine                    |
| $\phi$        | rad               | kut dihedrala                        |

## SAŽETAK

Cilj ovog završnog rada je određivanje i analiza aerodinamičkih karakteristika noseće površine, primjenom metode vrtložne rešetke. Razvijen je model koji se temelji na distribuciji singularnih vrtložnih elemenata po srednjoj površini zakrivljenosti noseće površine. Na osnovu izloženog modela napisana je računalna implementacija u Matlabu. Program je validiran usporedbom s eksperimentalnim podacima i drugim dostupnim metodama. Testirani su različiti pristupi modeliranja vrtložnog traga te je izvršena analiza njihovog utjecaja na točnost rješenja. Program je primjenjen na analizu koeficijenta uzgona noseće površine jednostavne geometrije.

Ključne riječi: *Metoda vrtložne rešetke, noseća površina, aerodinamički koeficijent uzgona, aerodinamički koeficijent induciranog otpora*

## **SUMMARY**

Main concern of this thesis was to determine and analyze aerodynamic properties of a lifting surface, using vortex lattice method. A model based on singularity distribution over the mean camber surface was developed. The model was implemented in the form of a Matlab code. It was validated by the means of comparison with experimental data and other available methods. Different wake shape geometries were applied in order to test their influence on the overall accuracy of the solution. Finally, the model was used in an analysis of a lifting surface with simple geometry.

*Key words: Vortex lattice method, lifting surface, lift coefficient, induced drag coefficient*

## 1. UVOD

Numerički modeli optjecanja nosećih površina temelje se na diskretnoj raspodjeli vrtloga ili drugih singularnih elemenata po stvarnoj konturi noseće površine ili po nekoj uprosječnoj površini.

Metode vrtložne rešetke (eng. *vortex lattice method*) koriste polje brzina vrtloga smještenih na srednjoj površini zakrivljenosti noseće površine. Na taj način omogućavaju opis različitih geometrijskih konfiguracija noseće površine, s jednim ograničenjem na tanke profile.

Ove metode su izvedene na pretpostavci potencijalnog strujanja. Njihova primjena je stoga ograničena na područje malih brzina i malih napadnih kuteva. Bez obzira na ovo ograničenje, metode vrtložne rešetke predstavljaju koristan alat u aerodinamičkoj analizi, pogotovo u preliminarnim proračunima.

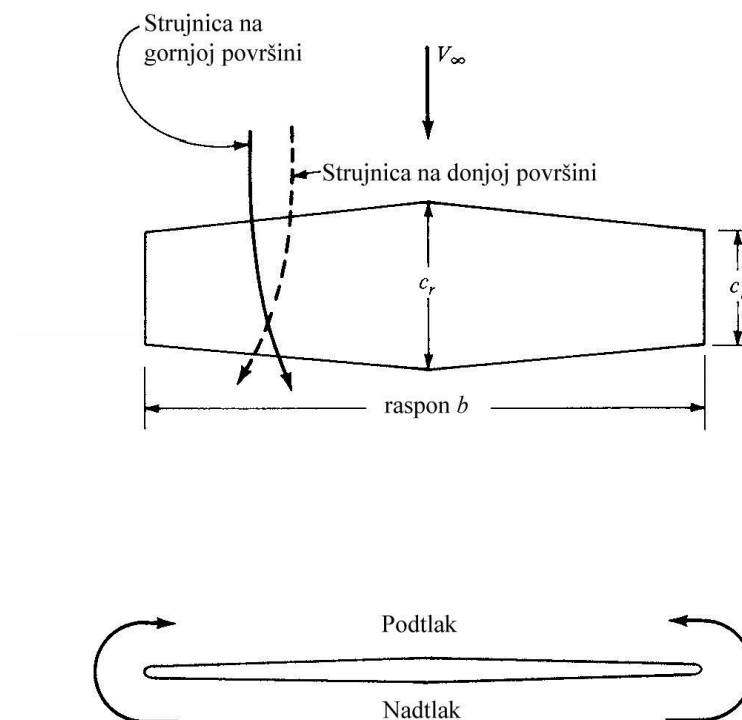
U ovom radu je predstavljena metodologija uspostavljanja numeričkog modela vrtložne rešetke. Na osnovi izloženog modela je napravljena računalna implementacija metode vrtložne rešetke.

Dobiveni rezultati su validirani u tri stupnja: usporedbom s teorijskim rješenjima, usporedbom s eksperimentalnim podacima, te usporedbom s drugim sličnim računalnim programima.

## 2. TEORIJSKA FORMULACIJA PROBLEMA

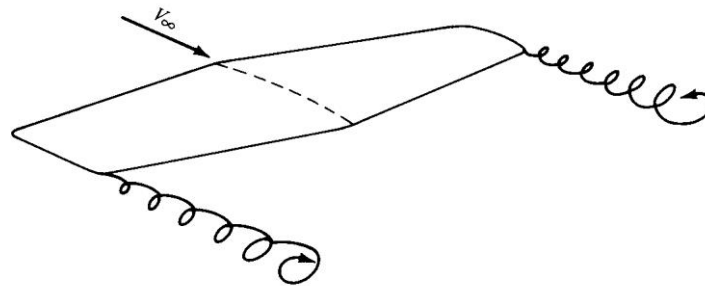
### 2.1. Fizikalna slika optjecanja krila

Sila uzgona na krilu konačnog raspona je ishod tlačne razlike između područja donje i gornje površine krila. Ukoliko se krilo nalazi u optjecanju pod pozitivnim napadnim kutem, na donjoj strani krila se formira nadtlak, a na gornjoj strani podtlak. Ova dva područja se spajaju pri vrhovima krila, gdje tlak ima tendenciju da se uravnoteži. Uravnoteženje tlaka se očituje u obliku prestrujavanja zraka s donje strane na gornju stranu krila, što rezultira komponentom strujanja u smjeru raspona krila. Dakle, na gornjoj strani krila zrak ima bočnu komponentu usmjerenu od vrhova krila ka sredini, što uvjetuje otklon strujnica ka sredini krila, dok na donjoj strani krila zrak ima suprotno usmjerenu bočnu komponentu, te stoga otklon strujnica prema vrhovima krila (prikazano slikom 1). Sukladno, tlačna razlika, a time i raspodjela uzgona po rasponu, raste od nule pri vrhovima krila, do maksimalne vrijednosti na sredini krila.



Slika 1. Optjecanje krila, [1]

Strujanja s gornje i donje strane krila se udružuju na izlaznom rubu. Njihove suprotno usmjerene bočne komponente stvaraju vrtloge raspodijeljene duljinom raspona. Budući da se od vrhova krila ka sredini smanjuje bočna komponenta brzine zraka, vrtlozi također slabe po intenzitetu. Nakon određenog pređenog puta iza krila, ovi vrtlozi se susreću pri vrhovima krila u jedan pozitivni vrtlog na desnoj polovici krila i jedan negativni vrtlog na lijevoj polovici krila, čineći vrtložni trag (vrtložnu plahu) krila. Slikom 2. je prikazano formiranje vrtložnog traga na vrhovima krila.



**Slika 2. Vrtložni trag s vrhova krila, [1]**

Postojanje vrtložnog traga na bitan način utječe na aerodinamiku krila. Svako uvođenje vrtložnosti u strujanju rezultira induciranom brzinom, prema zakonu Biot-Savarta [1]. Vrtložni trag na krilu inducira malu komponentu brzine (eng. *downwash*) usmjerenu okomito na dolje u odnosu na pravac neporemećene brzine zraka. Posljedica ove brzine se ogleda u umanjenju lokalnog napadnog kuta u presjeku krila. To znači da je ukupna sila uzgona na aeroprofilu okomita na lokalnu resultantnu brzinu (zbroj neporemećene i inducirane brzine), odnosno da je nagnuta za iznos inducirane brzine u odnosu na okomicu na brzinu neporemećenog strujanja. Sila uzgona na krilu, dakle, ima dodatnu komponentu u pravcu brzine neporemećenog strujanja, koja se naziva inducirani otpor.

## **2.2. Matematička formulacija problema**

### **2.2.1. Potencijalno strujanje**

Razvoj matematičkog modela za rješavanje problema optjecanja krila se temelji na pretpostavci potencijalnog strujanja. Potencijalno strujanje je svako strujanje kod kojeg se vektorsko polje brzina može prikazati u obliku gradijenta skalarnog potencijala [2]. Fizikalno, to podrazumijeva nestlačivo i neviskozno strujanje. Pretpostavka nestlačivosti je valjana u području duboke subsonike, odnosno pri brzinama strujanja manjim od  $M = 0,3$ . Efekti viskoznosti proizlaze iz utjecaja graničnog sloja koji postaje značajan tek u blizini pojave



sloma uzgona. Stoga, primjena modela potencijalnog strujanja je ograničena na male brzine i male napadne kuteve pri kojima ne dolazi do sloma uzgona.

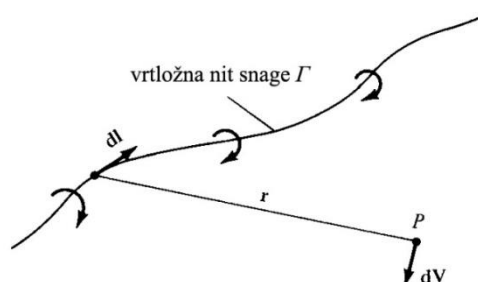
Jednadžba kontinuiteta za potencijalno strujanje prelazi u Laplaceovu jednažbu, a jednažba količine gibanja u Bernoullijevu jednažbu za slučaj stacionarnog strujanja [2]. Linearna priroda vladajućih jednažbi dopušta da se rješenje ukupnog potencijala strujanja nađe u obliku superpozicije elementarnih rješenja, kakva su singulariteti izvora, dipola i vrtloga [2]. To znači da se rješenje svodi na pronalaženje raspodjele takve kombinacije singulariteta koja će imati utjecaj na polje strujanja ekvivalentan unošenju razmatranog krila u neporemećenu struju zraka. Ovi singulariteti se smještaju na ograničenu površinu u polju strujanja, uobičajeno na konturu krila. Kako bi problem bio određen, nužno je postaviti rubne uvjete koje mora zadovoljiti svako od elementarnih rješenja. Prvi rubni uvjet zahtijeva da utjecaj singulariteta trne na beskonačnoj udaljenosti od singulariteta, što je automatski zadovoljeno raspodjelom izvora, dipola ili vrtloga [2].

Drugi rubni uvjet je uvjet nepromočivosti stijenke [2], koji specificira da strujanje mora biti tangencijalno na površinu krila. Zadovoljenjem ovog uvjeta je strujanje u potpunosti opisano.

### 2.2.2. Odabir tipa singularnog rješenja

Separacija utjecaja krila na utjecaje debljine i utjecaje uzgona je izvedena u [2]. Simetrična slika strujanja koja nastaje unošenjem debelog profila u struju zraka se opisuje distribucijom izvora. Utjecaji uzgona uključuju efekte nastale uslijed napadnog kuta i zakrivljenosti profila. Ovi utjecaji daju antisimetričnu sliku strujanja, te su opisani distribucijom dipola ili vrtloga. Vrtložni elementi su specijalan tip singulariteta čije je ponašanje opisano dodatnim teorijskim relacijama – Biot-Savartovim zakonom, Helmholtzovim teoremima, te teoremom Kutta-Žukovski. Diskretizacija modela vrtložnim elementima je tipična za metode vrtložne rešetke.

#### 2.2.2.1. Biot-Savartov zakon



Slika 3. Ilustracija Biot-Savartovog zakona, [1]

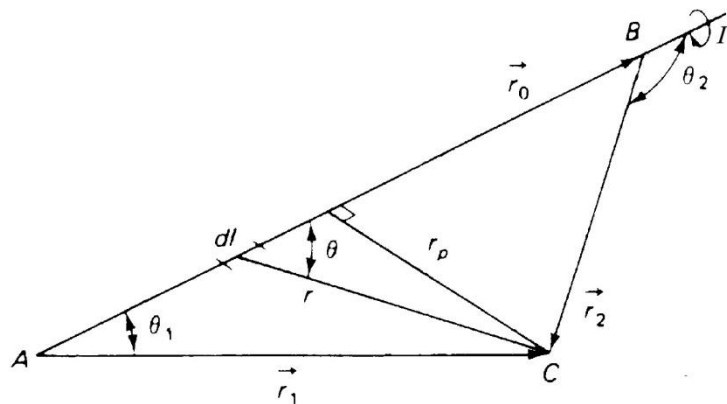
Brzina koju inducira vrtložna nit proizvoljnog oblika (slika 3) u točki na udaljenosti  $r$  od vrtložne niti određena je Biot-Savartovim zakonom (2.1) [1],[2].

$$d\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.1)$$

U aerodinamičkim aplikacijama se koriste varijante ovog zakona izvedene za ravne vrtložne niti polubeskonačne duljine (2.2), te za segmente ravne vrtložne niti konačne duljine (2.3). Ovi izrazi su izvedeni u [3], [2], [4], a nomenklatura izraza (2.3) je prikazana slikom 4.

$$\mathbf{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{r(r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{r}_0 \cdot \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} \right) \quad (2.3)$$



Slika 4. Ilustracija Biot-Savartovog zakona za brzinu induciranu uslijed segmenta AB ravne vrtložne niti, [4]

#### 2.2.2.2. Helmholtzovi teoremi

Ponašanje vrtložnih niti je opisano Helmholtzovim teoremima [1]:

1. Intenzitet vrtložne niti je konstantan njenom duljinom.
2. Vrtložna nit se ne može prekinuti unutar fluida; proteže se ili do granica fluida (koje mogu biti u beskonačnosti) ili formira zatvorenu krivulju.

### 2.2.2.3. Teorem Kutta-Žukovski

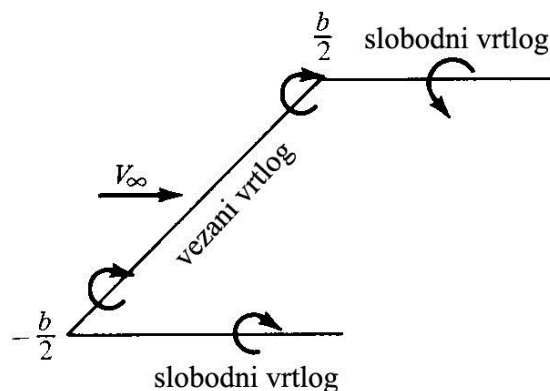
Teorem Kutta-Žukovski (2.4) [1] daje izraz za aerodinamičku silu uzgona, izraženu u jedinici raspona krila, nastalu unošenjem aeroprofila u neporemećenu struju zraka.

$$L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma \quad (2.4)$$

Prema (2.4), lokalna sila uzgona na aeroprofilu,  $L'$ , je proporcionalna lokalnoj cirkulaciji aeroprofila.

### 2.2.2.4. Potkovičasti vrtlog

Najjednostavniji oblik vrtložnog elementa je potkovičasti ( $\pi$ ) vrtlog. U klasičnim primjenama ovaj vrtlog se sastoji od tri segmenta: jednog vezanog vrtloga koji je fiksiran za noseću površinu, te dva slobodna vrtloga koji se protežu nizstrujno vezanog vrtloga do beskonačnosti (slika 5). Vezani vrtlog predstavlja segment vrtložne niti konačne duljine. Cirkulacija uvedena ovim vrtlogom je sredstvo generiranja sile uzgona, po Kutta-Žukovskom (2.4) [1]. Radi zadovoljenja Helmholtzovih teorema, na vezani vrtlog se nastavljaju slobodni vrtlozi jednakog intenziteta cirkulacije, odnosno dvije ravne polubeskonačne vrtložne niti. Slobodni vrtlozi predstavljaju vrtložni trag koji nastaje na vrhovima krila. Brzina inducirana potkovičastim vrtlogom u točki na proizvoljnoj udaljenosti od vrtloga se računa kombinacijom Biot-Savartovih izraza (2.2) i (2.3).



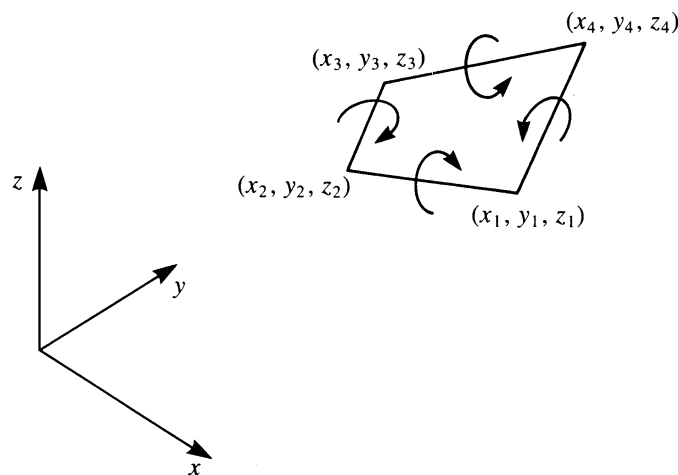
Slika 5. Potkovičasti vrtlog, [1]

Osnovna prednost ovog tipa elementa se ogleda u tome što brzina inducirana u ravnini vrtloga ima samo komponentu u smjeru okomitom na ravninu vrtloga [2], čime se osigurava jednostavnost implementacije u numerički model, te brzina rješenja. Međutim, kako bi se iskoristila ova prednost, oblik krila se mora aproksimirati ravnom pločom, te se rubni uvjeti definiraju u ravnini vrtloga, što umanjuje točnost rješenja.

Modeli koji primjenjuju potkovičaste vrtloge uključuju Prandtlov klasični model noseće linije, modificirani model noseće linije (Weissinger), te klasične metode vrtložne rešetke. Generalizirane metode vrtložne rešetke koriste modificirani model potkovičastih vrtloga, s povećanim brojem segmenata na slobodnim vrtložnim nitima, što omogućuje ostvarenje rubnih uvjeta na zakrivljenim površinama.

#### 2.2.2.5. Prstenasti vrtlog

Generalizaciju potkovičastih vrtloga predstavljaju prstenasti vrtlozi. Ovi vrtlozi se sastoje od četiri segmenta ravne vrtložne niti konačne duljine koji stvaraju zatvorenu krivulju (slika 6). Brzina inducirana prstenastim vrtlogom u točki na proizvoljnoj udaljenosti od vrtloga se računa postavljanjem Biot-Savartovog izraza (2.3) za svaki od četiri segmenta vrtloga, te njihovom sumacijom [2]. Oblik ovih vrtloga omogućuje njihovu raspodjelu po stvarnoj konturi krila, te zadovoljenje rubnih uvjeta na istoj. Međutim, uporaba ovih elemenata zahtijeva modeliranje vrtložnog traga dodatnim brojem elemenata, čime se komplicira formiranje numeričkog modela.



Slika 6. Prstenasti vrtlog, [2]

#### 2.2.3. Rubni uvjeti

Ostvarenjem rubnog uvjeta nepromočivosti stijenke, potencijalno strujanje postaje u potpunosti određeno. U ovisnosti o tome da li je problem analitičke ili konstrukcijske prirode, ovi uvjeti mogu biti Neumannovog ili Dirichletovog tipa [2].

Problem analitičke prirode podrazumijeva određenu geometriju poznate promočivosti za koju je potrebno računati polje tlaka. Ovdje se rubni uvjet ispunjava direktnim određivanjem

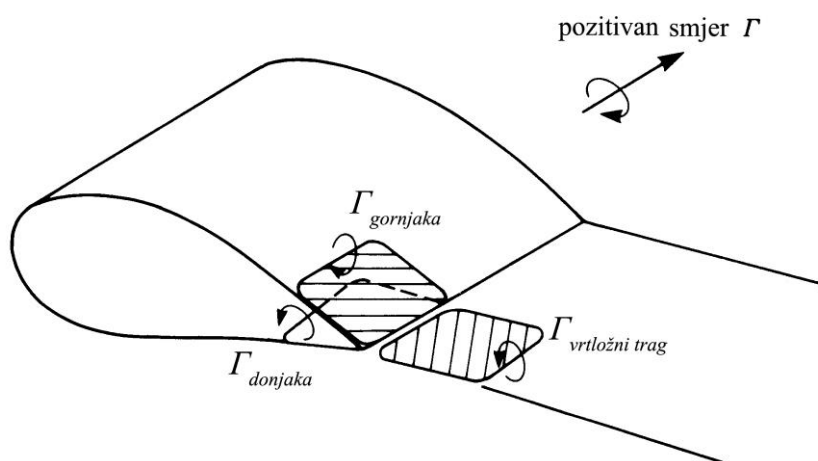
normalne komponente brzine na stijenci. Dakle, specificiran je gradijent potencijala,  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ , svuda po površini. Ovakva formulacija predstavlja Neumannov tip rubnog uvjeta.

Dirichletov tip rubnog uvjeta se koristi u slučaju baratnja konstrukcijskom problematikom. Ovdje se traži geometrijsko rješenje koje će odgovarati unaprijed određenom polju tlaka. Kod ovakvog problema se rubni uvjeti zadovoljavaju određivanjem potencijala brzine,  $\Phi$ , koji će, indirektno, dati strujanje tangencijalno na površinu.

Rubne uvjete je moguće definirati još i na način da se traži takva kombinacija singularnih rješenja kod koje će se resultantne strujne funkcije poklapati sa zadanim oblikom geometrije. Međutim, za modeliranje trodimenzionalnih konfiguracija je postupak ovakvog postavljanja rubnih uvjeta isuviše složen. Stoga, u numeričkim metodama modeliranja optjecanja krila se postavljaju ili Neumannovi ili Dirichletovi rubni uvjeti, ili njihova kombinacija.

#### 2.2.4. Vrtložni trag

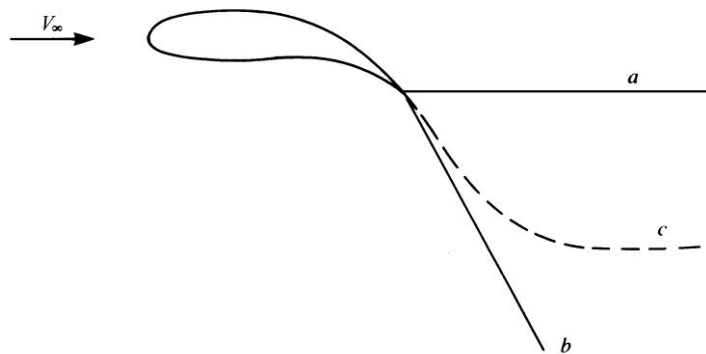
Vrtložni trag predstavlja površinu diskontinuiteta u potencijalnom strujanju koja se aproksimira dipolnim ili vrtložnim singularnim elementima. Budući da vrtložni trag ne leži na površini krila, on ne smije generirati silu u fluidu [2], te se stoga moraju postaviti ograničenja na njegov intenzitet i oblik. Ograničenje intenziteta vrtložnog traga se dobije postavljanjem Kutta uvjeta za dvodimenzionalno strujanje duljinom trodimenzionalnog izlaznog ruba krila [2]. Ovaj uvjet zahtijeva da ukupna cirkulacija na izlaznom rubu krila mora biti jednaka nuli. Dakle, cirkulacija vrtložnog traga po intenzitetu mora biti jednaka cirkulacijama koje dolaze sa gornjake i donjake krila (slika 7).



Slika 7. Kutta uvjet na izlaznom rubu krila, [2]

U linearnoj teoriji vrtložna plahta ostaje ravna potpunom duljinom do beskonačnosti (pravac  $a$  na slici 8). No, u strogim teorijskim razmatranjima slobodni vrtlozi bi trebali, nakon što

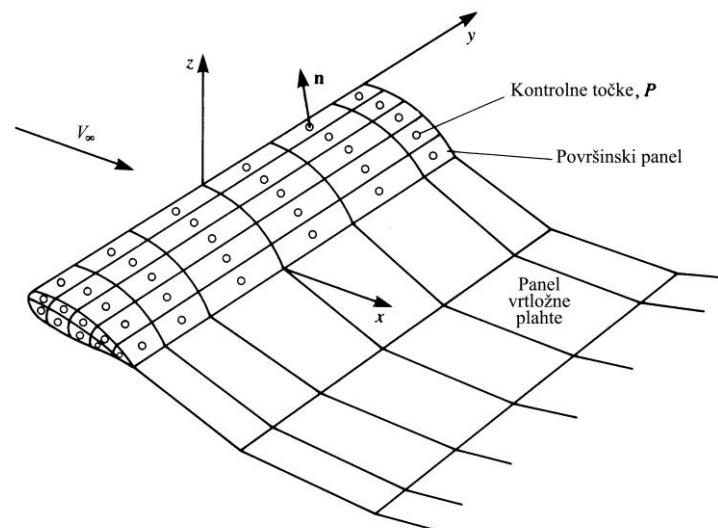
napuste krilo, slijediti zakrivljenu putanju (krivulja  $c$  sa slike 8). Nužan uvjet da slobodni vrtlozi ne generiraju silu u fluidu proizlazi iz izraza za silu uzgona prema Kutta-Žukovskom (2.4) [2]. Prema ovom uvjetu, vrtložna plahta mora biti paralelna lokalnom vektoru brzine. Međutim, budući da je teško predvidjeti mjesto na kojem će se vrtložna plahta ustaliti, često je dovoljno točno pretpostaviti da vrtložna plahta napušta krilo pod srednjim kutem izlaznog ruba (pravac  $b$  na slici 8). Ukoliko se pretpostavljaju mali napadni kutevi, vrtložna plahta se može smatrati paralelnom osi simetrije krila ili pravcu neporemećene brzine.



**Slika 8. Različiti oblici vrtložnog traga, [2]**

### 2.2.5. Diskretizacija modela

Diskretizacija modela se sastoji iz dva dijela: prvi je diskretizacija geometrije, a drugi raspodjela singulariteta. Diskretizacija geometrije se svodi na postavljanje mreže četverostranih elemenata (panela) po stvarnoj površini krila ili po nekoj srednjoj površini, te vrtložnom tragu. Dobro diskretizirana geometrija bi trebala konvergirati ka točnom rješenju povećavanjem gustoće mreže. Najjednostavniji od ovih elemenata ima ravne stranice i predstavlja aproksimaciju prvog reda. Aproksimacija drugog reda podrazumijeva panel sa stranicama zakrivljenim na način da prate zakon parabole. Najkompleksniji modeli koriste aproksimaciju trećeg reda, odnosno panele sa stranicama koje prate zakon polinoma trećeg reda. Primjer diskretizacije geometrije i vrtložnog traga prikazan je slikom 9.



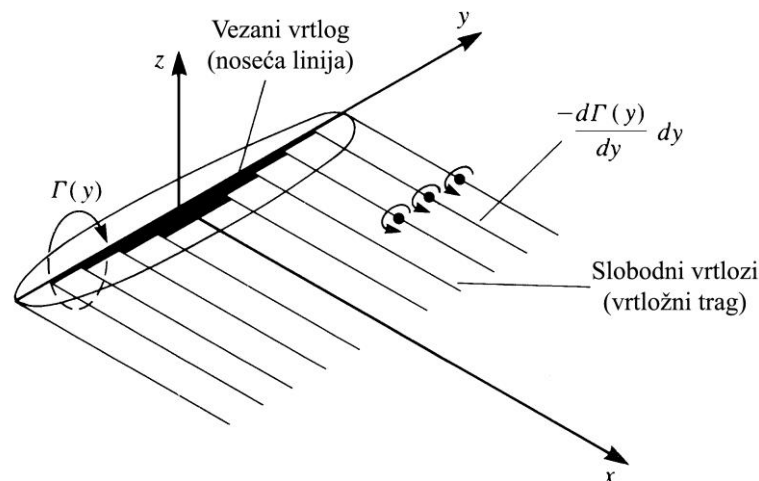
**Slika 9.** Primjer diskretizacije površine krila i vrtložnog traga, [2]

Nakon što se definira mreža, svakom panelu se pridružuje singularitet ili kombinacija singulariteta. Između singulariteta se postavljaju funkcijske ovisnosti, tako da njihov intenzitet može biti konstantan po panelu (aproksimacija nultog reda), može se mijenjati po linearnom zakonu (aproksimacija prvog reda) ili može pratiti zakon parabole (aproksimacija drugog reda).

### 3. NUMERIČKI MODELI

#### 3.1. Model noseće linije

Najjednostavniji model za proračun aerodinamičkih svojstava krila je Prandtlov klasični model noseće linije, opisan u [1], [3] (slika 10). Ovdje je krilo aproksimirano superpozicijom potkovičastih vrtloga, čiji su vezani vrtlozi smješteni na pravac prve četvrtine tetiva krila. Slobodni vrtlozi dolaze iz beskonačnosti na lijevo polukrilo, skreću u vezani vrtlog, te na desnom polukrilu ponovo napuštaju krilo protežući se do beskonačnosti. Ovaj model je izveden pod pretpostavkom malih poremećaja i malih napadnih kuteva. Dodatne restrikcije su date na geometriju krila – primjena je ograničena na vitka, nezakrivljena krila, čije je geometrijsko mjesto prve četvrtine tetiva pravac.

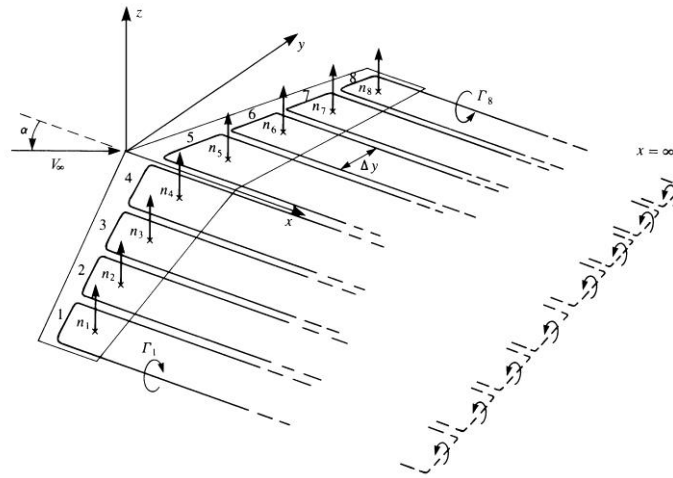


Slika 10. Prandtlov klasični model noseće linije, [1]

Modificirani model noseće linije, odnosno Weissingerov model, je opisan u [2], [3]. Prednost u odnosu na Prandtlov model se ogleda u mogućnosti primjene na krila sa strijelom prve četvrtine tetiva. U ovom slučaju se planforma krila diskretizira po rasponu na  $N$  panela, na čije se strijele prve četvrtine tetiva postavljaju vezani vrtlozi (slika 11). Na vezane vrtloge se nastavljaju po dva slobodna vrtloga, koji modeliraju vrtložni trag krila. Zadovoljenje rubnih uvjeta se ostvaruje u kontrolnim točkama, smještenim na udaljenost treće četvrtine tetive panela, u sredini, između slobodnih vrtloga. Konvencija postavljanja vezanog vrtloga i kontrolne točke u odnosu  $1/4 - 3/4$  tetive, dolazi iz dvodimenzionalnog optjecanja ravne ploče i izvedena je u [4]. Modificirani model noseće linije aproksimira nezakrivljena krila, velike



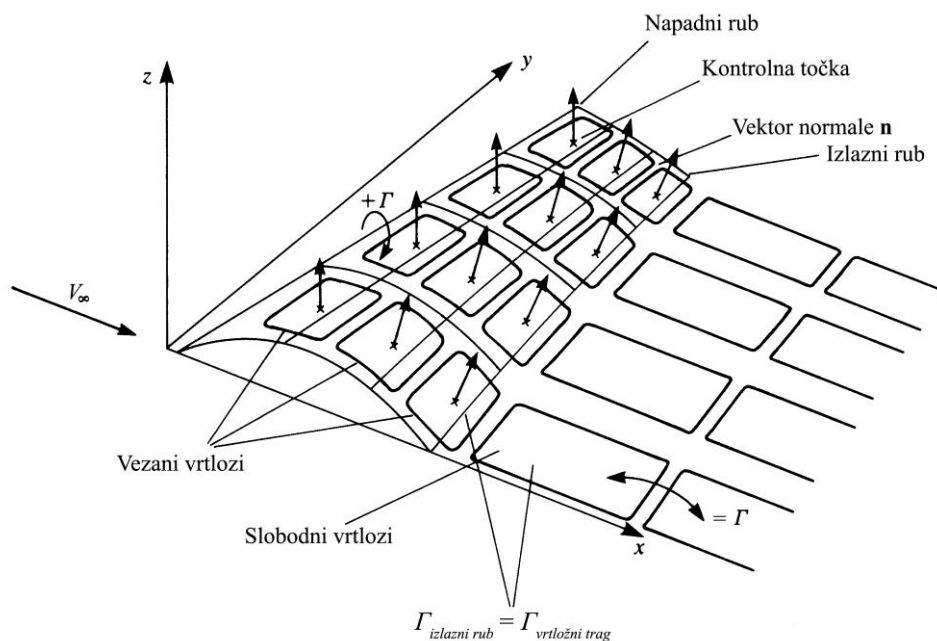
vitkosti, u području linearne aerodinamike, tj. uz pretpostavke malih poremećaja i malih napadnih kuteva.



Slika 11. Modificirani model noseće linije, [2]

### 3.2. Metode vrtložne rešetke

U modelima noseće linije krilo je aproksimirano jednom linijom koja je nositelj njegovih uzgonskih karakteristika. Ova simplifikacija geometrije daje zadovoljavajuće rezultate za tanke, nezakrivljene profile. Krila sa zakrivljenim profilima moguće je razmatrati tek ako se u numeričkom modelu diskretizacija vrši i po rasponu i po tetivi. Na taj način se dolazi kompleksnijeg modela, gdje je krilo aproksimirano površinom. Ukoliko su na toj površini distribuirani vrtložni singularni elementi, govori se o metodama vrtložne rešetke (slika 12).



Slika 12. Primjer modela vrtložne rešetke s prstenastim vrtlozima, [2]

Postoje dva osnovna pristupa metodama vrtložne rešetke: klasični, koji diskretizira planformu krila, čime je ograničen na male napadne kuteve, te generalizirani, koji diskretizira srednju površinu zakrivljenosti krila. Rubni uvjeti se u oba slučaja ostvaruju na srednjoj površini zakrivljenosti krila.

U nastavku je opisan numerički model za primjer generalizirane metode vrtložne rešetke, koji koristi modificirane potkovičaste vrtloge kao singularne elemente. Sve jednačbe poglavlja 3 su izvedene iz [2].

### 3.2.1. Diskretizacija geometrije

Model je diskretiziran sa  $N$  segmenata po tetivi, i  $M$  segmenata po polurasponu. Na taj način je srednja površina zakrivljenosti krila aproksimirana sa  $N \times M$  četverostranih panela. Na prvu četvrtinu lokalnih strijela panela se postavljaju vezani vrtlozi. Slobodni vrtlozi prate oblik zakrivljenosti profila, prelazeći preko panela do izlaznog ruba krila, gdje se dalje protežu do beskonačnosti. Broj segmenata slobodnih vrtloga ovisi o udaljenosti panela od izlaznog ruba krila. Kontrolne točke se smještaju na srednju površinu zakrivljenosti krila, na udaljenost treće četvrtine lokalne tetive panela, na sredinu između slobodnih vrtložnih niti. Na taj način je definirano  $N \times M$  vrtloga nepoznatih intenziteta i  $N \times M$  kontrolnih točaka u kojima će se specificirati Neumannovi rubni uvjeti.

### 3.2.2. Temeljna jednačba noseće površine

Normalna komponenta inducirane brzine u  $k$ -toj kontrolnoj točki, od strane  $l$ -tog vrtloga je određena izrazom (3.1):

$$w_{k,l} = a_{k,l} \Gamma_l. \quad (3.1)$$

Veličina  $a_{k,l}$  predstavlja uplivni koeficijent  $l$ -tog vrtloga na  $k$ -tu kontrolnu točku. Definiran je izrazom (3.2):

$$a_{k,l} = \mathbf{v}_{\text{ind}_{k,l}} \cdot \mathbf{n}_k. \quad (3.2)$$

Vektor  $\mathbf{v}_{\text{ind}_{k,l}}$  se dobije sumiranjem vrijednosti dobivenih postavljanjem Biot-Savartovog izraza (2.2) ili (2.3) na svaki od pripadajućih segmenata  $l$ -tog vrtloga za jedinični intenzitet vrtloga. Ovaj vektor ovisi o duljinama i broju segmenata  $l$ -tog vrtloga, te o njegovoj udaljenosti od  $k$ -te kontrolne točke.

Vektor  $\mathbf{n}_k$  predstavlja normalu u  $k$ -toj kontrolnoj točki, i definiran je izrazom (3.3):

$$\mathbf{n}_k = [-\sin \delta_k \cos \phi, -\sin \phi, \cos \delta_k \cos \phi]^T. \quad (3.3)$$

Ukupna normalna komponenta inducirane brzine u  $k$ -toj kontrolnoj točki, dobije se sumacijom izraza (3.1) za vrtloge sa svih panela (3.4):

$$w_k = \sum_{l=1}^{M \times N} a_{k,l} \Gamma_l. \quad (3.4)$$

Radi zadovoljenja rubnih uvjeta, desna strana jednadžbe (3.4) se izjednačava s negativnom vrijednošću normalne komponente neporemećene brzine (definirane izrazom (3.6)).

$$\sum_{l=1}^{M \times N} a_{k,l} \Gamma_l = -V_{\infty k} \quad (3.5)$$

$$V_{\infty k} = [V_{\infty} \cos \alpha_k, 0, V_{\infty} \sin \alpha_k] \cdot \mathbf{n}_k \quad (3.6)$$

Raspisivanjem izraza (3.5) za svaku od  $k=1 \dots N \times M$  kontrolnih točaka, dobije se sustav od  $N \times M$  linearnih algebarskih jednadžbi, sa  $N \times M$  nepoznatih intenziteta vrtloga. U matricnom obliku, ovaj sustav predstavlja temeljnu jednadžbu noseće površine (3.7), čijim je rješavanjem strujanje potpuno određeno:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,N \times M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,N \times M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N \times M,1} & a_{N \times M,2} & \dots & a_{N \times M,N \times M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{N \times M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{\infty 1} \\ -V_{\infty 2} \\ \vdots \\ -V_{\infty N \times M} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

### 3.2.3. Aerodinamički koeficijenti sila

Uz poznate intenzitete vrtloga, doprinosi silama uzgona i induciranog otpora se računaju prema izrazima (3.8) i (3.9).

$$\Delta L_{i,j} = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_{i,j} \Delta y_{i,j} \quad (3.8)$$

$$\Delta D_{i,j} = \rho_{\infty} w_{ind\ i,j} \Gamma_{i,j} \Delta y_{i,j} \quad (3.9)$$

Ovdje se indeks  $i$  odnosi na broj panela po tetivi, a indeks  $j$  na broj panela po polurasponu. Brzina  $w_{ind\ i,j}$  u izrazu za doprinos sili induciranog otpora  $\Delta D_{i,j}$ , označava  $z$  komponentu vektora ukupne inducirane brzine na sredini vezanih vrtloga. Oznaka  $\Delta y_{i,j}$  predstavlja duljinu panela u smjeru raspona krila.

Ukupne sile uzgona i induciranog otpora se dobijaju sumiranjem izraza (3.8) i (3.9) po tetivi i po rasponu, čime se dolazi do izraza (3.10) i (3.11).

$$L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \Delta L_{i,j} \quad (3.10)$$

$$D = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \Delta D_{i,j} \quad (3.11)$$

Koeficijenti uzgona i otpora slijede iz dijeljenja izraza (3.10) i (3.11) sa referentnom silom.

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S_{ref}} \quad (3.12)$$

$$C_{Di} = \frac{D}{q_\infty S_{ref}} \quad (3.13)$$

Koeficijent induciranog otpora ima indeks  $i$  kako bi se naglasilo da se radi o induciranom otporu. Budući da ne uzimaju u obzir sile trenja, metode vrtložne rešetke ne mogu izračunati ukupni otpor krila. Ovdje je dinamički tlak  $q_\infty$  definiran prema (3.14).

$$q_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} \quad (3.14)$$

Na kraju, moguće je izračunati i razliku tlakova na panelima (3.15).

$$\Delta p_{i,j} = \frac{L_{i,j}}{s_{i,j}} \quad (3.15)$$

Oznaka  $s_{i,j}$  se odnosi na površinu panela.

## 4. PROGRAM VLM

### 4.1. Opis programa

U svrhu određivanja aerodinamičkih koeficijenata uzgona i induciranog otpora na krilu konačnog raspona, napravljena je računalna implementacija generalizirane metode vrtložne rešetke, program VLM.

Program VLM je skripta napisana u Matlabu, u kojoj se definiraju ulazni podaci, te čijim se pokretanjem dobiva izlaz u vidu aerodinamičkih sila i koeficijenata krila. Za program je definiran niz pomoćnih funkcija, čiji je pregled dat u tablici 1.

**Tablica 1. Pregled pomoćnih funkcija programa VLM**

| Ime funkcije     | Opis funkcije  |
|------------------|--|
| BS0.m            | Računa komponente brzine inducirane uslijed vezanog vrtloga jediničnog intenziteta.  |
| BS1.m            | Računa komponente brzine inducirane uslijed segmenta vrtložne niti konačne duljine, jediničnog intenziteta.  |
| BS2.m            | Računa komponente brzine inducirane uslijed segmenta polubeskonačne vrtložne niti jediničnog intenziteta.  |
| crtanje_krilo.m  | Daje grafički prikaz panela na krilu, vrtložnih elemenata, te kontrolnih točaka s pripadajućim normalama.  |
| crtanje_profil.m | Daje grafički prikaz aeroprofila s koordinatama početnih i krajnjih točaka panela, koordinatama kontrolnih točaka, te normala na kontrolnim točkama. |
| geometrija.m     | Diskretizira geometriju, te raspodjeljuje vrtložne elemente.   |
| koef.m           | Računa aerodinamičke sile i koeficijente.  |
| profil.m         | Određuje koordinate na srednjoj liniji zakrivljenosti profila.   |
| vrtlog1.m        | Računa intenzitete vrtloga.  |
| vrtlog2.m        | Računa komponente inducirane brzine u točkama na sredinama vezanih vrtloga.  |

Programom VLM je moguće opisati različite noseće površine, uključujući zakrivljena krila, dihedral, strijelu, te uvijanje krila. Metodologija je razvijena na osnovi modela opisanog u poglavlju 3.2.

Ulazni podaci programa VLM su grupirani na geometrijske parametre, parametre strujanja, te parametre diskretizacije. Prikazani su u tablicama 2-4.

**Tablica 2. Geometrijski ulazni parametri**

| Oznaka  | Opis  |
|---------|---|
| $m, p$  | Parametri vezani uz zakrivljenost profila, opisani u poglavlju 4.1.1. |
| $AR$    | Vitkost krila   |
| $TR$    | Suženje krila   |
| $LO$    | Strijela napadnog ruba, [rad]   |
| $FI$    | Kut dihedrala, [rad]  |
| $alfaw$ | Kut uvijanja, [rad]   |
| $S$     | Referentna površina krila, [m <sup>2</sup> ]                          |

**Tablica 3. Ulazni parametri stanja neporemećene struje zraka**

| Oznaka | Opis                                    |
|--------|---|
| $V$    | Brzina neporemećene struje zraka, [m/s] |
| $alfa$ | Napadni kut, [rad]                      |
| $ro$   | Gustoća zraka                           |

**Tablica 4. Ulazni parametri diskretizacije površine**

| Oznaka | Opis                                 |
|--------|--------------------------------------|
| $N$    | Broj panela po tetivi krila          |
| $M$    | Broj panela po polurasponu krila     |
| $trag$ | Specifikacija pravca vrtložnog traga |

#### 4.1.1. Funkcija profil

Profil je pomoćna funkcija funkcije geometrija. Njen osnovni zadatak je računanje bezdimenzijskih koordinata srednje linije zakrivljenosti profila. Radi za tri vrste profila: simetrične profile, NACA profile s oznakom od četiri znamenke, te NACA profile s oznakom od pet znamenki.

Odabir profila se vrši putem parametara  $m$  i  $p$ , koji predstavljaju redom najveću zakrivljenost profila i mjesto najveće zakrivljenosti profila. Način definiranja ovih parametara je prikazan tablicom 5.

**Tablica 5. Definiranje parametara profila**

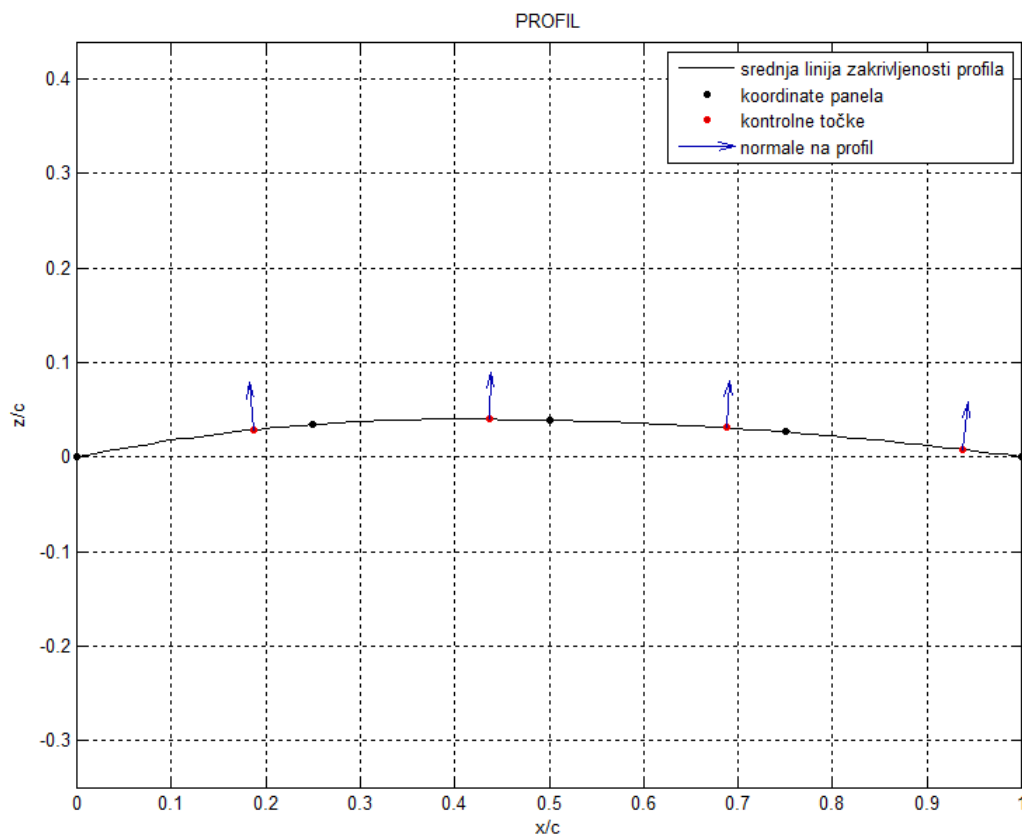
| Parametar | Simetrični profil | NACA4                  | NACA5                        |
|-----------|-------------------|------------------------|------------------------------|
| $m$       | 0                 | Prva znamenka profila  | 0                            |
| $p$       | 0                 | Druga znamenka profila | Druge dvije znamenke profila |

Nakon što su definirani ulazni parametri, funkcija profil računa koordinate kontrolnih točaka i vršnih točaka panela, izražene po duljini tetive. Ove koordinate se računaju pomoću funkcijskih ovisnosti srednje linije zakrivljenosti profila, opisanih u [5]. Dodatno, funkcija profil računa kuteve nagiba srednje linije zakrivljenosti u kontrolnim točkama, derivacijom funkcijskih ovisnosti iz [5].

Kao izlaz, funkcija profil daje strukturu **C\_c**, koja se sastoji od matrice **x**, sa  $x$  i  $z$  koordinatama vršnih točaka panela izraženih u jedinici duljine tetive, matrice **xk**, sa  $x$  i  $z$  koordinatama kontrolnih točaka izraženih u jedinici duljine tetive, te od vektora **delta**, koji sadrži lokalne kuteve nagiba srednje linije zakrivljenosti u kontrolnim točkama.

### 4.1.2. Funkcija crtanje\_profil

Izlaz funkcije profil je grafički prikazan funkcijom crtanje\_profil (slika 13).



Slika 13. Primjer odziva funkcije crtanje\_profil, za profil NACA4415

### 4.1.3. Funkcija geometrija

Ulazni parametri funkcije geometrija su prikazani tablicama 2. i 4. Ova funkcija najprije na osnovi ulaznih podataka određuje osnovne parametre krila, poput raspona i lokalnih tetiva krila. Korištenjem izlaza funkcije profil, strukture  $C_c$ , potom određuje koordinate vršnih točaka panela, površine panela, koordinate vezanih vrtloga, koordinate kontrolnih točaka, normale na kontrolne točke, te koordinate točaka na sredinama vezanih vrtloga, u kojima će se kasnije računati inducirana brzina potrebna za koeficijent inducirano otpora. Radi pretpostavke simetrije krila, računaju se koordinate samo za desno polukrilo. Utjecaj lijevog polukrila se kasnije modelira u funkcijama vrtlog1 i vrtlog2, budući da one automatski računaju i efekte nastale uslijed vrtloga sa suprotne strane.

Koordinate su definirane najprije uvođenjem strijele i dihedrala krila (4.1), a potom rotacijom oko napadnog ruba za lokalni kut uvijanja krila (4.2).



$$\begin{aligned}
Y_{i,j} &= \frac{(j-1) \cdot b}{M} \cdot \frac{b}{2} \\
X'_{i,j} &= x_i \cdot c_j + Y_{i,j} \tan \Lambda_0 \\
Z'_{i,j} &= z_i \cdot c_j + Y_{i,j} \tan \phi
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{bmatrix} X_{i,j} \\ Z_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{\Lambda_0} \\ Z_{\Lambda_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha_{wj} & -\sin \alpha_{wj} \\ \sin \alpha_{wj} & \cos \alpha_{wj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{i,j} - X_{\Lambda_0} \\ Z'_{i,j} - Z_{\Lambda_0} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Ovdje  $i = 1 \dots N$  označava koordinatu po tetivi, a  $j = 1 \dots M$  označava koordinatu po polurasponu. Oznake  $X_{i,j}$ ,  $Y_{i,j}$  i  $Z_{i,j}$  se odnose na koordinate određene lokacijom po tetivi i rasponu. Indeks ' označava koordinate prije nego što je na njih primijenjena rotacija. Oznake  $x_i$  i  $z_i$  predstavljaju bezdimenzijske koordinate, normirane s duljinom tetive, određene lokacijom na tetivi. Lokalna tetiva po rasponu ima oznaku  $c_j$ . Veličine vezane uz napadni rub imaju indeks  $\Lambda_0$ . Kut  $\alpha_{wj}$  označava lokalni kut uvijanja krila, definiran je izrazom (4.3) [3].

$$\alpha_{wj} = Y_{i,j} \cdot \frac{2\alpha_w}{b} \tag{4.3}$$

Normale u kontrolnim točkama su definirane izrazom (4.4):

$$\begin{bmatrix} n_{x_{i,j}} \\ n_{y_{i,j}} \\ n_{z_{i,j}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{wj} & 0 & -\sin \alpha_{wj} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_{wj} & 0 & \cos \alpha_{wj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \delta_i \cos \phi \\ -\sin \phi \\ \cos \delta_i \cos \phi \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

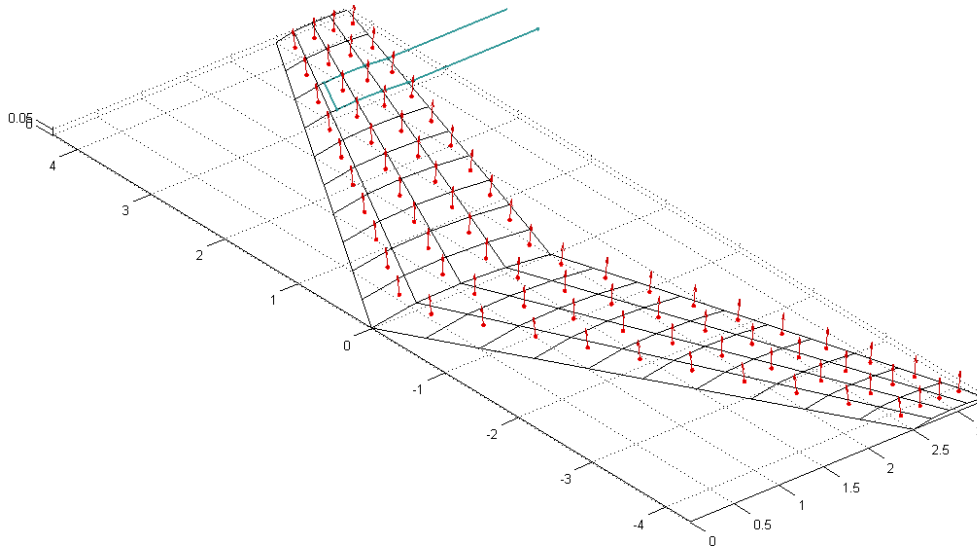
Površine panela su izračunate izrazom (4.5) [2].

$$s_{i,j} = \frac{|\mathbf{r}_{(i+1,j),(i,j+1)} \times \mathbf{r}_{(i+1,j+1),(i,j)}|}{2} \tag{4.5}$$

Izlaz funkcije geometrija se sastoji od struktura **Cp** (matrice koordinata vršnih točaka panela), **Ck** (matrice koordinata kontrolnih točaka), **Cv** (matrice koordinata vezanih vrtloga), **Cvk** (matrice koordinata polovišta vezanih vrtloga), **nn** (normale na kontrolne točke), te strukture **G** (geometrijski parametri koji se prenose u ostale funkcije, te površine panela).

#### 4.1.4. Funkcija crtanje\_krilo

Grafički prikaz izlaza funkcije geometrija je definiran funkcijom crtanje\_krilo. Radi preglednosti, na slici 14 je prikazan samo jedan potkovičasti vrtlog.



Slika 14. Primjer izlaza funkcije crtanje\_krilo, za zakrivljeno krilo s uvijanjem

#### 4.1.5. Funkcije vrtlog1 i vrtlog2

Funkcija vrtlog1 računa intenzitete potkovičastih vrtloga korištenjem izraza (3.7). Kao ulazne podatke uzima parametre specificirane u tablici 3, te izlaze funkcije geometrija.

Izlaz funkcije vrtlog1, tj. vektor intenziteta vrtloga, zajedno sa izlazima funkcije geometrija predstavljaju ulazne podatke funkcije vrtlog2, koja računa komponente inducirane brzine na polovištima vezanih vrtloga.

Obje funkcije koriste pomoćne funkcije BS0, BS1 i BS2.

#### 4.1.6. Funkcije BS0, BS1 i BS2

Ove funkcije računaju brzine inducirane uslijed segmenata vrtložnih niti jediničnog intenziteta. Temelje se na varijantama Biot-Savartovog zakona za segment ravne vrtložne niti konačne duljine (2.3) i za polubeskonačnu ravnu vrtložnu nit (2.2).

Funkcija BS0 računa brzine inducirane vezanim vrtlozima pomoću izraza (2.3), funkcija BS1 računa brzine inducirane segmentima slobodnih vrtloga konačne duljine (2.3), a funkcija BS2 brzine inducirane vrtložnim tragom, odnosno dijelovima slobodnih vrtloga koji se protežu do beskonačnosti, korištenjem izraza (2.2).

Razlika funkcija BS0 i BS1 se ogleda u dodatnoj zadaći koju obavlja funkcija BS0. Ukoliko pravac vezanog vrtloga s lijeve strane polukrila prolazi kroz kontrolnu točku na desnoj strani polukrila, inducirana brzina u kontrolnoj točki teži ka beskonačnosti, što dovodi do nerealističnih rezultata. Ova pojava se objašnjava postojanjem singulariteta u sredini vrtložne jezgre. Kako bi se izbjegle ove numeričke pogreške, funkcija BS0 koristi tzv. *cut-off* metodu, u kojoj se iznos inducirane brzine u blizini vrtložne jezgre automatski postavlja na nulu [6].

Varijanta *cut-off* metode korištena u funkciji BS0, provjerava da li točke vezanog vrtloga i kontrolna točka leže na istom pravcu, pomoću vektorskog produkta radij vektora vezanog vrtloga, te radij vektora početne točke vezanog vrtloga i kontrolne točke. Ukoliko je intenzitet ovog vektorskog produkta manji od  $10^{-6}$  m, inducirana brzina je automatski postavljena na nulu.

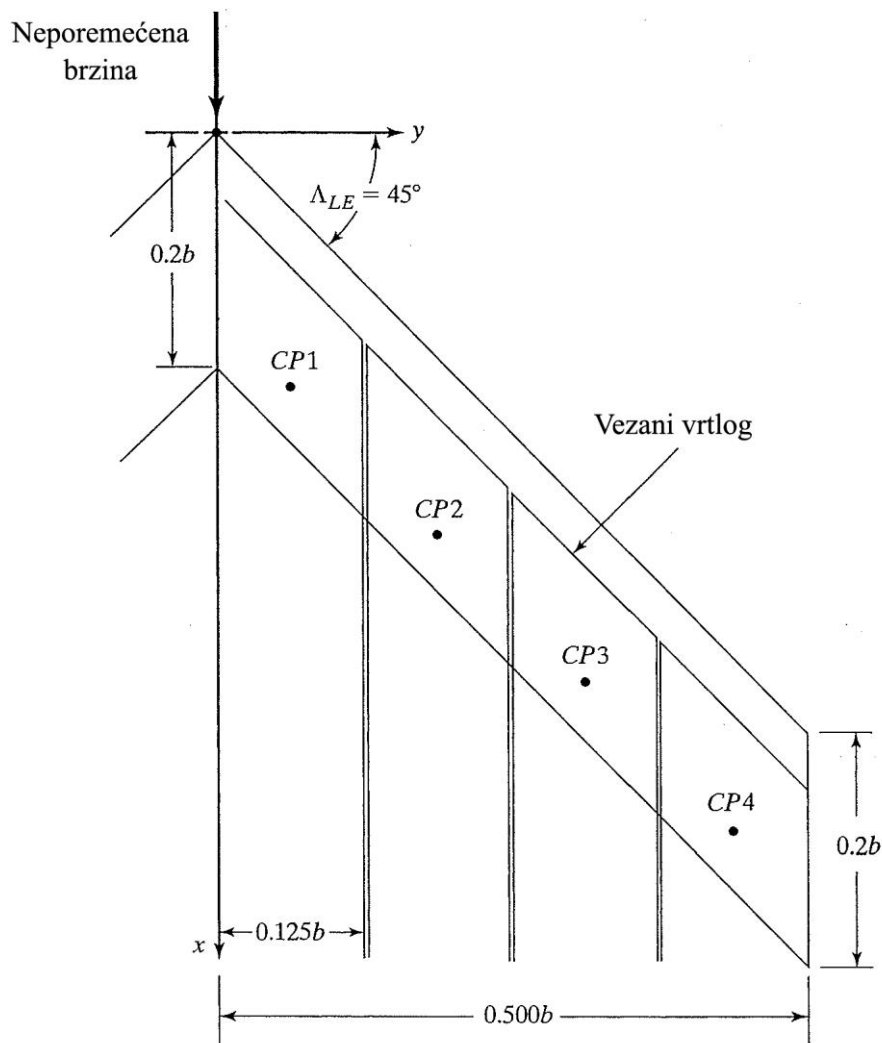
#### **4.1.7. Funkcija koef**

Funkcija koef određuje silu uzgona, silu inducirano otpora, koeficijent uzgona, koeficijent otpora, te razliku tlakova na panelima, korištenjem izraza izvedenih u poglavlju 3.2.3. Ulazni podaci ove funkcije su definirani izlazima funkcija vrtlog1 i vrtlog2.

## 4.2. Validacija programa

### 4.2.1. Usporedba s teorijskim rješenjem

U [4] je dato teorijsko rješenje gradijenta koeficijenta uzgona,  $C_{L\alpha}$ , za geometriju nezakrivljenog krila, opisanog slikom 13.



Slika 15. Geometrija krila, [4]

Za krilo jednake geometrije i za jednaku gustoću mreže, program VLM daje rezultat:

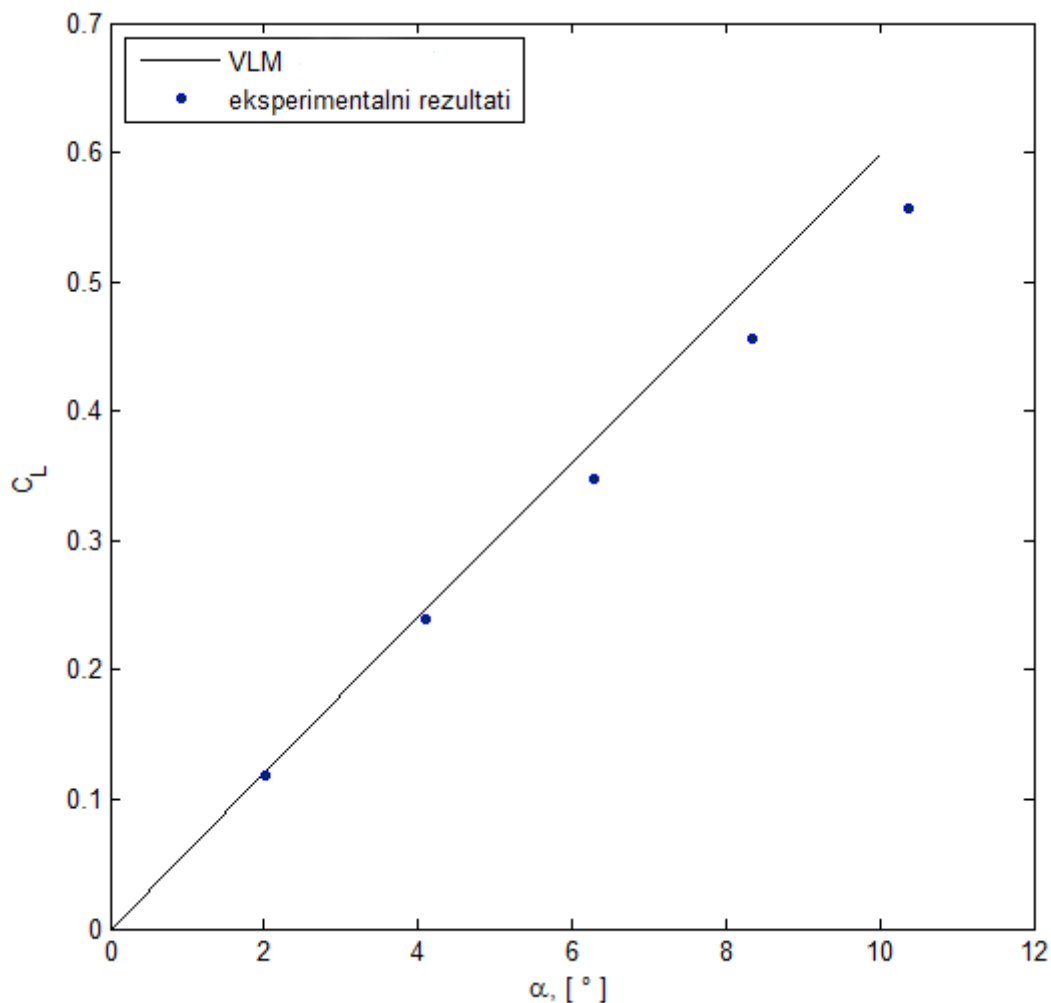
$$C_{L\alpha} = 3,4435 \text{ rad}^{-1}.$$

Rezultat iz [4] iznosi:

$$C_{L\alpha} = 3,443 \text{ rad}^{-1}.$$

Rezultati su gotovo identični, s relativnim odstupanjem u iznosu od 0,015%.

Dijagram ovisnosti koeficijenta uzgona o napadnom kutu za promatrano krilo je prikazan slikom 16.



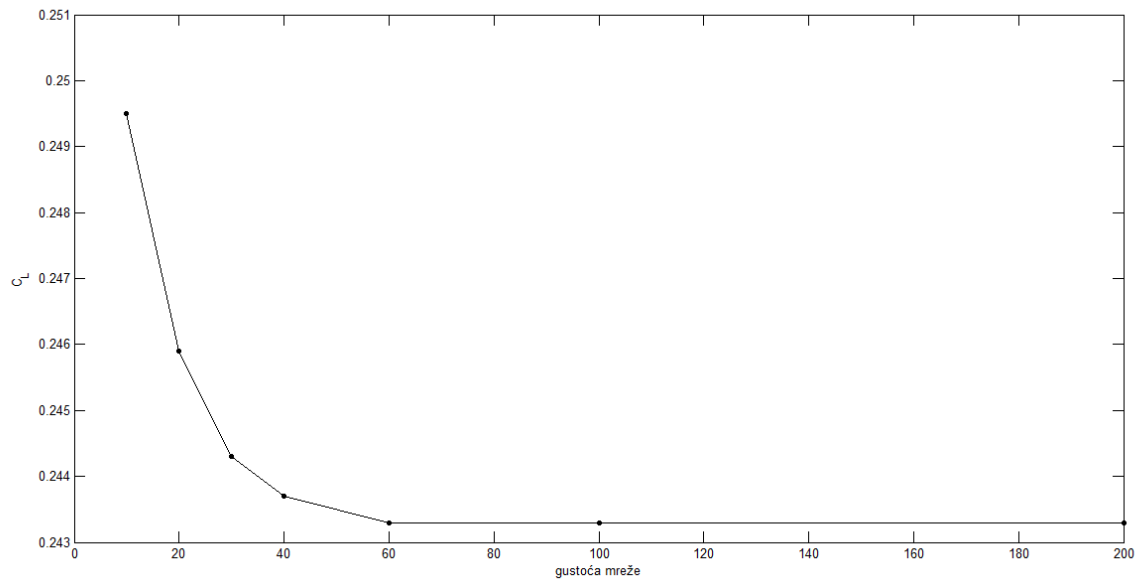
Slika 16. Usporedba VLM s eksperimentalnim rezultatima datim u [4]

#### 4.2.2. Usporedba s eksperimentalnim podacima

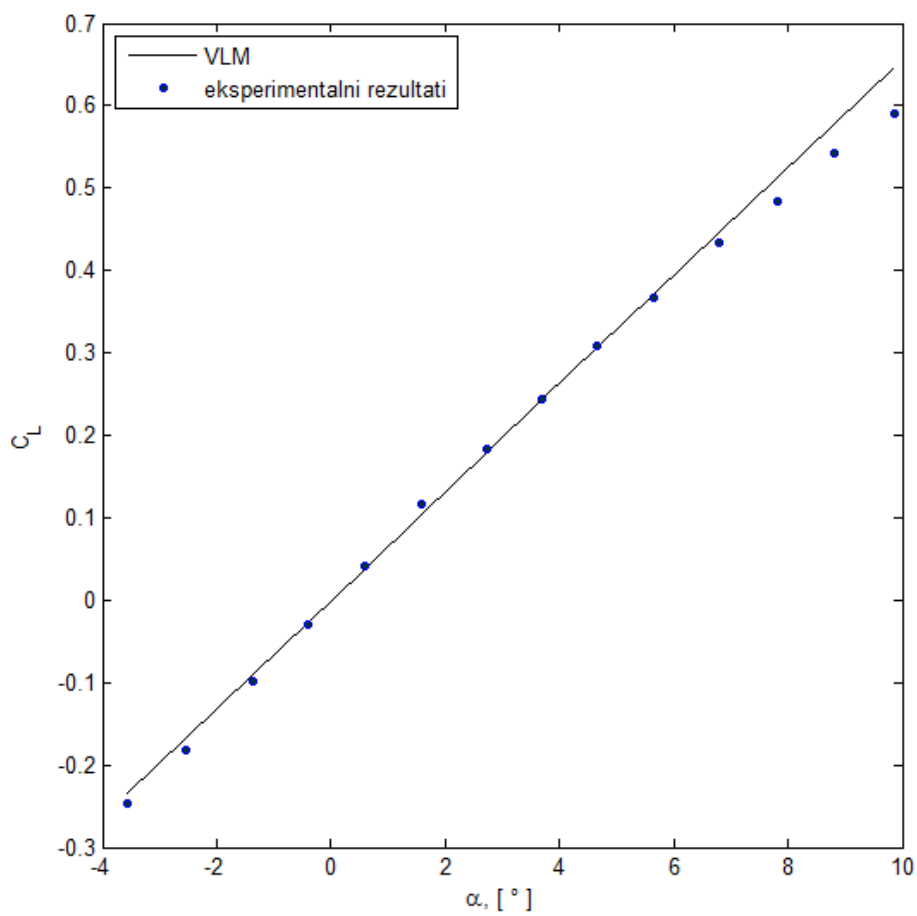
U [7] su eksperimentalno utvrđeni odnosi koeficijenta uzgona i napadnog kuta, za krilo profila NACA 63<sub>1</sub>A012, vitkosti  $AR=8,02$ , suženja krila  $\lambda=0,45$ , te sa strijelom napadnog ruba  $\Lambda_0 = 46,33^\circ$ .

Na slici 17 je prikazana analiza konvergencije rezultata za napadni kut  $\alpha = 3,5^\circ$ . Analiza je provedena postupnim povećavanjem broja panela po tetivi i polurasponu. Već sa 60 panela po polukrilu postignuta je potpuna konvergencija rezultata.

Odabrana je mreža od 4 panela po tetivi i 20 panela po polurasponu, na osnovu analize konvergencije rezultata sa slike 17.



Slika 17. Konvergencija rezultata za koeficijent sile uzgona krila



Slika 18. Usporedba rezultata VLM s eksperimentalnim podacima

Program VLM pokazuje dobro podudaranje s eksperimentalnim rezultatima iz [7] za napadne kuteve od  $-2^\circ$  do  $7^\circ$ . Relativna odstupanja u ovom rasponu napadnih kuteva iznose oko 2%. Međutim, za veće napadne kuteve više ne vrijede pretpostavke linearne aerodinamike, tako da koeficijenti uzgona dobiveni za te kuteve premašuju rezultate eksperimenta.

#### 4.2.3. Usporedba s programom Tornado

Tornado [6], [8] je računalna implementacija metode vrtložne rešetke. U Tornadu je srednja površina zakrivljenosti krila modelirana s modificiranim potkovičastim vrtlozima sa po 7 segmenata. Kontrolne točke su preslikane na planformu, a normale na kontrolne točke su izračunate za stvarnu zakrivljenost krila.

Za krilo s profilom NACA4415, strijelom napadnog ruba  $\Lambda_0 = 45^\circ$ , uvijanjem  $\alpha_w = -2^\circ$  i napadnim kutem  $\alpha = 6^\circ$  provedena je usporedba koeficijenata uzgona i induciranog otpora s rezultatima dobivenim pomoću Tornado. Korištena je mreža panela s 4 panela po tetivi i 40 panela po polurasponu.

Variran je oblik vrtložnog traga kako bi se ispitaio njegov utjecaj na rezultate:

- 'trag 1' – pretpostavljeno je da slobodne su vrtložne niti, nakon što napuste izlazni rub krila, paralelne osi simetrije krila.
- 'trag 2' – slobodne vrtložne niti napuštaju izlazni rub paralelno neporemećenoj brzini.
- 'trag 3' – slobodne vrtložne niti napuštaju izlazni rub tangentno nagibu izlaznog ruba u odnosu na os simetrije krila.

Ishod usporedbi je prikazan u tablici 6.

**Tablica 6. Usporedba rezultata s Tornadom, za različite oblike vrtložnog traga**

| Veličina | Tornado | VLM (trag 1) | VLM (trag 2) | VLM (trag3) |
|----------|---------|--------------|--------------|-------------|
| $C_L$    | 0,5629  | 0,5660       | 0,5663       | 0,5660      |
| $C_{Di}$ | 0,0157  | 0,0159       | 0,0159       | 0,0158      |

U usporedbi s programom Tornado, program VLM pokazuje također dobro podudaranje. Relativno odstupanje koeficijenta uzgona izračunatog programom VLM u odnosu na koeficijent uzgona iz programa Tornado iznosi 0,55%, dok odstupanje koeficijenta induciranog otpora iznosi 1,2%.

Svi rezultati varijacija vrtložnih tragova leže u margini odstupanja manjoj od 2% u odnosu na referentnu vrijednost iz programa Tornado. Može se zaključiti da oblik vrtložnog traga nema gotovo nikakvog utjecaja na ukupne rezultate.



## 5. ANALIZA KOEFICIJENTA AERODINAMIČKE SILE UZGONA

Za krilo definirano u poglavlju 4.2.2. eksperimentalno je utvrđen koeficijent opterećenja krila po rasponu, za napadni kut  $\alpha = 4,7^\circ$  [7].

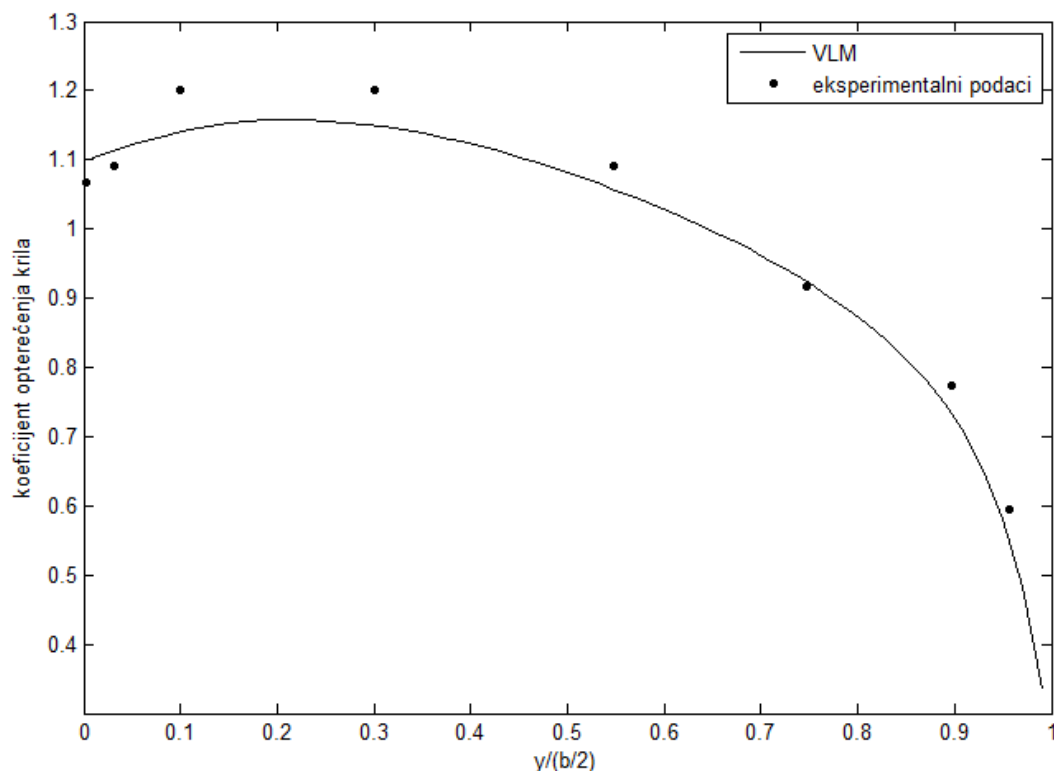
Koeficijent opterećenja noseće površine definiran je u [9] prema izrazu (5.1).

$$\left( \frac{c_{li} c_i}{C_L c_{sred}} \right) = \frac{\sum_{j=N}^i \Delta \Gamma_j AR}{V_\infty b/2 C_L} \quad (5.1)$$

Gdje je  $c_{sred}$  srednja tetiva krila, definirana izrazom (5.2):

$$c_{sred} = b/AR. \quad (5.2)$$

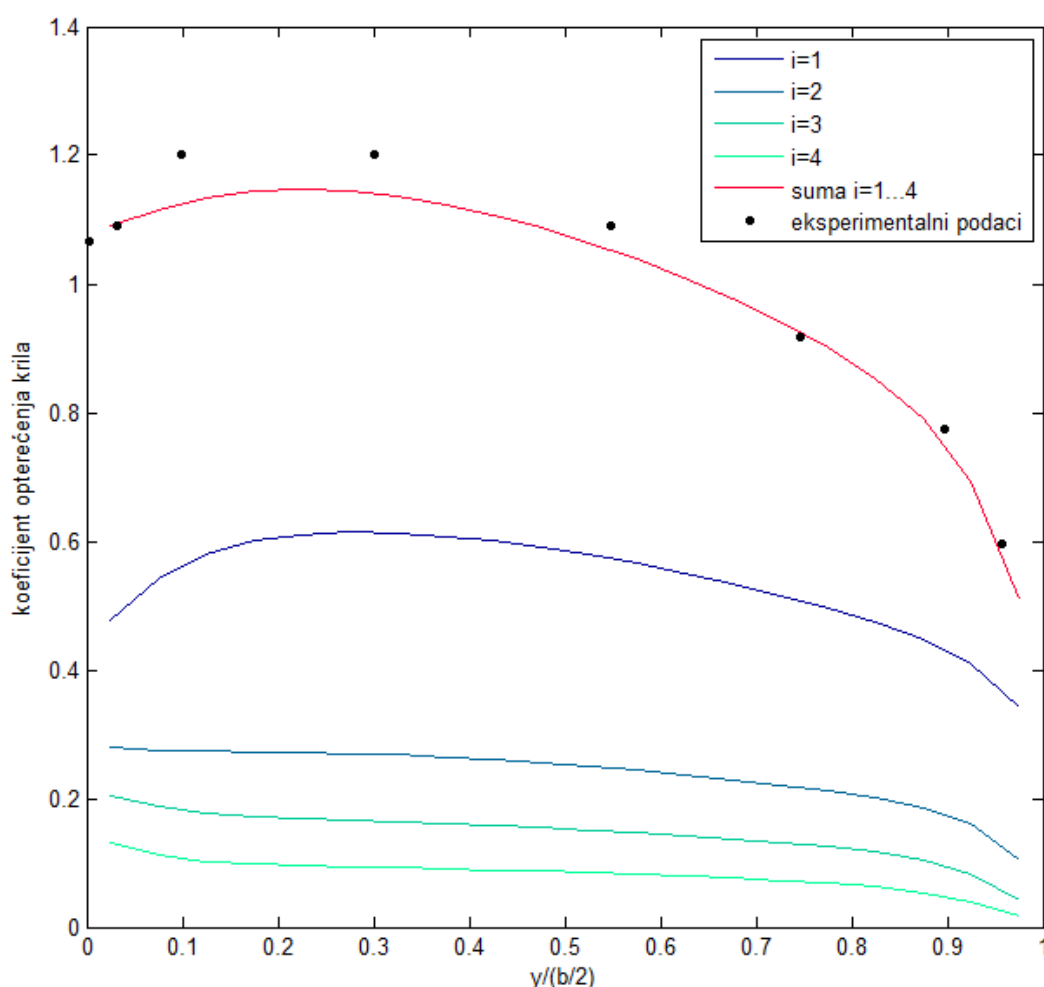
U [9] je prikazan koeficijent opterećenja noseće površine dobiven za Weissingerov model, s mrežom od 50 elemenata po polurasponu. Program VLM je za istu gustoću mreže dobio gotovo identične rezultate, koji su prikazani na slici 19 uz eksperimentalne rezultate iz [7]. Rezultati dobiveni metodom noseće linije iz [9] nisu ucrtani, jer se krivulja poklapa sa krivuljom iz VLM.



Slika 19. Koeficijent opterećenja krila po polurasponu

Uvođenjem diskretizacije krila  $i$  po tetivi sa 4 panela, dobiva se raspodjela koeficijenta opterećenja po rasponu prikazana na slici 20. Ovdje  $i$  označava strijelu vezanih vrtloga lokalnih tetiva panela, gdje  $i = 1$  predstavlja vrtloge najbliže napadanog rubu, a  $i = 4$  vrtloge najbliže izlaznom rubu krila. Na taj način je raspodjela koeficijenta krila, osim po rasponu, prikazana i u ovisnosti o lokaciji na tetivama krila.

Sumiranjem ovih vrijednosti na istim lokacijama po polurasponu nacrtana je krivulja koeficijenta opterećenja krila po polurasponu. I u ovom slučaju se ukupne vrijednosti dosta dobro poklapaju s eksperimentalnim rezultatima, ležeći u margini od 2% relativnog odstupanja u odnosu na referentne vrijednosti.



Slika 20. Koeficijent opterećenja krila po polurasponu krila

## 6. ZAKLJUČAK

Problem modeliranja optjecanja krila konačnog raspona riješen je putem generalizirane metode vrtložne rešetke. Napravljena je računalna implementacija ove metode, koja opisuje niz različitih geometrija noseće površine, uključujući zakrivljenost, dihedral, strijelu, suženje i uvijanje krila. Model se temelji na pretpostavkama linearne aerodinamike, što znači da je primjena ograničena na opis nestlačivog i neviskozno strujanja.

Rezultati ovdje opisanog programa su validirani usporedbom s teorijskim rješenjima [4], eksperimentalnim podacima [7] te rezultatima drugih implementacija metode vrtložne rešetke [8]. Program daje pouzdane rezultate u području malih napadnih kuteva i malih brzina strujanja.

Također je ispitan utjecaj različitih oblika vrtložnog traga na ukupne koeficijente uzgona i induciranog otpora noseće površine. Pokazano je da ovaj oblik ne igra veliku ulogu u predstavljenom modelu.

Ovaj program bi mogao naći svoju primjenu u preliminarnim proračunima aerodinamičkih svojstava noseće površine.

## LITERATURA

- [ 1 ] Anderson, Jr. J. D.: Fundamentals of Aerodynamics, Fourth Edition, McGraw-Hill, 2007.
- [ 2 ] Katz, J., Plotkin, A.: Low speed aerodynamics, Cambridge University Press, 2010.
- [ 3 ] Janković, S., Aerodinamika I, skripta, Zagreb, 2007.
- [ 4 ] Bertin, J.J., Cummings, R.M.: Aerodynamics for engineers, Fifth Edition, Pearson Prentice-Hall, 2009.
- [ 5 ] <http://people.clarkson.edu/~pmarzocc/AE429/The%20NACA%20airfoil%20series.pdf>
- [ 6 ] Melin, T., A Vortex Lattice MATLAB Implementation for Linear Aerodynamic Wing Applications, Master Thesis, Royal Institute of Technology (KTH), 2000.
- [ 7 ] Schneider, W. C.: A comparison of the spanwise loading calculated by various methods with experimental loadings obtained on a 45° sweptback wing of aspect ratio 8.02 at a Reynolds number of  $4.0 \cdot 10^6$ , Langley Aeronautical Laboratory, 1951.
- [ 8 ] <http://tornado.redhammer.se/>
- [ 9 ] Vrdoljak, M.: Djelovanje vrtložne površine s izlaznog ruba prednje noseće površine na zadnju noseću površinu, Magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, 1998.