

# Eksperimentalno određivanje karakteristika modela Pelton turbine

---

Guć, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2016

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:081915>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Luka Guć**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing.

Student:

Luka Guć

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Mariju Šavaru na ukazanim savjetima. Također se zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na svojoj potpori iskazanoj tijekom studija.

Luka Guć



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student:

Mat. br.:

Naslov rada na  
hrvatskom jeziku:

Naslov rada na  
engleskom jeziku:

Opis zadatka:

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Zvonimir Guzović

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Povijest iskorištavanja hidroenergetskog potencijala .....	1
1.2. Vrste turbina za iskorištavanje hidroenergetskog potencijala.....	2
1.3. Izgled modela Pelton turbine .....	4
2. MJERNA LINIJA.....	6
2.1. Hidraulička shema eksperimenta .....	7
2.2. Mjerni lanac za mjerenje protoka.....	8
2.2.1. Izvedba mjernog lanca .....	8
2.2.2. Izvod jednadžbe za izračun protoka.....	13
2.2.3. Izvedba mjernog lanca za umjeravanje protoka.....	15
2.3. Mjerni lanac za mjerenje tlaka .....	18
2.4. Mjerni lanac za mjerenje okretnog momenta.....	19
2.4.1. Izvedba mjernog lanca za mjerenje okretnog momenta.....	19
2.4.2. Izvod Capstanove jednadžbe za trenje u remenu .....	22
2.5. Mjerni lanac za mjerenje broja okretaja turbine .....	24
3. DIMENZIJSKA ANALIZA .....	26
3.1. Teorijska osnova u dimenzijskoj analizi.....	26
3.2. Dimenzijska analiza modela Pelton turbine.....	29
3.2.1. Izbor skupa utjecajnih fizikalnih veličina i nezavisnih veličina .....	29
3.2.2. Dokaz dimenzijske nezavisnosti izabranog skupa .....	30
3.2.3. Izvod bezdimenzivskih $\Pi$ parametara .....	31
3.2.3.1. Bezdimenzijski parametar momenta sile .....	31
3.2.3.2. Bezdimenzijski parametar protoka .....	31
3.2.3.3. Bezdimenzijski parametar snage.....	32
3.2.3.4. Bezdimenzijski parametar brzine toka u mlaznici.....	33
4. REZULTATI MJERENJA .....	34
4.1. Područje razmatranja rada modela Pelton turbine .....	34
4.2. Umjeravanje protoka.....	35
4.3. Karakteristika pogonske pumpe.....	37
4.4. Određivanje konstante u Capstanovoj jednadžbi.....	38
4.5. Izmjerene snage.....	39
4.5.1. Izrazi za izračun snage .....	39
4.5.2. Snaga pumpe .....	43
4.5.3. Idealna snaga turbine .....	44

---

4.5.4.	Stvarna snaga turbine .....	46
4.6.	Iskoristivost turbine.....	48
4.6.1.	Izrazi za izračun iskoristivosti turbine .....	48
4.6.2.	Idealna iskoristivost turbine .....	49
4.6.3.	Stvarna iskoristivost turbine .....	51
5.	PROCJENA POGREŠKE .....	53
5.1.	Metode procjene pogreške .....	53
5.1.1.	Koeficijent determinacije <b>R<sup>2</sup></b> .....	55
5.1.2.	Intervali pouzdanosti CI.....	57
5.1.3.	Relativna pogreška mjerenja .....	59
5.2.	Procjena pogreški mjerenja.....	60
5.2.1.	Procjena pogreške mjerenja protoka .....	60
5.2.2.	Procjena pogreške mjerenja sile.....	62
5.2.3.	Procjena pogreške mjerenja tlaka .....	64
5.2.4.	Procjena pogreške mjerenja promjera.....	65
5.2.5.	Procjena pogreške mjerenja kutne brzine .....	65
5.3.	Procjena pogreški izvedenih veličina.....	66
5.3.1.	Procjena pogreške snage pumpe .....	66
5.3.2.	Procjena pogreške idealne snage.....	66
5.3.3.	Procjena pogreške stvarne snage turbine .....	66
5.3.4.	Procjena pogreške idealne iskoristivosti turbine.....	67
5.3.5.	Procjena pogreške stvarne iskoristivosti turbine.....	67
6.	ZAKLJUČAK.....	68
	LITERATURA.....	69
	PRILOZI.....	70

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Područje korištenja Kaplan, Francis i Pelton turbine .....	2
Slika 2.	Iskoristivost Pelton, Francis i Kaplan turbine .....	3
Slika 3.	Princip rada Pelton turbine .....	3
Slika 4.	Model Pelton turbine na kojem se provodi eksperiment .....	4
Slika 5.	Pogonska pumpa, rezervoar i cijev za protok vode .....	5
Slika 6.	Hidraulička shema eksperimenta .....	7
Slika 7.	Shematski prikaz mjernog lanca za mjerenje protoka .....	8
Slika 8.	Stvarna izvedba mjernog lanca za mjerenje protoka .....	9
Slika 9.	Venturijeva cijev .....	10
Slika 10.	Pretvarač tlaka .....	11
Slika 11.	Multimetar .....	12
Slika 12.	Umjeravanje mjernog lanca za izračun protoka .....	15
Slika 13.	Mjerna posuda za umjeravanje protoka .....	16
Slika 14.	Oznake volumena na mjernoj posudi .....	17
Slika 15.	Manometar .....	18
Slika 16.	Pronijeva kočnica .....	19
Slika 17.	Shematski prikaz mjernog lanca za mjerenje okretnog momenta .....	20
Slika 18.	Stvarna izvedba mjernog lanca za mjerenje okretnog momenta .....	20
Slika 19.	Prijenosna digitalna vaga .....	21
Slika 20.	Infinitezimalni isječak remena .....	22
Slika 21.	Digitalni ručni tahometar .....	24
Slika 22.	Prednji kraj digitalnog ručnog tahometra .....	24
Slika 23.	Prednji kraj vratila Pelton turbine sa bijelim reflektirajućim markerom .....	25
Slika 24.	Mjerne točke iregresijska krivulja za umjeravanje protoka .....	35
Slika 25.	Karakteristika pumpe .....	37
Slika 26.	Mjerne točke i regresijska krivulja za Pronijevu kočnicu .....	38
Slika 27.	Mlaznica i kolo Pelton turbine .....	40
Slika 28.	Lopatica Pelton turbine .....	40
Slika 29.	Tok vode kroz mlaznicu .....	41
Slika 30.	Snaga pumpe u ovisnosti o protoku .....	43
Slika 31.	Idealna snaga turbine u ovisnosti o kutnoj brzini .....	44
Slika 32.	Idealna snaga turbine u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru $\Pi_4$ .....	45
Slika 33.	Stvarne snage turbine pri različitim protocima .....	46
Slika 34.	Stvarna snaga turbine u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru $\Pi_4$ .....	47
Slika 35.	Idealna iskoristivost turbine u ovisnosti o kutnoj brzini .....	49
Slika 36.	Idealna iskoristivost turbine u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru $\Pi_4$ .....	50
Slika 37.	Stvarna iskoristivost turbine u ovisnosti o kutnoj brzini .....	51
Slika 38.	Stvarna iskoristivost u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru $\Pi_4$ .....	52
Slika 39.	Raspodjela vrijednosti po Gaussovoj krivulji .....	53
Slika 40.	„Studentska“ ili t-raspodjela naspram normalne raspodjele .....	54
Slika 41.	Grafički prikaz $ST$ i $SP$ .....	55
Slika 42.	T-statistika za dva različita slučaja .....	58
Slika 43.	Intervali pouzdanosti pri umjeravanju protoka .....	60



Slika 44. Intervali pouzdanosti u Capstanovoj jednadžbi.....	63
Slika 45. Intervali pouzdanosti za karakteristiku pumpe.....	64

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Osnovne fizikalne veličine u mehanici fluida .....	26
Tablica 2. Skup utjecajnih fizikalnih veličina .....	29
Tablica 3. Interpretacija vrijednosti koeficijenta determinacije.....	56

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	[m <sup>2</sup> ]	izlazna površina mlaznice
$C$	[-]	konstanta u Capstanovoj jednadžbi
$\delta C$	[-]	relativna pogreška konstante $C$
$CI$	[-]	intervali pouzdanosti
$D$	[m]	promjer kola turbine
$\delta D$	[-]	relativna pogreška promjera kola turbine
$D_1, D_2, \dots$	[m]	promjer cijevi u presjeku 1, 2, ...
$F_1$	[N]	sila u vagi 1
$F_2$	[N]	sila u vagi 2
$\delta F$	[-]	relativna pogreška mjerenja sile
$h$	[m]	visinska razlika mjernih cijevčica u venturijevoj cijevi
$I$	[A]	jakost struje izmjerena multimetrom
$I_p$	[A]	početna jakost struje izmjerena multimetrom
$\Delta I$	[A]	korigirana jakost struje
$K_2$	[m <sup>3</sup> /s(mA) <sup>1/2</sup> ]	konstanta u jednadžbi za izračun protoka
$\delta K_2$	[-]	relativna pogreška konstante $K_2$
$M$	[Nm]	moment sile kojeg proizvodi turbina
$\delta M$	[-]	relativna pogreška momenta sile
$P_{ul}$	[W]	snaga pumpe
$P_t$	[W]	stvarna snaga turbine
$P_{t, id}$	[W]	idealna snaga turbine
$\delta p$	[-]	relativna pogreška pritiska pumpe
$p_1, p_2, \dots$	[Pa]	tlak vode u presjeku 1, 2, ...
$p$	[Pa]	pritisak pumpe
$\Delta p$	[Pa]	razlika tlakova u pretvaraču tlaka
$R$	[m]	radius kola turbine
$R^2$	[-]	koeficijent determinacije
$SE$	[-]	standardna pogreška parametra
$SP$	[-]	ukupno kvadratno odstupanje od regresijskog modela
$ST$	[-]	ukupno kvadratno odstupanje od srednje vrijednosti
$t$	[-]	t-statistika
$\Delta t$	[s]	promjena vremena pri umjeravanju
$u$	[m/s]	obodna brzina kola turbine
$\delta u$	[-]	relativna pogreška obodne brzine $u$

$v$	[m/s]	brzina strujanja vode na izlasku iz mlaznice
$v_1, v_2, \dots$	[m/s]	brzina strujanja vode u presjeku 1, 2...
$\Delta V$	[m <sup>3</sup> ]	promjena volumena pri umjeravanju
$w$	[m/s]	relativna brzina nastrojavanja vode na kolo turbine
$Q$	[m <sup>3</sup> /s]	protok vode
$\delta Q$	[-]	relativna pogreška protoka
$x$	[m]	visinska razlika između venturijeve cijevi i pretvarača tlaka
$\alpha$	[-]	stupanj pouzdanosti
$\Theta$	[-]	kut obuhvaćanja vratila remenom
$\mu$	[-]	dinamički koeficijent trenja između remena i vratila
$\Pi_1, \Pi_2, \dots$	[-]	bezdimenzijski parametri
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća vode
$\omega$	[s <sup>-1</sup> ]	kutna brzina vrtnje turbine
$\delta\omega$	[-]	relativna pogreška kutne brzine vrtnje turbine
$\beta$	[-]	kut lopatice turbine
$\eta$	[-]	stvarna iskoristivost turbine
$\delta\eta$	[-]	relativna pogreška stvarne iskoristivosti turbine
$\eta_{id}$	[-]	idealna iskoristivost turbine
$\delta\eta_{id}$	[-]	relativna pogreška idelane iskoristivosti turbine
$\nu$	[-]	broj statističkih stupnjeva slobode

## SAŽETAK

U radu su istražene karakteristike modela Pelton turbine. Promatrane su karakteristike Idealne i stvarne snage, te idealne i stvarne iskoristivosti u ovisnosti o dva parametra: kutnoj brzini okretanja modela turbine i bezdimenzijskom omjeru obodne brzine kola turbine i brzine mlaza vode na izlazu iz mlaznice.

Karakteristike modela Pelton turbine izvedene su iz rezultata mjerenja tlaka pumpe, protoka, brzine okretanja modela turbine i Momenta sile kojeg model turbine ostvaruje.

Za svako od mjerenja objašnjeni su mjerni lanci uz pomoć kojih su izmjerene vrijednosti dobivene.

Dimenzijskom analizom dobiveni su bezdimenzijski parametri za dani model Pelton turbine.

Rezultati su prikazani u obliku dijagrama sa prikazom mjernih točaka i regresijskih krivulja koje pokazuju funkcijsku vezu u rezultatima mjerenja.

Pogreška u rezultatima mjerenja i izvedenim veličinama snage i iskoristivosti ocijenjena je uz pomoć relativne pogreške. Pritom je relativna pogreška izračunata za svaki mjerni lanac, a relativna pogreška izvedenih veličina je izvedena iz relativnih pogreški individualnih mjernih lanaca.

**Ključne riječi:** Pelton turbina; mjerenje; dimanzijska analiza; teorija sličnosti

## **SUMMARY**

This thesis presents the research on the performance characteristics of a model of Pelton turbine. The characteristics observed are ideal and real power of the turbine model and ideal and real efficiency of the turbine model in relation to two parameters: angular velocity of the turbine model, and the non-dimensional ratio of tangential speed of turbine blades over the speed of water exiting the nozzle.

Performance characteristics were derived from measurements of pump pressure, flow, rotational speed of the turbine model and the torque produced by the turbine model.

For each of the measurements taken the measurement chain used to measure it was explained.

Dimensional analysis was used to derive non-dimensional parameters for the given model of Pelton turbine.

The results are shown in the form of diagrams with measurement points and regression curves showing the functional relation between the measured quantities.

The measurement error in calculations of power and efficiency was expressed in the form of relative error. The relative errors were calculated for each measurement chain and the relative errors of derived quantities were derived from relative errors of individual measurement chains.

Key words: Pelton turbine; measurements; dimensional analysis; similarity theory

## 1. UVOD

### 1.1. Povijest iskorištavanja hidroenergetskog potencijala

Čovjek je od početka svog postojanja pokušavao ovladati silama prirode i iskoristiti ih za svoje potrebe. Što se tiče fluida u prirodi, tj. vode i zraka, primitivni uređaji za pretvaranje energije sadržane u fluidima u mehaničku energiju za čovjekovu upotrebu postojali su otkako je čovjek prešao na sesilni način života. Energija vode je oduvijek prednjačila u iskoristivosti nad energijom vjetra iz više razloga:

- Dostupnost- tok vode je sadržan u ograničenim koritima sa tipično uvijek dostupnim količinama vode, kojima je lako manipulirati kanalima, branama, itd.
- Koncentriranost- gustoća vode je oko 1000 puta veća od gustoće zraka, dakle ista količina vode pri istoj brzini sadrži oko 1000 puta više kinetičke energije od zraka.

Ljudsko korištenje hidroenergetskog potencijala za proizvodnju električne energije započelo je krajem 19. stoljeća, prema [1], i prati razvoj generatora električne energije. U početku se proizvedena energija koristila za pogon električnih žarulja i uređaja u jednom ili nekoliko kućanstava. Uskoro je porast interesa uzrokovao nagli rast korištenja električne energije dobivene iz vodnih resursa. U prvoj polovici 20. stoljeća pojavile su se prve velike hidroelektrane, najpoznatija od kojih je Hoover-ova brana na rijeci Colorado. Tijekom 20. stoljeća tehnologija izrade turbina višestruko je napredovala, pa današnje turbine imaju znatno veću iskoristivost i trajnost.

Trenutno najveća brana na svijetu je kineska brana truju tjesnaca na rijeci Yangtze. Maksimalna snaga te brane iznosi 22500 MW s maksimalnim protokom od 116000 m<sup>3</sup>/s.

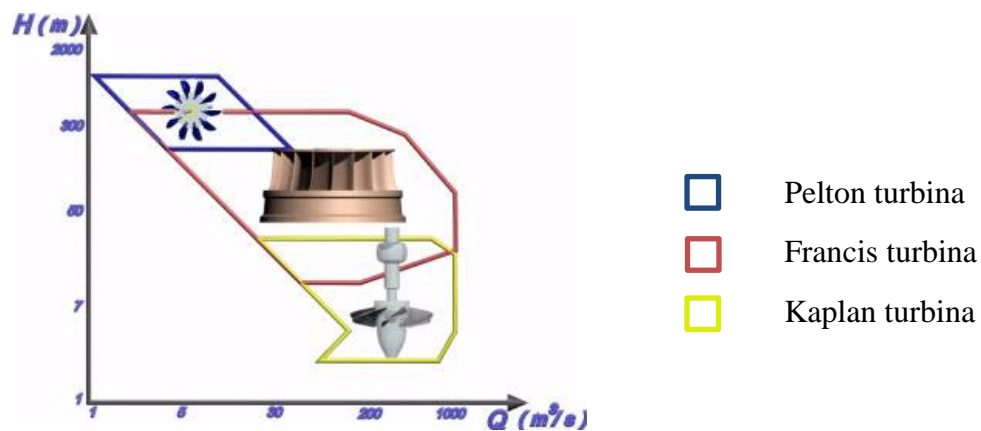
## 1.2. Vrste turbina za iskorištavanje hidroenergetskog potencijala

Za pretvorbu energije vode u električnu energiju koriste se tri tipa turbina:

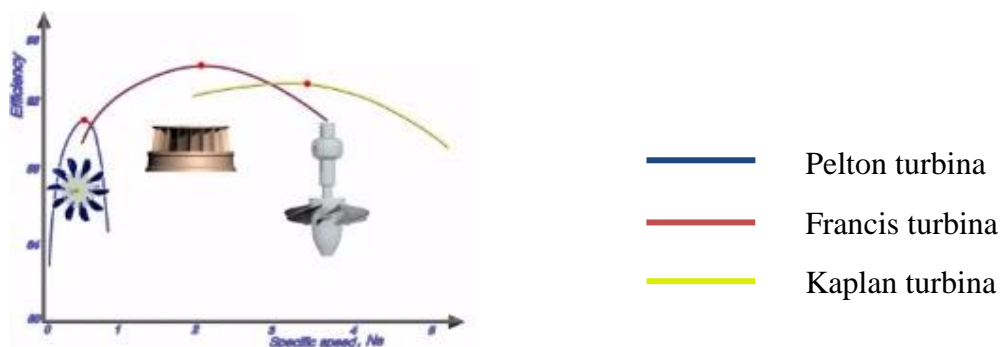
- Kaplan turbina
- Francis turbina
- Pelton turbina

Od tri navedena tipa turbina, Kaplan i Francis turbine spadaju u klasu reakcijskih turbina, prema [2], dok je Pelton turbina impulsna turbina, prema [3]. Reakcijske turbine su pri radu potpuno uronjene u fluid i pokreću se uz pomoć reakcijskih sila koje uzrokuje njihov kontakt sa tokom fluida. Impulsne turbine nisu uronjene u fluid, i funkcioniraju na način da se na njihove lopatice usmjerava mlaz vode, čiji impuls sile one iskorištavaju za pokretanje.

[Slika 1] prikazuje područje korištenja Kaplan, Francis i Pelton turbine. Kaplan turbina koristi se pri velikim protocima i malim visinama padova, dok se Pelton turbina koristi za vrlo visoke padove ali male protoke. Za srednje veličine protoka i srednje veličine padova koristi se Francis turbina.



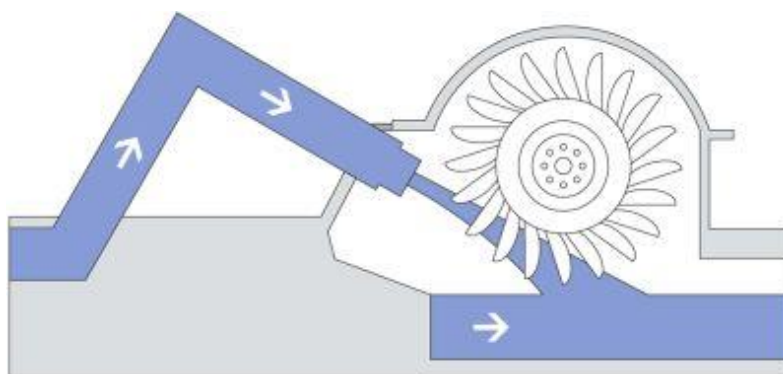
Slika 1. Područje korištenja Kaplan, Francis i Pelton turbine



**Slika 2. Iskoristivost Pelton, Francis i Kaplan turbine**

Tipične iskoristivosti Kaplan, Francis i Pelton turbine s obzirom na njihovu specifičnu brzinu prikazane su na slici [Slika 2]. Specifična brzina je mjerilo koje izražava koliko bi dimenzijski velika trebala biti turbina za proizvodnju određene snage pri određenoj visini pada. Kao što je vidljivo na slici [Slika 2], specifična brzina Pelton turbine je mala, što znači da se Pelton turbina može koristiti za proizvodnju velike količine energije sa velikim padom pri malim dimenzijama, tj. pri malom protoku.

[Slika 3] prikazuje princip rada Pelton turbine. Voda se ubrizgava u komoru turbine uz pomoć mlaznice. Sudaranjem sa lopaticama voda predaje svoju energiju turbini, nakon čega se odvodi kroz odvodnu cijev.



**Slika 3. Princip rada Pelton turbine**



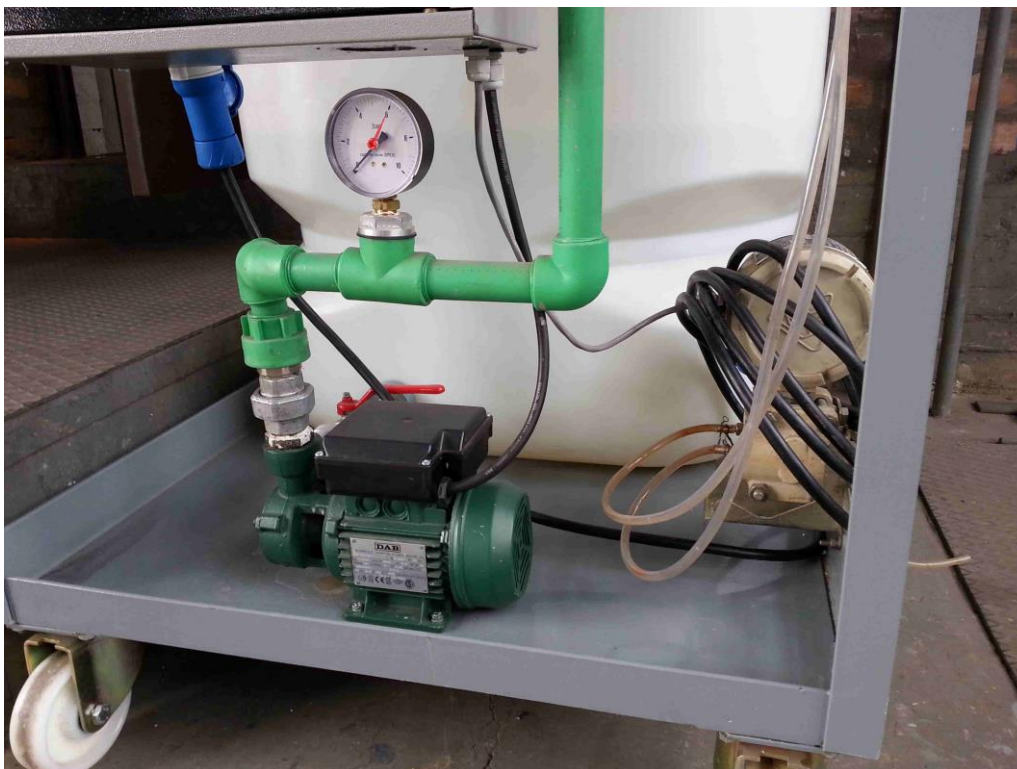
### 1.3. Izgled modela Pelton turbine

S obzirom da je ispitivanje karakteristika stvarne Pelton turbine teško izvedivo i skupo, ispitivanje karakteristika Pelton turbine može se napraviti i ispitivanjem geometrijski sličnog modela Pelton turbine, koji je znatno manji od stvarnog uređaja. Pritom su svi fizikalni zakoni isti za model i stvarni uređaj.

U ovom radu za ispituju se karakteristike modela Pelton turbine prikazanog na slici [Slika 4]. Model je značajno umanjen u odnosu na stvarne veličine Pelton turbina, te je njegov Promjer lopatica  $D=22$  cm. Model pelton turbine zatvoren je u kućište sa prozorima od pleksiglasa uz pomoć kojih se može vidjeti kolo turbine, mlaznica i mlaz vode.



**Slika 4. Model Pelton turbine na kojem se provodi eksperiment**



**Slika 5. Pogonska pumpa, rezervoar i cijev za protok vode**

[Slika 5] prikazuje pogonsku pumpu, cijev za protok i spremnik vode. Pogonska pumpa osigurava protok vode za ispitivanje modela Pelton turbine i spojena je na rezervoar vode, u koji voda pada po izlasku iz turbine. Tok vode u eksperimentu je, dakle, ciklički, tj. zatvoren. Na cijev je također spojen i manometar za ispitivanje pritiska kojeg stvara pumpa i venturijeva cijev za mjerenje protoka vode.

## 2. MJERNA LINIJA

Mjerenje je postupak određivanja mjere, tj. mjerne veličine neke pojave ili objekta. U prirodoslovnim znanostima i inženjerstvu mjerna veličina je definirana sa mjernim brojem i mjernom jedinicom. Mjerne jedinice moraju biti ili jedinice iz međunarodnog SI sustava ili njihove izvedenice.

Prije objašnjenja postupka mjerenja potrebno je definirati ključne pojmove poput mjerne linije, mjernog lanca i umjeravanja.

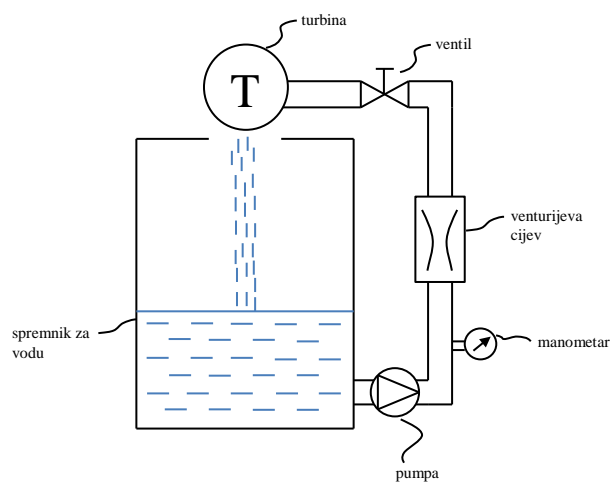
Mjerna linija je skupni naziv za sve što je fizički vezano uz konkretno mjerenje. Mjerna linija uključuje mjesto na kojem se mjeri, izvedbu mjerenja i mjerne lance.

Mjerni lanac je skup svih instrumenata koji služe mjerenju jedne mjerne veličine. Mjerenja se rijetko izvode direktno, tj. pomoću jednog uređaja. Uobičajeno je da se mjerenje odvija sa više uređaja spojenih u mjerni lanac. Pritom se mjerni lanac sastoji i od pomoćnih uređaja, pretvarača signala, računala za pohranu podataka itd.

Umjeravanje je postupak određivanja veze između dvaju izmjerenih veličina čija je veza nepoznata. S obzirom da je veza nepoznata, ona se određuje usporedbom sa poznatom veličinom, tj. etalom. Etalon je definirana vrijednost neke mjerne veličine, ali kolokvijalno označava i uređaj čija je točnost pri mjerenju te veličine prethodno dokazana, a koji se također naziva i etalonskim uređajem.

## 2.1. Hidraulička shema eksperimenta

[Slika 6] prikazuje hidrauličku shemu eksperimenta. Spremnik za vodu napunjen je sa određenom količinom vode. Pri paljenju pumpe voda počne kružno cirkulirati kroz sustav, pod uvjetom da je otvoren ventil. Pretlak pumpe mjeri se sa manometrom pozicioniranim iza pumpe, a protok vode kroz sustav mjeri se preko venturijeve cijevi pozicionirane iza manometra. Pomoću ventila regulira se željeni protok kroz sustav. Voda nakon ulaska u turbinu pada natrag u spremnik, za ponovno korištenje.



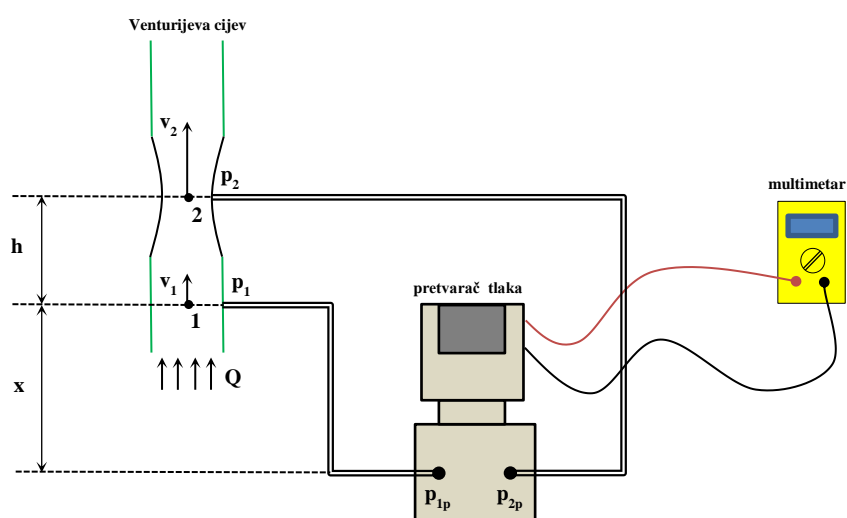
**Slika 6. Hidraulička shema eksperimenta**

## 2.2. Mjerni lanac za mjerenje protoka

### 2.2.1. Izvedba mjernog lanca

Za potrebe ovog rada potrebno je mjeriti protok vode kroz Peltonovu turbinu. Mjerni lanac za mjerenje protoka  $Q$  sastoji se od:

- Venturijeve cijevi,
- pretvarača tlaka
- multimetra.



Slika 7. Shematski prikaz mjernog lanca za mjerenje protoka

[Slika 7] prikazuje shematski prikaz mjernog lanca, dok [Slika 8] prikazuje stvarnu izvedbu.



**Slika 8. Stvarna izvedba mjernog lanca za mjerenje protoka**



Venturijeva cijev [Slika 9] je glatko suženi presjek cijevi, koji se postepeno mijenja kako se nebi stvarali gubici uslijed vrtloženja fluida. U konkretnoj izvedbi, Venturijeva cijev je izrađena od tokarenog čelika i pričvršćena na glavnu cijev uz pomoć vodonepropusnog ljepila. Na mjestu najvećeg suženja i prije suženja napravljene su provrti i učvršćene bakrene cijevčice kako bi se mogao izmjeriti tlak.



**Slika 9.** Venturijeva cijev

Pretvarač tlaka je električni uređaj koji generira struju jakosti  $I$  u ovisnosti o razlici tlakova između dviju priključenih cjevčica. Konkretno se radi o pretvaraču tlaka GP-151 tvrtke ATM kojemu je dozvoljeno područje tlaka 0-7 bara, što je za potrebe ovog eksperimenta adekvatno. Karakteristika pretvarača tlaka je linearnog tipa, dakle veza između narinutog tlaka i jakosti struje  $I$  je linearna. Vrijednost jakosti struje pri protoku  $Q=0$  nije nula već postoji početna vrijednosti jakosti struje  $I_p$  i nju je potrebno uzeti u obzir pri mjerenju i obradi rezultata.

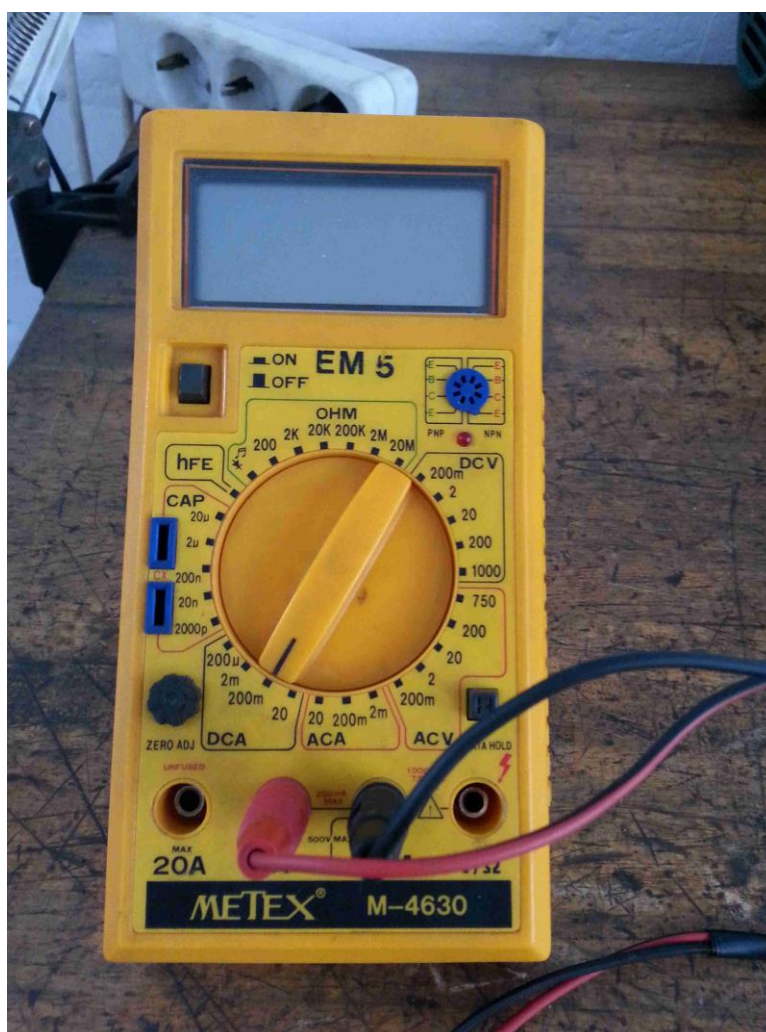


Slika 10. Pretvarač tlaka



Priključenim multimetrom mjeri se jakost struje  $I$  pretvarača tlaka. Konkretno izabrani multimetar je tipa M-4630 proizveden od tvrtke Metex. Odabrano područje mjerenja je do 200 miliampera [mA]. Od jakosti struje izmjerene multimetrom  $I$  se oduzima vrijednost početne struje  $I_p$  kako bi se dobila korigirana jakost struje  $\Delta I$ , koja je proporcionalna razlici tlaka u priključnim cjevčicama pretvarača tlaka.

$$\Delta I = I - I_p \quad (1)$$



Slika 11. Multimetar

### 2.2.2. Izvod jednadžbe za izračun protoka

Voda je nestlačiv fluid pa je protok u svim presjecima cijevi isti. Jednadžba kontinuiteta između presjeka 1 i 2 u tom slučaju glasi

$$Q = v_1 \cdot \frac{D_1^2 \pi}{4} = v_2 \cdot \frac{D_2^2 \pi}{4} \quad (2)$$

Bernoullijeva jednadžba između presjeka 1 i 2 glasi

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h \quad (3)$$

S obzirom da je voda nestlačivi fluid, njen protok  $Q$  mora ostati jednolik dok prolazi kroz suženje u Venturijevoj cijevi. Kako bi to vrijedilo, voda se mora nužno ubrzavati, pa je brzina  $v_2$  u presjeku 2 veća nego brzina  $v_1$  u presjeku 1. Sa ubrzanjem fluida raste i njegova kinetička energija, a pada tlačna energija, pa je tlak  $p_2$  u presjeku 2 manji nego tlak  $p_1$  u presjeku 1.

Razlika tlaka u priključnim cjevčicama pretvarača tlaka [Slika 7] iznosi

$$\begin{aligned} p_{1p} &= p_1 + \rho g x \\ p_{2p} &= p_2 + \rho g x + \rho g h \\ \Delta p &= p_{2p} - p_{1p} = p_2 - p_1 + \rho g h \end{aligned} \quad (4)$$

Da bi se dobio izraz za protok  $Q$  uvrštavaju se vrijednosti brzina  $v_1$  i  $v_2$  iz jednadžbe (2) u jednadžbu (3) te se dobije izraz

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{8Q^2}{D_1^4 \pi^2 g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{8Q^2}{D_2^4 \pi^2 g} + h \quad (5)$$

Množenjem cjelokupnog izraza (5) sa  $\rho \cdot g$  i sređivanjem dobije se izraz

$$p_2 - p_1 + \rho g h = Q^2 \left( \frac{8\rho}{D_1^4 \pi^2} - \frac{8\rho}{D_2^4 \pi^2} \right) \quad (6)$$

Lijeva strana jednadžbe (6) jednaka je razlici tlakova  $\Delta p$  u pretvaraču tlaka, a izraz u zagradi na desnoj strani supsituiru se sa  $K$  s obzirom da je konstantne vrijednosti.

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_2 - p_1 + \rho g h \\ K &= \left( \frac{8\rho}{D_1^4 \pi^2} - \frac{8\rho}{D_2^4 \pi^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Nakon supstitucije i sređivanja izraz (6) glasi

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta p}{K}} \quad (8)$$

Dodatnim izvlačenjem konstante ispred korijena dobije se

$$Q = K_1 \sqrt{\Delta p} \quad (9)$$

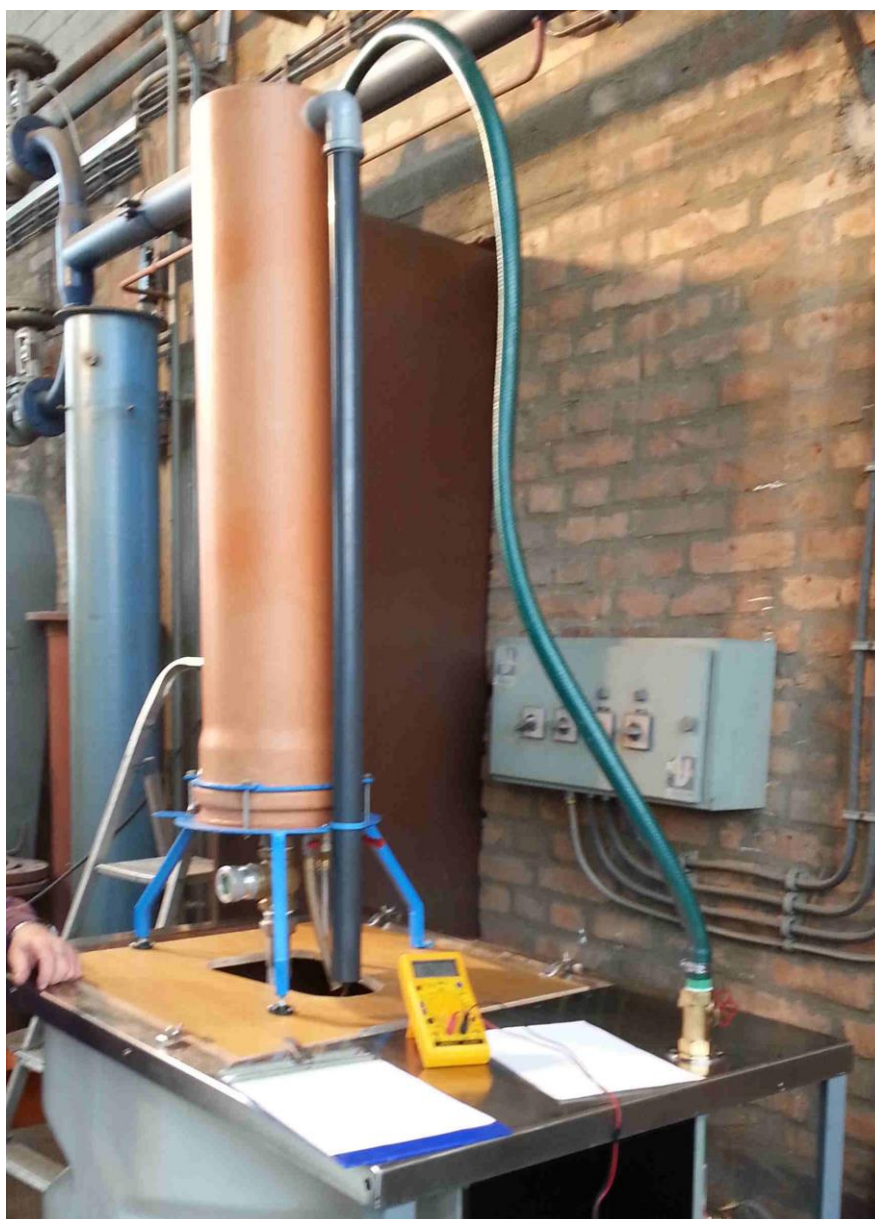
Iz jednadžbe (9) vidljivo je da je protok vode kroz Venturijevu cijev proporcionalan sa drugim korijenom razlike tlakova u pretvaraču tlaka. Veza između korigirane jakosti struje  $\Delta I$  i razlike tlakova  $\Delta p$  kroz varijabilni otpornik pretvarača tlaka je linearna, pa se jednadžba (9) može transformirati u

$$Q = K_2 \sqrt{\Delta I} = K_2 \sqrt{I - I_p} \quad (10)$$

Točnost mjernog lanca kao i vrijednost konstante  $K_2$  izračunati će se umjeravanjem uz pomoć mjerne posude.

### 2.2.3. Izvedba mjernog lanca za umjeravanje protoka

Zasebnim umjeravanjem [Slika 12] pomoću mjerne posude, venturijeve cijevi, pretvarača tlaka i multimetra uspostavlja se veza izmjerene vrijednosti jakosti struje  $I$  sa vrijednostima protoka vode  $Q$ . Obradom rezultata dobiva se izraz za izračunavanje vrijednosti protoka pri bilo kojoj radnoj točki Pelton turbine.



**Slika 12. Umjeravanje mjernog lanca za izračun protoka**

Mjerna posuda za umjeravanje protoka [Slika 13] kapaciteta je 40 litara i izrađena je od plastične vodovodne cijevi spojene na prozirnu staklenu cijevčicu.



**Slika 13. Mjerna posuda za umjeravanje protoka**

Iza staklene cijevčice nalazi se pričvršćen lim na kojem su oznake za volumen [Slika 14], mjerene u inkrementalnim vrijednostima od 5 litara. Za određivanje protoka mjeri se uz pomoć štoperice vrijeme potrebno da se posuda napuni za određeni broj litara vode. Mjerenje vremena vrši se uz pomoć štoperice na mobilnom uređaju. U mjernu posudu je priključeno crijevo kroz koje ulazi voda pri protoku  $Q$ . Na dnu mjerne posude nalazi se ventil kroz koji voda protječe natrag u spremnik sve dok se taj ventil ne zatvori. Prilikom zatvaranja ventila počinje se puniti posuda. Svaki put kada se stupac vode u staklenoj cijevčici podigne za 10 litara zabilježi se vrijeme proteklo od početka mjerenja, za dani protok  $Q$ .

Prilikom pokusnih mjerenja primjećeno je da se pri samom otvaranju ventila stupac vode u cijevčici ne pomiče kontinuirano nego valovito. Uzrok tome je pojava stvaranja vrtloga pri izlasku vode iz priključenog crijeva u mjernu posudu. Kako bi se izbjegla pogreška



u mjerenju vremena uslijed valovitog pomicanja stupca vode, vrijeme se počinje mjeriti tek nakon što u posudu uteče 10 litara vode. Pokusnim mjerenjima utvrđeno je da se čak i pri maksimalnom protoku stupac vode počne kontinuirano kretati do trenutka kada u posudi bude 10 litara, stoga se sa sigurnošću može početi mjeriti pri tom volumenu.

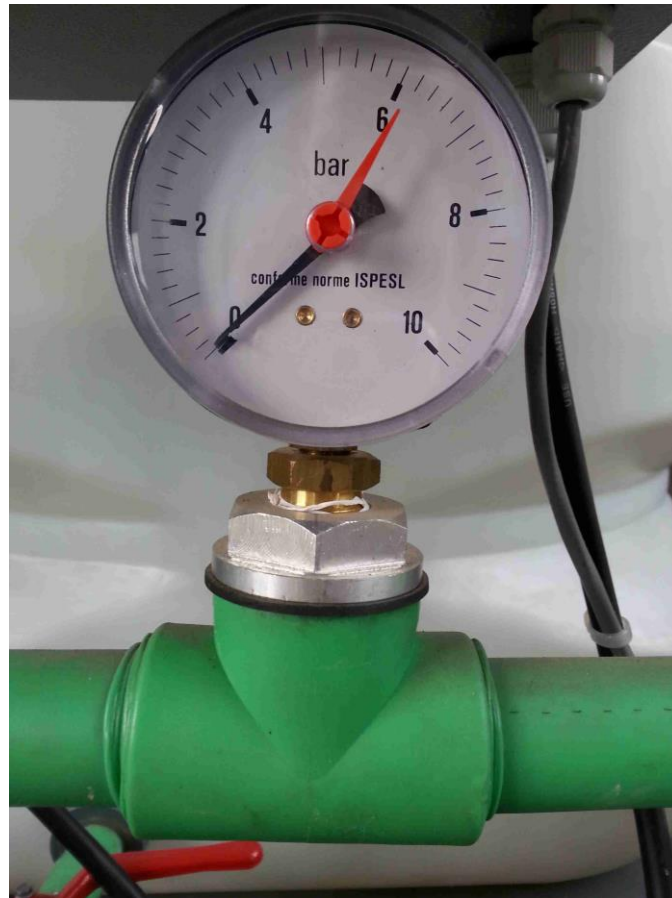


**Slika 14. Oznake volumena na mjernoj posudi**

Prilikom mjerenja pri manjim protocima primjećeno je da se izmjerena jakost struje  $I$  blago mijenja tijekom mjerenja. Iz tog razloga je pri manjim protocima vrijeme mjereno svaki put kada razina vode u mjernoj posudi naraste za 5 litara, zbog veće preciznosti.

### 2.3. Mjerni lanac za mjerenje tlaka

Mjerni lanac za mjerenje tlaka sastoji se od manometra prikazanog na slici [Slika 15].



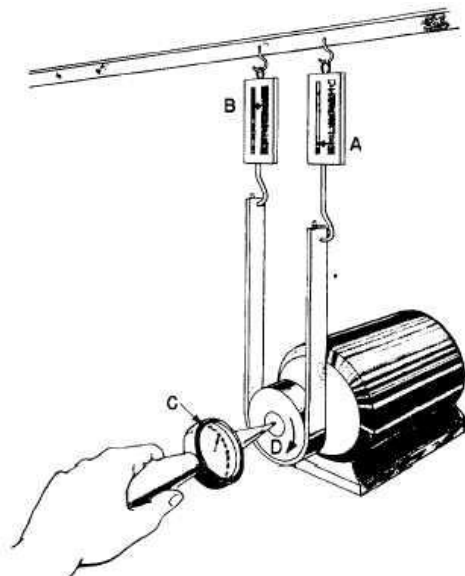
**Slika 15. Manometar**

Manometar mjeri tlak u području 0 do 10 bara, sa preciznošću od 0,2 bara. S obzirom da je pozicioniran iza pumpe, gledano naspram toka vode, manometar prikazuje razliku tlaka koju u vodi stvara pumpa, pa se iz njega može izvući karakteristika pumpe.

## 2.4. Mjerni lanac za mjerenje okretnog momenta

### 2.4.1. Izvedba mjernog lanca za mjerenje okretnog momenta

Mjerni lanac za mjerenje okretnog momenta peltonove turbine je izveden po principu Pronijeve kočnice. Francuski matematičar i inženjer Gaspard de Prony izumio ju je 1821 g. za potrebe mjerenja okretnog momenta parnih strojeva. [Slika 16] prikazuje osnovni princip rada Pronijeve kočnice.



**Slika 16. Pronijeva kočnica**

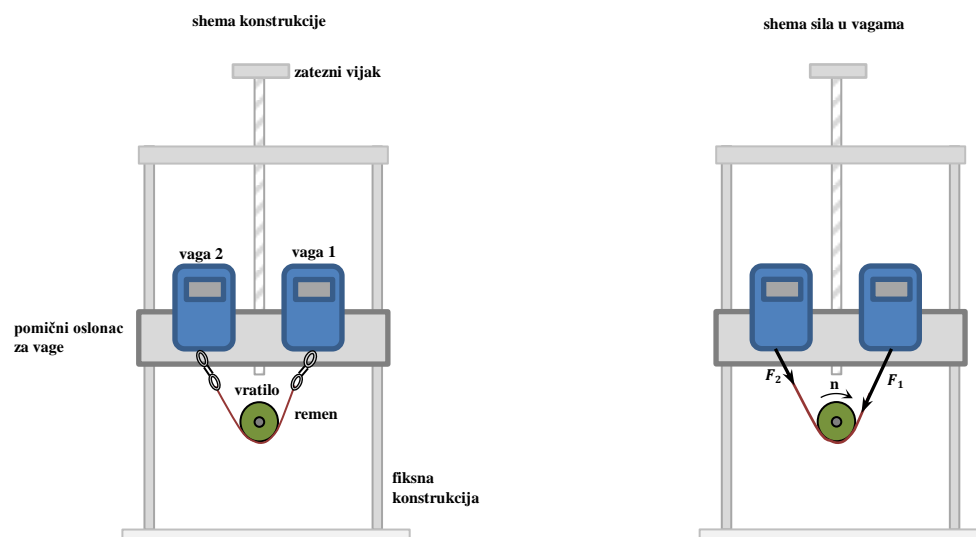
Osnovni model Pronijeve kočnice sastoji se od

- dvije vage
- plosnatog remena
- učvršćenja za vage

Dvije vage se učvršćuju između fiksne konstrukcije i dviju strana remena. Remen se zatim provlači preko bilo kojeg cilindričnog vratila čija se prijenosna snaga želi izmjeriti. Da bi se izmjerila snaga, potrebno je zategnuti remen, kako bi se stvorila pritisna sila između njega i vratila, te posljedično sila trenja. To se može postići pomicanjem vratila ili konstrukcije te skraćivanjem ili stezanjem remena, ovisno o izvedbi. Prilikom prijenosa snage preko vratila, sila trenja između remena i vratila prenijet će se na vage, koje će pokazivati različitu izmjerenu silu. Na temelju razlike sila izmjerene u vagama dobije se okretni moment.



Konkretna izvedba Pronijeve kočnice sastoji se od plosnatog remena i dviju vaga spojenih na pomičnu konstrukciju. [Slika 17] prikazuje shematski prikaz konkretne izvedbe, a [Slika 18] prikazuje njen stvarni izgled.

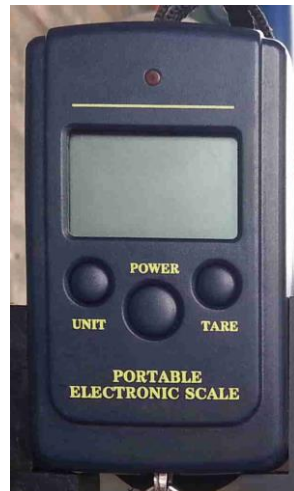


Slika 17. Shematski prikaz mjernog lanca za mjerenje okretnog momenta



Slika 18. Stvarna izvedba mjernog lanca za mjerenje okretnog momenta

Vage 1 i 2 [Slika 19] su prijenosne elektroničke vage sa područjem mjerenja težine do 40 kg, i deklariranom preciznošću od 10 grama.

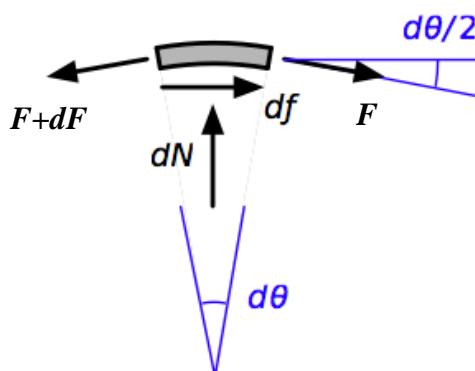


**Slika 19. Prijenosna digitalna vaga**

### 2.4.2. Izvod Capstanove jednadžbe za trenje u remenu

Za potrebe eksperimenta potrebno je provjeriti odgovaraju li sile izmjerene sa vagama teorijskim fizikalnim osnovama. Capstanova jednadžba, prema [5] i [6], daje vezu između sila u dva kraja remena naslonjenog na cilindrično vratilo u ovisnosti o kutu naslonjenosti  $\theta$  i faktoru trenja  $\mu$ .

[Slika 20] prikazuje infinitezimalno mali isječak remena naslonjenog na cilindrično vratilo



Slika 20. Infinitezimalni isječak remena

Na prikazani isječak djeluju četiri sile:

- Sila na jednom kraju isječka remena  $F$
- Sila na drugom kraju isječka remena  $F+dF$
- Kontaktna sila između vratila i isječka remena  $dN$
- Sila trenja između isječka remena i vratila  $df$

Pretpostavlja se da su sve sile u ravnoteži, pa vrijedi izraz

$$df = \mu \cdot dN \quad (11)$$

gdje je  $\mu$  koeficijent trenja između remena i vratila.

Suma sila u horizontalnom smjeru glasi

$$\sum F_x = F \cos \frac{d\theta}{2} - (F + dF) \cos \frac{d\theta}{2} + df = 0 \quad (12)$$

Suma sila u vertikalnom smjeru glasi

$$\sum F_y = dN - F \sin \frac{d\theta}{2} - (F + dF) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (13)$$

S obzirom da je vrijednost  $\theta$  približna nuli, mogu se pojednostavniti izrazi

$$\begin{aligned} \cos \frac{d\theta}{2} &= 1 \\ \sin \frac{d\theta}{2} &= \frac{d\theta}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

Zamjenom vrijednosti iz jednadžbe (14), dijeljenjem jednadžbi (12) i (13) s  $d\theta$  i sređivanjem dobiju se izrazi

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{df}{d\theta} = \mu \frac{dN}{d\theta} \tag{15}$$

$$\frac{dN}{d\theta} = F \tag{16}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (16) u jednadžbu (15) dobije se izraz

$$\frac{dT}{d\theta} = \mu F \tag{17}$$

Integriranjem jednadžbe (17) dobije se konačan izraz za trenje u remenu

$$F_2 = F_1 e^{\mu\theta} \tag{18}$$

gdje su  $F_1$  i  $F_2$  sile na različitim krajevima remena.

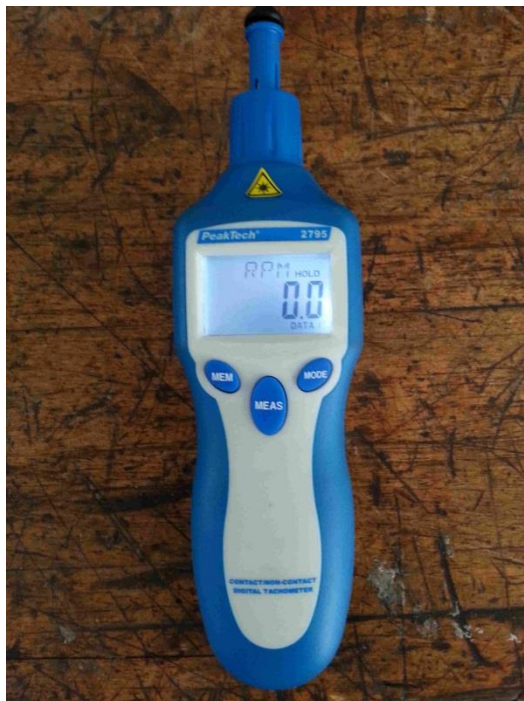
S obzirom da se pri konkretnom mjerenju značajno ne mijenjaju ni kut  $\theta$  ni faktor trenja  $\mu$ , veza između sila na dvijema stranama remena biti će linearna, tj njihov omjer će približno biti konstanta iznosa

$$e^{\mu\theta} = C \tag{19}$$

Točnost ove tvrdnje potvrditi će se mjerenjima i naknadnom regresijskom analizom mjernih točaka.

## 2.5. Mjerni lanac za mjerenje broja okretaja turbine

Za mjerenje broja okretaja turbine koristi se digitalni ručni tahometar marke PeakTech 2795, prikazan na slici [Slika 21].



Slika 21. Digitalni ručni tahometar



Slika 22. Prednji kraj digitalnog ručnog tahometra

Na prednjem kraju digitalnog ručnog tahometra nalaze se odašiljač laserske zrake i svjetlosni senzor, kako je vidljivo na slici [Slika 22]. Laserski snop šalje se iz odašiljača i reflektira se natrag na svjetlosni senzor jedino ako laserski snop naiđe na reflektirajuću površinu. Iz tog se razloga na prednji kraj vratila Pelton turbine nalijepio reflektirajući bijeli marker, prikazan na slici [Slika 23]. Ostatak vratila prekriven je nereflektirajućom zelenom bojom kako se nebi poremetilo mjerenje tahometra. Svaki put kada se vratilo turbine zakrene za jedan okretaj, svjetlosni senzor detektira refleksiju laserskog snopa. Tahometar broji koliko takvih refleksija ima u određenom vremenskom intervalu, iz čega se dobije broj okretaja vratila u minuti,  $n$ , prikazan na ekranu.



**Slika 23. Prednji kraj vratila Pelton turbine sa bijelim reflektirajućim markerom**

Digitalni ručni tahometar ima i drugi način mjerenja broja okretaja, uz pomoć odvojivog pomičnog poklopca, vidljivog na slici [Slika 21]. S unutrašnje strane poklopca nalazi se bijeli reflektirajući marker, a s vanjske strane nalazi se nastavak sa gumenim konusom. Cijeli središnji dio poklopca može se rotirati oko svoje osi, pa se naslanjanjem gumenog konusa na središte vratila turbine središnji dio poklopca počne okretati istom kutnom brzinom kao i vratilo turbine. Pritom reflektirajući marker s unutrašnje strane služi za refleksiju laserske zrake u svjetlosni senzor. Prilikom pokušaja mjerenja uz pomoć pomičnog poklopca, utvrđeno je značajno variranje u izmjerenom broju okretaja. Mogući razlozi takvog variranja su neujednačen prijenos sa vratila na tahometar, neispravni položaj reflektirajućeg markera itd. Zbog nekonzistencije u takvom mjerenju odlučeno je da se mjeri pomoću reflektirajućeg markera na samom vratilu Pelton turbine.

### 3. DIMENZIJSKA ANALIZA

#### 3.1. Teorijska osnova u dimenzijskoj analizi

Dimenzijska analiza i teorija sličnosti predstavljaju znanstveni temelj eksperimentalnom istraživanju složenih fizikalnih pojava kako u mehanici fluida, tako i u ostalim područjima fizike. Primjenom dimenzijske analize minimizira se potrebni broj mjerenja za istraživanje neke pojave, a olakšavaju se prikaz i tumačenje rezultata mjerenja. Teorija sličnosti daje podlogu za primjenu modelskih istraživanja i primjenu analogija u fizici.

Dimenzija  $[\varphi]$  odnosno jedinica  $[\varphi]_{SI}$  svake fizikalne veličine  $\varphi$  u mehanici fluida se može prikazati produktom potencija osnovnih dimenzija odnosno jedinica u obliku

$$[\varphi] = M^a L^b T^c \theta^d \quad (20)$$

$$[\varphi]_{SI} = kg^a m^b s^c K^d$$

gdje su osnovne fizikalne veličine (čije su dimenzije osnovne) u mehanici fluida prikazane u tablici [Tablica 1].

**Tablica 1. Osnovne fizikalne veličine u mehanici fluida**

Veličina	Oznaka	Dimenzija	Jedinica u SI sustavu
duljina	l	L	m
vrijeme	t	T	s
masa	m	M	kg
temperatura	T	$\theta$	K

EkspONENTI  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  tipični su za fizikalnu veličinu u pitanju. Tako je npr.  $a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$  za brzinu,  $a = 1, b = 1, c = -2, d = 0$  za silu itd. Nisu uvijek potrebne sve četiri osnovne dimenzije. Tako se dimenzije svih fizikalnih veličina u kinematici fluida mogu opisati s dvije dimenzije: duljine i vremena. U dinamici nestlačivog strujanja fluida gdje temperatura fluida ne igra ulogu dovoljne su tri dimenzije: duljina, vrijeme i masa, a tek u dinamici stlačivog strujanja se taj skup proširuje dimenzijom temperature.

Treba naglasiti da je izbor skupa osnovnih fizikalnih veličina u principu proizvoljan, te se može koristiti bilo koji skup od četiri dimenzionalno nezavisne fizikalne veličine. Dimenzionalna nezavisnost osnovnog skupa fizikalnih veličina podrazumijeva da se

dimenzija niti jedne od fizikalnih veličina izabranog skupa ne može prikazati dimenzijama preostalih fizikalnih veličina u tom skupu, što je sadržano u teoremu o dimenzionalno nezavisnom skupu koji glasi:

*Ako samo trivijalno rješenje  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ , čini produkt potencija  $\varphi_1^{a_1} \cdot \varphi_2^{a_2} \cdot \dots \cdot \varphi_k^{a_k}$  bezdimenzijskim, onda je skup  $k$  fizikalnih veličina  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  dimenzijski nezavisan pri čemu je  $k \leq m$ , gdje je  $m$  broj osnovnih dimenzija (mjernih jedinica) u skupu.*

Tako su npr. sila, masa i ubrzanje dimenzionalno zavisne veličine jer su vezane drugim Newtonovim zakonom.

Ključno značenje u dimenzijskoj analizi ima Pi-teorem koji glasi:

*Svaki fizikalni zakon između  $n$  fizikalnih veličina izražen dimenzijski homogenom jednadžbom  $\varphi_1 = G(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)$ , može se izraziti kao funkcija  $n-k$  bezdimenzijskih varijabli ( $\Pi$  parametara) u obliku  $\Pi_1 = \Gamma(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-k})$ , gdje je  $k$  maksimalni broj dimenzijski nezavisnih veličina iz skupa  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ .*

Primjenom Pi-teorema se smanjuje broj varijabli u pojavi, čime se smanjuje potrebni broj mjerenja i olakšava analiza rezultata. Pi-teorem se općenito realizira kroz sljedeće korake:

1. Pretpostavlja se skup  $n$  fizikalnih veličina za koji se smatra da upravlja fizikalnom pojavom, te se sastavi tablica s njihovim simbolima i dimenzijama ili mjernim jedinicama, iz koje se odredi broj  $m$ , dimenzionalno nezavisnih veličina.
2. Iz skupa od  $n$  fizikalnih veličina izabere se  $k=m$  veličina i dokaže dimenzijska nezavisnost izabranog skupa prema teoremu o dimenzijski nezavisnom skupu. Ako se ne može dokazati dimenzijska nezavisnost za bilo koji skup  $k=m$  veličina, onda se bira skup od  $k=m-1$  veličina te dokaže njihova dimenzijska nezavisnost.
3. Od svake fizikalne veličine izvan skupa  $k$  dimenzijski nezavisnih veličina formira se bezdimenzijski  $\Pi$  parametar na način da se njena dimenzija prikaže dimenzijama fizikalnih veličina iz dimenzijski nezavisnog skupa, u obliku

$$\Pi_i = \varphi_i \cdot \varphi_1^{a_1} \cdot \varphi_2^{a_2} \cdot \dots \cdot \varphi_k^{a_k}, i = 1, n - k \quad (21)$$

Na taj način skup od  $n$  fizikalnih veličina zamijenjen je skupom od  $n-k$  bezdimenzijskih  $\Pi$  parametara. Pri tome vrijede sljedeća pravila:

- a) Ako je  $n - k \leq 0$ :



ne može se formirati niti jedan  $\Pi$  parametar, što ukazuje da je skup od  $n$  utjecajnih veličina nepotpun. Ukoliko je neka od utjecajnih fizikalnih veličina ispuštena iz polaznog skupa, rezultati eksperimentalnih mjerenja neće ležati na krivulji nego će biti rasuti po dijagramu.

b) Ako je  $n - k = 1$ :

može se formirati samo jedan  $\Pi$  parametar, pa se problem svodi na  $\Pi_1 = \text{konst.}$

Vrijednost nepoznate konstante se ne može odrediti dimenzijskom analizom, ali ju je principijelno moguće odrediti samo jednim eksperimentalnim mjerenjem.

c) Ako je  $n - k = 2$ :

mogu se formirati dva  $\Pi$  parametra, pa se problem svodi na  $\Pi_1 = \Gamma(\Pi_2)$ . Nepoznata funkcija između dvaju  $\Pi$  parametara se može odrediti nizom eksperimentalnih mjerenja.

d) Bezdimenzijska veličina (npr. kut) već je sama po sebi  $\Pi$  parametar i ne može biti uključena u skup dimenzijski nezavisnih fizikalnih veličina.

e) Postoji više mogućnosti izbora skupa dimenzijski nezavisnih veličina, pri čemu se mogu dobiti različiti oblici  $\Pi$  parametara, ali njihov broj mora biti isti. U skup dimenzijski nezavisnih veličina se ne stavljaju one veličine čiji se međusobni utjecaj želi promatrati jer se na taj način one pojavljuju u samo jednom  $\Pi$  parametru.

f) Drugačiji oblik  $\Pi$  parametra se može dobiti njegovim potenciranjem ili množenjem proizvoljnom konstantom, te množenjem potencijom drugog  $\Pi$  parametra. Na ovaj način se ne može promijeniti ukupni broj  $\Pi$  parametara.

g) Funkcija među bezdimenzijskim  $\Pi$  parametrima, identičnog je oblika za beskonačnu obitelj geometrijski, kinematički i dinamički sličnih pojava. Sličnost dvaju pojava podrazumijeva da se iz rezultata dobivenih na jednoj pojavi mogu odrediti rezultati na drugoj pojavi jednostavnim množenjem rezultata prve pojave s konstantnim koeficijentom (koeficijentom sličnosti). Posebno, ona je jedna i ista funkcija za modelsku i prototipnu pojavu.

### 3.2. Dimenzijska analiza modela Pelton turbine

#### 3.2.1. Izbor skupa utjecajnih fizikalnih veličina i nezavisnih veličina

Prvi korak u bezdimenzijskoj analizi Pelton turbine je izbor skupa fizikalnih veličina koje utječu na Pelton turbinu. Taj skup se sastoji od:

- $\rho$ -gustoća vode [ $\text{kg/m}^3$ ]
- $\omega$ -kutna brzina vrtnje turbine [ $\text{rad/s}$ ]
- $R$ -radius kola turbine [ $\text{m}$ ]
- $M$ -moment sile kojeg proizvodi turbina [ $\text{Nm}$ ]
- $Q$ -protok vode kroz turbinu [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
- $P$ -snaga turbine [ $\text{W}$ ]
- $v$ -brzina vode na izlazu iz mlaznice [ $\text{m/s}$ ]

**Tablica 2. Skup utjecajnih fizikalnih veličina**

Veličina	$\rho$	$\omega$	$R$	$M$	$Q$	$P$	$v$
Dimenzija	$\text{ML}^{-3}$	$\text{T}^{-1}$	$\text{L}$	$\text{ML}^2\text{T}^{-2}$	$\text{L}^3\text{T}^{-1}$	$\text{ML}^2\text{T}^{-3}$	$\text{LT}^{-1}$

Tablica [Tablica 2] prikazuje skup svih utjecajnih fizikalnih veličina i njihove dimenzije izražene preko osnovnih SI jedinica mase, duljine i vremena. Za skup nezavisnih veličina odabiru se gustoća  $\rho$ , kutna brzina  $\omega$  i radius kola turbine  $R$ .

### 3.2.2. Dokaz dimenzijske nezavisnosti izabranog skupa

Dokaz dimenzijske nezavisnosti izabranog skupa veličina izvodi se prema teoremu o dimenzionalno nezavisnom skupu, tako da se izabrane veličine uvrste u izraz

$$\varphi_1^{a_1} \cdot \varphi_2^{a_2} \cdot \dots \cdot \varphi_k^{a_k} = M^0 L^0 T^0 \quad (22)$$

u konkretnom slučaju, radi se o veličinama gustoće  $\rho$ , kutne brzine  $\omega$  i radiusa kola turbine  $R$

$$\rho^a \cdot \omega^b \cdot R^c = M^0 L^0 T^0 \quad (23)$$

za svaku izabranu veličinu se zatim uvrštavaju njene dimenzije

$$[ML^{-3}]^a \cdot [T^{-1}]^b \cdot [L]^c = M^0 L^0 T^0 \quad (24)$$

iz jednadžbe (24) se zatim izvede sustav jednadžbi za svaku od prisutnih dimenzija:

$$\text{M: } a = 0$$

$$\text{L: } -3a + c = 0 \quad (25)$$

$$\text{T: } -b = 0$$

Iz sustava jednadžbi (25) vidljivo je da je jedino rješenje sustava trivijalno rješenje  $a = b = c = 0$ , iz čega se zaključuje da je skup izabranih veličina dimenzijski nezavisan i može se iskoristiti za izvod bezdimenzijskih  $\Pi$  parametara.

### 3.2.3. Izvod bezdimenziskih $\Pi$ parametara

Bezdimenzijski  $\Pi$  parametri izvode se pomoću veličina izabranih iz skupa dimenzijski nezavisnih veličina, dakle gustoće  $\rho$ , kutne brzine  $\omega$  i radiusa kola turbine  $R$ . Svaka veličina kojoj se želi naći bezdimenzijski parametar uvrštava se u jednadžbu (21). S obzirom da su svi  $\Pi$  parametri bezdimenzijski, uvrštavanjem željenih veličina u jednadžbu (21) dobije se izraz za odnos dimenzija u traženom  $\Pi$  parametru

$$M^0 L^0 T^0 = [\varphi_i] \cdot [ML^{-3}]^a \cdot [T^{-1}]^b \cdot [L]^c \quad (26)$$

koji predstavlja sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice, za svaku željenu veličinu  $\varphi_i$ , tj parametar  $\Pi_i$ . Rješavanjem sustava jednadžbi dobiju se vrijednosti potencija  $a, b$  i  $c$  za svaki  $\Pi$  parametar.

#### 3.2.3.1. Bezdimenzijski parametar momenta sile

Za izvod bezdimenzijskog parametra momenta sile uvrste se dimenzije momenta turbine umjesto  $\varphi_i$  u jednadžbi (26)

$$M^0 L^0 T^0 = [ML^2 T^{-2}] \cdot [ML^{-3}]^a \cdot [T^{-1}]^b \cdot [L]^c \quad (27)$$

iz čega slijedi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \text{M: } 1 + a &= 0 \\ \text{L: } 2 - 3a + c &= 0 \\ \text{T: } -2 - b &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

rješenje sustava jednadžbi je

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -2 \\ c &= -5 \end{aligned} \quad (29)$$

pa traženi  $\Pi$  parametar za moment sile glasi

$$\Pi_1 = \frac{M}{\rho \omega^2 R^5} \quad (30)$$

#### 3.2.3.2. Bezdimenzijski parametar protoka

Za izvod bezdimenzijskog parametra protoka uvrste se dimenzije protoka umjesto  $\varphi_i$  u jednadžbi (26)

$$M^0 L^0 T^0 = [L^3 T^{-1}] \cdot [ML^{-3}]^a \cdot [T^{-1}]^b \cdot [L]^c \quad (31)$$

iz čega slijedi sustav jednačbi

$$M: a = 0$$

$$L: 3 - 3a + c = 0 \quad (32)$$

$$T: -1 - b = 0$$

rješenje sustava jednačbi je

$$a = 0$$

$$b = -1 \quad (33)$$

$$c = -3$$

pa traženi  $\Pi$  parametar za protok glasi

$$\Pi_2 = \frac{Q}{\omega R^3} \quad (34)$$

### 3.2.3.3. *Bezdimenzijski parametar snage*

Za izvod bezdimenzijskog parametra snage uvrste se dimenzije snage umjesto  $\varphi_i$  u jednačbi (26)

$$M^0 L^0 T^0 = [ML^2 T^{-3}] \cdot [ML^{-3}]^a \cdot [T^{-1}]^b \cdot [L]^c \quad (35)$$

iz čega slijedi sustav jednačbi

$$M: 1 + a = 0$$

$$L: 2 - 3a + c = 0 \quad (36)$$

$$T: -3 - b = 0$$

rješenje sustava jednačbi je

$$a = -1$$

$$b = -3 \quad (37)$$

$$c = -5$$

pa traženi  $\Pi$  parametar za snagu glasi

$$\Pi_3 = \frac{P}{\rho \omega^3 R^5} \quad (38)$$

### 3.2.3.4. Bezdimenzijski parametar brzine toka u mlaznici

Za izvod bezdimenzijskog parametra brzine toka u mlaznici uvrste se dimenzije brzine umjesto  $\varphi_i$  u jednadžbi (26)

$$M^0 L^0 T^0 = [L^1 T^{-1}] \cdot [ML^{-3}]^a \cdot [T^{-1}]^b \cdot [L]^c \quad (39)$$

iz čega slijedi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \text{M: } a &= 0 \\ \text{L: } 1 - 3a + c &= 0 \\ \text{T: } -1 - b &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

rješenje sustava jednadžbi je

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -1 \\ c &= -1 \end{aligned} \quad (41)$$

pa traženi  $\Pi$  parametar za brzinu toka u mlaznici glasi

$$\Pi'_4 = \frac{v}{\omega R} \quad (42)$$

gdje je  $v$  brzina mlaza vode na izlasku iz mlaznice, a  $\omega \cdot R$  je obodna brzina kola turbine. omjer obodne brzine i brzine mlaza koristi se za prikaz karakteristika turbine. Prema pravilima dimenzijske analize, svaki bezdimenzijski  $\Pi$  parametar može se proizvoljno pomnožiti sa konstantom ili potencirati sa nekom potencijom, i rezultat će biti bezdimenzijski  $\Pi$  parametar. Potenciranjem parametra  $\Pi'_4$  na potenciju  $x = -1$  dobije se izraz za bezdimenzijski omjer obodne brzine kola turbine i brzine mlaza vode u mlaznici

$$\Pi_4 = \frac{\omega R}{v} \quad (43)$$

## 4. REZULTATI MJERENJA

### 4.1. Područje razmatranja rada modela Pelton turbine

Prilikom izvršavanja mjerenja na mjernoj liniji primjećeno je značajno variranje izmjerenih sila u vagama pri manjim protocima. Razlozi takvog variranja mogu biti:

- Loša osjetljivost mjernih vaga pri malim težinama- S obzirom da je deklarirana maksimalna nosivost vage 40 kg, mjerenje pri težinama do 5 kg nužno znači da je pogreška mjernog instrumenta izraženija u odnosu na iznos mjerenja.
- Vibracije konstrukcije Pronijeve kočnice- Vibracije konstrukcije mogu proizlaziti iz turbine, ali i pumpe. Mlaz vode na turbinu nije nužno ujednačen u vremenu, a i samo udaranje mlaza na kolo turbine izaziva rasipanje snage koje nije ujednačeno u vremenu. Obe pojave mogu izazvati vibriranje kola turbine, i posljedično Pronijeve kočnice. Pumpa je drugi uređaj koji pridonosi vibracijama na konstrukciji Pronijeve kočnice. Iako je pumpa udaljenija od Pronijeve kočnice nego turbina, ona ipak proizvodi značajne vibracije.
- Ekscentar u vratilu turbine- Svako realno vratilo ima geometrijsko odstupanje od idealnog cilindra. Osim toga, materijal vratila može sadržavati pore i uključine što znači da masa nije jednoliko raspoređena po vratilu, pa ono ima ekscentar mase. Bilo kakav ekscentar u vratilu manifestirat će se prilikom mjerenja kao ciklička varijacija u mjernom rezultatu.
- Kritične vibracije- Svaki vibracijski sustav ima kritičnu točku pri kojoj je amplituda vibracija maksimalna, i značajno izražena. Postoji mogućnost da se kritična točka ispitivanog sustava nalazi pri manjim brzinama okretaja, tj. pri manjim protocima.

Uzrevši u obzir navedene pojave i primjećene oscilacije u rezultatima mjerenja, odlučeno je da se ne razmatra područje rada modela Pelton turbine ispod približnog protoka

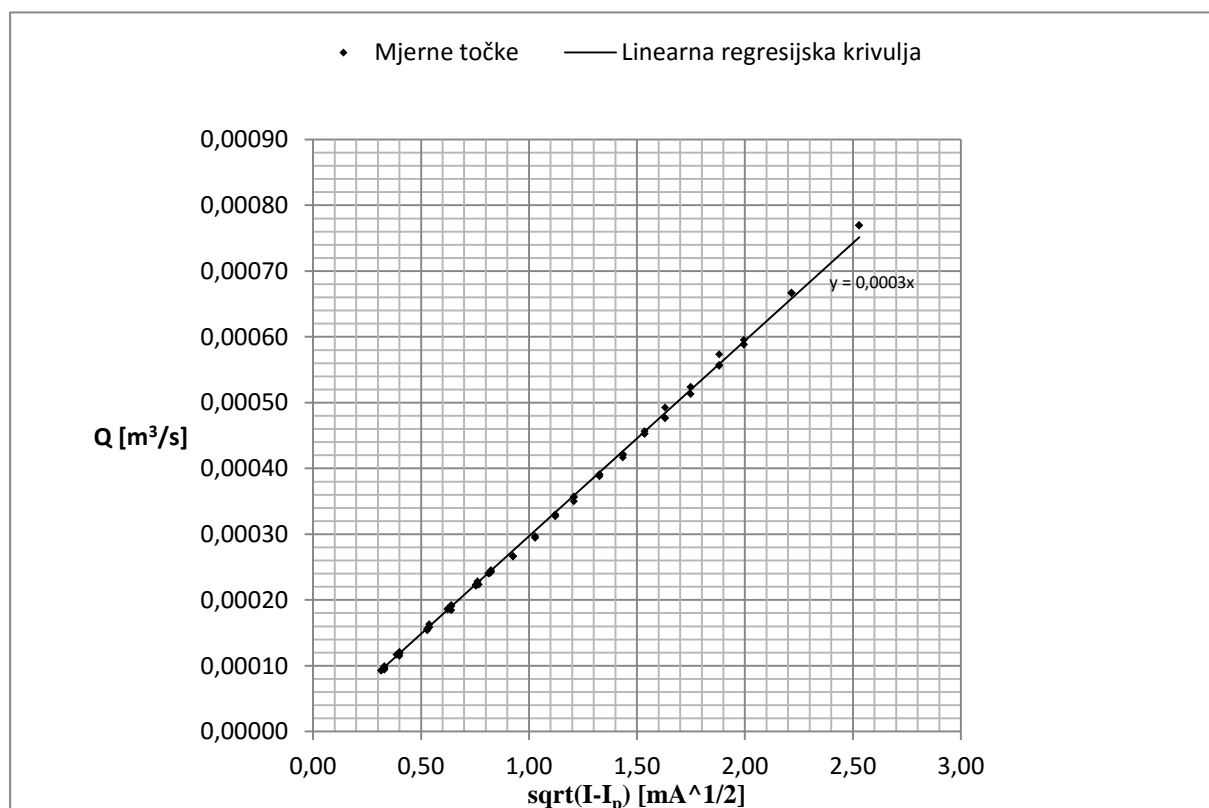
$$Q \approx 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \quad (44)$$

## 4.2. Umjeravanje protoka

Prilikom umjeravanja protoka vode  $Q$  paralelno se mjeri proteklo vrijeme  $\Delta t$  pri kojem se mjerna posuda napuni za određeni volumen  $\Delta V$  i jakost struje  $I$  koju mjeri multimetar. Da bi se dobio protok  $Q$  pri svakoj točki mjerenja podijeli se promjena volumena sa proteklim vremenom po formuli

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (45)$$

Od izmjerene jakosti struje  $I$  potrebno je oduzeti početnu vrijednost jakosti struje  $I_p=4,24$  mA kako bi se dobila korigirana jakost struje  $\Delta I$ . Jednadžbom (10) predviđeno je da postoji linearna veza između protoka  $Q$  i drugog korijena korigirane jakosti struje. [Slika 24] pokazuje točnost te tvrdnje. Kao što je vidljivo u dijagramu [Slika 24], mjerne točke pokazuju linearnu vezu između vrijednosti protoka i drugog korijena korigirane jakosti struje.



Slika 24. Mjerne točke i regresijska krivulja za umjeravanje protoka

Iz mjernih točaka je regresijskom analizom dobivena linearna regresijska krivulja oblika

$$y = a \cdot x \quad (46)$$



gdje su odgovarajuće ekvivalentne vrijednosti iz jednadžbe (10)

$$y = Q$$

$$a = K_2 \tag{47}$$

$$x = \sqrt{\Delta I}$$

izračunata vrijednost konstante  $K_2$ , iznosi

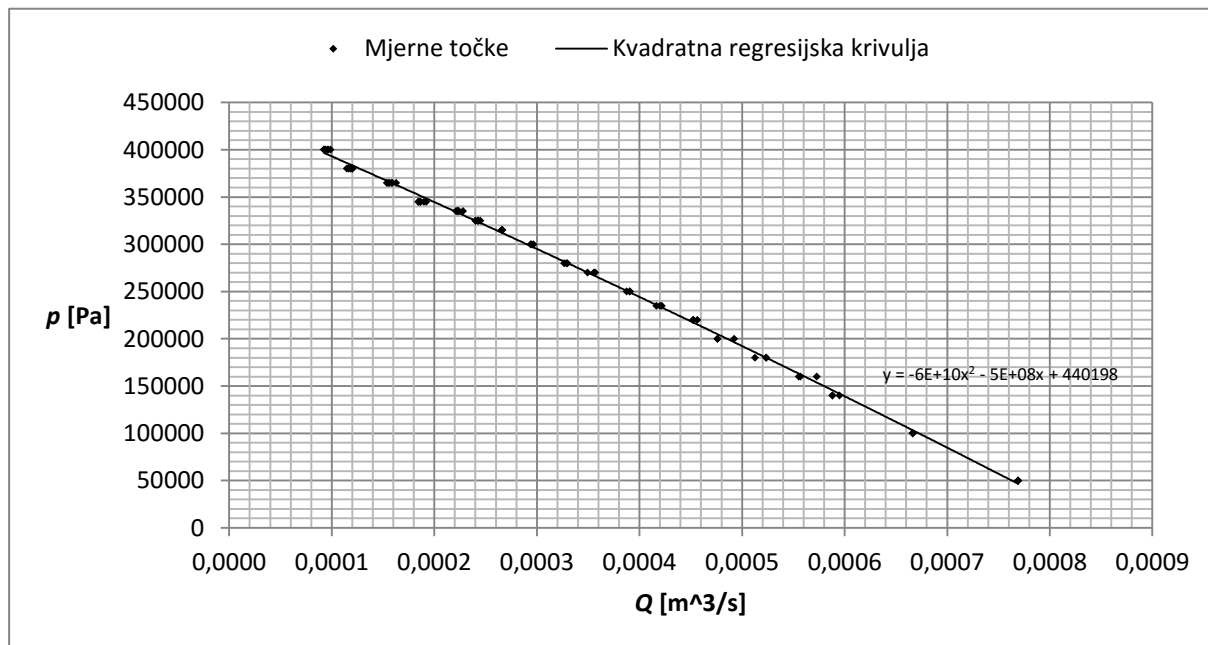
$$K_2 = 2,971 \cdot 10^{-4} [\text{m}^3/\text{s}(\text{mA})^{1/2}] \tag{48}$$

pa konačni izraz za jednadžbu (10) glasi

$$Q = 2,971 \cdot \sqrt{I - I_p} \cdot 10^{-4} \tag{49}$$

### 4.3. Karakteristika pogonske pumpe

Karakteristika pogonske pumpe je relacija između pretlaka kojeg pumpa stvara i protoka pumpe. [Slika 25] prikazuje karakteristiku pumpe korištenu u konkretnom eksperimentu.



Slika 25. Karakteristika pumpe

Karakteristika pumpe je polinom drugog stupnja, dana izrazom

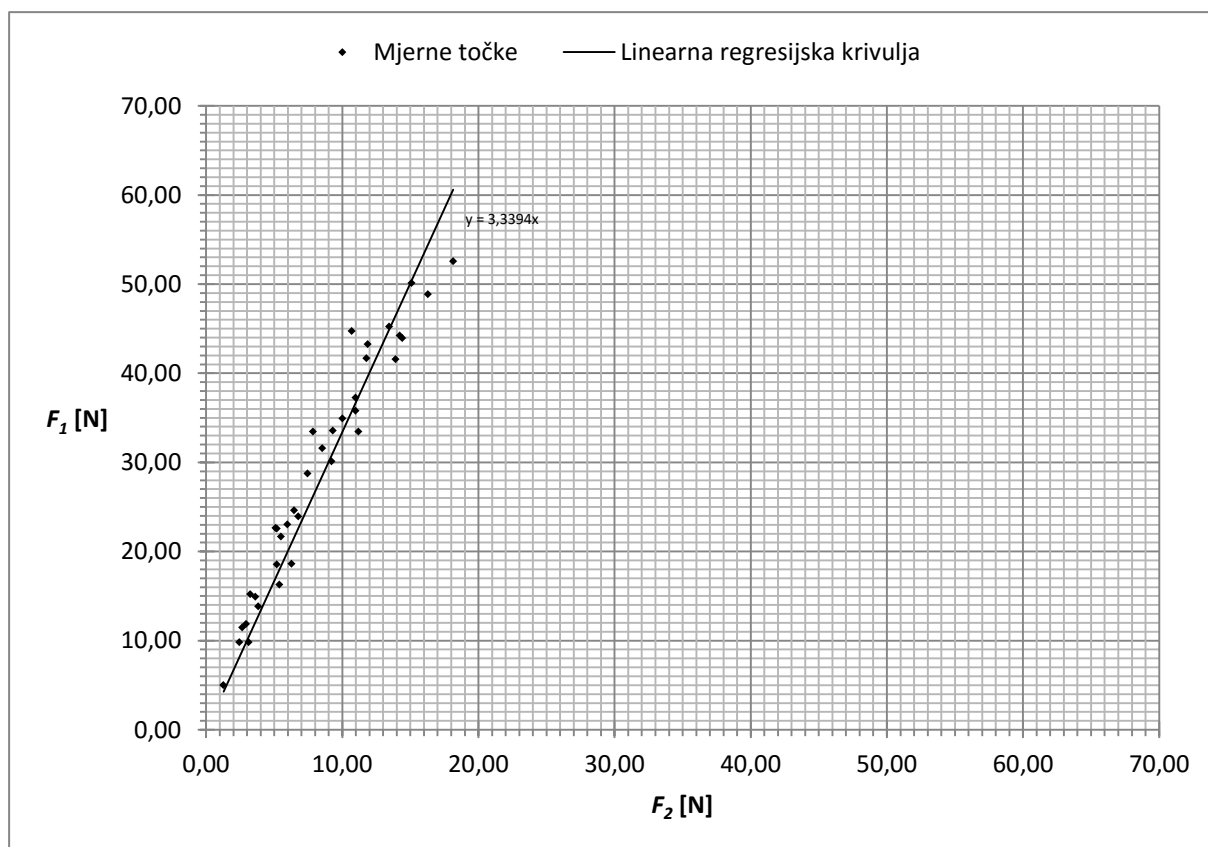
$$p = -5,97 \cdot Q^2 \cdot 10^{10} - 4,66 \cdot Q \cdot 10^8 + 440198 \quad (50)$$

#### 4.4. Određivanje konstante u Capstanovoj jednadžbi

Određivanje točne vrijednosti konstante u Capstanovoj jednadžbi može se izvršiti pomoću rezultata dobivenih iz mjernog lanca za mjerenje okretnog momenta. Dvije vage na slici [Slika 18] pokazuju različite sile, čiji bi omjer prema Capstanovoj jednadžbi (18) trebao biti konstantan.

[Slika 26] prikazuje mjerne točke i linearnu regresijsku krivulju kojom se aproksimira veza između sila u vagama. Kao što je vidljivo iz dijagrama, veza između sila je linearna, tj. njihov omjer je konstanta približnog iznosa

$$C = \frac{F_1}{F_2} = 3,3394 \quad (51)$$



Slika 26. Mjerne točke i regresijska krivulja za Pronijevu kočnicu

## 4.5. Izmjerene snage

### 4.5.1. Izrazi za izračun snage

Snaga je izvedena fizikalna veličina, i izračuna se iz rezultata mjerenja. S obzirom da u modelu postoje mjesta sa izraženim gubitcima energije, snaga ne ostaje kontinuirana kroz cijeli model, tj. snaga koju turbina razvije nije jednaka snazi koju proizvodi pumpa.

Snaga pumpe je snaga koju vodi predaje pumpa, i mjeri se iza pumpe, a prije mlaznice i turbine. Izraz za izračun snage pumpe glasi

$$P_{ul} = p \cdot Q \quad (52)$$

gdje je  $p$  pretlak pumpe, izmjeren s manometrom, a  $Q$  protok kroz pumpu, izračunat uz pomoć mjernog lanca za mjerenje protoka.

Snaga turbine je snaga koju turbina predaje Pronijevoj kočnici, računa se prema izrazu

$$P_t = M \cdot \omega \quad (53)$$

gdje je  $M$  okretni moment turbine, dobiven iz razlike sila izmjerenih u vagama 1 i 2, a  $\omega$  kutna brzina okretanja turbine, izmjerena uz pomoć tahometra.

Osim stvarne snage turbine, koja se računa prema jednadžbi (53), razmatrati će se i idealna snaga turbine, koja se prema [7] računa iz izraza

$$P_{t,id} = n \cdot \rho \cdot u \cdot v \cdot A \cdot (v - u)(1 - \cos \beta) \quad (54)$$

gdje je:

- $n$ - broj mlaznica uperenih u Pelton turbinu, konkretno  $n=1$
- $\rho$ - gustoća vode
- $u$ - obodna brzina kola turbine
- $v$ - brzina mlaza vode na izlasku iz mlaznice
- $A$ - površina mlaznice
- $\beta$ - kut lopatice turbine

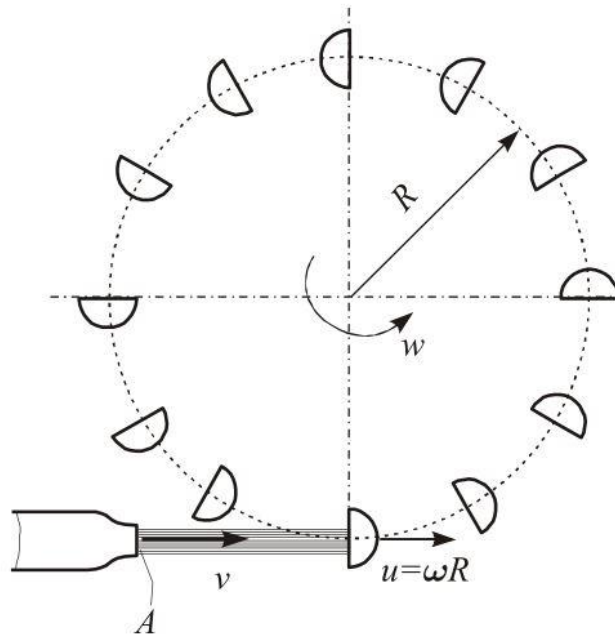
U jednadžbi (54) mogu se zamijeniti:

$$\begin{aligned} w &= v - u \\ Q &= v \cdot A \end{aligned} \quad (55)$$

gdje je  $w$  relativna brzina nasmravanja vode na kolo turbine, a  $Q$  protok vode.

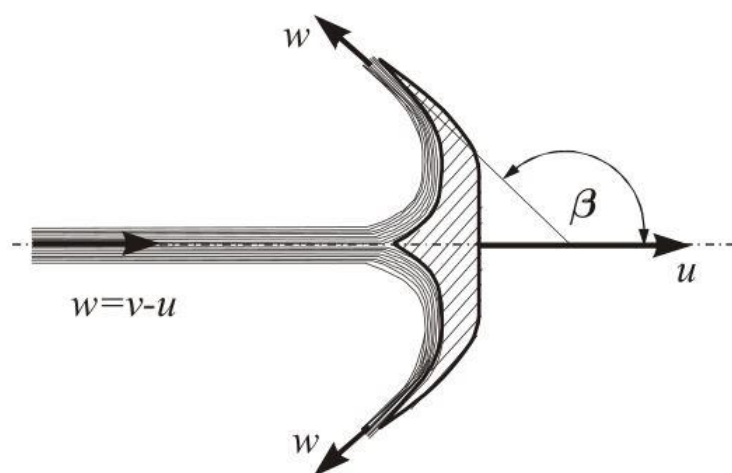
Maksimalna idealna snaga turbine je pri kutu  $\beta = 180^\circ$  i obodnoj brzini  $u = \frac{v}{2}$ .

[Slika 27] prikazuje kolo Pelton turbine radiusa  $R$  i mlaznicu površine  $A$ , te brzinu mlaza vode  $v$  i obodnu brzinu lopatice  $u$ .



**Slika 27. Mlaznica i kolo Pelton turbine**

[Slika 28] prikazuje lopaticu Pelton turbine te relativnu brzinu  $w$ , obodnu brzinu  $u$  i kut lopatice  $\beta$ .



**Slika 28. Lopatica Pelton turbine**

Za izračun idealne snage turbine potrebno je, uz izmjerene vrijednosti protoka  $Q$ , znati i vrijednosti brzine vode na izlasku iz mlaznice  $v$ , obodne brzine lopatice  $u$  i kuta lopatice  $\beta$ .

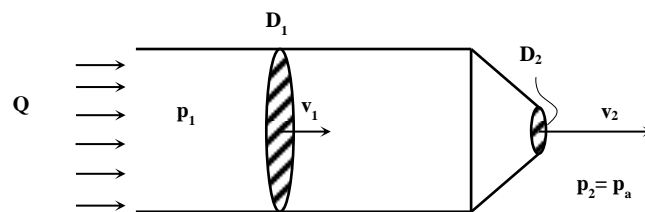
Izmjerena vrijednost kuta lopatice  $\beta$  iznosi:

$$\beta = 150^\circ \quad (56)$$

Obodna brzina lopatice  $u$  računa se prema izrazu

$$u = \omega \cdot R \quad (57)$$

Brzina  $v$  računa se analiziranjem toka vode kroz mlaznicu, prema slici [Slika 29].



Slika 29. Tok vode kroz mlaznicu

Jednadžba kontinuiteta glasi

$$Q = v_1 \cdot \frac{D_1^2 \pi}{4} = v_2 \cdot \frac{D_2^2 \pi}{4} \quad (58)$$

Bernoullijeva jednadžba između presjeka 1 i 2 glasi

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (59)$$

Također vrijede izrazi

$$v_1 = v_2 \cdot \frac{D_2^2}{D_1^2} \quad (60)$$

$$p_1 - p_2 = p$$

gdje je  $p$  izmjereni tlak pumpe. Uvrštavanjem izraza (60) u Bernoullijevu jednadžbu (59) i sređivanjem dobije se

$$\frac{2p}{\rho} = v_2^2 \left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 \right] \quad (61)$$

s obzirom da je promjer mlaznice  $D_2$  mnogo manji od promjera cijevi  $D_1$  vrijedi

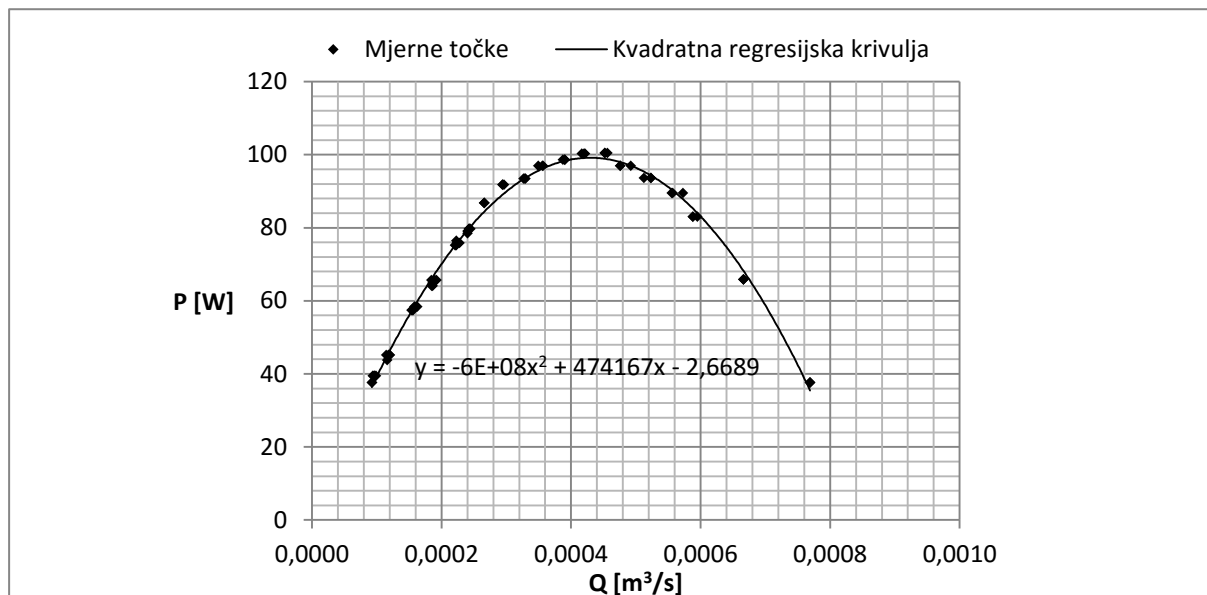
$$\left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 \approx 0 \quad (62)$$

pa se iz izraza (61) pojednostavljuvanjem i sređivanjem dobije konačan izraz za brzinu vode na izlazu iz mlaznice

$$v = v_2 = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \quad (63)$$

#### 4.5.2. Snaga pumpe

Kako je vidljivo na slici [Slika 30], snaga pumpe mijenja se naspram protoka približno po kvadratnoj krivulji. Maksimalna dostupna snaga pumpe je oko 100 W, pri približnom protoku od  $Q \approx 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

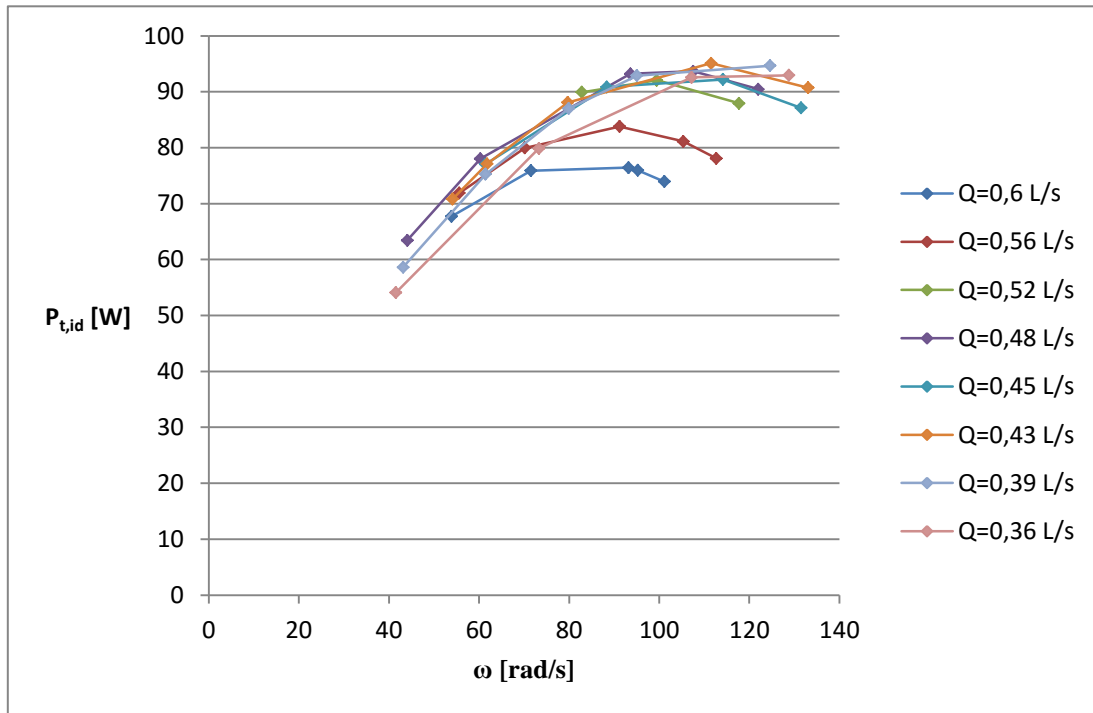


Slika 30. Snaga pumpe u ovisnosti o protoku

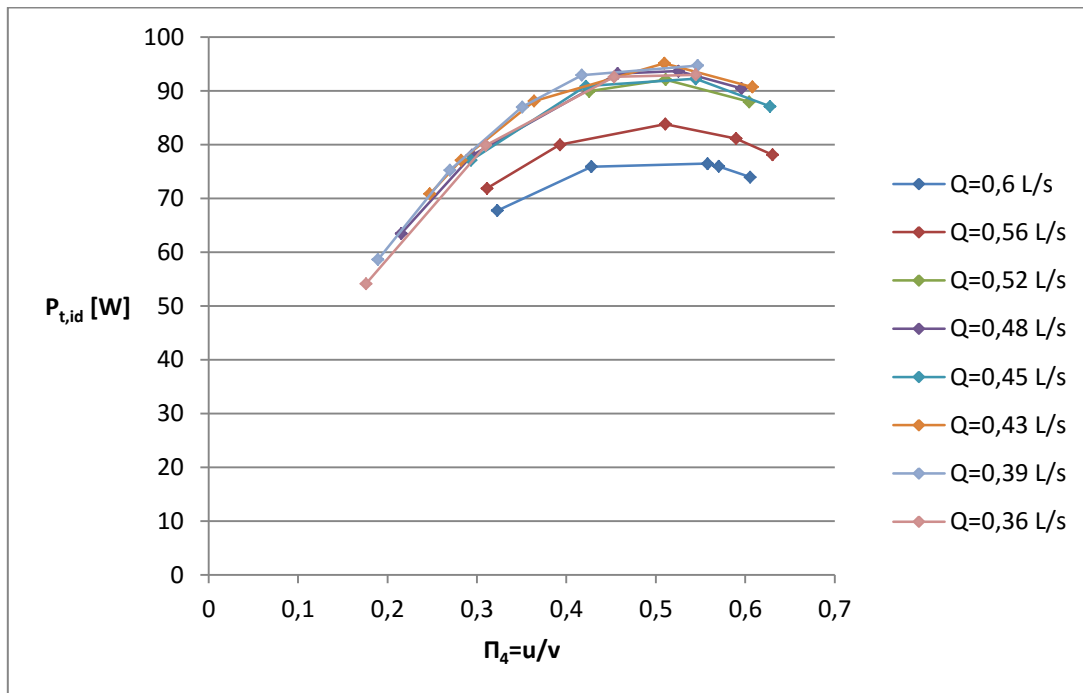


### 4.5.3. Idealna snaga turbine

Idealna snaga turbine računa se prema jednadžbi (54). [Slika 31] prikazuje vezu između idealne snage turbine i kutne brzine vrtnje  $\omega$ , za različite razine protoka  $Q$ . Kao što je predviđeno iz slike [Slika 30], maksimalna snaga turbine je dostupna pri  $Q \approx 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .



Slika 31. Idealna snaga turbine u ovisnosti o kutnoj brzini

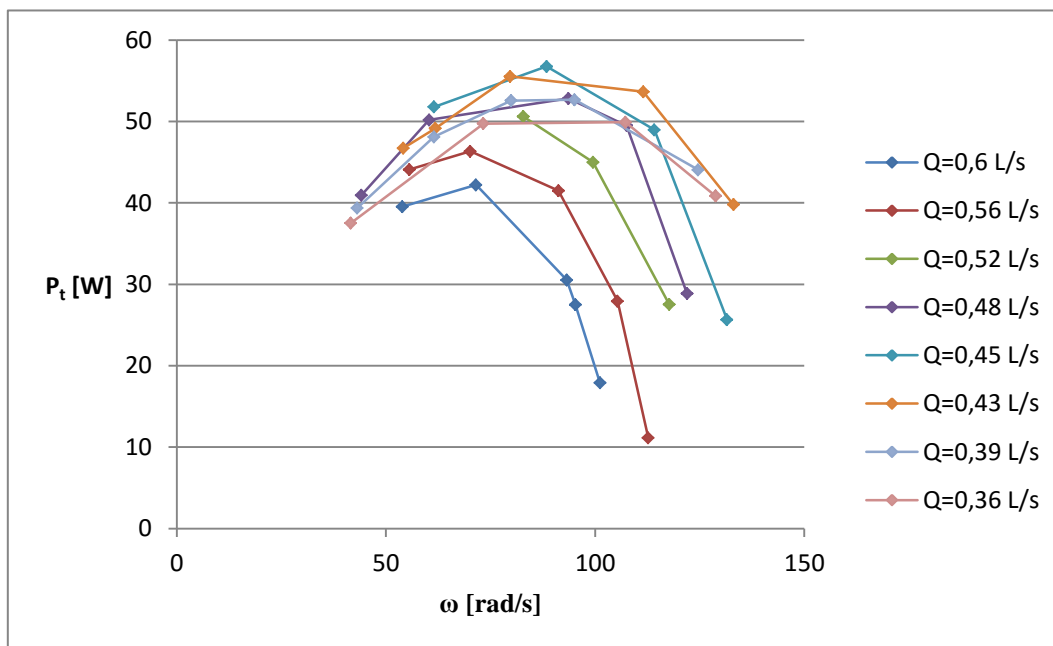


**Slika 32. Idealna snaga turbine u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru  $\Pi_4$**

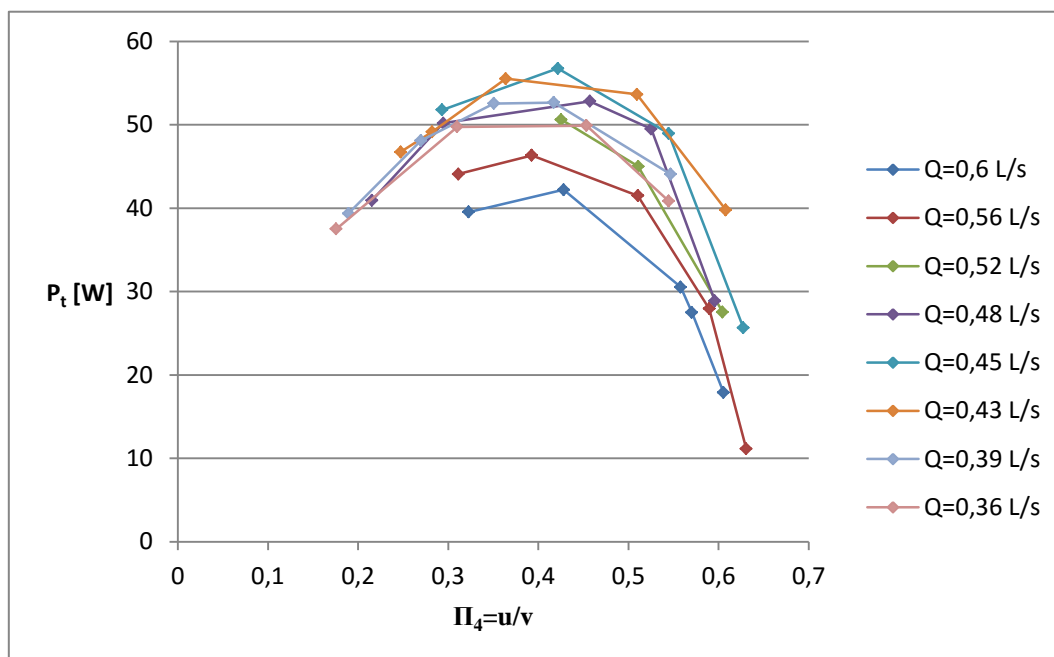
[Slika 32] prikazuje vezu između idealne snage i bezdimenzijskog parametra  $\Pi_4$ . Jednadžbom (54) predviđeno je da je maksimalna snaga turbine pri  $u = 0,5v$ , što je na slici [Slika 32] potvrđeno. Sve krivulje idealne snage, iako izračunate iz konkretnih podataka, imaju maksimum pri  $u = 0,5v$

#### 4.5.4. Stvarna snaga turbine

[Slika 33] prikazuje stvarnu snagu turbine, izračunatu prema jednadžbi (53), pri različitim kutnim brzinama vrtnje  $\omega$ , za različite razine protoka  $Q$ . Stvarne snage pokazuju manju vrijednost od idealnih snaga turbine, za isti protok i kutnu brzinu, što je očekivano. Također je vidljivo da je pad snage turbine u ovisnosti o kutnoj brzini značajniji za veće protoke, što je posljedica povećanih gubitaka u nastrujavanju mlaza na lopaticu turbine.



Slika 33. Stvarne snage turbine pri različitim protocima



**Slika 34. Stvarna snaga turbine u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru  $\Pi_4$**

Na slici [Slika 34] vidi se da maksimum stvarne snage nije pri  $u = 0,5v$ , već oko  $u = 0,45v$ , uz nagli pad snage iznad  $u = 0,5v$ . Odstupanja od idealne snage posljedice su povećanih gubitaka u mlaznici i kolu turbine.

## 4.6. Iskoristivost turbine

### 4.6.1. Izrazi za izračun iskoristivosti turbine

Iskoristivost turbine je, općenito, omjer uložene i dobivene snage. U konkretnom slučaju, razlikuju se dvije iskoristivosti, i to idealna i stvarna iskoristivost turbine.

Idealna iskoristivost turbine je omjer ideane snage turbine i ulazne snage koju pumpa predaje fluidu. Izraz za idealnu iskoristivost turbine glasi

$$\eta_{id} = \frac{P_{t,id}}{P_{ul}} \quad (64)$$

uvrstivši izraze (52) i (54) u izraz (64) i dobije se

$$\eta_{id} = \frac{\rho \cdot u \cdot v \cdot A \cdot (v - u)(1 - \cos \beta)}{p \cdot Q} \quad (65)$$

iz jednadžbe (63) vrijedi

$$p = \rho \cdot \frac{v^2}{2} \quad (66)$$

uvrstavanjem izraza (66) u (65) i sređivanjem dobije se

$$\eta_{id} = 2 \cdot \Pi_4 \cdot (1 - \Pi_4)(1 - \cos \beta) \quad (67)$$

gdje je izraz za bezdimenzijski parametar  $\Pi_4$  dan jednadžbom (43). Izraz (67) pokazuje da postoji kvadratna veza između vrijednosti idealne iskoristivosti  $\eta_{id}$  i bezdimenzijskog parametra  $\Pi_4$ .

Stvarna iskoristivost računa se kao omjer izmjerene snage turbine i ulazne snage koju pumpa predaje vodi

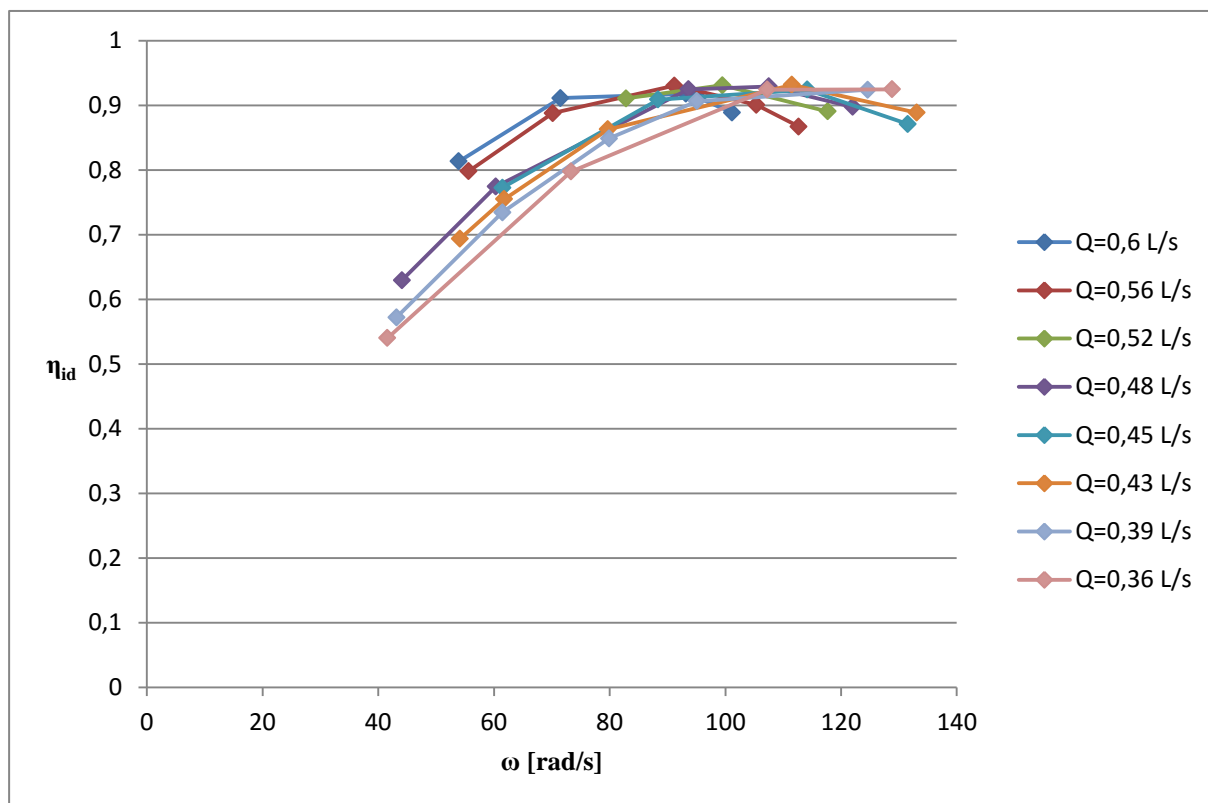
$$\eta = \frac{P_t}{P_{ul}} \quad (68)$$

uvrstavanjem izraza (52) i (53) u (68) dobije se

$$\eta = \frac{M \cdot \omega}{p \cdot Q} \quad (69)$$

#### 4.6.2. Idealna iskoristivost turbine

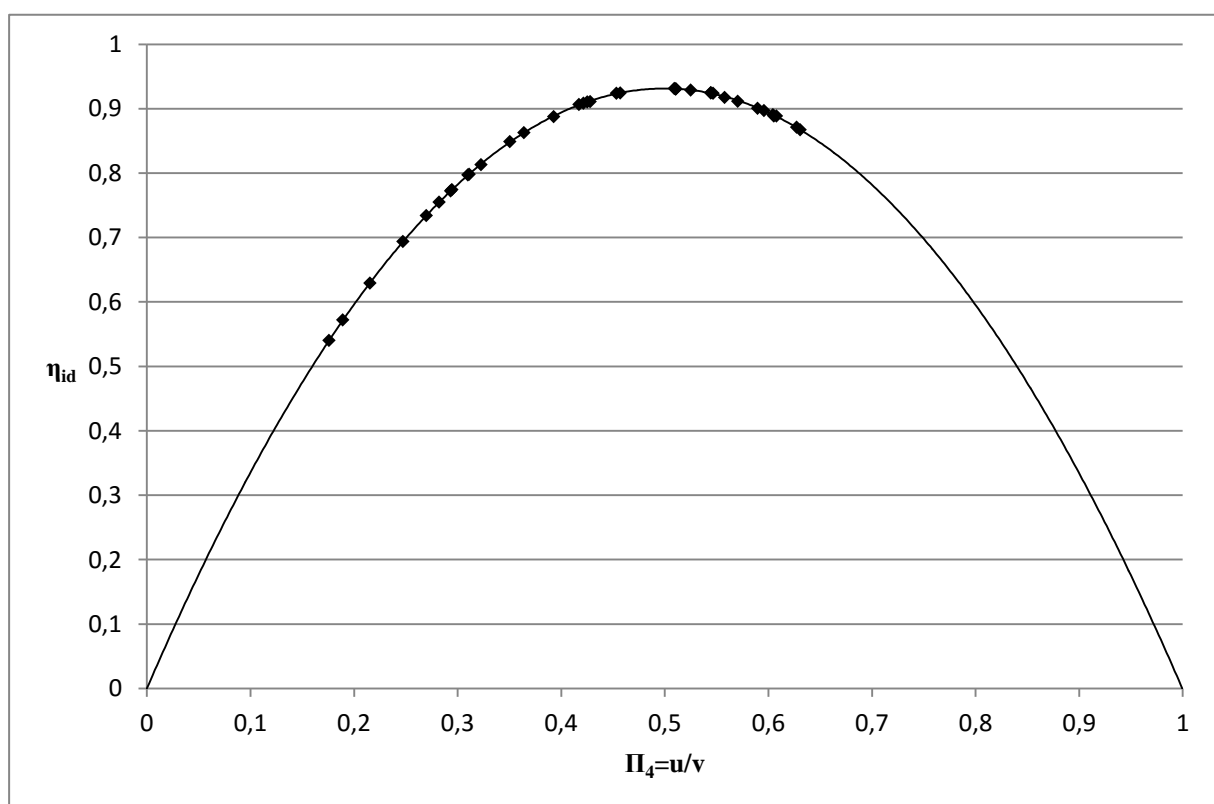
Ovisnost idealne iskoristivosti turbine o kutnoj brzini pri različitim razinama protoka prikazana je na slici [Slika 35]. Za razliku od idealne snage turbine, idealna iskoristivost ne pokazuje značajne razlike između različitih razina protoka.



Slika 35. Idealna iskoristivost turbine u ovisnosti o kutnoj brzini

Idealna iskoristivost turbine u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru  $\Pi_4$  prikazana je na slici [Slika 36. Idealna iskoristivost turbine u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru  $\Pi_4$  Slika 36]. Kao što je predviđeno izrazom (67), veza je u obliku kvadratne krivulje. Nul-točke kvadratne krivulje su u  $\Pi_4 = 0$  i  $\Pi_4 = 1$ . Prva točka predstavlja trenutak u kojem nema protoka. Druga točka predstavlja trenutak u kojem su obodna brzina  $u$  i brzina mlaza vode  $v$  izjednačene. S obzirom da su brzine izjednačene, mlaz vode nemože predavati kinetičku energiju lopatici turbine, pa je iskoristivost nula.

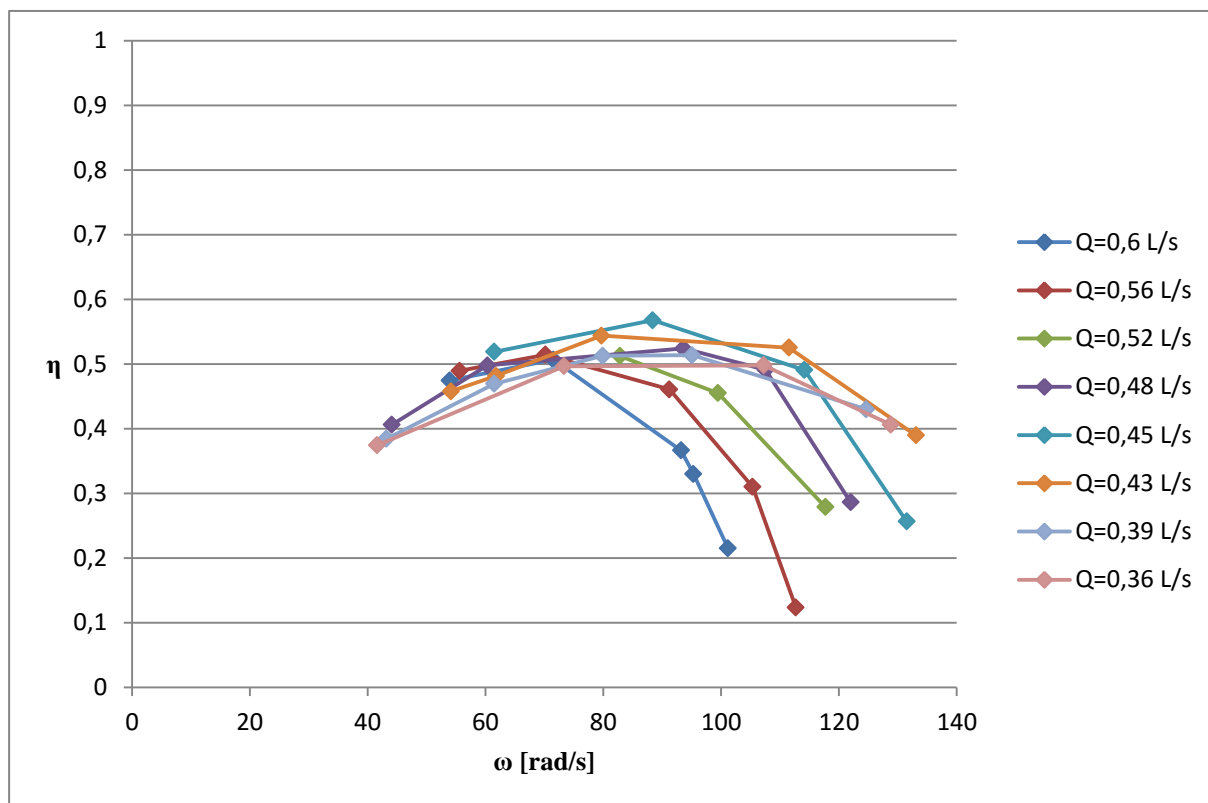
Iz slike [Slika 36] također je vidljivo da je idealna iskoristivost maksimalna pri vrijednosti obodne brzine lopatice  $u = 0,5v$ , zbog maksimalne vrijednosti idealne snage.



Slika 36. Idealna iskoristivost turbine u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru  $\Pi_4$

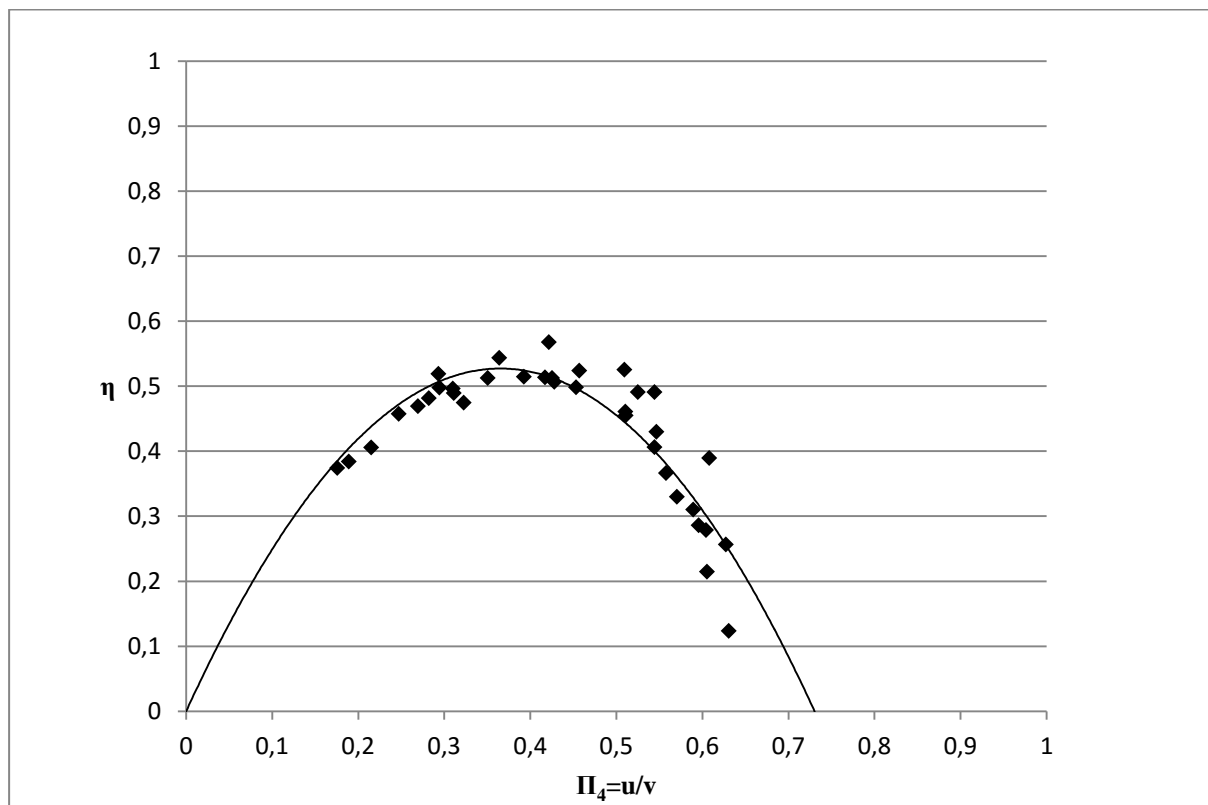
### 4.6.3. Stvarna iskoristivost turbine

[Slika 37] prikazuje ovisnost stvarne iskoristivosti turbine o kutnoj brzini, za različite razine protoka. Primjetno je da stvarna iskoristivost značajno opada pri većim kutnim brzinama, što je posljedica naglog pada snage turbine uslijed gubitaka u lopatici turbine.



Slika 37. Stvarna iskoristivost turbine u ovisnosti o kutnoj brzini





**Slika 38.** Stvarna iskoristivost u ovisnosti o bezdimenzijskom parametru  $\Pi_4$

Stvarna iskoristivost turbine pokazuje značajnu varijaciju u odnosu na idealnu pri većim vrijednostima bezdimenzijskog parametra  $\Pi_4$ . Razlog tomu su gubitci u kolu turbine pri većim protocima, zbog kojih iskoristivost naglo opada.

## 5. PROCJENA POGREŠKE

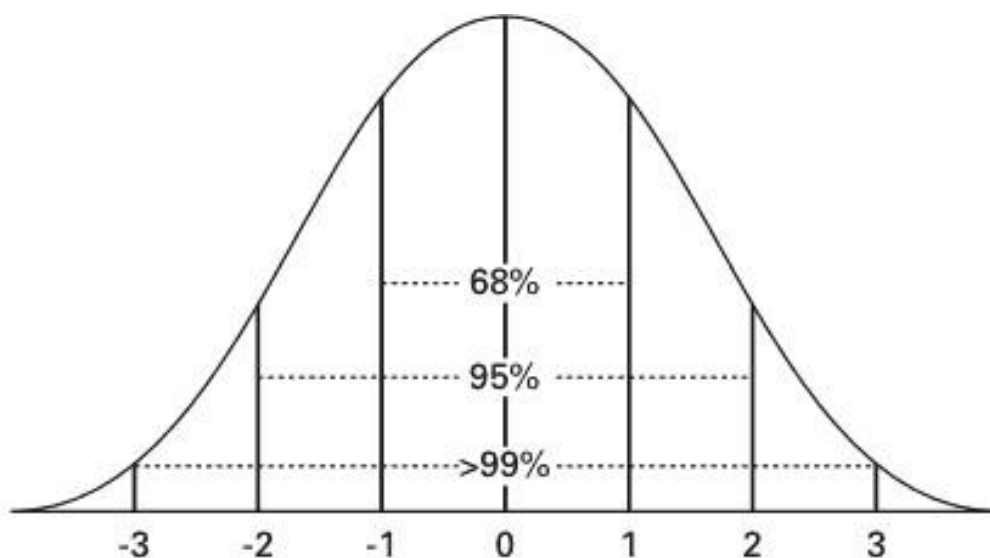
### 5.1. Metode procjene pogreške

Pogrešku mjerenja s određenim mjernim lancem moguće je dobiti na dva načina:

- a) direktnim mjerenjem zasebne pogreške svakog člana u mjernom lancu, ili
- b) statističkom obradom izmjerenih podataka.

Od dva navedena načina, izračun pogreške statističkom obradom rezultata je jednostavniji i praktičniji oblik, ali za određena jednostavna mjerenja pogreška će se procijeniti direktno.

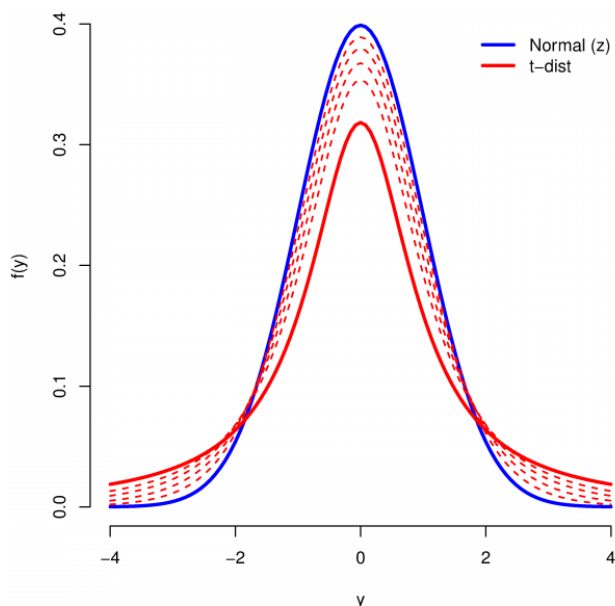
Za potrebe izračuna pogreške pretpostavlja se da je rasipanje vrijednosti populacije sukladno normalnoj (Gaussovoj) raspodjeli prema [8], prikazanoj na slici [Slika 39].



**Slika 39. Raspodjela vrijednosti po Gaussovoj krivulji**

S obzirom da se prilikom eksperimenta mjeri u ograničenom broju mjerenja, te se na temelju takvog ograničenog broja mjerenja pokušava uspostaviti fizikalnu vezu između varijabli, postoji nesigurnost u procjeni uzrokovana činjenicom da je veličina mjernog uzorka konačna. Drugim riječima, statističke veličine izmjerenog uzorka ne odgovaraju potpuno statističkim veličinama cjelokupne populacije, tj. svih mogućih mjerenja. Procjena odstupanja vrijednosti uzorka od vrijednosti populacije provodi se uz pomoć t-testa, prema [9] i [10], što je standardizirani postupak u statistici za određivanje takvih odstupanja.

T-test je postupak kojim se dobiva procjena nepouzdanosti statističkih vrijednosti iz uzorka i zasniva se na tzv. „studentskoj“, ili t-raspodjeli vrijednosti. T-raspodjela nije jedinstvena raspodjela, već skup svih mogućih raspodjela vrijednosti uzorka, s obzirom na broj mjerenja u uzorku. [Slika 40] prikazuje odnos između t-raspodjele i normalne raspodjele. Prilikom mjerenja u uzorku pretpostavlja se da su vrijednosti iz uzorka raspodjeljene po t-raspodjeli.



**Slika 40.** „Studentska“ ili t-raspodjela naspram normalne raspodjele

Kao što je vidljivo, t-raspodjela nalikuje normalnoj raspodjeli po općem obliku, ali ne potpuno. Različite crvene linije na slici [Slika 40] predstavljaju različite t-raspodjele s obzirom na broj mjerenja u uzorku. Kako se broj mjerenja u uzorku povećava, tako se t-raspodjela sve više približava normalnoj raspodjeli. T-raspodjela je već poznata i kvantificirana raspodjela s obzirom na broj mjerenja u uzorku. Razlika u statističkim vrijednostima između uzorka i populacije je također poznata, s obzirom na specifičnu t-raspodjelu u pitanju. Za procjenu nesigurnosti neke statističke vrijednosti potrebno je, dakle, izračunati traženu statističku vrijednost uzorka, odrediti t-distribuciju uzorka i očitati odstupanje statističke vrijednosti uzorka od statističke vrijednosti populacije.

Za procjenu pogreške pri regresijskoj analizi mjerenja koriste se tri faktora:

- Koeficijent determinacije  $R^2$ , prema [11]
- Intervali pouzdanosti  $CI$ , prema [12]

### 5.1.1. Koeficijent determinacije $R^2$

Koeficijent determinacije računa se prema izrazu

$$R^2 = \frac{SP}{ST} \quad (70)$$

gdje je

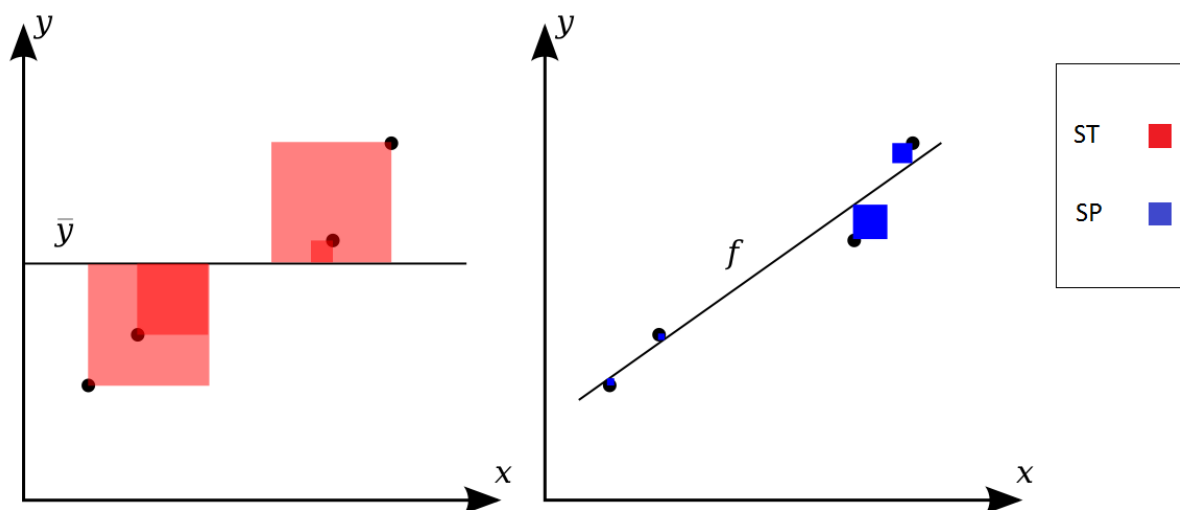
- $ST$ - ukupno kvadratno odstupanje od srednje vrijednosti
- $SP$  –ukupno kvadratno odstupanje od regresijskog modela

Odstupanja  $ST$  i  $SP$  su definirana prema [10] sa izrazima

$$ST = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

$$SP = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (71)$$

[Slika 41] prikazuje grafički prikaz  $ST$  i  $SP$ .



Slika 41. Grafički prikaz  $ST$  i  $SP$

Koeficijent determinacije predstavlja omjer protumačenih i potpunih odstupanja i varira između 0 i 1. Što je vrijednost koeficijenta bliža jedinici, to regresijska krivulja bolje odgovara izmjerenim podatcima. Uvrštavanjem svih vrijednosti u jednadžbu (70) dobije se iznos koeficijenta determinacije.

Za interpretaciju vrijednosti koeficijenta determinacije koristi se Chaddock-ova ljestvica prema [13], prikazana u tablici [Tablica 3]

**Tablica 3. Interpretacija vrijednosti koeficijenta determinacije**

<b>Koeficijent determinacije</b>	<b>Kvaliteta veze</b>
0,0-0,1	Nepostojeća veza
0,1-0,3	slaba veza
0,3-0,5	srednje jaka veza
0,5-0,7	izražena veza
0,7-0,9	jaka veza
0,9-1,0	vrlo jaka veza

### 5.1.2. Intervali pouzdanosti CI

Kako je prethodno navedeno, broj mjerenja u eksperimentu je ograničen, pa je upitno koliko točno regresijske krivulje opisuju stvarnu fizikalnu pojavu. Za procjenu te nesigurnosti koriste se intervali pouzdanosti.

U statistici je izraz „interval pouzdanosti“ definiran kao intervalna procjena nekog statističkog parametra populacije, s obzirom na vrijednost tog parametra u ograničenom uzorku. Kao takav, izraz „interval pouzdanosti“ koristi se za različite statističke parametre, s obzirom na to koji je statistički parametar konkretno potreban.

Opći izraz za interval pouzdanosti nekog parametra dan je izrazom

$$CI_x = t_x(\alpha, \nu) \cdot SE_x \quad (72)$$

gdje su

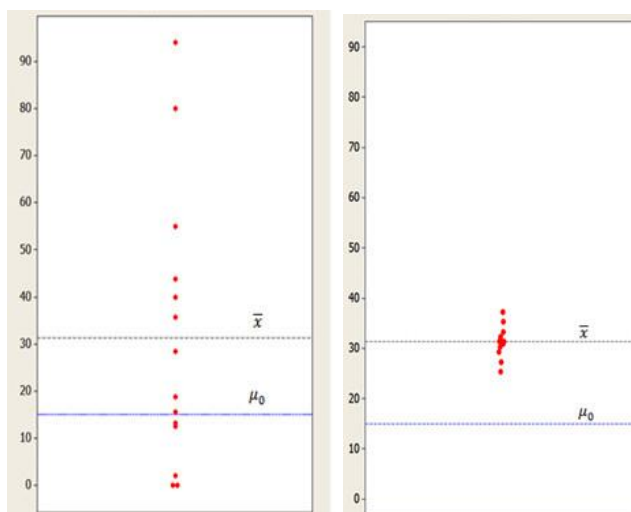
- $x$ - traženi parametar
- $t_x(\alpha, \nu)$ - relativna mjera važnosti odstupanja parametra, ili t-statistika
- $\alpha$ -stupanj pouzdanosti
- $\nu$ -broj statističkih stupnjeva slobode uzorka
- $SE_x$ - standardna pogreška parametra

Standardna pogreška  $SE_x$  parametra  $x$  je izraz za standardnu devijaciju kada se radi o mjerenjima iz uzorka, tj. kada je broj mjerenja ograničen.

T-statistika definirana je izrazom

$$t_x(\alpha, \nu) = \frac{\hat{x} - x_0}{SE_x} \quad (73)$$

U izrazu (73) je  $\hat{x}$  izračunata vrijednost statističkog parametra u uzorku,  $x_0$  teoretska vrijednost tog parametra u cijeloj populaciji, a njihova razlika  $\hat{x} - x_0$  predstavlja odstupanje vrijednosti parametra uzorka od vrijednosti parametra populacije. U nazivniku izraza je standardna pogreška parametra, koja je mjera rasipanja vrijednosti uzorka. T-statistika, je dakle, omjer između odstupanja vrijednosti parametara uzorka i populacije te rasipanja vrijednosti uzorka. [Slika 42] prikazuje dva slučaja sa velikom razlikom u vrijednosti t-statistike. U oba slučaja je razlika između prosječnih vrijednosti uzorka i populacije ista, ali je u jednom slučaju rasipanje vrijednosti uzorka puno veće, pa je sama razlika u vrijednostima parametara manje značajna, gledano naspram prosječnog rasipanja vrijednosti.



**Slika 42. T-statistika za dva različita slučaja**

S obzirom da  $x_0$ , tj. statistički parametar populacije nije poznat, nije moguće iz izraza (73) izračunati  $t_x(\alpha, \nu)$ . T-statistika se stoga procjenjuje s obzirom na broj statističkih stupnjeva slobode  $\nu$  i željeni stupanj pouzdanosti  $\alpha$ .

Broj stupnjeva slobode nekog statističkog uzorka je broj nezavisnih vrijednosti mjerenja u uzorku, i jednak je razlici broja vrijednosti u uzorku i broja nepoznatih parametara u regresijskoj krivulji.

Stupanj pouzdanosti  $\alpha$  proizvoljni je broj, kojim se definira s kolikim postotkom sigurnosti se želi procijeniti odstupanje parametra uzorka od parametra populacije. Dakle, ako je stupanj pouzdanosti  $\alpha = 95\%$  to znači da postoji 95-postotna sigurnost da će izračunati interval pouzdanosti obuhvatiti stvarnu regresijsku krivulju.

Interval pouzdanosti  $CI$  nekog parameta  $x$ , sa sigurnošću  $\alpha$ , dobije se očitavanjem vrijednosti t-statistike za dani  $\alpha$  i  $\nu$ , te množenjem dobivene t-statistike sa standardnom pogreškom traženog parametra  $SE_x$ , prema jednadžbi (72).

### 5.1.3. Relativna pogreška mjerenja

Relativna pogreška mjerenja nekog parametra  $x$  računa se prema izrazu

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} \quad (74)$$

gdje je

- $\Delta x$ - apsolutna pogreška mjerenja parametra
- $x$ - srednja vrijednost parametra

U konkretnom slučaju, intervali pouzdanosti  $CI_x$  su dobro mjerilo apsolutne pogreške dobivenih regresijskih krivulja, a dijeljenjem njihovog odstupanja sa izračunatom vrijednošću tog parametra može se dobiti relativna pogreška regresije.

Relativna pogreška može se za jednostavnija mjerenja, poput tlaka ili duljine, procijeniti direktnim opažanjem, tj. procjenom apsolutne pogreške i dijeljenjem te procjene s očitanoj vrijednošću.

Prilikom izračuna relativne pogreške snage i iskoristivosti koristi se pravilo za kombiniranu relativnu pogrešku. Ukupna relativna pogreška izraza koji sadrži parametre s relativnim pogreškama  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$  računa se prema izrazu

$$\delta x_u = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_n^2} \quad (75)$$



## 5.2. Procjena pogreški mjerenja

### 5.2.1. Procjena pogreške mjerenja protoka

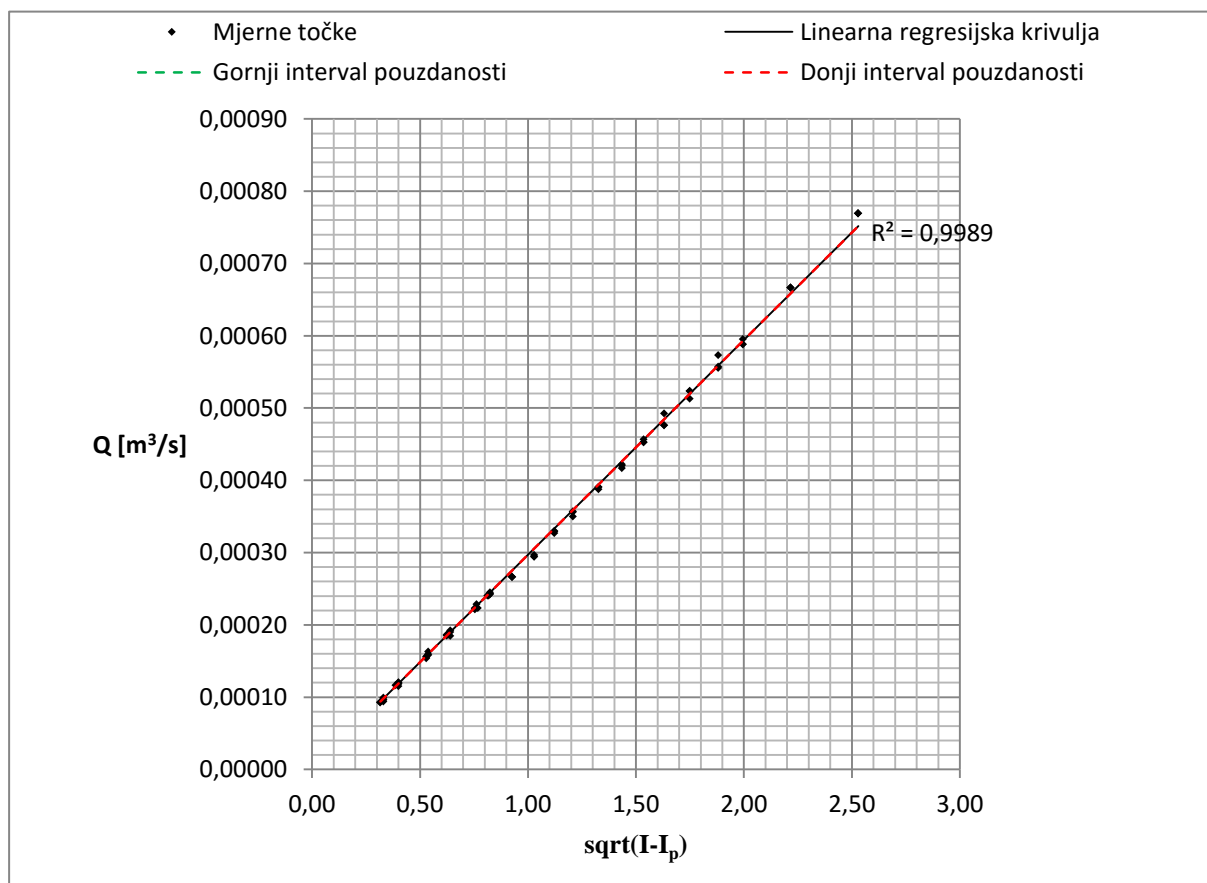
Umjeravanje protoka nije idealan proces, pa je nužno procjeniti odstupanje izmjerenih rezultata od vrijednosti dobivenih iz jednadžbe (10) uz pomoć koeficijenta determinacije i intervala pouzdanosti.

Koeficijent determinacije računa se prema jednadžbi (70) i iznosi

$$R^2(Q) = 0,9989 \quad (76)$$

Koeficijent determinacije vrlo je blizu jedinici pa je ponovno vidljivo da regresijska krivulja za izračun protoka izvršno odgovara rezultatima umjeravanja.

Intervali pouzdanosti regresijske krivulje za umjeravanje protoka računaju se prema jednadžbi (73). [Slika 43] prikazuje grafički intervale pouzdanosti sa sigurnošću  $\alpha = 95\%$ .



Slika 43. Intervali pouzdanosti pri umjeravanju protoka

Kako je vidljivo iz slike [Slika 43], intervale pouzdanosti gotovo savršeno odgovaraju regresijskoj krivulji.

Relativna pogreška mjerenja protoka izračunati će se iz intervala pouzdanosti regresijske krivulje protoka. Izračunata apsolutna pogreška nagiba pravca  $K_2$  je

$$\Delta K_2 = 1,33 \cdot 10^{-7} [\text{m}^3/\text{s}(\text{mA})^{1/2}] \quad (77)$$

a vrijednosti parametra  $K_2$  je prema (48)

$$K_2 = 2,971 \cdot 10^{-4} [\text{m}^3/\text{s}(\text{mA})^{1/2}] \quad (78)$$

stoga je relativna pogreška izračuna protoka

$$\delta K_2 = \delta Q = 0,0009 = 0,09\% \quad (79)$$

### 5.2.2. Procjena pogreške mjerenja sile

Pri izračunu pogreške regresijske krivulje po Capstanovoj jednadžbi, koristiti će se ista metoda kao i za izračun pogreške mjernog lanca za umjeravanje protoka. Pritom vrijede iste opće jednadžbe za koeficijent determinacije (70) i (71) i intervale pouzdanosti (73).

Od dviju sila u vagama 1 i 2 promatra se vrijednost sile u vagi 1, pa se zamijene izrazi

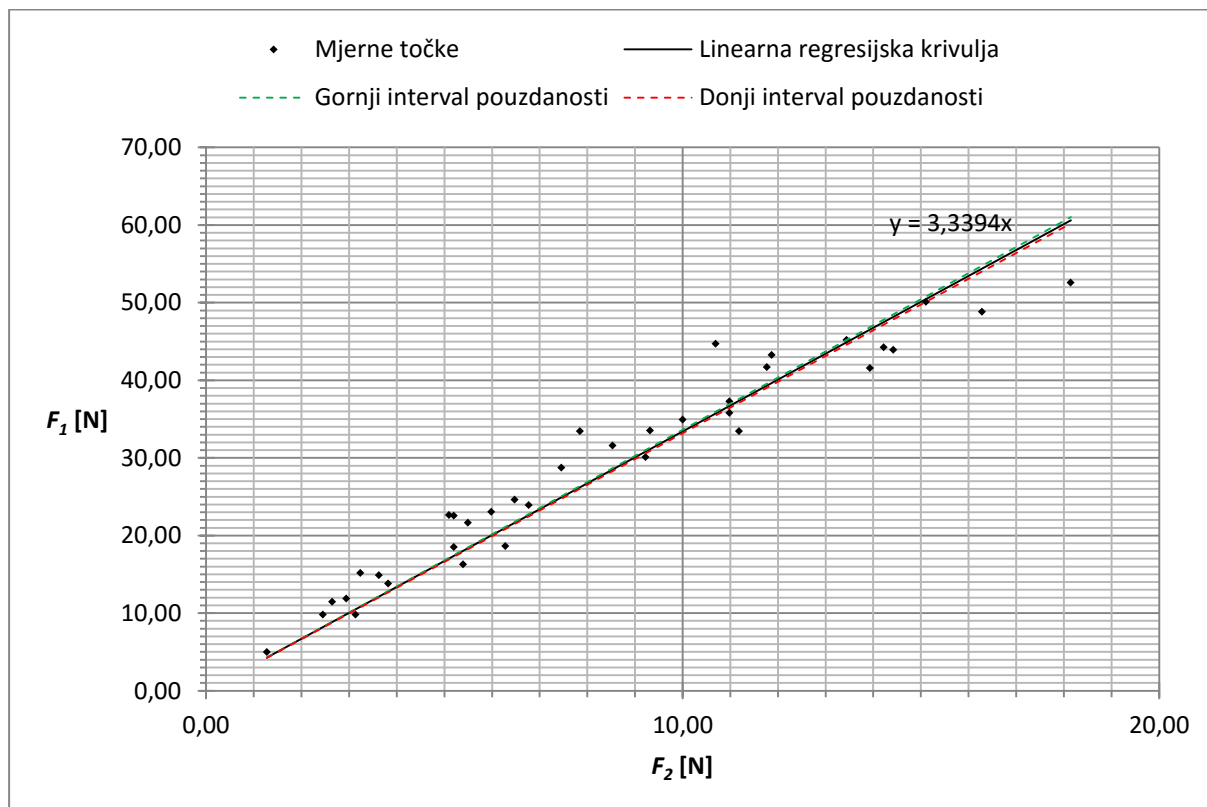
$$\begin{aligned}y_i &= F_{1i} \\ \hat{y}_i &= \widehat{F}_{1i} \\ \bar{y} &= \bar{F}_1\end{aligned}\tag{80}$$

Koeficijent determinacije prema jednadžbi (70) iznosi

$$R^2 = 0,986\tag{81}$$

Koeficijent determinacije pokazuje da je točnost regresijske krivulje vrlo visoka, prema Chaoddockovoj ljestvici. Iako točnost regresijske krivulje nije idealna, ona je dovoljno blizu idealnom da se sa sigurnošću može reći da Pronijeva kočnica u eksperimentu ne odstupa u mjerenjima od fizikalnog zakona danog Capstanovom jednadžbom

Intervali pouzdanosti regresijske krivulje sa sigurnošću  $\alpha = 95\%$ . prikazani su na slici [Slika 44].



**Slika 44. Intervali pouzdanosti u Capstanovoj jednadžbi**

Iz intervala pouzdanosti vidljivo je da postoji odstupanje intervala pouzdanosti od regresijske krivulje, ali ono nije veliko.

Relativna pogreška mjerenja sile izračunati će se iz intervala pouzdanosti regresijske krivulje za Capstanovu jednadžbu. Izračunata apsolutna pogreška nagiba pravca  $C$  je

$$\Delta C = 0,0455 \quad (82)$$

a vrijednosti parametra  $C$  je prema (51)

$$C = 3,3394 \quad (83)$$

stoga je relativna pogreška izračuna sile

$$\delta C = \delta F = 0,0136 = 1,36\% \quad (84)$$

### 5.2.3. Procjena pogreške mjerenja tlaka

Pri izračunu pogreške regresijske krivulje karakteristike pumpe, koristiti će se ista metoda kao i za izračun pogreške mjernog lanca za umjeravanje protoka. Pritom vrijede iste opće jednadžbe za koeficijent determinacije (70) i (71) i intervale pouzdanosti (73).

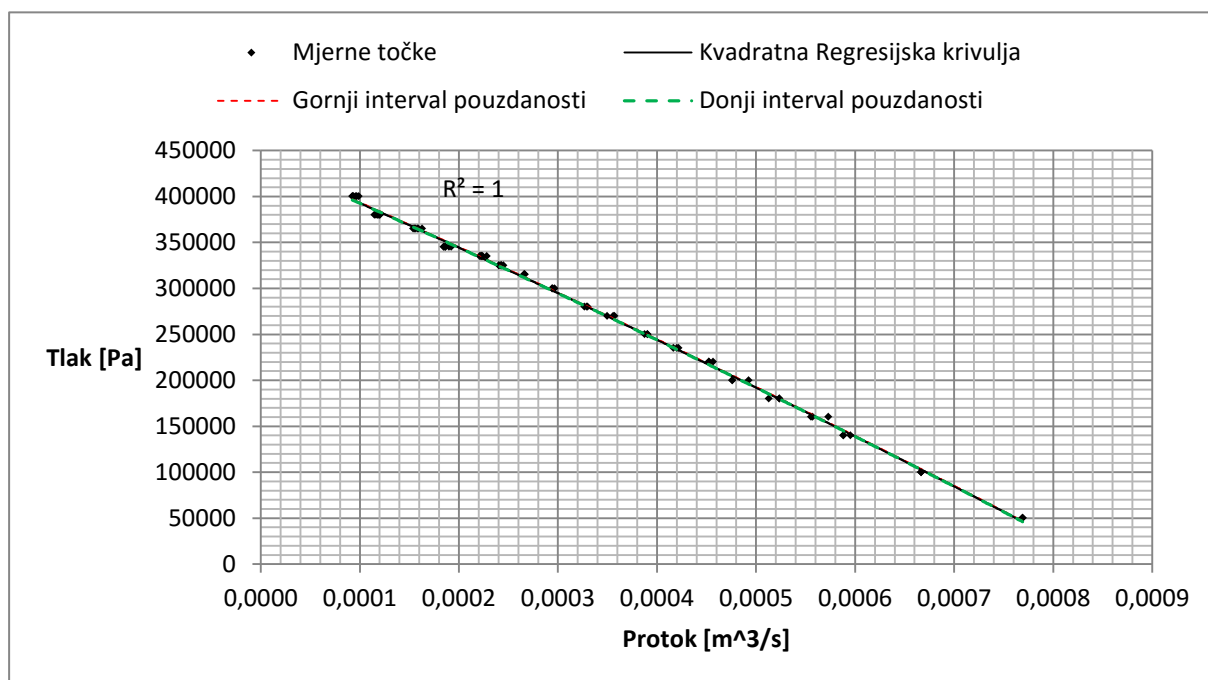
Za izračun koeficijenta determinacije zamijene se izrazi

$$\begin{aligned} y_i &= p_i \\ \hat{y}_i &= \hat{p}_i \\ \bar{y} &= \bar{p} \end{aligned} \quad (85)$$

Koeficijent determinacije prema jednadžbi (70) iznosi

$$R^2 = 0,999 \quad (86)$$

Koeficijent determinacije pokazuje da je točnost regresijske krivulje izvrsna, prema Chaoddockovoj ljestvici.



Slika 45. Intervali pouzdanosti za karakteristiku pumpe

Vrijednost apsolutne pogreške očitavanja tlaka dobije se iz intervala pouzdanosti

$$\Delta p = 0,0035 \text{ [bar]} \quad (87)$$

Prosječna izmjerena vrijednost tlaka iznosi

$$p = 2,8 \text{ [bar]} \quad (88)$$

relativna pogreška očitavanja tlaka je omjer izraza (87) i (88)

$$\delta p = 0,0013 = 0,13\% \quad (89)$$

#### 5.2.4. Procjena pogreške mjerenja promjera

Za izračun momenta sile na Pronijevoj kočnici potrebno je izmjeriti promjer vratila turbine [Slika 18]. Vratilo se mjeri uz pomoć pomičnog mjerila (šublera). Procijenjena pogreška mjerenja je

$$\Delta D = 0,2 \text{ [mm]} \quad (90)$$

Izmjerena vrijednost promjera iznosi

$$D = 53 \text{ [mm]} \quad (91)$$

relativna pogreška očitavanja promjera je omjer izraza (90) i (91)

$$\delta D = 0,0038 = 0,38\% \quad (92)$$

#### 5.2.5. Procjena pogreške mjerenja kutne brzine

Za izračun snage turbine potrebno je izmjeriti kutnu brzinu rotacije turbine [Slika 23]. Kutna brzina se mjeri uz pomoć tahometra. Deklarirana pogreška mjerenja je

$$\Delta n = 1 \text{ [o/min]} \quad (93)$$

što se preračunava u radijane po sekundi [ $s^{-1}$ ]

$$\Delta \omega = 0,105 \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad (94)$$

Prosječna izmjerena vrijednost kutne brzine iznosi

$$\omega = 88 \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad (95)$$

relativna pogreška očitavanja promjera je omjer izraza (94) i (95)

$$\delta \omega = 0,0012 = 0,12\% \quad (96)$$

### 5.3. Procjena pogreški izvedenih veličina

#### 5.3.1. Procjena pogreške snage pumpe

Snaga pumpe računa se prema izrazu (52)

$$P_{ul} = p \cdot Q \quad (97)$$

Ukupna relativna pogreška snage računa se prema izrazu (75)

$$\delta P_{ul} = \sqrt{\delta p^2 + \delta Q^2} = 0,0015 = 0,15\% \quad (98)$$

#### 5.3.2. Procjena pogreške idealne snage

Idealna snaga turbine računa se prema izrazu (54)

$$P_{t,id} = n \cdot \rho \cdot u \cdot v \cdot A \cdot (v - u)(1 - \cos \beta) \quad (99)$$

Ukupna relativna pogreška snage računa se prema izrazu (75)

$$\delta P_{t,id} = \sqrt{\delta u^2 + \delta Q^2 + \delta u^2 + \delta v^2} \quad (100)$$

pogreška mjerenja protoka je već izvedena, ali grešku obodne brzine i brzine mlaza vode u mlaznici potrebno je izvesti. Pogreška obodne brzine izvodi se iz greške kutne brzine i greške promjera

$$\delta u = \sqrt{\delta \omega^2 + \delta D^2} = 0,004 = 0,4\% \quad (101)$$

Pogreška brzine mlaza jednaka je grešci tlaka

$$\delta v = \delta p = 0,0013 = 0,13\% \quad (102)$$

Ukupna relativna pogreška snage glasi

$$\delta P_{t,id} = \sqrt{\delta u^2 + \delta Q^2 + \delta u^2 + \delta v^2} = 0,0059 = 0,59\% \quad (103)$$

Vidljivo je da izračunata idealna snaga pokazuje grešku, iako pogreška nije značajna, što je i očekivano.

#### 5.3.3. Procjena pogreške stvarne snage turbine

Snaga turbine računa se prema izrazu (53)

$$P_t = M \cdot \omega \quad (104)$$

Ukupna relativna pogreška snage računa se prema izrazu (75)

$$\delta P_t = \sqrt{\delta M^2 + \delta \omega^2} \quad (105)$$

pogreška mjerenja kutne brzine je već izvedena, ali grešku momenta sile potrebno je izvesti iz greške sile i pogreške promjera

$$\delta M = \sqrt{\delta F^2 + \delta D^2} = 0,0141 = 1,41\% \quad (106)$$

Ukupna relativna pogreška snage glasi

$$\delta P_t = \sqrt{\delta M^2 + \delta \omega^2} = 0,0142 = 1,42\% \quad (107)$$

Stvarna snaga pokazuje veću pogrešku od idealne, što je očekivano, jer je pogreška očitavanja sile veća od ostalih pogreški.

#### 5.3.4. Procjena pogreške idealne iskoristivosti turbine

Idealna iskoristivost računa se prema izrazu (64)

$$\eta_{id} = \frac{P_{t,id}}{P_{ul}} \quad (108)$$

Ukupna relativna pogreška idealne iskoristivosti računa se prema izrazu (75)

$$\delta \eta_{id} = \sqrt{\delta P_{t,id}^2 + \delta P_{ul}^2} = 0,0061 = 0,61\% \quad (109)$$

#### 5.3.5. Procjena pogreške stvarne iskoristivosti turbine

Stvarna iskoristivost računa se prema izrazu (68)

$$\eta = \frac{P_t}{P_{ul}} \quad (110)$$

Ukupna relativna pogreška stvarne iskoristivosti turbine računa se prema izrazu (75)

$$\delta \eta = \sqrt{\delta P_t^2 + \delta P_{ul}^2} = 0,0143 = 1,43\% \quad (111)$$

Vidljivo je iz izraza (109) i (111) da je pogreška stvarne iskoristivosti veća od pogreške idealne iskoristivosti. S obzirom da je pogreška stvarne snage veća od pogreške idealne snage, slijedi i da je pogreška stvarne iskoristivosti veća od pogreške idealne iskoristivosti. Razlog povećane greške u stvarnoj iskoristivosti je lošija točnost mjerenja sile, zbog koje je posljedično lošija i točnost stvarne snage i iskoristivosti.



## 6. ZAKLJUČAK

U radu su mjerenja izvedena po standardnoj metodologiji metrologije. Opisani su mjerni lanci za mjerenje tlaka pumpe, protoka vode, sile u vagama Pronijeve kočnice i kutne brzine okretanja modela turbine, zajedno sa svim specifičnostima procesa mjerenja svake od veličina.

Za potrebe mjerenja protoka vode izvedeno je umjeravanje mjernog lanca za mjerenje protoka. Umjeravanje je izvedeno uz pomoć mjerne posude kao etalonskog uređaja za usporedbu.

Provedena je dimenzijska analiza eksperimenta i izvedeni su bezdimenzijski parametri momenta sile, protoka, snage i brzine strujanja vode kroz mlaznicu.

U rezultatima su prikazane tražene karakteristike turbine: idealna i stvarna snaga modela turbine, te idealna i stvarna iskoristivost modela turbine. Sve karakteristike prikazane su u ovisnosti o kutnoj brzini vrtnje modela turbine i bezdimenziskom parametru brzine strujanja vode kroz mlaznicu.

Stvarna snaga i stvarna iskoristivost pokazuju konzistentno manje vrijednosti u odnosu na idealnu snagu i iskoristivost, što je očekivano, s obzirom da idealna snaga i iskoristivost ne uračunavaju gubitke u mlaznici i u radnom kolu modela turbine.

Pogreška u rezultatima mjerenja ocijenjena je preko relativne pogreške. Za izmjerene veličine relativna pogreška izračunata je direktno iz mjerenja ili pomoću intervala pouzdanosti, ukoliko se radi o kompleksnijem mjernom lancu. Relativna pogreška izvedenih veličina izvedena je iz relativnih pogreški izmjerenih veličina.

Izračunate relativne pogreške stvarne snage i iskoristivosti su veće nego relativne pogreške idealne snage i iskoristivosti, što je posljedica lošije točnosti mjerenja sile na vagama Pronijeve kočnice.

Daljnijim mjerenjima sa preciznijim mjernim instrumentima, posebice vagama za mjerenje sile, može se poboljšati točnost izračuna karakteristika modela Pelton turbine.

## LITERATURA

- [1] Currie, S.: Hydropower, Referencepoint Press, 2010.
- [2] Wilson, P.N.: Water turbines, H.M. Stationery Off., 1974
- [3] Bansal, R.K.: Fluid mechanics and hydraulic machines, FIrewall Media, 2005.
- [4] Virag, Z.; Mehanika fluida, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2007.
- [5] Johnson, K. L.: Contact mechanics, Cambridge University Press, 1985
- [6] <http://www.leancrew.com/all-this/2010/04/aye-aye-capstan/>
- [7] Virag,Z.; Šavar, M.; Džijan, I. : Mehanika fluida 1, Zagreb 2014.
- [8] Casella, G.; Berger, R. L.: Statistical inference, Thomson learning, 2002.
- [9] Hogg,R.V.; Craig, A. T.: Introduction to Mathematical Statistics. Macmillan 1978.
- [10] Box, G.; Hunter, W.; Hunter, J. S.: Statistics for experimenters, .Wiley, 1978.
- [11] Cox,D.R.; Hinkley, D.V.: Theoretical statistics, Chapman & Hall, 1974
- [12] Dodge, Y.: The Oxford dictionary of statistical terms, Oxford university press, 2003.
- [13] Chaddock, R.E.: Principles and methods of statistics, Houghton Mifflin Company, 1925

## **PRILOZI**

I. CD-R disc