

# Raspored tlaka na lopatice aksijalne turbine (Kaplan)

---

Guć, Luka

Undergraduate thesis / Završni rad

2013

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:704718>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-02**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Luka Guć**

Zagreb, 2013..

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Raspored tlaka na lopatice aksijalne turbine (Kaplan)**

Mentori:

Prof. dr. sc. Mario Šavar, dipl. ing.

Student:

Luka Guć

Zagreb, 2013.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Mariu Šavaru na ukazanim savjetima, i dr. sc. Severinu Krizmaniću na pomoći pri izradi ovog rada.

Luka Guć



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student:

Mat. br.:

Naslov rada na  
hrvatskom jeziku:

Naslov rada na  
engleskom jeziku:

Opis zadatka:

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Igor Balen

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	IX
1. UVOD.....	1
2. TEORIJSKE OSNOVE .....	2
2.1. Osnovne jednačbe dinamike fluida .....	2
2.1.1. Zakon očuvanja mase.....	2
2.1.2. Zakon očuvanja količine gibanja .....	2
2.1.3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja .....	2
2.1.4. Zakon očuvanja energije .....	2
2.2. Turbulencija .....	4
2.2.1. Statističko opisivanje turbulencije .....	6
2.2.2. Prijenos fizikalne veličine u turbulentnom strujanju .....	7
2.2.3. Disipacija energije .....	9
2.2.4. Vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednačbe .....	9
2.2.5. Modeli turbulencije .....	10
2.2.6. $k - \varepsilon$ model turbulencije .....	11
2.2.7. Zidne funkcije .....	13
2.3. Numerički pristup rješavanju fizikalnih problema.....	15
2.3.1. Idealizacija ili matematičko modeliranje .....	15
2.3.2. Diskretizacija matematičkog modela .....	16
2.4. Metoda konačnih volumena .....	17
2.4.1. Shema prvog reda točnosti.....	20
2.4.2. Shema drugog reda točnosti.....	21
2.5. Računalna dinamika fluida.....	22
2.5.1. Postupak provođenja računalne numeričke simulacije .....	22
2.5.2. Prednosti i mane numeričkih simulacija .....	23
3. KONSTRUIRANJE ROTORA TURBINE.....	24

---

3.1.	Općenito o turbinama.....	24
3.2.	Kaplan turbina.....	25
3.3.	Tok fluida kroz rotor Kaplan turbine .....	26
3.4.	Aeroprofil.....	27
3.5.	Proračun geometrije rotorskih lopatica .....	28
3.5.1.	Podjela na parcijalne turbine.....	28
3.5.2.	Određivanje slike strujanja.....	30
3.5.3.	Odabir aeroprofila .....	32
4.	RAČUNALNE SIMULACIJE .....	35
4.1.	Ispitivanje aerodinamičkih koeficijenata odabranih aeroprofila.....	35
4.1.1.	Definiranje domene simulacije .....	35
4.1.2.	Definiranje mreže za simuliranje toka fluida.....	37
4.1.3.	Simuliranje toka fluida u Fluent-u .....	41
4.1.4.	Dijagrami koeficijenata uгона i otpora.....	42
4.1.5.	Komentar točnosti rješenja.....	46
4.2.	Simulacija strujanja oko lopatica u turbini .....	48
4.2.1.	Definiranje domene simulacije .....	48
4.2.2.	Definiranje mreže za simuliranje toka fluida.....	50
4.2.3.	Simuliranje toka fluida u Fluent-u .....	52
4.2.4.	Rezultati simulacija toka kroz rešetku rotora.....	52
5.	ZAKLJUČAK.....	58
	LITERATURA.....	59
	PRILOZI.....	60

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče.....	6
Slika 2.	Rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda .....	15
Slika 3.	Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena .....	18
Slika 4.	Numerička shema prvog reda točnosti .....	21
Slika 5.	Numerička shema drugog reda točnosti .....	22
Slika 6:	Pelton turbina sa mlaznicama i rotorom .....	24
Slika 7:	Princip rada propelerne turbine.....	25
Slika 8:	Kaplan turbina sa slikom toka vode, te statorskim i rotorskim lopaticama .....	26
Slika 9:	Ulazni i izlazni trokuti brzina na cilindričnom presjeku jedne od lopatica .....	26
Slika 10:	Dimenzije aeroprofila .....	27
Slika 11:	Ulazni i izlazni trokuti brzina .....	31
Slika 12:	Odabrani aeroprofil.....	34
Slika 13:	Domena proračuna .....	36
Slika 14:	Aeroprofil definiran u Gambit-u preko tri NURBS krivulje .....	36
Slika 15:	Izgled pravilne mreže u okolici aeroprofila .....	38
Slika 16:	Gusta, pravilna mreža u blizini vrha aeroprofila .....	39
Slika 17:	Pravilna zaobljena mreža u blizini stražnjeg kraja aeroprofila.....	39
Slika 18:	Slika cijele domene sa vidljivim povećavanjem veličine elemenata prema rubu.....	40
Slika 19:	Slika rasta veličine elemenata s vidljivo gušćom podjelom u blizini vrha i kraja aeroprofila .....	40
Slika 20:	Tipičan dijagram konvergencije reziduala.....	42
Slika 21:	Tražene vrijednosti za profil G .....	43
Slika 22:	Tražene vrijednosti za profil I.....	44
Slika 23:	Tražene vrijednosti za profil II .....	44
Slika 24:	Tražene vrijednosti za profil III .....	45
Slika 25:	Tražene vrijednosti za profil v .....	45
Slika 26:	tipični dijagram rasporeda vrijednosti $y^+$ na gornjem i donjem rubu aeroprofila .....	47
Slika 27:	rešetka rotora sa periodički ponavljajućim aeroprofilima .....	48
Slika 28:	domena strujanja fluida sa periodičkim rubnim uvjetima.....	49
Slika 29:	Bliži prikaz područja domene oko aeroprofila.....	49



---

Slika 30: Mreža u blizini lopatice .....	51
Slika 31: Povećavanje mreže prema rubu domene.....	51
Slika 32: Polje intenziteta apsolutne brzine .....	52
Slika 33: Polje tlaka.....	53
Slika 34: Koeficijent tlaka na glavinskom presjeku .....	54
Slika 35: Koeficijent tlaka na presjeku I .....	54
Slika 36: Koeficijent tlaka na presjeku II.....	55
Slika 37: Koeficijent tlaka na presjeku III .....	55
Slika 38: Koeficijent tlaka na vanjskom presjeku .....	56

## POPIS TABLICA

Tablica 1: Vrijednosti fizikalnih veličina na lopatici .....	32
Tablica 2: Vrijednosti veličina za definiciju profila.....	33

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	[m <sup>2</sup> ]	površina konačnog volumena
$\Delta A$	[m <sup>2</sup> ]	površina stranice konačnog volumena
$A_D$	[m <sup>2</sup> ]	referentna površina za koeficijent otpora
$a_C$	[kg/s]	centralni koeficijent u diferencijskoj jednažbi
$a_N$	[kg/s]	koeficijent u diferencijskoj jednažbi
$b$	[-]	slobodni član u diferencijskoj jednažbi
$c_v$	[J/kg K]	specifični toplinski kapacitet
$C_D$	[-]	koeficijent otpora
$D$	[kg/s]	jačina difuzije
$e$	[J/kg K]	specifična unutarnja i kinetička energija
$F_n$	[kg/s]	jačina konvekcije
$f_i$	[N/kg]	komponente vektora specifične masene sile
$G$	[W/m <sup>3</sup> ]	generacija kinetičke energije turbulencije
$J_j$	[-]	vektor fluksa fizikalnog svojstva
$l_t$	[m]	duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju
$\bar{k}$	[J/kg]	kinetička energija turbulencije
$p$	[N/m <sup>2</sup> ]	tlak
$\bar{p}$	[N/m <sup>2</sup> ]	statistički osrednjeno polje tlaka
$p'$	[N/m <sup>2</sup> ]	pulzirajući dio polja tlaka
$q_H$	[W/m <sup>3</sup> ]	volumenska gustoća toplinskih izvora
$Re$	[-]	Reynoldsov broj
$Re_{kr}$	[-]	kritični Reynoldsov broj
$Re_\lambda$	[-]	turbulentni Reynoldsov broj

---

$S_\varphi$		izvorski član u općoj konvekcijsko – difuzijskoj jednadžbi
$T$	[K]	temperatura
$t$	[s]	vrijeme
$u$	[J/kg]	specifična unutarnja energija
$u_\tau$	[m/s]	brzina trenja
$V$	[m <sup>3</sup> ]	volumen konačnog volumena
$v_i$	[m/s]	komponente vektora brzine strujanja
$\overline{v_i}$	[m/s]	osrednjeni dio vektora brzine strujanja
$v_i'$	[m/s]	pulzirajući dio polja vektora brzine strujanja
$v_n$	[m/s]	projekcija vektora brzine u smjeru vanjske normale
$v_\infty$	[m/s]	brzina neporemećenog strujanja
$v_t$	[m/s]	karakteristična brzina turbulentnih pulsacija
$x_i$	[m]	pravokutne koordinate
$x_{kr}$	[m]	kritična duljina
$y^+$	[-]	bezdimenzijska udaljenost prvog čvora od stijenke
$\delta$	[-]	Kroneckerov simbol
$\Sigma$	[N/m <sup>2</sup> ]	Tenzor viskoznih naprezanja
$\lambda$	[W/m K]	toplinska provodnost materijala
$\lambda$	[m]	valna duljina turbulentnih pulsacija
$\phi$	[-]	volumenska gustoća fizikalne veličine
$\varphi$	[-]	polje fizikalne veličine
$\Delta n$	[m]	udaljenost između čvorova konačnih volumena
$\Gamma$	[kg/m s]	koeficijent difuzije
$\Gamma$	[kg/m s]	koeficijent turbulentne difuzije
$\mu$	[-]	dinamička viskoznost
$\mu_t$	[-]	turbulentna viskoznost
$\overline{\varepsilon}$	[W/kg]	disipacija kinetičke energije turbulencije
$\tau$	[N/m <sup>2</sup> ]	tenzor naprezanja

---

---

$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	gustoća
$\mu$	[Pa s]	dinamička viskoznost
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	kinematička viskoznost

## **SAŽETAK**

Svrha ovog rada je projektiranje te naknadno ispitivanje rotora male Kaplan turbine uz pomoć dvodimenzionalnih računalnih simulacija. Za potrebe dimenzioniranja koristit će se klasični proračun podjelom turbine na tri parcijalne turbine, iz kojeg će se dobiti slika toka strujanja. Na temelju toka strujanja odabiru se odgovarajući profili lopatica sa svrhom što efektivnijeg iskorištavanja energije toka fluida. Dobivenim profilima se zatim dvodimenzionalnim računalnim simulacijama ispituju aerodinamičke karakteristike- dijagrami koeficijenta uzgona i otpora, te se na kraju simuliraju tokovi strujanja fluida u slučaju stvarnog strujanja kroz turbinu, gdje lopatice rotora zbog međusobne blizine značajno utječu na tok fluida u blizini istih.

Ključne riječi: Računalna dinamika fluida, metoda konačnih volumena, Kaplan turbina, rotor.



## 1. UVOD

Čovjek je od početka svog postojanja pokušavao ovladati silama prirode i iskoristiti ih za svoje potrebe. Što se tiče fluida u prirodi, tj. vode i zraka, primitivni uređaji za pretvaranje energije sadržane u fluidima u mehaničku energiju za čovjekovu upotrebu postojali su otkako je čovjek prešao na sesilni način života. Energija vode je oduvijek prednjačila u iskoristivosti nad energijom vjetra iz više razloga:

- Dostupnost- tok vode je sadržan u ograničenim koritima sa tipično uvijek dostupnim količinama vode, kojima je lako manipulirati kanalima, branama, itd.
- Koncentriranost- gustoća vode je oko 1000 puta veća od gustoće zraka, dakle ista količina vode pri istoj brzini sadrži oko 1000 puta više kinetičke energije od zraka.

Potreba čovječanstva za energijom nije se smanjila do današnjih dana, dapače- višestruko se povećala! Ljudska sposobnost iskorištavanja energetske resursa fluida, međutim, povećala se proporcionalno, ali ne dovoljno da zadovolji sve veće potrebe za energijom. Dio krivice za to leži u neobnovljivim resursima energije koji su svojom dostupnošću činili iskorištavanje manjih vodnih tokova neatraktivnim. U posljednje vrijeme trendovi se mijenjaju po tom pitanju iz jednostavnog razloga što neobnovljivi izvori energije polako nestaju, te se postavlja pitanje: otkud će čovječanstvo namiriti svoje potrebe za energijom?

Mali vodni tokovi pružaju vrlo jednostavan i vrlo čist način namirivanja dijela energetske potrebe jer su principi iskorištavanja njihove energije isti kao i principi iskorištavanja energije velikih tokova, samo im je potrebno pravilno prilagoditi veličinu. To stavlja male hidroelektrane u žižu zanimanja inženjerske struke.



## 2. TEORIJSKE OSNOVE

### 2.1. Osnovne jednačbe dinamike fluida

Dinamika fluida temelji se na osnovnim zakonima iz područja klasične fizike. Ovi se zakoni u mehanici fluida definiraju za materijalni volumen, tj. skup čestica fluida, koji može mijenjati oblik i izmjenjivati energiju s okolinom, ali kroz njegove granice nema protoka mase jer se pretpostavlja da je sastavljen uvijek od istih čestica.

#### 2.1.1. Zakon očuvanja mase

Zakon očuvanja mase za materijalni volumen glasi: Masa materijalnog volumena je konstantna. Ovaj Zakon se također naziva i jednačbom kontinuiteta pošto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

#### 2.1.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon očuvanja količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

#### 2.1.3. Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Zakon momenta količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene momenta količine gibanja materijalnog volumena, u odnosu na odabrani pol, jednaka je sumi momenata vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, u odnosu na taj isti odabrani pol. Ako se pretpostavi da u fluidu nema momenata rapodijeljenih po površini materijalnog volumena ili unutar samog volumena, tada se zakon očuvanja momenta količine gibanja svodi na činjenicu simetričnosti tenzora naprežanja.

#### 2.1.4. Zakon očuvanja energije

Zakon očuvanja energije za materijalni volumen glasi: Brzina promjene zbroja kinetičke i unutarnje energije materijalnog volumena jednaka je snazi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen i brzini izmjene topline materijalnog volumena s okolinom.

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_v v_j T)}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sum_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_H, \quad (3)$$

gdje je  $q_H$  volumenska gustoća toplinskih izvora. Jednadžba (3) je izvedena uz primjenu kaloričke jednadžbe stanja i Fourierovog zakona toplinske vodljivosti.

Formulacija osnovnih fizikalnih zakona za materijalni volumen često nije pogodna za primjenu u praksi, budući da inženjera uglavnom ne zanimaju promjene fizikalnih veličina u nekom gibajućem materijalnom volumenu, već ga npr. zanima utjecaj stijenke cijevi na materijalni volumen u trenutku u kojem on ispunjava njenu unutrašnjost. Poznavajući silu kojom stijenka cijevi djeluje na materijalni volumen, po trećem Newtonovom zakonu poznajemo i silu kojom fluid djeluje na stijenkicu, što je od primarnog interesa sa stajališta dimenzioniranja cijevi. Jasno je da u različitim vremenskim trenucima kroz cijev protječu različiti materijalni volumeni, stoga se definira kontrolni volumen koji ima fiksne granice, i od okoline je odijeljen kontrolnom površinom. Kontrolni je volumen u većini slučajeva s mirujućim granicama, a u analizi konstrukcija s pomičnim dijelovima koristi se i formulacija kontrolnog volumena s pomičnim granicama. Za preformuliranje osnovnih jednadžbi dinamike fluida za materijalni volumen u jednadžbe za kontrolni volumen koristi se Reynoldsov transportni teorem.

- a) slučaj mirujućeg ( $u_j = 0$ ) kontrolnog volumena  $V_{KV}$  koji je ograden mirujućom kontrolnom površinom  $S_{KV}$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \phi dV + \int_{S_{KV}} \phi v_j n_j dS, \quad (4)$$

- b) slučaj promjenjivog kontrolnog volumena  $V$  čija se granica  $S$  giba brzinom  $u_j$ :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi dV + \int_{S(t)} \phi (v_j - u_j) n_j dS. \quad (5)$$

U gornjim jednadžbama  $\phi$  predstavlja volumensku gustoću fizikalne veličine.

## 2.2. Turbulencija

Turbulencija je nepravilno vrtložno gibanje fluida. Turbulentna strujanja u prirodi su sveprisutna, od strujanja u unutrašnjosti bioloških ćelija, cirkularnog i respiratornog sustava živih bića, strujanja vode u rijekama, do strujanja zraka. Neki su od tehničkih problema u kojima je strujanje turbulentno su strujanje zraka oko automobila, aviona ili vlaka, strujanje vode oko brodskog trupa, strujanje u vodovodnim, plinovodnim i drugim cijevnim mrežama, pa i u turbinama.

Unatoč tolikoj rasprostranjenosti i učestaloj pojavi, problem turbulentnog strujanja ostaje i dan danas bez egzaktnog rješenja. Matematički gledano, Navier-Stokes-ove jednačbe su skup nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Kao takve, one nemaju analitičkog rješenja u općem slučaju. Ipak, postavlja se pitanje: Jeli polje turbulentnog strujanja potpuno definirano početnim i rubnim uvjetima? Takvo pitanje je nažalost preopširno za razmatranje u terminima ovog rada, ali je vrijedno napomenuti da je to jedno od poznatih milenijskih pitanja iz matematike, te je za uspješno rješenje tog pitanja raspisana nagrada od milijun dolara od strane Clay Mathematics instituta.

Strujanja se mogu podijeliti na dvije kategorije ovisno o vrijednostima Reynoldsovog broja. Reynoldsov broj je bezdimenzijski broj koji prikazuje omjer inercijskih i viskoznih sila u strujanju fluida:

$$Re = \frac{v \cdot x}{\nu}, \quad (6)$$

gdje  $v$  označuje brzinu strujanja fluida,  $x$  karakterističnu duljinu, a  $\nu$  kinematičku viskoznost fluida.

Laminarno strujanje se javlja pri niskim Reynoldsovim brojevima, kada su viskozne sile dominantne naspram inercijskih, i karakterizira ga paralelno gibanje čestica fluida, za razliku od turbulentnog strujanja.

Turbulentno strujanje je izrazito nestacionarno strujanje, koje se javlja pri visokim Reynoldsovim brojevima, kada su inercijske sile dominantne nad viskoznim, karakteriziraju ga slučajne pulsacije brzine i tlaka, te intenzivno miješanje fluida na razini čestica. Intenzivno miješanje na nivou čestica daje turbulentnom strujanju difuzijski karakter čija je posljedica povećana disipacija energije. Za turbulentno strujanje karakteristično je da pored srednje brzine cijelog strujanja, svaka čestica fluida ima još i dodatnu brzinu koja može biti djelomično u smjeru glavnog strujanja, djelomično poprečna na smjer strujanja.

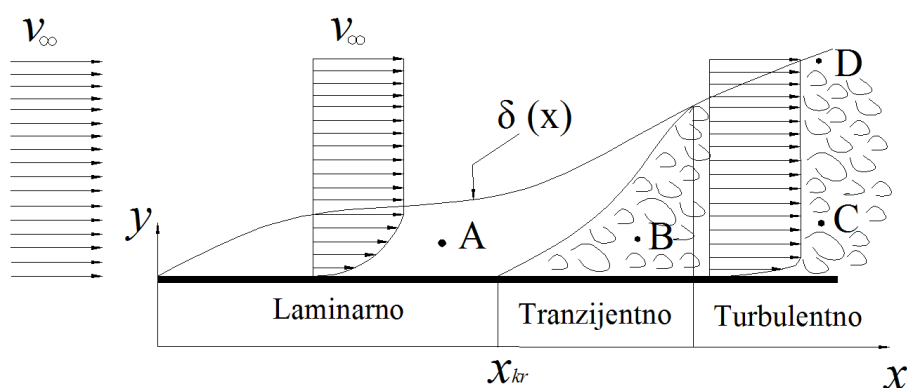
---

Laminarno nestlačivo strujanje fluida konstantnog koeficijenta viskoznosti može se opisati sustavom Navier Stokesovih jednažbi – jednažbom kontinuiteta i jednažbom količine gibanja.

Ispitivanje stabilnosti rješenja Navier-Stokesovih jednažbi, a samim time i ispitivanje klasifikacije strujanja fluida, vrši se dodavanjem male vremensko prostorne perturbacije (nametnuti mali harmonički poremećaj) polja brzine i polja tlaka na dobiveno stacionarno rješenje. Ako poremećaji slabe u vremenu, strujanje je stabilno i stacionarno, te je strujanje laminarno. Ukoliko poremećaji ne slabe, već se pojačavaju, strujanje postaje nestacionarno, bez obzira na stacionarne rubne uvjete i postupno dobiva kaotičan karakter, te je takvo strujanje turbulentno.

Kritičan Reynoldsov broj je broj kod kojeg se pojavi prva perturbacija koja ne slabi u vremenu, te tada počinje proces tranzicije laminarnog u turbulentno strujanje. Kritičan Reynoldsov broj nije univerzalna veličina, njegova vrijednost ovisi o uvjetima strujanja, geometriji opstrujavajućeg tijela, pobudama u obliku vibracija itd. Donji kritični Reynoldsov broj je vrijednost ispod koje se, za određeni oblik strujanja, ne pojavljuju slučajne pulsacije fizikalnih veličina, odnosno ne pojavljuje se turbulentno strujanje. Gornja kritična vrijednost Reynoldsovog broja je vrijednost iznad koje se ne može održati laminarno strujanje. Te se vrijednosti mogu dobiti samo u laboratorijskim uvjetima gdje se bilo kakve pobude, koje inače postoje u realnim strujanjima, neutraliziraju.

Na slici 2 prikazano je opstrujavanje ravne ploče. Na samom početku, gdje je Reynoldsov broj manji od donje kritične vrijednosti, vlada laminarno strujanje. U presjeku  $x = x_{kr}$ , kada Reynoldsov broj poprimi kritičnu vrijednost  $Re_{kr} = \frac{v_{\infty} x_{kr}}{\nu}$ , pojavljuju se nestabilnost. Daljnjim udaljavanjem od tog presjeka u smjeru strujanja pulsacije postaju sve izraženije, te nakon nekog presjeka vlada potpuno turbulentno strujanje.



**Slika 1. Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče**

I u laminarnom i u turbulentnom strujanju prisutan podsloj u neposrednoj blizini tijela, u kojem se brzina fluida mijenja od nule (na samoj površini tijela, zbog viskoznosti fluida koji se lijepi za stijenu), do brzine neporemećenog strujanja. To podsloj se naziva graničnim slojem, unutar kojeg se ni u turbulentnom strujanju, gdje su inercijalne sile dominantne nad viskoznim, ne mogu zanemariti viskozne sile. Ipak, zbog izraženije difuzije, koja ima tendenciju ujednačavanja profila, u turbulentnom strujanju profil brzine će biti ujednačeniji, pa će, zbog izraženijeg gradijenta brzine na stijenci, biti veće i smično naprezanje.

### 2.2.1. Statističko opisivanje turbulencije

Zbog prirode turbulentnog strujanja, pri numeričkom rješavanju Navier – Stokesovih jednadžbi za slučaj razvijenog turbulentnog strujanja, diskretizacija proračuna bi morala biti tako sitna da se obuhvate sve amplitude pulsacija fizikalnih veličina, a vremenski korak integracija bi morao biti tako mali da se obuhvate sve frekvencije turbulentnih pulsacija. Takva vrsta izračuna dala bi jako veliki broj rezultata što bi bilo problematično sa stajališta brzine računanja i kapaciteta današnjih računala, te takvi proračuni nisu nužni kako bi se riješio problem turbulentnog strujanja.

Inženjere najčešće zanimaju prosječne vrijednosti fizikalnih veličina, integralne veličine poput protoka, naprezanja na nekoj površini itd. Zato se obično koristi uprosječivanje Navier – Stokesovih jednadžbi po vremenu. Time se značajno olakšava zadaća numeričkog rješavanja tih jednadžbi, bez da se gubi na točnosti rješenja. Danas se najčešće koristi Reynoldsovo osrednjavanje, prema kojem se neka veličina (tlak, brzina) u turbulentnom

strujanju može prikazati kao zbroj vremenski osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela.

Vremenski osrednjena vrijednost u razdoblju  $T_0$  glasi:

$$\bar{y}(x_i, t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(x_i, t - \tau) \cdot d\tau, \quad (7)$$

gdje  $T_0$  mora biti odabran tako da vrijedi  $\bar{\bar{y}} = \bar{y}$ . Vremenski osrednjena vrijednost pulsirajućeg dijela bilo koje fizikalne veličine jednaka je nuli.

Primjenom Reynoldsovog osrednjavanja na opći oblik zakona očuvanja za nestlačivo strujanje ( $\rho = \text{konst.}$ ):

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + S_\varphi, \quad (8)$$

gdje  $\varphi$  predstavlja polje fizikalne veličine,  $\Gamma$  koeficijent difuzije (primjer – toplinska provodnost materijala  $\lambda$  kod kondukcijskog prijenosa topline kroz krutinu), a  $S_\varphi$  izvorski član, te uzevši da je koeficijent difuzije konstantan, polje brzine i specifično fizikalno svojstvo se prikazuju kao zbroj vremenski uprosječene vrijednosti i pulsirajućeg dijela, slijedi:

$$\frac{\partial(\rho\bar{\varphi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_j\bar{\varphi})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} - \rho\bar{v}'_j\bar{\varphi}' \right) + \bar{S}_\varphi, \quad (9)$$

gdje iščezavaju derivacije pulsirajućih dijelova fizikalnih veličina po vremenu, ali ostaje prisutan član  $\frac{\partial \rho\bar{v}'_j\bar{\varphi}'}{\partial x_j}$  kao predstavnik pulsirajućeg strujanja. Član  $\rho\bar{v}'_j\bar{\varphi}'$  predstavlja novu nepoznanicu, što znači da bi za nju trebalo definirati novu jednadžbu, ili je modelirati. Budući da bi se izvođenjem jednadžbe koja bi opisivala prijenos tog člana, pojavili novi članovi kao nepoznanice, te bi kao rezultat dobili još više nepoznanica, potrebno je taj član modelirati.

### 2.2.2. Prijenos fizikalne veličine u turbulentnom strujanju

Prijenos fizikalne veličine u strujanju fluida odvija se putem konvekcije, gdje čestica fluida koja je nositelj fizikalnog svojstva (npr. temperature ili tlaka) svojim premještanjem prenosi fizikalno svojstvo, i putem difuzije.

Difuzija je proces prijenosa fizikalne veličine u strujanju fluida koji je posljedica kaotičnog gibanja atoma i molekula po prostoru. Makroskopski gledano, difuzija se pojavljuje u slučaju postojanja gradijenta fizikalne veličine i to u smjeru od područja s višom vrijednosti

fizikalne veličine prema području s manjom. Za razliku od konvekcije, koja omogućava prijenos fizikalne veličine samo u smjeru strujanja, difuzija omogućava prijenos i okomito na smjer strujanja. Na taj način je omogućen prijenos npr. topline u laminarnom strujanju fluida okomito na konturu strujnica uz uvjet da je toplinska provodnost fluida veća od nule. Kod turbulentnog strujanja dolazi i do prodiranja čestica fluida s različitim vrijednostima fizikalnog svojstva iz jednog sloja u drugi čime se ostvaruje miješanje. Tako možemo reći da se difuzija sastoji od:

- molekularne difuzije - uslijed miješanja molekula zbog vlastitog gibanja
- turbulentne difuzije - uslijed miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju.

Ako je toplinska provodnost fluida koeficijent difuzije (u Fourierovom zakonu toplinske provodnosti) za difuziju topline, onda je viskoznost koeficijent difuzije za količinu gibanja. Turbulentna difuzija ima porijeklo u konvektivnom prijenosu fizikalnog svojstva uslijed gibanja čestica u poprečnom smjeru u odnosu na smjer glavnog strujanja. Turbulentna difuzija proporcionalna je viskoznosti fluida zbog koje nastaje smično naprezanje među slojevima fluida putem kojeg se prenosi količina gibanja s bržeg na sporiji sloj. Za turbulentnu difuziju količine gibanja odgovorna turbulentna viskoznost, koja uzrokuje turbulentna naprezanja.

Dakle, u realnim strujanjima su prisutne molekularna difuzija, uslijed viskoznosti fluida, i turbulentna difuzija, uslijed turbulentne viskoznosti fluida. Naravno, difuzija, turbulentna ili molekularna, postoji samo ako je prisutan gradijent polja fizikalne veličine. U razvijenom turbulentnom strujanju (pri intenzivnom miješanju čestica fluida) turbulentna difuzija može biti puno jača od molekularne.

Turbulentna difuzija se modelira sljedećom relacijom:

$$-\rho \bar{v}_j \bar{\varphi}' = \Gamma_t \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j}. \quad (10)$$

Ako se izraz uvrsti u vremenski osrednjenu jednadžbu općeg zakona očuvanja u nestlačivom strujanju, nastaje relacija:

$$\frac{\partial(\rho \bar{\varphi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_j \bar{\varphi})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\Gamma + \Gamma_t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} \right) + \bar{S}_\varphi. \quad (11)$$

Zbroj koeficijenata molekularne i turbulentne difuzije se naziva koeficijent efektivne difuzije. Koeficijent molekularne difuzije  $\Gamma$  je svojstvo fluida, dok je koeficijent turbulentne difuzije  $\Gamma_t$  funkcija karaktera strujanja, te je u laminarnom strujanju jednak nuli.

### 2.2.3. Disipacija energije

Disipacija energije predstavlja pretvorbu mehaničke energije u unutarnju energiju. U turbulentnom strujanju je veći gradijent brzine na stijenci nego u laminarnom strujanju, što za posljedicu ima da će i tangencijalno naprezanje u turbulentnom strujanju biti veće nego u laminarnom strujanju. Proporcionalno povećanju tangencijalnog naprezanja raste i disipacija energije što je vidljivo iz Darcy–Weissbachovog izraza za pad tlaka pri strujanju u cijevima, koji glasi:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v_{sr}^2}{2} \quad (12)$$

Kako je u laminarnom strujanju faktor trenja jednak

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64\nu}{v_{sr}D}, \quad (13)$$

pad tlaka će biti linearno razmjernan srednjoj brzini strujanja, što kod turbulentnog strujanja nije slučaj. U režimu potpuno izražene turbulencije faktor trenja je konstantan što se lako može primjetiti iz Moodyjevog dijagrama. Iz toga slijedi da će pad tlaka za izraženu turbulenciju biti razmjernan kvadratu srednje brzine. Isti zaključak vrijedi i pri optjecanju tijela, gdje definiramo koeficijent otpora:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S}. \quad (14)$$

Jednadžba (14) govori o sili otpora, odnosno o snazi potrebnoj za gibanje tijela kroz mirujući fluid (to je snaga potrebna za svladavanje sile otpora, koja se predaje fluidu, a u konačnici se pretvara u unutarnju energiju fluida, što nazivamo disipacijom energije).

Pri optjecanju bilo kojeg tijela za slučaj niskih vrijednosti Reynoldsova broja (slučaj laminarnog strujanja) koeficijent otpora je oblika  $C_D = \frac{\text{konst.}}{\text{Re}}$ , gdje vrijednost konstante zavisi od oblika tijela. U tom je slučaju sila otpora razmjerna brzini optjecanja tijela.

Za slučaj razvijenog turbulentnog strujanja koeficijent otpora je približno konstantan, što znači da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine optjecanja.

### 2.2.4. Vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednadžbe

Promatrat ćemo nestlačivo turbulentno strujanje gdje ćemo zanemariti utjecaj masenih sila ( $f_i \equiv 0$ ). Fizikalna polja brzine i tlaka ćemo prikazati zbrojem osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela:



$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad p = \bar{p} + p'. \quad (15)$$

Jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial(\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (16)$$

Osrednjavanjem jednadžbe dobije se jednadžba kontinuiteta za osrednjeno strujanje:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (17)$$

Budući da je jednadžba kontinuiteta linearna, pa za nju vrijedi princip superpozicije, zbroj jednadžbe kontinuiteta za osrednjeno i pulsirajuće strujanje jednak je jednadžbi kontinuiteta za ukupno strujanje. S obzirom da nas zanimaju samo osrednjene vrijednosti fizikalnih veličina nećemo promatrati jednadžbe za pulsirajuće strujanje. Jednadžba količine gibanja za osrednjeno strujanje glasi:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}'_j v'_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \bar{v}'_i v'_j \right]. \quad (18)$$

Skup vremenski osrednjenih jednadžbi naziva se Reynoldsovim jednadžbama, u kojima se javlja predstavnik pulsirajućeg strujanja  $-\rho \bar{v}'_i v'_j$ , kojeg nazivamo turbulentnim ili Reynoldsovim napreznjima. Tenzor Reynoldsovih napreznja je simetrični tenzor s 6 nepoznanica:

$$-\rho \bar{v}'_i v'_j = \begin{bmatrix} -\rho \bar{v}'_1 v'_1 & -\rho \bar{v}'_1 v'_2 & -\rho \bar{v}'_1 v'_3 \\ -\rho \bar{v}'_2 v'_1 & -\rho \bar{v}'_2 v'_2 & -\rho \bar{v}'_2 v'_3 \\ -\rho \bar{v}'_3 v'_1 & -\rho \bar{v}'_3 v'_2 & -\rho \bar{v}'_3 v'_3 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Već je objašnjeno zbog čega se ovaj član ne opisuje pomoću jednadžbi, već se modelira, čime se gubi dio informacija koje sadrže Navier – Stokesove jednadžbe.

### 2.2.5. Modeli turbulencije

Zadatak modela turbulencije je usklađivanje broja jednadžbi i broja nepoznanica koje se javljaju u Navier – Stokesovim jednadžbama, modeliranjem člana pulsirajućeg strujanja pomoću poznatih parametara sustava. Modeli turbulencije se dijele s obzirom na red korelacije brzina, budući da se svakom novom korelacijom pojavljuje novi član brzine. Zahtjevi koji se nameću svakom modelu turbulencije su točnost, mogućnost rješavanja i jednostavnost, stoga viši model turbulencije ne mora nužno biti i bolji model, a budući da ima

povećan broj članova koje treba modelirati, često nije i najtočniji. Modeli turbulencije temelje se na eksperimentalnim rezultatima.

U modelima prvog reda, modelira se dvojnja korelacija brzina prema hipotezi Boussinesqa u obliku:

$$-\rho \overline{v_i'v_j'} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \overline{k} \delta_{ij}, \quad (20)$$

gdje je  $\mu_t$  koeficijent turbulentne viskoznosti koji je funkcija uvjeta strujanja, a u laminarnom strujanju jednak je nuli. Modeli koji se temelje na gornjoj pretpostavci nazivaju se Newtonovskim modelima turbulencije, budući da su analogni s Newtonovim zakonom viskoznosti.

Uvrštavanjem hipoteze Boussinesqa u Reynoldsovu jednadžbu za količinu gibanja, dobiva se izraz:

$$\frac{\partial \rho \overline{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{v}_j \overline{v}_i) = - \frac{\partial \left( \overline{p} + \frac{2}{3} \rho \overline{k} \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (21)$$

Ovim uvrštavanjem izgubile su se informacije o pulsirajućem strujanju, ali se pojavio problem modeliranja koeficijenta turbulentne viskoznosti.

Prema kinetičkoj teoriji plinova, molekularna viskoznost fluida proporcionalna je gustoći fluida, slobodnoj putanji molekula i karakterističnoj brzini gibanja molekula. Boussinesqova je ideja da se turbulentna napreznja, koja su posljedica kaotičnog gibanja atoma i molekula unutar čestica fluida, modeliraju slično viskozim napreznjima. Slijedi da se turbulentna viskoznost modelira slično molekularnoj viskoznosti fluida:

$$\mu_t = \rho l_t v_t, \quad (22)$$

gdje je  $l_t$  duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju, a  $v_t$  karakteristična brzina turbulentnih pulsacija. Budući da ove dvije veličine nisu svojstvo fluida, već ovise o obliku strujanja, postoje razni modeli koji se razlikuju po definiciji te dvije veličine, a jedan od njih je i  $k - \varepsilon$  model turbulencije, koji spada u diferencijalne modele s dvije jednadžbe.

### 2.2.6. $k - \varepsilon$ model turbulencije

Ovaj model jedan je od najčešće korištenih modela turbulencije. Model koristi dvije dodatne transportne jednadžbe za opisivanje turbulentnih svojstava strujanja fluida. Prva

transportna varijabla je turbulentna kinetička energija  $k$ , a druga označuje disipaciju turbulentne kinetičke energije i definira se izrazom:

$$\bar{\varepsilon} = \nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}, \quad (23)$$

Kinetička energija turbulencije  $k$  sadržana je u pulsacijama turbulentnih strujanja, a mjerenja su pokazala da je glavina kinetičke energije turbulencije sadržana u pulsacijama velikih razmjera. Budući da se disipacija kinetičke energije vrši putem viskoznih sila, definira se Reynoldsov broj turbulentnih pulsacija:

$$\text{Re}_\lambda = \frac{\rho v_\lambda \lambda}{\mu}, \quad (24)$$

gdje je  $\lambda$  valna duljina pulsacija, a  $v_\lambda$  brzina pulsacija. Glavina disipacije kinetičke energije vrši se kada je Reynoldsov broj pulsacija malen, tj. kada je utjecaj viskoznih sila značajan, a to se događa pri pulsacijama malih geometrijskih razmjera.

Ovdje se neće prikazivati izvodi za transportne jednadžbe kinetičke energije turbulencije i disipacije iste, već će se samo navesti konačni izrazi.

Jednadžba za kinetičku energiju turbulencije glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j \bar{k}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} - \overline{\rho v'_j k'} - \overline{p' v'_j} \right) - \overline{\mu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} - \overline{\rho v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}, \quad (25)$$

gdje se pojavljuju članovi lokalne i konvekcijske promjene, molekularne i turbulentne difuzije, te izvorski član. Također se pojavljuje član disipacije kinetičke energije  $\varepsilon$  te generacija kinetičke energije turbulencije, koja se definira sljedećim izrazom:

$$G = -\overline{\rho v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}. \quad (26)$$

Transportna jednadžba disipacije kinetičke energije turbulencije glasi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \bar{\varepsilon})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} - \overline{\rho v'_j \varepsilon'} - 2 \overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right] - 2 \overline{\rho v^2 \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k}} \\ - 2 \mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \left[ \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_i}} \right] - 2 \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k \partial x_j} \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} v'_j} - 2 \mu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Jednadžba (27) se sastoji od izraza za lokalnu promjenu, konvektivni prijenos, molekularnu i turbulentnu difuziju, izraza za ponor koji smanjuje  $\bar{\varepsilon}$ , te izraza za generaciju koja povećava  $\bar{\varepsilon}$ .

Skup jednadžbi koji opisuje  $k - \varepsilon$  model turbulencije se, osim jednadžbe kontinuiteta i jednadžbe količine gibanja, sastoji od

- jednadžbe za koeficijent turbulentne viskoznosti:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon}, \quad (28)$$

- jednadžbe za kinetičku energiju turbulencije:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j \bar{k}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + G - \rho \bar{\varepsilon}, \quad (29)$$

- jednadžbe za generaciju kinetičke energije turbulencije, te jednadžbe za disipaciju kinetičke energije turbulencije:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j \bar{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_1 G \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} - C_2 \rho \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}}. \quad (30)$$

Prikazani model vrijedi za visoke vrijednosti  $Re_t$ , koji označava odnos između turbulentne i molekularne viskoznosti, kad su koeficijenti u gornjim jednadžbama konstantni, i glase:

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma^k = 1, \quad \sigma^\varepsilon = 1.3, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92. \quad (31)$$

### 2.2.7. Zidne funkcije

Budući da  $k - \varepsilon$  model turbulencije vrijedi za visoke vrijednosti, tj. u onom području u kojem je koeficijent turbulentne viskoznosti dominantan nad koeficijentom molekularne viskoznosti, taj model neće biti primjenjiv u području u kojem turbulentna viskoznost nije dominantna. To područje se, osim u području u blizini točke zastoja, pa do razvoja turbulentnog strujanja, javlja i u graničnom sloju, u blizini nepropusne stijenke. Ovaj se problem rješava formulacijom posebnog modela turbulencije u području uz stijenku, ili definiranjem rubnih uvjeta na rubu do kojeg još uvijek vrijedi model. Prvi način se rijetko koristi, ponajviše zbog poteškoća do kojih se nailazi formulacijom posebnog modela turbulencije, kao što su zahtjevi za finoćom mreže. Za realizaciju drugog načina potrebno je definirati rješenja primjenjiva na područje uz nepropusnu stijenku, koje nazivamo zidnim funkcijama.

U neposrednoj blizini stijenke strujanje je paralelno sa stijenkom, pa slijedi da su tangencijalna naprezanja od komponente brzine koja je okomita na stijenku jednaka nuli:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \mu_t \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad (32)$$

iz čega zaključujemo da je ukupno tangencijalno naprezanje konstantno, gledajući u smjeru okomito na stijenku i jednako naprezanju na stijenci. U neposrednoj blizini stijenke zanemaruje se turbulentna viskoznost, te slijedi da je u tom području profil brzine linearan:

$$\bar{u} = \frac{\tau}{\mu} y, \quad (33)$$

a uvrštavanjem bezdimenzijskih veličina  $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$ ,  $y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}$ , gdje  $u_\tau$  predstavlja

brzinu trenja, dobiva se:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (34)$$

ili ako bezdimenzijski zapišemo jednadžbe (33), slijedi:

$$u^+ = y^+. \quad (35)$$

Nakon viskoznog podsloja, u kojem je molekularna viskoznost dominantna nad viskoznim naprezanjima, slijedi prijelazni podsloj, unutar kojeg su ove dvije viskoznosti istog reda veličine, pa ni u njemu ne vrijedi  $k - \varepsilon$  model turbulencije. Nakon prijelaznog podsloja dolazi inercijski podsloj, u kojem dominira turbulentna viskoznost i u kojem vrijedi  $k - \varepsilon$  model turbulencije.

Kada se radi o optjecanju tijela, viskozni, prijelazni i inercijalni podsloj čine zajedno unutarnji dio graničnog sloja, koji se proteže do 15% ukupne debljine graničnog sloja.

Da bi pouzdano mogli koristiti određeni turbulentni model, moramo osigurati da se bezdimenzijska udaljenost od stijenke nalazi u određenom rasponu vrijednosti. Ako je udaljenost prvog čvora od nepropusne stijenke prevelika te se čvor nalazi izvan graničnog sloja, turbulentni model će krivo izračunati veličine strujanja u blizini stijenke, što vodi do krive slike strujanja. S druge strane, ako je udaljenost prvog čvora od nepropusne stijenke premala i on se nalazi u viskoznom podsloju, rezultati će također biti pogrešni. Iskustva pokazuju da vrijednost bezdimenzijske udaljenosti prvog čvora od stijenke  $y^+$  u rasponu od 30 do 300 daje dobre rezultate, s tim da je cilj doći što bliže vrijednosti 30. Stoga je jako bitno paziti na položaj prvog čvora do nepropusne stijenke u postupku kreiranja geometrijske mreže.

Smično naprezanje na stijenci se računa prema izrazu:

$$\tau = \rho u_\tau^2 = \rho u_\tau^2 \frac{u^+}{u^+} = \rho \frac{u_\tau}{u^+} \bar{u} = \frac{\rho \kappa C_\mu^{\frac{1}{4}} \sqrt{k}}{\ln(Ey^+)} \bar{u}, \quad (36)$$

gdje se veličine  $\bar{u}$ ,  $\bar{k}$  i  $y^+$  odnose na prvi čvor do stijenke, a  $E$  je konstanta integracije koja se javlja u izrazu za  $u^+$ .

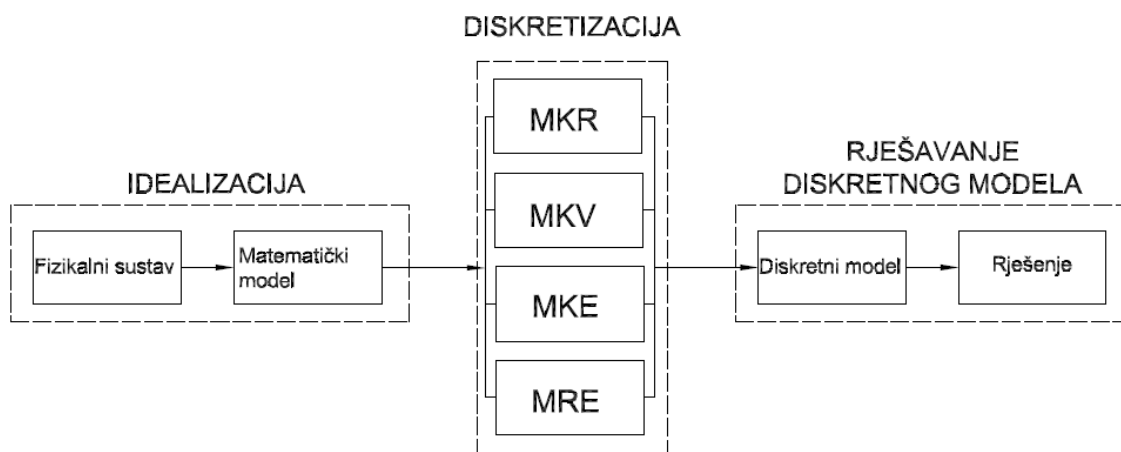
### 2.3. Numerički pristup rješavanju fizikalnih problema

Numerički pristup je jedan od tri temeljna pristupa rješavanju inženjerskih problema, uz analitički i esperimentalni.

Numeričkim metodama dobivaju se približna rješenja diferencijalnih jednadžbi kojima se opisuje zadani model. Odstupanja numeričkog rješenja od egzaktnog su, pod uvjetom pravilnog modeliranja i proračunavanja problema, dovoljno mala za upotrebu u inženjerskoj praksi. Preduvjet za postizanje pouzdanog numeričkog rješenja je točna formulacija numeričke metode i matematičkog modela. Prednost ovog načina rješavanja problema, uz relativno nisku cijenu potrebnih sredstava, je činjenica da se jednostavno i brzo može provesti promjena odgovarajućih parametra u numeričkim simulacijama, što omogućuje lakše i brže postizanje optimalnog rješenja.

Postupak rješavanja inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda sastoji se od tri faze

- idealizacija ili matematičko modeliranje
- diskretizacija matematičkog modela
- rješavanje sustava diskretiziranih jednadžbi



Slika 2. Rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda

#### 2.3.1. Idealizacija ili matematičko modeliranje

---

Idealizacija predstavlja opisivanje fizikalnog sustava pomoću određenog matematičkog modela. Cilj izrade matematičkog modela je što vjerniji opis problema uz što jednostavniji matematički zapis. Matematički model daje odnos između svih prisutnih fizikalnih veličina.

Često je nemoguće izraditi apsolutno točan matematički model, pa se tako pristupa određenim aproksimacijama i zanemarivanju određenih parametara. Najčešća pretpostavka koja se koristi pri opisivanju strujanja fluida je da je fluid kontinuum, zamišljena tvar koja bi sadržavala svojstva i za infinitezimalno mali volumen. Također se pretpostavlja homogenost (jednakost fizikalnih svojstava u svim točkama fluida) i izotropnost (jednakost fizikalnih svojstava u svim smjerovima) fluida.

### **2.3.2. Diskretizacija matematičkog modela**

Diskretizacija je postupak kojim se kontinuirani sustav zamjenjuje diskretnim sustavom koji je opisan s konačnim brojem nepoznatih varijabli. Razlikuju se diskretizacija područja, diskretizacija vremena i diskretizacija jednadžbi.

Diskretizacija područja predstavlja podjelu područja na konačni broj segmenata, diskretizacija vremena je podjela vremenskog kontinuuma na određeni broj vremenskih koraka dok je diskretizacija jednadžbi aproksimacija diferencijalnih jednadžbi sustavom algebarskih jednadžbi.

Neke od diskretizacijskih metoda su:

- Metoda konačnih razlika (MKR) – temelji se na diskretizaciji razmatranog područja pomoću točaka (čvorova) koje čine mrežu konačnih razlika
- Metoda konačnih volumena (MKV) – dijeli razmatrano područje pomoću konačnih ili kontrolnih volumena
- Metoda konačnih elemenata (MKE) – dijeli razmatrano područje na manje dijelove koje nazivamo konačnim elementima
- Metoda rubnih elemenata (MRE) – temelji se samo na diskretizaciji ruba promatranog područja

U današnje vrijeme, rješavanje diskretiziranog modela se odvija uporabom specijaliziranih programskih paketa.

## 2.4. Metoda konačnih volumena

U programskim paketima za rješavanje problema računalne dinamike fluida metoda konačnih volumena predstavlja uobičajen pristup jer ima povoljnu upotrebu memorije i brzinu rješavanja, pogotovo kod većih problema, te turbulentnih strujanja s visokim Reynoldsovim brojem.

Metoda konačnih volumena je diskretizacijska metoda koja se koristi za predstavljanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u algebarskom obliku. Domena strujanja, tj. ukupni volumen proračuna dijeli se na veliki broj konačnih volumena, u kojima se računaju vrijednosti polja fizikalnih veličina. Konačni volumeni moraju u potpunosti ispunjavati kontrolni volumen, i ne smiju se preklapati. Zakoni očuvanja ostaju zadovoljeni za svaki konačan volumen. Pri proučavanju nestacionarnih problema, gdje rješenje ovisi i o vremenu, proračun se dijeli u određen broj vremenskih intervala tj. vremenskih koraka.

Opća jednadžba zakona očuvanja fizikalnog svojstva  $\varphi$  glasi:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = S_\varphi \quad (37)$$

gdje je s lijeve strane jednakosti:

- prvi član – označava lokalnu promjenu fizikalnog svojstva,
- drugi član – označava konvektivni prijenos fizikalnog svojstva,
- treći član - označava prijenos fizikalnog svojstva putem difuzije.

Drugi i treći član zajedno označavaju vektor fluksa, tj. ukupni protok fizikalnog svojstva. Član  $S_\varphi$  s desne strane označava izvorski član fizikalnog svojstva. Ako gornju jednadžbu integriramo po konačnom volumenu, dobivamo:

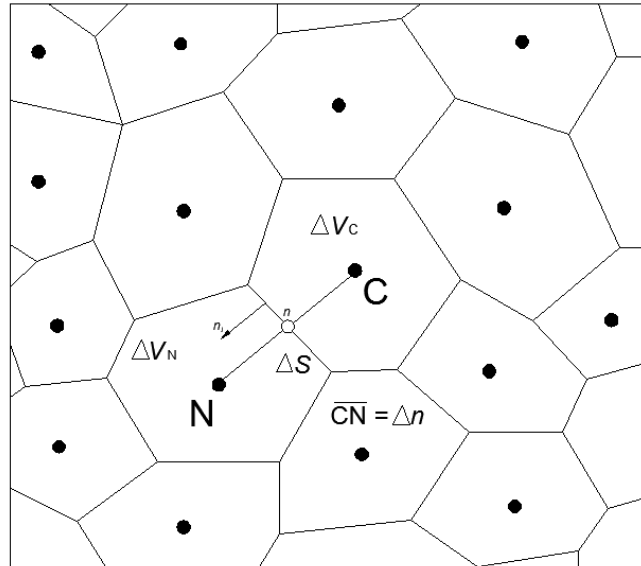
$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho\varphi dV = - \int_{\Sigma\Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV, \quad (37)$$

gdje

- prvi član označava brzinu promjene sadržaja nekog fizikalnog svojstva  $\varphi$  u konačnom volumenu,
- drugi član zbroj konvektivnog i difuzijskog protoke sadržaja fizikalnog svojstva  $\varphi$  kroz granice volumena
- treći član izvor fizikalnog svojstva.



U jednadžbi (37) je protok fizikalnog svojstva definiran kao pozitivan kad se odnosi od konačnog volumena prema okolini, pa je jasno da će se uslijed takvog protoka, zbog minusa ispred integrala, sadržaj fizikalnog svojstva u konačnom volumenu smanjivati. Gornja jednadžba mora biti zadovoljena za svaki konačni volumen, što metodi konačnih volumena daje bitno svojstvo konzervativnosti.



Slika 3. Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena

Lokalna konzervativnost numeričkih flukseva znači da je numerički fluks fizikalnog svojstva konzervativan od jednog diskretiziranog volumena do njegovih susjeda. Ovo svojstvo čini metodu konačnih volumena posebno kompatibilnom s problemima u kojima je od velike važnosti vektor fluksa, kao što su mehanika fluida, ili prijenos topline i tvari. Vrijednosti fizikalnih veličina se izračunavaju u položajima čvorova geometrijske mreže, koji se najčešće nalaze u sredini konačnog volumena.

Zbroj dvaju članova protoka fizikalnog svojstva čini ukupni vektor toka  $J_j$ , pa pišemo:

$$\begin{aligned}
 J_j \cdot n_j &= \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \int_{\Delta S} \left( \rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \\
 &= \left[ \rho \left( \overline{v_n \varphi} \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_n \right] \Delta S.
 \end{aligned} \tag{38}$$

U gornjoj jednadžbi u obzir su uzete samo normalne komponentne vektora protoka, budući da samo one i doprinose protoku fizikalnog svojstva. Također je provedeno

osrednjavanje vrijednosti difuzijskog i konveksijskog protoka po površini  $\Delta S$ . Ako uvedemo bezdimenzijsku koordinatu  $n = n/\Delta n$ , gdje  $\Delta n$  označava udaljenost između čvorova konačnih volumena, te aproksimiramo vrijednost umnoška konvektivnog prijenosa umnoškom srednjih vrijednosti, dolazimo do relacije:

$$J_j n_j = \left( \rho \bar{v}_n \Delta S \right)_n \bar{\varphi}_n - \Gamma \frac{\Delta S}{\Delta n} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \Big|_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_n, \quad (39)$$

gdje je  $F_n$  maseni protok, odnosno jačina konvekcije kroz stranicu konačnog volumena  $\Delta S$ , a  $D_n$  označava jačinu difuzije. Omjer ovih dvaju veličina se naziva Pecletovim brojem. Dakle, Pecletov broj daje informaciju o odnosu inteziteta prijenosa fizikalne veličine konvekcijom i difuzijom. Jasno je da se smanjenjem volumena smanjuje i  $\Delta n$ , čime se smanjuje i lokalni Pecletov broj, što znači da difuzijski transport postaje utjecajniiji. U gornjim jednadžbama koriste se izrazi za srednju vrijednost fizikalne veličine na površini  $\Delta S$ , dok se u samom numeričkom postupku računaju vrijednosti fizikalne veličine u čvorovima volumena. Da bi se pomoću vrijednosti u čvorovima volumena aproksimirale vrijednosti na stranicama, koriste se sheme diferencije ili numeričke sheme.

Koristeći neku od shema diferencije, aproksimiramo vrijednosti  $\bar{\varphi}_n$  i  $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \Big|_n$ , pa se izraz može prikazati kao:

$$J_j n_j = F_n \bar{\varphi}_n - D_n \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \Big|_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N) \quad (40)$$

gdje su  $\varphi_C$  i  $\varphi_N$  vrijednosti fizikalne veličine u čvorovima C i N, a  $a_N$  je koeficijent koji ovisi o shemi diferencije koja se koristi. Ako ovako definirani vektor fluksa uvrstimo u jednadžbu očuvanja za konačni volumen s aproksimiranim vrijednostima površinskih i volumnih integrala, dobiva se sljedeća relacija:

$$\rho \Delta V_C \frac{d\varphi_C}{dt} = -a_C \varphi_C + \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N \varphi_N]^{nb} + S_C \Delta V_C, \quad (41)$$

gdje je centralni koeficijent suma aproksimirajućih koeficijenata:

$$a_C = \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N]^{nb} \quad (42)$$

Način prikazivanja izvorskog člana ovisi o metodi rješavanja diferencijalne jednačbe. Ako se jednačba rješava eksplicitnom metodom, izvorski član ostaje nepromijenjen, a ako se primjenjuje implicitna metoda, izvorski član se linearizira:

$$S_C \Delta V_C = a + b\varphi_C \quad (43)$$

Dakle, diskretizacijom integrala i uvrštavanjem lineariziranog izvorskog člana dobije se linearna algebarska jednačba očuvanja za konačni volumen. Ako se postupak ponovi za cijelo područje proračuna, dobije se sustav linearnih algebarskih jednačbi. Broj jednačbi odgovara broju nepoznanica – vrijednostima fizikalnih veličina u čvorovima konačnih volumena. Taj se sustav jednačbi može matematički zapisati u obliku:

$$[A_{ji}][\varphi_i] = [b_j], \quad (44)$$

gdje je

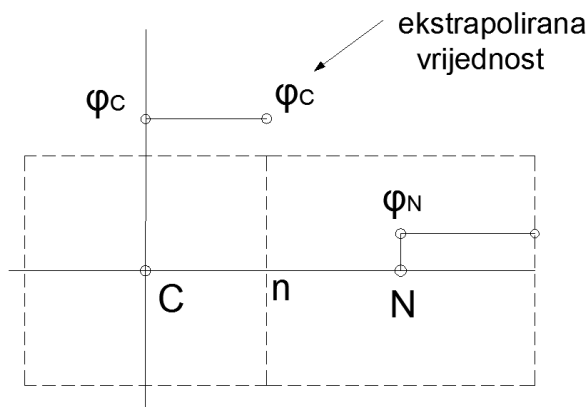
- $[A_{ji}]$  matrica koeficijenata sustava koju čine koeficijenti koji se dobiju korištenjem određene sheme diferencije, pri čemu su koeficijenti  $a_C$  na glavnoj dijagonali
- $[\varphi_i]$  označava vektor nepoznanica, a  $[b_j]$  označava vektor u kojeg ulaze sve poznate veličine.

Polje fizikalne veličine  $\varphi$  također mora zadovoljavati rubne uvjete, koji se ugrađuju u jednačbu s desne strane. Ako je izvorski član nelinearna funkcija od  $\varphi$ , rješavanje jednačbe zahtijevati će iterativni postupak, pa će se sustav linearnih jednačbi za svaki čvor kontrolnog volumena rješavati više puta unutar jednog vremenskog koraka.

Budući da ćemo u proračunu koristiti uzvodne sheme diferencije prvog i drugog reda, malo ćemo ih pobliže objasniti.

#### 2.4.1. Shema prvog reda točnosti

Uzvodna shema prvog reda je najjednostavnija numerička shema. Pretpostavlja se da je vrijednost fizikalne veličine na stranici jednaka vrijednosti u čvoru konačnog volumena uzvodno.



**Slika 4. Numerička shema prvog reda točnosti**

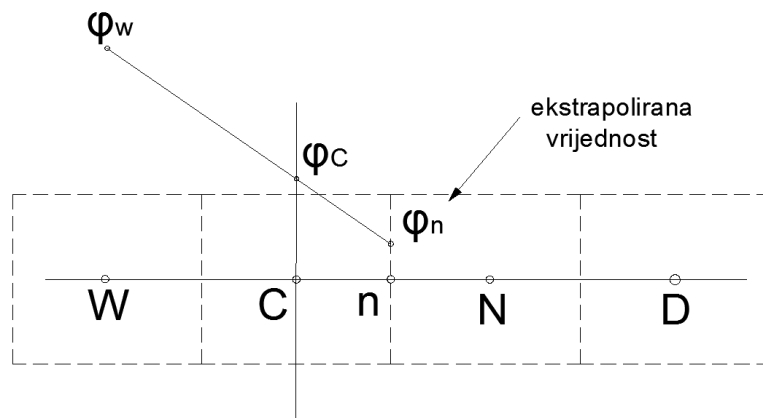
Difuzijski transport je simetričan, pa se za njegovu diskretizaciju koristi shema centralnih razlika, koja daje najbolje rješenje, i glasi:

$$-D \frac{d\varphi}{dn} = -D(\varphi_N - \varphi_C). \quad (45)$$

Dakle, sheme će se razlikovati po modeliranju konvekcijskog transporta. Vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici se u uzvodnoj shemi prvog reda definira kao rješenje eksponencijalne sheme, za vrijednost jačine difuzije  $D = 0$ . Vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici će biti jednaka vrijednosti u uzvodnom čvoru  $\varphi_C$  ako se prijenos fizikalnog svojstva putem konvekcije odvija od čvora C prema čvoru N. Ako se prijenos odvija u suprotnom smjeru, vrijednost fizikalne veličine na stranici biti će jednaka vrijednosti u nizvodnom čvoru  $\varphi_N$ .

Osnovna prednost ove sheme je jednostavnost implementacije i stabilna rješenja, i često je najbolja shema za početak proračuna. Nedostatak je što ova shema unosi lažnu difuziju u rješenje.

#### 2.4.2. Shema drugog reda točnosti



Slika 5. Numerička shema drugog reda točnosti

Vrijednost fizikalne veličine  $\varphi$  na stranici ( $\varphi_n$ ) određuje se linearnom ekstrapolacijom vrijednosti iz dvaju čvorovu uzvodno. Difuzijski se transport definira shemom centralnih razlika, a izraz za konvekcijski transport glasi:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_C + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_C = \varphi_C + \frac{1}{2} (\varphi_C - \varphi_N) \\ \varphi_E + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_E = \varphi_E + \frac{1}{2} (\varphi_E - \varphi_D) \end{cases}, \quad (46)$$

gdje se prvi način odnosi kada se transport odvija od čvora C prema N, tj. kada je  $F$  veći od nule, a drugi način kada se transport odvija od čvora N prema čvoru C, tj. kada je  $F$  manji od nule. Sheme drugog reda u područjima s značajnim gradijentima fizikalnih veličina mogu davati rezultate koji su izvan limita vrijednosti u čvorovima, stoga je potrebno postaviti limitne vrijednosti na vrijednosti fizikalnih veličina na stranicama. Linearno uzvodna shema drugog reda točnosti je popularna numerička shema koja se često koristi zbog zadovoljavajućeg odnosa točnosti i stabilnosti.

## 2.5. Računalna dinamika fluida

Računalna dinamika fluida (eng. Computational fluid dynamics, CFD) je grana mehanike fluida koja proučavanje djelovanja sila na fluid u gibanju, korištenjem numeričkih metoda. Bazira se na Navier–Stokes-ovim nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.

### 2.5.1. Postupak provođenja računalne numeričke simulacije

Numerička simulacija se provodi kroz tri programa:

- preprocessor

- procesor
- postprocesor

Predprocesor je računalni program koji generira geometrijsku mrežu i rubne uvjete proračuna. Jedan od predprocesor programa je 'Gambit'. Pri generiranju mreže treba voditi računa o gustoći mreže, koja s jedne strane mora zadovoljavati računalne resurse, a s druge strane, mora biti dovoljno gusta da bi rezultati bili zadovoljavajući i kako bi se dobro opisale sve promjene polja fizikalnih veličina. Stoga je potrebna gušća diskretizacija u dijelu domene u kojem su veći gradijenti fizikalnih veličina. Budući da ne postoje algoritmi koji automatski generiraju mrežu na temelju geometrije područja i rubnih uvjeta proračuna, na korisniku je da, na temelju iskustva, pretpostavi približnu sliku strujanja i raspodjelu vrijednosti polja fizikalnih veličina, te provede diskretizaciju modela na takav način da zadovolji zahtjeve za točnošću proračuna i istodobno vodi računa o računalnim resursima.

Procesor numerički rješava problem koristeći željeni matematički model, koji može biti fiksno ugrađen u program, kao što je u komercijalnom programu 'Fluent', ili temeljen na objektnom programiranju, gdje korisnik slobodno zadaje matematički model koji će se rješavati. Nakon postavljanja svojstava određenog problema (rubni uvjeti, inicijalizacija početnog rješenja, svojstva materijala, određivanje jednadžbi koje su relevantne), simulacija se vrši kroz određen broj iteracija.

Postprocesor je program koji služi za vizualizaciju rezultata proračuna, prikaz skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja, integriranih veličina, te dijagramskog prikaza željenih veličina. Primjer takvog programa je 'Techplot'.

### **2.5.2. Prednosti i mane numeričkih simulacija**

Glavna prednost numeričkih simulacija je skraćivanje vremena projektiranja ili razvoja novog proizvoda. Nakon generiranja geometrijske mreže modela, jednostavno se i brzo promjenom parametara sustava dobiva uvid u utjecaj pojedinog parametra na rezultate. Prednost je i količina informacija koju nam pruža numerički rješavač, dobiva se kompletna slika strujanja te gradijenti fizikalnih veličina u čitavoj domeni proračuna (polje brzine, temperature, tlaka itd.). Uzimajući u obzir dobivene rezultate, i uspoređujući ih s željenim rezultatima, moguće je mijenjati geometriju, ponovno vršiti proračun, nove rezultate upoređivati sa starima, te tako brzo razvijati novi proizvod bez potrebe za izradom fizičkog modela za svaki prototip.

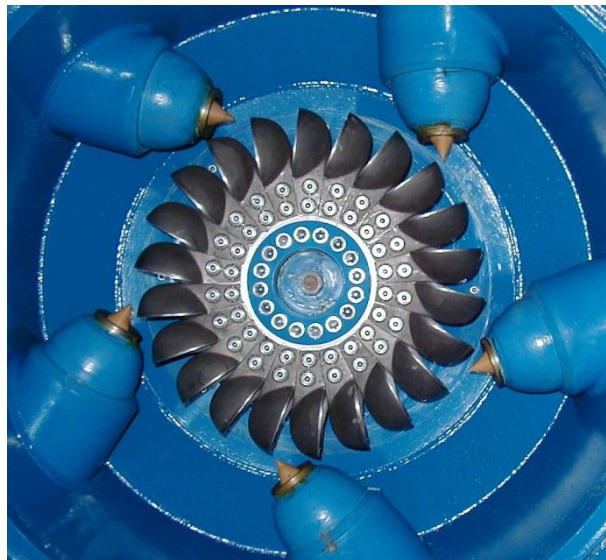
Primarni nedostatak računalnih simulacija je njegova ograničenost na probleme za koje postoji pouzdan matematički model, što ograničava modeliranje turbulentnog strujanja.

### 3. KONSTRUIRANJE ROTORA TURBINE

#### 3.1. Općenito o turbinama

Turbine su rotacijski uređaji svrha kojih je pretvaranje energije toka fluida u mehaničku energiju za daljnje iskorištavanje. S obzirom na način iskorištavanja energije fluida turbine se općenito dijele u dvije kategorije:

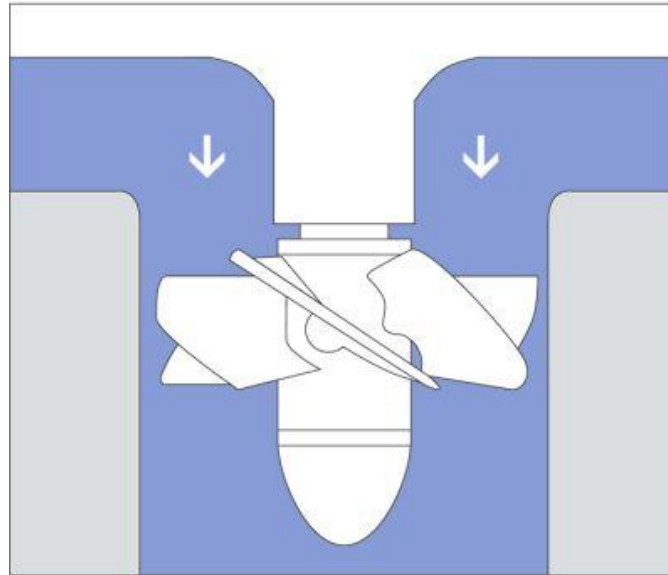
- Impulsne turbine – koriste energiju mlaza fluida koji udara u lopatice i tako ih pogoni. Glavna karakteristika ovih turbina je da nema pada tlaka fluida u radnom kolu. Usmjereni mlaz fluida se postiže uz pomoć mlaznica. Primjeri ovakvih turbina su Pelton i de Lavale turbine.



**Slika 6: Pelton turbina sa mlaznicama i rotorom**

- Reakcijske turbine- preuzimaju energiju iz fluida reagirajući na pritisak ili inerciju fluida na lopatice rotora po principu akcije i reakcije. Da bi reakcijske turbine mogle operirati, čitavo područje rotora mora biti uronjeno u fluid, inače dolazi do velikih gubitaka. Zbog toga su rotori propelerne turbine smješteni u cijevima. Energija uslijed raspoloživog visinskog pada se kroz cijevi dovodi do rotora gdje se posredstvom turbine pretvara u rotacijsku mehaničku energiju za pogon generatora. S obzirom na smjer toka fluida ove se turbine dijele na radijalne, radijalno-aksijalne i aksijalne. Među aksijalne turbine, dakle one u kojima je generalni tok fluida paralelan s osi rotacije, spadaju i propelerne turbine, najpoznatija od kojih je Kaplan turbina. Propelerne turbine takav naziv imaju jer je oblik rotora sličan obliku

brodskog propelera. Propelerna turbina i propeler su u principu oboje uređaji za prijenos energije između fluida i rotirajućeg vratila, samo što su podešeni za suprotne smjerove prijenosa energije.



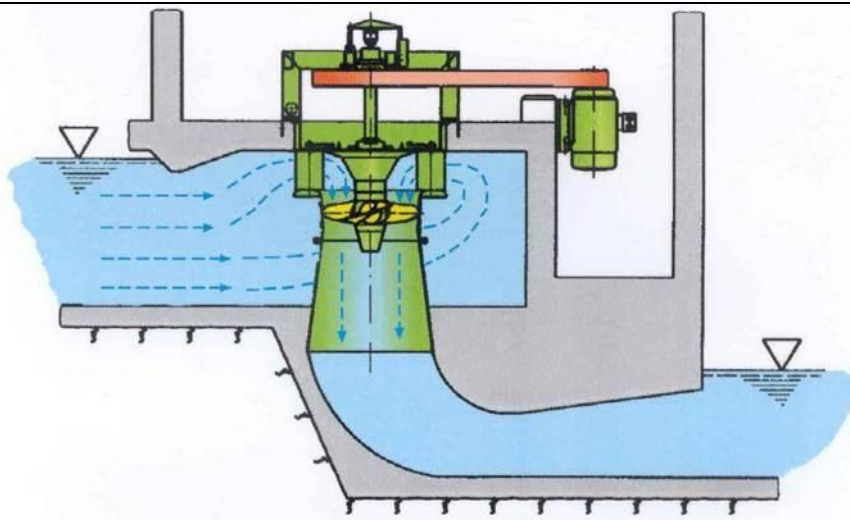
**Slika 7: Princip rada propelerne turbine**

### 3.2. Kaplan turbina

Kaplan turbina je propelerna turbina sa lopaticama podesivog nagiba. Dizajnirao ju je 1913 g. Viktor Kaplan, koji je modificirao postojeće propelerne turbine kako bi postigao što veću iskoristivost energije vode u velikom rasponu dostupnih protoka i visina pada. U današnje vrijeme Kaplan turbine se koriste u velikom rasponu snaga i veličina, ali svima je zajedničko da koriste tokove sa karakteristično velikim protocima i malim visinama pada. Sa stajališta iskoristivosti Kaplan turbine su u samom vrhu sa tipičnom razinom iskoristivosti od preko 90%, te ih to čini posebno atraktivnima za korištenje.

Visoka iskoristivost postiže se pravilnom kombinacijom zakreta statorskih i rotorskih lopatica i optimiziranjem samog oblika lopatica.



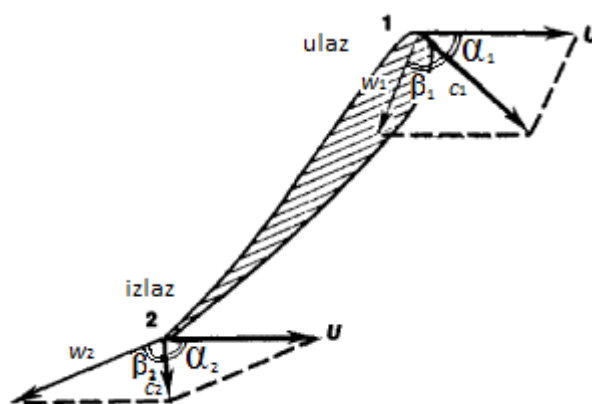


Slika 8: Kaplan turbina sa slikom toka vode, te statorskim i rotorskim lopaticama

### 3.3. Tok fluida kroz rotor Kaplan turbine

Voda u svom toku od ulaza do izlaza Kaplan turbine putuje prvo kroz dovod preko statora i statorskih lopatica prema rotoru i rotorskim lopaticama, te zatim prema izlazu.

Pošto su, kako je već prethodno napomenuto, statorske lopatice Kaplan turbine zakrenute pod određenim kutem, voda nastrojava na rotorske lopatice u obliku prostorne spirale sa konstantnim radijusom, pod određenim kutem u odnosu na vertikalu. Taj tok je apsolutni tok i njemu odgovara apsolutna brzina nastrojavanja fluida  $c_1$  sa smjerom određenim kutom  $\beta_1$  u odnosu na obodni smjer. Lopatica turbine se, međutim, vrti s kutnom brzinom  $n$ , zbog čega ona ima obodnu brzinu  $u$ , pa fluid na nju u stvarnosti ne nastrojava s apsolutnom brzinom, nego s relativnom brzinom  $w_1$ , koja se dobije vektorskim oduzimanjem obodne brzine  $u$  od apsolutne brzine  $c_1$ . Time se dobije ulazni trokut brzina.



Slika 9: Ulazni i izlazni trokuti brzina na cilindričnom presjeku jedne od lopatica

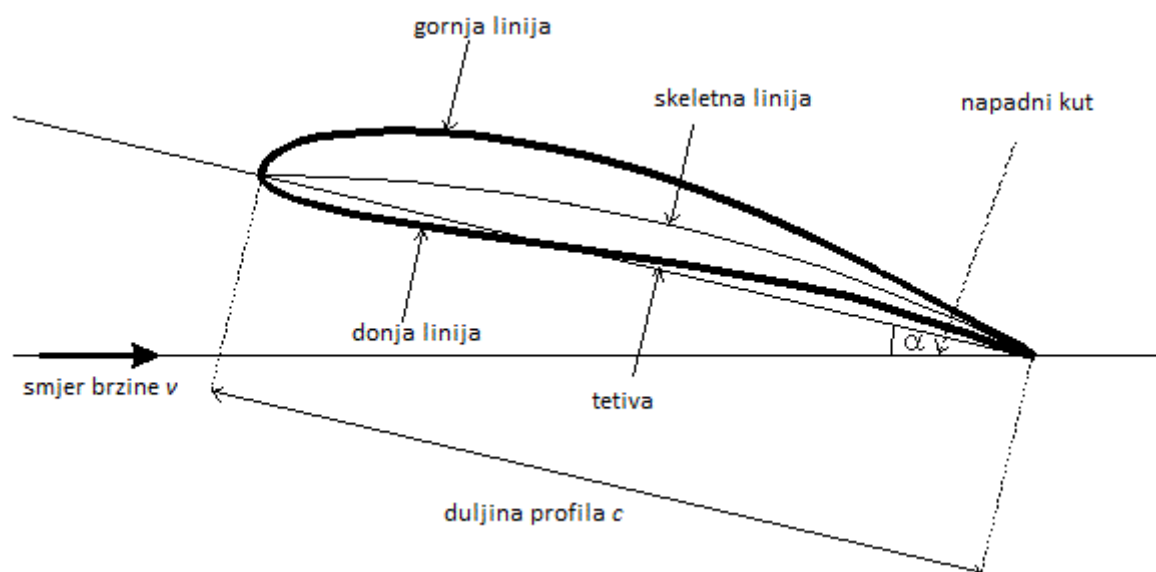
Za izlazni trokut brzina idealno bi bilo da apsolutna brzina  $c_2$  ima smjer što bliže vertikalnom, pošto horizontalna komponenta te brzine označava neiskorištenost dijela energije toka fluida kroz rotor. Nadalje, što se tiče izbora profila lopatice, iz slike trokuta brzina je očito da će za dani tok strujanja fluida biti potrebno odabrati aeroprofil kojemu je skeletna linija takva da odgovara svojim nagibom ulaznim i izlaznim brzinama  $w_1$  i  $w_2$ .

### 3.4. Aeroprofil

Aeroprofil označavaju oblik poprečnog presjeka avionskog krila, ili u našem slučaju, lopatice turbine. Svrha pravilnog određivanja poprečnog presjeka je u maksimalnom iskorištavanju energije toka fluida uz minimalne gubitke. Iako je do potrebe za modeliranjem aeroprofila prvenstveno došlo zbog razvoja zrakoplova početkom 20-og stoljeća, teorije razvijene u svrhu optimiziranja oblika krila su također primjenjive i na oblik lopatica turbina.

Za odabir aeroprofila potrebno je poznavati nekoliko bitnih izraza:

- Skeletna linija- označava središnju liniju aeroprofila, skup svih točaka sa jednakom udaljenošću od gornjeg i donjeg ruba profila.
- Zadebljanje- dodaje se ili oduzima od koordinata skeletne linije kako bi se dobili gornji i donji brid aeroprofila.
- Tetiva- linija koja spaja prednji i stražnji kraj aeroprofila. U odnosu na nju se računa napadni kut fluida.
- Duljina aeroprofila-  $c$



Slika 10: Dimenzije aeroprofila

Od mnogih vrsta aeroprofila, najpoznatiji i najdefiniraniji su NACA aeroprofil. Od svih vrsta NACA aeroprofila najjednostavniji za definiranje su četveroznamenkasti NACA aeroprofil. Takvi profili potpuno su definirani izrazom NACA mp<sub>xx</sub>, gdje je:

- m- maksimalna visina skeletne linije definirana kao postotak duljine aeroprofila.
- p-udaljenost točke maksimalne visine skeletne linije od vrha aeroprofila u desetcima postotka. Dakle, p=4 označava da se maksimalna visina skeletne linije nalazi na 40% duljine aeroprofila, gledano od prednjeg prema stražnjem kraju.
- xx- označavaju maksimalnu veličinu zadebljanja u postocima duljine aeroprofila.

Na temelju ovih podataka se dobiju dvije formule koje definiraju skeletnu liniju aeroprofila i jedna koja definira zadebljanje. Od tih triju formula se zatim izvode konačne koordinate točaka na bridovima aeroprofila.

Za potrebe ovog rada korištena je jednostavna skripta za automatizirano izračunavanje koordinata aeroprofila pisana u programskom jeziku 'Matlab'. Također, skripta izračunava i razliku ulaznog i izlaznog kuta aeroprofila jer nam ona, kako je prethodno objašnjeno, mora biti ista kao i razlika kuta nagiba ulaznih i izlaznih relativnih brzina  $w_1$  i  $w_2$ .

### 3.5. Proračun geometrije rotorskih lopatica

#### 3.5.1. Podjela na parcijalne turbine

Ulazni podatci za proračun rotora turbine su:

- dostupna visina pada-  $H=2.5$  m
- maksimalni protok kroz turbinu  $Q=200$  L/s= $0.2$  m<sup>3</sup>/s
- broj okretaja turbine  $n=500$  min<sup>-1</sup>

U proračunu rotora prvo se moraju definirati dimenzije vanjskog i unutarnjeg promjera turbine da bi se na temelju njih odredile veličina i oblik lopatica. Iznos vanjskog promjera se prvi računa i to po iskustvenoj formuli:

$$D = 5,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{Q_{\text{norm}}}{n}} \quad (48)$$

Gdje je  $Q_{\text{norm}}$  optimalni protok vode kroz turbinu, a računa se iz maksimalnog protoka:

$$Q_{\text{norm}} = 0,85 \cdot Q = 0,17 \text{ m}^3/\text{s} \quad (49)$$

Vrijednost vanjskog promjera je iz toga:

$$D = 0,4 \text{ m} \quad (50)$$

Za unutarnji promjer se po iskustvu uzima vijednost:

$$d = (0,3 - 0,5) \cdot D \text{ m} \quad (51)$$

U ovom slučaju za vrijednost unutarnjeg promjera će se uzeti:

$$d = 0,5 \cdot D = 0,2 \text{ m} \quad (52)$$

Nadalje, potrebno je definirati aksijalnu brzinu strujanja fluida kroz dobivenu cijev, koja se dobije iz jednadžbe kontinuiteta cijevi:

$$c_a = \frac{4 \cdot Q_{\text{norm}}}{\Pi \cdot (D^2 - d^2)} = 1,8 \text{ m/s} \quad (53)$$

Za potrebe ovog proračuna ne uzima se u obzir pojava promjene brzine strujanja po presjeku cijevi, nego se pretpostavlja kontinuirani profil brzine.

Nakon što je definirana veličina vanjskog i unutarnjeg promjera i aksijalne brzine strujanja potrebno je odrediti sliku strujanja u turbini. To će se u slučaju ovog proračuna provoditi u pet presjeka koji se dobiju podjelom turbine na tri parcijalne turbine. Prostor u cijevi kroz koji protiče voda u blizini rotora je prizma sa bazom u obliku kružnog vijenca definiranog promjerima  $d$  i  $D$ . Taj prostor se sada dijeli na tri koncentrično postavljene prizme istog oblika po kriteriju da kroz svaku od njih prolazi isti protok. Cilindrični presjeci u kojima promatramo strujanje će biti postavljeni na polovici svake od tih parcijalnih turbina, gledano po radijusu. Time se dobiju, uz dva već postojeća presjeka (presjek na glavini turbine i vanjski presjek), još tri presjeka te posljedično slike strujanja unutar cijevi.

Definirajmo jednadžbu kontinuiteta za svaku od tih triju parcijalnih turbina:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c_a \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot (D_1^2 - d^2) \\ \Delta Q &= c_a \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot (D_2^2 - D_1^2) \\ \Delta Q &= c_a \cdot \frac{\Pi}{4} \cdot (D^2 - D_2^2) \end{aligned} \quad (54)$$

Ovdje su  $D_1$  i  $D_2$  vrijednosti promjera na granicama između parcijalnih turbina, a

$\Delta Q = \frac{Q}{3}$  protok kroz svaku od njih.

Rješavanjem gornjeg sustava jednažbi dobiju se vrijednosti:

$$D_1 = 0,283 \text{ m}$$

$$D_2 = 0,346 \text{ m}$$

Kako je prethodno napomenuto, strujanje se ne računa u tim presjecima, nego u tri presjeka u središtu parcijalnih turbina, pa je njihove promjere potrebno izračunati:

$$D_I = \frac{d + D_1}{2} = 0,2415 \text{ m}$$

$$D_{II} = \frac{D_2 + D_1}{2} = 0,3145 \text{ m} \quad (55)$$

$$D_{III} = \frac{D + D_2}{2} = 0,373 \text{ m}$$

### 3.5.2. Određivanje slike strujanja

Da bi se dobila slika strujanja fluida u zadanim presjecima potrebno je prvo izračunati obodnu brzinu  $u$  u svakom od tih presjeka. Formula za izračunavanje obodne brzine poznata je iz mehanike i glasi:

$$u_i = \frac{D_i \cdot \Pi \cdot n}{60} \quad (56)$$

Gdje je  $i = \{g, I, II, III, v\}$  indeks koji označava presjeke u kojima se računa slika strujanja. Nakon izračunavanja obodnih brzina, za dobivanje potpune slike strujanja na ulazu u lopaticu potrebno je još izračunati apsolutnu brzinu kojom fluid nastrojava na lopaticu turbine. Komponentu te brzine u aksijalnom smjeru već imamo -  $c_a$ . Potrebno je još samo izračunati obodnu komponentu koja čini putanju fluida spiralom po obodu valjka. Ona se dobije iz glavne jednažbe turbine. Izvod glavne jednažbe je zbog svoje duljine i opširnosti nesuvislo uvoditi u ovaj rad, ali je bitno naglasiti smisao te jednažbe. Glavna jednažba turbine izražava količinu energije koju fluid preda rotoru turbine, a izvodi se iz energetske bilance toka vode kroz turbinu u koju se zatim uvrštavaju vrijednosti pojedinih gubitaka (izlaznih, gubitaka u cijevi itd.). U konačnici, nakon uvrštavanja svih parametara, ta se jednažba svodi na oblik:

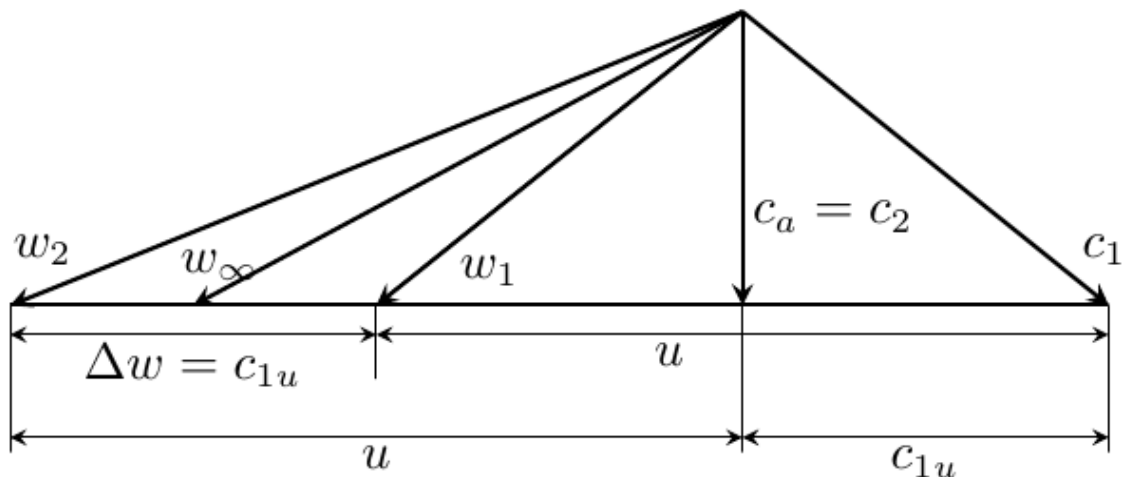
$$c_{lu,i} = \frac{\eta_h \cdot g \cdot H}{u_i} \quad (47)$$

Ovdje indeks  $1u,i$  označava da se radi o brzini na ulazu u lopaticu (točka 1 na slici 9.) u smjeru obodne brzine  $u$ , na presjeku  $i$ .  $H$  označava veličinu raspoloživog pada,  $g$  veličinu gravitacijskog ubrzanja, a  $\eta_h$  iskorištenost energije toka vode za pokretanje rotora. U ovom slučaju za tu vrijednosti uzimamo  $\eta_h=0,9$ , iako ona može biti i veća pravilnim projektiranjem toka vode.

Iznos apsolutne brzine u presjeku 1 je, dakle:

$$c_{1i} = \sqrt{c_a^2 + c_{1u,i}^2} \quad (58)$$

Za lakše izračunavanje ostalih vrijednosti brzina potrebno se osvrnuti na sliku trokuta brzina:



**Slika 11: Ulazni i izlazni trokuti brzina**

Kao što je prethodno rečeno, relativna brzina nastujavanja fluida na lopaticu  $w_1$  dobije se vektorskim oduzimanjem obodne brzine  $u$  od apsolutne brzine  $c_1$ . Međutim, rastavimo li vektor  $c_1$  na komponente, možemo brzinu  $w_1$  prikazati kao vektorski zbroj  $c_a$  i razlike brzina  $u-c_{1u}$ :

$$w_1 = \sqrt{c_a^2 + (u - c_{1u})^2} \quad (59)$$

Za brzine u točki 2, dakle na izlazu iz lopatice, je iz prethodnog razmatranja poznato da je apsolutna brzina fluida pri izlazu iz lopatice jednaka  $c_a$  u idealnom slučaju, a relativna brzina istrujavanja jednaka je vektorskom zbroju te brzine i obodne brzine  $u$ :

$$w_2 = \sqrt{c_a^2 + u^2} \quad (60)$$

Za modeliranje lopatice nisu bitni iznosi brzina  $w_1$  i  $w_2$  već samo njihovi napadni kutevi. Međutim, za svrhe računalnog simuliranja toka fluida u turbini potrebna je i vrijednost ulazne brzine  $w_1$ . Osim toga, izračunava se i vrijednost brzine  $w_\infty$ . Ona se promatra kao osrednja brzina nastrujavanja fluida na aeroprofil, gledano s obzirom na smjer i iznos, a nju će se koristiti za simuliranje promjene aerodinamičkih koeficijenata uzgona i otpora odabranih profila s obzirom na veličinu napadnog kuta. Iznos brzine  $w_\infty$  je, dakle:

$$w_\infty = \sqrt{c_a^2 + \left(u - \frac{\Delta w}{2}\right)^2} \quad (61)$$

Preostalo je samo još definirati formule za tražene kuteve  $\beta_1$  i  $\beta_2$ :

$$\beta_1 = \arctg\left(\frac{c_a}{u - c_{1u}}\right) \quad (62)$$

$$\beta_2 = \arctg\left(\frac{c_a}{u}\right) \quad (63)$$

Nakon što su sve formule definirane, pripadne vrijednosti su izračunate prema tim formulama i stavljene u tablicu za lakši pregled:

profil	$u$ [m/s]	$c_{1u}$ [m/s]	$c_1$ [m/s]	$w_1$ [m/s]	$w_\infty$ [m/s]	$\beta_1$ [°]	$\beta_2$ [°]	$\beta_1 - \beta_2$ [°]
g	5,24	4,22	4,59	2,07	3,6	60,46	18,96	41,5
I	6,32	3,49	3,92	3,35	4,9	32,46	15,9	16,56
II	8,23	2,68	3,23	5,84	7,1	17,97	12,34	5,63
III	9,77	2,26	2,89	7,72	8,8	13,48	10,44	3,04
v	10,47	2,11	2,77	8,55	9,6	12,15	9,75	2,4

**Tablica 1: Vrijednosti fizikalnih veličina na lopatici**

### 3.5.3. Odabir aeroprofila

Da bi profili lopatice turbine bili potpuno određeni u danim presjecima potrebno je definirati veličine za NACA aeroprofile te duljinu profila  $c$ . Pošto se zadebljanje, maksimum i položaj maksimuma u skeletnoj liniji definiraju relativno spram duljine profila, očito je potrebno nju definirati prvu.

Duljina profila lopatice definira se s obzirom na broj lopatica i traženi preklop. Broj lopatica u turbini  $z$  se obično uzima u rasponu vrijednosti 3-6, a u ovom slučaju odabrano je

$z=4$ . Lopatice moraju biti tako postavljene u turbini da između njih nema šupljina, tj. dijelova toka koji su nepokriveni lopaticama, jer bi ti dijelovi značili čisti gubitak. Pošto je odabran broj od četiri lopatice, potrebno je da svaka od njih pokriva jednu četvrtinu površine cijevi. Lopatice su, međutim, postavljene pod kutem u odnosu na horizontalu pa se zbog toga duljina profila lopatice povećava za 20%, kako bi se pokrile šupljine u toku fluida nastale usred zakreta lopatica. Konačna formula za duljinu pojedinačnog profila je dakle:

$$c_i = \frac{D_i \cdot \Pi}{z} \cdot 1,2 \quad (64)$$

Također, bitno je poznavati i udaljenost između lopatica jer je ona potrebna za dvodimenzionalno simuliranje toka kroz turbinu:

$$t_i = \frac{D_i \cdot \Pi}{z} \quad (65)$$

Nakon što su izračunate vrijednosti duljina pojedinačnih profila ostaje samo definirati NACA-ine karakteristike aeroprofila. Pritom treba uzeti u obzir prethodno objašnjenu tvrdnju da skeletna linija mora pratiti tok vode, tj. da razlika ulaznog i izlaznog nagiba profila  $\alpha$  mora biti jednaka razlici kutova  $\beta_1$  i  $\beta_2$ . Osim toga, debljina lopatica mora biti u razumnom rasponu radi same čvrstoće lopatice. U ovom proračunu ne ulazi se u optimiziranje debljine lopatice niti iz perspektive mehanike fluida niti nauke o čvrstoći, već se vrijednosti uzimaju tako da okvirno zadovoljavaju zahtjeve obiju teorija. Da bi zadovoljili zahtjev o podudarnosti kuteva potrebno je iterativno pretpostavljati veličine maksimalne visine skeletne linije  $m$  i udaljenosti te visine od prednjeg ruba  $p$ , sve dok se ne dobije kut skeletne linije koji odgovara traženoj vrijednosti. Ovaj iterativni postupak proveden je uz pomoć prethodno spomenute skripte u Matlab programskom jeziku. Konačno, za pet traženih profila odabrane su sljedeće vrijednosti traženih veličina:

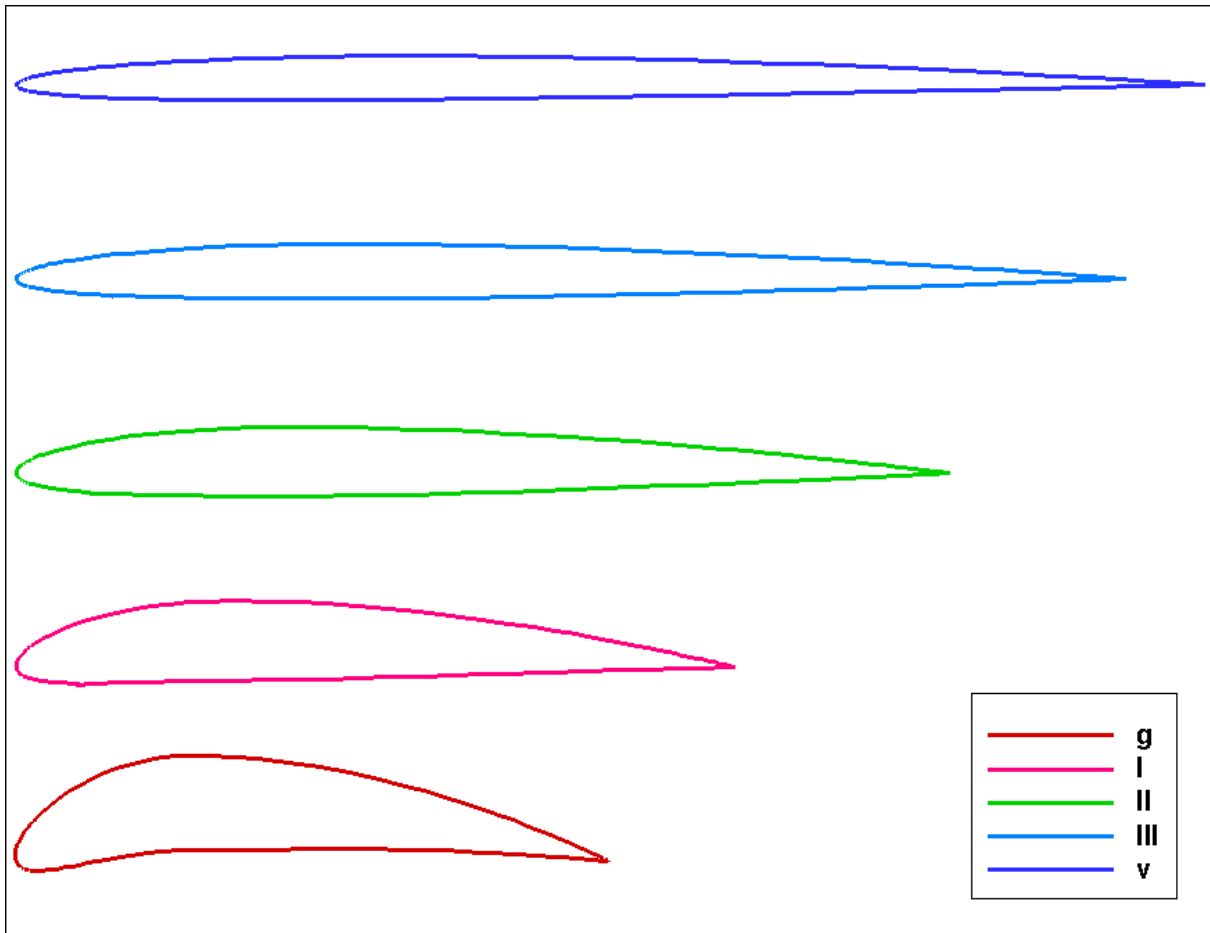
profil	$D_i$ [m]	$c_i$ [m]	$t_i$ [m]	$m$	$p$	$xx$	$\alpha$ [°]
g	0,2	0,188	0,157	8	3	13	40
I	0,2415	0,228	0,19	3	3	09	16,2
II	0,3145	0,296	0,247	1	3	06	5,45
III	0,373	0,352	0,293	0,55	3	04	3
v	0,4	0,377	0,314	0,5	4	03	2,38

**Tablica 2: Vrijednosti veličina za definiciju profila**



Kao što je vidljivo, u presjecima III i v korištene su decimalne vrijednosti veličine maksimalnog nagiba  $m$ , i to iz razloga što se nikakvom kombinacijom cijelih vrijednosti maksimalnog nagiba i njegovog položaja nemogu dobiti tako mali traženi kutovi. Profili III i v, dakle, nisu standardni NACA aeroprofil, ali su računati po istim formulama.

Iz vrijednosti kuta  $\alpha$ , koji je definiran kao razlika ulaznog i izlaznog kuta aeroprofila vidi se jako dobro poklapanje s vrijednostima razlike kutova  $\beta_1$  i  $\beta_2$ .



Slika 12: Odabrani aeroprofil

## 4. RAČUNALNE SIMULACIJE

### 4.1. Ispitivanje aerodinamičkih koeficijenata odabranih aeroprofila

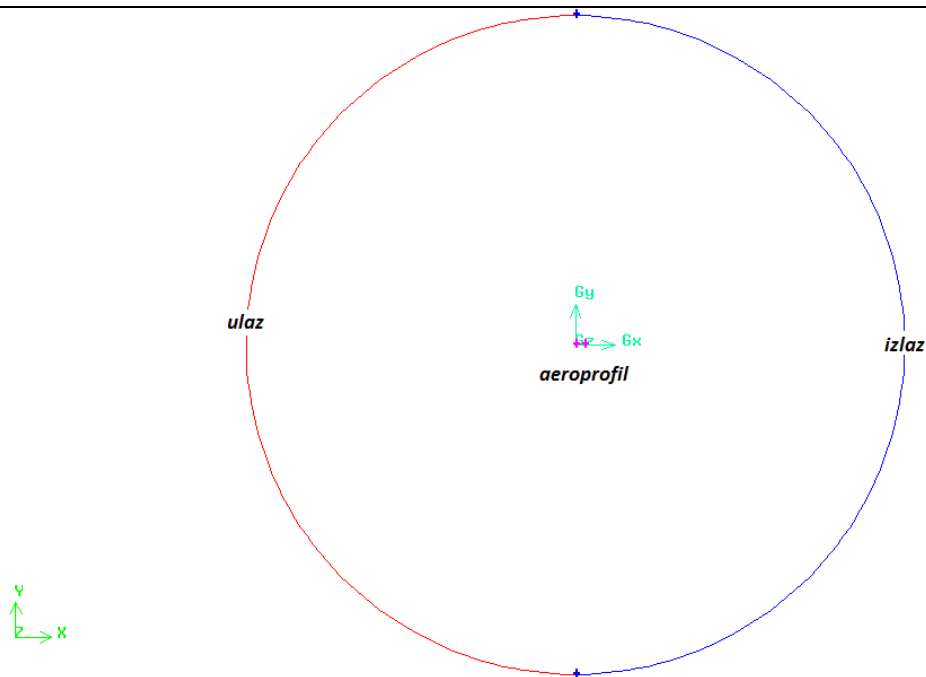
#### 4.1.1. Definiranje domene simulacije

Prvi korak u izvođenju računalnih simulacija je definiranje geometrije proračuna i rubnih u predprocesorskom programu. U ovom slučaju, za definiranje predprocesorskog dijela problema se koristi program Gambit.

Potrebno je napomenuti da su prethodni proračuni oblika lopatica provedeni za koncentrično smještene cilindrične presjeka, dok se simulacije na računalu provode ili za ravninska ili za postorna strujanja. Da bi se strujanje po cilindričnom presjeku svelo na ravninsko strujanje zanemaruju se utjecaji centrifugalnih sila na tok fluida u rotoru, pa se aeroprofil definišu i simuliraju u dvodimenzionalnom proračunu.

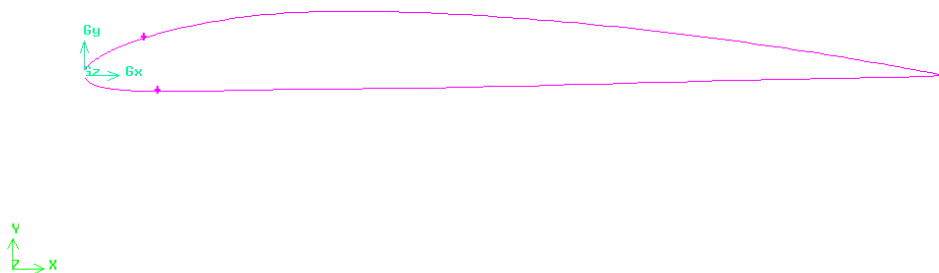
Za provedbu simulacija turbulentnog opstrujavanja aeroprofila potrebno je pravilno definirati geometriju aeroprofila i područja proračunavanja toka fluida-domene. Aerodinamički koeficijenti uzgona i otpora definišu se u teoriji za profile uronjene u beskonačan paralelni tok fluida. Naravno, u terminima konačnih resursa vremena nije moguće simulirati takav tok. Ispitivanja su, međutim, pokazala da utjecaj nekog objekta na tok fluida jako brzo opada udaljavanjem od njega. Ta činjenica omogućava nam definiranje konačnog područja za simuliranje strujanja. Iskustvo je pokazalo da je utjecaj veličine domene proračuna zanemariv ukoliko je ta domena 20 ili više puta veća od dimenzija promatranog tijela, gledano u svim smjerovima.

U slučaju simuliranja toka fluida oko odabranih aeroprofila, uzima se domena u obliku kruga (tzv. O-domena) sa šupljinom u obliku ispitivanog aeroprofila, vrh kojega se poklapa sa centrom kruga. Također, vanjski rub domene potrebno je podijeliti na dva jednaka luka od kojih jedan služi kao ulaz fluida a drugi kao izlaz.



**Slika 13: Domena proračuna**

Oblik aeroprofila definira se pomoću prije spomenute Matlab skripte. Ona pri pokretanju ispisuje položaj točaka na gornjem i donjem rubu aeroprofila u tekstualnu datoteku. Ta tekstualna datoteka se učitava u Gambit te se time dobiva skup točaka koje definiraju aeroprofil. Te se točke zatim povezuju pomoću NURBS krivulja da bi se dobila površina aeroprofila. NURBS krivulje su poznate interpolacijske krivulje koje jako dobro interpoliraju oblik aeroprofila iz zadanih točaka, pod uvjetom da je diskretizacija pri generiranju točaka bila dovoljno fina.



**Slika 14: Aeroprofil definiran u Gambit-u preko tri NURBS krivulje**

---

Dobivene rubove sada je potrebno spojiti u jedinstvenu domenu proračuna. Da bi se to postiglo, potrebno je iz tih rubova definirati dvije površine:

- Kružnu površinu –okruženu sa izlaznim i ulaznim lukovima
- Površinu aeroprofila- okruženu sa tri NURBS krivulje koje definiraju aeroprofil

Površina aeroprofila i kružna površina se očito preklapaju, pa je za dobivanje jedinstvene domene toka fluida također potrebno i oduzeti površinu aeroprofila od kružne površine. To se u Gambit-u provodi uz pomoć boolean-skih operacija na površinama.

O oblik domene je vrlo pogodan za potrebe simuliranja velikog broja simulacija sa različitim napadnim kutevima pod kojima fluid nastrujava na aeroprofil jer se promjena napadnog kuta jednostavno postiže zakretanjem ulaznog i izlaznog luka za željeni kut s obzirom na centar.

#### **4.1.2. Definiranje mreže za simuliranje toka fluida**

Kako je prethodno spomenuto u poglavlju o teorijskim osnovama, za pravilno simuliranje toka fluida potrebno je pravilno diskretiziranje (podjela) područja proračuna u tzv. mrežu. Pri tom vrijede neka generalna pravila:

- U području u kojem se očekuje naglija promjena fizikalnih veličina, npr. u zaustavnoj točki, potrebno je definirati mrežu veće gustoće i pravilnijeg oblika, a u područjima toka fluida sa malim promjenama fizikalnih veličina i nepravilna, rijetka mreža dovoljno dobro aproksimira strujanje.
- Pravilna mreža koja slijedi tok strujanja daje bolje rezultate proračuna od nepravilne mreže. Ovo je pravilo naročito bitno za definiranje mreže koja pokriva granični sloj.
- Pri kreiranju mreže potrebno je paziti da iskrivljenost (eng. „skeweness“) elemenata nije prevelika jer ona značajno utječe na sposobnost elementa da pravilno aproksimira promjenu fizikalnih veličina. Iskrivljenost elemenata izračunava se posebnim algoritmima i vrijednost joj je u rasponu od 0 do 1. Pritom su elementi sa vrijednošću iskrivljenosti iznad 0,8 posebno nepoželjni za simuliranje.

Uzevši prethodna pravila u obzir, mreža za proračunavanje modela će se sastojati od dva dijela:

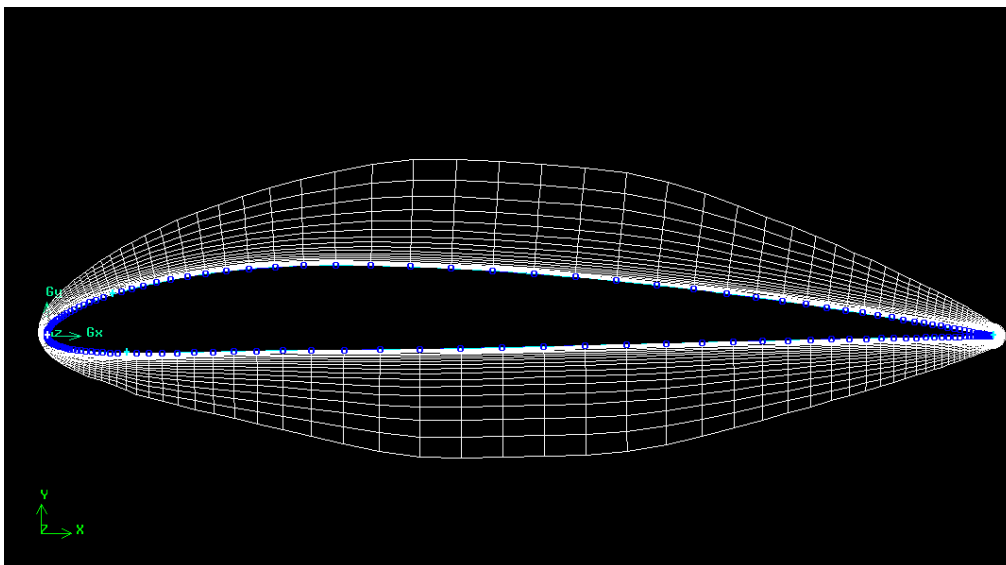
- Granični sloj- pravilna četvrtasta mreža u blizini aeroprofila za aproksimaciju strujanja u graničnom sloju.

- Neporemećeno strujanje- Nepravilna, trokutasta mreža za aproksimaciju strujanja na većoj udaljenosti od aeroprofila

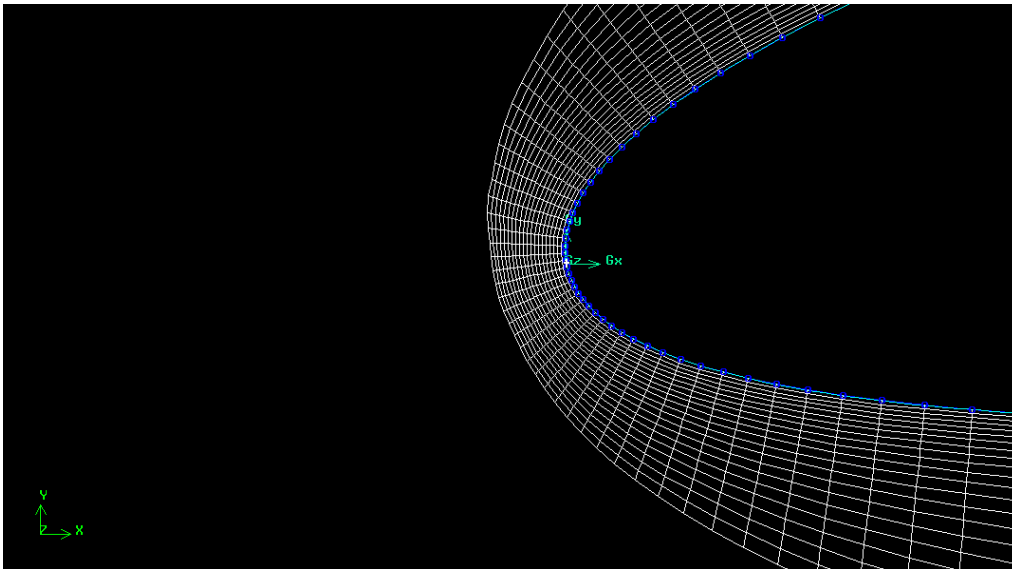
Prvi korak pri definiranju mreže za granični sloj je podjela krivulja koje čine konturu aeroprofila na segmente pomoću opcija za stvaranje bridne mreže u Gambit-u. Pritom treba paziti na dva bitna uvjeta:

- Podjela u području vrha aeroprofila mora biti što finija i pravilnija kako bi se dobro aproksimirale nagle promjene fizikalnih veličina u blizini zaustavne točke
- Podjela u području stražnjeg kraja aeroprofila također mora biti što pravilnija jer se i na kraju aeroprofila događaju značajne promjene u vrijednostima fizikalnih veličina.

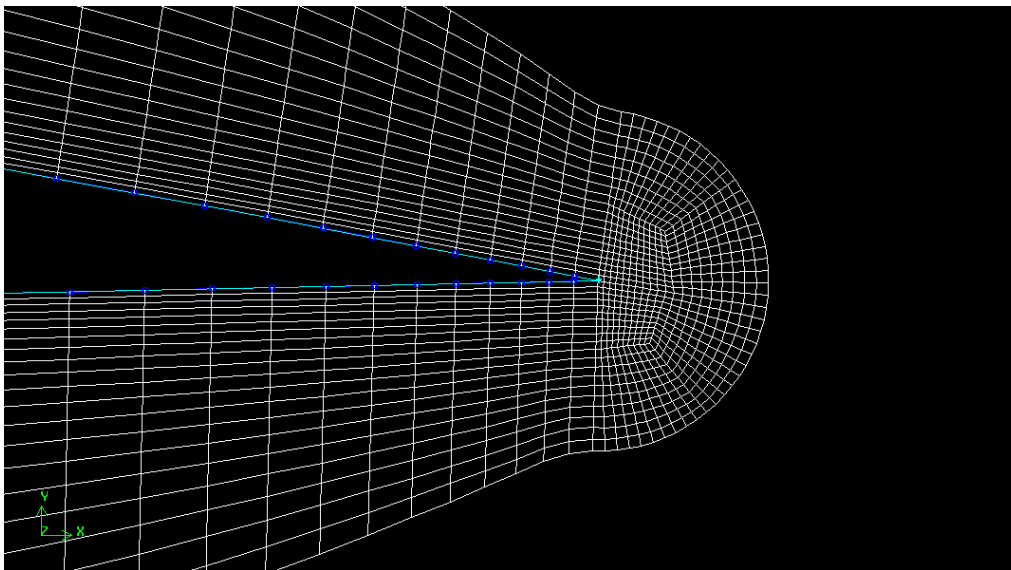
Nakon definiranja podjele rubova aeroprofila na segmente potrebno je na temelju te mreže stvoriti dvodimenzionalnu četvrtastu mrežu u blizini aeroprofila. To se u Gambit-u provodi pomoću specijaliziranog sučelja za stvaranje mreže u području graničnog sloja. Pritom je bitno paziti da visina prve ćelije, one uz sami rub aeroprofila, mora biti dovoljno velika da bi se izbjeglo proračunavanje laminarnog podsloja, a opet dovoljno mala da zahvati viskozni podsloj graničnog sloja.



Slika 15: Izgled pravilne mreže u okolini aeroprofila

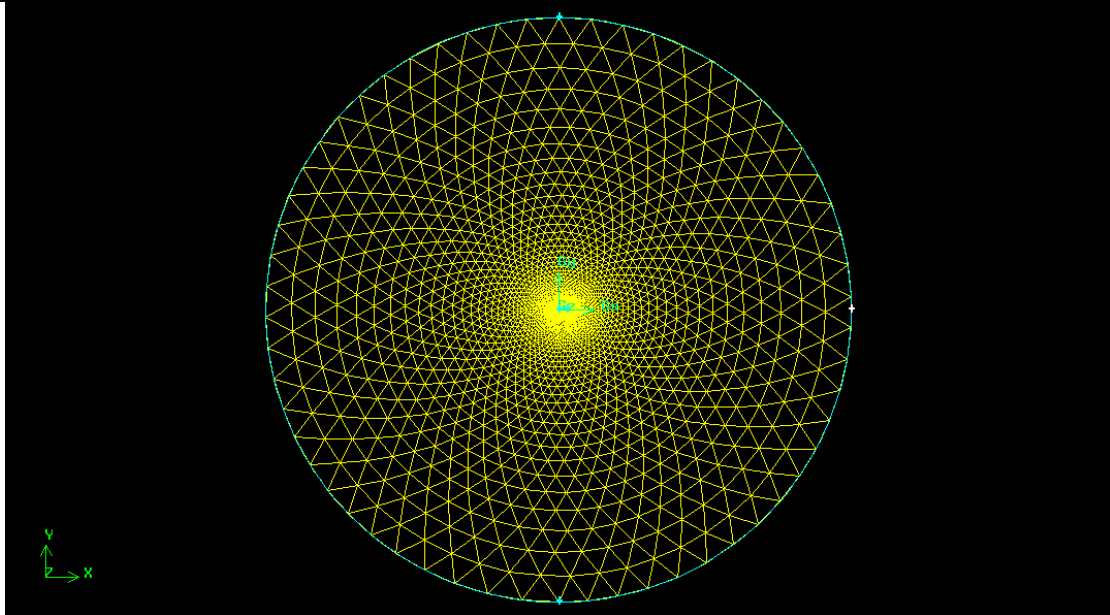


**Slika 16: Gusta, pravilna mreža u blizini vrha aeroprofila**

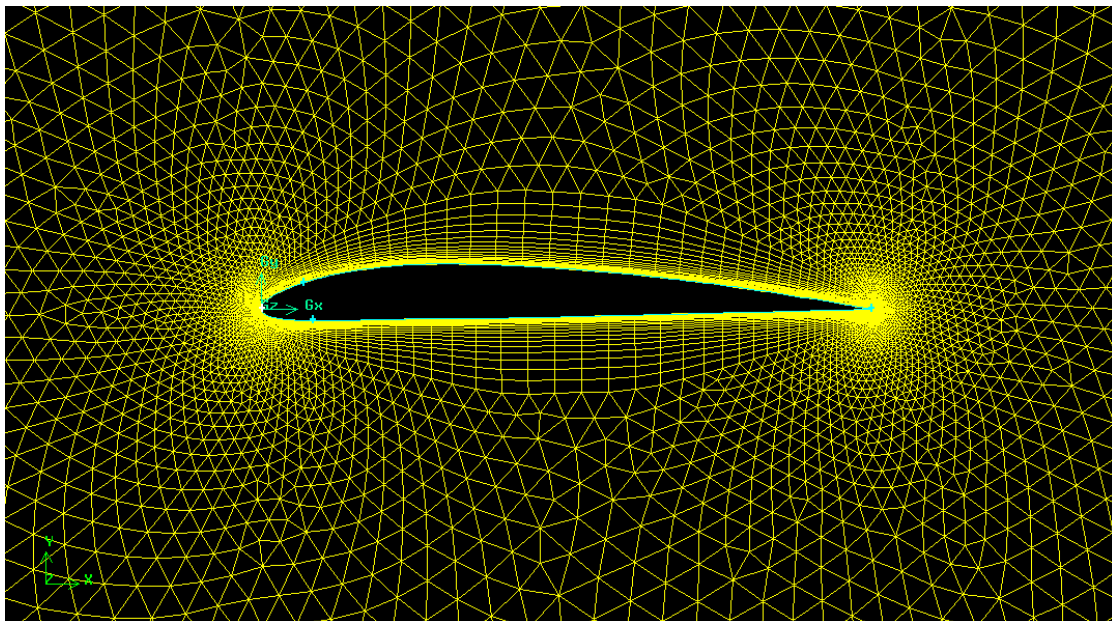


**Slika 17: Pravilna zaobljena mreža u blizini stražnjeg kraja aeroprofila**

Nakon definiranja pravilne mreže u blizini aeroprofila potrebno je još definirati nepravilnu mrežu koja će pokriti ostatak područja strujanja. Da bi se uštedilo na vremenu računanja poželjno je da veličina elemenata raste sa udaljavanjem od aeroprofila, pošto se time značajno smanjuje broj elemenata u proračunskom modelu.



**Slika 18:** Slika cijele domene sa vidljivim povećanjem veličine elemenata prema rubu



**Slika 19:** Slika rasta veličine elemenata s vidljivo gušćom podjelom u blizini vrha i kraja aeroprofila

Nakon definiranja mreže u Gambitu još jedino preostaje definiranje rubnih uvjeta i područja toka fluida pomoću odgovarajućeg sučelja u Gambitu. Kako je prethodno spomenuto, potrebno je definirati ulaz i izlaz toka fluida. Osim toga, površinu aeroprofila se mora definirati kao rubni uvjet 'zida', tj. kao za vodu nepropusnu površinu, te je nužno

---

naznačiti da kroz domenu struji fluid. Time je predprocesorski dio posla završen i može se krenuti na simuliranje toka fluida u Fluent programskom paketu.

#### 4.1.3. Simuliranje toka fluida u Fluent-u

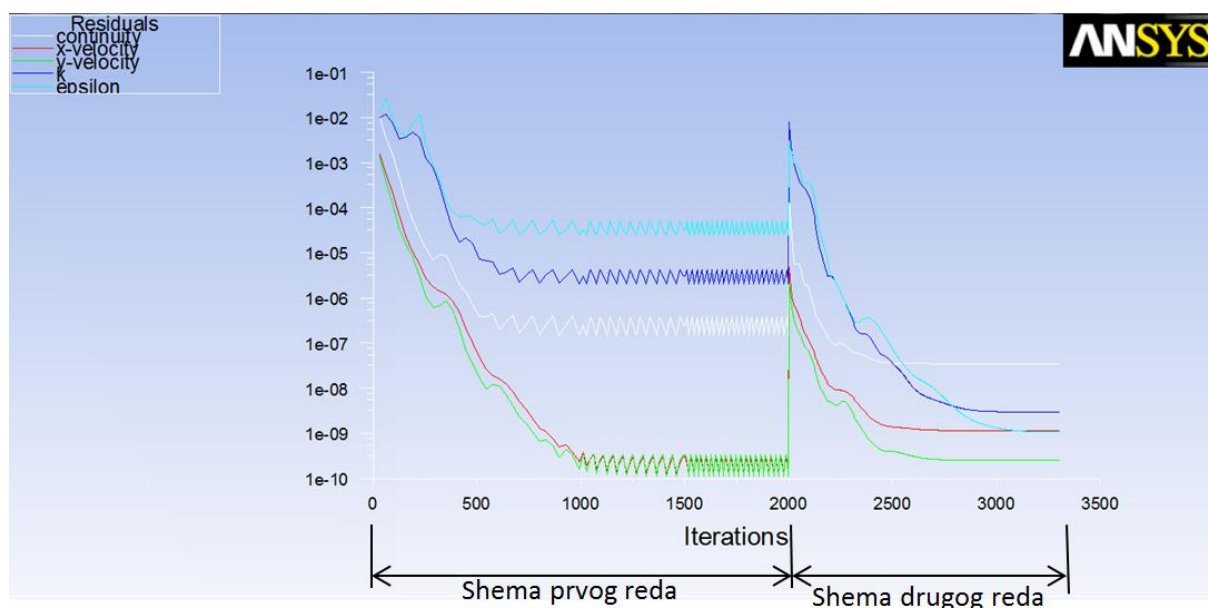
Simuliranje toka fluida započinje učitavanjem prethodno napravljene mreže u Fluent. Nakon toga potrebno je definirati 'slučaj' (eng. case), tj. sve uvjete koji vladaju u području proračuna. Kako je prethodno spomenuto, za simuliranje turbulentnog strujanja fluida koristi se  $k$ - $\varepsilon$  model turbulencije, i za njega treba definirati pripadne vrijednosti traženih konstanti  $k$  (kinetičke energije turbulencije) i  $\varepsilon$  (brzine disipacije te energije). Pravilno pretpostavljanje takvih apstraktnih konstanti je jako teško, pogotovo za opstrujavanja fluida oko tijela, tj. za vanjske tokove. Fluent, međutim, nudi i drugi način definiranja turbulencije- preko intenziteta turbulencije (eng. Turbulence intensity) i tipične duljine turbulencije (eng. Turbulent length scale). Intenzitet turbulencije se izražava u postocima i označava koliko posto energije toka fluida je sadržano u turbulenciji, a tipična duljina turbulencije se izražava u metrima i označava koliko položaj čestica fluida u prosjeku varira okomito na tok strujanja, tj. drugim riječima koliko je turbulencija izražena. U slučaju ovih proračuna odabrane su vrijednosti intenziteta turbulencije 1% i tipične duljine turbulencije 0.001 m.

Što se tiče odabira vrijednosti ulazne brzine fluida, već je napomenuto pri proračunu dimenzija turbine da se za određivanje koeficijenata aeroprofila koristi srednja brzina strujanja fluida  $w_{\infty,i}$ . Razlog tomu je u činjenici da i brzina nastrojavanja vode na aeroprofil utječe na vrijednosti aerodinamičkih koeficijenata uzgona i otpora, i to nelinearno. Proračun aerodinamičkih koeficijenata uzgona i otpora mogao se provoditi i sa fiksnom vrijednošću brzine, ali takvi proračuni nebi imali previše smisla. Kako je prethodno objašnjeno, brzina kojom fluid nastrojava na lopaticu je relativna brzina, i ona se očito povećava pri udaljavanju od glavine turbine pošto se njena obodna komponenta povećava. Dakle, bilo bi besmisleno simulirati opstrujavanje vanjskog presjeka lopatice sa relativnom brzinom glavninskog presjeka, pošto su brzine na tim presjecima očito drukčije. Potrebno je dobiti relevantne podatke o promjeni aerodinamičkih koeficijenata u ovisnosti o napadnom kutu, s obzirom na njima pripadnu relativnu brzinu nastrojavanja, kako bi se na temelju toga dobio uvid o utjecaju napadnog kuta na stupanj iskoristivosti turbine.

Nakon unošenja svih potrebnih parametara za definiranje računalne simulacije preostaje još samo odlučiti kakav rješavač će se koristiti. Iskustvo pokazuje da sheme drugog reda točnosti, iako imaju općenito bržu konvergenciju ka rješenju i bolju točnost, znaju



ponekad divergirati u samom početku simulacije, pa je za silmuliranje najbolje koristiti shemu prvog reda do dobivanja određenog rješenja, a zatim na temelju tog rješenja pokrenuti shemu drugog reda točnosti, te tako dobiti korigirano, točnije rješenje. Broj iteracija potreban za dobivanje konvergirano rješenja sa shemom prvog reda je obično oko 500-1000 iteracija, no ponekad zna biti i par tisuća. Shema drugog reda pokazuje bržu tendenciju konvergencije, ali ona ionako kreće od jako približnog rješenja, pa posljedično brže konvergira.



Slika 20: Tipičan dijagram konvergencije reziduala

#### 4.1.4. Dijagrami koeficijenata ugona i otpora

Sile otpora i uzgona najčešće se definiraju pomoću bezdimenzijskih koeficijenata otpora (koeficijent sile u smjeru neporemećene struje) i uzgona (koeficijent sile okomite na neporemećenu struju):

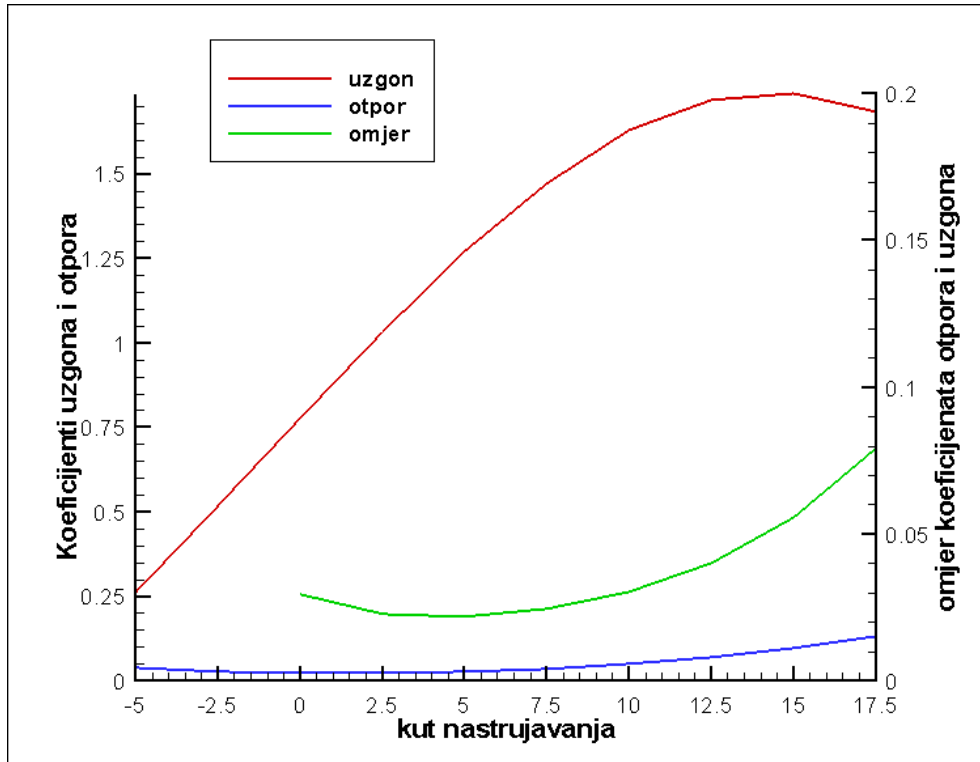
$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho \cdot v_\infty^2 \cdot A_D}, \quad (66)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot A_L}. \quad (67)$$

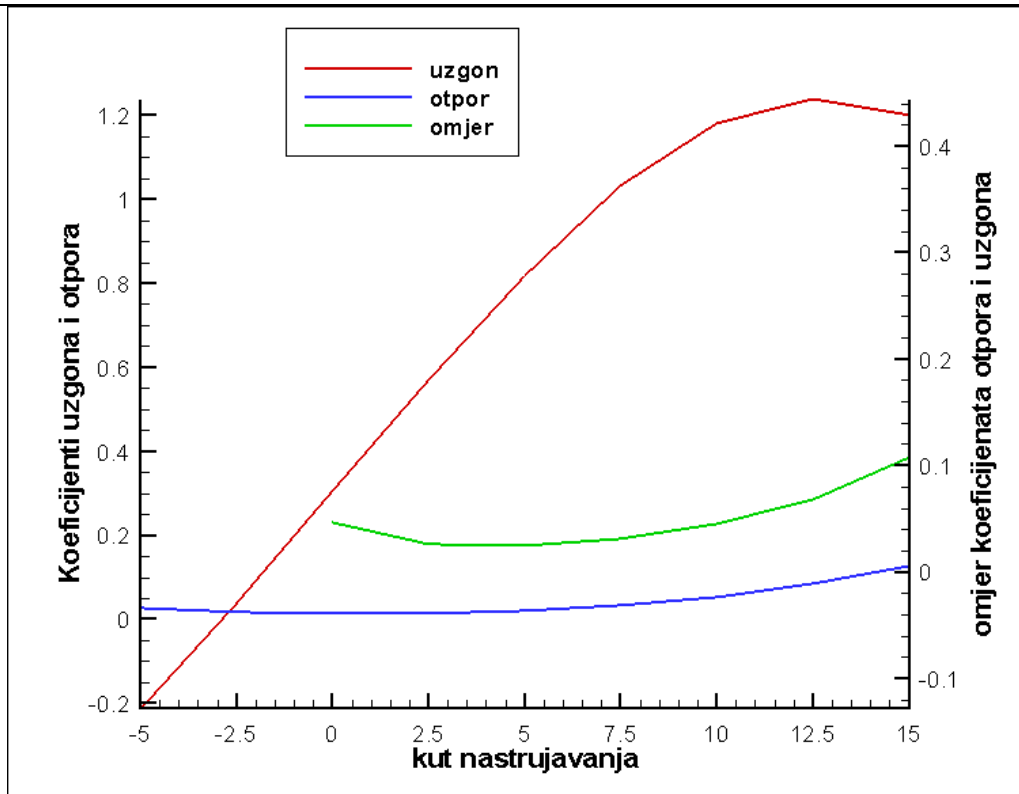
Ovi izrazi povezuju sile uzgona i otpora s dinamičkim tlakom fluida koji struji oko tijela. Za referentne se površine  $A_D$  i  $A_L$  najčešće uzima jednakak vrijednost, iznosa ploštine

projekcije tijela gledanog iz tlocrta. Veličina  $v_\infty$  se definira kao brzina neporemećenog strujanja. U slučaju ovih simulacija to je brzina  $w_{\infty,i}$ .

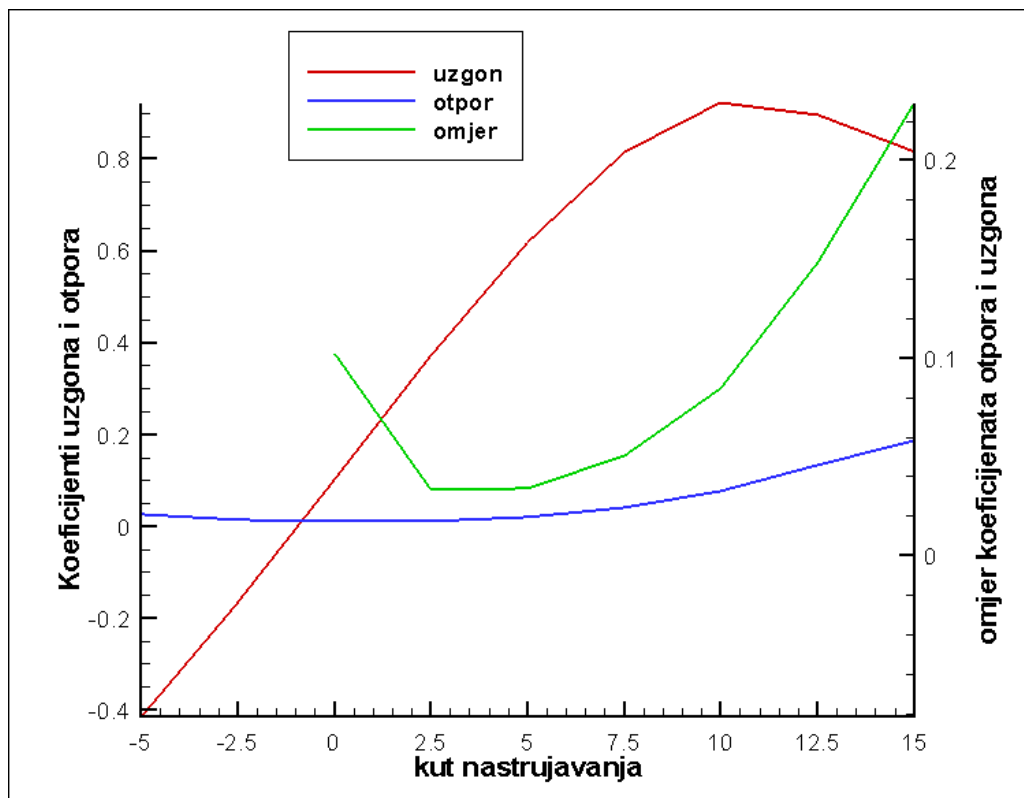
Slike koeficijenata uzgona i otpora te njihovog omjera za svih pet promatranih profila:



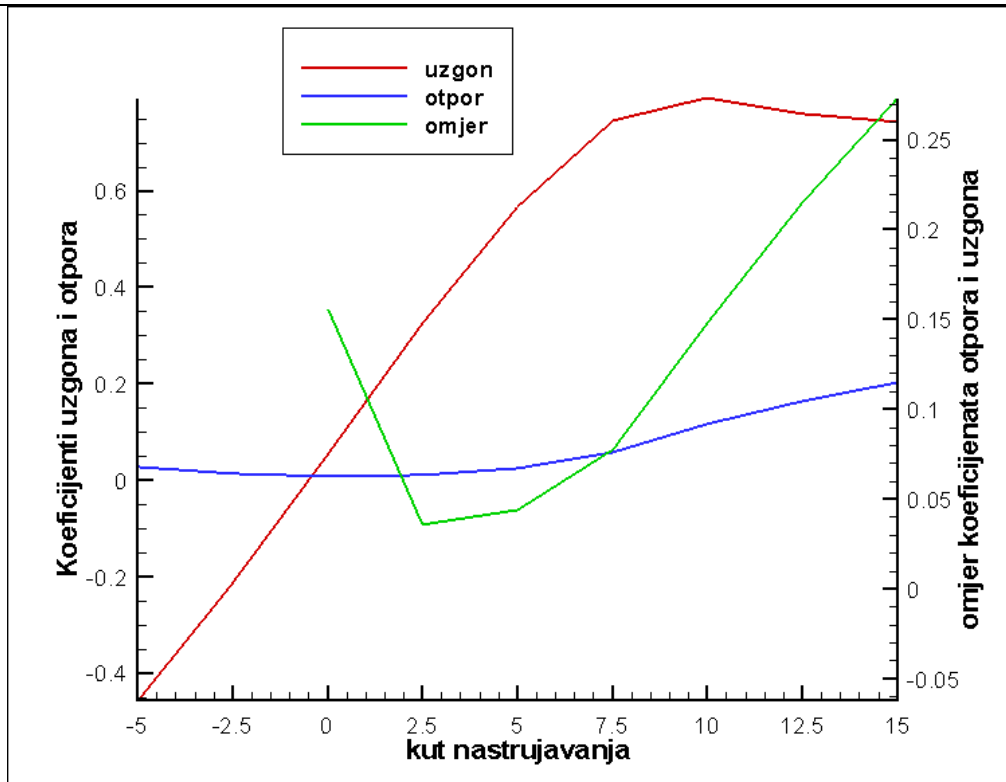
Slika 21: Tražene vrijednosti za profil G



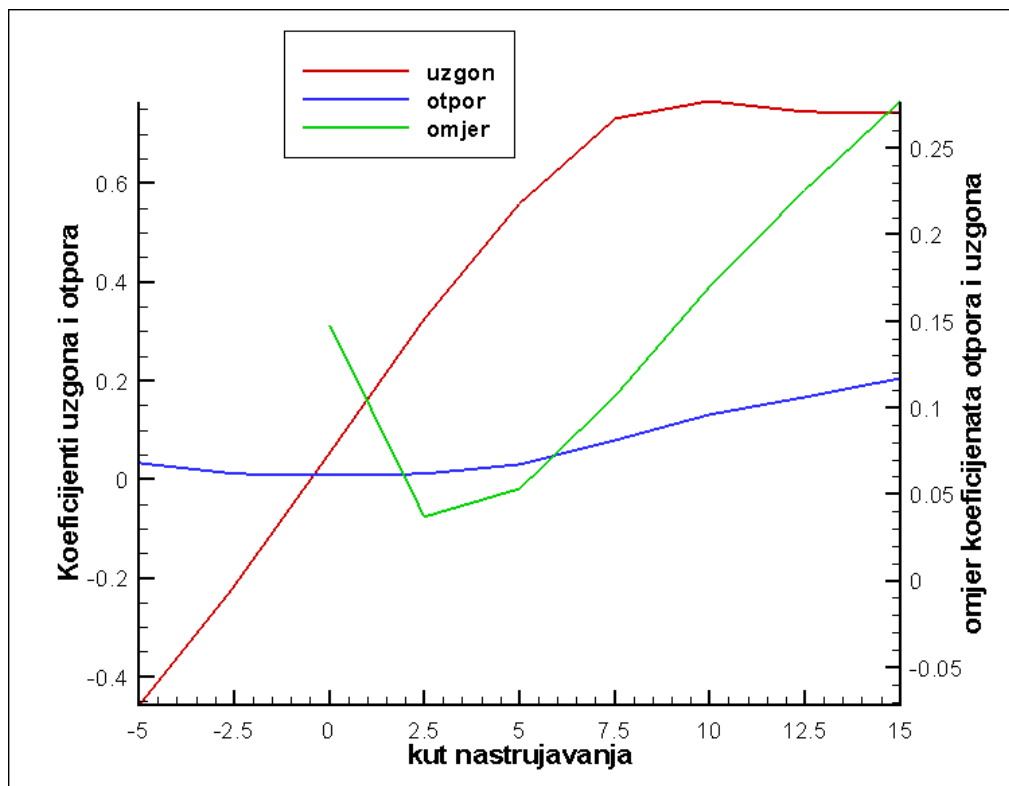
Slika 22: Tražene vrijednosti za profil I



Slika 23: Tražene vrijednosti za profil II



Slika 24: Tražene vrijednosti za profil III



Slika 25: Tražene vrijednosti za profil v

Kako je vidljivo iz prethodnih slika, koeficijenti otpora i uzgona imaju slične promjene s obzirom na kut nagiba bez obzira na različite brzine nastrojavanja fluida na njih. Također, imaju i otprilike slične iznose. Uzme li se u obzir, međutim, da je u nazivniku omjera koji definira te koeficijente relativna brzina nastrojavanja koja odgovara svakom od tih profila, lako je zaključiti da su stvarnosti sile uzgona i otpora puno veće na, primjerice, vanjskom presjeku nego na glavinskom. To je logično, pošto je brzina nastrojavanja fluida veća, što znači više kinetičke energije, pa fluid jačom silom pritišće aeroprofil.

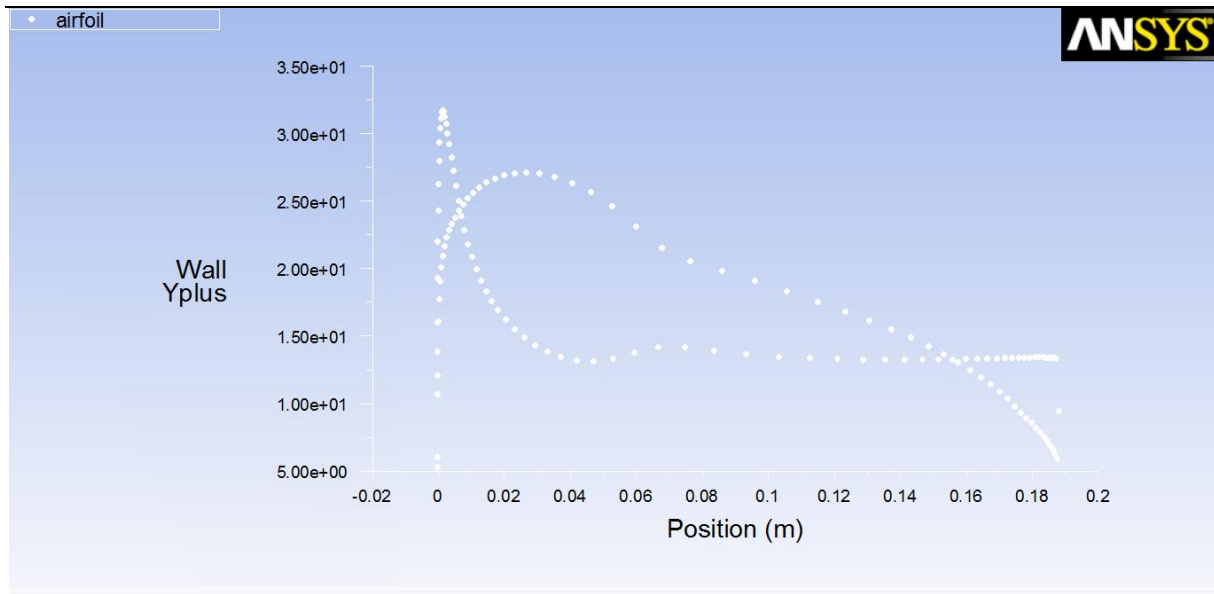
Što se tiče krivulja promjene koeficijenata uzgona i otpora, one se potpuno poklapaju svojim izgledom sa eksperimentalno dobivenim krivuljama. Pritom vrijedi primjetiti da vrijednost koeficijenata uzgona ima svoj maksimum negdje u rasponu 15-20 stupnjeva, a opada u oba smjera u odnosu na tu vrijednost. Vrijednosti koeficijenata otpora imaju svoj minimum negdje oko nultog kuta iz razloga što se odstupanjem od tog kuta povećava otpor oblika tijela koji značajno utječe na ukupni otpor.

Vrijednost omjera koeficijenata otpora i uzgona prate uvijek isti uzorak: prvo pada do svog minimuma, zatim ponovo raste. Bitno je primjetiti da minimum vrijednosti tog omjera nije pri maksimalnoj vrijednosti uzgona, dakle oko 15 -20 stupnjeva, već oko 2.5-5 stupnjeva, iz razloga što iznad tih vrijednosti značajno raste i otpor.

Minimum vrijednosti omjera sile otpora i uzgonske sile označava idealnu iskoristivost toka fluida, te npr. komercijalni zrakoplovi na dugim letovima uvijek pokušavaju što bolje pogoditi kut leta pri kojem imaju takav omjer sila. Isti princip vrijedi i za turbine, ali tok fluida u njima naget je u odnosu na horizontalu pa ove rezultate ipak treba uzeti sa zadržkom, jer optimalan omjer sila gledano iz smjera nastrojavanja fluida ne znači optimalan omjer obodne i aksijalne sile na turbinu.

#### **4.1.5. Komentar točnosti rješenja**

Dobivanje numeričke konvergencije u računalnoj simulaciji nije nužna garancija točnosti rješenja. Prethodno je objašnjeno da bi visina prvog elementa uz aeroprofil trebala odgovarati vrijednosti bezdimenzijske visine  $y^+$  od 30-300. Međutim, pošto pri kreiranju mreže nije poznata slika strujanja oko aeroprofila (jer je to rješenje proračuna), nije moguće znati kolika točno treba biti visina prvog elementa. Jedino što je moguće je napraviti je dobru pretpostavku. Tu pretpostavku je po dobivanju rješenja potrebno provjeriti, tj. očitati iz Fluent-a dijagrame rasporeda vrijednosti  $y^+$  na aeroprofilu.



**Slika 26: tipični dijagram rasporeda vrijednosti  $y^+$  na gornjem i donjem rubu aeroprofila**

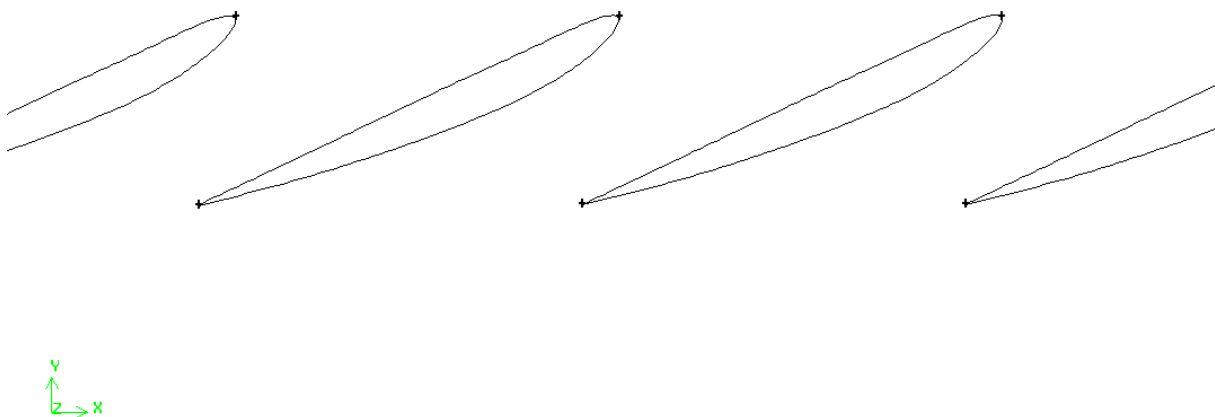
Kako je vidljivo iz gornje slike, graf vrijednosti  $y^+$  ima logičan raspored po konturi aeroprofila. Vrijednost  $y^+$  je nula na samom početku, gdje se nalazi zaustavna točka, jer je vrijednost brzine u njoj nula. Nakon toga, vrijednosti skaču jer dolazi do ubrzanja fluida zbog porasta poprečnog presjeka te zatim padaju jer opet dolazi do suženja. Što se tiče samih vrijednosti  $y^+$ , one ne zadovoljavaju baš najbolje prethodni kriterij, jer se nalaze u rasponu vrijednosti 15-25, a ne iznad 30, koliko je potrebno da bi bili sigurni da zidne funkcije pravilno modeliraju viskozni podsloj, ergo i vrijednosti fizikalnih veličina na samoj površini. Ustvari, iz veličine  $y^+$  da se zaključiti da prvi sloj elemenata ne upada u viskozni, nego u vrh prijelaznog podsloja graničnog sloja.

Potrebno je provesti provjeru rezultata na drugi način. Pojava ovakvih problema pri strujanju fluida u blizini stijenke je tipična, pa u sklopu Fluent-a već postoji rješenje za takve dileme u obliku naprednih zidnih funkcija (scalable wall functions, enhanced wall treatment itd.), koje bolje rješavaju problem zida kada veličina prvog elementa uz zid nije idealno pogodena. Nakon postavljanja takvih simulacija i provjere rezultata, utvrđeno je da se oni mijenjaju u odnosu na početne za nekoliko promila. Objašnjenje za to leži u činjenici da se sile na tijelo sastoje od dva dijela: sile zbog oblika i sile zbog viskoznosti. Koliko dobro je razrješeno područje oko zida ne utječe značajno na sile oblika, nego na viskozne sile. U slučaju ovih simulacija, relevantni parametri strujanja (brzina nastrujavanja, hrapavost zida itd.) su takvi da su sile oblika puno veće od viskoznih sila, pa greške u vrijednostima viskoznih sila jako malo utječu na konačni rezultat.

## 4.2. Simulacija strujanja oko lopatica u turbini

### 4.2.1. Definiranje domene simulacije

Simuliranje toka beskonačne struje fluida oko aeroprofila nije fizikalno identično simuliranju strujanja fluida u turbini. Da bi se pravilno definiralo i simuliralo takav tok treba pravilno simulirati međusoban utjecaj koji lopatice imaju jedna na drugu. Ako bi se presjekle lopatice rotora po cilindričnom presjeku, te obod tog cilindra razvio u ravninu, dobilo bi se sliku tzv. 'rešetke' rotora:

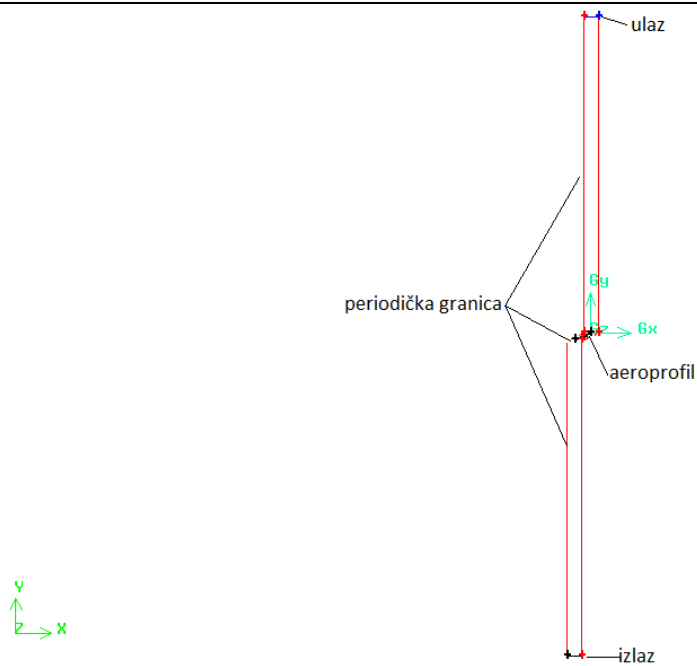


**Slika 27: rešetka rotora sa periodički ponavljajućim aeroprofilima**

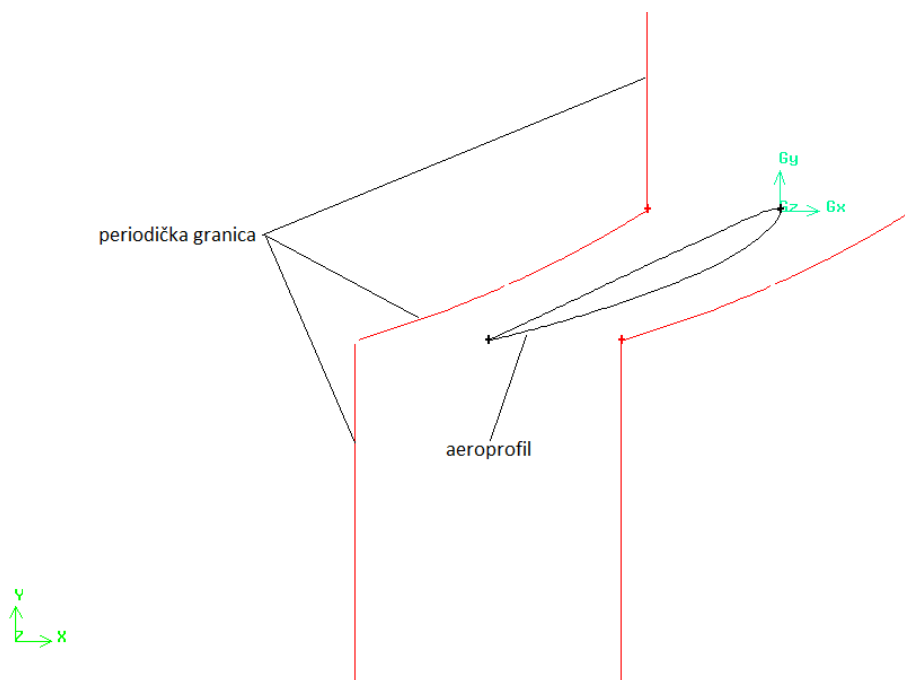
Pojam rešetke označava činjenicu da se strujanje fluida oko lopatica periodički ponavlja, te također da lopatice imaju međusoban utecaj na tok fluida oko njih. U ovom slučaju su aeroprofil zakrenuti za određeni kut u odnosu na horizontalu, i to tako da što manje remete ulazni tok fluida, kako je definirano u poglavlju 3.3.

Nadalje, kako se turbina stalno vrti, a ne miruje, ovaj presjek bi se u stacionarnom toku stalno, beskonačno ponavljao, gledano iz neke fiksne perspektive na obodu cilindričnog presjeka.

Postavlja se pitanje kako simulirati ovakvo strujanje, kada se ono beskonačno ponavlja u širinu? Odgovor je u periodičkim rubnim uvjetima.



**Slika 28: domena strujanja fluida sa periodičkim rubnim uvjetima**



**Slika 29: Bliži prikaz područja domene oko aeroprofila**

Kako je vidljivo iz prethodnih slika, za domenu je uzeto područje koje se sastoji od tri dijela: ulaznog kanala, područja u blizini lopatice, te izlaznog kanala. Područja ulaznog i izlaznog kanala su izdužena kako bi se eliminirao utjecaj ulaza i izlaza na tok fluida oko lopatica turbine.

Udaljenost između dvaju lopatica jednaka je jednoj četvrtini opsega cilindričnog presjeka, tj. jednaka je prethodno izračunatoj vrijednosti  $t_i$ . Područje u blizini lopatice je



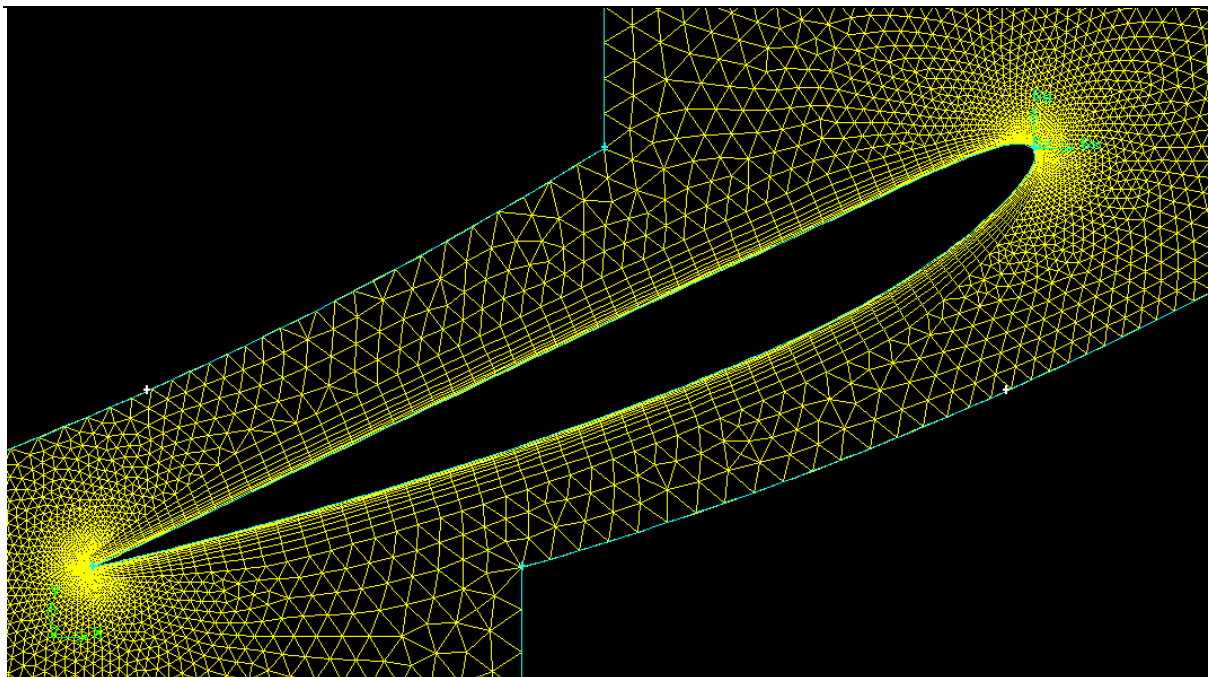
definirano na sljedeći način: za orijentaciju su definirane dvije točke za  $t/2$  udaljene od vrha i kraja aeroprofila u suprotnim smjerovima. Na jednoj strani je kroz te dvije točke provučen blago zaobljeni kružni luk, te je taj luk zatim kopiran tako da njegova kopija prolazi kroz druge dvije točke na drugoj strani lopatice. Na temelju toga povučena su po dva vertikalna pravca za definiranje ulaznog i izlaznog kanala. Lijevi i desni rub područja su, dakle, geometrijski identični i sastavljeni od dva pravca i kružnog luka. To je prvi uvjet periodičkih uvjeta- geometrija periodičkih granica područja mora biti identična. Drugi uvjet je da mreža koja se definira na tim rubovima mora biti identična za oba ruba. To se u Gambit-u postiže 'povezivanjem' rubova. Nakon povezivanja mreže dvaju povezanih rubova će biti vezane tako da promjene na jednoj automatski znače identičnu promjenu na drugoj. Fizikalna periodičnost se u terminima diskretiziranog područja toka fluida postiže na način da se definira veza između pripadnih elemenata na oba ruba, te se oni međusobno tretiraju kao da su susjedni elementi, povezani preko svojih stranica na rubu mreže.

Periodičkim rubnim uvjetima se ustvari stvori iluzija ponavljanja domene strujanja na način da se spoji jedan njen ponavljajući kraj sa drugim. Ta iluzija, međutim, daje točna rješenja.

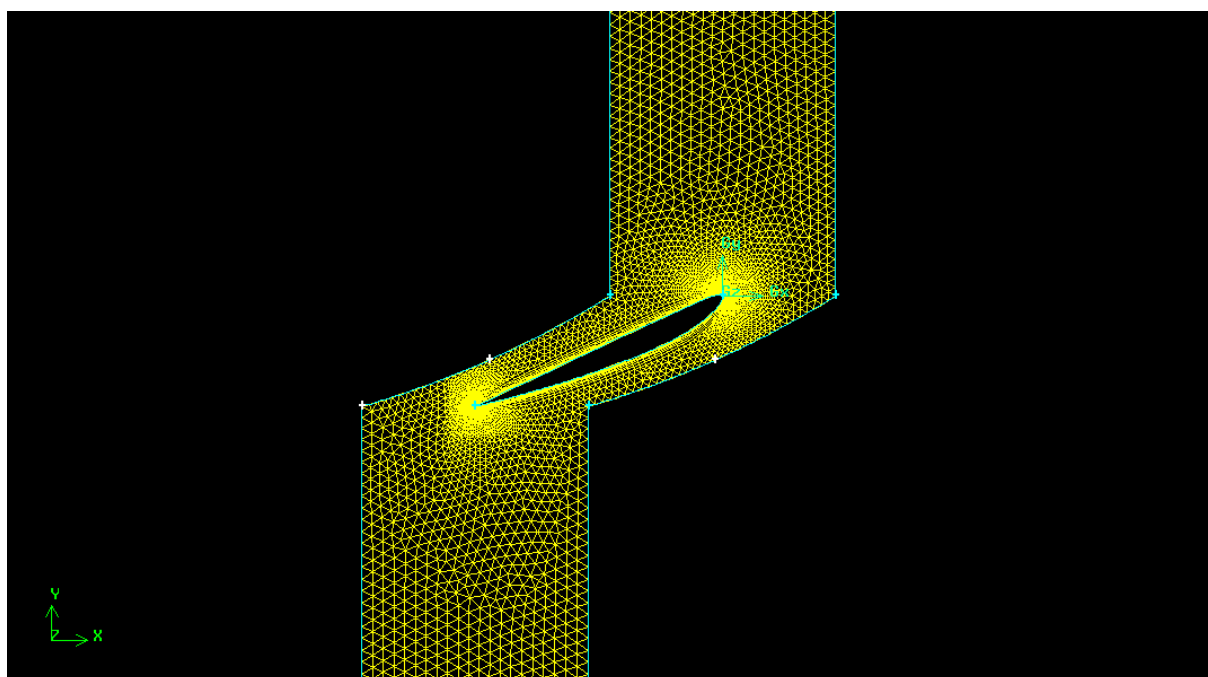
Na kraju se definiraju bridovi za ulaz i izlaz fluida, te je time domena strujanja fluida potpuno definirana.

#### **4.2.2. Definiranje mreže za simuliranje toka fluida**

Sljedeći korak prije numeričkog rješavanja je kreiranje mreže. Pritom će se koristiti isti princip kao i pri kreiranju mreže za dobivanje aerodinamičkih koeficijenata: Gusta, pravilna mreža u blizini aeroprofila te uz prednji i stražnji kraj; postepeno povećavajuća nepravilna mreža za ostatak domene.



**Slika 30: Mreža u blizini lopatice**



**Slika 31: Povećavanje mreže prema rubu domene**

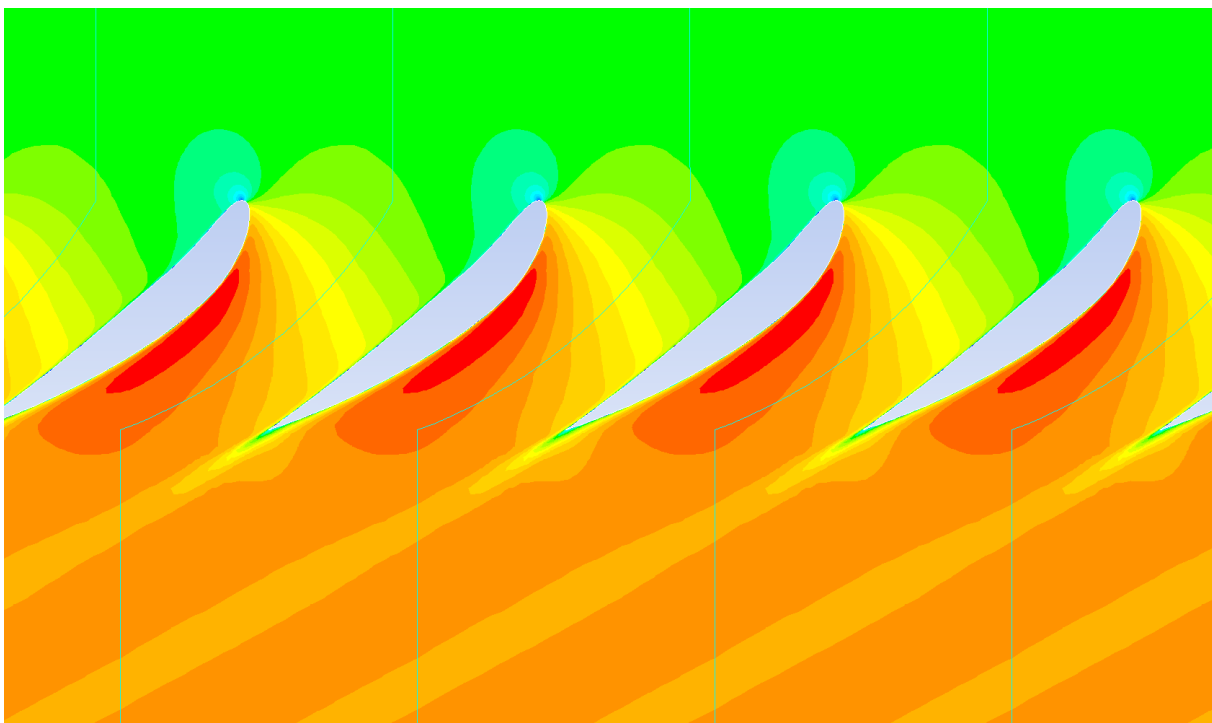
Na kraju se još samo definiraju ulaz, izlaz, periodičke granice i područje toka fluida u pripadnom sučelju Gambit-a te je mreža spremna za simuliranje.

#### 4.2.3. Simuliranje toka fluida u Fluent-u

Simuliranja toka fluida oko lopatica u rešetci vrše se na isti način u Fluent-u kao i prethodni proračuni, s jedinom razlikom da se za ulaznu brzinu koristi relativna brzina nastrujavanja fluida na lopaticu  $w_1$  pod kutom  $\beta_1$ , a ne  $w_\infty$ . Sve ostale postavke ostaju iste.

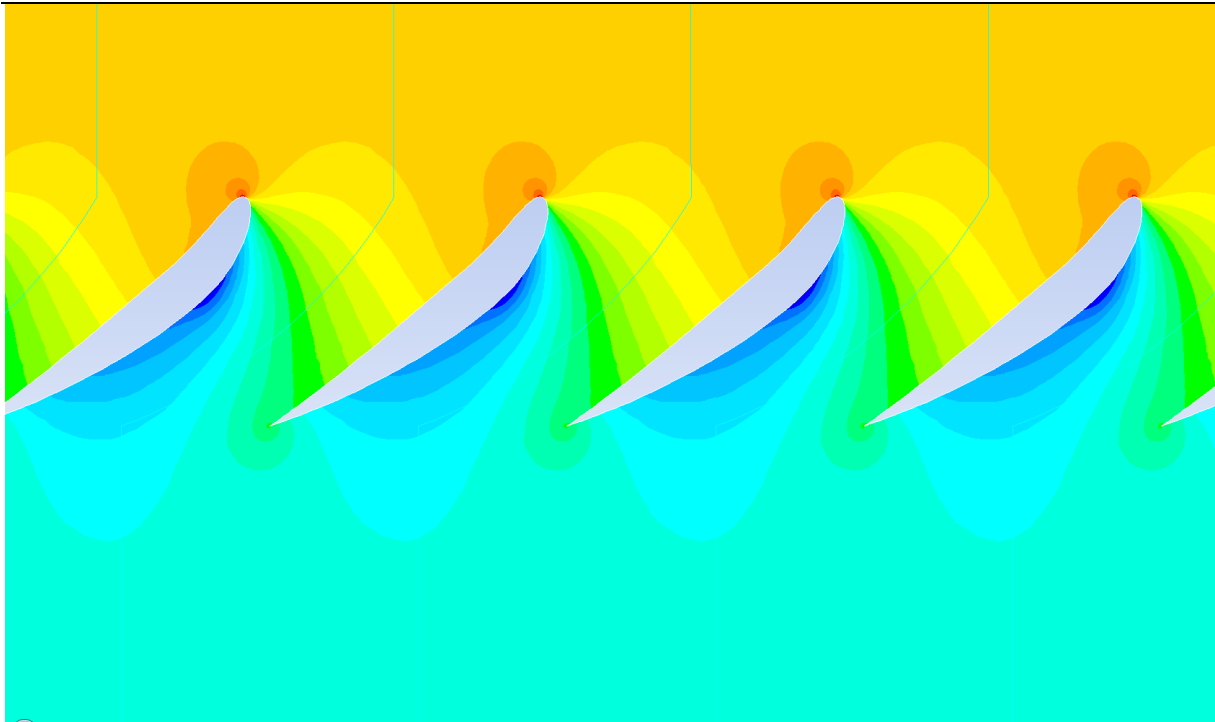
#### 4.2.4. Rezultati simulacija toka kroz rešetku rotora

Simulacije nastrujavanja fluida na rešetku turbine prate isti uzorak pri konvergenciji kao i prethodne simulacije. Slika strujanja potvrđuje pretpostavku da će periodični rubni uvjeti pravilno simulirati međusobni utjecaj aeroprofila, kako je vidljivo na sljedećoj slici:



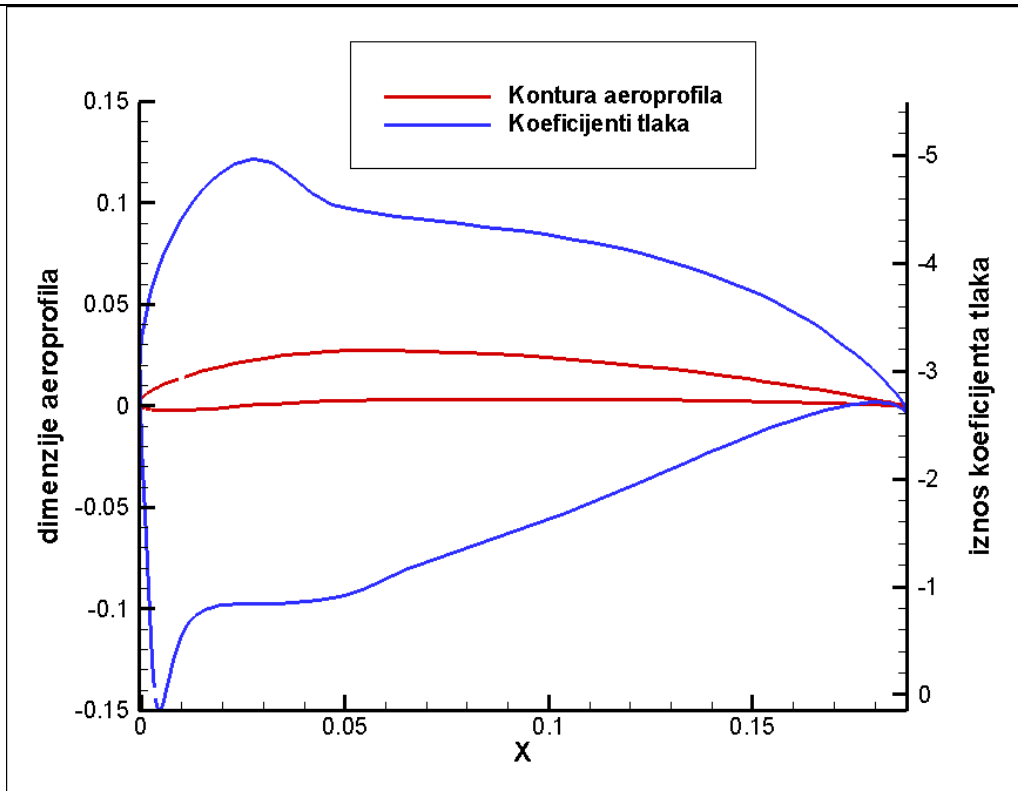
**Slika 32: Polje intenziteta apsolutne brzine**

Fluid iza aeroprofila ostavlja trag, i taj se trag ponavlja gledajući prema izlazu, ali sve slabiji zbog difuzije. Jasno se na vrhu profila vidi točka zastoja, gdje je brzina strujanja nula. Također je vidljivo da prisutnost lopatica ubrzava tok fluida u prostoru između njih, što se događa zbog sužavanja presjeka kroz koji fluid može strujati.

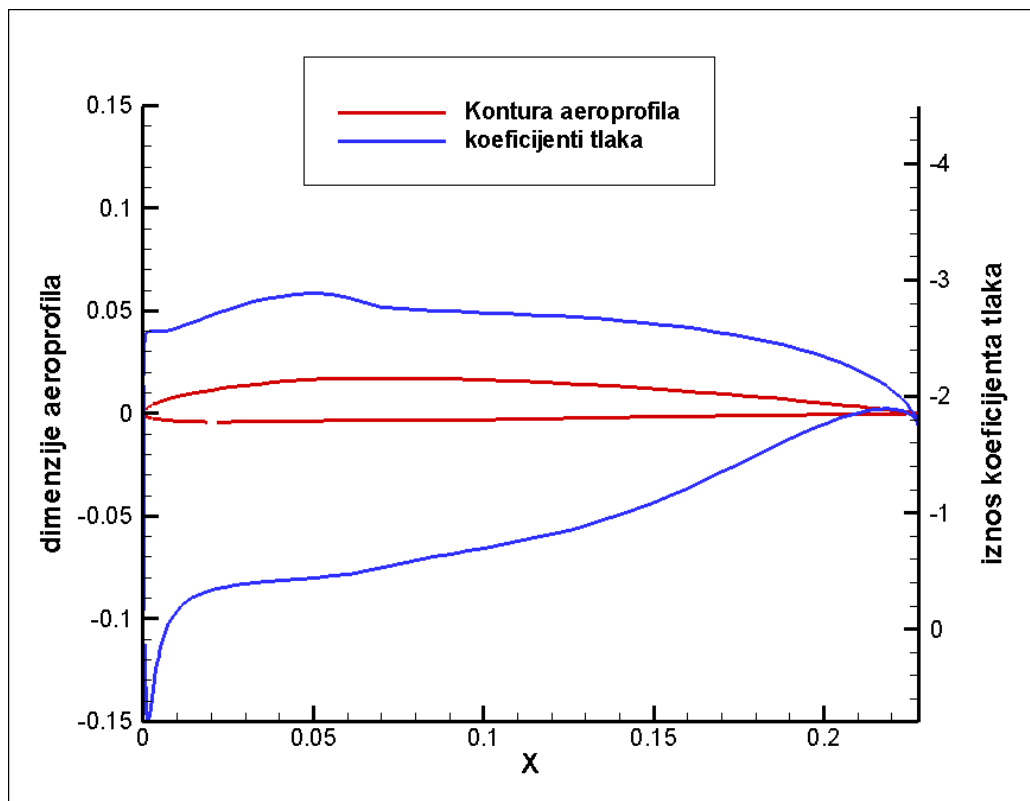


**Slika 33: Polje tlaka**

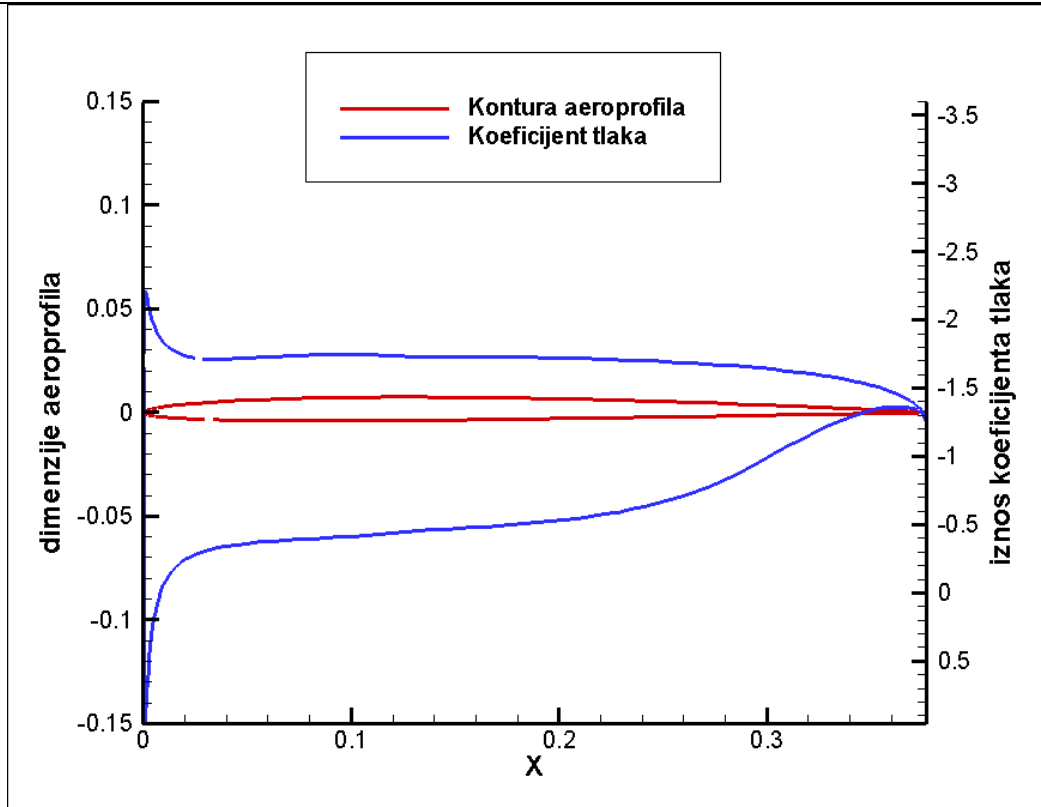
Iz slike polja tlaka se također vidi točka zastoja gdje tlak maksimalan, a brzina minimalna. Osim toga, vidljivo je i da turbina stvara pad tlaka u toku fluida. Polje tlaka može se prikazati na bolji način preko rasporeda koeficijenata tlaka na lopatici, kao na sljedećim slikama:



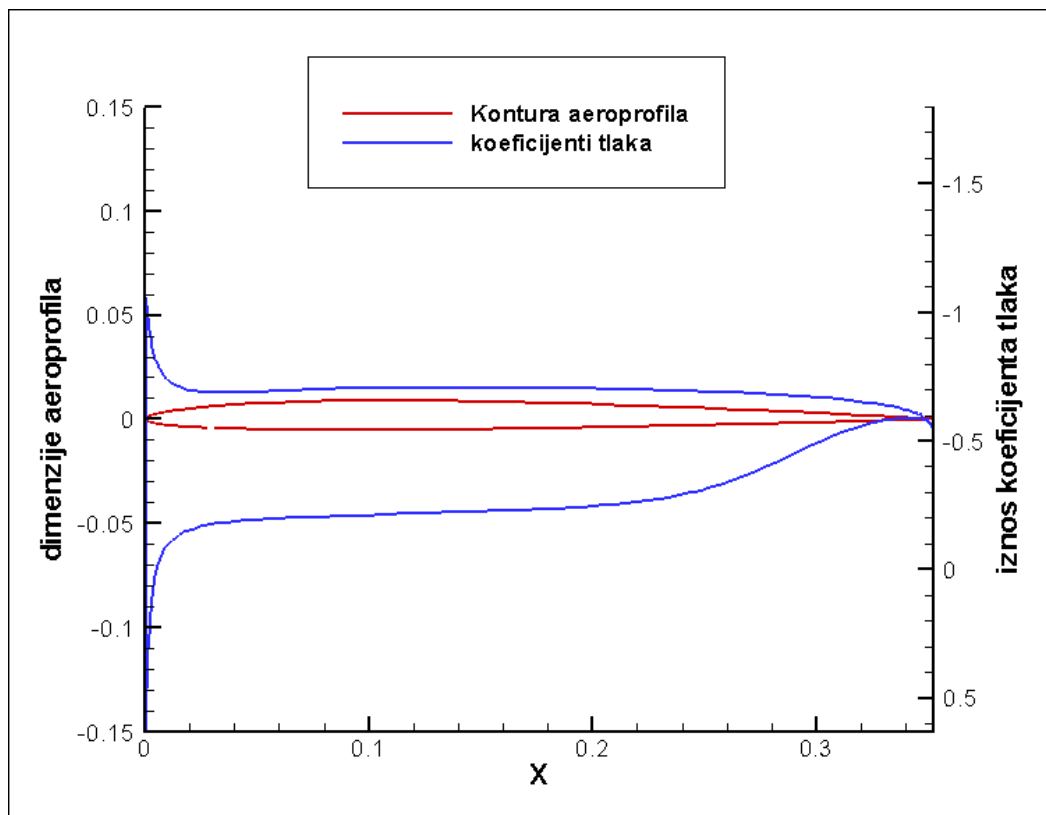
Slika 34: Koeficijent tlaka na glavinskom presjeku



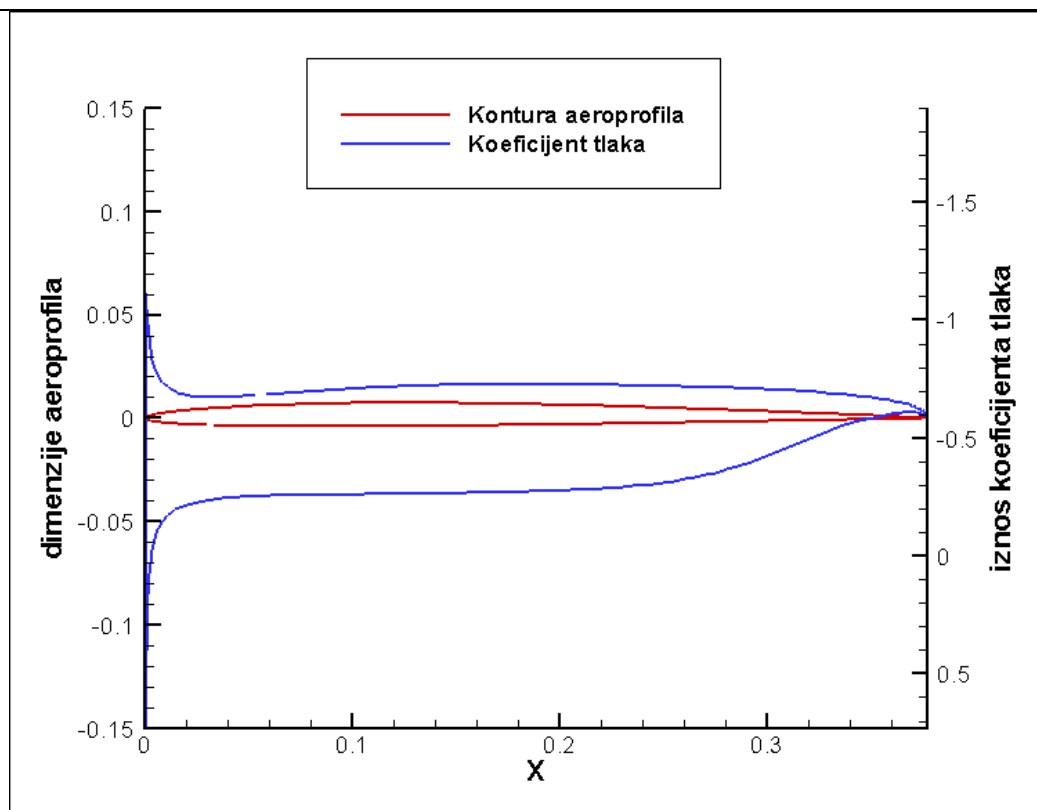
Slika 35: Koeficijent tlaka na presjeku I



Slika 36: Koeficijent tlaka na presjeku II



Slika 37: Koeficijent tlaka na presjeku III



**Slika 38: Koeficijent tlaka na vanjskom presjeku**

Kao što je vidljivo iz slika, koeficijenti tlaka su najveći u zaustavnoj točki, koja se obično nalazi na početku profila. Općenito gledano, tlak na donjem rubu je veći nego na gornjem, iako su oba obično manja od ulaznog tlaka, pa je vidljivo da ovakav položaj aeroprofila zasigurno stvara nekakvu pozitivnu vrijednost obodne sile, koja pokreće turbinu, i aksijalne sile, koja turbinu opterećuje u aksijanom smjeru. Vrijednosti tih sila po metru dužine poprečnog presjeka, za zadanih pet proračuna, nalaze se u sljedećoj tablici:

profil	aksijalna sila [N/m]	obodna sila [N/m]
g	799,05	635,87
I	1999,71	827,94
II	5138,98	1231,64
III	6999,52	1293,08
v	7062,28	1170,52

Kako je vidljivo iz tablice, vrijednosti obiju sila imaju tendenciju porasta sa porastom udaljenosti od centra turbine. Porast aksijalne sile, međutim, puno je veći od porasta obodne

sile. To nije kontradiktorno prethodnim vrijednostima sila otpora i uzgona pri simuliranju toka oko aeroprofila, jer se tamo promatralo iznose sila u odnosu na smjer strujanja, a ovdje se promatraju obodna i aksijalna sila. Logično je da aksijalna sila raste prema vanjskom profilu, jer je taj profil zakrenut za veći kut u odnosu na aksijalni smjer od npr. glavinskog profila, pa sila kojom fluid pritišće vanjski profil ima veću komponentu u aksijanom nego u obodnom smjeru. Taj zakret toliko utječe na vrijednost obodne sile da je čak vrijednost te sile manja u vanjskom presjeku nego u presjeku III, unatoč većoj brzini nastrojavanja fluida na vanjski profil.

Sada je potrebno otprilike izračunati približnu vrijednost snage koju rotor prenosi na vratilo. Iz pet proračuna izvučene su vrijednosti sila po dubini presjeka, pa je potrebno naći osrednju silu po dubini presjeka, koju zatim treba pomnožiti sa duljinom lopatice, dakle razlikom vanjskog i unutarnjeg radijusa, da bi se dobila okvirna vrijednost sile koja djeluje na jednu lopaticu turbine:

$$F_s = \frac{F_g \cdot r_g + F_I \cdot r_I + F_{II} \cdot r_{II} + F_{III} \cdot r_{III} + F_v \cdot r_v}{r_g + r_I + r_{II} + r_{III} + r_v} = 1088,94 \text{ N/m} \quad (70)$$

$$F_l = F_s \cdot (r_v - r_g) = 1088,94 \cdot (0,2 - 0,1) = 108,894 \text{ N} \quad (71)$$

Sila koju proizvode četiri lopatice u turbini četiri puta je veća:

$$F_u = 4 \cdot F_l = 4 \cdot 108,894 = 435,57 \text{ N} \quad (72)$$

Za dobiti vrijednost snage potrebno je tu silu pomnožiti sa osrednjom obodnom brzinom, koja se uzima kao obodna brzina na srednjem radijusu:

$$v_s = \frac{2 \cdot \Pi \cdot r_s}{60} \cdot n = \frac{2 \cdot \Pi \cdot 0,15}{60} \cdot 500 = 7,8539 \text{ m/s} \quad (73)$$

Približna vrijednost snage koju rotor predaje vratilu je:

$$P_v = F_u \cdot v_s = 412,72 \cdot 7,8539 = 3420,92 \text{ W} \quad (74)$$



## 5. ZAKLJUČAK

Tema ovog rada bila je dobivanje početnog osvrta na kompleksan problem konstruiranja rotora turbine, te konstruiranje i računalno simuliranje rotora turbine za zadane ulazne podatke o toku fluida. Iako je taj osvrt opširan, njega bi se svakako dalo doradivati na različite načine ispitivanjem utjecaja različitih konstrukcijskih parametara na snagu koju turbina proizvede.

Aerodinamički koeficijenti uzgona i otpora mogu pružiti djelomičan uvid u mogućnosti poboljšanja toka fluida, ali ipak ih treba uzeti sa rezervom jer su računati u odnosu na tok fluida, a ne u odnosu na obodni i aksijalni smjer turbine.

Problem optimizacije rotora turbine nije nimalo jednostavan zbog nelinearnosti u konstrukciji, te velikom broju geometrijskih parametara, koji svi utječu na tok fluida, ali i jedni na druge. Također, treba uzeti i u obzir samu nelinearnost ponašanja fluida pri promjeni vanjskih uvjeta. Simulacije provedene za potrebe ispitivanja konstruirane turbine pokazale su se kao jako koristan alat za provjeravanje konstrukcijskih pretpostavki. Jednostavnim mijenjanjem geometrijskih parametara ili rubnih uvjeta može se dobiti uvid u odnose između različitih veličina ili provjeriti određene pretpostavke koje imamo.

Optimiziranje turbine je, međutim, tema za neki drugi rad u budućnosti. Nadam se da će ovaj rad pružiti solidan temelj za njega, ali i pristojan osvrt na konstruiranje rotora turbine bilo kome koga to zanima.

**LITERATURA**

- [1] Džijan, I.: Računalna dinamika fluida – podloge za predavanja, Zagreb, 2010.
- [2] Mehanika fluida II – što valja zapamtiti, Fakultet strojarstva i brodogranje, Zagreb
- [3] Sorić, J.: Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
- [4] Fluent 6.3 Tutorial Guide, Fluent Inc., Centerra Resouce Park, 2006.
- [5] Gambit modelling guide, Fluent Inc., Centerra Resouce Park, 2007.
- [6] Ira H. Abbott, A. E. von Doenhoff: Theory of wing sections, Dover publications inc.

## **PRILOZI**

### **I. CD-R disk**