

# Implementacija i validacija spektralne valne metode viših redova za numeričke simulacije nelinearnih površinskih valova

---

Gatin, Inno

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:600155>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivan Čatipović, dipl. ing.

Komentor:

Prof. dr. sc. Hrvoje Jasak, dipl. ing.

Student:

Inno Gatin

Zagreb, 2015.



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: Inno Gatin

Mat. br.: 0035185258

Naslov rada na hrvatskom jeziku:

**Implementacija i validacija spektralne valne metode viših redova za numeričke simulacije površinskih valova**

Naslov rada na engleskom jeziku:

**Implementation and Validation of the Higher Order Wave Spectrum Method (HOS) for Simulation of Surface Waves**

Opis zadatka:

Simulacija površinskih valova računalnom dinamikom fluida je od izuzetnog interesa u inženjerskoj praksi. Metode potencijalnog strujanja važne su u slučaju potrebe za brzim simulacijama opterećenja na tijelo izloženo valovima, kao i kod generacije rubnih uvjeta polja valova u nelinearnim viskoznim simulacijama. U oba slučaju, točnost modela potencijalnog strujanja je vrlo bitna. Ovdje je posebno zanimljiva spektralna valna metoda viših redova (*engl. Higher Order Spectrum, HOS*), koja kombinira razumnu cijenu proračuna s mogućnošću modeliranja nelinearnosti, a koja će biti predmet ovog rada.

Kandidat će izvršiti sljedeće zadatke tokom izrade rada:

- izvršiti pregled literature vezane na izvod i formulaciju HOS matematičkog modela;
- izvršiti implementaciju HOS modela u softverskom paketu OpenFOAM;
- integrirati implementaciju HOS modela u paket inicijalizacije polja valova i relaksacijskih zona u viskoznom nelinearnom rješavaču strujanja sa slobodnom površinom u paketu OpenFOAM;
- izvršiti validaciju implementacije modela spektralne valne metode viših redova na sljedećim primjerima:
  1. simulacija nelinearne propagacije monokromatskog vala, uz usporedbu s analitičkim rješenjem;
  2. simulacija razvoja nestabilnosti monokromatskog propagirajućeg vala, poznate kao Benjamin-Fair nestabilnost, uz usporedbu s podacima na raspolaganju;
- po završetku implementacije i validacije HOS modela, opisati metodu i prikazati inicijalizaciju i propagaciju trodimenzionalnog ekstremnog vala, koristeći kombinaciju HOS modela spregnutu s viskoznom simulacijom strujanja sa slobodnom površinom u paketu OpenFOAM;
- opisati implementaciju i ostvarene rezultate u diplomskom radu.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

7. svibnja 2015.

9. srpnja 2015.

15., 16. i 17. srpnja 2015.

Zadatak zadao:

Predsjednica Povjerenstva:

Doc.dr.sc. Ivan Čatipović

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli

Izv. prof. dr. sc. Hrvoje Jasak

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tokom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se profesoru Jasaku na potpori tokom izrade diplomskog rada od kojega sam naučio iznimno puno, osobito na području programiranja u C++ programskom jeziku te području računalne dinamike fluida. Zahvaljujem se docentu Čatipoviću na pomoći i na pruženom znanju iz područja brodske hidrodinamike. Također se zahvaljujem prijatelju i kolegi Vuku Vukčeviću na nesebičnoj pomoći i inspiraciji.

# Sadržaj

<b>SAŽETAK</b>	<b>VIII</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>IX</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Matematički model</b>	<b>4</b>
2.1 Potencijalno strujanje . . . . .	4
2.2 Formulacija problema površinskih valova . . . . .	5
2.3 Fourierova transformacija . . . . .	9
2.4 Spektralna metoda viših redova za nelinearnu propagaciju valova (HOS) . . . . .	12
2.5 Spektri energije morskih valova . . . . .	15
<b>3 Numerički model</b>	<b>19</b>
3.1 Numerička procedura HOS metode . . . . .	19
3.2 Sprega HOS metode i CFD simulacije . . . . .	22
3.3 Inicijalizacija HOS simulacije . . . . .	24
3.4 Uklanjanje greške alias–efekta . . . . .	25
3.5 Metode numeričke integracije običnih diferencijalnih jednažbi . . . . .	27
<b>4 Validacija implementiranog algoritma</b>	<b>29</b>
4.1 Propagacija monokromatskog vala . . . . .	29
4.2 Validacija propagacije valnog spektra . . . . .	32
4.3 Razvoj Benjamin–Feir nestabilnosti . . . . .	38
<b>5 Primjeri trodimenzionalnih CFD simulacija ekstremnog vala</b>	<b>43</b>
5.1 Dvodimenzionalna HOS simulacija – pronalaženje ekstremnog vala . . . . .	43
5.2 Nailazak ekstremnog vala na baržu . . . . .	47
5.2.1 Nailazak ekstremnog vala na brod za prijevoz kontejnera . . . . .	54
<b>6 Zaključak</b>	<b>59</b>

## Popis simbola

$\Delta$	konačni diferencijalni operator	
$\varepsilon$	nagib vala	
$\varepsilon_n$	fazni pomak $n$ -tog Fourierovog harmonika	rad
$\varepsilon_{ijk}$	Levi–Civita tenzor permutacije	
$\eta$	elevacija slobodne površine	m
$\gamma$	koeficijent vršnosti	
$\gamma_p$	vršna kružna frekvencija	rad/s
$\lambda_i$	duljina $i$ -te valne komponente	m
$\omega$	kružna frekvencija	rad/s
$\omega_c$	Nyquistova frekvencija	rad/s
$\omega_n$	kružna frekvencija $n$ -tog Fourierovog harmonika	rad/s
$\phi$	potencijal brzine strujanja fluida	m <sup>2</sup> /s
$\phi^{(m)}$	$m$ -ti red potencijala brzine strujanja	m <sup>2</sup> /s
$\psi$	površinski potencijal brzine strujanja	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	gustoća	kg/m <sup>3</sup>
$\theta$	kut nailaska vala	rad
$A$	koeficijent normalizacije distribucije usmjerenosti	1/rad
$a$	amplituda vala	m
$a_n$	amplituda $n$ -tog Fourierovog harmonika	
$C(t)$	konstanta Bernoullijeve jednadžbe	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$c_n$	kompleksna amplituda $n$ -tog Fourierovog harmonika	
$c_{k,l}(t)$	Fourierov koeficijent	m <sup>2</sup> /s
$c_k^\eta$	Fourierov koeficijent funkcije $\eta(x, y, t)$	m

$c_k^\psi$	Fourierov koeficijent funkcije $\psi(x, y, t)$	$\text{m}^2/\text{s}$
$d$	dubina fluida	$\text{m}$
$D(\theta)$	distribucija usmjerenosti spektra	$1/\text{rad}$
$E$	valna energija svedena na jedinicu površine	$\text{J}/\text{m}^2$
$F$	nelinearni dio kinematičkog rubnog uvjeta	$\text{m}/\text{s}$
$G$	nelinearni dio dinamičkog rubnog uvjeta	$\text{m}^2/\text{s}^2$
$g$	gravitacijska konstanta	$\text{m}/\text{s}^2$
$G(\omega)$	općenita funkcija u frekvencijskoj domeni	
$g(t)$	općenita funkcija u vremenskoj domeni	
$H_i$	visina $i$ -te valne komponente	$\text{m}$
$H_s$	značajna valna visina	$\text{m}$
$k$	redni broj točke diskretnog fizičkog prostora	
$K_m$	$m$ -ti valni broj u smjeru osi $y$	$\text{rad}/\text{m}$
$K_n$	$n$ -ti valni broj u smjeru osi $x$	$\text{rad}/\text{m}$
$L_x$	duljina domene u smjeru osi $x$	$\text{m}$
$L_y$	duljina domene u smjeru osi $y$	$\text{m}$
$M$	red nelinearnosti	
$m$	koeficijent usmjerenosti	
$N$	broj diskretizacijskih točaka	
$n$	redni broj harmonika diskretnog Fourierovog prostora	
$n_a$	relaksacijski eksponent	
$N_x$	broj diskretizacijskih točaka u smjeru osi $x$	
$N_y$	broj diskretizacijskih točaka u smjeru osi $y$	
$N_{\mathcal{F}}$	broj Fourierovih harmonika sa uklonjenim alias–efektom	

---

$p$	tlak	Pa
$S_{\eta}(\omega)$	energetski spektar valova	$\text{m}^2\text{s}/\text{rad}$
$S_{\eta}(\omega, \theta)$	dvodimenzionalni energetski spektar valova	$\text{m}^2\text{s}/\text{rad}^2$
$T$	osnovni period	s
$t$	vrijeme	s
$T_a$	relaksacijsko vrijeme	s
$T_f$	vrijeme fokusiranja valova	s
$T_p$	vršni valni period	s
$v_i$	vektor brzine čestice fluida	m/s
$v_x$	brzina u smjeru osi $x$	m/s
$v_y$	brzina u smjeru osi $y$	m/s
$v_z$	brzina u smjeru osi $z$	m/s
$W$	vertikalna brzina slobodne površine	m/s
$W^{(m)}$	$m$ -ti red vertikalne brzine slobodne površine	m/s
$x_i$	radij vektor čestice fluida	m



## Popis slika

1	Prikaz koordinatnog sustava [11]. . . . .	6
2	Dijagram toka algoritma HOS metode [11]. . . . .	22
3	Razvoj viših harmonika. . . . .	30
4	Konvergencija viših harmonika. . . . .	31
5	Domena CFD simulacije korištena u [12]. . . . .	33
6	Primjer spektra za strmine valnih komponenti $H_i/\lambda_i = 1/715$ . . . . .	34
7	Usporedba valnog spektra, slučaj $H_i/\lambda_i = 1/715, t = 37$ s. . . . .	35
8	Usporedba valnog spektra, slučaj $H_i/\lambda_i = 1/400, t = 37$ s. . . . .	36
9	Usporedba valnog spektra, slučaj $H_i/\lambda_i = 1/300, t = 37$ s. . . . .	36
10	Usporedba valnog spektra, slučaj $H_i/\lambda_i = 1/210, t = 84$ s. . . . .	37
11	Promjena valne energije u HOS simulaciji. . . . .	38
12	Razvoj Benjamin–Feir nestabilnosti u HOS proračunu. . . . .	40
13	Razvoj nelinearnih valnih komponenti u eksperimentu, a)[13], b)[14]. . . . .	41
14	Prikaz elevacije slobodne površine za inicijalizaciju HOS proračuna. . . . .	44
15	Prikaz elevacije slobodne površine sa ekstremnim valom, $t = 532$ s. . . . .	45
16	Bliži prikaz ekstremnog vala, $t = 532$ s. . . . .	45
17	Prikaz drugog vala, $t = 541$ s. . . . .	46
18	Prikaz elevacije slobodne površine korištene kao početni uvjet u CFD simulaciji, $t = 525$ s. . . . .	46
19	Domena simulacije sa mirnom slobodnom površinom. . . . .	48
20	Prikaz mreže kontrolnih volumena barže u uzdužnoj simetralnoj ravnini. . . . .	49
21	Vrijednost težinske funkcije u uzdužnoj i poprečnoj simetralnoj ravnini. . . . .	49
22	Slobodna površina u početnom trenutku CFD simulacije. . . . .	50
23	Prikaz nailaska ekstremnog vala na baržu u vremenskim razmacima od 0.5 s. . . . .	51
24	Polje brzine u uzdužnoj simetralnoj ravnini u trenutku udara ekstremnog vala u baržu, $t = 11$ s. . . . .	52
25	Raspodjela dinamičkog tlaka u Pa na površini barže u trenutku udara ekstremnog vala, $t = 11$ s. . . . .	52
26	Ovisnost sile opterećenja na baržu u smjeru osi $x$ o vremenu. . . . .	53
27	Pomak težišta barže u ovisnosti o vremenu. . . . .	53
28	Prikaz mreže kontrolnih volumena broda za prijevoz kontejnera u uzdužnoj simetralnoj ravnini. . . . .	55
29	Prikaz slobodne površine CFD simulacije nailaska ekstremnog vala na brod za prijevoz kontejnera, $t = 0$ s. . . . .	55

30	Prikaz nailaska ekstremnog vala na brod za prijevoz kontejnera u vremenskim razmacima od 0.5 s. . . . .	56
31	Raspodjela dinamičkog tlaka u Pa na pramcu brodu prilikom nailaska ekstremnog vala. . . . .	57

## Popis tablica

1	Usporedba HOS rezultata i nelinearog Stokesovog rješenja. . . . .	32
2	Parametri HOS simulacije testnog proračuna propagacije valnog spektra. . . . .	35
3	Parametri HOS simulacije testnog proračuna razvoja Benjamin–Feir nestabilnosti. . . . .	39
4	Parametri 2D HOS simulacije ekstremnog vala. . . . .	44
5	Geometrijske karakteristike barže. . . . .	47
6	Karakteristike broda za prijevoz kontejnera. . . . .	54

## SAŽETAK

Inno Gatin

### IMPLEMENTACIJA I VALIDACIJA SPEKTRALNE VALNE METODE VIŠIH REDOVA ZA NUMERIČKE SIMULACIJE NELINEARNIH POVRŠINSKIH VALOVA

Provedena je numerička implementacija i validacija dvodimenzionalne nelinearne spektralne metode viših redova (eng. *"Higher Order Spectrum"*, skraćeno HOS) za propagaciju trodimenzionalnih površinskih valova. Metoda je implementirana u programu otvorenog koda OpenFOAM, koji je specijaliziran za računalnu dinamiku fluida (eng. *"Computational Fluid Dynamics"*, CFD). Radi se o pseudo–spektralnoj metodi rješavanja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju problem površinskih valova u okviru modela potencijalnog strujanja. Pseudo–spektralni pristup omogućuje brzo rješavanje problema površinskih valova s proizvoljnim brojem valnih komponenti, čime se može opisati realistično stanje mora. Red nelinearnosti do kojeg se provodi HOS proračun je proizvoljan, što čini metodu prilagodljivom specifičnim primjenama. Problem se razlaže na način da se prostorni dio problema rješava u spektralnoj domeni, dok se vremenski dio problema rješava u fizičkoj domeni. Pri tome se projiciranje između spektralne i fizičke domene vrši pomoću Fourierove transformacije. Korištenje *"Fast Fourier Transform"* (skraćeno FFT) algoritma za provođenje Fourierove transformacije omogućuje korištenje velikog broja harmonika zahvaljujući visokoj efikasnosti algoritma. U radu je prikazana matematička pozadina metode i prateći matematički alati. Implementacija je provedena prvenstveno radi sprege sa CFD alatima za brodsku hidrodinamiku, sa naglaskom na efikasnu i točnu inicijalizaciju proizvoljnog stanja mora. Mogućnost nelinearne propagacije valnog spektra omogućuje opisivanje realističnih ekstremnih valova, koji postaju sve zanimljiviji u području brodogradnje i pučinskih objekata. Točnost metode provjerena je na tri testna proračuna. U prvom proračunu provedena je usporedba nelinearne propagacije monokromatskog vala s analitičkim rezultatima. U drugom proračunu uspoređena je propagacija spektra valova s rezultatima viskozno, dvofaznog proračuna. Treći proračun prikazuje razvoj nelinearnih nestabilnosti monokromatskog propagirajućeg vala poznatih kao Benjamin–Feir nestabilnosti. Na posljeticu su prikazane simulacije računalne dinamike fluida u kojima je simuliran trodimenzionalan ekstreman val za čiju se inicijalizaciju koristila implementirana HOS metoda. Ekstreman val se prirodno razvio u dugoj HOS simulaciji, što ga čini statistički i fizikalno realističnim.

Ključne riječi: Spektralna metoda viših redova, nelinearni površinski valovi, računalna dinamika fluida.

## SUMMARY

*Inno Gatin*

### **IMPLEMENTATION AND VALIDATION OF THE HIGHER ORDER WAVE SPECTRUM METHOD (HOS) FOR SIMULATION OF SURFACE WAVES**

In this work Higher Order Spectral (HOS) method for three-dimensional nonlinear water wave propagation is implemented and validated. Implementation is conducted in a specialised Computational Fluid Dynamics (CFD) open-source software OpenFOAM. HOS is a pseudo-spectral method for solving nonlinear differential equations, which describe free surface wave phenomena. The pseudo-spectral approach enables fast calculation of surface wave problem with arbitrary number of wave components. The order of nonlinearity of the HOS calculation is arbitrary, making this method highly flexible. Multiple wave components, or harmonics, can reproduce a realistic sea state. The problem is divided into a spectral and a physical part, where the projection between the spectral and physical space is performed via Fourier transforms. Large number of wave components may be used due to high efficiency of the FFT algorithm. Mathematical model of the HOS method is outlined and its numerical model is shown in detail. The reason for implementation of HOS method is its coupling with high-fidelity CFD simulations regarding wave-structure interaction. The capability of low-cost, long time evolution of input spectra can be used to obtain realistic freak waves. Validity of the implemented algorithm is verified on three test cases. The first test case consists of nonlinear propagation of a monochromatic wave using HOS compared with the analytical solution. The second test case demonstrates the ability of accurate wave spectrum propagation by comparing the result with viscous two-phase simulation. In the third test case emergence of Benjamin-Feir instabilities in monochromatic wave train is observed. Finally, CFD simulations of extreme wave are presented. Extreme wave is initialized using HOS solution.

Key words: Higher Order Spectral method, Nonlinear surface wave propagation, Computational Fluid Dynamics

# 1 Uvod

Moderni problemi u području brodogradnje i pomorske tehnike u sve većoj mjeri obuhvaćaju procjenu dinamičkih opterećenja uslijed nailaska valova. Gledano sa stajališta dinamike fluida, fenomen nailaska valova na brod ili pomorski objekt vrlo je složen problem. Procjena valnih opterećenja je stoga jedan od najtežih problema u struci. Temeljna metoda za praktično rješavanje problema valnih opterećenja i pomorstvenosti broda koristi pristup u kojem se stanje mora opisuje statistički putem valnog energetskog spektra, dok se strujanje opisuje potencijalnim modelom strujanja. Metoda se temelji na pretpostavci linearne naravi valnog spektra, što podrazumijeva potpunu neovisnost pojedinih valnih komponenti. Temelj procjene valnog opterećenja na cilindrična tijela je tzv. Morisonova jednadžba [1], koja vrijedi za linearni valni model, poznat kao Airyev val [2]. Metode potencijalnog strujanja koje procjenjuju gibanja broda na valovima te valna opterećenja danas se opsežno koriste zbog svoje jednostavnosti i relativno dobre točnosti za velik broj problema u brodogradnji i pomorskoj tehnici. Osobito su korisne za procjenu gibanja brodova i drugih plutajućih objekata na valovima, pri čemu se kao rezultat dobiju spektri odziva pomaka, brzina i ubrzanja točaka na brodu. U pomorskoj tehnici se pomoću potencijalnog strujanja mogu procijeniti opterećenja koja nastaju uslijed nailaska vala; međutim to je moguće samo za ograničene karakteristike valova i geometrije objekta. Drugim riječima, u slučaju kada viskozne i nelinearne pojave ne utječu znatno na rezultat, navedene metode su vrlo korisne. Često se navedene metode uspješno koriste izvan područja valjanosti koje je ograničeno brojnim pretpostavkama i pojednostavljenjima modela.

Iscrpljivanjem naftnih nalazišta blizu obale, naftne tvrtke prisiljene su postavljati naftne bušotine u sve dublje vode dalje od obale. Pomorski objekti su tako izloženi sve gorim vremenskim uvjetima, poglavito valovima. Na razvoj vjetrovnih valova velik utjecaj ima duljina privjetrišta, odnosno duljina slobodne površine mora na kojem dolazi do slobodnog razvoja valova pod utjecajem vjetra. Udaljavanjem od obale privjetrište postaje sve veće za veći broj smjerova vjetra, te se općenito povećavaju valovi kojima je objekt izložen. Osobito opasna pojava je ekstreman val, odnosno val koji je znatno veći od ostatka valova na pripadajućem stanju mora. Točnije, prema široko prihvaćenoj definiciji, ekstreman val je val čija visina premašuje značajnu valnu visinu pripadajućeg stanja mora za barem dva puta [3]. Ekstremni valovi manje ugrožavaju brodove jer kapetani navode brodove na način da izbjegavaju velike oluje. Međutim, nepomični pučinski objekti nemaju tu mogućnost zbog čega su izloženi vrlo velikim ekstremnim valovima. Valna opterećenja uslijed ekstremnog vala vrlo su visoka, te raste potreba za njihovim što točnijim procjenjivanjem. Ekstreman val karakterizira velika strmina valne fronte, zbog čega ga linearne metode nisu u stanju fizikalno točno opisati. Naime, u linearnoj valnoj teoriji pretpostavlja se da je valna strmina mala veličina drugog reda, te ju se zanemaruje kako bi se problem linearizirao [2]. Štoviše, uslijed nailaska ekstremnog vala oplakana površina uronjenog tijela značajno se mijenja u vremenu [4],

što je zanemareno u konvencionalnim metodama potencijalnog strujanja.

Zbog ograničenja modela potencijalnog strujanja, sve se više pribjegava korištenju eksperimentalnih metoda i računalne dinamike fluida (eng. "*Computational Fluid Dynamics*", CFD) za opisivanje pojave ekstremnog vala te za predviđanje opterećenja uslijed njegovog nailaska na pomorski objekt. Eksperimentalne metode ograničene su zbog cijene, vremena trajanja ispitivanja i dostupne rezolucije rezultata. CFD je povoljan alat za opisivanje događaja vezanih za valove kod kojih su izraženi nelinearni utjecaji. Međutim, CFD sam po sebi ne nudi rješenje problema opisivanja nastanka ekstremnog vala zbog zahtjevno velikih računalnih resursa. Potrebno je na neki način efikasno modelirati ekstreman val u CFD simulaciji.

Jedan od načina modeliranja ekstremnog vala u CFD simulaciji je pomoću empirijskog valnog spektra, međutim kod ovakvog pristupa i dalje je potrebno vrlo dugo vrijeme simulacije. Također je moguće modelirati ekstreman val pomoću podataka iz eksperimentalnog mjerenja, šta naravno zahtjeva provođenje eksperimenta. Najjednostavniji način inicijalizacije ekstremnog vala je fokusiranjem valnih komponenti [5], gdje se fazni pomaci valnih komponenti određuju na način da rezultiraju pozitivnom superpozicijom harmonika na željenom mjestu [4]. Veliki nedostatak ove metode je to što se radi o potpuno linearnom rješenju, koje kao takvo nije valjano u slučaju strmih valova. Osim toga, pojedine valne komponente su neovisne, odnosno zanemarena je nelinearna interakcija valnih komponenti.

U ovom radu provedena je implementacija nelinearnog valnog modela koji omogućuje nisku cijenu inicijalizacije realističnog ekstremnog vala u CFD simulaciji. Radi se spektralnoj metodi viših redova (eng. "*Higher Order Spectrum*", skraćeno HOS) za nelinearnu propagaciju površinskih valova. HOS metodu prvi su nezavisno objavili Dommermuth & Yue [6] i West et al. [7]. Od tada je mnogo autora unapređivalo i nadograđivalo metodu [8, 9, 10]. U HOS metodi se diferencijalne jednadžbe koje opisuju problem površinskih valova rješavaju pomoću pseudo-spektralne metode do proizvoljnog reda nelinearnosti. Pseudo-spektralna metoda podrazumijeva rješavanje jednog dijela problema u spektralnom prostoru, dok se drugi dio rješava u fizičkom prostoru. Preslikavanje između spektralnog i fizičkog prostora vrši se Fourierovom transformacijom. Glavna prednost metode je visoka brzina proračuna, čemu najviše doprinosi korištenje "*Fast Fourier Transform*" (skraćeno FFT) algoritma za provođenje Fourierove transformacije. FFT omogućuje korištenje velikog broja harmonika u HOS proračunu, čime se može opisati realistično stanje mora. HOS metoda je u mogućnosti propagirati proizvoljan spektar valova, pri čemu dolazi do nelinearne interakcije među harmonicima. HOS metoda zasnovana je na potencijalnom modelu strujanja, zbog čega vrtložnost i viskoznost nema utjecaj na propagaciju valova. Rješenje HOS metode može se koristiti kao početno rješenje CFD simulacije, gdje bi nelinearan val dalje propagirao uz utjecaj vrtložnosti i viskoznosti, što bi ga činilo potpuno fizikalnim. Dakle, korištenjem HOS metode za inicijalizaciju valova u CFD simulacijama objedinjuju se prednosti obje metode, te se nadilaze njihove mane. HOS pruža brzo nelinearno rješenje polja valova, dok CFD pruža mogućnost potpuno

nelinearnog proračuna, što uključuje i interakciju s krutim i elastičnim tijelima. Takva sprega od velike je koristi za rješavanje navedenih problema u brodogradnji i pomorskoj tehnici, jer pruža mogućnost preciznog proračuna opterećenja pomorskih konstrukcija uslijed nailaska ekstremnog vala.

Jednodimenzionalna HOS metoda je implementirana je u sklopu rada za Rektorovu nagradu [11], te će se koristiti kao polazišna točka izrade ovog diplomskog rada. U sklopu ovog rada provesti će se proširenje već postojeće HOS metode na dvije dimenzije, te će se provesti dodatna validacija. Također, provesti će se trodimenzionalne simulacije ekstremnog vala.

Ostatak ovog rada organiziran je na slijedeći način. U drugom poglavlju opisan je matematički model metode te prateći matematički alati korišteni u radu. U to je uključen kratak prikaz modela potencijalnog strujanja, formulacija problema površinskih valova, osnove Fourierove transformacije te opis same spektralne valne metode viših redova. Zatim je u trećem poglavlju predstavljen numerički model gdje je problem prikazan s točke gledišta implementacije same metode. Tu je najprije detaljno prikazana numerička procedura implementiranog algoritma, nakon čega je opisana inicijalizacija HOS simulacije. Osim toga objašnjeno je i uklanjanje alias–efekta te je dan kratak opis numeričke integracije običnih diferencijalnih jednadžbi. Četvrto poglavlje sadrži validaciju implementirane metode na tri testna proračuna, dok su u zadnjem poglavlju prikazane pokazne CFD simulacije u kojima se koristila HOS metoda za inicijalizaciju ekstremnog vala.



## 2 Matematički model

U ovom poglavlju su opisane matematičke osnove implementirane metode [11]. Ukratko su prikazane osnovne relacije koje opisuju potencijalno strujanje obzirom da model površinskih valova pretpostavlja potencijalno strujanje fluida [15, 16]. Zatim su objašnjene diferencijalne jednadžbe koje opisuju nelinearne rubne uvjete na slobodnoj površini. Pretpostavka potencijalnog strujanja je opravdana obzirom na vrlo mali utjecaj viskoznosti i vrtložnosti na propagaciju valova. Matematički model spektralne metode viših redova je detaljno objašnjen. Zatim su prikazane teorije popratnih matematičkih alata koji se koriste u HOS metodi, kao što su Fourierova transformacija i numerička integracija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Matematički izrazi u ovom poglavlju pisani su u indeksnoj notaciji.

### 2.1 Potencijalno strujanje

Potencijalno strujanje je strujanje čije se polje brzine može u potpunosti opisati funkcijom potencijala brzine [17]. Potencijal brzine predstavlja apstraktno skalarno polje čiji je gradijent polje brzine strujanja. Pretpostavke na kojima se zasniva opisivanje strujanja potencijalnim strujanjem je svojstvo bezvrtložnosti, neviskoznosti i nestlačivosti.

Dva uvjeta su potrebna da bi se polje brzine strujanja moglo opisati potencijalom brzine strujanja. Iz zakona očuvanja mase proizlazi prvi uvjet; jednadžba kontinuiteta. Uz pretpostavku nestlačive tekućine jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

gdje je  $x_i$  radij vektor,  $v_i = f(x_i, t)$  je vektorsko polje brzine strujanja, dok  $t$  predstavlja vrijeme. Pretpostavlja se da se vektorsko polje brzine strujanja može izraziti pomoću potencijala brzine strujanja, jer su sva gradijentna polja bezvrtložna:

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (2)$$

gdje je  $\phi = f(x_i, t)$  potencijal brzine strujanja. Uvrštavanjem jednadžbe (2) u jednadžbu (1) dobiva se izraz:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0. \quad (3)$$

Jednadžba (3) predstavlja Laplaceovu jednadžbu [17]. Laplaceova jednadžba mora biti zadovoljena u cijeloj domeni, te osigurava konzervativnost i solenoidalnost strujanja.

Drugi uvjet koji mora biti zadovoljen je uvjet bezvrtložnosti potencijalnog strujanja:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 0, \quad (4)$$

gdje je  $\varepsilon_{ijk}$  permutacijski tenzor [18]. Svojstvo bezvrtložnosti proizlazi is same definicije potencijala brzine strujanja, primjerice za ravninu  $(x, y)$  vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Obzirom da vrijedi:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad (6)$$

može se iz jednadžbe (5) dobiti:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

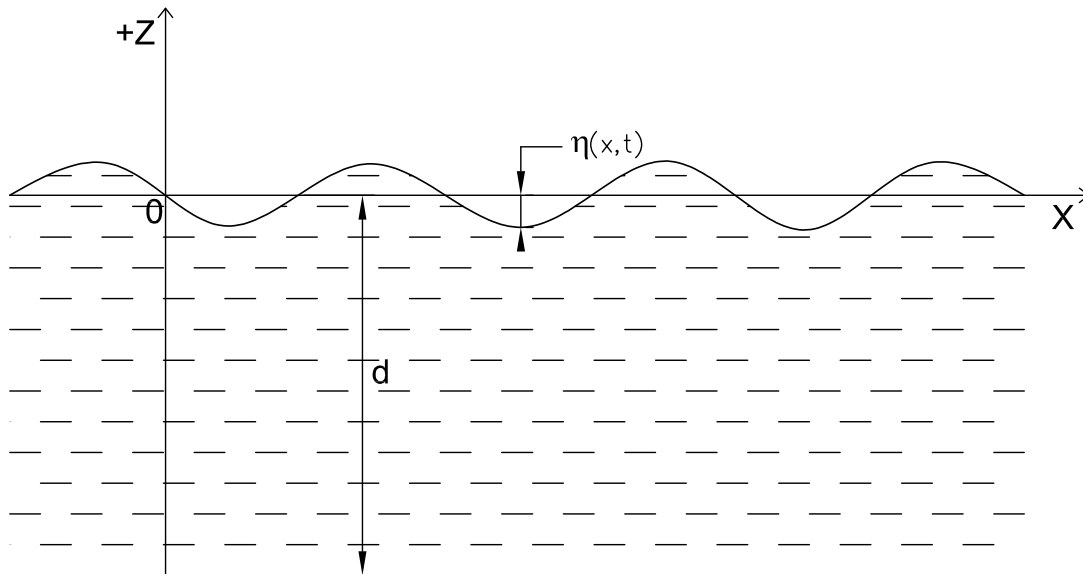
Izraz (7) predstavlja rotaciju polja brzine u ravnini  $(x, y)$ , te se isto može pokazati i za ostale dvije ravnine [15].

## 2.2 Formulacija problema površinskih valova

Matematičkim modelom valova na slobodnoj površini opisuje se promjena elevacije slobodne površine u vremenu, te polje brzine strujanja u volumenu tekućine. Površinski valovi su oscilatorno gibanje slobodne površine [16] koje nastaje kada vanjski utjecaj poremeti položaj slobodne površine, nakon čega sile gravitacije i površinske napetosti nastoje vratiti slobodnu površinu u prvobitno stanje. Površinska napetost je značajna za valove čiji je period manji od 0.25 s [19], dok je za valove sa periodom većim od 0.25 s dominantna sila gravitacije. U problemima brodogradnje i morske tehnike utjecaj sile površinske napetosti može se zanemariti, obzirom na veličnu valova koji se razmatraju. Vjetrovni valovi uobičajeno imaju period između 1 s i 30 s.

U ovom radu koristi se Kartezijev pravokutni koordinatni sustav čija  $(x, y)$  ravnina definira horizontalnu plohu. Pozitivan smjer  $z$  osi usmjeren je od morskog dna prema slobodnoj površini. Ishodište koordinatnog sustava je na neporemećenoj slobodnoj površini. Sl. 1 prikazuje koordinatni sustav.

Matematički model površinskih valova temelji se na četiri jednadžbe [15]:



Slika 1: Prikaz koordinatnog sustava [11].

1. Laplaceova jednadžba (3),
2. Rubni uvjet na morskom dnu,
3. Dinamički rubni uvjet slobodne površine,
4. Kinematički rubni uvjet slobodne površine.

Laplaceova jednadžba, predstavljena u Poglavlju 2.1, osigurava očuvanje mase te mora biti zadovoljena u cijelom volumenu tekućine.

Rubni uvjet na morskom dnu proizlazi iz uvjeta nepromočivosti dna, prema kojem je brzina u smjeru normale na površinu morskog dna jednaka nuli. U slučaju horizontalnog ravnog dna, normala ima smjer osi  $z$ . Tada rubni uvjet na morskom dnu glasi:

$$v_z \Big|_{z=-d} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-d} = 0, \quad (8)$$

gdje je  $d$  dubina, koja predstavlja vertikalnu udaljenost od morskog dna do neporemećene slobodne površine.

Dinamički rubni uvjet proizlazi iz pretpostavke o konstantnom tlaku na slobodnoj površini jednakom atmosferskom tlaku. Navedeno pojednostavljenje zanemaruje utjecaj površinske napetosti. Na slobodnoj površini postavlja se Bernoullijeva jednadžba:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (v_i v_i) + gz + \frac{p}{\rho} = C(t), \quad (9)$$

gdje je  $p$  atmosferski tlak,  $g$  je gravitacijska konstanta,  $\rho$  je gustoća tekućine, te je  $C(t)$  konstanta Bernoullijeve jednadžbe. Obzirom da je polje brzine gradijent potencijala  $\phi$ , konstantne vrijednosti u jednadžbi (9) ne utječu na rezultat, zbog čega će biti izostavljene iz daljnjeg razmatranja. Konačni oblik dinamičkog rubnog uvjeta dobiva se kada se u jednadžbi (9) brzina strujanja izrazi preko potencijala brzine strujanja prema izrazu (2):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + gz = 0. \quad (10)$$

Kinematički rubni uvjet propisuje da je brzina promjene elevacije slobodne površine jednaka vertikalnoj brzini gibanja čestice koja se nalazi na slobodnoj površini. Ovaj uvjet proizlazi iz činjenice da slobodna površina pretstavlja strujnicu, odnosno da ne postoji protok kroz slobodnu površinu, što se može zapisati kao:

$$v_z = \frac{D\eta}{Dt}, \quad (11)$$

gdje  $\eta = \eta(x, y, t)$  predstavlja funkciju elevacije slobodne površine. Materijalna derivacija  $D\eta/Dt$  [17] predstavlja promjenu veličine polja u Eulerovom referentnom sustavu. Eulerov referentni sustav se ne giba s česticom, već se čestice tekućine gibaju kroz koordinatni sustav. Kako bi se pratila promjena veličine polja u Eulerovom referentnom sustavu, potrebno je osim promjene u vremenu u obzir uzeti i promjenu u prostoru uslijed postojanja brzine fluida:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (12)$$

Obzirom da je  $v_z = dz/dt$  jednadžba (11) prelazi u:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \eta}{\partial z}. \quad (13)$$

Obzirom da funkcija elevacije slobodne površine ne ovisi o koordinati  $z$ , tj.  $\eta \neq f(z)$ , zadnji član u jednadžbi (13) jednak je nuli. Primjenom izraza (2) dobiva se konačni oblik kinematičkog rubnog uvjeta:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (14)$$

odnosno:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right). \quad (15)$$

Obzirom da jednadžbe (10) i (15) predstavljaju rubne uvjete na slobodnoj površini, potencijal brzine za koji se one rješavaju treba biti evaluiran na  $z = \eta(x, y, t)$ . Potencijal brzine strujanja na slobodnoj površini je  $\psi(x, y, t) = \phi(x, y, \eta(x, y, t), t)$ . Ako se jednadžbe (10) i (15) evaluiraju na slobodnoj površini za  $\psi$ , one poprimaju sljedeći oblik:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = 0. \quad (17)$$

Nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama (16) i (17) definirani su rubni uvjeti na slobodnoj površini. Nepoznate funkcije potencijala brzine na slobodnoj površini  $\psi(x, y, t)$  i elevacije slobodne površine  $\eta(x, y, t)$  su predmet HOS metode. Uvođenjem oznake  $W$  za vertikalnu brzinu slobodne površine:

$$W = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta}, \quad (18)$$

jednadžbe (16) i (17) prelaze u konačan oblik:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} W^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - W \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = 0, \quad (20)$$

koje se razlikuju od jednadžbi korištenih u [11] po tome što vrijede za dvije dimenzije prostora.

## 2.3 Fourierova transformacija

Veličine koje periodično variraju u vremenu ili prostoru mogu se predstaviti kao superpozicija harmonijskih komponenti [20]. Frekvencijskom analizom signala neke veličine u vremenu ili prostoru dobivaju se amplitude harmonijskih komponenti. Superpozicijom harmonijskih komponenti dobiva se rekonstruirani prvotni signal periodične veličine. Harmonijskom analizom moguće je opisati neku pojavu uz znatno manje informacija, obzirom da je umjesto cijelog vremenskog signala veličine potrebno znati samo amplitude pojedinih harmonijskih komponenti. Broj harmonijskih komponenti je proizvoljan, te u teoriji može biti beskonačan.

Fourierova transformacija je matematička operacija kojom se veličina opisana u vremenskoj ili prostornoj domeni projicira u veličinu u frekvencijskoj domeni. Općenito, funkcija  $g(t)$  prelazi u  $G(\omega)$ , gdje je  $t$  vrijeme u sekundama, dok je  $\omega$  kružna frekvencija izražena u radijanima po sekundi.

Za lakše razumijevanje Fourierove transformacije potrebno je opisati pojam Fourierovog niza. Fourierov niz je suma harmonijskih funkcija čije su frekvencije cjelobrojni uzastopni višekratnici osnovne frekvencije. Osnovna frekvencija odgovara osnovnom periodu promatrane pojave  $T$ , te iznosi  $\omega = 2\pi/T$ . Fourierov niz može se zapisati kao:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t + \varepsilon_n), \quad (21)$$

gdje je  $a_0$  srednja vrijednost,  $n$  je indeks harmonijske komponente Fourierovog niza,  $a_n$  je amplituda  $n$ -tog harmonika, dok je  $\varepsilon_n$  fazni pomak  $n$ -tog harmonika. Puno pogodniji oblik za numeričku implementaciju je kompleksni zapis Fourierovog reda. U kompleksnom obliku izraz (21) glasi:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (22)$$

pri čemu su  $c_n$  kompleksne amplitude harmonika. Informacija o faznom pomaku sadržana je u kompleksnoj amplitudi.

Tokom Fourierove transformacije računaju se amplitude i fazni pomaci pojedinih harmonika na temelju funkcije koja je definirana u vremenu ili prostoru. Dok je Fourierov niz suma harmonika čije su frekvencije višekratnici osnovne frekvencije, Fourierova transformacija je integral harmonika u beskonačnom rasponu frekvencija. Odnosno, Fourierova transformacija predstavlja poopćenje Fourierovog niza [20]. Izraz za Fourierovu transformaciju u obliku koji odgovara jednadžbi (21) glasi:

$$g(t) = \int_0^{\infty} G(\omega) \sin(\omega t + \varepsilon(\omega)) d\omega, \quad (23)$$

gdje je  $G(\omega)$  Fourierov par funkcije  $g(t)$ . Cilj Fourierove transformacije je pronalazak funkcije  $G(\omega)$ . Izraz koji odgovara obliku jednačbe (22) glasi:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (24)$$

Inverzna Fourierova transformacija je postupak računanja funkcije u vremenskoj domeni  $g(t)$  koristeći njen Fourierov par u frekvencijskoj domeni  $G(\omega)$ . U ovom radu će se koristiti konvencija predznaka pri kojoj eksponent ima pozitivan predznak za Fourierovu transformaciju (25), te negativan za inverznu Fourierovu transformaciju (24) [21]. Obzirom na to Fourierova transformacija glasi:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt. \quad (25)$$

Ukoliko su poznate samo diskretne vrijednosti kontinuirane funkcije  $g(t)$  na jednakim vremenskim razmacima, koristi se diskretna Fourierova transformacija [20]. Obzirom na diskretnu narav računala, u numeričkim proračunima se redovito koristi diskretna Fourierova transformacija. Vrijeme  $t$  i kružna frekvencija  $\omega$  u diskretnoj Fourierovoj transformaciji poprimaju diskretne vrijednosti:

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad n = -N/2, \dots, N/2, \quad (26)$$

$$t_k = k \frac{T}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (27)$$

pri čemu su  $n$  i  $k$  redni brojevi točaka diskretne mreže u frekvencijskoj, tj. u vremenskoj domeni, dok je  $N$  broj točaka na mreži. Integrali u izrazima (24) i (25) prelaze u diskretne sume:

$$g(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} G(\omega_n) e^{-i2\pi nk/N}, \quad (28)$$

$$G(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) e^{i2\pi nk/N}. \quad (29)$$

U izrazu (28) ispušten je član  $N/2$  kako bi broj sumanata odgovarao broju diskretizacijskih točaka, međutim zbog simetrije on je jednak članu  $-N/2$  [21].

U HOS metodi Fourierova transformacija provodi se kako bi se prostorni signal prikazao u frekvencijskoj domeni. Za razliku od jednodimenzionalne metode HOS implementirane u [11], ovdje je potrebno prikazati trodimenzionalni prostor, zbog čega se Fourierova transformacija signala provodi u dvije dimenzije, u smjeru osi  $x$  i osi  $y$ . Provođenjem dvodimenzionalne Fourierove transformacije dobiva se dvodimenzionalan spektralni prostor. Dakle umjesto varijable vremena  $t$ , koristit će se varijable prostora  $x$  i  $y$ . Kružna frekvencija  $\omega$  prelazi u valni broj  $K_n$  u smjeru osi  $x$  i valni broj  $K_m$  u smjeru osi  $y$ . Za dvodimenzionalnu Fourierovu transformaciju u prostoru izraz (28) glasi:

$$g(x_k, y_l) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{m=-N_y/2}^{N_y/2-1} G(K_n, K_m) e^{-i2\pi nk/N_x} e^{-i2\pi ml/N_y}, \quad (30)$$

$$G(K_n, K_m) = \sum_{k=0}^{N_x-1} \sum_{l=0}^{N_y-1} g(x_k, y_l) e^{i2\pi nk/N_x} e^{i2\pi ml/N_y}, \quad (31)$$

gdje su:

$$K_n = n \frac{2\pi}{L_x}, \quad n = -N_x/2, \dots, N_x/2, \quad (32)$$

$$K_m = m \frac{2\pi}{L_y}, \quad m = -N_y/2, \dots, N_y/2, \quad (33)$$

$$x_k = k \frac{L_x}{N_x}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad (34)$$

$$y_l = l \frac{L_y}{N_y}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad (35)$$

$$N = N_x \cdot N_y. \quad (36)$$



Veličine  $L_x$  i  $L_y$  su duljine domene u smjeru osi  $x$  i  $y$  koja se obuhvaća Fourierovom transformacijom, dok su  $N_x$  i  $N_y$  broj diskretizacijskih točaka u  $x$  odnosno u  $y$  smjeru.

Najpoznatija i najšire korištena metoda za računalnu provedbu diskretne Fourierove transformacije je tzv. brza Fourierova transformacija (eng. *Fast Fourier Transform*, skraćeno FFT) [21]. FFT smanjuje broj operacija potrebnih za diskretnu Fourierovu transformaciju s  $O(N^2)$  na  $O(N \log_2 N)$ . Više detalja o FFT algoritmu može se naći u [21]. U ovom radu se isključivo koristi FFT algoritam za provedbu diskretne Fourierove transformacije.

## 2.4 Spektralna metoda viših redova za nelinearnu propagaciju valova (HOS)

Da bi se jednadžbe (19) i (20) riješile izravno bio bi potreban iterativni postupak zbog nelinearnog karaktera jednadžbi. Kako bi se dobilo rješenje za  $\psi$  i  $\eta$  u svakom vremenskom koraku potrebno je više puta riješiti obje jednadžbe da bi rješenje konvergiralo do prihvatljivo malog odstupanja u odnosu na prethodnu iteraciju. Premda je ovakav pristup moguć, iziskuje velik broj računskih operacija. U HOS metodi jednadžbe se ne rješavaju iterativno, već se rješenje pretpostavlja kao Fourierov niz te se računa do konačnog reda nelinearnosti. HOS metodu su 1987. godine objavili Dommermuth & Yue [6] te West et al. [7], koji su nezavisno došli do gotovo identične metode za nelinearnu propagaciju valova. Od tada do danas su objavljeni mnogi radovi u kojima je metoda nadopunjavana i modificirana, kao što su Tanaka [10] i Ducrozet et al. [9].

HOS primjenjuje pseudo–spektralnu metodu rješavanja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi (16) i (17). Pseudo–spektralna metoda je metoda rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za koje postoji periodično rješenje [22]. Karakteristika pseudo-spektralne metode je da se prostorne derivacije računaju u Fourierovom (spektralnom) prostoru, dok se vremenska integracija jednadžbe provodi u fizičkom (vremenskom) prostoru.

Za neograničeno duboku vodu pretpostavlja se rješenje potencijala u obliku Fourierovog niza koji glasi:

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_k \sum_l c_{k,l}(t) e^{K_k l z} e^{iK_k x} e^{iK_l y}, \quad (37)$$

gdje su  $c_{k,l}(t)$  Fourierovi koeficijenti,  $K_k$  je valni broj odgovarajućeg harmonika u smjeru osi  $x$ , dok je  $K_l$  valni broj u smjeru osi  $y$ .  $K_{k,l}$  je zbirni valni broj, izraz (40). Ovdje treba uočiti da indeks  $k, l$  Fourierovih koeficijenata  $c_{k,l}(t)$  određuje pripadni valni broj. Argument  $t$  je naznaka da se koeficijenti mijenjaju u vremenu, što treba razlikovati od izraza (28). Rješenje pretpostavljeno jednadžbom (37) zadovoljava Laplaceovu jednadžbu (3). Valni brojevi se određuju kao:

$$K_k = \frac{2\pi k}{L_x}, \quad (38)$$

$$K_l = \frac{2\pi l}{L_y}, \quad (39)$$

$$K_{k,l} = \sqrt{K_k^2 + K_l^2}. \quad (40)$$

Jednadžbe (19) i (20) sadrže prostorne derivacije potencijala brzine  $\psi$ . Pomoću izraza (37) vrlo je jednostavno u Fourierovom prostoru odrediti horizontalne derivacije potencijala. Međutim, određivanje vertikalne derivacije potencijala brzine na slobodnoj površini zahtjevalo bi poznavanje funkcije potencijala  $\phi$  u cijelom volumenu proračunske domene. Funkcija potencijala trebala bi se derivirati obzirom na varijablu  $z$ , te evaluirati za  $z = \eta$ . Stoga se radi o Dirichletovom problemu gdje je potrebno pronaći funkciju potencijala brzine  $\phi$  u domeni čija granica ima kompliciran oblik  $\eta(x, y, t)$ . Da bi se pojednostavio problem, funkcija potencijala brzine razvija se u Taylorov red oko  $z_0 = 0$ , pri čemu se uzima u obzir da je varijabla  $z$  zamijenjena funkcijom slobodne površine  $z = \eta(x, y, t)$  [10]. Time se Dirichletov problem sveo na granicu jednostavnog oblika za koju vrijedi  $z = 0$ :

$$\phi(x, y, \eta, t) = \psi(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \phi(x, y, 0, t). \quad (41)$$

Pri tome se vertikalna brzina može izraziti kao:

$$W(x, y, t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^{i+1}}{\partial z^{i+1}} \phi(x, y, 0, t). \quad (42)$$

Kako bi se omogućilo sekvencijalno rješavanje nelinearnosti problema, pretpostavlja se razvoj potencijala brzine  $\phi$  u perturbacijski red obzirom na mjeru nelinearnosti. Pogodna mjera nelinearnosti za površinske valove je strmina vala  $\varepsilon = Ka$  [16], gdje je  $K$  valni broj dok je  $a$  amplituda vala. Razvoj potencijala brzine strujanja u perturbacijski red glasi:

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_1 + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3 + \dots = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}, \quad (43)$$

pri čemu je  $M$  red nelinearnosti do kojega se vrši proračun. Redovi nelinearnosti veći od  $M$  su zanemareni, dok je odabrani red nelinearnosti proizvoljan. Razvojem svakog pojedinačnog reda potencijala brzine strujanja  $\phi$  u Taylorov red prema izrazu (41) dobije se:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=0}^{M-m} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \phi^{(m)}(x, y, 0, t). \quad (44)$$

Nepoznanice u jednadžbi (44) su pojedini redovi potencijala brzine strujanja  $\phi^{(m)}$ , koji se određuju tako da se u jednadžbi (44) izjednačavaju članovi istog reda nelinearnosti obzirom na  $\varepsilon$ , kao što je pokazano u sljedećem izrazu:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= \psi(x, y, t), \\ \phi^{(2)} &= -\eta \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(1)}, \\ \phi^{(3)} &= -\eta \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(2)} - \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(1)}, \\ \phi^{(4)} &= -\eta \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(3)} - \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(2)} - \frac{1}{3!} \eta^3 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi^{(1)}, \\ &\vdots, \\ \phi^{(m)} &= -\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \phi^{(m-i)}; \quad m = 2, 3, \dots, M. \end{aligned} \quad (45)$$

Redovi nelinearnosti se određuju obzirom na red varijabli  $\eta$  i  $\phi^{(m)}$ . U izrazu (44) se unutarnja suma provodi do reda  $M - m$ , nakon čega se preostali članovi Taylorovog reda (42) odbacuju. Taylorovi članovi iznad reda  $M - m$  uzrokovali bi gubitak konzistentnosti obzirom na red nelinearnosti  $M$ . Nakon proračuna redova potencijala brzine  $\phi^{(m)}$ , može se izračunati vertikalna brzina slobodne površine  $W$ . Prema West et al. [7] vertikalna brzina se također razvija u perturbacijski red, pri čemu se pojedini redovi računaju koristeći redove potencijala  $\phi^{(m)}$ :

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(1)}, \\ W^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(2)} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(1)}, \\ W^{(3)} &= \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(3)} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(2)} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi^{(1)}, \\ W^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(4)} + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi^{(3)} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3}{\partial z^3} \phi^{(2)} + \frac{1}{3!} \eta^3 \frac{\partial^4}{\partial z^4} \phi^{(1)}, \\ &\vdots \\ W^{(m)} &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\eta^i}{i!} \frac{\partial^{(i+1)}}{\partial z^{(i+1)}} \phi^{(m-i)}; \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (46)$$

Vertikalna brzina dobije se sumiranjem pojedinih redova vertikalne brzine:

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}. \quad (47)$$

Mogućnost odabira reda nelinearnosti  $M$  čini HOS metodu fleksibilnom ovisno o potrebi proračuna. Prednost HOS metode je to što ne zahtjeva više iteracija po vremenskom koraku, te mogućnost korištenja FFT-a što značajno ubrzava provođenje diskretne Fourierove transformacije i računanje prostornih derivacija.

West et al. [7] predložili su pristup rješavanja jednadžbi (19) i (20) pri kojem se očuva konzistencija redova nelinearnosti. Naime, uslijed množenja pojedinih članova dolazi do povećanja reda nelinearnosti što uzrokuje da svi članovi jednadžbi (19) i (20) u konačnici nisu istog reda nelinearnosti  $\varepsilon$ . Kako bi se održala konzistentnost reda nelinearnosti, suma vertikalne brzine u izrazu (47) se skraćuje na niži stupanj nelinearnosti. Red nelinearnosti pri kojem će se suma skratiti ovisi o redu nelinearnosti člana s kojim se vertikalna brzina množi. Kvadrat vertikalne brzine se također tretira na način da se očuva red nelinearnosti, što se može zapisati kao:

$$W^2(x, y, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)} W^{(M-m)}, \quad (48)$$

U ovom radu je implementirana konzistencija obzirom na red nelinearnosti, te je implementiran i pristup koji su predložili Dommermuth & Yue [6], u kojemu se sume ne skraćuju. Razlika u tretiranju članova viših redova čini ujedno i jedinu razliku između pristupa predloženog u [7] i [6]. Implementirana HOS metoda podržava oba pristupa.

## 2.5 Spektri energije morskih valova

Kao što će kasnije biti opisano u Poglavlju 3.3, za inicijalizaciju HOS proračuna koristi se linearno rješenje polja valova. Polje morskih valova opisuje se kao superpozicija većeg broja pojedinih valnih komponenti. Pojedine valne komponente predstavljene su pomoću linearnog valnog modela poznatog kao Airyev val [2]. Obzirom da se radi o linearnom modelu, moguće je superpozicijom pojedinih harmonika opisati polje valova koje nalikuje morskom valovlju. U stvarnosti polje valova na moru ovisi o brojnim faktorima kao što su duljina privjetrišta, jačina vjetra, vrijeme djelovanja vjetra na slobodnu površinu mora i drugo. Mjerenjima oscilacija slobodne površine u vremenu moguće je pomoću Fourierove transformacije prikazati udio harmonika pojedinih frekvencija na ukupno stanje mora. Najčešće se udio harmonika prikazuje pomoću spektra gustoće energije valova, obzirom da u linearnoj teoriji specifična energija vala ovisi o kvadratu valne amplitude. Razlog zbog kojeg se prikazuje spektar gustoće energije umjesto spektra amplituda vala je statističke prirode. Naime uz pretpostavku da elevacija vala slijedi Gaussovu razdiobu nulte

srednje vrijednosti može se uspostaviti jednostavna veza između varijance valne elevacije i spektra gustoće energije. Ovo svojstvo je vrlo korisno za linearne metode proračuna gibanja broda na valovima. Za više detalja čitatelja se upućuje na [2].

Spektar gustoće energije valova  $S_\eta(\omega)$ , ili kraće spektar valova funkcija je valne frekvencije. Izgled spektra ovisit će o ranije spomenutim utjecajima: duljini privjetrišta, brzini vjetra itd. Postoji cijeli niz empirijskih izraza koji omogućuju približno ocjenjivanje valnog spektra. Teorijski empirijski valni spektri zasnivaju se na dugoročnim mjerenjima elevacije valova. Glavni parametri koji utječu na izgled funkcije spektra su značajna valna visina i karakteristični valni period. Značajna valna visina statistička je veličina koja predstavlja srednju vrijednost trećine najviših valova. Karakterističan valni period može biti srednji period valova ili vršni period valova, koji odgovara frekvenciji za koju funkcija  $S_\eta(\omega)$  ima maksimum. Izraz diskretiziranog valnog spektra obzirom na frekvenciju općenito glasi:

$$S_\eta(\omega_n) \cdot \Delta\omega = \sum_{\omega_n}^{\omega_n + \Delta\omega} \frac{1}{2} \eta_{a_n}^2, \quad (49)$$

gdje je  $\Delta\omega$  frekvencijski korak koji ovisi o broju frekvencija  $\omega_n$  i frekvencijskom rasponu spektra.  $\eta_{a_n}$  je amplituda harmonika. Pomoću jednadžbe (49) moguće je, uz poznatu funkciju spektra  $S_\eta(\omega_n)$  izračunati amplitude pojedinih harmonika za proizvoljnu finoću diskretizacije frekvencijskog prostora. Fazni pomak pojedinih harmonika računa se uz pretpostavku jednolike distribucije vjerojatnosti faznog pomaka [15]. Elevacija slobodne površine računa se kao superpozicija pojedinih harmonika:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^N \eta_{a_n} \cos(\omega_n t - k_n x + \varepsilon_n), \quad (50)$$

gdje je  $k_i$  valni broj  $i$ -tog harmonika,  $\omega_i$  je frekvencija te je  $\varepsilon_i$  fazni pomak.

U ovom radu koristi se JONSWAP (eng. *Joint North Sea Wave Project*) model teoretskog spektra, koji je razvijen za Sjeverno more. Karakteristika JONSWAP spektra je relativno strmi vrh spektra, odnosno izražena dominacija uskog frekvencijskog pojasa, što je karakteristično za ograničena privjetrišta i nerazvijeno stanje mora. Empirijski izraz ovisi o značajnoj valnoj visini  $H_s$  i vršnom valnom periodu  $T_p$ , te glasi:

$$S_\eta(\omega) = \frac{320 H_s^2}{T_p^4} \omega^{-5} \exp\left(\frac{-1950}{T_p^4} \omega^{-4}\right) \gamma^A, \quad (51)$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
&\gamma = 3.3, \text{ koeficijent vršnosti,} \\
&A = \exp \left( - \left( \frac{\omega}{\omega_p} - 1 \right)^2 \right), \\
&\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}, \text{ vršna kružna frekvencija,} \\
&\sigma = \begin{cases} 0.07 & \text{za } \omega < \omega_p, \\ 0.09 & \text{za } \omega > \omega_p. \end{cases} \quad (52)
\end{aligned}$$

Za potrebe inicijalizacije dvodimenzionalne HOS simulacije potrebno je trodimenzionalno polje valova. Kao što se vidi iz izraza (50), gornji izrazi ovise samo o  $x$  koordinati, odnosno opisuju ravninske valove. Kako bi se došlo do trodimenzionalnog polja valova, potrebno je koristiti tzv. usmjerene dvodimenzionalne valne spektre [19]. Usmjereni valni spektri modeliraju nailazak valova iz dominantnog smjera uz koje postoje i valovi koji nailaze pod kutem u odnosu na dominantni smjer. Takvom prostornom superpozicijom komponenti dobiva se trodimenzionalno polje valova. Kako bi se opisala usmjerenost valova spektra, potrebno je uvesti distribuciju spektra  $D(\theta, \omega)$ , gdje je  $\theta$  kut nailaska valova koji je definiran u odnosu na dominantan smjer nailaska vala. Mjerenjem je jako teško utvrditi distribuciju usmjerenog spektra, zbog čega se pribjegava pretpostavkama na temelju kojih su definirane pojednostavljene distribucije. Prva pretpostavka je da spektar za svaku frekvenciju  $\omega$  ima maksimum za  $\theta = 0$ , tj. za dominantni smjer nailaska valova. Druga pretpostavka je da iznos spektra za neku frekvenciju  $\omega$  postupno opada za veće stupnjeve nailaska  $\theta$ . U jednostavnim idealiziranim modelima usmjerene distribucije zanemaruje se zavisnost o frekvenciji  $\omega$ , odnosno  $D(\theta, \omega) = D(\theta)$ . Izraz za distribuciju usmjerenosti implementiran i korišten u ovom radu glasi [19]:

$$D(\theta) = \begin{cases} A(m) \cos^m \theta & \text{za } |\theta| \leq \pi/2, \\ 0 & \text{za } |\theta| > \pi/2, \end{cases} \quad (53)$$

gdje je  $A$  koeficijent normalizacije, dok je  $m$  koeficijent usmjerenosti, tj. pomoću njega se može mijenjati razina usmjerenosti spektra. Za viši  $m$  funkcija  $D(\theta)$  ima strmiji pad prema višim kutovima nailaska vala  $\theta$ , tj. spektar je usmjereniji. Spektri kod kojih je usmjerenost manje izražena rezultirati će valovima sa dugim valnim brijegovima (eng. "*long crested waves*"), dok će usmjereniji spektri rezultirati valovima kraćih valnih brijegova (eng. "*short crested waves*"), gledano u smjeru okomitom na dominantan smjer. Usmjereniji valni spektar ima manje rasipanje valne energije u odnosu na dominantni kut nailaska. Zbog jednostavnosti se najčešće koristi koeficijent

$m = 2$ , no njegova vrijednost može biti znatno veća. Prema [9], realistično polje valova postiže se za  $m = 30$  do 90. Koeficijent normalizacije definiran je izrazom:

$$A = \frac{\Gamma(1/2m + 1)}{\Gamma(1/2m + 1/2) \sqrt{\pi}}, \quad (54)$$

gdje je  $\Gamma(\cdot)$  gama funkcija. Dvodimenzionalni spektar je umnožak distribucije usmjerenosti spektra i jednodimenzionalnog spektra:

$$S_\eta(\omega, \theta) = S_\eta(\omega) D(\theta). \quad (55)$$

Amplituda pojedinog harmonika se određuje na temelju frekvencije vala  $\omega$  i kuta nailaska  $\theta$ , što analogno izrazu (49) u diskretiziranom obliku glasi:

$$S_\eta(\omega_n, \theta_m) \Delta\omega \Delta\theta = \sum_{\omega_n}^{\omega_n + \Delta\omega} \sum_{\theta_m}^{\theta_m + \Delta\theta} \frac{1}{2} \eta_{a_{n,m}}^2. \quad (56)$$

Ako se uzima jedna valna amplituda po intervalu  $\Delta\omega$  odnosno  $\Delta\theta$ , valna amplituda pojedinog harmonika može se izračunati kao:

$$\eta_{a_{n,m}} = \sqrt{2S_\eta(\omega_n, \theta_m) \Delta\omega \Delta\theta}. \quad (57)$$

Funkcija elevacije slobodne površine sada ovisi o  $x$  i  $y$  koordinati. Za svaki harmonik određene frekvencije  $\omega$  sada postoji  $M$  komponenti amplituda koje ovise o kutu nailaska  $\theta$ . Funkcija elevacije slobodne površine sada glasi:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \eta_{a_{n,m}} \cos(\omega_n t - k_n \cos(\theta_m)x - k_n \sin(\theta_m)y + \varepsilon_{n,m}), \quad (58)$$

gdje je  $k_n$  valni broj koji odgovara frekvenciji  $\omega_n$  preko disperzijske jednadžbe:

$$\omega_n^2 = k_n g \tanh(k_n d). \quad (59)$$

Pomoću izraza (58) dolazi se do linearnog rješenja koje se koristi kao početni uvjet za HOS proračun. O inicijalizaciji HOS proračuna biti će više rečeno u Poglavlju 3.3.

### 3 Numerički model

Implementacija HOS metode provedena je u okruženju programskog paketa OpenFOAM [23]. U OpenFOAM okruženju postoje algoritmi koji su potrebni za provedbu HOS metode, kao što je primjerice algoritam za brzu Fourierovu transformaciju (FFT), te algoritmi za numeričku integraciju običnih diferencijalnih jednadžbi. Implementacija FFT algoritma i algoritama za numeričku integraciju običnih diferencijalnih jednadžbi je provedena prema [21]. U ovom poglavlju je prvenstveno predstavljena numerička procedura HOS metode te njena inicijalizacija [11], sa naglaskom na proširenje metode na dvije dimenzije. Također će ukratko biti predstavljen i problem alias-efekta te procedura numeričke integracije običnih diferencijalnih jednadžbi.

#### 3.1 Numerička procedura HOS metode

Numerička procedura započinje s diskretnim potencijalom brzine na površini  $\psi$  i funkcijom elevacije slobodne površine  $\eta$  poznatih iz prethodnog vremenskog koraka ili iz početnih uvjeta. Diskretne vrijednosti postavljene su na jednako razmaknute točke u fizičkoj domeni  $n_x = 1, 2, \dots, N_x$  u smjeru osi  $x$  i  $n_y = 1, 2, \dots, N_y$  u smjeru osi  $y$ . Točke su ekvidistantno postavljene uzduž domene duljine  $L_x$  u  $x$  smjeru i  $L_y$  u  $y$  smjeru. Razmak između točaka je tada  $\Delta x = L_x/N_x$  odnosno  $\Delta y = L_y/N_y$ . Kada su  $\psi$  i  $\eta$  na raspolaganju, redovi potencijala brzine mogu se sekvencijalno izračunati prema izrazu (45). Prostorne derivacije redova potencijala brzine strujanja se pri tome računaju u Fourierovom prostoru. Pojedini se red potencijala  $\phi^{(m)}$  Fourierovom transformacijom preslikava u Fourierov prostor. Fourierova transformacija pojedinog reda potencijala  $\phi^{(m)}$  provodi se kako bi se odredili članovi za izračun sljedećeg reda potencijala  $\phi^{(m+1)}$ . Članovi pojedinog reda potencijala brzine sadrže vertikalne derivacije prethodnih redova potencijala. Nakon proračuna prostorne derivacije u Fourierovom prostoru, vrši se inverzna Fourierova transformacija čime se derivacije preslikavaju u fizikalni prostor te se množe s odgovarajućom potencijom funkcije  $\eta$ . U ovom radu diskretna Fourierova transformacija je označena sa  $\mathcal{F}(f)$ , dok je inverzna Fourierova transformacija označena sa  $\mathcal{F}^{-1}(f)$ . Koristeći jednadžbu (16), vertikalna derivacija potencijala brzine općenito glasi:

$$\frac{\partial^j \phi}{\partial z^j} = \frac{\partial^j}{\partial z^j} \left( \sum_k \sum_l c_{k,l}(t) e^{K_{k,l}z} e^{iK_{k,x}x} e^{iK_{l,y}y} \right) = \sum_k \sum_l c_{k,l}(t) e^{K_{k,l}z} K_{k,l}^j e^{K_{k,l}z} e^{iK_{k,x}x} e^{iK_{l,y}y}. \quad (60)$$

Jednadžba (45) može se sa stanovišta numeričke implementacije zapisati kao:



$$\begin{aligned}
\phi^{(1)} &= \psi(x_n, t), \\
\phi^{(2)} &= -\eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(1)}(t) K_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}, \\
\phi^{(3)} &= -\eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(2)}(t) K_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\} - \frac{1}{2} \eta^2 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(1)}(t) K_{k,l}^2 e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}, \\
&\vdots \\
\phi^{(m)} &= -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(m-j)}(t) K_{k,l}^j e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}; \quad m = 2, 3, \dots, M \quad , \quad (61)
\end{aligned}$$

gdje je  $c_{k,l}^{(m-j)}(t)$  Fourierov koeficijent reda potencijala  $m-j$ , pripadajuće  $k, l$ -te harmonijske komponente Fourierove sume.  $c_{k,l}^{(m-j)}(t)$  dobije se provedbom dvodimenzionalnog FFT-a na  $(m-j)$ -tom redu potencijala brzine, čije su vrijednosti poznate na točkama prostorne mreže:

$$c_{k,l}^{(m-j)}(t) = \mathcal{F} \left\{ \phi^{(m-j)}(x, y, t) \right\}. \quad (62)$$

Kada su poznati redovi potencijala brzine može se nastaviti proračun redova vertikalne brzine slobodne površine  $W$  prema izrazu (46). Jednadžba (46) može se drugačije zapisati kao:

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(1)}(t) K_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}, \\
W^{(2)} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(2)}(t) K_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\} + \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(1)}(t) K_{k,l}^2 e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}, \\
W^{(3)} &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(3)}(t) K_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\} + \eta \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(2)}(t) K_{k,l}^2 e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}, \\
&\quad + \frac{1}{2} \eta^2 \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(1)}(t) K_{k,l}^3 e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}, \\
&\vdots \\
W^{(m)} &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^{(m-j)}(t) K_{k,l}^{(j+1)} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad . \quad (63)
\end{aligned}$$

Inverzne diskretne Fourierove transformacije koje se pojavljuju u izrazu (63) su već provedene u izrazu (61), osim za zadnji red vertikalne brzine  $W^{(M)}$ . Za zadnji red vertikalne brzine potrebno je naknadno provesti Fourierove transformacije. Tokom provedbe sekvencijalnog postupka prema

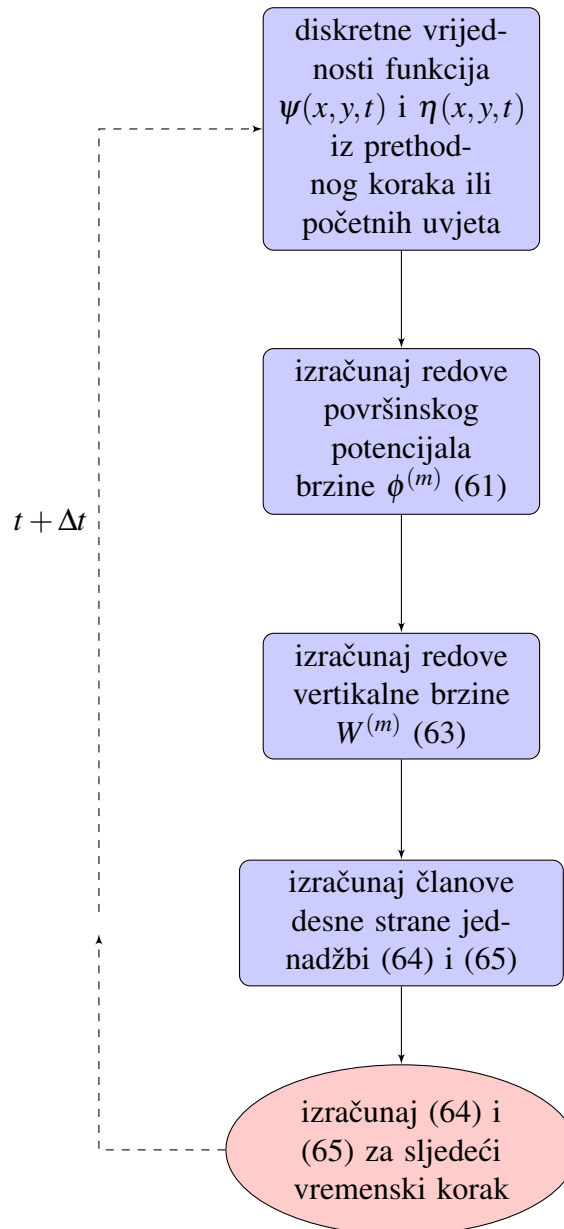
izrazu (61), pojedine inverzne Fourierove transformacije koje predstavljaju vertikalne derivacije potencijala brzine se privremeno spremaju za potrebe proračuna redova vertikalne brzine  $W$ .

Kada su poznati redovi vertikalne brzine  $W^{(m)}$ , pristupa se izračunu pojedinih članova diferencijalnih jednadžbi (19) i (20). Pri tome se prostorne derivacije funkcije slobodne površine  $\eta$  i površinskog potencijala brzine  $\psi$  računaju u spektralnom prostoru. Ovdje je potrebno provesti Fourierovu transformaciju funkcije elevacije slobodne površine  $\eta$  obzirom da do sada nije bila provedena. Fourierova transformacija površinskog potencijala slobodne površine  $\psi$  provedena je za potrebe proračuna drugog reda potencijala brzine  $\phi^{(2)}$  u izrazu (61). Nakon izračuna prostornih derivacija, one se inverznom Fourierovom transformacijom projiciraju u fizički prostor te se množe s odgovarajućim članovima. Dinamički i kinematički rubni uvjet, jednadžbe (19) i (20), mogu se sa stanovišta numeričke implementacije zapisati kao:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t} = & -g\eta(x,y,t) - \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^\psi(t) iK_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} W^2 + \frac{1}{2} W^2 \left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^\eta(t) iK_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\} \right)^2, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(x,y,t)}{\partial t} = & W + W \left( \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^\eta(t) iK_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\} \right)^2 \\ & - \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^\psi(t) iK_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_k \sum_l c_{k,l}^\eta(t) iK_{k,l} e^{iK_k x} e^{iK_l y} \right\}, \end{aligned} \quad (65)$$

gdje su  $c_{k,l}^\psi(t)$  i  $c_{k,l}^\eta(t)$  Fourierovi koeficijenti dobiveni Fourierovom transformacijom diskretnih vrijednosti  $\psi(x,y,t)$  i  $\eta(x,y,t)$ . Sl. 2, preuzeta iz [11], prikazuje dijagram toka implementiranog koda HOS metode za jedan vremenski korak. Zadnji korak algoritma prikazanog na Sl. 2 provodi se pomoću jedne od metoda numeričke integracije običnih diferencijalnih jednadžbi, koje su objašnjene u Poglavlju 3.5.



Slika 2: Dijagram toka algoritma HOS metode [11].

### 3.2 Sprega HOS metode i CFD simulacije

Da bi se rješenja HOS proračuna spregnulo s CFD simulacijom, potrebna je funkcija elevacije slobodne površine  $\eta(x,y,t)$  i polje brzine strujanja  $v_i(x,y,z,t) = (v_x, v_y, v_z)$ . Polje brzine računa se pomoću potencijala brzine  $\phi$  kao što je objašnjeno u Poglavlju 2.1. Rješenje HOS metode je elevacija slobodne površine  $\eta(x,y,t)$  i površinski potencijal brzine strujanja  $\psi(x,y,t)$ . Kako bi se dobilo polje brzine strujanja u cijelom volumenu tekućine, potrebno je izračunati potencijal brzine strujanja  $\phi(x,y,z,t)$  u cijelom volumenu tekućine. Za tekućinu konačne dubine pretpostavljeno rješenje potencijala slično je izrazu (37) te glasi [16]:

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_k \sum_l c_{k,l}^\psi(t) \frac{\cosh(K_{k,l}(z+d))}{\cosh(K_{k,l}d)} e^{iK_k x} e^{iK_l y}. \quad (66)$$

Izraz koji opisuje funkciju površinskog potencijala brzine glasi:

$$\psi(x, y, t) = \sum_k \sum_l c_{k,l}^\psi(t) e^{iK_k x} e^{iK_l y}, \quad (67)$$

Gledajući izraze (66) i (67) očito je da se koriste isti Fourierovi koeficijenti  $c_{k,l}^\psi(t)$ . Također, očito je da jednadžba (66) za  $z = \eta(x, y, t)$  neće dati izraz (67), što mora biti zadovoljeno obzirom da je  $\psi(x, y, t) = \phi(x, y, z = \eta(x, y, t), t)$ . Iz tog razloga uvodi se Wheelerova korekcija [15]. Pomoću Wheelerove korekcije najveće vrijednosti potencijala su na slobodnoj površini, te se potencijal smanjuje približno eksponencijalno udaljavanjem od slobodne površine u negativnom smjeru vertikalne osi. Uvođenjem Wheelerove korekcije varijabla  $z$  u izrazu (66) zamjenjuje se varijablom:

$$z' = qz + d(q-1), \quad (68)$$

gdje je  $q = d / (d + \eta(x, y, t))$ . Fourierovi koeficijenti  $c_{k,l}^\psi(t)$  su poznati, te se mogu koristiti kako bi se došlo do potpunog polja potencijala brzine strujanja  $\phi(x, y, z, t)$ . Kako bi se od rješenja  $\psi(x, y, t)$  došlo do rješenja u volumenu  $\phi(x, y, z, t)$  potrebno je pojedine Fourierove harmonike pomnožiti s razlomkom u izrazu (66). Komponente brzine  $v_x(x, y, z, t)$ ,  $v_y(x, y, z, t)$  i  $v_z(x, y, z, t)$  računaju se deriviranjem potencijala brzine:

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z, t) &= \sum_k \sum_l c_{k,l}^\psi(t) iK_k \frac{\cosh(K_{k,l}(z'+d))}{\cosh(K_{k,l}d)} e^{iK_k x} e^{iK_l y}, \\ v_y(x, y, z, t) &= \sum_k \sum_l c_{k,l}^\psi(t) iK_l \frac{\cosh(K_{k,l}(z'+d))}{\cosh(K_{k,l}d)} e^{iK_k x} e^{iK_l y}, \\ v_z(x, y, z, t) &= \sum_k \sum_l c_{k,l}^\psi(t) K_{k,l} \frac{\sinh(K_{k,l}(z'+d))}{\cosh(K_{k,l}d)} e^{iK_k x} e^{iK_l y}. \end{aligned} \quad (69)$$

Polje brzine koje je potrebno za inicijalizaciju vala u CFD simulaciji potpuno je definirano izrazima (69). Evaluacija elevacije slobodne površine je trivijalna, te glasi:

$$\eta(x, y, t) = \sum_k \sum_l c_{k,l}^\eta(t) e^{iK_k x} e^{iK_l y}. \quad (70)$$

Rješenje HOS proračuna u bilo kojem trenutku može se spregnuti s CFD proračunom. Koristi se Naval Hydro paket u programu OpenFOAM koristi model dvofaznog, viskozno strujanja sa mogućnošću modeliranja turbulencije. Polje brzine i elevacija slobodne površine se iz valne

teorije nameće u CFD simulaciju u dijelovima domene koji se nazivaju relaksacijskim zonama. Ulazna relaksacijska zona postavlja se na početak domene, te se u njoj postepeno prelazi s nametnutog rješenja iz valne teorije na rješenje koje nudi CFD proračun. Težinska funkcija kojom se vrši prijelaz s nametnutog polja na vrijednosti koje su rezultat CFD proračuna glasi [24]:

$$f = w_R f_{POT} + (1 - w_R) f_{CFD}, \quad (71)$$

gdje je  $f$  općenito proračunsko polje,  $w_R$  je težinski faktor,  $f_{POT}$  je vrijednost koja se nameće iz valne teorije, dok je  $f_{CFD}$  polje koje je rezultat CFD proračuna. Više detalja o CFD simulacijama valova koristeći relaksacijske zone, te primjer takve simulacije može se naći u [25, 26]. U CFD simulaciji može se doći do nelinearnog rješenja strmijih valova linearnom inicijalizacijom, međutim takav pristup je vrlo skup obzirom na potrebno vrijeme proračuna da bi se razvile nelinearnosti. Također, ukoliko je potreban ekstremno val, može proći puno vremena do njegovog pojavljivanja. HOS nudi rješenje valnog polja strujanja koje je nelinearno, te je stoga potrebna puno manja numerička domena za CFD simulaciju, te kraće simulirano vrijeme. To značajno smanjuje potrebno vrijeme proračuna. Spregom HOS metode i CFD simulacije otklanjaju se nedostaci obje metode, te se objedinjuju njihove prednosti. Nedostatak HOS metode je nemogućnost potpunog opisa slamanja vala. Dakle, nelinearno rješenje HOS metode može se koristiti za inicijalizaciju CFD simulacije, u kojoj se može nastaviti nelinearna propagacija s utjecajem vrtložnosti i viskoznosti, te se može opisati lom vrha vala.

### 3.3 Inicijalizacija HOS simulacije

Da bi se mogao započeti proračun nelinearne propagacije valova pomoću HOS metode potrebno je poznavati početne vrijednosti traženih funkcija površinskog potencijala brzine  $\psi$  i elevacije slobodne površine  $\eta$  na diskretnom broju točaka  $N_x \cdot N_y$ . Drugim riječima, treba poznavati  $\psi(x, y, t = 0)$  i  $\eta(x, y, t = 0)$  za diskretne vrijednosti koordinata  $x$  i  $y$ . Vrijednosti  $\psi(x, y, t = 0)$  i  $\eta(x, y, t = 0)$  moraju biti takve da također zadovoljavaju rubne uvjete (19) i (20), zbog čega ovaj problem nije trivijalan. Linearno rješenje rubnih uvjeta slobodne površine najjednostavnije je rješenje koje se može postaviti kao početni uvjet. Obzirom da se radi o rješenju lineariziranog problema rubnih uvjeta slobodne površine [16], pri čemu su uvedena brojna pojednostavljenja, u općem slučaju takva rješenja ne zadovoljavaju jednadžbe (19) i (20). Prema Dommermuthu [8], linearno rješenje kao početni uvjet uzrokuje nestabilnosti proračuna, koje mogu uzrokovati sporiju konvergenciju rješenja i raspad proračuna. Nestabilnosti se očituju kao visokofrekventni parazitski harmonici koji se razviju prije prirodnog razvoja nelinearnih harmonika [8]. Iz tog razloga je Dommermuth [8] predložio vremensku relaksaciju jednadžbi (19) i (20), koja omogućuje stabilnu konvergen-

ciju do nelinearnog rješenja. Vremenska relaksacija omogućuje korištenje linearnog rješenja kao početnog uvjeta. Vremenskom relaksacijom utjecaj nelinearnih članova jednadžbi (19) i (20) postepeno se povećava na početku proračuna. Na taj način nelinearni harmonici imaju potrebno vrijeme za stabilan rast. Relaksacija se provodi množenjem nelinearnih članova u rubnim uvjetima na slobodnoj površini (19) i (20), sa eksponencijalnom funkcijom vremena:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g\eta = G \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_a}\right)^{n_a}}\right), \quad (72)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - W^{(1)} = F \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T_a}\right)^{n_a}}\right), \quad (73)$$

gdje je  $n_a$  relaksacijski eksponent, dok je  $T_a$  relaksacijsko vrijeme.  $W^{(1)}$  je linearna komponenta vertikalne brzine za red  $m = 1$  prema izrazu (63). Prema preporuci Dommermutha [8], kako bi se izbjegle nestabilnosti viših frekvencija tj. valnih brojeva, relaksacijsko vrijeme  $T_a$  treba biti barem jednako periodu vala najvećeg perioda u simulaciji.  $G$  i  $F$  predstavljaju nelinearne dijelove jednadžbe (19) i (20):

$$G = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} W^2 \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right), \quad (74)$$

$$F = -W^{(1)} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + W \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right). \quad (75)$$

Postoji velik broj dostupnih analitičkih rješenja rubnih uvjeta na slobodnoj površini za monokromatske valove [16]. Osim najjednostavnijih linearnih rješenja, postoje i nelinearna rješenja kao što su Stokesovi valovi. Modeli koji uključuju više valnih komponenti redovito su linearni, obzirom da je potrebna jednostavna superpozicija harmonika. Morski valovi s više harmonika najčešće se opisuju pomoću spektra gustoće energije vala [2], koji su opisani u Poglavlju 2.5.

### 3.4 Uklanjanje greške alias–efekta

Kao što je objašnjeno u [11], alias–efekt je poznata pojava koja se javlja prilikom diskretne Fourierove transformacije [20]. Prilikom diskretizacije signala dolazi do ograničenja minimalne i maksimalne frekvencije harmonika koje su raspoznatljive na diskretnoj mreži. Matematički izraz Fourierove transformacije (25) definiran je kontinuirano za cijelu domenu transformacije. Zbog

konačne rezolucije točaka u fizikalnoj domeni koja se postiže uzorkovanjem, postoji granična frekvencija iznad koje nije moguće postići razlučivost. Granična frekvencija jednoznačno je određena te se naziva Nyquistova frekvencija [21]:

$$\omega_c = \frac{\pi}{\Delta}, \quad (76)$$

gdje  $\Delta$  predstavlja razmak između uzoraka. Ukoliko promatrana periodična pojava sadrži frekvenciju višu od kritične, doći će do alias–efekta. Pojave koje imaju frekvenciju višu od kritične će mijenjati vrijednosti nižih frekvencija čiji su višekratnik:

$$G(\omega_n) = \hat{G}(\omega_n) + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \hat{G}(\omega_{n+Nm}), \quad (77)$$

pri čemu je  $G(\omega_n)$  definiran u izrazu (29), dok je  $\hat{G}(\omega_n)$  rezultat beskonačne sume Fourierovog niza:

$$\hat{G}(\omega_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t_k) e^{i2\pi nk/N}. \quad (78)$$

Alias–efekt može se spriječiti na razne načine. Najčešće se koristi "zero–padding" metoda, u kojoj se broj diskretizacijskih točaka u prostornoj domeni proširuje u odnosu na potrebnu frekvencijsku domenu. Proširenje domene se vrši tako da se relevantni harmonici višekratnih frekvencija nađu unutar proširene domene. Fourierove amplitude za harmonike koji se nalaze u proširenom djelu domene se uvijek prisilno postavljaju na nulu. Na taj se način sprječava utjecaj alias–efekta na relevantne frekvencije obzirom da su harmonici višekratnih frekvencija razlučeni diskretnom mrežom, te se sprječava utjecaj alias–efekta harmonika izvan frekvencijske domene na harmonike višekratnih frekvencija. Obzirom na matematičke operacije koje se provode u HOS metodi, moguće je unaprijed odrediti područje frekvencija koje će imati alias–efekt na relevantne harmonike, što omogućuje korištenje ove metode odstranjivanja alias–efekta.

U proceduri HOS metode pojavljuju se umnošci funkcija u nelinearnim rubnim uvjetima (19) i (20), te u sekvencijalnom proračunu redova potencijala brzine (45) i vertikalne brzine slobodne površine (46). Prilikom množenja trigonometrijskih funkcija jednake frekvencije, nastaju harmonici čija je frekvencija dvostruko veća od polazne. Prema izrazu (77), harmonici koji su višekratnici frekvencije harmonika unutar područja koje je razlučeno diskretnom mrežom u frekvencijskoj prostoru, uzrokovat će alias–efekt na harmonicima nižih frekvencija čiji su višekratnik. Dakle,

množenjem dvaju harmonijskih funkcija neizbježno dolazi do alias–efekta ukoliko se provodi Fourierova transformacija umnoška. Do pojave alias–efekta dolazi i kod potenciranja harmonijskih funkcija.

Prilikom sekvencijalnog računanja redova potencijala brzine (45) i vertikalne brzine slobodne površine (46) u zadnjem redu pojavljuje se član  $\eta^{M-1}$  koji množi višestruku derivaciju potencijala brzine. Obzirom da se radi o  $M$  umnožaka postavlja se uvjet za odstranjivanje alias–efekta:

$$N = \frac{M+1}{2} N_{\mathcal{F}}, \quad (79)$$

gdje je  $N_{\mathcal{F}}$  broj harmonika u Fourierovom prostoru koji neće biti izložni grešci alias–efekta, te je  $N$  broj točaka mreže u fizičkoj domeni. Frekvencijska domena se stoga proširi na  $N$  točaka, te se Fourierovi koeficijenti za koje vrijedi  $|n| > N_{\mathcal{F}}$  postavljaju na nulu prema "zero–padding" metodi [22].

### 3.5 Metode numeričke integracije običnih diferencijalnih jednadžbi

Obzirom da se u slučaju HOS metode javlja obična diferencijalna jednadžba prvog reda u vremenu, ovdje će biti pokazana integracija jednadžbe prvog reda. Jednadžbe (19) i (20) su parcijalne diferencijalne jednadžbe viših redova zavisne o više varijabli, međutim one postaju obične diferencijalne jednadžbe ovisne o vremenu nakon postupka računanja članova desne strane. Postupak računanja prostornih derivacija i njihovih umnožaka objašnjen je u prethodnim poglavljima. Ukoliko se svi poznati članovi jednadžbi (19) i (20) stave na desnu stranu jednadžbi te označe zajedničkom kraticom, dobije se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = DSJ_{\psi}, \quad (80)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = DSJ_{\eta}, \quad (81)$$

gdje  $DSJ_{\psi}$  i  $DSJ_{\eta}$  predstavljaju desne strane jednadžbi (19) i (20). Desne strane jednadžbe su poznate u trenutku vremenske integracije, dok su nepoznanice u gornjim izrazima funkcija potencijala brzine na površini  $\psi$  i funkcija elevacije slobodne površine  $\eta$ . Općenito, obična diferencijalna jednadžba može se zapisati kao:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (82)$$

gdje je  $f(t, y)$  derivacija funkcije  $y(t)$ . Eulerova metoda [21] je najjednostavnija metoda numeričke



integracije jednadžbi. Umjesto infinitezimalnog diferencijalnog operatora  $d$  uvodi se konačan diferencijalni operator  $\Delta$ :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(t_n, y_n), \quad (83)$$

odnosno:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n). \quad (84)$$

Izraz (84) predstavlja Eulerovu metodu numeričke integracije običnih diferencijalnih jednadžbi. Eulerova metoda nije simetrična, tj. rješenje se nalazi za korak  $\Delta t$  s informacijom o derivaciji samo na početku tog intervala. Pri tome je greška koja se pojavljuje drugog reda  $O(\Delta t^2)$ , međutim, greška koja se nagomila tokom uzastopnih integracija je reda  $O(\Delta t)$ . Eulerova metoda je najjednostavnija, ali i najmanje točna. Naprednije metode znatno su točnije. Jedna od najpoznatijih metoda numeričke integracije je Runge-Kutta metoda. Runge-Kutta metoda može biti drugog ili višeg reda, gdje se broj reda određuje obzirom na red greške. Metoda drugog reda sadrži dva koraka evaluacije prirasta funkcije  $y(t)$ . U prvom koraku se određuje prirast funkcije metodom prvog reda kao u izrazu (84), dok se u drugom koraku računa prirast funkcije obzirom na derivaciju funkcije u točki koja je na pola prirasta dobivenog u prvom koraku [21]. Runge-Kutta metoda drugoga reda glasi:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(t_n, y_n), \\ k_2 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\ y_{n+1} &= y_n + k_2. \end{aligned} \quad (85)$$

Najpopularnija je Runge-Kutta četvrtog reda, međutim postoje i metode viših redova. Da bi se poboljšala efikasnost metode, uvode se razna poboljšanja. Cilj poboljšanja metoda numeričke integracije je da uz što manje računskih operacija postiču što veću preciznost. Osnovna modifikacija omogućuje prilagodbu veličine koraka  $\Delta t$ . Veličina koraka se prilagođava ovisno o brzini promjene rezultata. Kada je promjena funkcije postepena, dovoljan je veći korak i obrnuto [21]. U ovom radu se za vremensku integraciju jednadžbi (83) i (84) koristi Runge-Kutta petog reda s prilagodljivim korakom, pri čemu se koriste Cash-Karpovi parametri za procjenu greške. Za više detalja o naprednim metodama numeričke integracije čitatelj se upućuje na [21].

## 4 Validacija implementiranog algoritma

U ovom poglavlju bit će ispitana točnost i preciznost implementirane HOS metode. U svrhu validacije implementirane metode, izabrana su tri testna proračuna. Dva testna proračuna preuzeta su iz [11], međutim proračuni su ponovljeni kako bi se potvrdila točnost metode proširene u sklopu ovog rada na dvije prostorne dimenzije. U prvom testnom proračunu ispitati će se točnost algoritma na monokromatskom propagirajućem valu. Proračun je iniciran linearnim rješenjem te su rezultati uspoređeni s Dommermuthom [8]. U drugom proračunu provjeriti će se točnost pri propagaciji spektra valova. Rezultati će se usporediti s viskoznim rezultatima koje su objavili Lupieri et al. [12]. Treći testni proračun prikazuje pojavu Benjamin–Feir nestabilnosti pri propagaciji monokromatskog vala.

### 4.1 Propagacija monokromatskog vala

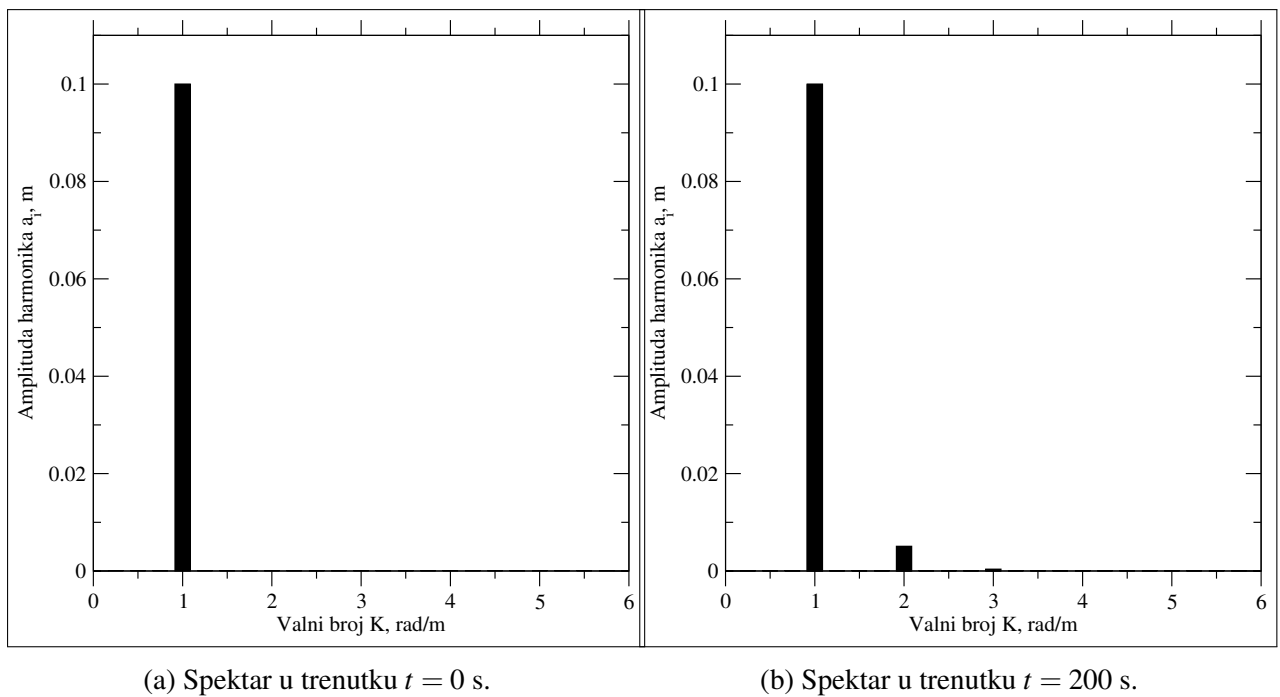
Provedena je simulacija propagacije dvodimenzionalnog monokromatskog površinskog vala te je razvoj nelinearnih harmonika uspoređen s nelinearnim Stokesovim rješenjem [27]. Ova validacija provedena je u [11], te je ovdje ponovljena kako bi se potvrdila točnost algoritma nakon proširenja algoritma provedenog u ovom radu. Kako bi se pomoću dvodimenzionalog HOS modela proveo jednodimenzionalni proračun, potrebno je postaviti broj diskretizacijskih točaka u  $y$  smjeru na  $N_y = 1$ . Usporedba je provedena po uzoru na Dommermutha [8], koji je tim putem potvrdio valjanost sheme vremenske relaksacije pokazane u Poglavlju 3.3.

Za početni uvjet korišteno je linearno rješenje monokromatskog propagirajućeg vala poznato kao Airyev val, odnosno Stokesov val prvog reda [16]. Linearno rješenje dobiveno je linearizacijom rubnih uvjeta na slobodnoj površini (19) i (20), pri čemu su uvedena brojna pojednostavljenja i zanemarenja. HOS proračunom početno linearno rješenje se razvija do reda nelinearnosti  $M$ . Razvijaju se viši nelinearni harmonici koji su uspoređeni do osmog reda sa analitičkim rješenjem. Trend konvergencije pojedinih viših harmonika je također uspoređen s rezultatom Dommermutha [8].

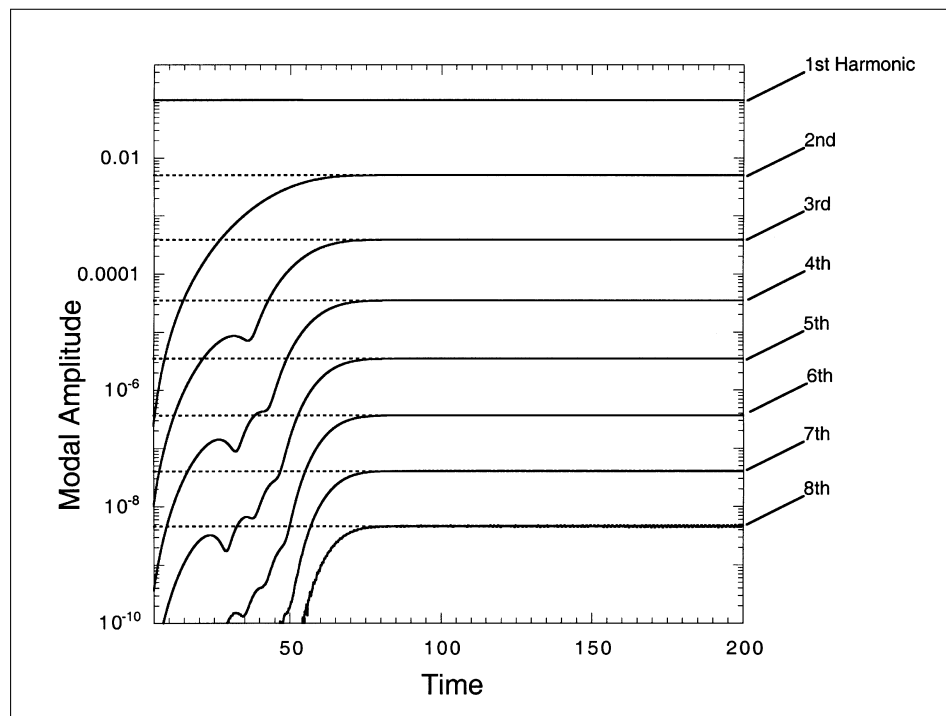
Prateći Dommermutha, strmina vala je  $Ka = 0.1$ , dok je valni broja  $K = 1$ , što daje amplitudu vala  $a = 0.1$  m. Dommermuth je promatrao brzinu konvergencije viših harmonika za različite relaksacijske parametre. U ovom radu provedena je usporedba za jednu kombinaciju relaksacijskih parametara: relaksacijsko vrijeme  $T_a = 8\lambda$ , relaksacijski eksponent  $n_a = 4$ .  $\lambda$  je duljina Airyevog vala. Prilikom provedbe ovog proračuna korištena je formulacija koju su predložili Dommermuth & Yue [6] gdje se ne koristi konzistentnost reda nelinearnosti pokazana u Poglavlju 2.4.

HOS simulacija je provedena za 100 valnih perioda, odnosno 200 s. Na Sl. 3 prikazan je razvoj viših nelinearnih harmonika. Sl. 3a prikazuje amplitude harmonika u početnom trenutku simulacije, gdje još nije došlo do razvoja viših harmonika zbog čega je vidljiv samo jedan harmo-

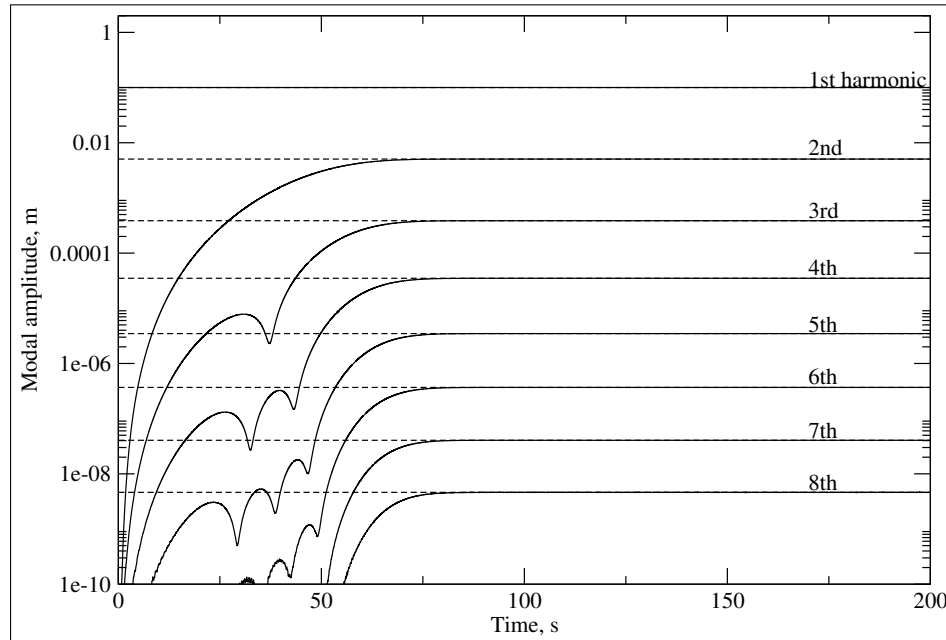
nik propisan linearnom valnom teorijom. Sl. 3b prikazuje spektar gdje se mogu vidjeti razvijeni viši harmonici koji su rezultat nelinearne propagacije vala tokom 100 valnih perioda. Uz osnovnu frekvenciju su vidljiva još dva viša harmonika, dok ostali nisu vidljivi zbog vrlo male vrijednosti. Tab. 1 prikazuje vrijednosti amplituda pojedinih harmonika te usporedbu sa Stokesovim rješenjem. Može se vidjeti da greška raste za veće harmonike, međutim ostaje prihvatljivo mala. Relativna greška definirana je kao  $\varepsilon = (\eta_{iA} - \eta_{iHOS})/\eta_{iA}$ , gdje je  $\eta_{iA}$  amplituda  $i$ -tog analitički dobivenog harmonika, dok je  $\eta_{iHOS}$  amplituda harmonika dobivena HOS metodom. Najveća relativna greška iznosi 0.109% za osmi harmonik. Sl. 4 prikazuje konvergenciju pojedinih harmonika. Sl. 4a prikazuje konvergenciju objavljenu u [8], dok Sl. 4b prikazuje konvergenciju dobivenu implementiranim dvodimenzionalnim HOS algoritmom.



Slika 3: Razvoj viših harmonika.



(a) Dommermuth [8],



(b) HOS rezultat.

Slika 4: Konvergencija viših harmonika.

Tablica 1: Usporedba HOS rezultata i nelinearog Stokesovog rješenja.

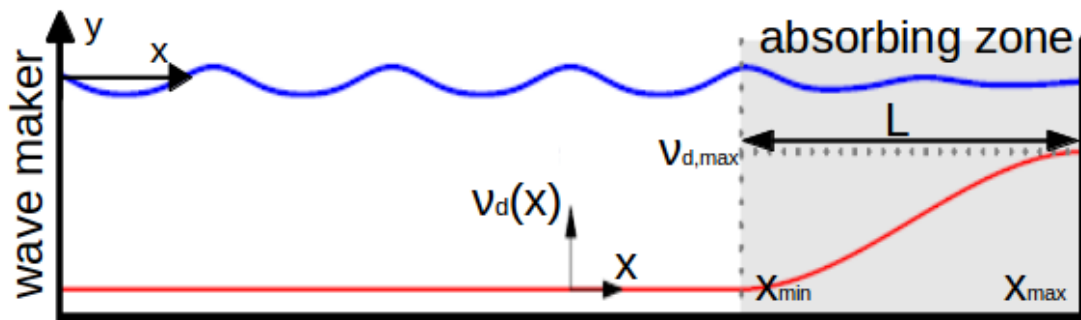
Red	Amplituda harmonika, m		Relativna greška, %
	Stokesovo rješenje	HOS rezultat	
1	$9.9870520 \times 10^{-2}$	$9.9870524 \times 10^{-2}$	$4.34 \times 10^{-6}$
2	$5.0594125 \times 10^{-3}$	$5.0594197 \times 10^{-3}$	$1.43 \times 10^{-4}$
3	$3.8584235 \times 10^{-4}$	$3.8584342 \times 10^{-4}$	$2.78 \times 10^{-4}$
4	$3.4929691 \times 10^{-5}$	$3.4929838 \times 10^{-5}$	$4.20 \times 10^{-4}$
5	$3.4769679 \times 10^{-6}$	$3.4769678 \times 10^{-6}$	$-3.26 \times 10^{-6}$
6	$3.6763951 \times 10^{-7}$	$3.6763189 \times 10^{-7}$	$-2.07 \times 10^{-3}$
7	$4.0531740 \times 10^{-8}$	$4.0530830 \times 10^{-8}$	$-2.24 \times 10^{-3}$
8	$4.6076934 \times 10^{-9}$	$4.6026818 \times 10^{-9}$	$-1.09 \times 10^{-1}$

Tab. 1 dokazuje valjanost proširene HOS metode. Sl. 4 pokazuje vrlo sličan trend konvergencije pojedinih harmonika u usporedbi sa Dommermuthom [8]. Ovaj testni proračun dokazuje da algoritam pravilno razvija nelinearnosti monokromatskog vala i nakon proširenja na dvije dimenzije provedenog u ovom radu.

## 4.2 Validacija propagacije valnog spektra

Slično kao u prethodnom testnom proračunu, i ovdje je ponovljen validacijski testni proračun proveden u [11] kako bi se dokazala valjanost algoritma nakon proširenja na dvije dimenzije. U ovom testnom proračunu provedena je usporedba ravoja spektra valova prema istraživanju koje su proveli Lupieri et al. [12], u kojem su promatrali promjene spektra valova uslijed propagacije u viskoznom proračunskom modelu. Proračun su proveli u softveru za računalnu dinamiku fluida (CFD) OpenFOAM. Na početku domene su zadali valni spektar koji ima komponente jednakih valnih strmina  $Ka$ , stoga se radi o linearnom jednoliko strmom valnom spektru. Linearno rješenje koje je korišteno kao početni uvjet definirano je izrazom (50). Fazni pomaci pojedinih valnih komponenti  $\varepsilon_i$  određeni su na način da se ostvari pozitivna superpozicija svih komponenti na željenoj lokaciji CFD domene. Lupieri et al. ispitali su četiri različita slučaja strmina valnih komponenti spektra. Za dva slučaja veće strmine na mjestu superpozicije odnosno fokusiranja valova postiže se strmina vala koja je veća od kritične strmine. Kritična strmina je valna strmina za koju nastaje lom valnog brijega te približno iznosi  $H/\lambda = 1/7$  [27]. U svom istraživanju Lupieri et al. [12] mjerili su spektar valova Fourierovom transformacijom vremenskog signala elevacije slobodne površine mjenjenog na više mjesta uzduž domene. Na Sl. 5 prikazana je shema CFD domene korištene u [12]. Naziv "wave maker" označava generator valova. Generator valova simuliran je kao pomičan zid koji periodičnim gibanjem izaziva generaciju propagacijskih valova. Naziv "absorbing zone" predstavlja relaksacijsku zonu u kojoj se postepeno prigušuju valovi. Prigušivanje

valova se provodi da bi se spriječila refleksija valova o stražnji zid domene što bi utjecalo na rezultat istraživanja.



Slika 5: Domena CFD simulacije korištena u [12].

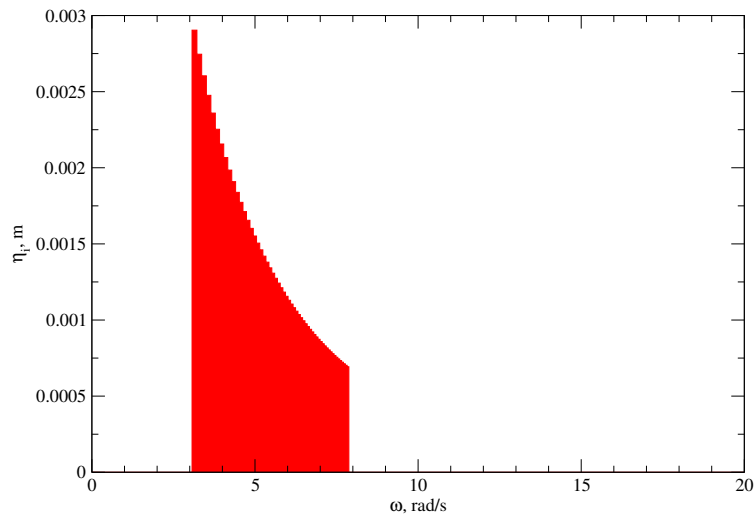
Obzirom da su Lupieri et al. [12] provodili Fourierovu transformaciju signala u vremenu, dobiveni spektar valova je izražen u odnosu na kružnu frekvenciju. Obzirom na karakter HOS metode, Fourierovom transformacijom se preslikava signal u prostoru u domenu valnih brojeva. Tokom CFD simulacije propagacije valova, kao i u eksperimentu u bazenu, nelinearnosti se u valovima razvijaju propagacijom valova u prostoru. U HOS proračunu nelinearnosti se razvijaju u cijeloj prostornoj domeni istovremeno, te se nelinearnosti razvijaju u vremenu. Stoga nije moguće napraviti kvantitativnu usporedbu dobivenih rezultata sa rezultatima Lupieri et al. Valni spektar dobiven HOS proračunom predstavljen je u prostoru valnih brojeva  $K$  u rad/m, dok je spektar dobiven preslikavanjem signala iz vremenske u frekvencijsku domenu predstavljen u prostoru kružne frekvencije  $\omega$  u rad/s. Uz to, relaksacijsko vrijeme potrebno da se stabilno razvijaju nelinearnosti u HOS proračunu znatno je veće od vremena koje je bilo potrebno da valovi koji su generirani na početku CFD domene dosegnu točku mjerenja tokom ispitivanja provedenog u [12]. Iz navedenih razloga, mjerenje spektra nije moguće provesti u istim uvjetima, te je stoga provedena kvalitativna usporedba. Rezultati dobiveni HOS simulacijom projicirani su iz domene valnih brojeva u domenu kružne frekvencije pomoću disperzijske jednadžbe dobivene iz linearnog modela. Disperzijska jednadžba povezuje valni broj i frekvenciju vala [15], te za linearno rješenje glasi:

$$\omega^2 = Kg \tanh(Kd), \quad (86)$$

Disperzijska jednadžba linearnog rješenja valjana je u slučaju kada su pretpostavke linearnog modela ispunjene, te se njenom primjenom na nelinearno rješenje HOS simulacije izlazi se iz područja njene valjanosti. Međutim, kao što je već objašnjeno, ovdje će se provesti kvalitativna usporedba, te se smatra da će disperzijska jednadžba linearnog rješenja dati dovoljno točan rezultat.

Valni spektri koji se koriste kao početni uvjet sadrže harmonijske komponente koje imaju

jednake valne strmine  $H_i/\lambda_i$ , gdje su  $H_i$  i  $\lambda_i$  valna visina te valna duljina pojedine komponente  $i$ . Četiri slučaja strmine komponenata su ispitana:  $H_i/\lambda_i = 1/715, 1/400, 1/300$  i  $1/210$ . Valni brojevi pojedinih komponenti su ekvidistantno postavljeni obzirom da se u HOS metodi fizički i Fourierov prostor diskretiziraju ekvidistantnim točkama. Spektar valova sastoji se od 57 komponenti, što odgovara postavkama u [12]. Sl. 6 prikazuje primjer spektra koji je korišten kao početni uvjet.



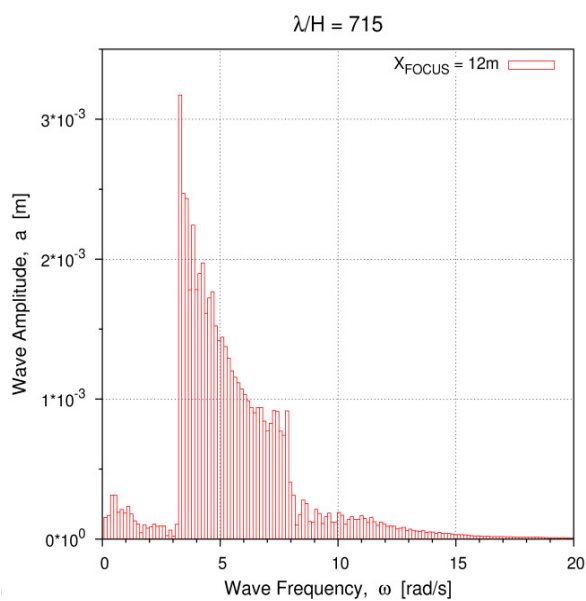
Slika 6: Primjer spektra za strmine valnih komponenti  $H_i/\lambda_i = 1/715$ .

Parametri vremenske relaksacije HOS simulacije ovise o slučaju strmine valnih komponenti. Što je simulirano valno polje nelinearnije, potrebno je dulje vrijeme relaksacije. Razlog tomu je što se linearno rješenje koje se koristi kao početni uvjet u većoj mjeri razlikuje u odnosu na konačno nelinearno rješenje. Drugim riječima, potrebno je više vremena da se stabilno razviju nelinearnosti obzirom da one imaju veći utjecaj [8]. Kao što je objašnjeno u Poglavlju 2.4, mjera nelinearnosti vala je strmina vala  $\varepsilon = Ka$ , iz čega slijedi da je za veću strminu valnog spektra potrebno dulje relaksacijsko vrijeme.

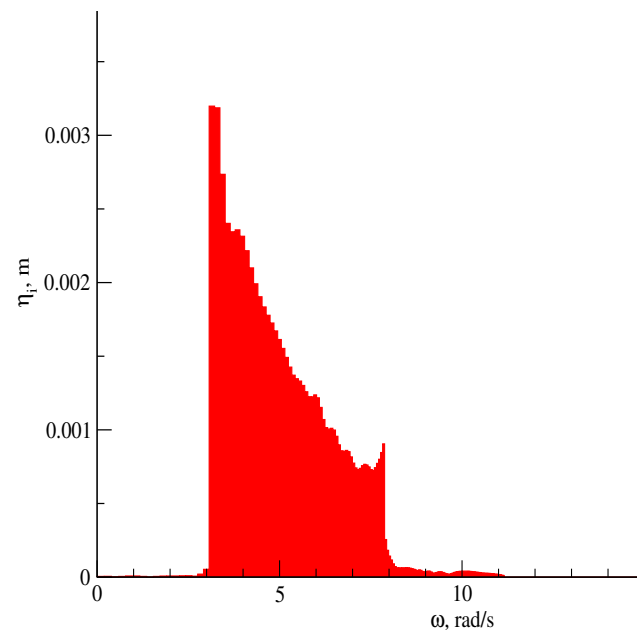
Tab. 2 prikazuje glavne HOS parametre za četiri provedene simulacije.  $N_x$  je broj točaka diskretizacije u fizičkom prostoru u smjeru osi  $x$ ,  $M$  je red nelinearnosti HOS proračuna,  $T_a$  je vrijeme relaksacije, dok je  $T_f$  vrijeme fokusiranja. Broj točaka u smjeru osi  $y$  mora biti  $N_y = 1$  obzirom da se radi o jednodimenzionalnom HOS proračunu. U Tab. 2 se može vidjeti da je u zadnjem slučaju strmine spektra bilo potrebno dulje vrijeme relaksacije, te je shodno bilo potrebno i pomaknuti vrijeme fokusiranja. Naime, vrijeme fokusiranja mora se odvititi nakon relaksacije kako ne bi došlo do gubitka djela nelinearnih utjecaja tokom samog fokusiranja. Duljina domene korištena u svim simulacijama je 72.3 m, što odgovara duljini od 18 valnih duljina najdužeg vala. Usporedba dobivenih rezultata je prikazana na Sl. 7 do Sl. 10.

Tablica 2: Parametri HOS simulacije testnog proračuna propagacije valnog spektra.

$H_i/\lambda_i$	1/715	1/400	1/300	1/210
$N_x$	1024	1024	1024	2048
$M$	6	6	6	10
$T_a$ , s	25	25	25	60
$T_f$ , s	35	35	35	80



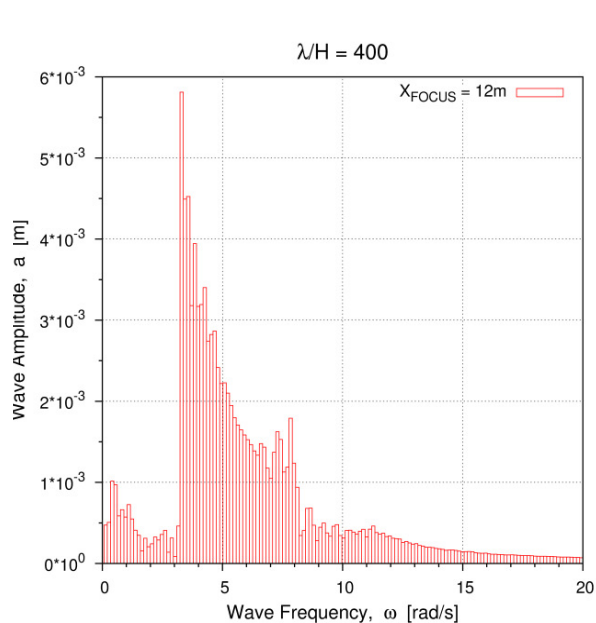
(a) Lupieri et al. [12],



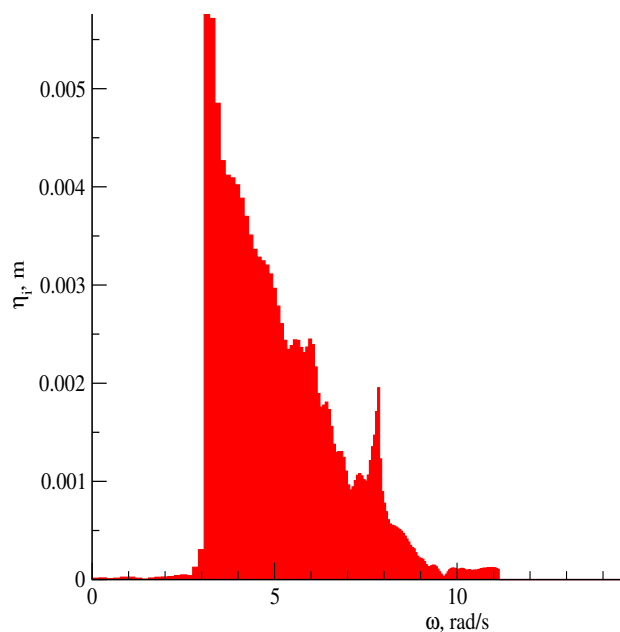
(b) HOS rezultat.

Slika 7: Usporedba valnog spektra, slučaj  $H_i/\lambda_i = 1/715, t = 37$  s.

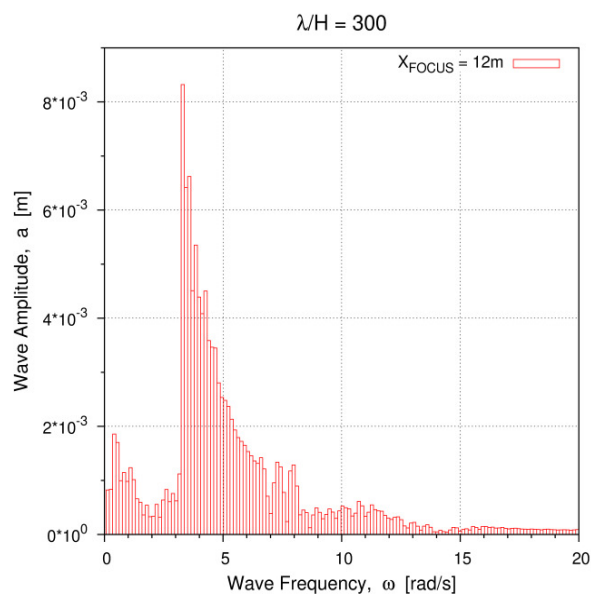




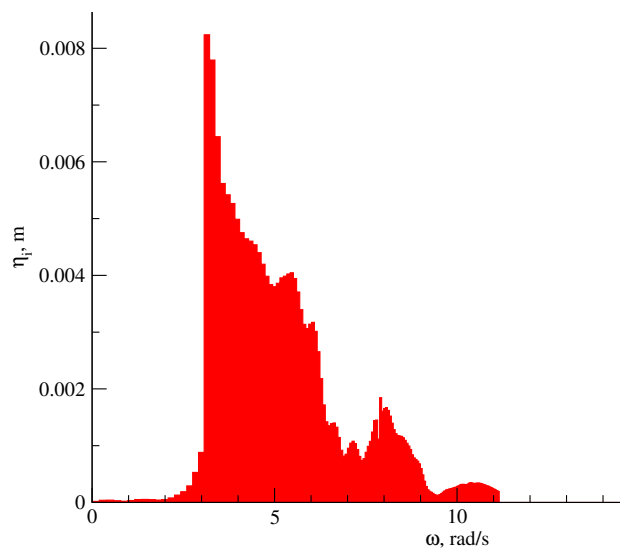
(a) Lupieri et al. [12].



(b) HOS rezultat.

Slika 8: Usporedba valnog spektra, slučaj  $H_i/\lambda_i = 1/400, t = 37$  s.

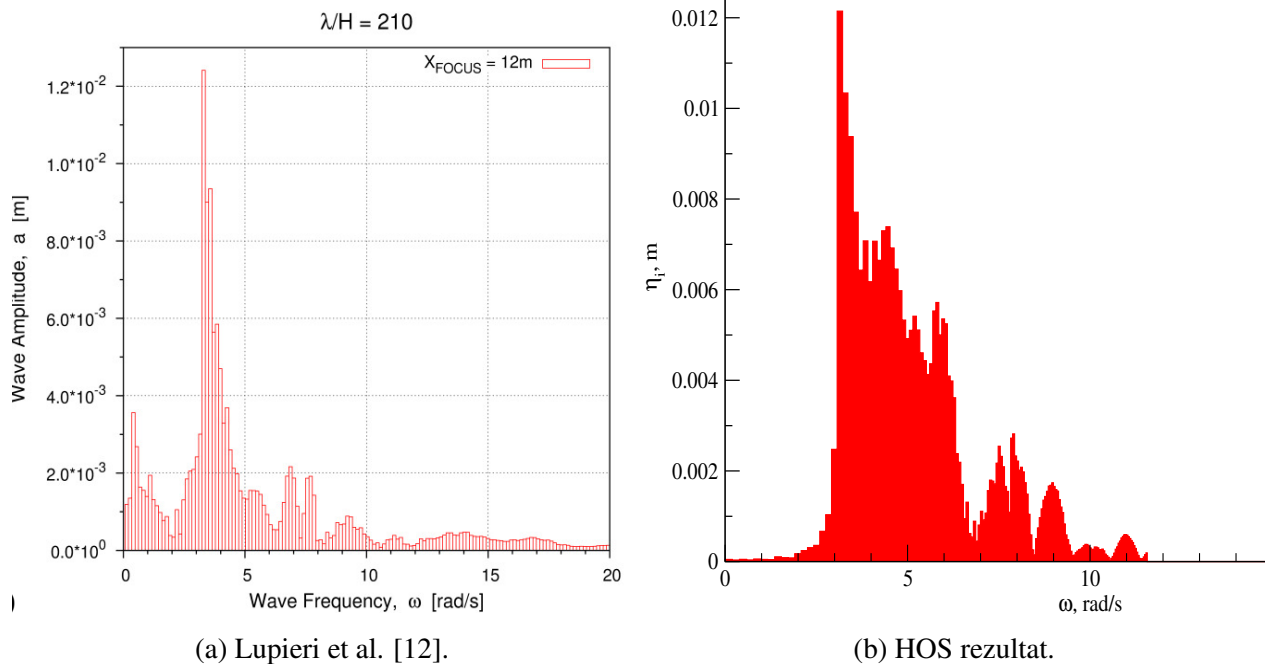
(a) Lupieri et al. [12].



(b) HOS rezultat.

Slika 9: Usporedba valnog spektra, slučaj  $H_i/\lambda_i = 1/300, t = 37$  s.

Dobiveni rezultati odgovaraju rezultatima dobivenim u [11], što potvrđuje ispravnost proširenja metode na dvije dimenzije. U slučaju  $H_i/\lambda_i = 1/715$  i  $1/400$  podudaranje valnih spektara vrlo je povoljno. Za sve slučajeve HOS rezultata javljaju se izražene komponente viših frekvencija što se podudara s rezultatima Lupieri et al. [12]. Lupieri et al. navode da nisko-frekvencijske komponente koje se pojavljuju u viskozim simulacijama odgovaraju drugoj vlastitoj frekvenciji



(a) Lupieri et al. [12].

(b) HOS rezultat.

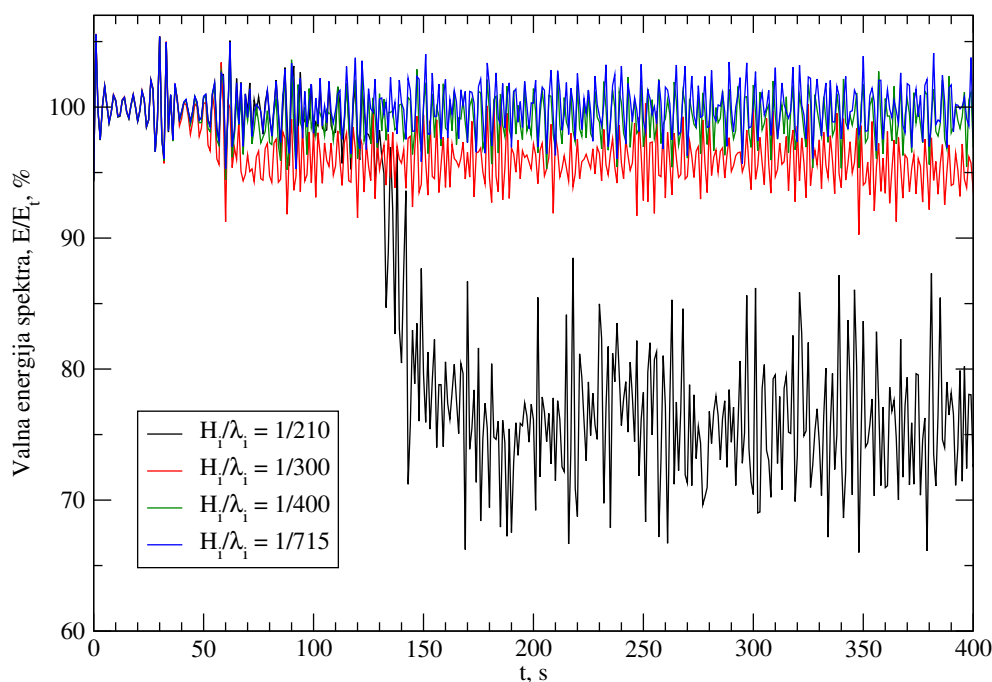
Slika 10: Usporedba valnog spektra, slučaj  $H_i/\lambda_i = 1/210, t = 84 \text{ s}$ .

numeričkog bazena u kojem je provedeno ispitivanje. Vlastita frekvencija bazena je rezonantna frekvencija osciliranja slobodne površine u bazenu. U HOS simulaciji ne postoji konačna domena, već je pretpostavljen periodičan rubni uvjet, zbog čega ne dolazi do pojave rezonantnih nisko-frekventnih harmonika. Za spektre strmine komponenti  $H_i/\lambda_i = 1/300$  i  $1/210$ , strmina vala koja se javlja na mjestu fokusiranja odgovara strmini koja prelazi kritičnu strminu. U tim se simulacijama može očekivati pojava loma valnog brijega. Kao što se može vidjeti na Sl. 9 i Sl. 10, razlike rezultata u ta dva slučaja strmine nešto su veće. Najizraženija valna komponenta kvantitativno dobro odgovara rezultatima viskoznih simulacija u oba slučaja, kao i visoko-frekventne komponente. Međutim, u sredini frekventnog područja u HOS simulacijama se pojavljuju izraženije komponente, koje nisu prisutne u viskoznim simulacijama. Može se pretpostaviti da većem odstupanju rezultata doprinosi lom brijega vala koji se pojavljuje u dva strmija slučaja. Naime, HOS metodom nije moguće opisati lom valnog brijega obzirom da funkcija elevacije slobodne površine  $\eta(x, y, t)$  prestaje biti jednoznačna. U CFD simulaciji, kao i u naravi, prilikom loma valova dolazi do disipacije energije uslijed izraženih viskoznih pojava [28]. Obzirom da se HOS zasniva na idealiziranom modelu neviskoznog strujanja, takav utjecaj lomljenja valova nije zastupljen u HOS simulaciji. Ako se tokom HOS proračuna pojavi lom valnog brijega tada dolazi do divergencije rješenja te sloma proračuna. Dommermuth & Yue [6] tvrde da divergenciju uzrokuju visokofrekventni sporadični valovi čiji je rast eksponencijalan. Međutim, moguće je provesti HOS simulaciju unatoč lomu valnog brijega filtriranjem visokih frekvencija tokom Fourierove transformacije. Filtriranjem se u svakom vremenskom koraku amplitude visokofrekventnih valnih komponenti postavljaju na nulu, što sprječava njihov daljnji rast. Na ovaj način u HOS simulaciji

također dolazi do gubitka valne energije, jer se uklanja dio energije koji tijekom simulacije prelazi u komponente visokih frekvencija. Filtriranje na taj način oponaša gubitak energije koji postoji u stvarnosti tokom loma valova. Gubitak energije prikazan je na Sl. 11, koja prikazuje omjer valne energije mjerene tokom vremena u pojedinim simulacijama  $E$  i teoretske valne energije  $E_t$ . Teoretska valna energija proračunata je za početni valni spektar. Za linearni model površinskih valova, valna energija svedena na jediničnu površinu iznosi [15]:

$$E = \frac{1}{2} \eta_a^2 \rho g, \quad (87)$$

gdje  $\eta_a$  predstavlja amplitudu vala,  $\rho$  gustoću fluida te  $g$  gravitacijsku konstantu. Sl. 11 prikazuje da veći gubitak energije nastupa za valne spektre s većom strminom valnih komponenata. Ovakav rezultat je očekivan obzirom da povećanjem strmine vala dolazi do intenzivnijeg lomljenja valnog brijega, te samim time i do veće disipacije energije.



Slika 11: Promjena valne energije u HOS simulaciji.

### 4.3 Razvoj Benjamin–Feir nestabilnosti

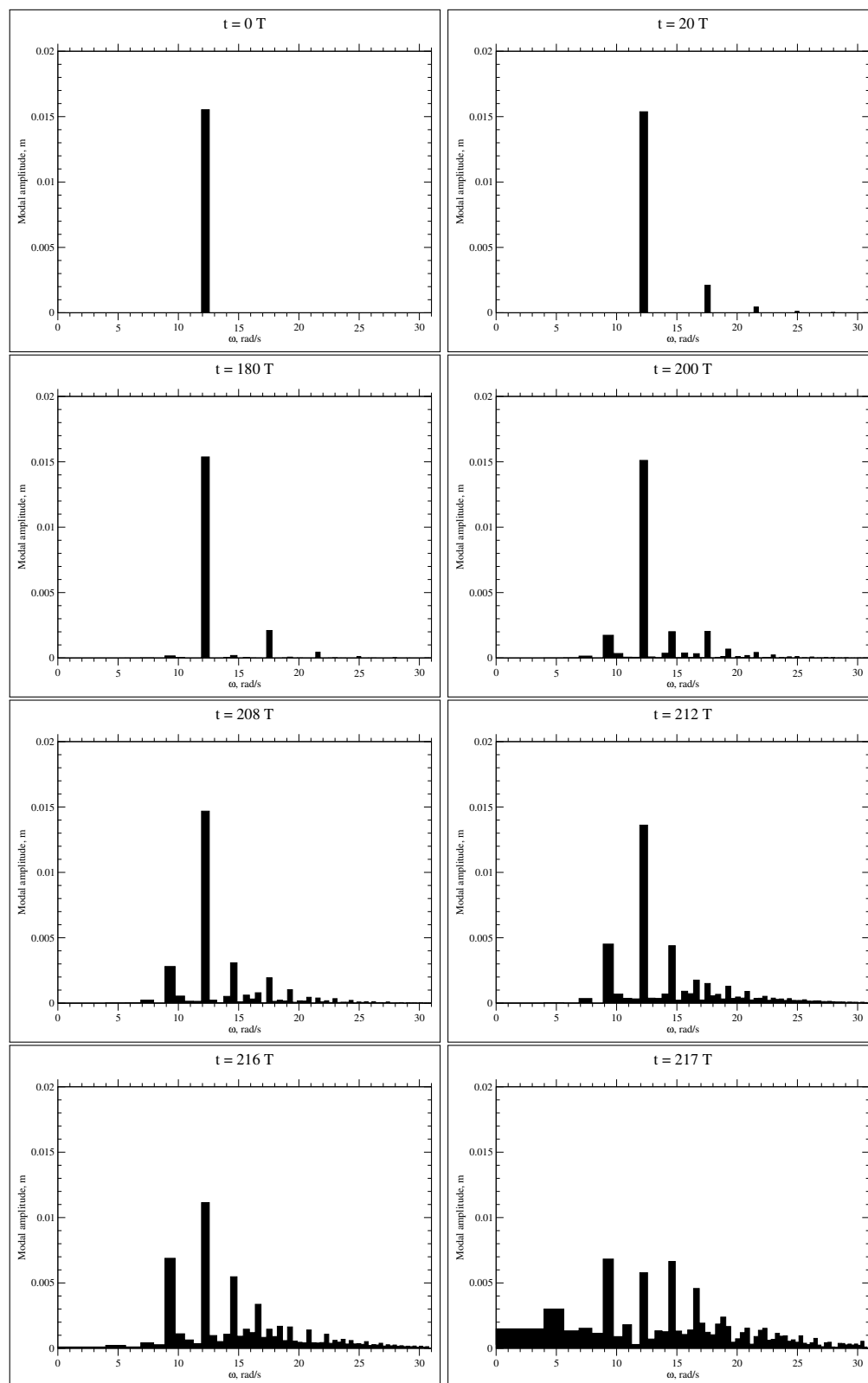
Benjamin & Feir [29] otkrili su nestabilnost koja se javlja kod duge propagacije monokromatskih valova. Nestabilnost koju su oni matematički opisali potvrđena je brojnim eksperimentima, čije je rezultate među prvima objavio Feir [30]. McLean et al. [31] i McLean [32] pokazali su da postoje

dva osnovna tipa nestabilnosti monokromatskih valova. Prvi tip su Benjamin–Feir nestabilnosti, do kojih dolazi kod valova sa strminom manjom od  $Ka = 0.38$ . Nestabilnost se očituje kroz pojavu nelinearnih valnih komponenti frekvencija bliskih frekvenciji osnovnog popragirajućeg vala te blizu viših modova osnovnog vala. Nakon što se pojave, amplitude nelinearnih komponenti eksponencijalno rastu. Nestabilnosti su začete malim poremećajima koji su uvijek prisutni u eksperimentu, kao i u numeričkom proračunu uslijed numeričke greške. Rast nelinearnih komponenti se nastavlja sve do loma vrha vala, pri čemu HOS proračun divergira. Ovdje je pojava Benjamin–Feir nestabilnosti kvalitativno uspoređena s terijom i eksperimentima. Tablica Tab. 3 prikazuje parametre vala i HOS proračuna koji su korišteni u proračunu, gdje je  $Ka$  strmina vala,  $K$  je valni broj, dok je  $T$  period vala. Oznake  $T_a$ ,  $n_a$ ,  $M$  i  $N_x$  imaju isto značenje kao u tablici Tab. 2. HOS proračun je inicijaliziran koristeći linearno rješenje monokromatskog vala.

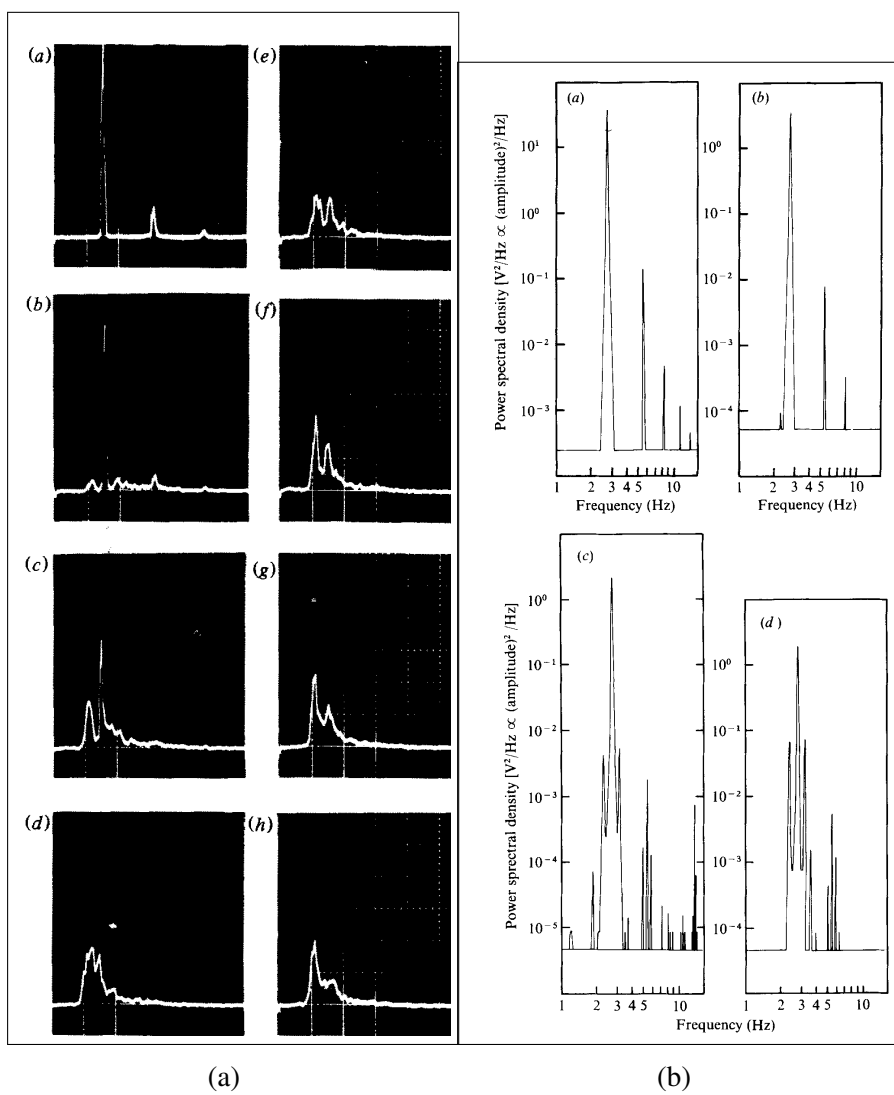
Tablica 3: Parametri HOS simulacije testnog proračuna razvoja Benjamin–Feir nestabilnosti.

$Ka$	$K$ , rad/m	$T$ , s	$T_a$ , s	$n_a$	$M$	$N_x$
0.25	16.1	0.5	5	4	8	1024

Promjena spektra valnih amplituda u vremenu prikazana je na SliciSl. 12. Za svrhe usporedbe spektar je pomoću linearne disperzijske relacije preslikan iz prostora valnih brojeva u frekvencijsku domenu. Kao i u prethodnom poglavlju, disperzijska jednažba se koristi izvan područja svoje valjanosti, međutim ovdje se isto radi o kvalitativnoj usporedbi. Izravna kvantitativna usporedba nije moguća, iz razloga što se u eksperimentu nelinearnosti razvijaju propagacijom valova u prostoru, te je moguće napraviti Fourierovu transformaciju vremenskih signala postavljenih na nekoliko mjesta uzduž bazena. Međutim, u HOS simulaciji nelinearnosti se razvijaju u vremenu, zbog čega nije moguće dobiti vremenski signal koji ima stalnu razinu utjecaja nelinearnosti na valno polje. Drugim riječima, u eksperimentu se razvoj nelinearnosti prati uspoređujući rezultate Fourierove transformacije signala različitih točaka u prostoru, dok se kod rezultata HOS proračuna razvoj nelinearnosti prati uspoređujući Fourierove transformacije u različitim trenutcima u vremenu. SlikeSl. 13a i Sl. 13b prikazuju razvoj Benjamin–Feir nestabilnosti u eksperimentalnim ispitivanjima koje su proveli Su et al. [13] i Lake et al. [14].



Slika 12: Razvoj Benjamin–Feir nestabilnosti u HOS proračunu.



Slika 13: Razvoj nelinearnih valnih komponenti u eksperimentu, a)[13], b)[14].

Prema [29] najizraženiji rast nelinearnih valnih komponenti trebao bi biti za  $\delta = Ka$  gdje je  $\delta = \frac{\Delta f}{f}$ .  $\Delta f$  je razlika frekvencije između noseće valne frekvencije i frekvencije nelinearnih komponenti koje imaju najizraženiji rast. Ova teoretska pretpostavka potvrđena je provedenim HOS proračunom. Na SliciSl. 12 se može vidjeti da su frekvencije nelinearnih valnih komponenti u blizini glavne noseće frekvencije oko 9.7 i 14.8 rad/s. Noseća frekvencija je  $\omega = 12.56$  rad/s iz čega proizlazi da je  $\Delta\omega = 3.14$  rad/s. Teoretski model predviđa da bi nastanak nelinearnih valnih komponenti trebao biti najizraženiji oko frekvencija 9.4 i 15.7 rad/s, što je vrlo slično dobivenim vrijednostima. Razlika koja postoji može dijelom biti posljedica korištenja linearne disperzijske jednadžbe. Ovaj testni slučaj prikazuje da se nelinearnosti pravilno razvijaju u implementiranom algoritmu HOS metode.

## 5 Primjeri trodimenzionalnih CFD simulacija ekstremnog vala

U ovom poglavlju bit će provedene CFD simulacije ekstremnih valova koje prikazuju mogućnost aplikacije implementirane metode u području brodogradnje i pomorske tehnike. Ekstremni valovi koji su simulirani inicijalizirani su pomoću HOS metode. Pomoću HOS modela pronađen je događaj ekstremnog vala gdje je kao početni uvjet korišten realan spektar valova. Korišten je CFD alat Naval Hydro programa OpenFOAM koji koristi dekompozicijski model za spregu potencijalnog strujanja i CFD simulacije viskoznog strujanja [33, 34].

Prikazane su dvije pokazne trodimenzionalne simulacije ekstremnog vala, te je opisana njihova inicijalizacija pomoću dvodimenzionalne HOS simulacije. Prva simulacija opisuje nailazak ekstremnog vala na baržu, pri čemu se koristila vrlo gruba proračunska mreža. U drugoj simulaciji prikazan je nailazak ekstremnog vala na brod za prijevoz kontejnera.

### 5.1 Dvodimenzionalna HOS simulacija – pronalaženje ekstremnog vala

Ekstremni valovi su slučajne pojave te na njihov nastanak utječe puno raznovrsnih uzroka [3], kao što su morske struje, batimetrija (konfiguracija dna), atmosferski tlak, brzina vjetra, gradijent temperature mora i drugo. Vjerojatnost pojave ekstremnog vala iznosi oko  $10^{-8}$  [3]. Sve okolnosti pod kojima nastaju ekstremni valovi nisu u potpunosti razjašnjene. Najizraženiji uzrok njihovog nastanka je pozitivna superpozicija velikog broja valnih komponenti prema izrazu (50). Propagacijom spektra valova HOS metodom na pojavu ekstremnog vala u obzir se uzimaju i nelinearne interakcije valnih harmonika, koje su zanemarene u linearnom modelu kojeg predstavlja izraz (50). Najšire prihvaćena definicija ekstremnog vala definira ekstreman val kao val čija visina premašuje značajnu valnu visinu pripadnog spektra valova za najmanje dva puta. Kako bi se pojavio ekstreman val, potrebno je provesti dugi HOS proračun. HOS proračun se provodi dovoljno dugo i na dovoljno velikoj domeni da postoji velika vjerojatnost pojave ekstremnog vala.

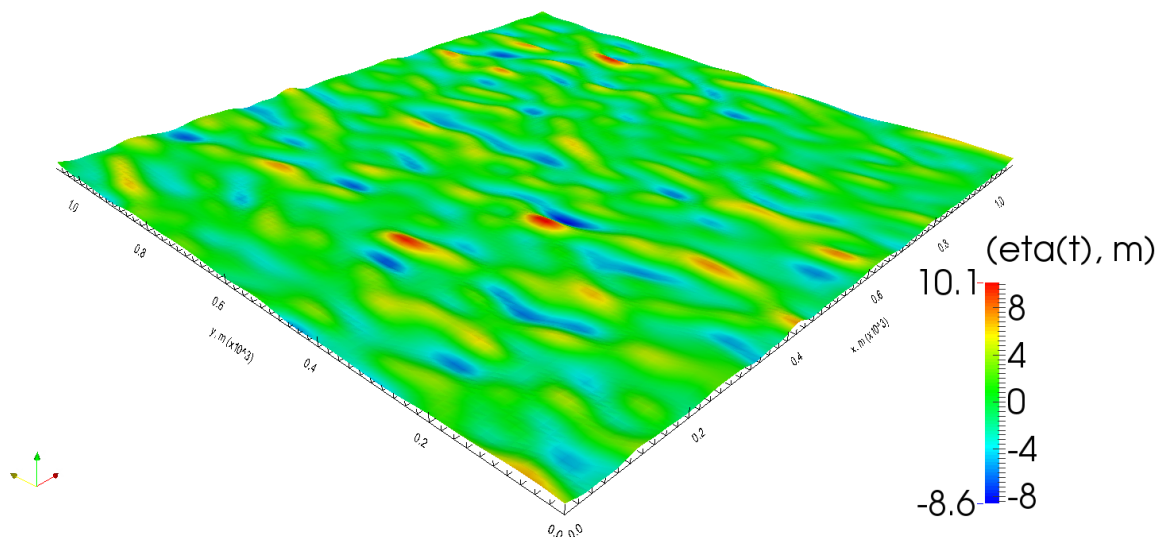
Kako bi opisali trodimenzionalan ekstreman val potrebno je provesti dugu HOS simulaciju u kojoj postoje dvije dimenzije valnih brojeva, u  $x$  i  $y$  smjeru. Kao početni uvjet zadaje se linearno rješenje usmjerenog spektra opisanog u Poglavlju 2.5. Parametri dvodimenzionalne HOS simulacije prikazani su u Tablici Tab. 4, pri čemu je  $N_x$  broj diskretizacijskih točaka u smjeru osi  $x$ ,  $N_y$  je broj diskretizacijskih točaka u smjeru osi  $y$ ,  $L_x$  je duljina domene u smjeru osi  $x$ , te je  $L_y$  duljina domene u smjeru osi  $y$ . SlikaSl. 14 prikazuje početno polje elevacije slobodne površine kojim je inicijalizirana HOS simulacija, dobiveno dvodimenzionalnim spektrom pomoću izraza (58). Korišten JONSWAP spektar, pri čemu je za značajna valna visina  $H_s = 10.5$  m, te je vršni period  $T_p = 9.5$  s. Parametar usmjerenosti spektra jednak je  $m = 12$ , što daje umjereno rasipanje spektralne energije obzirom na kut nailaska vala.

Tokom simulacije praćene su ekstremne vrijednosti elevacije slobodne površine kako bi se



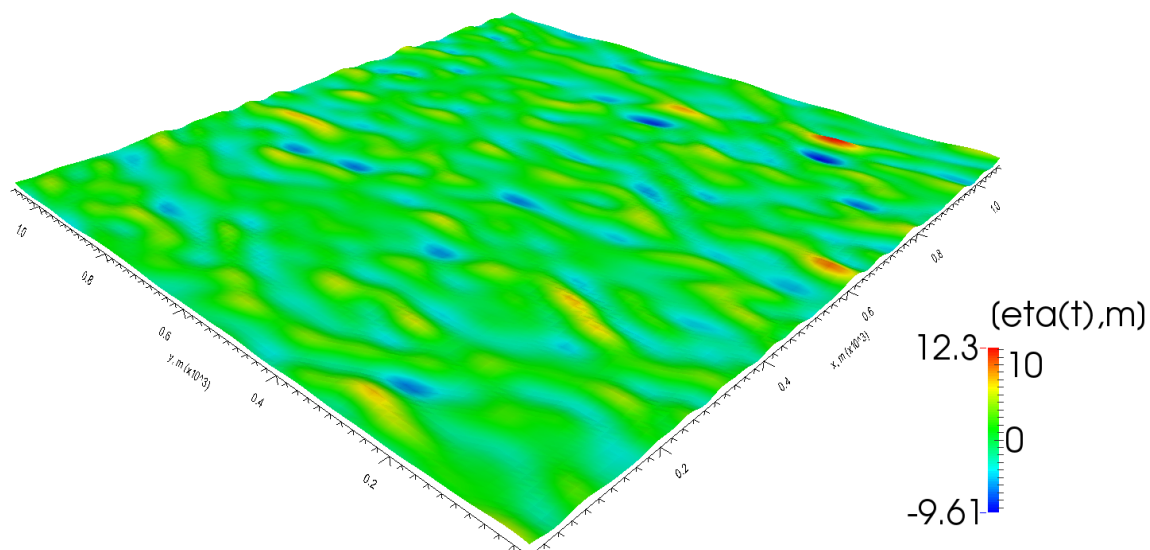
Tablica 4: Parametri 2D HOS simulacije ekstremnog vala.

$L_x$ , m	$L_y$ , m	$N_x$	$N_y$	$M$	$T_s$ , s
1 100	1 100	128	64	5	1 500

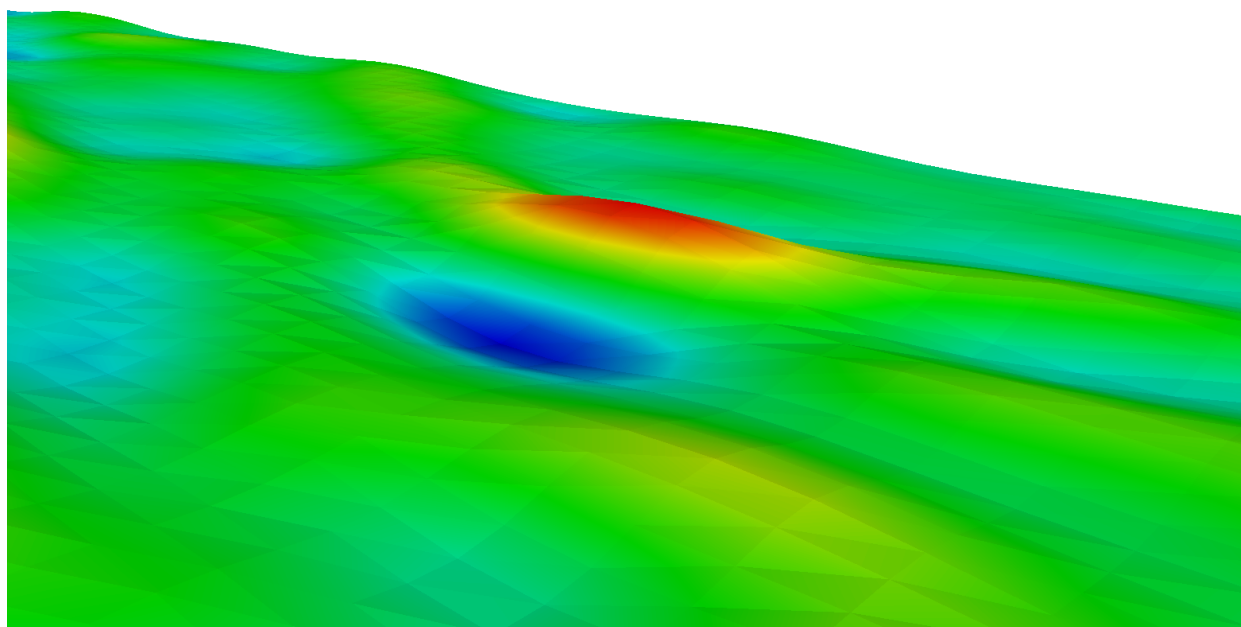


Slika 14: Prikaz elevacije slobodne površine za inicijalizaciju HOS proračuna.

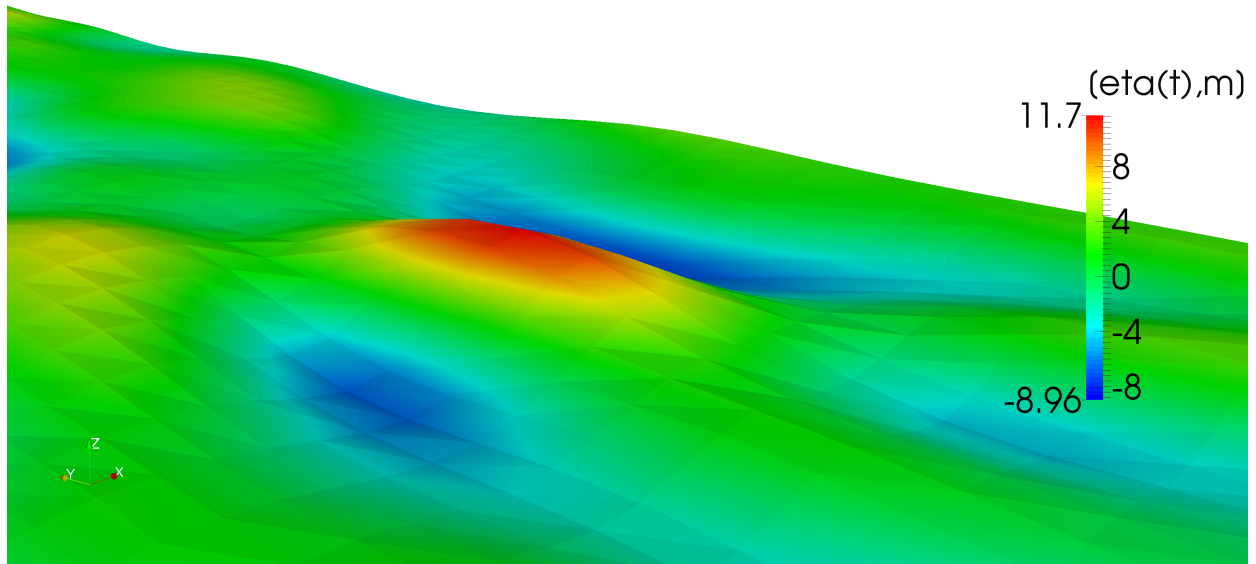
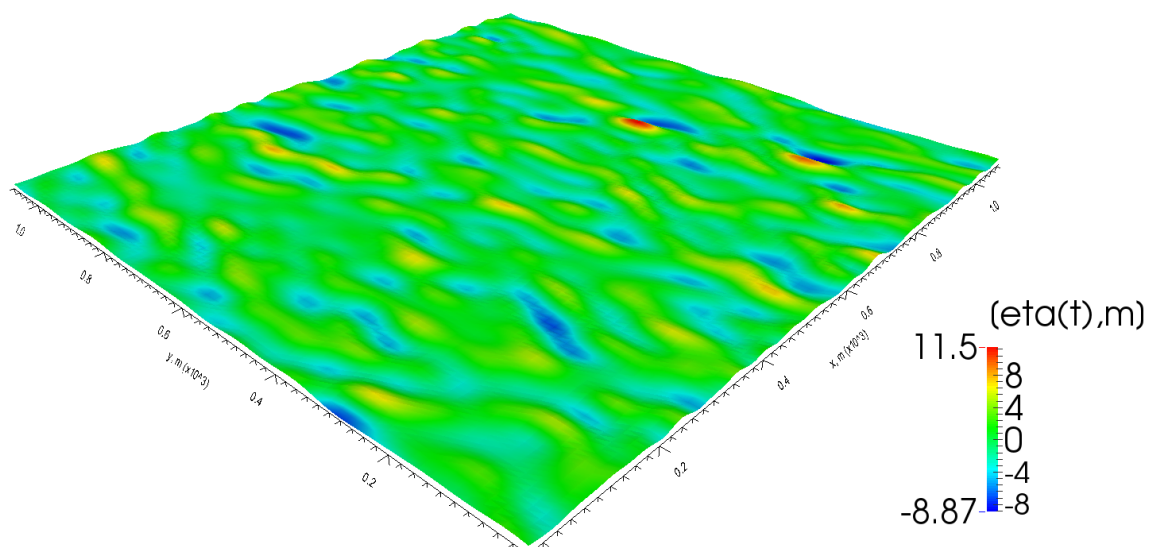
detektirao ekstreman val. Pogodan ekstreman val razvio se u trenutku  $t = 532$  s, koji je prikazan na SliciSl. 15. SlikaSl. 16 prikazuje bliži pogled na ekstreman val. Kao što je vidljivo sa skale u boji na SliciSl. 15, radi se o valu čija visina iznosi  $H = 21.91$  m, što kvalificira ovaj val kao ekstreman val, obzirom da vrijedi  $H/H_s = 2.087 > 2$ . Ovaj val korišten je za inicijalizaciju CFD simulacija. Nakon zamiranja prikazanog ekstremnog vala, dolazi do stvaranja još jednog velikog vala. Premda je manji, drugi val je nepovoljniji po pomorske objekte zbog dubljeg valnog dola koji mu prethodi. Drugim rječima, efektivna visina vala koju bi doživio objekt na kojeg nailazi val je veća u slučaju drugog vala. Drugi val prikazan je na SliciSl. 17. Kod prvog ekstremnog vala valni dol nalazi se iza vala u odnosu na smjer propagacije vala, SlikaSl. 16, dok drugi veliki valni brijeg nastaje iza istog dola, SlikaSl. 17. Same CFD simulacije pokrenute su prije pojave ekstremnog vala, u trenutku HOS simulacije  $t = 525$  s. Slobodna površina u trenutku inicijalizacije CFD proračuna prikazana je na SliciSl. 18.



Slika 15: Prikaz elevacije slobodne površine sa ekstremnim valom,  $t = 532$  s.



Slika 16: Bliži prikaz ekstremnog vala,  $t = 532$  s.

Slika 17: Prikaz drugog vala,  $t = 541$  s.Slika 18: Prikaz elevacije slobodne površine korištene kao početni uvjet u CFD simulacijama,  $t = 525$  s.

## 5.2 Nailazak ekstremnog vala na baržu

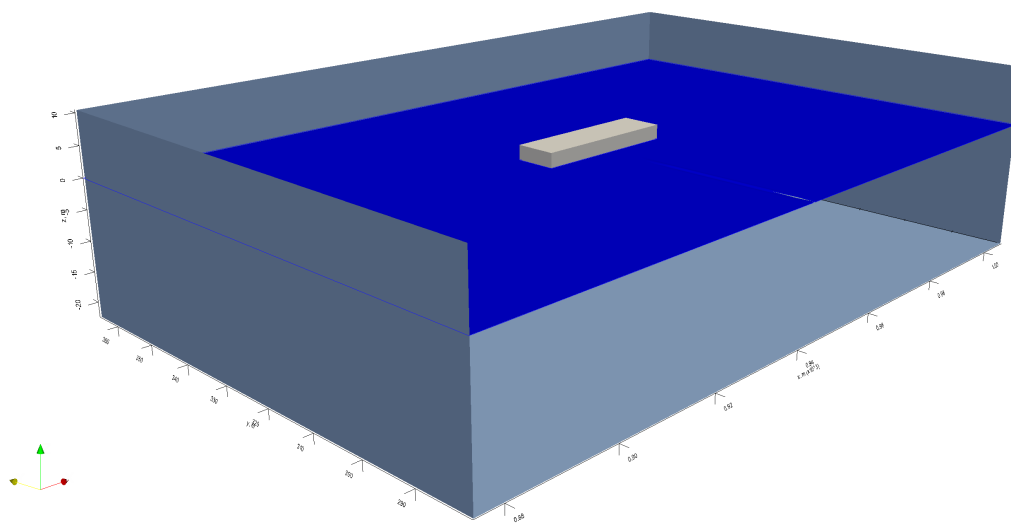
Provedena je simulacija nailaska ekstremnog vala na baržu u punoj veličini. Barža je modelirana kao kruto tijelo, te su oslobođeni svi stupnjevi slobode gibanja. U Tablici Tab. 5 prikazani su geometrijske karakteristike barže, pri čemu su  $r_x$ ,  $r_y$  i  $r_z$  radijusi tromosti mase broda oko glavnih osi.

Tablica 5: Geometrijske karakteristike barže.

$L$ , m	27
$B$ , m	7
$D$ , m	5
$T$ , m	2.5
$x_G$ , m	13.5
$y_G$ , m	0
$KG$ , m	2.15
$r_x$ , m	2.15
$r_y$ , m	7.4
$r_z$ , m	7.5

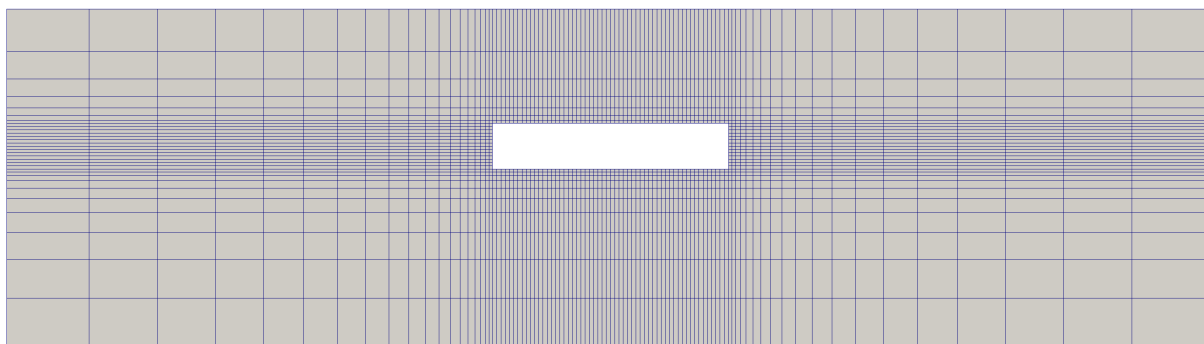
Zbog ograničenja računalnih resursa, domena simulacije svedena je na minimum. Duljina domene je 132 m, širina 85.5 m, dok je visina domene svega 37.5 m. Pri tome je dubina domene  $d = 22.5$  m. Obzirom na polje valova koje se simulira u ovoj domeni, dubina nije dostatna. Za izabrane JONSWAP parametre dominantna valna dulji iznosi oko  $L_p = 140$  m. Obzirom na to, kako bi se dubina smatrala beskonačnom trebala bi biti barem 70 m. Kako bi se izbjegla velika domena zbog povećanja dubine, na dno domene je postavljen propisan rubni uvjet za brzinu. Brzina na dnu se propisuje svaki vremenski korak pomoću polja brzine iz same HOS simulacije. Na taj način dno domene djeluje kao transparentna ploha s stanovišta polja brzine valova. Obzirom da gaz barže iznosi oko 10% dubine, može se smatrati da promjena polja brzine koju barža uzrokuje neće utjecati na polje brzine na dnu domene. Treba napomenuti da se HOS rješenje osim za inicijalizaciju CFD simulacije koristi u svakom vremenskom koraku kako bi se nametnulo polje brzine valova u relaksacijskim zonama te na granicama domene. Iz tog razloga potrebno je paralelno provoditi HOS proračun s CFD simulacijom. Relaksacijske zone su dijelovi domene u kojima se postepeno prelazi s nametnutog rješenja za brzinu i elevaciju slobodne površine na rješenje CFD proračuna, kao što je objašnjeno u Poglavlju 3.2. Relaksacijska zona postavljena je uz sve vertikalne granice domene, na način da se njihov utjecaj gubi prema sredini domene, gdje je postavljena barža. Prilikom simulacije koristi se metoda gdje se cijela proračunska domena giba kao kruto tijelo zajedno s baržom. Takav pristup omogućuje minimalno vrijeme proračuna, te je u ovom slučaju opravdan, obzirom da nema potrebe za simulacijom nepomičnih granica domene. Broj ćelija je 110000, što je izrazito nisko za ovakvu trodimenzionalnu simulaciju. Na Slici Sl. 19 prikazana je

domena simulacije s mirnom slobodnom površinom. Mreža kontrolnih volumena je prikazana u uzdužnoj simetralnoj ravnini na SliciSl. 20. Vidljivo je da riječ o vrlo gruboj mreži kontrolnih volumena, osobito u području blizu granica domene. SlikaSl. 21 prikazuje vrijednost relaksacijskog težinskog koeficijenta u uzdužnoj i poprečnoj ravnini. Vidljivo je da je vrijednost koeficijenta uz rub domene jednaka 1, dok se prema sredini domene postepeno smanjuje na nulu. Na SliciSl. 22 prikazana je domena na početku simulacije.

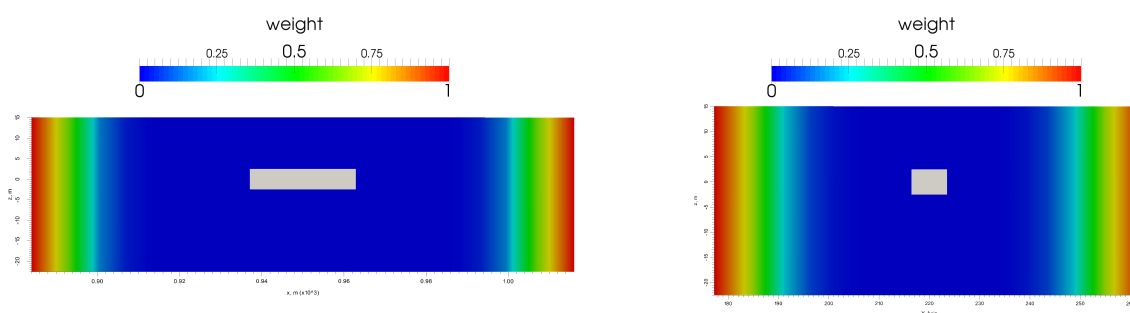


Slika 19: Domena simulacije sa mirnom slobodnom površinom.

CFD proračun vršio se na procesoru s četiri jezgre brzine 2.4 GHz. Proračun je trajao 37 sati, pri čemu je simulirano vrijeme od 25 sekundi. SlikeSl. 23 prikazuju nailazak ekstremnog vala na baržu u vremenskim razmacima od 0.5 sekundi. Može se vidjeti da se val lomi neposredno prije udara u baržu, što je vrlo nepovoljno u smislu dinamičkog opterećenja barže. Slobodna površina dalje od barže vrlo je grubo definirana uslijed grube mreže. Međutim, zbog korištenja relaksacijskih zona u području najgrublje mreže utjecaj niske rezolucije se umanjuje, te se u finijem djelu mreže blizu barže dobiva fizikalno polje strujanja. SlikaSl. 24 prikazuje polje brzine u uzdužnoj simetralnoj ravnini barže u trenutku  $t = 11$  s, koji odgovara udaru ekstremnog vala. SlikaSl. 25 prikazuje raspodjelu tlaka na površini barže u trenutku udara vala. Očito je da dolazi do vrlo visokih tlakova na pramčanoj plohi barže. Visoki tlakovi uzrokuju visoke sile opterećenja, što je vidljivo na SliciSl. 26 gdje je prikazana ovisnost sile opterećenja u smjeru osi  $x$  globalnog koordinatnog sustava o vremenu. Očito je da dolazi do naglog porasta opterećenja u trenutku nailaska ekstremnog vala. Osim toga, iznos opterećenja uslijed drugog vala gotovo jednak opterećenju uslijed ekstremnog vala, premda se ne radi o ekstremnom valu. Može se primjetiti da signal sile



Slika 20: Prikaz mreže kontrolnih volumena barže u uzdužnoj simetralnoj ravnini.

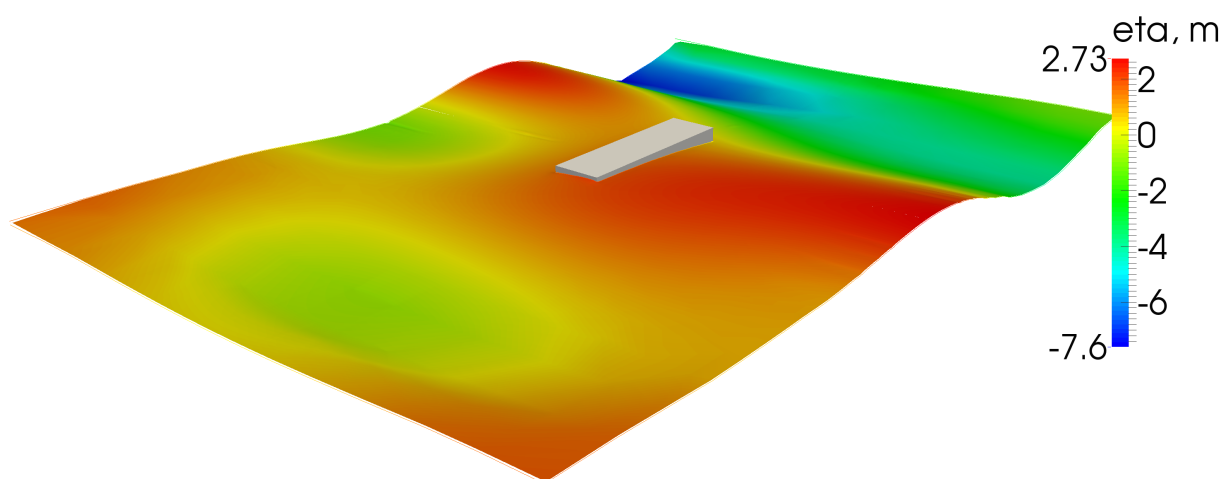


(a) Uzdužni presjek,

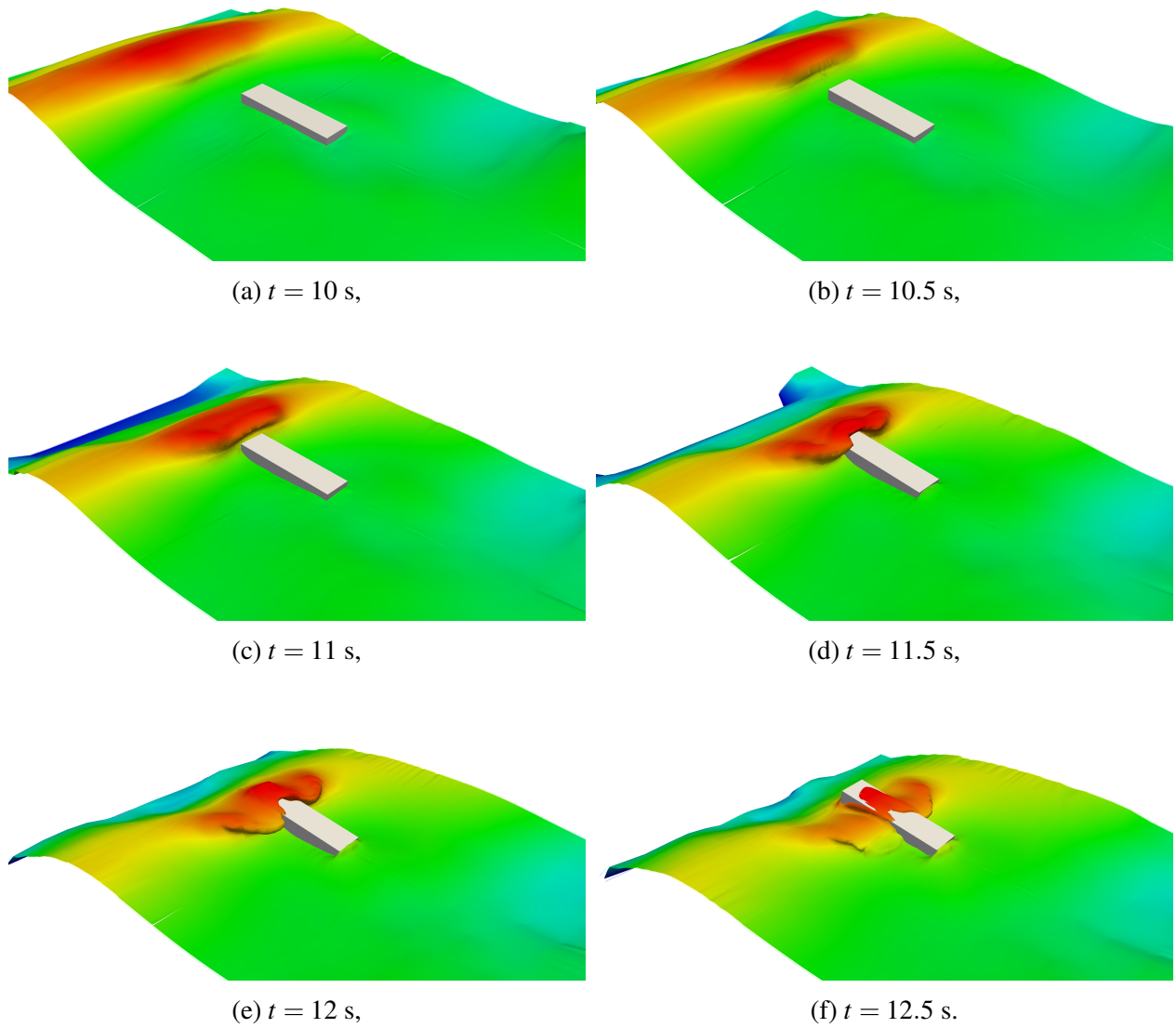
(b) Poprečni presjek.

Slika 21: Vrijednost težinske funkcije u uzdužnoj i poprečnoj simetralnoj ravnini.

oscilira u prilikon nailaska drugog vala čemu je uzrok nedovoljna profinjenost mreže. Treba napomenuti da barža nije postavljena na točnu poziciju nastanka ekstremnog vala, već 80 m niz vjetar. Iz tog razloga ekstreman val ne nailazi na baržu u trenutku  $t = 7$  s, već u trenutku  $t = 11$  s. Obzirom da su oslobođeni svi stupnjevi slobode, barža doživljava otplov u smjeru  $x$  i  $y$  osi. SlikaSl. 27 prikazuje pomak težišta barže u vremenu u odnosu na sve tri osi. Kao što se može vidjeti, barža doživljava značajan otplov u uzdužnom smjeru.

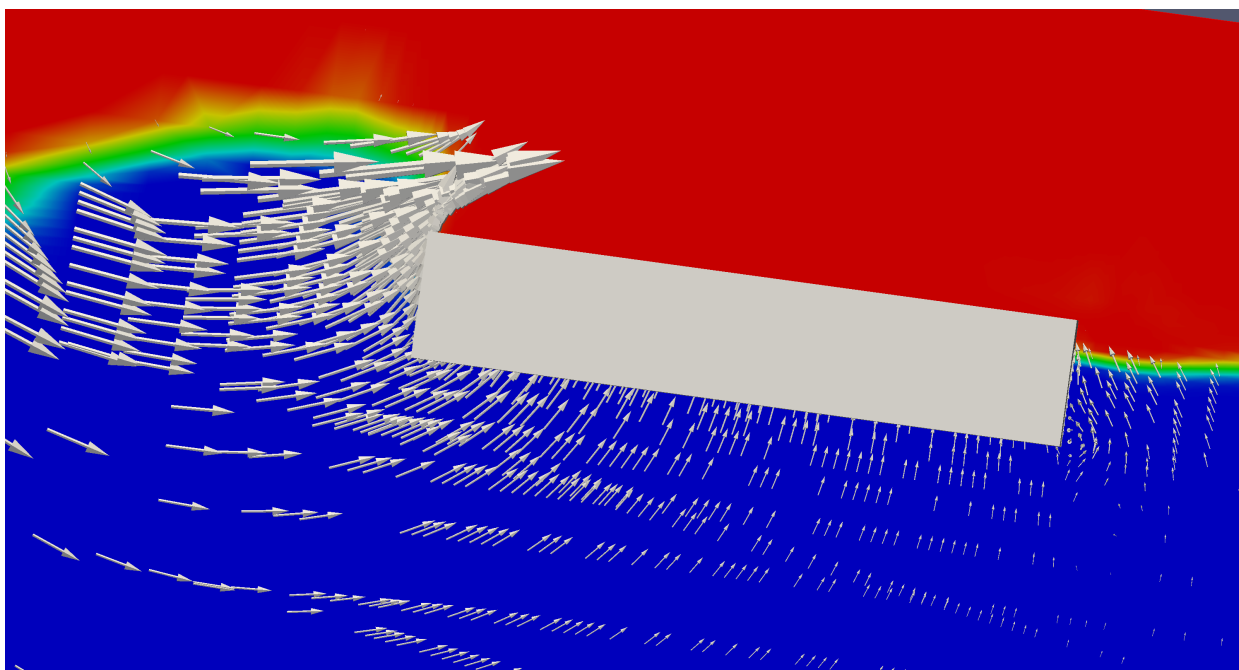


Slika 22: Slobodna površina u početnom trenutku CFD simulacije.

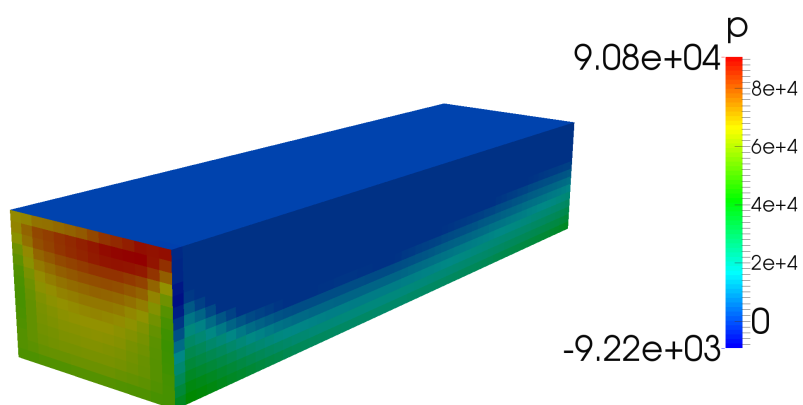


Slika 23: Prikaz nailaska ekstremnog vala na baržu u vremenskim razmacima od 0.5 s.

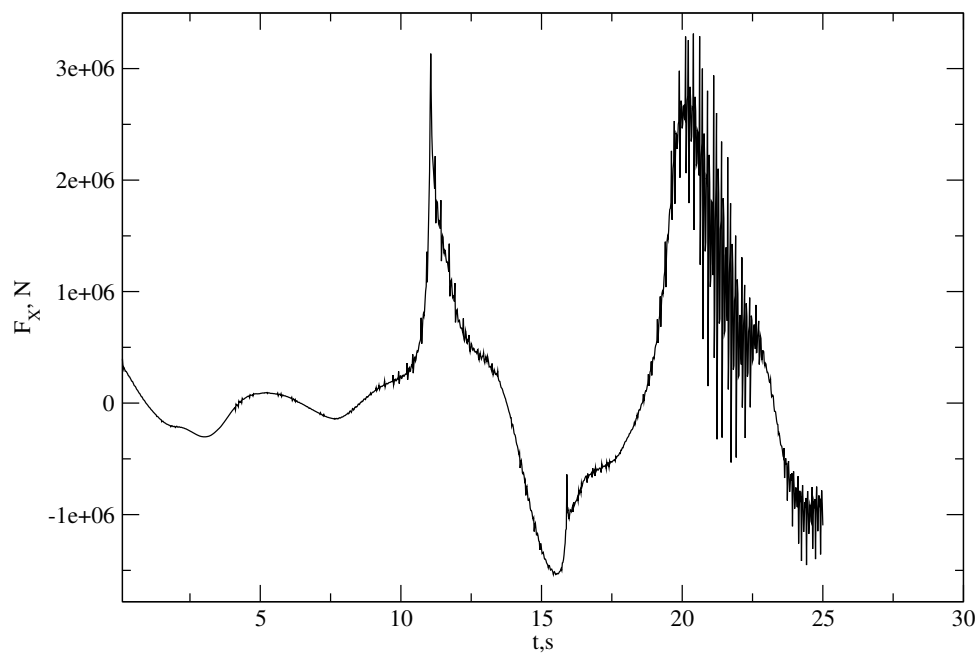
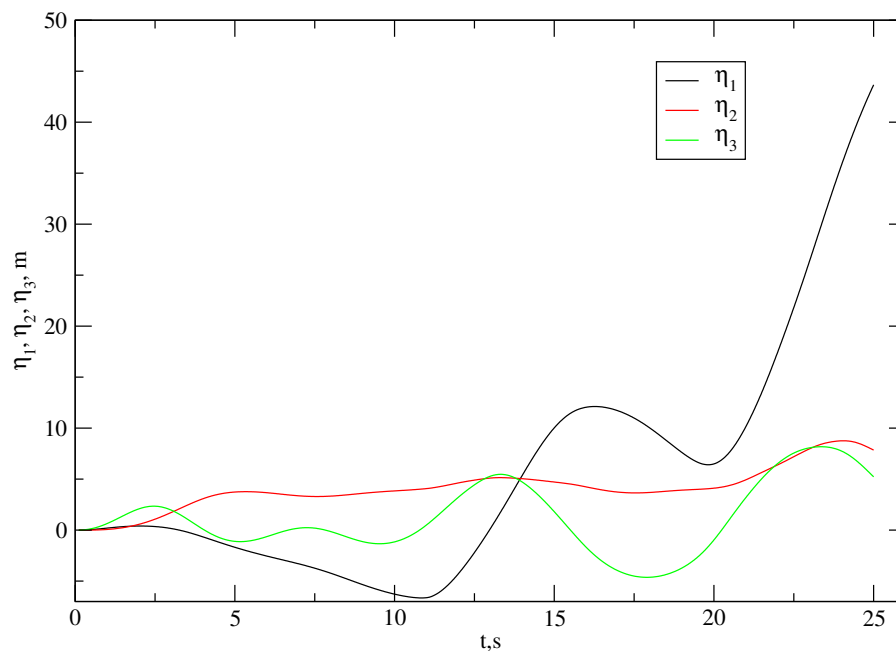




Slika 24: Polje brzine u uzdužnoj simetralnoj ravnini u trenutku udara ekstremnog vala u baržu,  $t = 11$  s.



Slika 25: Raspodjela dinamičkog tlaka u Pa na površini barže u trenutku udara ekstremnog vala,  $t = 11$  s.

Slika 26: Ovisnost sile opterećenja na baržu u smjeru osi  $x$  o vremenu.

Slika 27: Pomak težišta barže u ovisnosti o vremenu.

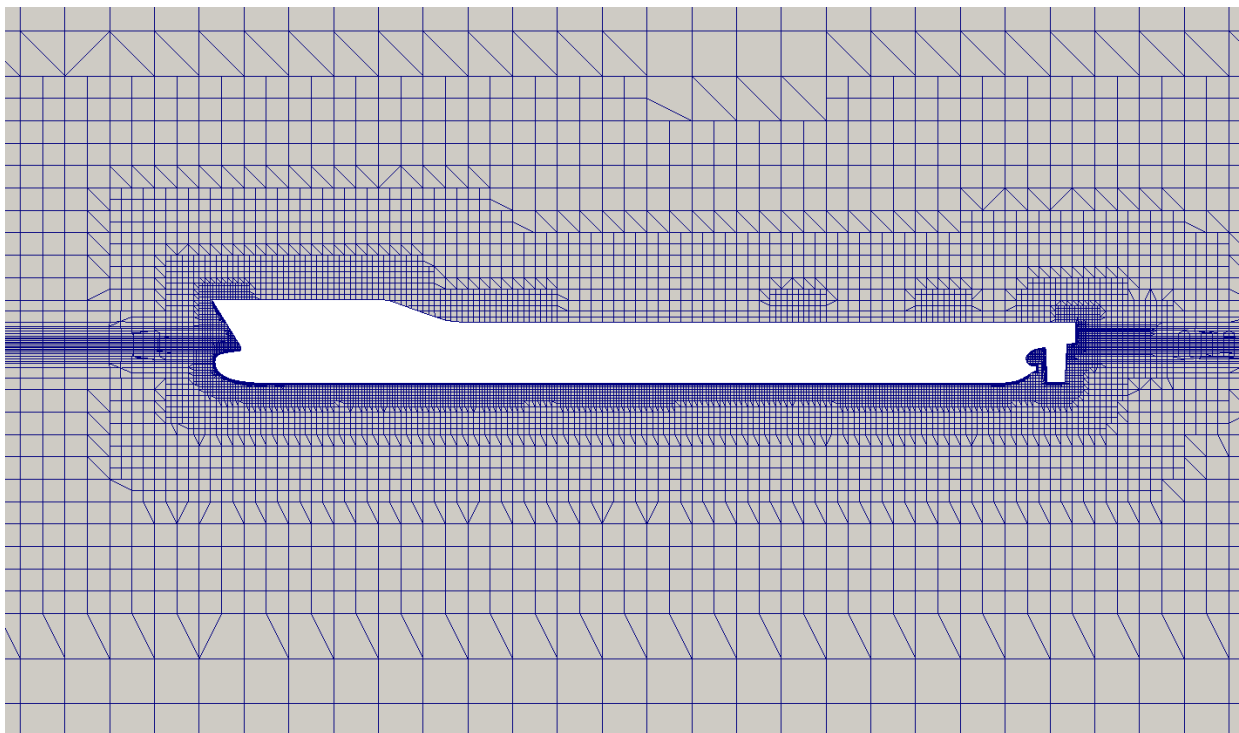
### 5.2.1 Nailazak ekstremnog vala na brod za prijevoz kontejnera

U ovom poglavlju opisana je trodimenzionalna simulacija nailaska ekstremnog vala na brod za prijevoz kontejnera u punoj veličini. Kao i u prethodnoj simulaciji, svi stupnjevi slobode gibanja su oslobođeni. Tablica Tab. 6 prikazuje podatke o kontejnerskom brodu. Duljina proračunske domene je 860 m, širina 600 m, visina je 530 m, od čega je dubina 310 m. Kao i u prethodnoj simulaciji, valovi su u CFD domenu nametnuti pomoću relaksacijskih zona, te je korišten isti slučaj ekstremnog vala. Proračun je proveden na 1 200 000 proračunskih ćelija. Mreža kontrolnih volumena u uzdužnoj simetralnoj ravnini prikazana je na SliciSl. 28.

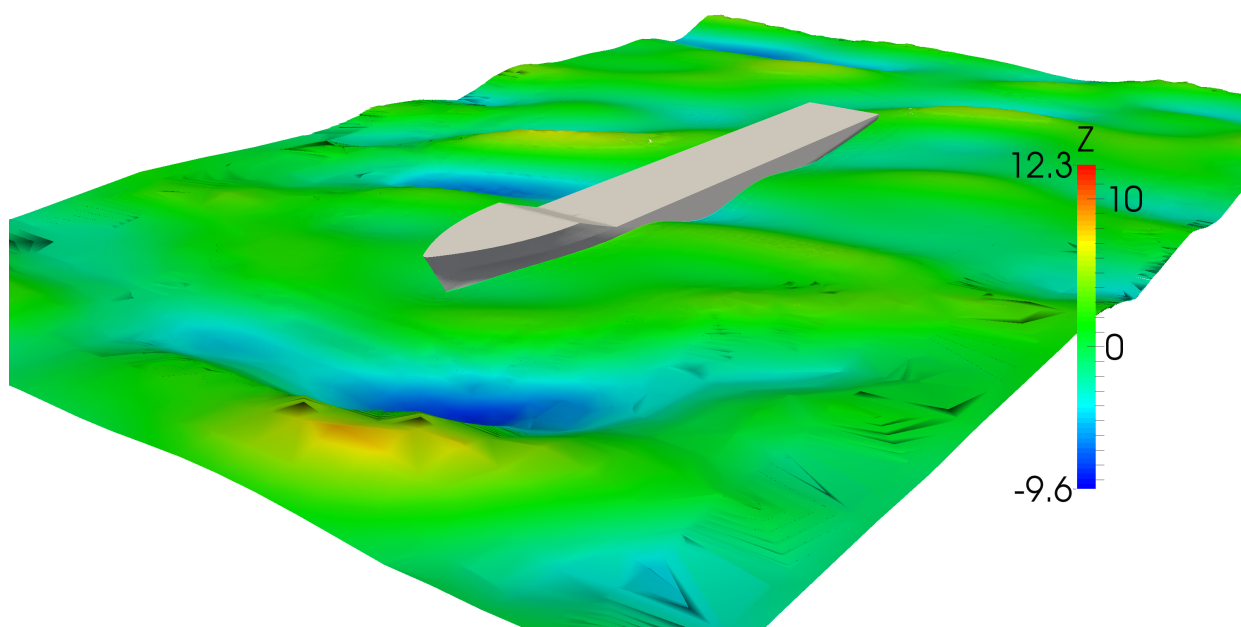
Na SliciSl. 29 prikazana je domena simulacije u trenutku  $t = 0$ . SlikaSl. 30 sekvencijalno prikazuje nailazak ekstremnog vala na pramac broda. Kao što se može vidjeti, dolazi do slamanja vala prije udara o pramac, što smanjuje silu opterećenja dinamičkog tlaka. Raspodjela dinamičkog tlaka na pramcu broda u dva vremenska trenutka uslijed udara prikazana je na SliciSl. 31. SlikaSl. 31a prikazuje dinamički tlak u trenutku  $t = 6.6$  s, kada tek dolazi do kontakta vala i pramca broda. Može se vidjeti da se radi o visoko koncentriranom tlaku te on na mjestima iznosi i preko 4 bara. SlikaSl. 31b prikazuje dinamički tlak u trenutku  $t = 7$  s, kada cijeli pramac uranja u val.

Tablica 6: Karakteristike broda za prijevoz kontejnera.

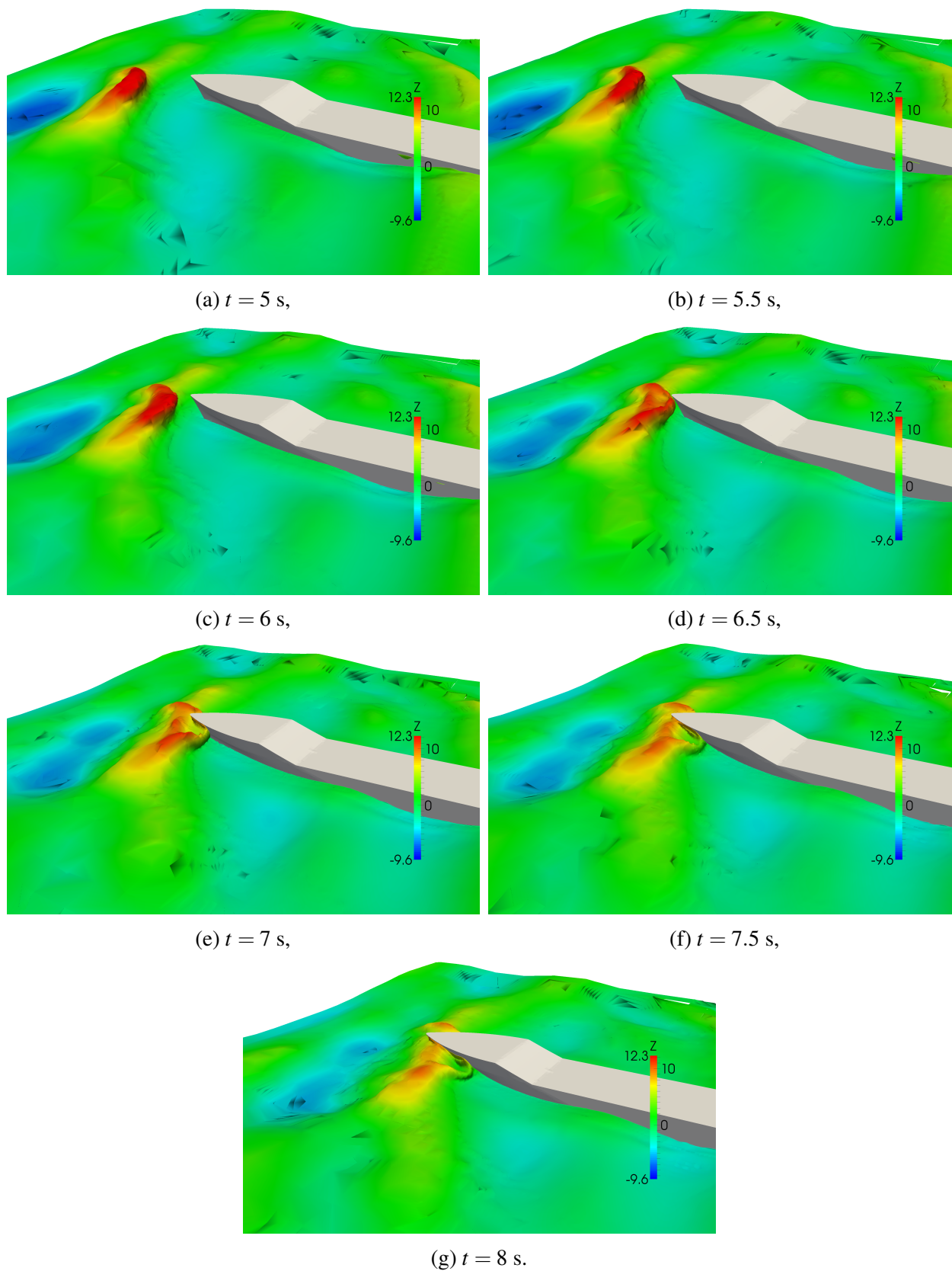
$L$ , m	230
$B$ , m	32.2
$D$ , m	19
$T$ , m	10.8
$x_G$ , m	111.6
$y_G$ , m	0
$KG$ , m	14.32
$r_x$ , m	12.9
$r_y$ , m	57.5
$r_z$ , m	57.5



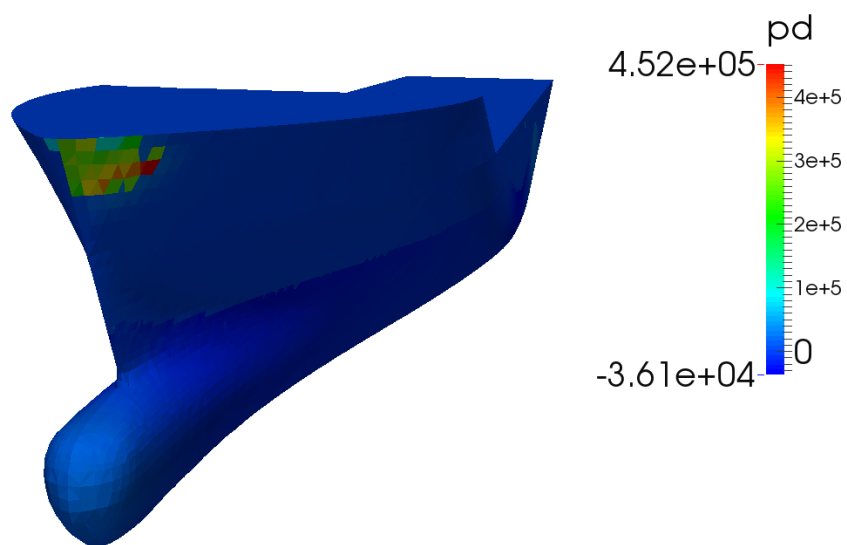
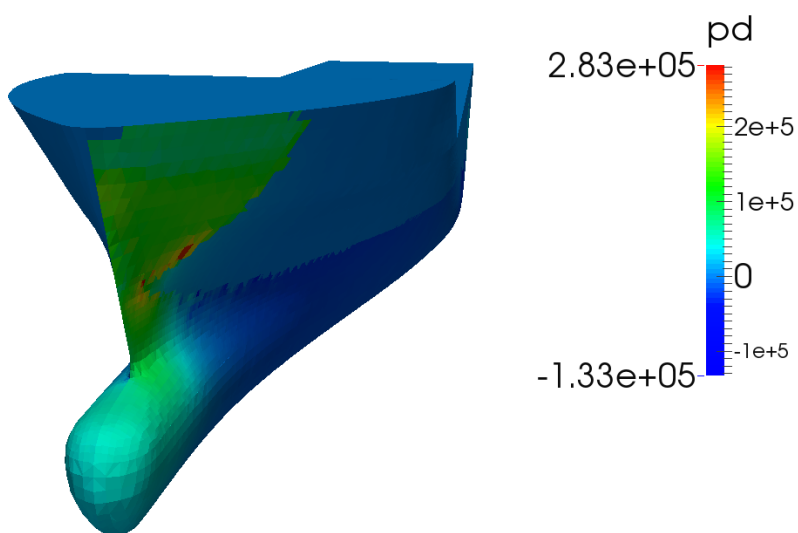
Slika 28: Prikaz mreže kontrolnih volumena broda za prijevoz kontejnera u uzdužnoj simetralnoj ravnini.



Slika 29: Prikaz slobodne površine CFD simulacije nailaska ekstremnog vala na brod za prijevoz kontejnera,  $t = 0$  s.



Slika 30: Prikaz nailaska ekstremnog vala na brod za prijevoz kontejnera u vremenskim razmacima od 0.5 s.

(a)  $t = 6.6$  s(b)  $t = 7$  s

Slika 31: Raspodjela dinamičkog tlaka u Pa na pramcu brodu prilikom nailaska ekstremnog vala.

Provedene trodimenzionalne simulacije pokazuju mogućnost primjene nelinearne spektralne valne teorije višeg reda u sprezi s CFD alatom. Trodimenzionalne CFD simulacije ekstremnog vala napredni su proračuni u području brodogradnje i pomorske tehnike koji se u današnje vri-

jeme rijetko provode, poglavito iz razloga što je tek nekolicina CFD programa u mogućnosti provesti takvu simulaciju. Međutim, može se očekivati velik interes u industriji za provođenjem ovakvih simulacija, obzirom na visoke cijene eksperimentalnih ispitivanja. Također, ovakav proračun bi mogao poslužiti za dobivanje ulaznih podataka strukturne analize broda ili pučinskog objekta. Raspodjela tlakova na pramcu uslijed ekstremnog projektnog vala može se koristiti da bi se provjerio strukturni integritet konstrukcije uslijed takvog događaja.

## 6 Zaključak

U ovom radu prikazana je implementacija dvodimenzionalne spektralne metode viših redova (eng. *"Higher Order Spectrum"*, HOS) za trodimenzionalnu nelinearnu propagaciju površinskih gravitacijskih valova. Ovaj rad je nastavak na rad za Rektorovu nagradu [11], gdje je provedena implementacija jednodimenzionalne HOS metode. HOS metoda koristi pseudo-spektralni pristup rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Algoritam numeričke procedure napisan je u programskom jeziku C++, u softveru otvorenog koda OpenFOAM [23]. OpenFOAM je specijalizirani softver za računalnu dinamiku fluida (eng. *"Computational Fluid Dynamics"*, CFD).

Valjanost i točnost implementirane HOS metode dokazana je na tri testna proračuna. Prva dva testna proračuna provedena su kao u [11], kako bi se potvrdila točnost algoritma nakon proširenja na dvije dimenzije. U prvom proračunu provedena je propagacija monokromatskog vala pri čemu je prikazan razvoj nelinearnih harmonika. Nelinearne komponente uspoređene su s egzaktnim Stokesovim rješenjem. Drugi testni proračun prikazuje usporedbu propagacije spektra valova s HOS metodom i CFD simulacijom provedenom u [12]. Provedena je kvalitativna usporedba te je pokazano da dolazi do odgovarajućeg grupiranja valnih harmonijskih komponenti. Rezultati navedena dva proračuna podudaraju se sa rezultatima dobivenim u [11] što dokazuje ispravnost proširenog algoritma. Treći testni slučaj pokazao je razvoj nelinearnih Benjamin–Feir nestabilnosti monokromatskog vala.

Implementacija HOS metode provedena je sa namjerom da se spregom sa CFD simulacijom omogući inicijalizacija fizikalnog nelinearnog valnog polja, osobito ekstremnih valova. Iz tog razloga na kraju rada su provedene pokazne CFD simulacije trodimenzionalnog ekstremnog vala. Pomoću usmjerenog empirijskog valnog spektra iniciran je HOS proračun u kojem je pronađen događaj ekstremnog vala. Pomoću rješenja događaja trodimenzionalnog ekstremnog vala inicirane su CFD simulacije. U prvoj simulaciji pokazan je nailazak ekstremnog vala na plutajuću baržu. U drugoj simulaciji je simuliran udar ekstremnog vala u pramac broda za prijevoz kontejnera. Ovakve simulacije prikazuju mogućnost primjene implementiranog koda i CFD alata u području brodogradnje i pomorske tehnike.

Može se zaključiti da je implementacija dvodimenzionalne spektralne metode viših redova za nelinearnu propagaciju valova uspješna. Rezultati prikazani u ovom radu dokazuju da je algoritam valjan i točan. Može se također zaključiti da postoji velika mogućnost primjene CFD alata kao što je OpenFOAM, u sprezi s implementiranom valnom teorijom, na probleme koji se u sve većoj mjeri javljaju u području brodogradnje i pomorske tehnike. Vrlo je izgledno da će korištenje CFD proračuna u tom području u budućnosti biti zastupljeno u sve većoj mjeri.



## Literatura

- [1] Morison, J.R. and O'Brien, M.P. and Johnson, J.W. and Schaaf, S.A., The force exerted by surface waves on piles, *Petroleum Trans.* 189 (1950) 149–157.
- [2] J. Prpić-Oršić, V. Čorić, *Pomorstvenost plovnih objekata*, Zigo, Rijeka, 2006.
- [3] C. Kharif, E. Pelinovsky, Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 22 (2003) 603–634.
- [4] I. Gatin, *Završni rad: Numerička simulacija opterećenja statičke strukture udarom vala*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2014.
- [5] X. Zhao, Numerical simulation of extreme wave generation using VOF method, *Journal of Hydrodynamics* 22 (2010) 466–477.
- [6] D. G. Dommermuth, D. K. P. Yue, A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *J. Fluid Mech.* 184 (1987) 267–288.
- [7] B. J. West, K. A. Brueckner, R. S. Janda, A New Numerical Method for Surface Hydrodynamics, *Journal of Geophysical Research* 92 (C11) (1987) 11803–11824.
- [8] D. G. Dommermuth, The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme, *Wave Motion* 32 (2000) 307–317.
- [9] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 7 (2007) 109–122.
- [10] M. Tanaka, A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation, *Fluid Dynamics Research* 28 (2001) 41–60.
- [11] I. Gatin, *Rad za Rektorovu nagradu: Spektralna metoda viših redova za nelinearnu propagaciju površinskih valova*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2015.
- [12] G. Lupieri, T. Puzzer, G. Contento, Numerical study of the wave-wave interaction by viscous flow simulations with OpenFOAM, in: *XXI. Symposium Sorta*, 2014.
- [13] M. Su, M. Bergin, P. Marler, R. Myrick, Experiments on nonlinear instabilities and evolution of steep gravity-wave trains, *J. Fluid Mech.* 124 (1982) 45–72.
- [14] B. Lake, H. Yuen, R. H., W. Ferguson, Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train, *J. Fluid Mech.* 83 (1977) 49–74.

- [15] J. M. J. Journée, W. Massie, *Offshore Hydromechanics*, Delft University of Technology, Cambridge University Press, 2001.
- [16] R. Dean, R. Dalrymple, *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, World Scientific, 1984.
- [17] G. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- [18] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 2000.
- [19] L. H. Holthuijsen, *Waves in Oceanic and Coastal Waters*, Delft University of Technology and UNESCO-IHE, 2007.
- [20] D. Champeney, *Fourier Transforms and Their Physical Applications*, Academic press, 1973.
- [21] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2002.
- [22] C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, T. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, 1988.
- [23] H. Jasak, A. Jemcov, Z. Tuković, *Openfoam: A c++ library for complex physics simulations*, International Workshop on Coupled Methods in Numerical Dynamics, IUC, Dubrovnik, Croatia.
- [24] N. G. Jacobsen, D. R. Fuhrman, J. Fredsøe, *A wave generation toolbox for the open-source CFD library: OpenFoam®*, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 70 (9) (2012) 1073–1088. doi: 10.1002/flid.2726.
- [25] H. Jasak, I. Gatin, V. Vukčević, *Numerical Simulation of Wave Loading on Static Offshore Structures*, in: *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*, 2014.
- [26] H. Jasak, V. Vukčević, I. Gatin, *Numerical Simulation of Wave Loads on Static Offshore Structures*, in: *CFD for Wind and Tidal Offshore Turbines - in press*, Springer Tracts in Mechanical Engineering, 2015, pp. 95–105.
- [27] L. Schwartz, *Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves*, *J. Fluid Mech.* 62 (1974) 553–578.
- [28] M. Banner, *Wave Breaking in Deep Water*, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 25 (1993) 373–397.
- [29] T. Benjamin, J. E. Feir, *The disintegration of wave trains in deep water*, *J. Fluid Mech.* 27 (1967) 417–430.

- [30] J. E. Feir, Discussion: some results from wave pulse experiments, *Proc. Roy. Soc.* 299 (1967) 54–58.
- [31] J. W. McLean, Y. Ma, D. Martin, P. Saffman, H. Yuen, Three-dimensional instability of finite amplitude water waves, *Phys. Rev. Lett.* 46 (1981) 817–820.
- [32] J. W. McLean, Instabilities of finite-amplitude water waves, *J. Fluid Mech.* 114 (1982) 315–330.
- [33] V. Vukčević, H. Jasak, Decomposition Model for Naval Hydrodynamic Applications, Part I: Computational Method, *Ocean Engineering* (submitted 2015).
- [34] V. Vukčević, H. Jasak, Decomposition Model for Naval Hydrodynamic Applications, Part II: Verification and Validation, *Ocean Engineering* (submitted 2015).